UNIVERSITÄT-
GESAMTHOCHSCHULE
SIEGEN

ZESS

Allgemeine Nachrichtentechnik

Prof. Dr.-Ing. O. Loffeld
Uni-GH Siegen

Vorlesung

Inhalte sind ausschließlich für den hochschulinternen Gebrauch bestimmt. Alle Urheberrechte liegen bei den Autoren. Nachdruck und Weitergabe an Dritte zu kommerziellen Zwecken ist nicht gestattet und wird strafrechtlich verfolgt!

© ZESS-PB2 Universität-GH Siegen 12/1999

INHALTSVERZEICHNIS:

1. DETERMINIERTE SIGNALE IN LINEAREN ZEITINVARIANTEN SYSTEMEN 4
1.1. Elementarsignale 5
1.2. System 9
1.3. Lineare zeitinvariante Systeme - LTI (Linear Time Invariant) 13
1.4. Das Faltungsintegral 16
1.4.1. Stoßanregung - Stoßantwort 16
1.4.2. Reaktion des Systems auf beliebige Anregungen 23
1.5. Beispiel zur Berechnung eines Faltungsintegrals 29
1.6. Faltungsalgebra 36
1.7. Diracstoß 41
1.7.1. Gewicht und Linearkombinationen von Diracstößen 47
1.7.2. Siebeigenschaft von Diracstößen 49
1.7.3. Diracstoß und Dehnungsfaktor 50
1.7.4. Verschiebung des Diracstoßes 52
1.7.5. Integration des Diracstoßes 52
1.8. Integration und Differentiation von Signalen 53

2. FOURIER-TRANSFORMATION 60
2.1. Eigenfunktionen von LTI-Systemen 60
2.2. Das Fourier-Integral 63
2.3. Beispiel: Fouriertransformation des Exponentialimpulses 66
2.4. Theoreme der Fouriertransformation 75
2.4.1. Superpositionssatz 75
2.4.2. Ähnlichkeitssatz 77
2.4.3. Verschiebungssatz 78
2.4.4. Differentiationssatz 80
2.4.5. Symmetrietheorem 81
2.4.6. Faltung und Multiplikation 82
2.4.7. Modulationstheorem 82
2.4.8. Nützliche Identitäten 84
2.5. Beispiele zur Anwendung der Theoreme 85
2.5.1. Fouriertransformierte des Rechteckimpulses 85
2.5.2. Fouriertransformation des Dreieckimpulses 87
2.6. Transformation singulärer Signalfunktionen 88
2.6.1. Transformation von Cosinus- und Sinusschwingungen 89
2.6.2. Transformation der Diracstoßfolge 90
2.6.3. Fouriertransformation des Einheitssprunges 95
2.7. Asymptotisches Verhalten von Spektren 97
2.7.1. Methode der stationären Phase 111

3. ABTASTTHEOREME 119
3.1. Abtastung im Zeitbereich 119
3.2. Abtastung im Frequenzbereich 129
3.3. Zeitdiskrete Verarbeitung zeitkontinuierlicher Signale 132
3.3.1. Spektren 133
3.3.2. Fouriertransformation zeitdiskreter Signale 134
3.3.3. Fouriertransformation diskreter periodischer Signale DFT 137
3.3.4. Inverse diskrete Fouriertransformation IDFT 144
3.3.5. Folgerungen, Identitäten und Transformationssätze der DFT 145
3.3.6. Faltungstheorem der diskreten Fouriertransformation 147
3.3.7. Signalenergie 149
3.3.8. Zeitdiskrete Faltung 152

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

4. KORRELATIONSFUNKTIONEN DETERMINIERTER SIGNALE 157
4.1. Energie und Leistung 157
4.2. Definition der Korrelationsfunktion für Energiesignale 158
4.2.1. Eine nützliche Abschätzung für die Korrelationsfunktion 164
4.3. Korrelationsprodukt und Faltungsprodukt 166
4.3.1. Spezialfall der Kreuzkorrelation: Autokorrelationsfunktion 169
4.4. Fouriertransformation der Energiekorrelationsfunktionen (Impulskorrelationsfunktionen) 171
4.5. Impuls- (Energie-)korrelationsfunktion und LTI - Systeme 175
4.6. Korrelation zeitdiskreter Signale 176
4.7. Matched Filters 178

5. SYSTEMTHEORIE DER TIEFPAß- UND BANDPAßSIGNALE UND -SYSTEME 184
5.1. Das verzerrungsfreie System 184
5.2. Tiefpaßsysteme 190
5.2.1. Der ideale Tiefpaß 190
5.2.2. Tiefpaßsysteme mit nicht idealer Übertragungsfunktion 207
5.3. Zeitdiskrete Tiefpaßsysteme 214
5.4. Bandpaßsysteme und Bandpaßsignale 215
5.4.1. Der ideale Bandpaß 215
5.4.2. Bandpaßsignale und ihre Beschreibung im äquivalenten Tiefpaßbereich 216
5.4.3. Komplexe Signaldarstellung 224
5.4.4. Analytische Signale und Hilberttransformation 227
5.4.5. Momentanphase und Momentanfrequenz eines Signals 230
5.4.6. Äquivalenzen im Bandpaßbereich 231
5.4.7. Übertragung von Bandpaßsignalen über Bandpaßsysteme 232
5.4.8. Übertragung des eingeschalteten Cosinus-Signals über den idealen Bandpaß 233
5.4.9. Realisierung von Bandpaßsystemen im äquivalenten Tiefpaßbereich 235
5.4.10. Abtastung von Bandpaßsignalen im äquivalenten Tiefpaßbereich 238
5.4.11. Zeitdiskrete Verarbeitung von Bandpaßsignalen 240
5.4.12. Phasen- und Gruppenlaufzeit eines Systems 240

6. MODULATIONSVERFAHREN – ÜBERTRAGUNG ANALOGER SIGNALE 243
6.1. Lineare Modulationsverfahren 244
6.1.1. Amplitudenmodulation 245
6.1.2. Inkohärenter Empfang in AM-Systemen 248
6.1.3. Einseitenbandmodulation 251
6.2. Winkelmodulationsverfahren 254
6.2.1. Phasenmodulation und Frequenzmodulation 255
6.2.2. Das Spektrum eines winkelmodulierten Signals 257
6.2.3. Spezielle frequenz- oder phasenmodulierte Signale – Signale mit quadratischer Phase (Chirps) 265
6.2.4. Empfang von FM - Signalen 273

7. MEHRDIMENSIONALE SYSTEMTHEORIE 280
7.1. Erweiterung der aus der eindimensionalen Systemtheorie bekannten Zusammenhänge 281
7.1.1. Faltungsintegral 281
7.1.2. Diracstoß 282
7.1.3. Mehrdimensionale Fouriertransformation 282
7.2. Rechengesetze der mehrdimensionalen Fouriertransformation 284
7.2.1. Koordinatentransformation 286
7.2.2. Betrachtung des Drehsinns einer Drehmatrix 287
7.3. Wichtige Theoreme 288
7.3.1. Verschiebungstheorem 288
7.3.2. Zirkular symmetrische Systeme 288
7.3.3. Projektionstheorem 291
7.3.4. Radialschnitte in beliebiger Richtung 293
7.4. Mehrdimensionale Abtastung 295

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

1. DETERMINIERTE SIGNALE IN LINEAREN ZEITINVARIANTEN SYSTEMEN

Die folgenden Kapitel beschäftigen sich mit der Beschreibung nachrichtentechnischer Systeme, wobei es hier hauptsächlich um die Frage geht, wie sich ein Signal verhält, das über ein System übertragen wird. Um diese Frage näher zu betrachten, müssen zunächst einige Grundbegriffe geklärt werden.

Was ist überhaupt ein Signal bzw. ein System im nachrichtentechnischen Sinne ?

Ein *Signal* ist ein Spannungs-, Strom- oder Intensitätsverlauf über der Zeit. Anders ausgedrückt ist ein Signal nichts anderes als die Darstellungsform einer Nachricht durch physikalische Größen, welche im Grunde genommen beliebigen Charakter besitzen können.

Um nun Nachrichten, welche durch Signale dargestellt werden, zu übertragen, bedarf es eines sogenannten Übertragungssystems, welches im allgemeinen ein sehr umfangreiches Gebilde ist. Um ein solches Gebilde zu beschreiben, teilt man es in einzelne Teilsysteme auf, die jeweils unabhängig voneinander betrachtet werden können. Jedes einzelne Teilsystem wird quasi als Black-Box betrachtet, bei der nur die Eingangs- und Ausgangsgrößen interessieren. Hierbei steht der Ausgang mit dem Eingang in einem sogenannten Kausalzusammenhang .

Die eigentliche Definition des Systems lautet folgendermaßen:

Ein *System* ist ein Wirkmechanismus, um den man eine (willkürliche) Hülle legt, bezüglich der man Eingangs– und Ausgangsgrößen (Signale) definiert, die miteinander in einem Kausalzusammenhang stehen. (Wirkzusammenhang ➔ Ursache-Wirkung).

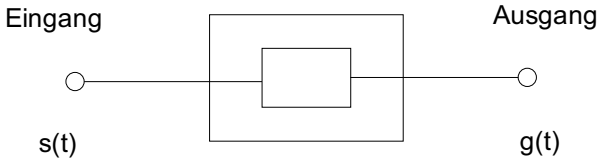


Abbildung 1.1: System (Black Box)

Für den Anwender ergeben sich unmittelbar die folgenden Fragen:

- Wie verändern sich Signale bei der Übertragung (beim Durchlaufen über ein System ?) bezüglich der Signalform bzw. Darstellungsart ?

- Wie kann man die Wirkungsweise von Systemen, d.h. den eigentlichen Kausalzusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen, beschreiben?

- Wie müssen Systeme dimensioniert werden, um Signale gezielt zu verändern?

Um nun diese Fragen zu beantworten, müssen zunächst einmal Signale definiert und näher beschrieben werden.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

1.1. ELEMENTARSIGNALE

Ein Signal ist jede beliebige Darstellung einer Nachricht durch physikalische Größen (Spannungen, Stromverläufe, Feldstärken, etc.). Jeder Meßwertverlauf (Meßwertfolge) stellt ein Signal dar! Demzufolge können Signale völlig unterschiedliche physikalische Dimensionen besitzen!
Als Träger von Informationen besitzen Signale notwendigerweise einen für den Empfänger unbekannten, d.h. zufälligen oder *stochastischen* Verlauf (→ Zufallssignale). Da letzterer nicht vorhersehbar ist, sind derartige Signale kaum zum Testen der Übertragungseigenschaften von Systemen geeignet, da man für solche Zwecke eben genau den Verlauf eines Signals kennen muß.
Daher verwendet man zum Testen von Systemen bekannte und unzufällige Signale, deren Amplitude zu jedem Zeitpunkt ohne jegliche Unsicherheit *determiniert* ist, d.h. deren Verlauf sich durch einen oder mehrere Ausdrücke vollständig, bzw. stückweise beschreiben läßt.
Eine Untergruppe dieser sogenannten *deterministischen Signale* bilden die *Elementarsignale*.
Diese zeichnen sich dadurch aus, daß sie durch einen meist sehr einfachen algebraischen Ausdruck (Bildungsgesetz) beschrieben werden können und sich dadurch auf einfache Art und weise technisch ohne großartigen Aufwand erzeugen lassen.

Im nachfolgenden werden einige Beispiele für die wichtigsten grundlegenden Elementarsignale aufgeführt!

1. Sinusfunktion:

Die Sinusfunktion und Cosinusfunktion sind die wichtigsten Funktionen in der Nachrichtentechnik, da sie periodisch und harmonisch sind. Daher haben sie eine zentrale Bedeutung in der Modulationstechnik und dienen als Testfunktionen für lineare, zeitinvariante Systeme.
Die Sinusfunktion besitzt den gleichen Verlauf wie die Cosinusfunktion, wobei letztere in Bezug auf die Sinusfunktion lediglich um 90° phasenverschoben ist.
Die Sinusfunktion läßt sich durch folgenden algebraischen Ausdruck beschreiben:

$$s(t) = \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \tag{1.1}$$

wobei f_0 = Frequenz und t = Zeit.
Skizziert ergibt sich für die Sinusfunktion:

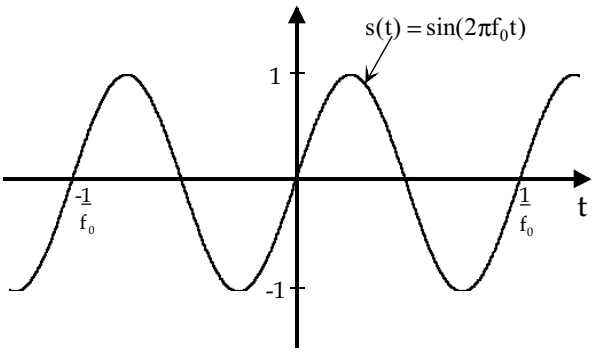


Abbildung 1.2: Sinusfunktion

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Für die Cosinusfunktion gilt entsprechend:

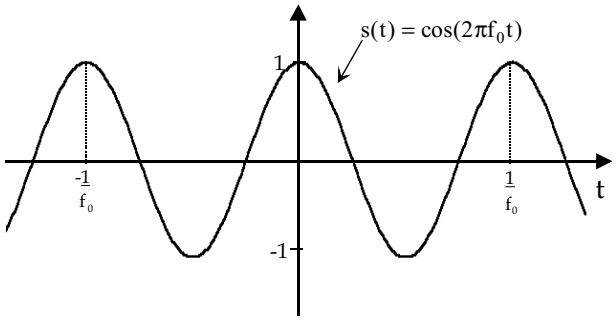


Abbildung 1.3: Cosinusfunktion

2. Gaußfunktion:

Bei der Gaußfunktion handelt es sich ebenfalls um ein Elementarsignal. Bedingt durch ihren Signalverlauf eignet sie sich besonders für Anwendungen in der Filtertechnik.
Die Gaußfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$s(t) = e^{-\pi t^2} \tag{1.2}$$

Skizziert ergibt sich:

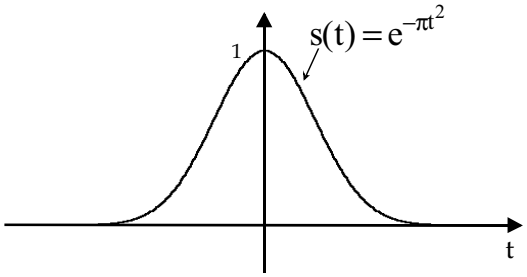


Abbildung 1.4: Gaußfunktion

Im Folgenden werden noch weitere wichtige Elementarsignale aufgeführt, die sehr häufig in der Nachrichtentechnik Verwendung finden. Für all diese Funktionen gilt, daß sie sich nicht geschlossen durch einen algebraischen Ausdruck darstellen lassen und somit müssen diese stückweise definiert werden.
Damit man sich nicht ständig mit der stückweisen Definition auseinandersetzen muß, werden Normalerweise nur die Abkürzungen (griechische Buchstaben) verwendet.

3. Sprungfunktion σ(t):

Diese Funktion ist nach dem Diracstoß (siehe später) die wichtigste Funktion in der Nachrichtentechnik, um die Übertragungseigenschaften eines Systems zu ermitteln. Sie läßt sich technisch sehr leicht erzeugen, denn sie stellt nichts anderes dar als das Einschalten einer Gleichspannung auf ein System zum Zeitpunkt t = 0.

Die Sprungfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$s(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.3}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Aus der Definition ergibt sich folgender Funktionsverlauf:

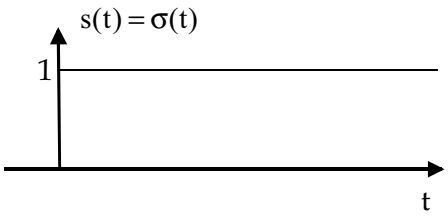


Abbildung 1.5: Sprungfunktion

4. Rechteckimpuls:

Der Rechteckimpuls ist ebenfalls ein Elementarsignal und wird sehr häufig in der Nachrichtentechnik verwendet. Im Zeitbereich stellt der Rechteckimpuls nichts anderes dar, als die Stoßantwort eines Kurzzeitintegrators und im Frequenzbereich wird dieser als sogenannte Fensterfunktion verwendet, um Frequenzausschnitte aus einem Spektrum herauszufiltern. Dort hat er also die Eigenschaft eines idealen Tiefpasses, der nur Frequenzen unterhalb seiner Grenzfrequenz passieren läßt und für alle Frequenzen oberhalb dieser Grenzfrequenz ideal sperrt. (Erläuterungen siehe später)

Der Rechteckimpuls ist folgendermaßen definiert:

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \left|\frac{t}{T}\right| \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.4}$$

Skizziert ergibt sich folgender Funktionsverlauf:

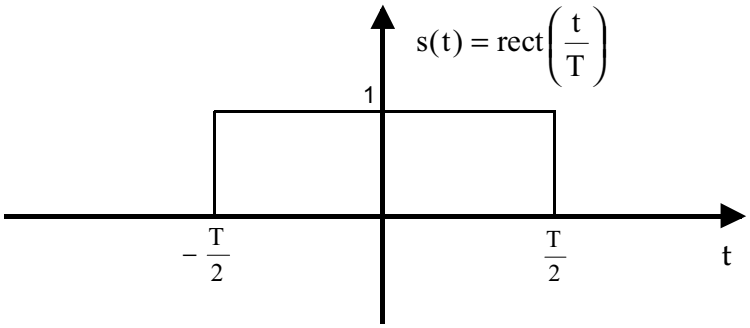


Abbildung 1.6: Rechteckimpuls

Die Grenzen des Rechteckimpulses werden durch die Definition festgelegt. Innerhalb des Definitionsbereiches gilt

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = 1$$

wobei folgende Voraussetzung erfüllt sein muß:

$$\left|\frac{t}{T}\right| \le \frac{1}{2}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Da der Parameter **T** lediglich die Pulsbreite angibt und nicht vorzeichenbehaftet ist, müssen nur die unterschiedlichen Fälle für die Zeitvariable **t** untersucht werden.
Diese kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen und somit müssen folgende Fälle für **t** unterschieden werden:

a) $\boxed{t \geq 0} \quad \Rightarrow |t| = t \wedge |T| = T \quad \Rightarrow \quad \boxed{|t| \leq \frac{T}{2} \rightarrow t \leq \frac{T}{2}}$

b) $\boxed{t < 0} \quad \Rightarrow |t| = -t \wedge |T| = T \quad \Rightarrow \quad \boxed{|t| \leq \frac{T}{2} \rightarrow -t \leq \frac{T}{2} \rightarrow t \geq -\frac{T}{2}}$

Somit erhält man zusammengefaßt folgenden Ausdruck für die Grenzen des Definitionsbereiches:

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

5. Dreieckimpuls:

Als letzte wichtige grundlegende Elementarfunktion sei an dieser Stelle noch der Dreieckimpuls erwähnt.
Der Dreieckimpuls ist folgendermaßen definiert:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{T}\right| & \text{für} \quad \left|\frac{t}{T}\right| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.5}$$

Skizziert ergibt sich:

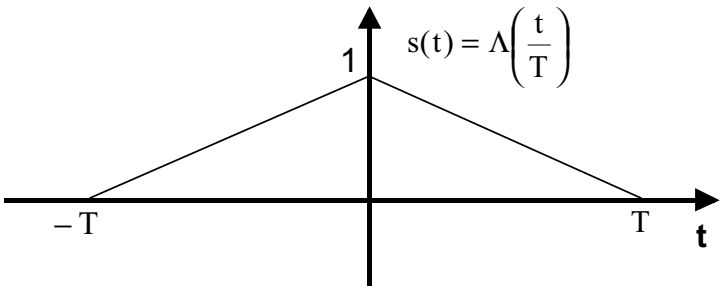


Abbildung 1.7: Dreieckfunktion

Alle Funktionen sind definitionsgemäß normiert dargestellt, d.h. daß alle Signale einheitenfrei sind!

Hierbei werden

Spannungssignale auf 1 V normiert

Stromsignale auf 1 A normiert

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\text{Leistungssignale auf } \begin{cases} 1V^2 \\ 1A^2 \end{cases} \text{ an } 1\Omega \text{ normiert}$$

Die Normierung der Leistungssignale an 1Ω rührt von der Definition der elektrischen Leistung her, da gilt:

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

1.2. SYSTEM

Im vorigen Kapitel wurde bereits angedeutet, wozu man ein System braucht und wie es im nachrichtentechnischen Sinne definiert ist.

Es wurde gezeigt, daß es sich dabei um einen Wirkmechanismus handelt, um den willkürlich eine Hüllfläche gelegt wird, bezüglich derer Ein- und Ausgangssignale definiert werden. Die Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen werden durch systemtheoretische Ansätze beschrieben.
Es wurde auch gesagt, daß ein nachrichtentechnisches System im allgemeinen ein sehr komplexes Gebilde darstellt, das aber in einzelne voneinander unabhängige Teilsysteme aufgeteilt werden kann, die sich ebenfalls unabhängig voneinander beschreiben lassen.
Im folgenden soll nun ein solches Teilsystem mit Hilfe der Netzwerktheorie beschrieben werden. Es handelt sich hierbei um einen RC-Tiefpaß, der hinsichtlich seiner Übertragungseigenschaften untersucht werden soll.

Im Falle der Betrachtung mit Hilfe der Netzwerktheorie, wird zunächst von einer *sinusförmigen* Erregung ausgegangen. In diesem Falle läßt sich das System mit Hilfe *komplexer Wechselstromrechnung* hinsichtlich seines Übertragungsverhaltens untersuchen.

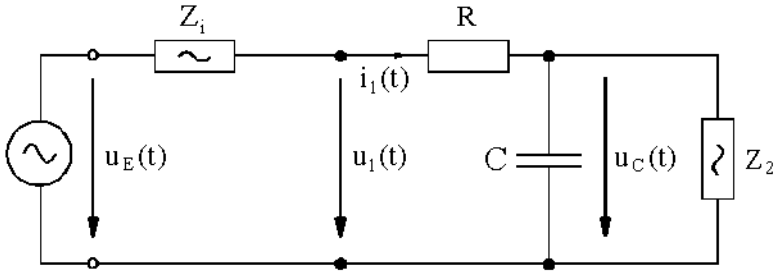


Abbildung 1.8: RC-Tiefpaß

Hierbei handelt es sich um einen komplexen Spannungsteiler und es ergibt sich für $\mathbf{u_C(t)}$ nach den Regeln der komplexen Wechselstromrechnung folgender Ausdruck:

$$u_C(t) = \frac{Z_2 \,//\, C}{Z_2 \,//\, C + R + Z_i} \cdot u_E(t)$$

Da man aber lediglich das Verhalten des RC-Tiefpasses bestimmen möchte führt man folgende Grenzwertüberlegungen durch, welche zur sogenannten *1.Abstraktion* führen:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$Z_i \to 0 \wedge Z_2 \to \infty$$

Durch diese Überlegungen haben die Größen $\mathbf{Z_i}$ und $\mathbf{Z_2}$ keinen Einfluß mehr und können daher vernachlässigt werden.
Da man aber das Übertragungsverhalten eines Systems mit Hilfe von einfachen Eingangssignalen bestimmt, variiert man ebenfalls die Art der Eingangsanregung. Wie schon zuvor angedeutet, ist die am einfachsten zu erzeugende Funktion die Sprungfunktion, bzw. die Summe zweier Sprungfunktionen unterschiedlichen Vorzeichens (Rectangular-Funktion).
Diese läßt sich durch kurzzeitiges Anlegen einer Gleichspannung an den RC-Tiefpaß erzeugen. Damit läßt sich das System vollkommen in seinem Verhalten beschreiben. Man gelangt so zur eigentlichen *Systemtheorie*, bei der einem idealisierten Eingangssignal ein ebenfalls idealisiertes Ausgangssignal zugeordnet wird.
Somit ergibt sich das vereinfachte Schaltbild:

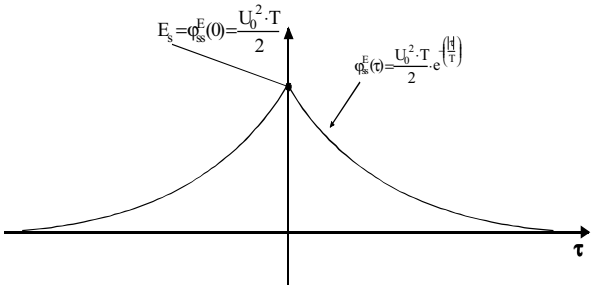


Abbildung 1.9: RC-Tiefpaß

Ein derartiges Netzwerk läßt sich, bedingt durch die Tatsache, daß eine Gleichspannung eingeprägt wird, mit Hilfe des sogenannten e-Ansatzes lösen.

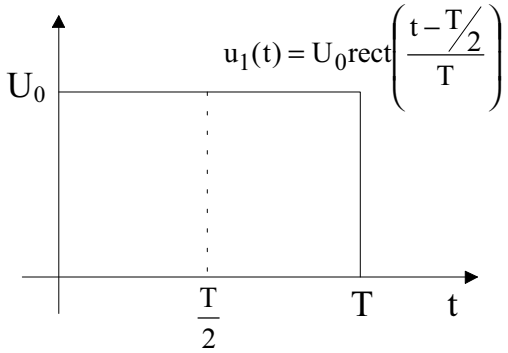


Abbildung 1.10: $u_1(t)$

Geht man davon aus, daß die Gleichspannung für den Zeitraum **t=T** auf den RC-Tiefpaß durchgeschaltet wird, ergibt sich für $\mathbf{u_1(t)}$ folgender Verlauf:
Um die Zeitkonstante des Systems zu bestimmen, muß man hier das Produkt aus Gesamtwiderstand und Gesamtkapazität des Systems berechnen, wobei die Spannungsquelle idealerweise keinen Innenwiderstand besitzt ($\mathbf{R_i \to 0}$) und somit für die $\boldsymbol{\tau}$-Bestimmung kurzgeschlossen werden darf. Wendet man dies hier an ergibt sich die Zeitkonstante zu:

$$\tau = T_{RC} = R \cdot C$$

- Wir betrachten zunächst den *Einschaltvorgang:*

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Lösung für $\mathbf{u_c(t)}$ wird mit folgendem Ansatz bestimmt:

$$u_c(t) = K_1 + K_2 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

Die beiden unbekannten Konstanten lassen sich aus folgender Grenzwertbetrachtung ermitteln: Wenn man davon ausgeht, daß der Kondensator vor dem Einschalten der Gleichspannung völlig entladen ist, stellt dieser im ersten Moment im Ersatzschaltbild einen Kurzschluß dar. Die an ihm abfallende Spannung ist **0** und wird mit zunehmender Ladung immer größer, bis sie im Grenzfall den Wert der Gleichspannung erreicht.
Somit gilt:

$$1)\ \lim_{t\to 0} u_c(t) = 0 = K_1 + K_2 \cdot e^{-\left(\frac{0}{\tau}\right)} = K_1 + K_2$$

$$2)\ \lim_{t\to \infty} u_c(t) = U_0 = K_1 + K_2 \cdot e^{-\left(\frac{\infty}{\tau}\right)} = K_1$$

Wenn man nun **2) → 1)** einsetzt so ergibt sich für $\mathbf{K_2}$**:**

$$3)\quad 0 = K_1 + K_2 = U_0 + K_2 \Rightarrow K_2 = -U_0$$

Damit ergibt sich abschließend für den ansteigenden Teil der e-Funktion folgender Ausdruck:

$$u_c(t) = K_1 + K_2 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} = U_0 - U_0 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right) \qquad (1.6)$$

- *Ausschaltvorgang:*

Nachdem nun die Gleichspannung abgeschaltet wurde, ergeben sich andere Verhältnisse. Unter der Voraussetzung, daß die Spannung über dem Kondensator stetig ist, gilt im Moment des Umschaltens:

$$u_c(t = T) = U_0\left(1 - e^{-\left(\frac{T}{\tau}\right)}\right) = u_c'(t = T) = K_3 + K_4 \cdot e^{-\left(\frac{T-T}{\tau}\right)} = K_3 + K_4$$

Hierbei stellt $\mathbf{u_c'(t)}$ den Verlauf von $\mathbf{u_c(t)}$ für **t>T** dar. Es ist zu beachten, daß für den absteigenden Verlauf der e-Funktion die Verschiebung im Argument um den Wert **T** berücksichtigt werden muß!
Für **t→∞** wird sich der Kondensator wieder völlig entladen und somit ergibt sich die zweite Grenzwertbedingung zu:

$$\lim_{t\to\infty} u_c'(t) = K_3 + K_4 \cdot e^{-\left(\frac{\infty - T}{\tau}\right)} = 0 = K_3$$

Damit gilt abschließend für die absteigende e-Funktion:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$u_c'(t) = K_3 + K_4 \cdot e^{-\left(\frac{t-T}{\tau}\right)} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{T}{\tau}\right)}\right) \cdot e^{-\left(\frac{t-T}{\tau}\right)} = U_0 \cdot e^{-\left(\frac{t-T}{\tau}\right)} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{T}{\tau}\right)}\right) \tag{1.7}$$

Zusammengefaßt gilt somit:

$$u_c(t) = \begin{cases} U_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right) & \text{für} \quad 0 < t < T \\ U_0 \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{T}{\tau}\right)}\right) \cdot e^{-\left(\frac{t-T}{\tau}\right)} & \text{für} \quad T < t < \infty \end{cases} \tag{1.8}$$

Skizziert ergibt sich abschließend folgender Verlauf der Kondensatorspannung:

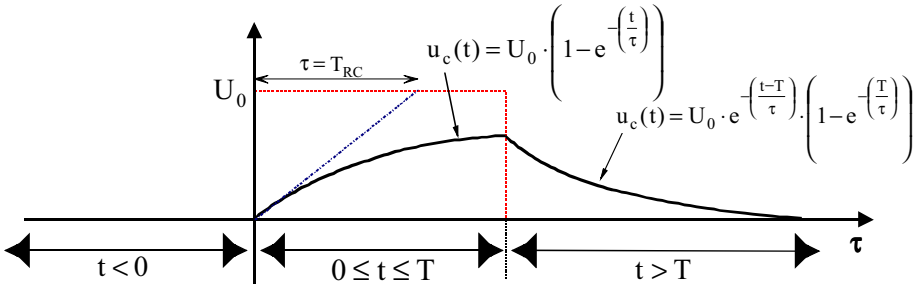


Abbildung 1.11: Kondensatorspannung

Bei dem zuvor berechneten Beispiel des RC-Tiefpasses ist die Beschaffenheit des Systems genau bekannt und man rechnet mit physikalischen Größen (Spannung). Da im Grunde genommen nur die Zusammenhänge zwischen Eingang- und Ausgang interessieren und es in dem Zusammenhang gar nicht so wichtig ist, wie das System aufgebaut ist , geht man noch einen Schritt weiter im Hinblick auf die Abstraktion. Man legt die zuvor schon angesprochene *Hüllfläche* um das System und betrachtet *normierte Eingangs- und Ausgangsgrößen*. Somit gelangt man dann abschließend zu der sogenannten *Black-Box*. Dabei ist der innere Aufbau nicht bekannt sondern lediglich die Zusammenhänge zwischen Ein- und Ausgang.
Skizziert ergibt sich folgendes Blockschaltbild:

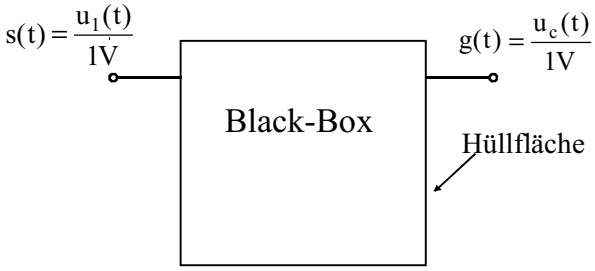


Abbildung 1.12: Black Box

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Allgemein gilt:

$$g(t) = F\{s(t)\}$$

Ein System ordnet einem Eingangssignal s(t) eindeutig ein Ausgangssignal g(t) mathematisch zu. Eine derartige Zuordnung nennt man auch *Transformation*!

1.3. LINEARE ZEITINVARIANTE SYSTEME - LTI (LINEAR TIME INVARIANT)

Unter den in Kap. 1.2 beschriebenen Systemen stellen die *linearen, zeitinvarianten Systeme* eine sehr wichtige Sondergruppe dar, da sie durch besonders einfache Transformationsgleichungen beschrieben werden können.
Allgemein handelt es sich bei den Transformationsgleichungen um *lineare Differentialgleichungen* mit *konstanten Koeffizienten* .

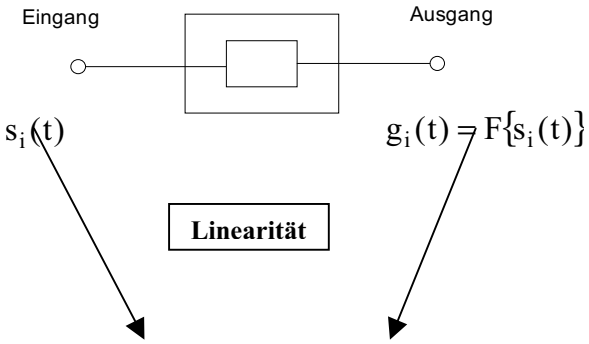
Zwei fundamentale *Eigenschaften* definieren lineare, zeitinvariante Systeme , nämlich die **Linearität** und die **Zeitinvarianz** !

Beide Begriffe werden im folgenden definiert bzw. erläutert. Zunächst zum Begriff der Linearität:

1.) Linearität:

Die Definition von *Linearität* lautet:
Ein System heißt linear, wenn jede *Linearkombination* von Eingangsanregungen $\mathbf{s_i(t)}$, i=1,2,3,... zu einer *Linearkombination* von Ausgangsreaktionen $\mathbf{g_i(t)}$, i=1,2,3,... führt!

$$g_i(t) = F\{s_i(t)\} \tag{1.9}$$



$$s(t) = \sum_i a_i \cdot s_i(t) \Rightarrow g(t) = F\left\{\sum_i a_i \cdot s_i(t)\right\} \tag{1.10}$$

Abbildung 1.13: Linearität

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Es muß also für alle Konstanten $\mathbf{a_i}$ der *Superpositionssatz* erfüllt sein!

$$s(t) = \sum_i a_i \cdot s_i(t)$$

$$g(t) = F\{s(t)\} = F\left\{\sum_i a_i \cdot s_i(t)\right\}$$

$$= \sum_i a_i \cdot F\{s_i(t)\}$$

$$g(t) = \sum_i a_i \cdot g_i(t)$$

Die Linearität besagt also, daß man eine Eingangsanregung, die aus einer Summe beliebiger Eingangsanregungen mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzt ist, in diese unterteilen darf und *unabhängig* von der Gesamteingangsfunktion die Ausgangsreaktionen *einzeln* aus den Teilausgangsreaktionen berechnen darf, falls das System die Linearitätsbedingung erfüllt. Die Gesamtausgangsreaktion ergibt sich aus der *Summe* der Teilausgangsreaktionen, wobei hier ebenfalls die *gleichen, konstanten Koeffizienten* als Vorfaktoren auftauchen.

Ein lineares System ist z.B. ein Gesamtsystem aus gesteuerten Strom- oder Spannungsquellen, wobei die Spannungen bzw. die Ströme linear miteinander verknüpft sein müssen.
Hierbei spielt es keine Rolle in welcher Art und Weise die Teilsysteme miteinander verknüpft sind. Es muß *nur* die Bedingung für Linearität für *jedes* einzelne Teilsystem erfüllt sein.

Nun zur sogenannten Zeitinvarianz eines Systems:

2.) Zeitinvarianz :

Ein System heißt *zeitinvariant*, wenn es auf eine zeitlich verschobene Anregung mit der zeitlich verschobenen Ausgangsreaktion reagiert.

$$g(t) = F\{s(t)\}$$

Zeitinvarianz

$$F\{s(t - t_0)\} = g(t - t_0) \qquad (1.11)$$

Die *Zeitinvarianz* besagt also, daß die *Signalform* der Eingangsanregung sich bei zeitlicher Verschiebung um $\mathbf{t_0}$ bei der Betrachtung der Ausgangsreaktion nicht ändern darf. Die Ausgangsreaktion muß also ebenfalls um den *gleichen* Betrag zeitlich verzögert sein wie die Eingangsanregung.
Zu den zeitinvarianten Systemen gehören alle Systeme, die aus zeitunabhängigen Bauelementen bestehen und keine zeitlich veränderlichen Strom und Spannungsquellen enthalten.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

BEISPIEL:
Ein lineares zeitinvariantes System reagiere auf einen Rechteckimpuls der Dauer T mit einem Rechteckimpuls der Dauer $\frac{T}{2}$. Wie sieht die Antwort diese Systems auf eine Anregung mit einer Sprungfunktion aus (Sprungantwort) ?

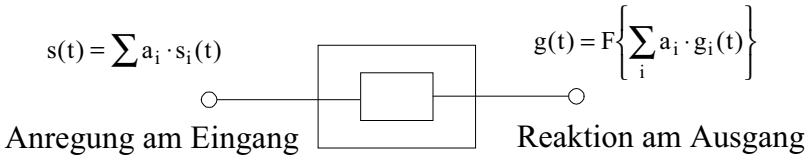
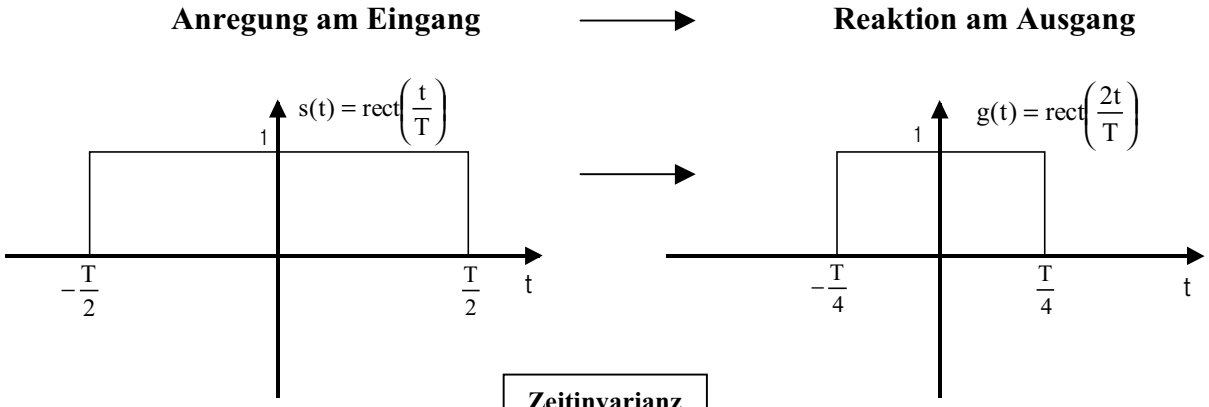


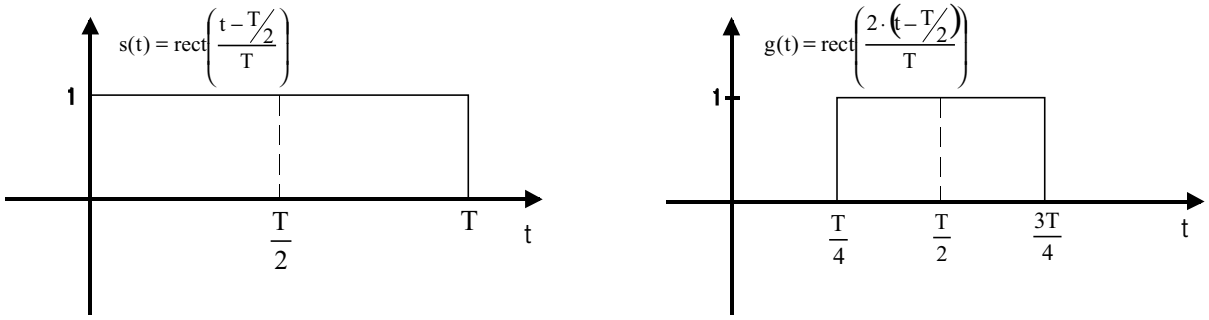
Abbildung 1.14: Beispiel: LTI-System

Diese Frage läßt sich mit Hilfe der Zeitinvarianz und der Linearität schrittweise mit Hilfe von Skizzen beantworten. Die Idee, welche hier zum Ziel führt ist, daß man eine Sprungfunktion auch aus einer unendlichen Summe von verschobenen Rectangularfunktuionen darstellen kann.
Im einzelnen erhält man hier folgendes:



Zeitinvarianz

$$s\left(t-\frac{T}{2}\right) \qquad g\left(t-\frac{T}{2}\right)$$



Linearität & Zeitinvarianz

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s\left(t-\frac{T}{2}-nT\right) \qquad a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g\left(t-\frac{T}{2}-nT\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

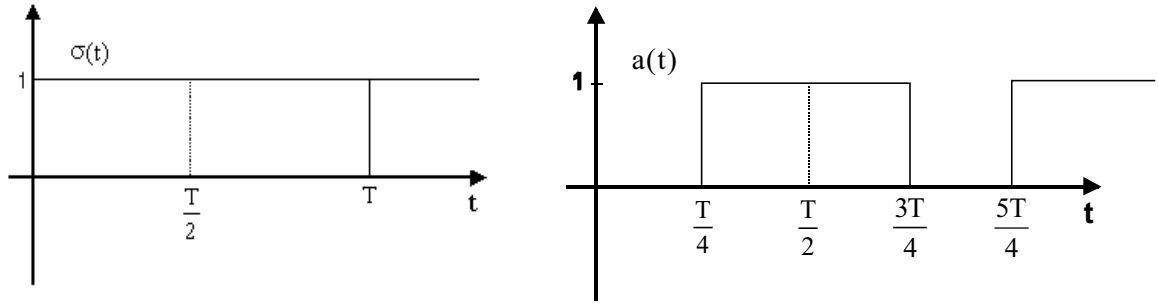


Abbildung 1.15: Beispiel: LTI-System

Man nutzt also hier aus, daß sich die Sprungfunktion durch eine unendliche Summe von verschobenen Rectangular-Funktionen darstellen läßt.

Abschließend sei noch einmal der Zusammenhang zwischen der Rectangular- und der Sigma-Funktion zusammengefaßt:

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2} - nT}{T} \right) \tag{1.12}$$

1.4. Das Faltungsintegral

Im vorigen Kapitel wurden die beiden Eigenschaften linearer, zeitinvarianter Systeme definiert. Es wurde gezeigt, daß man im Falle solcher Systeme die Eingangsanregungsfunktion in beliebige Teilfunktionen unterteilen und die Gesamtausgangsreaktion als Summe der jeweiligen Teilreaktionen darstellen kann. Der Vorteil dieser Systeme liegt also genau darin, daß die *Betrachtung und Berechnung der Teilreaktionen unabhängig* voneinander erfolgen darf.

Im Folgenden soll nun ein allgemeingültiger Ausdruck zur Berechnung des Übertragungsverhaltens von LTI-Systemen hergeleitet werden.

1.4.1. Stoßanregung - Stoßantwort

Das Ziel ist die Beschreibung von linearen, zeitinvarianten Systemen im *Zeitbereich*!

Als Beispiel soll hier zunächst der bekannte RC-Tiefpaß im Falle einer rechteckförmigen Anregung hinsichtlich seiner Ausgangsreaktion untersucht werden. Auch wenn im Schaltbild noch dimensionsbehaftete Größen vorkommen, so wird hier nur der normierte Fall betrachtet.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

BEISPIEL:

- **RC-Tiefpaß:**

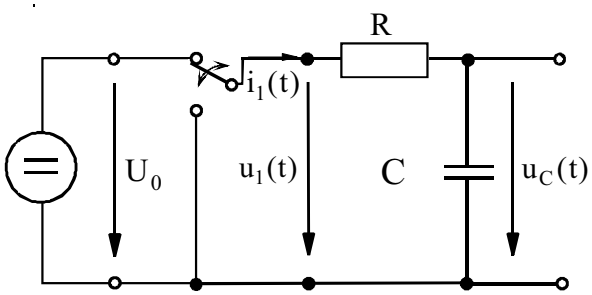


Abbildung 1.16: RC-Tiefpaß

Für die Anregungsfunktion soll gelten:

$$s_0(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Skizziert ergibt sich hierfür:

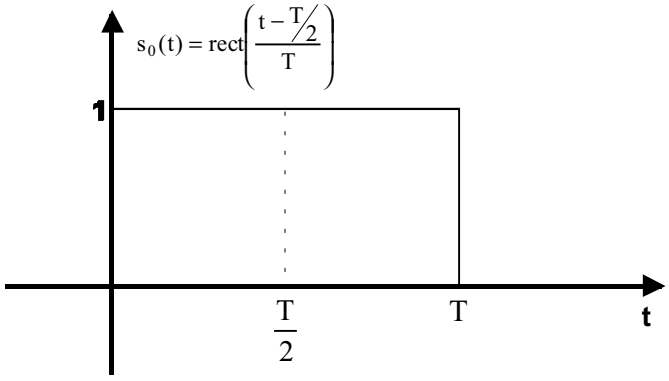


Abbildung 1.17: Anregungsfunktion

Es ist aus (1.7) bekannt, daß bei sprungförmiger Anregung eines RC-Tiefpasses für die Sprungantwort $\mathbf{g_0(t)}$ gilt:

$$a(t) = g_0(t) = \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)}\right]$$

Da die Rechteckfunktion aber nur bis an die Stelle **t=T** definiert ist, gilt dieser Zusammenhang nur in diesem Bereich, da nur dort Rechteckfunktion und Sprungfunktion identisch sind.
→ Daher müssen zwei Fälle unterschieden werden.
Laut (1.7) gilt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g_0(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)}\right) & \text{für} \quad 0 \le t \le T \\ \left(1 - e^{-\left(\frac{T}{T_{RC}}\right)}\right) \cdot e^{-\left(\frac{t-T}{T_{RC}}\right)} & \text{für} \quad T < t < \infty \end{cases} \tag{1.13}$$

Für den zweiten Fall ergibt sich eine abklingende e-Funktion, mit dem Anfangswert $\mathbf{g_0(T)}$.

Zusammengefaßt erhält man folgenden Verlauf für die Ausgangsreaktion:

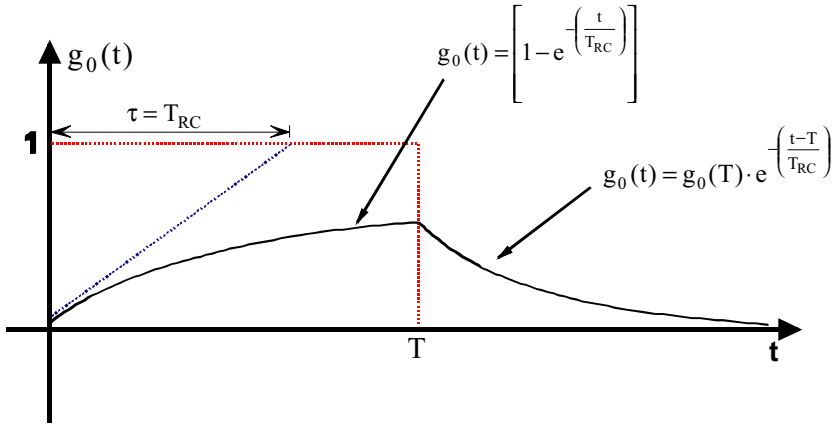


Abbildung 1.18: Ausgangsreaktion

Wendet man nun für diesen Anregungsfall *Linearität* und *Zeitinvarianz* an, ergibt sich im Falle einer abgewandelten Eingangsanregung

$$s(t) = Q_1 \cdot s_0(t) + Q_2 \cdot s_0(t - t_0)$$

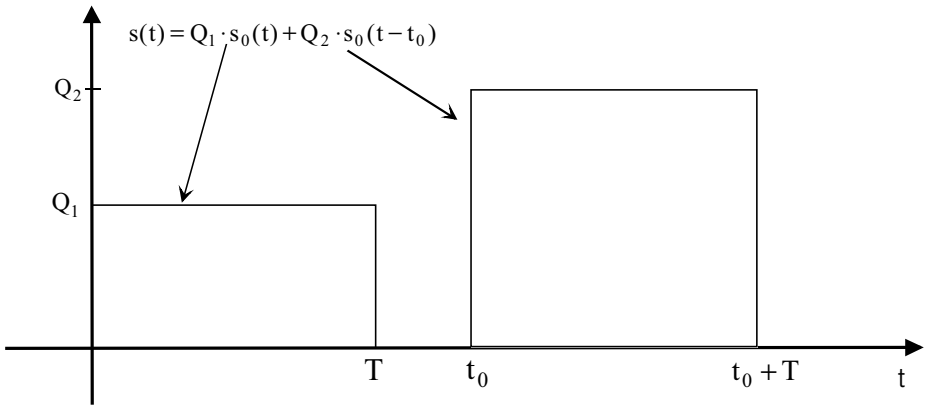


Abbildung 1.19: Eingangsanregung

folgende abgewandelte Ausgangsreaktion:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = Q_1 \cdot g_0(t) + Q_2 \cdot g_0(t - t_0)$$

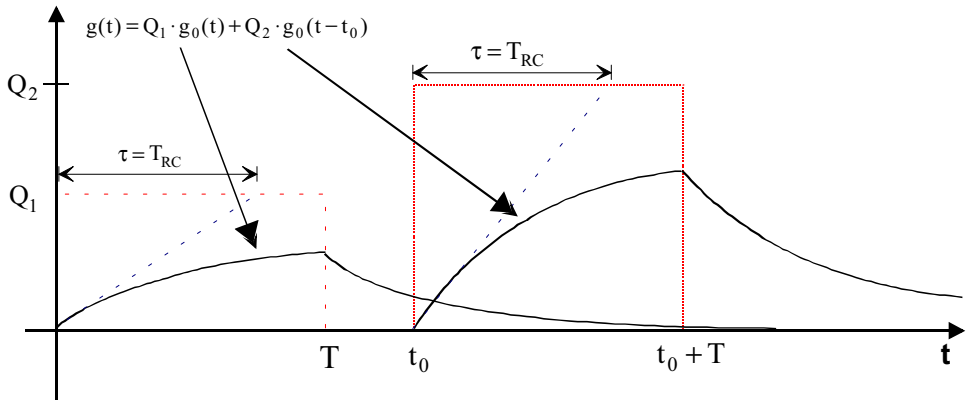


Abbildung 1.20: Ausgangsreaktion

Ergebnis:

Es läßt sich beobachten, das die Reaktion des Systems abhängt von:

- dem System selbst und
- von der Form der Eingangsanregung

Hierbei stellt sich natürlich die Frage, auf welche Art und Weise man anregen muß, damit die Systemreaktion *nicht* mehr von der *Form* der Eingangsanregung abhängt.
Es ist einleuchtend, daß wenn man die *Dauer* der Eingangsanregung verkürzen würde das System im *Grenzfall* für **T→0** gar keine Zeit mehr hat, auf die Eingangsanregung zu reagieren.
Hierbei tritt nur folgendes *Problem* auf : Verringert man die Dauer der Eingangsanregung bleibt im *Grenzfall* (**T→0**) *keine Anregungsenergie* mehr, so daß das System in diesem Fall mit 0 angeregt wird.
Abhilfe schafft hier die Normierung der Anregungsfunktion auf die Fläche 1! (Die Fläche wird von der Anregungsfunktion aufgespannt!).

Wenn man diese normierte Anregungsfunktion $s(t)$ mit $\tilde{s}_0(t)$ bezeichnet, muß also gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_0(t)dt = 1 \qquad (1.14)$$

Um dies zu erreichen, muß man die ursprüngliche Funktion durch den Wert ihrer Gesamtfläche , bezogen auf den gesamten Definitionsbereich, teilen.
Damit gilt:

$$\tilde{s}_0(t) = \frac{s_0(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)dt} \Rightarrow A(\tilde{s}_0(t)) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)dt} = 1 \qquad (1.15)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Wenn die Eingangsanregung derartig abgewandelt wird, erhält man für die Ausgangsreaktion unter Berücksichtigung der *Linearität*:

$$g_0(t) = F\{s_0(t)\}$$

$$\tilde{g}_0(t) = \frac{g_0(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)dt} \qquad (1.16)$$

Dies soll anhand eines Beispiels für den Fall des Rechteckimpulses verdeutlicht werden:

BEISPIEL:

$$s_0(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1dt = T$$

Der Rectangular schließt eine Fläche **A=T** ein. Damit ergibt sich für die normierte Anregungsfunktion, bzw. die Ausgangsreaktion mit (1.15) und (1.16):

$$\tilde{s}_0(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow \tilde{g}_0(t) = \frac{1}{T} \cdot g_0(t) \qquad (1.17)$$

Wenn man nun eine derartige Normierung für das Beispiel des Rechteckimpulses durchführt, muß man so vorgehen, daß die *Fläche* für schmaler werdende Rechteckimpulse *immer konstant den Wert* **1** beibehält! Eine Halbierung der Pulsbreite bedeutet also eine Verdoppelung der Amplitude!
Für die Anfangsamplitude des ursprünglichen Rechteckimpulses muß demnach gelten:

$$1 = A \cdot T \Rightarrow A = \frac{1}{T}$$

Damit erreicht man eine Normierung der Fläche auf **A=1**.

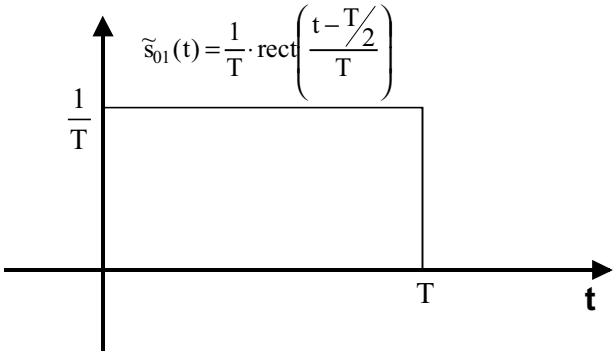


Abbildung 1.21: normierter Rechteckimpuls

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Für die einzelnen Schritte ergeben sich jeweils folgende Eingangsanregungen bzw. Ausgangsreaktionen:

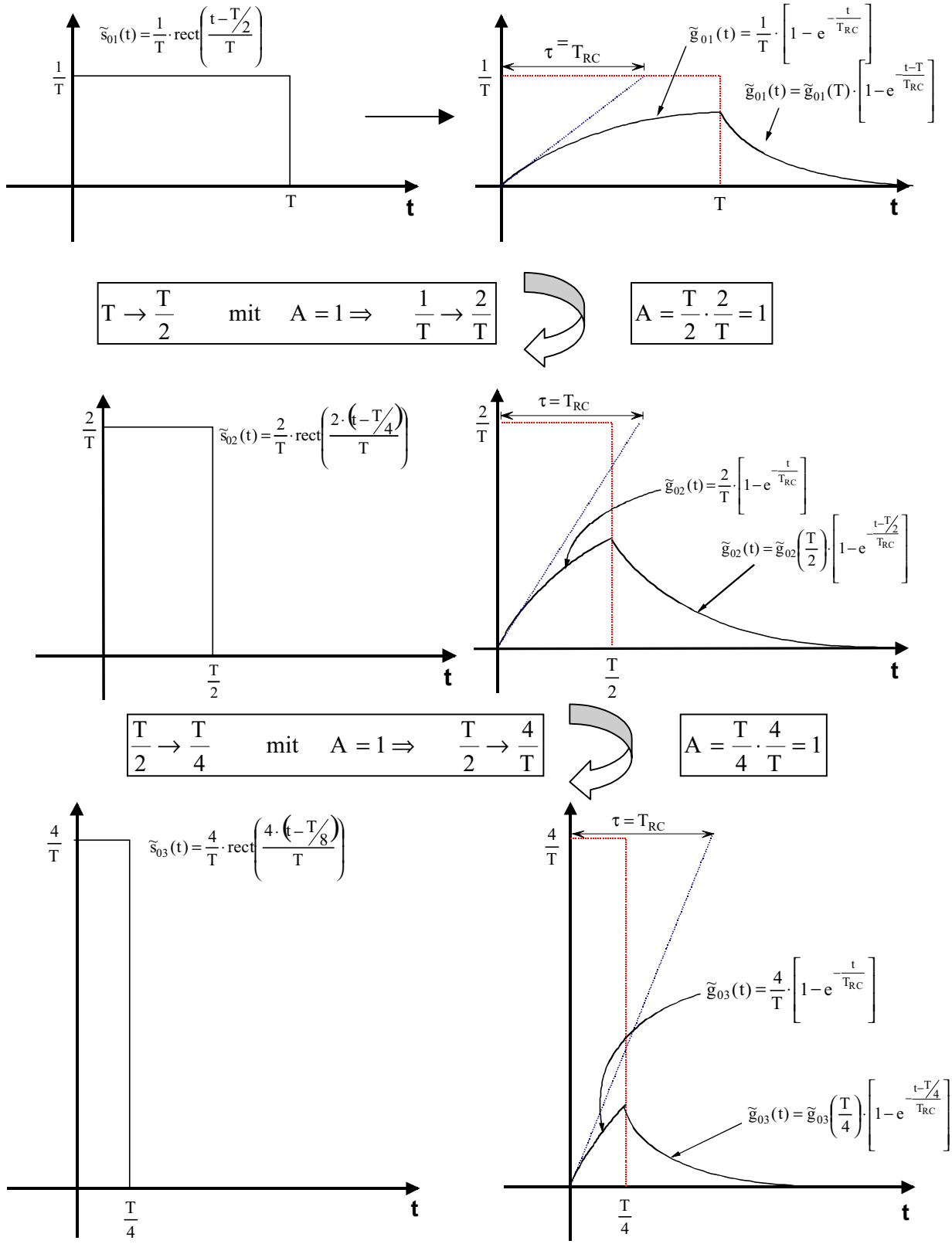


Abbildung 1.22: Eingangsanregungen bzw. Ausgangsreaktionen

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Allgemein gilt für den Funktionswert der Ausgangsreaktion an der Stelle, wo die Eingangsanregung endet:

$$g_{0i}(T_{0i}) = \frac{1}{T_{0i}} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{T_{0i}}{T_{RC}} \right)} \right) \tag{1.18}$$

Für alle Anregungsfunktionen muß gelten, daß die Fläche **A** immer konstant = **1** ist. Daher gilt für die Amplitude der Eingangsanregung $\mathbf{A}^*$ unter dieser Voraussetzung:

$$A = T_{0i} \cdot A^* = 1 \quad \Rightarrow \quad A^* = \frac{1}{T_{0i}}$$

Für eine verschwindende Pulsbreite ergibt sich daher für den Grenzfall **lim T_{0i}→0** eine theoretisch unendlich hohe Amplitude der Eingangsanregung.
Der Wert der Ausgangsreaktion für diesen Grenzfall ergibt sich mit den *Regeln von l'Hospital*. Hier gilt für den Wert der Ausgangsreaktion an der Stelle **t= T_{0i}** für **lim T_{0i}→0**:

$$\lim_{T_{0i} \to 0} g_{0i}(T_{0i}) = -e^{-\left(\frac{T_{0i}}{T_{RC}} \right)} \cdot \left[-\frac{1}{T_{RC}} \right] = \frac{1}{T_{RC}} \tag{1.19}$$

Für den Verlauf der abklingenden e-Funktion muß der zweite Fall von (1.13) herangezogen werden, da der Fall $0 \le t \le T$ für **T→0** nicht mehr auftritt und direkt in den zweiten Fall $T \le t < \infty$ übergeht.

Somit gilt :

$$\lim_{T \to 0} \tilde{g}_0(t) = \lim_{T \to 0} g_0(T) \cdot e^{-\left(\frac{t-T}{T_{RC}} \right)} = \frac{1}{T_{RC}} e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}} \right)} = h(t) \tag{1.20}$$

Skizziert ergibt sich für den *Grenzfall* für die Eingangsanregung bzw. Ausgangsreaktion:

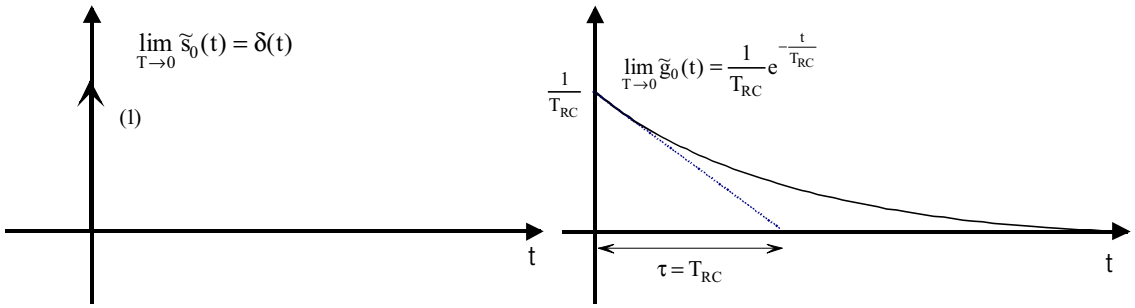


Abbildung 1.23: Grenzfall der Eingangsanregung bzw. Ausgangsreaktion

Die Eingangsanregungsfunktion für diesen Fall wird auch *Diracstoß* genannt, da aus dem Puls ein Stoß geworden ist, der nur zum Zeitpunkt **t=0** definiert ist.
Aus diesem Grund nennt man auch diesen Sonderfall der Anregung *Stoßanregung* bzw. die dazugehörige Ausgangsreaktion *Stoßantwort*.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Der Diracstoß ergibt sich als Grenzübergang einer Rechteckpulsfunktion für **T→0** unter der *Voraussetzung*, daß die Fläche des Rechteckpulses immer konstant bleibt und auf den Wert 1 normiert ist!

$$\lim_{T\to 0} \tilde{s}_0(t) = \delta(t) \tag{1.21}$$

Der *Diracstoß* ist mathematisch folgendermaßen definiert:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.22}$$

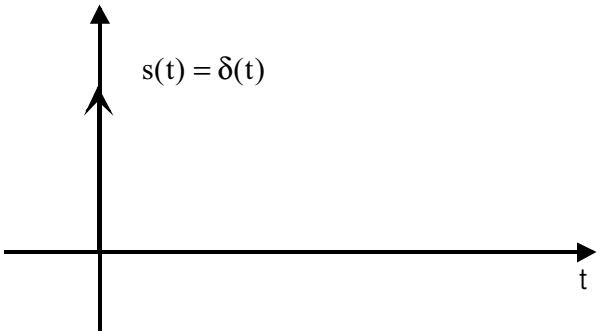


Abbildung 1.24: Diracstoß

Ergebnis:

Die Systemreaktion ist nicht mehr von der Form der Anregung abhängig !

Abschließend seien die Zusammenhänge für den RC-Tiefpaß noch einmal in einem Blockschaltbild dargestellt.

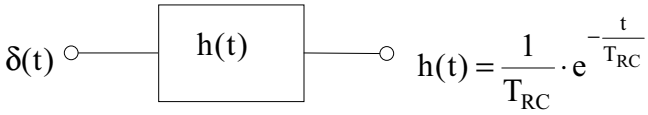


Abbildung 1.25:Blockschaltbild zu RC-Tiefpaß

1.4.2. REAKTION DES SYSTEMS AUF BELIEBIGE ANREGUNGEN

Um nun einen geschlossenen Ausdruck zur Berechnung solcher LTI-Systeme herzuleiten, geht man zunächst von einer *Näherung* aus.
Jede beliebige Eingangsreaktion läßt sich durch sogenannte *Treppenfunktionen* approximieren. Diese stellen nichts anderes dar als eine Aneinanderreihung verschobener Rechteckfunktionen derselben Breite, aber unterschiedlicher Höhe (Amplitude). Die Gewichtung der einzelnen Rechteckfunktionen wird jeweils durch den Funktionswert der zu approximierenden Funktion an derjenigen Stelle, wo die jeweilige Treppenfunktion ihren Mittelpunkt hat, festgelegt.
Durch *Verfeinerung der Intervallbreite* erreicht man, daß der *Approximationsfehler immer geringer* wird, da sich dann die Aneinanderreihung der Treppenfunktionen immer besser an den realen Funktionsverlauf der Eingangsanregungsfunktion anschmiegt.
Im Grenzfall für **T→0** geht die Approximation in die Funktion selbst über.
Auch hier nutzt man Linearität und Zeitinvarianz aus, da sonst eine derartige Aufspaltung nicht zulässig ist!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Idee:

- Approximation der Anregungsfunktion durch die Treppenfunktion
- Ausnutzung von Linearität und Zeitinvarianz
- Verbesserung der Approximation durch Verfeinerung der Intervallbreite

Es ergibt sich somit für eine beliebige Anregungsfunktion **s(t)** folgende Approximationsfunktion **s_a(t):**

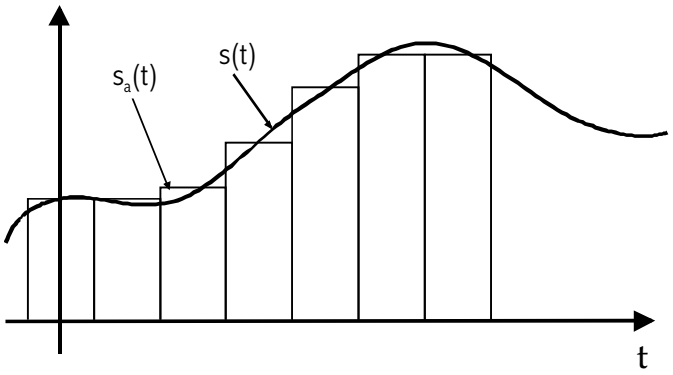


Abbildung 1.26: Approximationsfunktion zu beliebieger Anregungsfunktion

Nutzt man nun Linearität und Zeitinvarianz aus, so ergibt sich für das Beispiel des bekannten RC-Tiefpasses folgende Ausgangsreaktion für den Fall der approximierten Eingangsanregung:

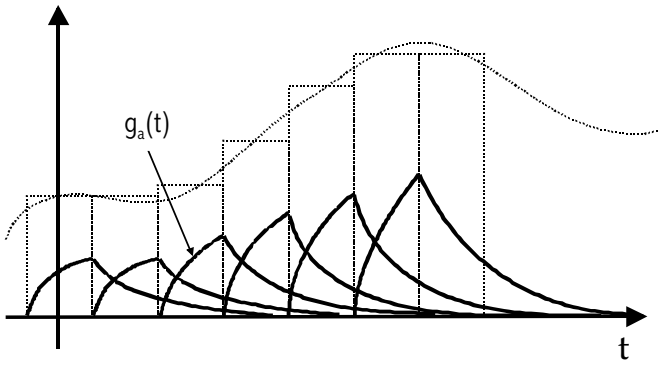


Abbildung 1.27: Ausgangsreaktion zu approximierter Anregungsfunktion

Allgemein ergibt sich die normierte Anregungsfunktion im Falle des Rechteckimpulses mit (1.17) zu:

$$s_0(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow \tilde{s}_0(t) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Die approximierte Gesamtanregungsfunktion ergibt sich als Summe unendlicher Treppenfunktionen, welche jeweils die gleiche Breite besitzen und äquidistant sind. Da es sich bei dem Rechteckimpuls um eine gerade Funktion der Breite **T** handelt, folgt daher allgemein für die *approximierte Eingangsanregungsfunktion*:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot s_0(t-nT) \tag{1.23}$$

Hierbei ist **A** der Gewichtungsfaktor der Rectangular-Funktion. Allgemein läßt sich der *Mittelpunkt* einer *geraden Funktion* durch Nullsetzen des Argumentes der Funktion ermitteln. Wendet man dies hier an, so erhält man für den Mittelpunkt jeder einzelnen Treppe die Stelle **t = nT**.

Die Gewichtung der einzelnen Rechteckfunktionen wird jeweils durch den Funktionswert der zu approximierenden Funktion an der Stelle **t=nT** festgelegt**.** Damit ergibt sich für den jeweiligen Gewichtungsfaktor **A**:

$$A = s(t = nT) = s(nT)$$

Setzt man den Ausdruck für den Gewichtungsfaktor **A** in **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** ein, erhält man ganz allgemein für die approximierte Anregungsfunktion :

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot s_0(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \frac{s_0(t-nT)}{T} \cdot T$$

$$\boxed{s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{s}_0(t-nT) \cdot T} \tag{1.24}$$

Hierbei wurde mit dem Faktor $\frac{T}{T}$ erweitert um den Bezug zu der normierte Form auf die Fläche **1** herzustellen.
Es ist vollkommen klar, daß für hinreichend kleine **T** die Approximationsfunktion sich immer mehr an die Originalfunktion annähert.
Daher gilt für hinreichend kleine **T**:

$$s_a(t) \approx s(t)$$

Bildet man nun den Grenzübergang für **T→0,** so erhält man für die Differenz zwischen der Originalfunktion und der approximierten Funktion daher folgenden Ausdruck:

$$\lim_{T\to 0}\left(s(t) - s_a(t)\right) = s(t) - \lim_{T\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot s_0(t-nT) = 0 \tag{1.25}$$

Der Fehler wird zu **0**, da beide Funktionen im Grenzfall identisch sind, wobei eben **s(t)** unabhängig von der Pulsbreite **T** ist und somit der Limes nur auf die Approximationsfunktion angewendet werden muß.
Wenn man (1.25) unter dieser Annahme umformt, ergibt sich:

$$\lim_{T\to 0} s_a(t) = \lim_{T\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{s}_0(t-nT) \cdot T = s(t) \tag{1.26}$$

Die Approximationsfunktion geht in die Originalfunktion über!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Da für **T→0** die Summe in ein Integral übergeht, folgt unter Verwendung folgender Substitutionen:

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{T\to 0} nT = \tau \\ \lim\limits_{T\to 0} T = d\tau \\ \lim\limits_{T\to 0} \tilde{s}_0(t-nT) = \delta(t-\tau)\end{array}} \Rightarrow \boxed{s(t) = \lim_{T\to 0} s_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau} \qquad (1.27)$$

Es handelt sich also hierbei um eine *ideale Approximation* von s(t) durch *Diracstöße*!
Um nun die *Reaktion des Ausgangs* auf eine derartige Eingangsanregung zu ermitteln, geht man von der *Linearität* und *Zeitinvarianz* des Systems aus. Damit ergibt sich ganz allgemein für die Approximationsfunktion des Ausgangs:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\cdot s_0(t-nT)$$

Linearität **Zeitinvarianz**

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\cdot g_0(t-nT)$$

Dies folgt aus folgenden Überlegungen:

Wenn das System mit $\mathbf{s_0(t)}$ angeregt wird, erhält man am Ausgang die entsprechende Funktion $\mathbf{g_0(t)}$.

Wenn die normierte Anregungsfunktion mit dem Faktor $\frac{1}{T}$ gewichtet wurde, so wird aus Gründen der Linearität die normierte Ausgangsfunktion ebenfalls mit dem Faktor $\frac{1}{T}$ gewichtet.

$$\tilde{s}_0(t) = \frac{s_0(t)}{T} \Rightarrow \tilde{g}_0(t) = \frac{g_0(t)}{T}$$

Damit ergibt sich unter Anwendung der Linearitätsbedingung (1.10):

$$s(t) = \sum a_i \cdot s_i(t) \Rightarrow g(t) = \sum_i a_i \cdot s_i(t)$$

und Zeitinvarianz (1.11)

$$F\{s(t-t_0)\} = g(t-t_0)$$

für den Fall der normierten Eingangsanregung folgender Ausdruck für $\mathbf{g_a(t)}$:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot F\{\tilde{s}_0(t-nT)\} \cdot T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{g}_0(t-nT) \cdot T \qquad (1.28)$$

Führt man auch hier den Grenzübergang für **T→0** durch, geht unter Anwendung folgender Substitutionen die Summe ebenfalls in ein Integral über. Man erhält:

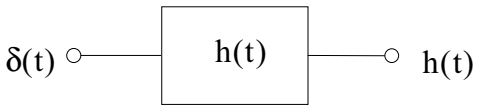
$$\lim_{T\to 0} g_a(t) = \lim_{T\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{g}_0(t-nT) \cdot T$$

$$\lim_{T\to 0} nT = \tau$$
$$\lim_{T\to 0} T = d\tau$$
$$\lim_{T\to 0} \tilde{g}_0(t-nT) = h(t-\tau)$$

$$g(t) = \lim_{T\to 0} g_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \qquad (1.29)$$

Zusammenfassend ergeben sich folgende Identitäten :

1.) Auf $\lim_{T\to 0} \tilde{s}_0(t) = \delta(t)$ reagiert das System mit $\lim_{T\to 0} \tilde{g}_0(t) = h(t)$.



Stoßanregung ***Stoßantwort***

Abbildung 1.28: Stoßanregung - Stoßantwort

2.) Ein beliebiges Signal läßt sich beliebig genau mit Diracstößen approximieren:

$$s(t) = \lim_{T\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{s}_0(t-nT) \cdot T$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau \qquad (1.30)$$

(" Lüke 1.14 ")

3.) Aus Linearität und Zeitinvarianz folgt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = F\{s(t)\} = F\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{s}_0(t - nT) \cdot T \right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot F\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_0(t - nT) \right\} \cdot T$$

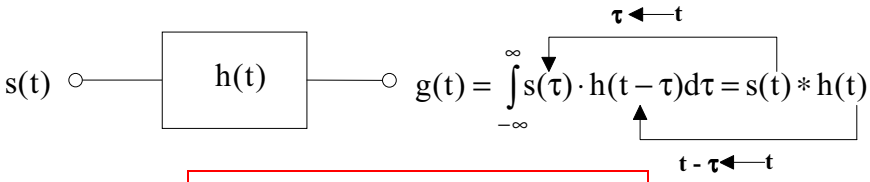
$$\boxed{g(t) = F\{s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{g}_0(t - nT) \cdot T} \qquad (1.31)$$

Die Ausgangsreaktion **g(t)** ergibt sich als Summe der Teilreaktionen gewichtet mit dem Funktionswert der Eingangsreaktion an der jeweiligen Stelle **t=nT**.

Durch Grenzwertbildung für **T→0** geht die Summe in ein Integral über und man erhält:

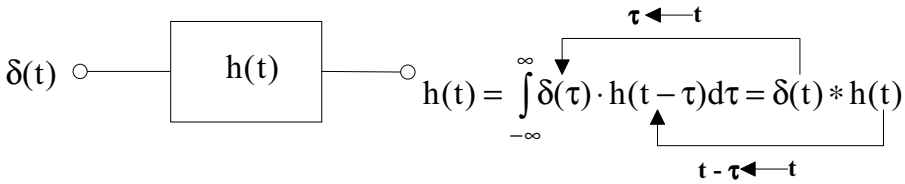
$$\lim_{T \to 0} F\{s(t)\} = \lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \tilde{g}_0(t - nT) \cdot T \qquad (1.32)$$

Für *beliebige Anregungen* ergibt sich daher



$$\boxed{g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = s(t) * h(t)} \qquad (1.33)$$

wobei für die *Stoßanregung* gilt:



$$\boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \delta(t) * h(t)} \qquad (1.34)$$

Abschließend erhält man folgende Identität:

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = s(t) * \delta(t)} \qquad (1.35)$$

Diese daraus resultierenden Integrale nennt man auch Faltungsintegrale, wobei dies in abkürzender Schreibweise durch den Faltungsstern * zum Ausdruck gebracht wird.
Ausgesprochen wird dieser Ausdruck, als "s(t) gefaltet mit h(t)".

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau)\,d\tau = s(t) * h(t)$$

$\tau \leftarrow t$

$t - \tau \leftarrow t$

Um von der abkürzenden Schreibweise auf das entsprechende Integral zu kommen, braucht man nur im Argument formell **t→τ** im Falle der Anregung zu ersetzen bzw. im Argument der Stoßantwort **t→t-τ** zu ersetzen.

Das Integral bedeutet anschaulich nichts anderes, als die Berechnung der jeweiligen Fläche, welche die beiden Funktionen **s(τ)** und **h(t-τ)** im Zeitbereich für ein festes **t** einschließen, wobei die Zeitvariable aber hier nicht mit **t** sondern mit **τ** bezeichnet wird und **t** lediglich einen Parameter darstellt.
Im Integral wird die Stoßantwort jeweils durch Variation des Parameters **t** relativ zur Anregungsfunktion verschoben. Somit ergibt sich für jedes **t** eine völlig neue Überlappungsfläche, welche die beiden Funktionen einschließen.
Im Integral selbst stellt der Wert von **t** also lediglich einen Parameter dar, welcher nur die Relativverschiebung der Anregungsfunktion zur Stoßantwort auf der **τ** Achse beschreibt.

Das Faltungsintegral ist somit ein *Superpositionsintegral*, welches für jeden Wert von **t** einen Funktionswert **g(t)** liefert. Daher stellt der Parameter **t** Im Falle der Ausgangsreaktion wieder die Zeitvariable dar!

Zu dem Begriff der Überlappungsfläche muß man sagen, daß es sich im eigentlichen Sinne nicht lediglich um eine Überlappungsfläche handelt, sondern daß es genau die Fläche ist, welche sich eben durch die *Multiplikation* der einzelnen Funktionswerte ergibt. Daher kann es dann eben vorkommen, daß die Fläche, welche aufgespannt wird, falls beide Funktionswerte an dieser Stelle größer als **1** sind, einen größeren Bereich einschließt, als nur den durch die sichtbare Überlappung beider Funktionen resultierenden Bereich.
Um diese Vorgänge noch einmal zu veranschaulichen, wird in Kapitel 1.5 ein Beispiel zur Berechnung eines Faltungsintegrals geliefert bzw. sei an dieser Stelle auf das Faltungs-Applet verwiesen !

1.5. BEISPIEL ZUR BERECHNUNG EINES FALTUNGSINTEGRALS

Im vorigen Kapitel wurde das sogenannte Faltungsintegral hergeleitet, mit dessen Hilfe die Ausgangsreaktion eines LTI-Systems für eine beliebige Eingangsanregung bei bekannter Stoßantwort d.h. Übertragungsfunktion des Systems berechnet werden kann.

Im Folgenden soll die Ausgangsreaktion eines RC-Tiefpasses auf eine rechteckförmige Anregung exemplarisch berechnet werden, um die eigentliche Funktion des Faltungsintegrals noch einmal zu veranschaulichen.
Da die Sprungantwort bereits in Kap. 1.2 hergeleitet wurde, stellt die nachfolgende Berechnung eine Probe dar.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Gegeben sei der bekannte RC-Tiefpaß mit seiner Stoßantwort (1.20):

$$h(t) = \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)} \cdot \sigma(t)$$

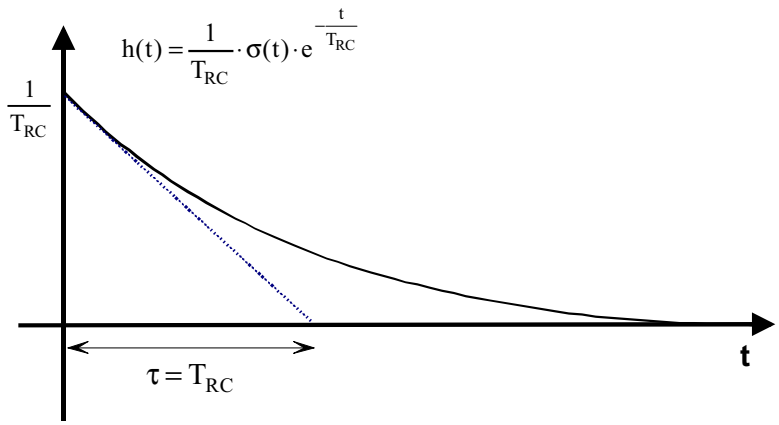


Abbildung 1.29: Stoßantwort einesTiefpasses

Die Multiplikation mit **σ(t)** ist erforderlich, um den Definitionsbereich der Funktion einzuschränken, da die Funktion nur für $t \geq 0$ definiert ist. Dies rührt daher, daß die Anregung erst ab dem Zeitpunkt **t=0** auf das System aufgeschaltet wird.

Als Anregungsfunktion soll der bekannte Rechteckimpuls dienen, wobei dessen Amplitude auf **1** normiert ist.

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Skizziert ergibt sich somit für die normierte Eingangsanregung:

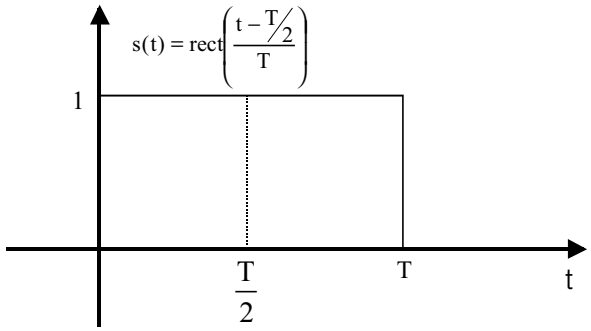


Abbildung 1.30: Rechteckimpuls mit normierter Amplitude

Wenn man nun zunächst formal das Faltungsintegral aufstellt, muß man im Falle der Anregungsfunktion die Variable **t** im Integral durch **τ** ersetzen bzw. im Falle der Stoßantwort den Übergang **t→t - τ** bilden.

Damit ergibt sich zunächst rein formal folgender Ausdruck für das Ausgangssignal:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau - T/2}{T} \right) \cdot \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\left(\frac{t-\tau}{T_{RC}} \right)} \cdot \sigma(t-\tau) d\tau$$

Da es bei der Multiplikation mehrerer Funktionen i.a. sehr schwierig ist, die Integrationsgrenzen auf Anhieb zu erkennen, löst man derartige Integrale halbgraphisch, indem man die Integrationsgrenzen aus einer Skizze ermittelt.

Da die Stoßantwortfunktion für verschiedene **t** relativ zur Anregungsfunktion jeweils verschoben wird, ergeben sich immer neue Integrationsgrenzen für das Integral über **τ.**
Die Anregungsfunktion ist bezüglich ihrer Lage auf der **τ** Achse festgelegt, da der Parameter **t** im Argument nicht enthalten ist.
Somit beginnt man zunächst mit der Darstellung der Stoßantwortfunktion.

1. Schritt: **h(t+τ)=h(τ+t):**

Da **t>0** ist, ist das Signal bezüglich **τ** um den Wert **t** negativ verzögert!

Skizziert ergibt sich somit:

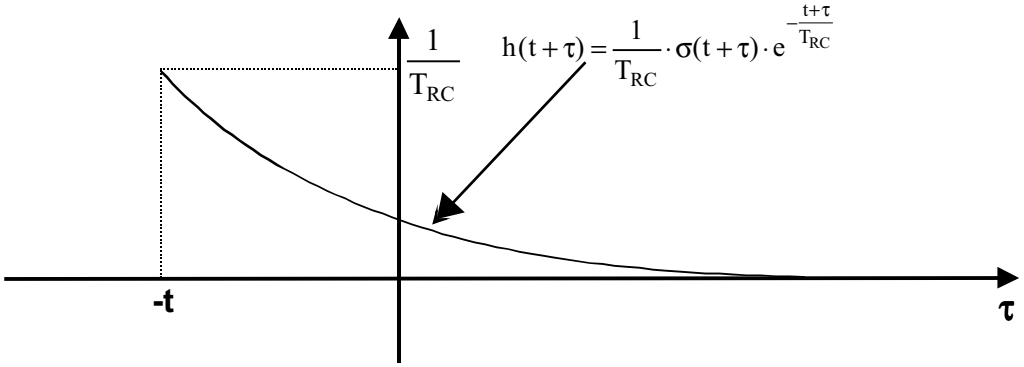


Abbildung 1.31: Verzögerte Stoßantwort

Im nächsten Schritt wird der Übergang von **h(t+τ)** auf **h(t-τ)** gebildet. Bezüglich **τ** ergibt sich durch das negative Vorzeichen eine Spiegelung des Signals an der Ordinate.

2. Schritt: **h(t-τ)=h(-τ+t):**

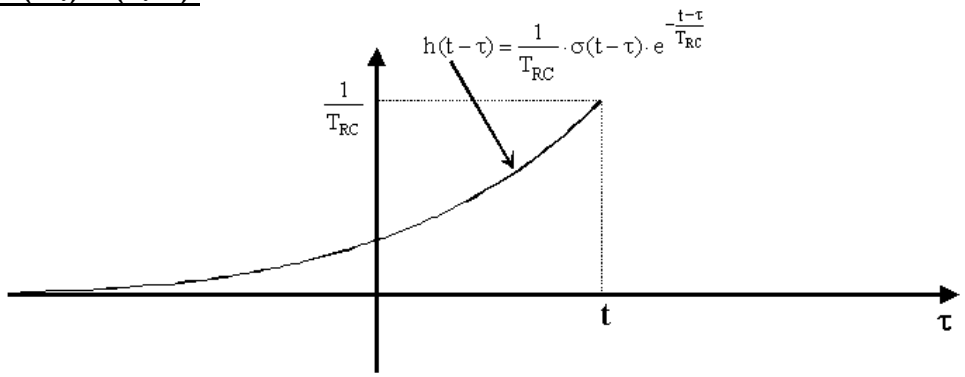


Abbildung 1.32: Spiegelung

Nun hat man das Stoßantwortsignal genau in der Form, wie es im Integranden vorkommt.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Wenn man nun den Parameter **t** variiert, stellt man fest, wie sich das Signal der Stoßantwortfunktion auf der **τ**-Achse entlang bewegt, wobei es für negative **t** in der negativen Hälfte der **τ**-Achse endet und für positive **t** in der positiven Hälfte der **τ**-Achse endet.

Um nun die Integrationsgrenzen für die verschiedenen auftretenden Fälle zu ermitteln, muß man jeweils die relative Lage der Stoßantwortfunktion für alle auftretenden **t** bezüglich der auf der **τ**-Achse zeitlich festgelegten Anregungsfunktion betrachten.

Es muß also im nächsten Schritt der komplette Integrand einschließlich der Anregungsfunktion dargestellt werden, um die einzelnen auftretenden Fälle unterscheiden zu können.

3. Schritt: **Skizzieren des Integranden**:

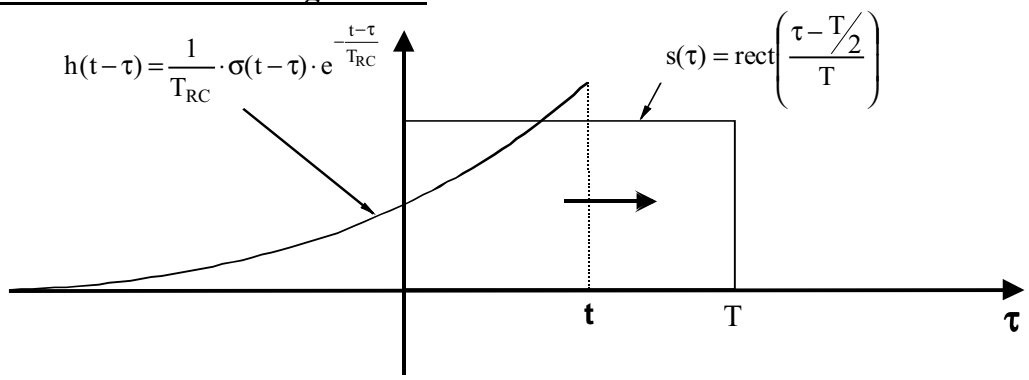


Abbildung 1.33: Skizze des Integranden

Die Fläche, welche bei der Überlappung bis **τ=t** eingegrenzt wird, entspricht dem Wert des Faltungsintegrals an dieser Stelle.

Da die Stoßantwortfunktion im Falle einer Überlappung mit dem Wert **1** multipliziert wird, handelt es sich bei der Überlappungsfläche jeweils um die Fläche, welche unter der e-Funktion eingeschlossen wird, wobei der Rectangular nur die Integrationsgrenzen bestimmt. Für den Fall, daß der Anfangswert der e-Funktion größer als 1 wäre, bzw. die Amplitude der Rectangular-Funktion größer als 1 wäre, würde auch **diejenige** Fläche als Überlappungsfläche gelten, welche im eigentlichen Sinne nicht mit der Rectangular-Funktion sichtbar überlappt, da das Produkt beider Funktionen gebildet werden muß.

Zur Lösung des Faltungsintegrals muß nun anhand der Skizze eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Wenn man sich die Stoßantwortfunktion aus dem negativen unendlichen herkommend vorstellt, so findet bis **t=0** keinerlei Überlappung der beiden Funktionen statt. Somit ist der Wert des Faltungsintegrals in diesem Bereich identisch **0**.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

1.Fall: $t < 0$: → **keine Überlappung!**

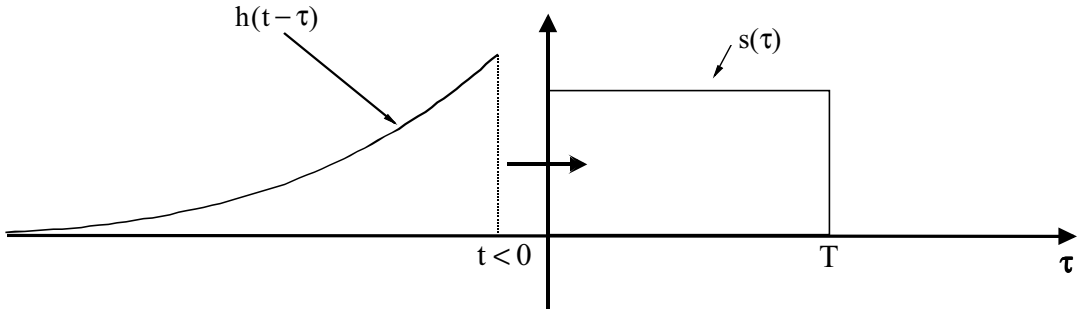


Abbildung 1.34: keine Überlappung

$$h(t-\tau)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\tau - T/2}{T}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{g(t) = 0 \quad \text{für} \quad -\infty < t \le 0}$$

Wenn man nun weiter die Stoßantwortfunktion in positiver **τ**-Richtung verschiebt, kommt es zu einer teilweisen Überlappung beider Funktionen, wobei zunächst die untere Integralgrenze durch die Rectangular-Funktion (**τ_u=0**) und die obere Integralgrenze durch die e-Funktion (**τ_o=t**) festgelegt wird.

Damit folgt:

2.Fall: → **Es findet eine teilweise Überlappung statt:**

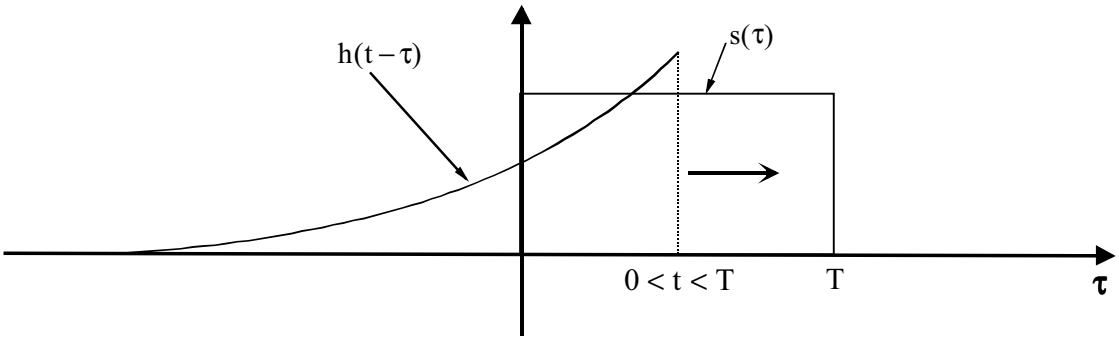


Abbildung 1.35: teilweise Überlappung

$$g(t) = \int_{\tau_u=0}^{\tau_o=t} \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\left(\frac{t-\tau}{T_{RC}}\right)} \cdot d\tau$$

Substitution

$$\boxed{\text{mit} \begin{Bmatrix} t - \tau = u \\ du = -d\tau \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_u = t - \tau_u = t - 0 = t \\ u_o = t - \tau_o = t - t = 0 \end{matrix}}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = -\frac{1}{T_{RC}} \cdot \int_{u_u=t}^{u_o=0} e^{-\left(\frac{u}{T_{RC}}\right)} \cdot du$$

$$= \left[-\frac{1}{T_{RC}} \cdot (-T_{RC}) \cdot e^{-\left(\frac{u}{T_{RC}}\right)} \right]_t^0 = 1 \cdot \left(e^{-\left(\frac{0}{T_{RC}}\right)} - e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)} \right)$$

$$g(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$g(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)} \quad \text{für} \quad 0 \le t < T$$

Wenn nun der Grenzfall **t=T** überschritten wird, ändern sich die Verhältnisse wieder. Das Ende der e-Funktion läuft über die Rectangular-Funktion hinaus und somit wird nun die obere Integralgrenze nicht mehr von der e-Funktion, sondern von der Rectangular-Funktion bestimmt. Für alle **t>T** wird jeweils ein gleich breiter Abschnitt der Breite **T** quasi aus der e-Funktion "herausgeschnitten" und das Integral unter der e-Funktion berechnet.
Für die untere Integralgrenze gilt (τ_u**=0)** und für die obere Integralgrenze ergibt sich (τ_o**=T).**

Somit ergibt sich der 3.Fall zu:

3.Fall: $T \le t < \infty$: **→maximale Überlappung beider Funktionen!**

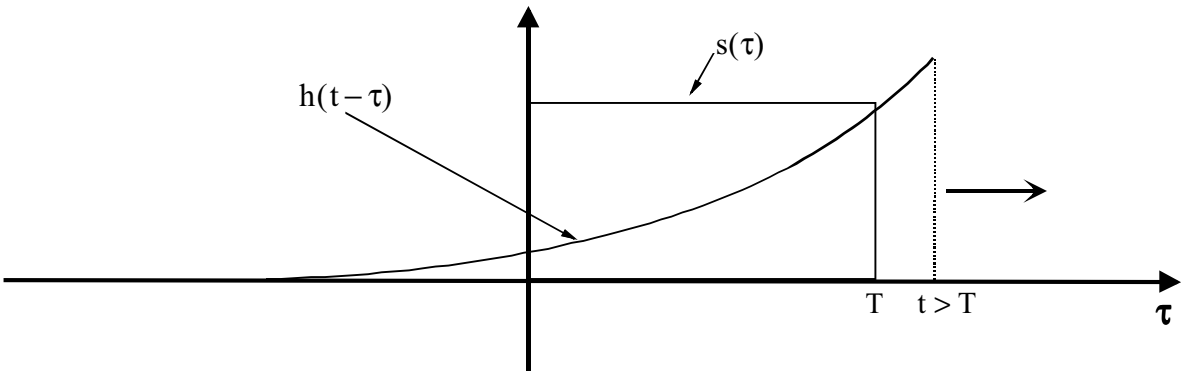


Abbildung 1.36: maximale Überlappung

$$g(t) = \int_{\tau_u=0}^{\tau_o=T} \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\left(\frac{t-\tau}{T_{RC}}\right)} \cdot d\tau$$

Substitution

$$\text{mit} \begin{cases} t - \tau = u \\ du = -d\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_u = t - \tau_u = t - 0 = t \\ u_o = t - \tau_o = t - T \end{matrix}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = -\frac{1}{T_{RC}} \cdot \int_{u_u=t}^{u_o=t-\tau} e^{-\left(\frac{u}{T_{RC}}\right)} \cdot du$$

$$= \left[-\frac{1}{T_{RC}} \cdot (-T_{RC}) \cdot e^{-\left(\frac{u}{T_{RC}}\right)} \right]_{t}^{t-T}$$

$$= \left[e^{-\left(\frac{t-T}{T_{RC}}\right)} - e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)} \right] = e^{-\left(\frac{t-T}{T_{RC}}\right)} \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{T}{T_{RC}}\right)} \right]$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = e^{-\left(\frac{t-T}{T_{RC}}\right)} \left[1 - e^{-\left(\frac{T}{T_{RC}}\right)} \right] \quad \text{für} \quad T < t < \infty$$

Es gilt zusammengefaßt für den Verlauf abschließend für den Verlauf von g(t):

$$g(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)} \right) & \text{für} \quad 0 < t < T \\ \left(1 - e^{-\left(\frac{T}{T_{RC}}\right)} \right) \cdot e^{-\left(\frac{t-T}{T_{RC}}\right)} & \text{für} \quad T < t < \infty \end{cases} \tag{1.36}$$

Skizziert ergibt sich abschließend für **g(t)** folgender Verlauf:

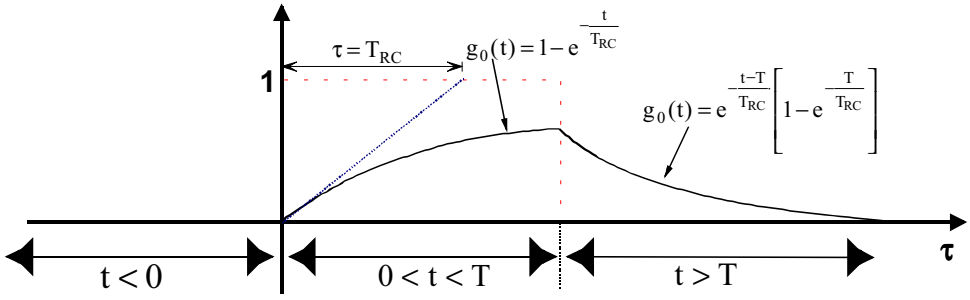


Abbildung 1.37: Ausgangsfunktion g(t)

Dies ist das gleiches Ergebnis, wie in (1.13) beschrieben!

Weitere Faltungsaufgaben siehe Seminar und H.D.Lüke, Signalübertragung!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

1.6. FALTUNGSALGEBRA

In Kapitel 1.4 wurde das Faltungsintegral hergeleitet. Es wurde auch die abkürzende Schreibweise für diese Rechenoperation angegeben.

Bisher galt:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = s(t) * h(t)$$

$\tau \leftarrow t$; $t - \tau \leftarrow t$

Hierin wird verdeutlicht, auf welche Art und Weise man von der abkürzenden Schreibweise auf den formellen Ansatz des Faltungsintegrals gelangt.
Wenn man nun rein formell –gezeigt in obiger Gleichung- das Bildungsgesetz anwendet, gelangt man zu einigen nützlichen Identitäten.
Falls die Anregungsfunktion an der Ordinate gespiegelt ist, erhält man folgenden Ausdruck für das Faltungsintegral:

$$s(-t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \tag{1.37}$$

Falls sich die gespiegelte Form der Eingangsanregung als ungünstig erweist, ergibt sich unter Anwendung einer geeigneten Substitution folgender Ausdruck:

$$s(-t) * h(t) = \int_{\tau_u=-\infty}^{\tau_o=\infty} s(-\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

Substitution

$$\text{mit} \left\{ \begin{array}{l} -\tau = u \\ d\tau = -du \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_u = -\tau_u = -(-\infty) = \infty \\ u_o = -\tau_o = -(\infty) = -\infty \end{array}$$

$$s(-t) * h(t) = -\int_{u_u=+\infty}^{u_o=-\infty} s(u)\cdot h(t+u)du = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\cdot h(t+u)du \tag{1.38}$$

Falls die Stoßantwort in gespiegelter Form gegeben ist gilt:

$$s(t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot h(-(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot h(-t+\tau)d\tau \tag{1.39}$$

Für die Ausgangsreaktion **g(t)** ergibt sich im Falle einer Spiegelung folgende Identität:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

$t \rightarrow -t$

$$g(-t) = s(t) * h(t)\big|_{t=-t} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \Big|_{t=-t} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-t-\tau) d\tau$$

1. Einselement der Faltung*:*

Es wurde gezeigt, daß sich jede Funktion ideal durch Diracstöße approximieren läßt, wobei hier laut (1.27) folgendes gilt:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau$$

Nach näherer Betrachtung stellt man fest, daß es sich bei diesem Integral ebenfalls um ein Faltungsintegral handelt.
Damit ergibt sich folgende Schreibweise:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = s(t) * \delta(t) = s(t) \tag{1.40}$$

Eine Faltung mit einem Diracstoß verändert also die Funktion nicht und somit stellt der *Diracstoß* das *Einselement der Faltung* dar.

Allgemein gilt außerdem folgender Zusammenhang:

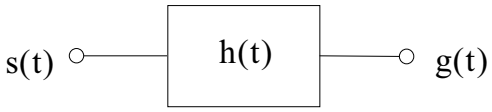


Abbildung 1.38: Zusammenhang zwischen s(t) und g(t)

Betrachtet man nun den speziellen Fall für **h(t)=δ(t)** ergibt sich unter Verwendung obiger Beziehung (1.40) (Einselement):

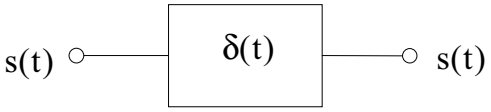


Abbildung 1.39: ideales, verzerrungsfreies System

Da der Diracstoß das Signal nicht verändert, stellt ein System, dessen Übertragungsfunktion der Diracstoß ist, ein *ideales, verzerrungsfreies* System dar!

In den vorigen Beispielen wurde immer die abkürzende Schreibweise für die Faltungsoperation unter Benutzung des sogenannten Faltungsstermes verwendet. Dieser Stern ähnelt sehr dem

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Multiplikationszeichen, was nicht ohne Grund ist, denn wie im folgenden gezeigt wird, genügen Faltungsoperationen den Rechengesetzen der algebraischen Multiplikation.

Hierbei gilt jeweils:

2. Kommutativität der Faltung:

Das *Kommutativgesetz* besagt, daß die Faktoren eines Faltungsproduktes vertauscht werden dürfen.
Es gilt also folgender Zusammenhang:

$$g(t) = s(t) * h(t) = h(t) * s(t) \tag{1.41}$$

Der Beweis dazu ergibt sich durch die formelle Anwendung einer geeigneten Substitution innerhalb des Faltungsintegrals:

BEWEIS:

$$g(t) = \int_{\tau_u=-\infty}^{\tau_o=\infty} s(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau = s(t) * h(t)$$

Substitution

$$\text{mit} \begin{cases} t-\tau = u \\ du = -d\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_u = t-\tau_u = t-(-\infty) = \infty \\ u_o = t-\tau_o = t-\infty = -\infty \end{matrix}$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} s(t-u)\cdot h(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-u)\cdot h(u)\,du$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\cdot s(t-u)\,du = h(t) * s(t)$$

Da sich derselbe Ausdruck in Bezug auf die Argumente ergibt, ist es also völlig gleichgültig, welche Funktion man als Anregung bzw. Stoßantwort bezeichnet.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

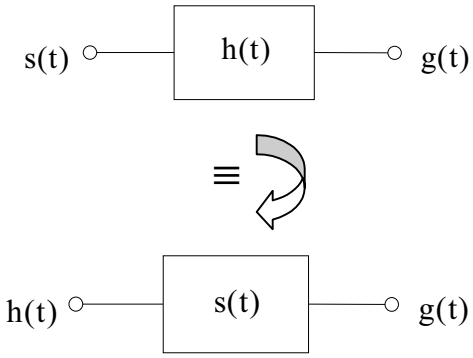


Abbildung 1.40: Kommutativität der Faltung

3. Assoziativgesetz:

Überdies ist die Faltung auch *assoziativ*. Bei Faltung von drei Funktionen miteinander, faltet man zuerst zwei von ihnen miteinander und dann das dabei entstehende Faltungsprodukt mit der dritten Funktion. Hierbei hat die Reihenfolge, die man dabei wählt, keinen Einfluß auf das Ergebnis.

$$f(t) * s(t) * h(t) = \left[f(t) * s(t)\right] * h(t) = f(t) * \left[s(t) * h(t)\right] \tag{1.42}$$

Dies kann mit Hilfe des Faltungsintegrals gezeigt werden !!

BEWEIS:

$$\left[f(t) * s(t)\right] * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\tau) * s(\tau)\right] \cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\tau') \cdot s(\tau - \tau')\right] d\tau' \right] \cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau') \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - \tau') \cdot h(t-\tau)\,d\tau \right] d\tau'$$

Substitution ↓

$$\text{mit} \begin{cases} t' = \tau - \tau' \\ dt' = d\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_u = t - \tau_u = t - (-\infty) = \infty \\ u_o = t - \tau_o = t - \infty = -\infty \end{matrix}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau') \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t') \cdot h(t-(t'+\tau'))dt' \right] d\tau'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau') \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t') \cdot h(t-\tau'-t')dt' \right] d\tau'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau') \cdot [s(t-\tau') * h(t-\tau')] d\tau'$$

$$\boxed{g(t) = f(t) * [s(t) * h(t)]}$$

4. Distributivgesetz:

Zuletzt gilt auch noch das *Distributivgesetz bezüglich der Addition*. Das Faltungsprodukt einer Funktion **f(t)** mit der Summe der Funktionen $\mathbf{h_1(t)}$ und $\mathbf{h_2(t)}$ ist gleich der Summe der beiden Faltungsprodukte $\mathbf{f(t)*h_1(t)}$ und $\mathbf{f(t)*h_2(t)}$.

$$\boxed{f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t)} \qquad (1.43)$$

Der *Beweis* dazu läßt sich mit Hilfe des Faltungsintegrals führen:

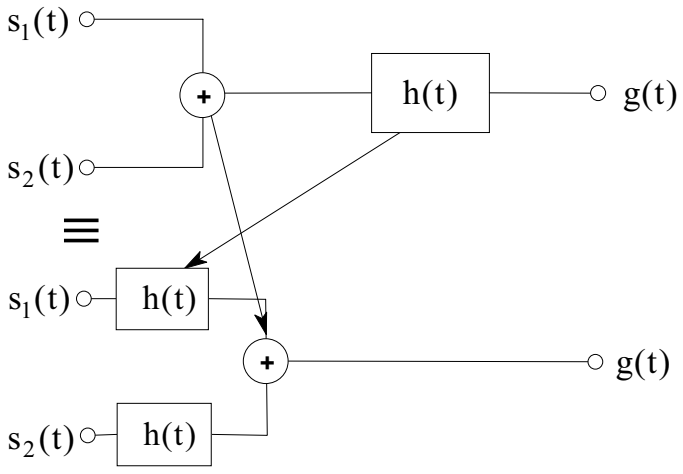
BEWEIS:

$$f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot [h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau)] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h_1(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h_2(t-\tau) d\tau$$

$$\boxed{f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t)}$$

Die Folgerung aus der Distributivität sei noch einmal durch ein *Blockschaltbild* verdeutlicht:



© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

1.7. DIRACSTOß

Bei der Herleitung des Faltungsintegrals wurde schon deutlich gemacht, daß der Diracstoß eine eminent wichtige Funktion ist, da man mit seiner Hilfe jedes beliebige Zeitsignal *ideal approximieren* kann.
Darüber hinaus wurde gezeigt, daß die Faltung einer Zeitfunktion mit einem Diracstoß keinerlei Auswirkungen hinsichtlich der Form auf die Zeitfunktion hat. Daher wird er auch als *Einselement* in der Nachrichtentechnik bezeichnet. Ein System, dessen Übertragungsfunktion der Diracstoß ist, nennt man bedingt durch die Einselement-Eigenschaft *ideal verzerrungsfrei*. Auch dies wurde in Kapitel 1.6 gezeigt.

Der Diracstoß hat darüber hinaus noch weitere wichtige Eigenschaften, die im folgenden näher betrachtet werden sollen.

Geht man von der idealen Approximation einer Zeitfunktion aus und faßt diese als Faltungsprodukt auf, so gilt unter Berücksichtigung der Kommutativität der Faltung:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau = s(t) * \delta(t) \tag{1.44}$$

$$s(t) = \delta(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\cdot s(t-\tau)\,d\tau \tag{1.45}$$

Geht man nun von einem konstanten Eingangssignal aus, folgt unmittelbar unter Anwendung der Kommutativität:

$$a = a\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau = a\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau = \frac{a}{a} = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau = 1} \tag{1.46}$$

→Die Fläche des Diracstoßes beträgt 1.

Wenn man nun noch einmal die Definition für die Approximation einer Zeitfunktion näher betrachtet, folgt für den Fall **t=0** und der Kommutativität der Faltung :

$$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot\delta(-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\cdot s(-\tau)\,d\tau \tag{1.47}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

1. Siebeigenschaft:

Da der Diracstoß nur an der Stelle definiert ist, für die sein Argument verschwindet und an allen anderen Stellen identisch **0** ist, ergibt die Multiplikation der Zeitfunktion mit dem Diracstoß nur an **dieser** Stelle einen Beitrag. Somit siebt der Diracstoß aus der Zeitfunktion nur einen Wert heraus und zwar an der Stelle, bei der sein Argument verschwindet. Dies ist hier an der Stelle **τ=0** der Fall.
Somit läßt sich das Integral folgendermaßen umschreiben:

$$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(0)\cdot\delta(-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\cdot s(+0)\,d\tau$$

Da nur dieser eine Wert der Zeitfunktion eine Konstante darstellt, läßt er sich vor das Integral ziehen und es ergibt sich

$$s(0) = s(0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-\tau)\,d\tau = s(+0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau$$

Also gilt doch offensichtlich :

$$s(\tau)\cdot\delta(\tau) = s(0)\cdot\delta(\tau) \qquad (1.48)$$

Der Diracstoß "siebt" aus dem Verlauf von **s(t)** den Funktionswert heraus, für den sein Argument (hier **τ=0**) verschwindet. Da dieser herausgesiebte Wert nur an der Stelle definiert ist, wo der Diracstoß liegt, bleibt die Multiplikation mit dem Diracstoß erhalten. (Kapitel 1.7.2)

Ersetzt man nun in (1.47) die Variable **t** durch **$t-t_0$,** so erhält man den Fall einer verschobenen Zeitfunktion und es ergibt sich :

$$s(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\cdot s(t-t_0-\tau)\,d\tau \qquad (1.49)$$

0 für $\tau=t-t_0$ **0 für $\tau=0$**

Die zweite Identität ergibt sich durch Anwendung des Kommutativgesetzes mit (1.46).
Faßt man nun die Integrale in (1.49) wieder als Faltungsprodukte auf, so ergibt sich in der abkürzenden Schreibweise:

$$s(t-t_0) = s(t)*\delta(t-t_0) = \delta(t)*s(t-t_0)$$

→Eine verschobene Zeitfunktion läßt sich als Faltungsprodukt aus der nicht verschobenen Zeitfunktion mit einem verschobenen Diracstoß darstellen.

Wenn man in (1.49) die Siebeigenschaft des Diracstoßes anwendet, so erhält man folgenden Ausdruck:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0)\cdot\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau$$

$$= s(t-t_0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = s(t-t_0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau$$

$$s(t-t_0) = s(t-t_0)\cdot 1 = s(t-t_0)\cdot 1$$

Somit wäre auch die Gültigkeit der Siebeigenschaft für verschobene Zeitfunktionen bewiesen, und man erhält zusammengefaßt folgende Identität:

$$s(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = s(t)*\delta(t-t_0) \tag{1.50}$$

Als Blockschaltbild dargestellt ergibt sich:

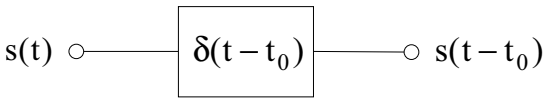


Abbildung 1.41: Siebeigenschaft für verschobene Zeitfunktionen

Der *verschobene Diracstoß* stellt damit die *Stoßantwort* eines *idealen Verzögerungselementes* dar, da er den eigentlichen Signalverlauf der Eingangsanregung nur zeitlich verzögert und nicht hinsichtlich Form bzw. Amplitude verändert.

Abschließend soll noch einmal auf die Bedeutung von Diracstößen in der Nachrichtentechnik näher eingegangen werden:

Bedeutung von Diracstößen in der Nachrichtentechnik:

- Der Diracstoß stellt laut (1.40) das Einselement bzw. Identitätselement der Faltung dar, da er folgenden Zusammenhang realisiert:

$$s(t)*\delta(t) = s(t) \tag{1.51}$$

- In der Systemtheorie stellt der Diracstoß die Stoßantwort eines idealen Verzögerungsgliedes bzw. idealen verzerrungsfreien Systems dar.

$$s(t)*\delta(t-t_0) = s(t-t_0) \tag{1.52}$$

Wobei sich für $\mathbf{t_0=0}$ die Stoßantwort eines idealen, verzerrungsfreien Systems ergibt, was in (1.51) bereits ausgedrückt wird.

Abschließend soll zu diesem Thema noch einmal die Frage näher betrachtet werden, inwieweit der Diracstoß *technisch* von Bedeutung ist.

Es wurde ja bereits gezeigt, daß der Diracstoß für meßtechnische Zwecke als genügend kurzer Rechteckimpuls gedeutet werden kann.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\lim_{T\to 0} \quad \frac{1}{T}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \delta(t)$$

Mathematisch ist dies aber nicht ganz korrekt, da ein Grenzübergang dieser Form eigentlich nicht definiert ist. In der Technik läßt sich ein solcher Grenzübergang natürlich auch nicht ideal realisieren und daher kann man den Diracstoß nur *näherungsweise* erzeugen.
Als **Faustregel** gilt daher, daß jeder genügend kurze Impuls, dessen Pulsbreite schmaler ist als alle Zeitkonstanten des folgenden Systems (Reaktionszeit) als Diracstoß gedeutet werden kann.
Dies rührt daher, daß in einem solchen Fall das nachfolgende System träger reagiert als der Eingangspuls breit ist und somit der Puls als Stoß erscheint.
Hierzu werden im folgenden zwei Beispiele angeführt:

Zunächst soll der Rechteckimpuls betrachtet werden:

BEISPIEL 1:

- **Rechteckimpuls**

Gegeben sei folgender Rechteckimpuls:

$$s(t) = U_0 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

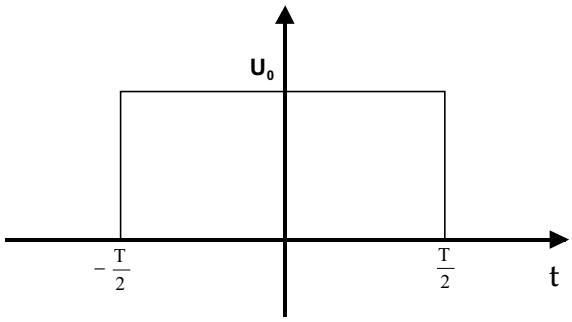


Abbildung 1.42: Rechteckimpuls

Wählt man nun die Pulsbreite zu **T=1µs** und die Amplitude zu $\mathbf{U_0=1V}$ so gilt für die sich ergebende Fläche:

$$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt$$

$$= U_0 \cdot \int_{-T/2}^{T/2} 1\, dt$$

$$= U_0 \cdot T$$

$$A_s = 10^{-6}\,\mathrm{Vs}$$

Unter der Annahme, daß die kürzeste Zeitkonstante des nachfolgenden Systems $\mathbf{T_{rc}=1\ ms}$ ist gilt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$T_{RC} = 1\text{ms} \quad >> \quad T = 1\mu\text{s}$$

Damit ist erfüllt, daß die Zeitkonstante des nachfolgenden Systems wesentlich größer als die Pulsbreite des Rechteckimpulses ist. Somit kann der Rechteckimpuls als Diracstoß interpretiert werden. Die Voraussetzung hierfür ist nur, daß der Rechteckimpuls in der normierten Form vorliegt, d.h. daß seine Fläche gleich **1** ist.
Es gilt also:

$$\Rightarrow \quad U_0 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = U_0 \cdot \frac{T}{T} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cong U_0 \cdot T \cdot \delta(t) = 10^{-6}\text{Vs} \cdot \delta(t)$$

Der approximierte Impuls verhält sich identisch zum Originalimpuls, da gilt:

$$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} 10^{-6}\text{Vs} \cdot \delta(\tau)\text{d}\tau = 10^{-6}\text{Vs} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\text{d}\tau = 10^{-6}\text{Vs}$$

→ Der approximierte Impuls schließt die *gleiche Fläche* ein wie der Originalimpuls!

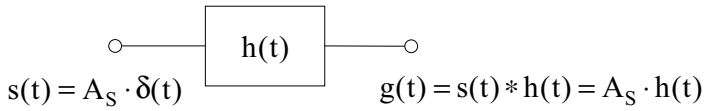


Abbildung 1.43: approximierter Impuls und Originalimpuls

Ein praktisches Beispiel hierzu:

BEISPIEL:

Man betrachte folgende Schaltung:

Ein Impulsgenerator, der das Pulsmuster $s(t) = U_0 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ erzeugt, wird mit seinem Ausgang parallel an zwei Oszilloskope angeschlossen, wobei die Zeitkonstante des ersten Oszilloskops wesentlich geringer als die Pulsbreite des zu messenden Impulses ist, und die Zeitkonstante des zweiten Oszilloskops wesentlich höher als die Pulsbreite des zu messenden Impulses ist. Welche Impulsform zeichnen die beiden Oszilloskope jeweils auf?

Da die Zeitkonstante des ersten Oszilloskops gegenüber der Pulsbreite von **s(t)** wesentlich geringer ist, wird die Impulsform von **s(t)** ohne Verschleifungen ideal aufgezeichnet werden. Somit würde man ein solches Oszilloskop als ideales Oszilloskop bezeichnen, da es die Meßgröße nicht verändert.
Das zweite Oszilloskop hingegen weist Tiefpaßverhalten auf, da dessen Zeitkonstante wesentlich größer als die Pulsbreite von **s(t)** ist. Der Rechteckimpuls wird daher als Diracstoß interpretiert und die aufgezeichnete Kurve gibt den Tiefpaßcharakter des Oszilloskops wieder.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

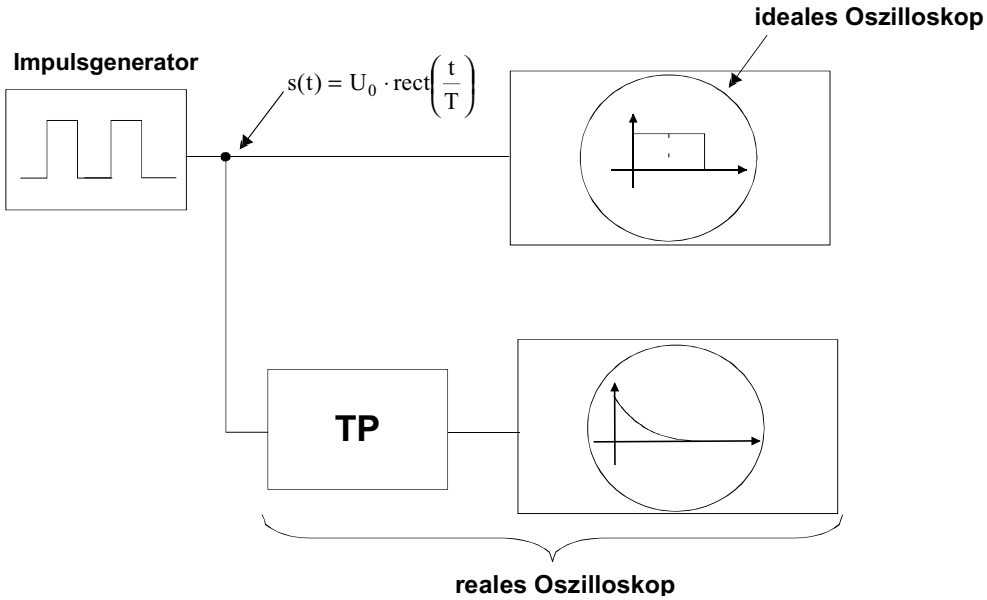


Abbildung 1.44: Tiefpaßcharakter des Oszilloskops

Ebenso ist auch folgende Zeitfunktion zur technischen Realisierung eines Dirac-Impulses möglich:

Beispiel 2: Cosinusimpuls

$$s(t) = U_0 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

Bei dieser Funktion wird der Rechteckimpuls als Fensterfunktion im Zeitbereich verwendet, mit dessen Hilfe ein Ausschnitt der Breite **T** aus der unendlich ausgedehnten Cosinusschwingung ausgeschnitten wird. Man kann also unendlich ausgedehnte Signale zeitlich beschränken, indem man sie mit einem Rechteckimpuls multipliziert.

Skizziert ergibt sich:

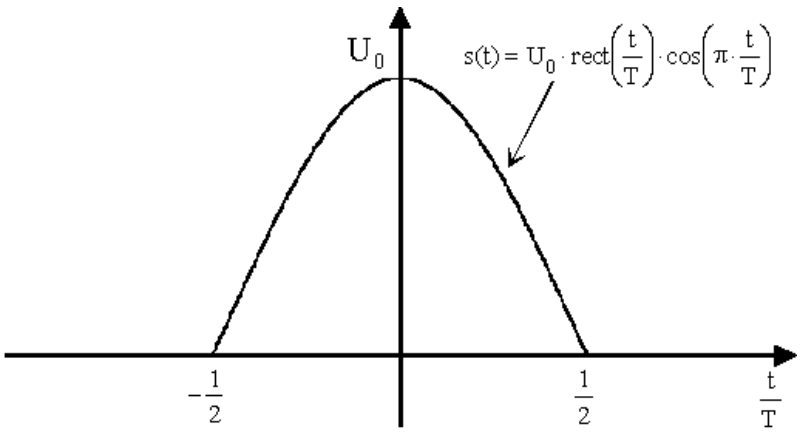


Abbildung 1.45: Multiplikation Cosinus - Rechteck

Die Fläche dieses Pulses beträgt :

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$A_s = U_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$= U_0 \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

Cosinus gerade Funktion ↓

$$\text{mit} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt = 2 \cdot \int_{0}^{T/2} \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$= 2 \cdot U_0 \cdot \int_{0}^{T/2} \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$= 2 \cdot U_0 \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \left[\sin\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right)\right]_0^{T/2} = 2 \cdot U_0 \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{T}{2T}\right)$$

$$A_S = 2 \cdot U_0 \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot U_0 \cdot T$$

Die hier ermittelte Fläche muß das Gewicht des approximierten Diracstoßes darstellen und somit ergibt sich für die ideale Zeitfunktion, wobei auch hier die konkreten Werte aus dem ersten Beispiel angenommen werden:

$$s(t) \cong \frac{2}{\pi} \cdot U_0 \cdot T \cdot \delta(t) \cong \frac{2}{\pi} \cdot 10^{-6}\,\text{Vs} \cdot \delta(t)$$

⇒ Es handelt sich auch hierbei um eine ideale Testfunktion, um die Stoßantwort von Systemen zu bestimmen, für den Fall, daß die Zeitkonstante des nachfolgenden Systems wesentlich größer als die Pulsbreite T ist.

1.7.1. Gewicht und Linearkombinationen von Diracstößen

Wenn man einen Diracstoß, der mit einer Konstanten multipliziert wird, mit einer Zeitfunktion faltet, ergibt sich entsprechend dem Faltungsintegral:

$$[a \cdot \delta(t)] * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [a \cdot \delta(\tau)] \cdot s(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [a \cdot \delta(\tau)] \cdot s(t-0) d\tau$$

$$= a \cdot s(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot d\tau$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\boxed{[a \cdot \delta(t)] * s(t) = a \cdot s(t)} \tag{1.53}$$

→Die Zeitfunktion bleibt hinsichtlich der Form unverändert und wird lediglich mit der Konstanten des Diracstoßes multipliziert. Eine derartige Multiplikation, die lediglich Einfluß auf die Amplitude des Signals hat, nennt man auch *Gewicht.* Im Falle des Diracstoßes stellt diese Konstante die Fläche des Diracstoßes dar und wird bei Skizzen symbolisch in Klammern neben den Diracstoß geschrieben. Dies veranschaulicht nachfolgende Abbildung:

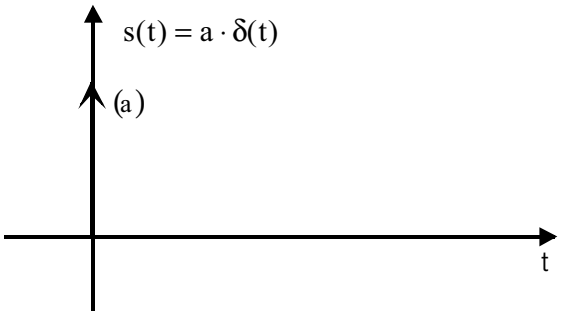


Abbildung 1.46: Diracstoß

(1.53) macht überdies deutlich, daß Konstanten in Faltungsprodukten ganz allgemein aus dem Faltungsprodukt herausgezogen und zusammengefaßt werden können. Dies liegt einfach daran, daß die Faltung eine Integration ist und Konstanten bei einer Integration vorgezogen werden dürfen.

Folgerungen:

$$[s(t) \cdot \delta(t - t_0)] * s(t) = [s(t_0) \cdot \delta(t - t_0)] * s(t) = s(t_0) \cdot s(t - t_0)$$

Eine Zeitfunktion, aus der durch Multiplikation mit einem verschobenen Diracstoß ein Wert herausgesiebt wird, ergibt gefaltet mit der Zeitfunktion selbst die um denselben Betrag verschobene Zeitfunktion gewichtet mit dem Funktionswert, der zuvor aus ihr herausgesiebt wurde. Dies gilt eben deshalb, da nach der Siebung aus der Zeitfunktion eine Konstante geworden ist, die man , wie oben hergeleitet, vor das Faltungsprodukt ziehen darf!

Ebenso ergibt sich unter Anwendung des Distributivgesetzes der Faltung :

$$\begin{aligned}[a_1 \cdot \delta(t) + a_2 \cdot \delta(t)] * s(t) &= [a_1 \cdot \delta(t)] * s(t) + [a_2 \cdot \delta(t)] * s(t) \\ &= a_1 \cdot s(t) + a_2 \cdot s(t) \\ &= (a_1 + a_2) \cdot s(t) \\ &= [(a_1 + a_2) \cdot \delta(t)] * s(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{[a_1 \cdot \delta(t) + a_2 \cdot \delta(t)] = (a_1 + a_2) \cdot \delta(t)} \tag{1.54}$$

Hiermit ist gezeigt, daß Gewichte von Diracstößen, die an der *gleichen* Stelle liegen, *addiert* werden dürfen.

Zur Veranschaulichung ist dieser Zusammenhang im folgenden skizziert:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$a_1 \cdot \delta(t-\tau) + a_2 \cdot \delta(t-\tau) = [a_1 + a_2] \cdot \delta(t-\tau)$$

$\downarrow$

$t-\tau=0 \rightarrow t=\tau$ und $\tau=t$

Für den Fall, daß die Zeitvariable **t** ist, liegen die Diracstöße jeweils an der Stelle **$t=\tau$,** da für diesen Wert ihr Argument verschwindet. Da sie an der gleichen Stelle liegen, läßt sich der Ausdruck zu einem Diracstoß zusammenfassen, dessen Gewicht sich aus der Summe der einzelnen Gewichte ergibt.

Damit ergibt sich für den Fall, daß die Zeitvariable **t** ist, folgende Skizze:

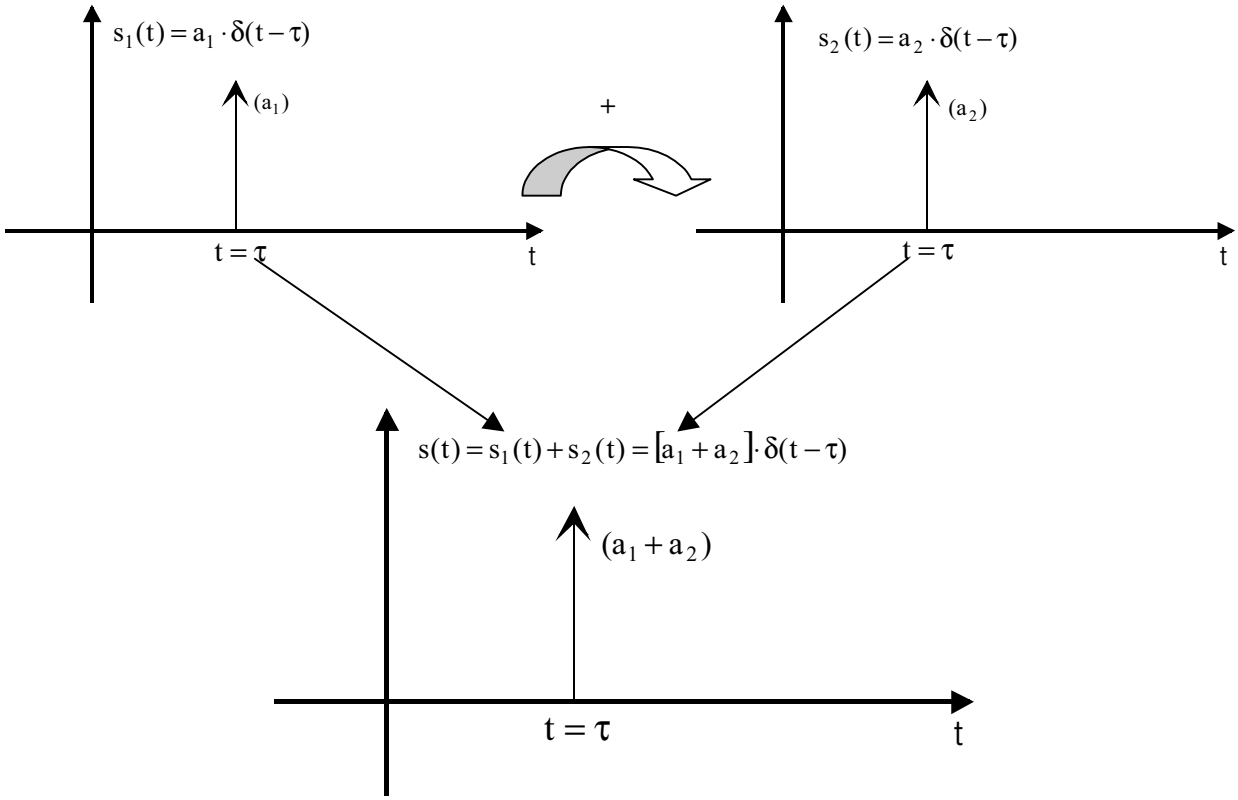


Abbildung 1.47: Gewicht und Linearkombinationen von Diracstößen

1.7.2. SIEBEIGENSCHAFT VON DIRACSTÖßEN

Es wurde schon zuvor gezeigt, daß ein Diracstoß, multipliziert mit einer Zeitfunktion aus dieser genau einen Wert heraussiebt und zwar an der Stelle, wo das Argument des Diracstoßes verschwindet.
Es gilt daher für nicht verschobene Diracstöße mit (1.50):

$$s(t) \cdot \delta(t) = s(0) \cdot \delta(t) \tag{1.55}$$

und für verschobene Diracstöße ergibt sich (1.52):

$$s(t) \cdot \delta(t - t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \tag{1.56}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Diese Zusammenhänge seien noch einmal durch eine Skizze verdeutlicht:

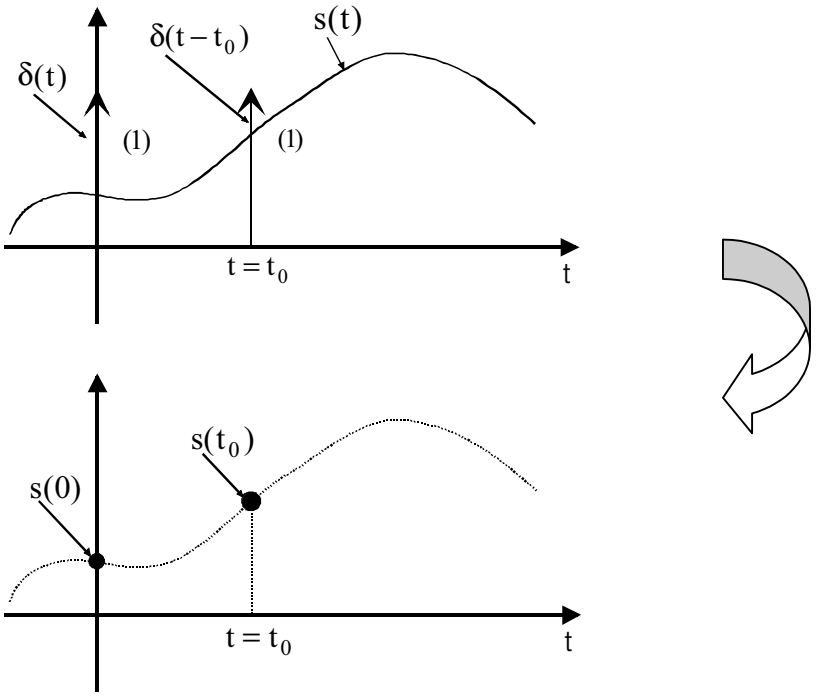


Abbildung 1.48: Siebeigenschaft des Diracstoßes

1.7.3. DIRACSTOß UND DEHNUNGSFAKTOR

Wenn die Zeitvariable des Diracstoßes mit einem Faktor gewichtet ist, ergibt sich folgende Identität:

$$\delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t) \tag{1.57}$$

Der Beweis hierzu soll mit Hilfe des Faltungsintegrals geführt werden. Wir schreiben:

$$\delta(at) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a\tau) \cdot s(t-\tau) d\tau$$

Substitution

$$\mu = a \cdot \tau \Rightarrow \tau = \frac{\mu}{a}$$

$$d\mu = a \cdot d\tau \Rightarrow d\tau = \frac{d\mu}{a}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\delta(at)*s(t)=\begin{cases}\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mu)\cdot s\left(t-\frac{\mu}{a}\right)d\mu & \text{für} \quad a>0\\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mu)\cdot s\left(t-\frac{\mu}{a}\right)d\mu & \text{für} \quad a<0\end{cases}$$

$$\delta(at)*s(t)=\frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mu)\cdot s(t-0)d\mu$$

$$=\frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mu)\cdot s(t)d\mu$$

$$=\frac{s(t)}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mu)d\mu$$

$$\delta(at)*s(t)=\frac{s(t)}{|a|}\cdot 1$$

$$\boxed{\text{mit} \qquad s(t)=s(t)*\delta(t)=\delta(t)*s(t)}$$

$$\boxed{\delta(at)*s(t)=\frac{1}{|a|}\cdot s(t)=\frac{1}{|a|}\cdot\left[\delta(t)*s(t)\right]=\frac{1}{|a|}\cdot\delta(t)*s(t)} \qquad \text{q.e.d}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich ergibt sich die Identität aus Gl. 1.57.

Für **a=-1** ergibt sich:

$$\boxed{\delta(-t)=\frac{1}{|-1|}\cdot\delta(t)=\delta(t)} \qquad (1.58)$$

Lüke 1.29 → Der Diracstoß ist demnach eine gerade Funktion.

Dies wird auch in folgender Skizze veranschaulicht:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

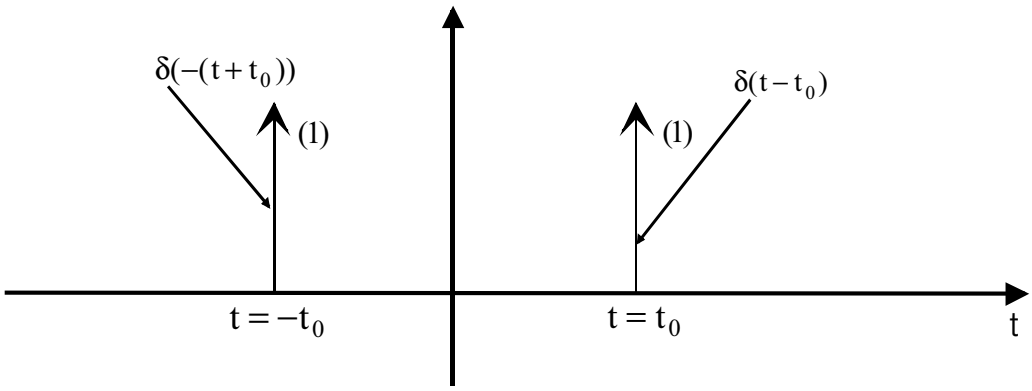


Abbildung 1.49: Diracstoß

Um auf diese Skizze zu kommen, muß man einfach im Argument die **–1** ausklammern.

1.7.4. VERSCHIEBUNG DES DIRACSTOßES

Es wurde auch bereits in (1.50) gezeigt, daß die Faltung einer Zeitfunktion mit einem verschobenen Diracstoß die Zeitfunktion lediglich um denselben Betrag verzögert:

$$s(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = s(t - t_0)$$

Faßt man den verzögerten Diracstoß als Stoßantwortfunktion eines Systems auf, so stellt dieses ein **ideales Laufzeitglied** dar.

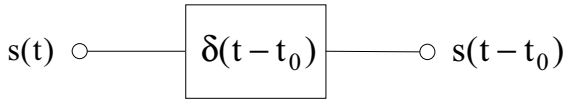


Abbildung 1.50: ideales Laufzeitglied

1.7.5. INTEGRATION DES DIRACSTOßES

Aus der Einselementeigenschaft des Diracstoßes bei der Faltung wurde bereits folgender Zusammenhang (1.44) hergeleitet:

$$s(t) = s(t) * \delta(t) = \delta(t) * s(t)$$

Für den Fall einer Sprunganregung mit **s(t)=σ(t)** gilt daher :

$$\sigma(t) = \sigma(t) * \delta(t) = \delta(t) * \sigma(t)$$

Bildet man nun das Faltungsintegral, so erhält man:

$$\sigma(t) = \delta(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot \sigma(t - \tau) d\tau \qquad (1.59)$$

Da die Sigma-Funktion an der Ordinate bezüglich der **τ-Achse** gespiegelt ist, schränkt sie den Definitionsbereich in Richtung positiver **τ-Werte** ein. Innerhalb ihres Definitionsbereiches

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

bewirkt sie lediglich eine Multiplikation mit dem konstanten Wert **1** und braucht somit lediglich in den Integrationsgrenzen berücksichtigt zu werden.
Für den Definitionsbereich und damit für die Integrationsgrenzen gilt:

$$\sigma(t-\tau)=\begin{cases}1 & \text{für } t-\tau\geq 0\Rightarrow\tau\leq t\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\Bigg\}\begin{matrix}\tau_u=-\infty\\ \tau_o=t\end{matrix}$$

Damit reduziert sich (1.53) zu:

$$\Rightarrow\qquad \boxed{\sigma(t)=\int_{\tau_u=-\infty}^{\tau_o=t}\delta(\tau)d\tau} \tag{1.60}$$

"Lüke 1.33"

Der Einheitssprung ist das laufende Integral über den Diracstoß.
Umgekehrt folgt durch Differenzieren:

$$\frac{d}{dt}\sigma(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \tag{1.61}$$

Mit der Leibniz´schen Regel

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}s(t,\tau)d\tau=\frac{d}{dt}b(t)\cdot s(t,b(t))-\frac{d}{dt}a(t)\cdot s(t,a(t))+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{d}{dt}s(t,\tau)d\tau$$

angewandt auf (1.61) folgt :

$$\frac{d}{dt}\sigma(t)=1\cdot\delta(t)-0\cdot\delta(-\infty)+0$$

$$\Rightarrow\qquad \boxed{\frac{d}{dt}\sigma(t)=\delta(t)} \tag{1.62}$$

Lüke 1.34

Der Diracstoß ist die Ableitung des Einheitssprungs.
Dies ist eine sehr wichtige Identität, welche zeigt, daß durch die Einführung des Diracstoßes sich auch Funktionen mit Sprungstellen differenzieren lassen.

1.8. Integration und Differentiation von Signalen

Wenn man nun das Faltungsintegral für den Fall aufstellt, daß die Anregungsfunktion oder die Stoßantwortfunktion die Sprungfunktion darstellt, so ergibt sich die in Kapitel 1.7.1 hergeleitete Eigenschaft der Sigma-Funktion in allgemeiner Form:

Es gilt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = s(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau \qquad (1.63)$$

Für die Integrationsgrenzen gilt das gleiche, wie bereits hergeleitet:

$$\sigma(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } t-\tau \geq 0 \Rightarrow \tau \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \begin{cases} \tau_u = -\infty \\ \tau_o = t \end{cases}$$

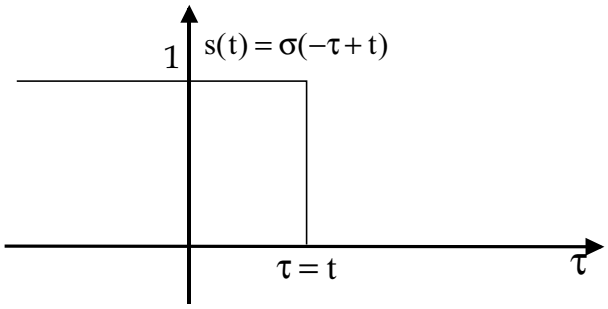


Abbildung 1.51: Sprungfunktion

Somit gilt ganz allgemein nach Umformung von (1.63):

$$g(t) = s(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau) d\tau \qquad (1.64)$$

Die Faltung mit dem Einheitssprung bewirkt eine laufende Integration über das Signal. Somit stellt ein System mit der *Sigma-Funktion* als *Stoßantwort* einen *idealen Integrierer* dar.
Alle daraus folgenden Zusammenhänge sollen nun noch einmal in Blockschaltbildern verdeutlicht werden:

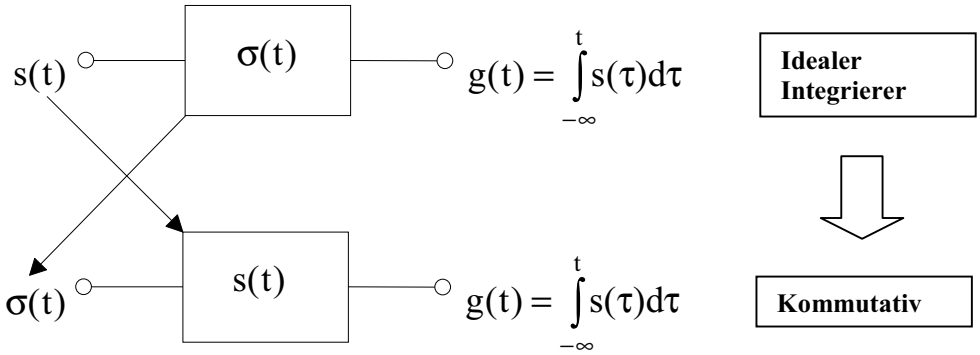


Abbildung 1.52: Blockschaltbild eines idealen Integrators

Die Anregung eines Systems der Stoßantwort **h(t)** mit einem Sprung liefert die Sprungantwort **a(t)** als Integral über die Stoßantwort.

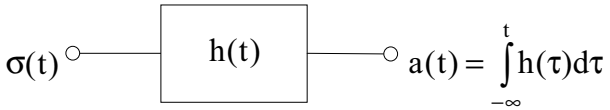


Abbildung 1.53: Sprungantwort als Integral über die Stoßantwort

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$a(t) = \sigma(t) * h(t) = h(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \tag{1.65}$$

Ganz allgemein sind Stoßantwort und Sprungantwort eines Systems untereinander durch Integration bzw. Differentiation verknüpft:

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \\ h(t) &= \frac{d}{dt} a(t) \end{aligned} \tag{1.66}$$

Abschließend noch einige Systembeispiele zu den verschiedenen Zusammenhängen für Differentiation und Integration von Signalen:

Systembeispiele:

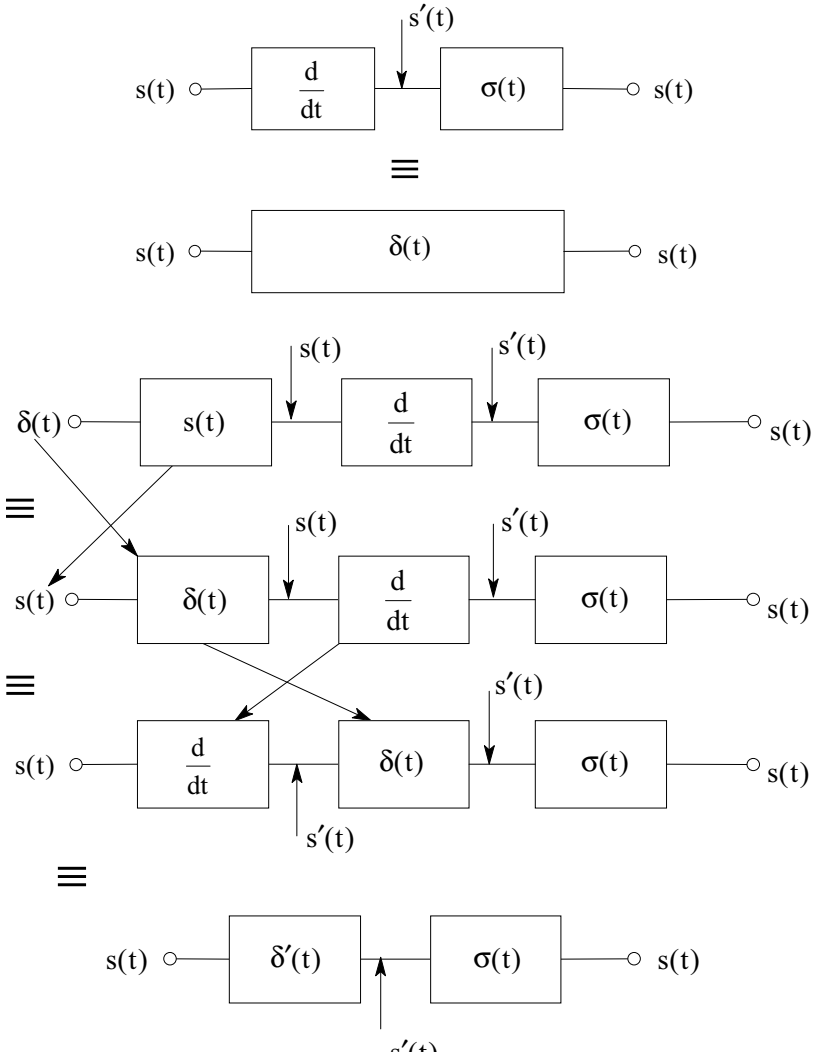


Abbildung 1.54: Systembeispiel

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Exkurs:

In dem letzten Blockschaltbild tauchte die Ableitung des Diracstoßes auf. Diese Funktion wird auch **Doppeldiracstoß** genannt, da sie folgenden Verlauf besitzt:

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$$

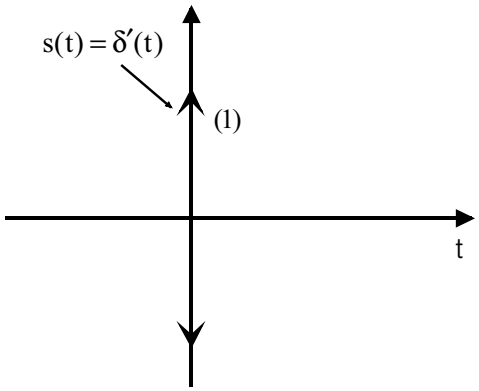


Abbildung 1.55: Doppeldiracstoß

Der Doppeldiracstoß hat *differenzierenden Charakter*. Faltet man eine Zeitfunktion mit dem Doppeldiracstoß, so ergibt sich die Ableitung der Zeitfunktion als Ergebnis des Faltungsproduktes.

$$s(t) * \delta'(t) = s'(t) \tag{1.67}$$

Um die Ableitung des Diracstoßes mathematisch herzuleiten, bedient man sich einer sogenannten Funktionalapproximation des Diracstoßes. Man approximiert also diese unstetige Funktion durch eine bekannte Pulsfunktion, bei der man die Pulsbreite bei Konstanthaltung der Fläche gegen **0** gehen läßt.

Eine Möglichkeit zur Approximation des Diracstoßes ist der **Gauß-Impuls**.

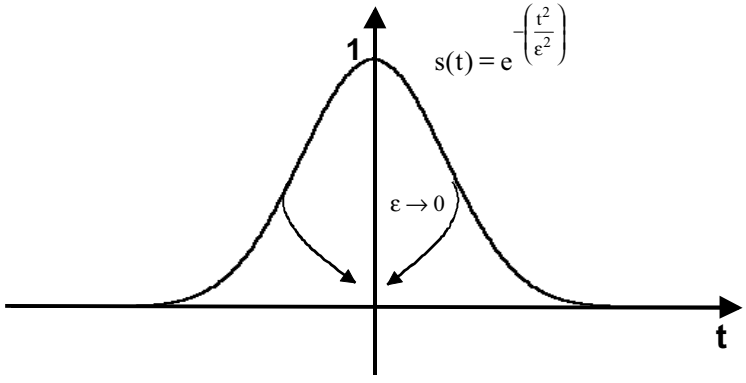


Abbildung 1.56: Gaußimpuls

Diese Approximation gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß der Gaußimpuls auf die Fläche **1** normiert ist, da die Fläche des Diracstoßes ebenfalls **1** ist.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Daher muß für die Gewichtung **A** des Gaußimpulses gelten:

$$\frac{1}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{\varepsilon^2}}\, dt$$

Die Lösung dieses bestimmten Integrals ergibt sich mit Hilfe einer Integraltabelle, wobei hier folgender Zusammenhang gilt (**Teubner S.185 Nr. 3, Bronstein S.66 Nr.3**) :

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \cdot x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \qquad \text{für} \quad \alpha > 0}$$

Da es sich bei dem Gaußimpuls um eine gerade Funktion handelt, gilt folgende Umformung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \cdot x^2}\, dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \cdot x^2}\, dx = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{\text{mit} \quad x = t \quad \alpha = \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\varepsilon^2}}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{\varepsilon}} = \sqrt{\pi} \cdot \varepsilon$$

Somit ergibt sich für den auf die Fläche **1** normierten Gaußimpuls :

$$\boxed{\tilde{s}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\left(\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right)}}$$

Der approximierte Diracstoß ergibt sich aus dem Grenzübergang des Gaußimpulses für $\varepsilon \to 0$.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right)}$$

Um nun den Doppeldiracstoß herzuleiten, muß man die Ableitung dieses Grenzfalles bilden. Somit ergibt sich folgender Ausdruck für den Doppeldiracstoß:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\delta'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{dt} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-t^2}{\varepsilon^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-t^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{-2t}{\varepsilon^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-2t}{\varepsilon^2} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-t^2}{\varepsilon^2}}$$

$$\boxed{\delta'(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2t}{\varepsilon^3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-t^2}{\varepsilon^2}}} \qquad (1.68)$$

Diese Gleichung stellt die Funktionalapproximation des Doppeldiracstoßes dar.
Skizziert ergibt sich folgender Signalverlauf:

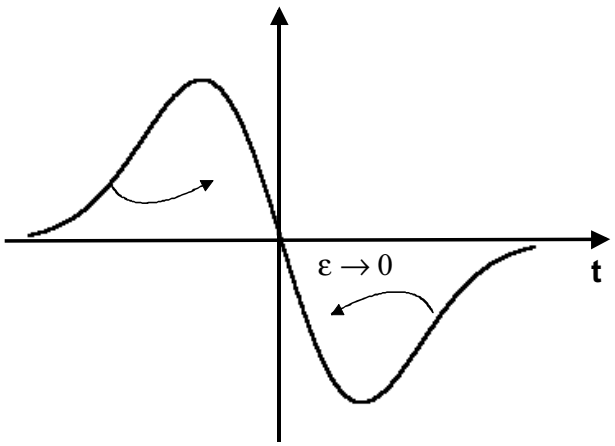


Abbildung 1.57: Funktionalapproximation des Doppeldiracstoßes

Weitere wichtige Beziehungen (http://www.nv.et-inf.uni-siegen.de/pb2/theory/content.htm):

1. Der Doppeldiracstoß ist eine ungerade Funktion. Demnach gilt:

$$\boxed{\delta'(-t) = -\delta'(t)} \qquad (1.69)$$

2. Für beliebige Ableitungen des Diracstoßes der Ordnung **n** gilt folgender Gleichungszusammenhang:

$$\boxed{\delta^{(n)}(-t) = (-1)^{(n)} \cdot \delta^{(n)}(t)} \qquad (1.70)$$

3. Außerdem gilt auch (siehe http://www.nv.et-inf.uni-siegen.de/pb2/theory/content.htm):

$$\delta(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_{0i}) \cdot \frac{1}{|\dot{\varphi}(t_{0i})|}$$

φ(t) ist dabei eine Funktion, die nur einfache Nullstellen enthält (t_{01}, t_{02}, t_{03},... t_{0n}).

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

4. Unter Beachtung der Siebeigenschaft des Diracstoßes

$$\delta(t)\cdot f(t) = f(0)\cdot\delta(t)$$

ergibt sich unter der Voraussetzung, daß **f(t)** eine gewöhnliche Funktion ist und keine Unstetigkeiten enthält durch beidseitiges Differenzieren folgender Ausdruck:

$$\left(\frac{d}{dt}\delta(t)\right)\cdot f(t) + \delta(t)\cdot f'(t) = f(0)\cdot\delta'(t)$$

$$\delta'(t)\cdot f(t) + \delta(t)\cdot f'(0) = f(0)\cdot\delta'(t)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f(t)\cdot\delta'(t) = f(0)\cdot\delta'(t) - \delta(t)\cdot f'(0)} \qquad (1.71)$$

Die Multiplikation einer Zeitfunktion mit einem Doppeldiracstoß läßt sich durch die Differenz eines mit **f(0)** gewichteten Doppeldiracstoßes und eines mit **f´(0)** gewichteten Diracstoßes ermitteln.

5. Wenn man jetzt **f(t)=t** setzt, dann folgt abschließend:

$$\boxed{t\cdot\delta'(t) = -\delta(t)} \qquad (1.72)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2. FOURIER-TRANSFORMATION

Bisher wurden Systeme und die Signalübertragung über Systeme im Zeitbereich durch Faltungsintegrale beschrieben. Nun werden Signale und Systeme im **Frequenzbereich** betrachtet und die Beschreibung der Signalübertragung erfolgt durch einfache *algebraische Produkte*.

Zur Einführung in die Fouriertransformation dient:

2.1. EIGENFUNKTIONEN VON LTI-SYSTEMEN

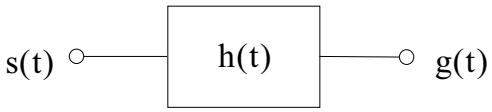


Abbildung 2.1: LTI-System

Die Beschreibung eines solchen LTI-Systems erfolgte bisher im Zeitbereich mit Hilfe des bekannten Ansatzes:

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

$$g(t) = h(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(t-\tau) d\tau$$

Die Ausgangsreaktion eines LTI-Systems ergibt sich also durch Berechnung eines Superpositionsintegrals, wobei die Ausgangsreaktion in Bezug auf die Form der Eingangsanregung meist einen völlig anderen Verlauf besitzt.

Nun gibt es aber Funktionen, die in LTI-Systemen nicht hinsichtlich ihrer Form sondern lediglich hinsichtlich ihrer Amplitude beim Durchlaufen über ein solches System verändert werden. Solche Funktionen werden **Eigenfunktionen** genannt, und für diesen Fall der Anregung gilt folgender Zusammenhang:

$$g_E(t) = s_E(t) * h(t) = \lambda_E \cdot s_E(t) \tag{2.1}$$

Die Ausgangsreaktion ergibt sich aus der Multiplikation der Eingangsanregung mit einem Vorfaktor, wobei dieser auch als *Eigenwert* bezeichnet wird. Somit geht die Faltung im Falle einer Eigenfunktion in eine *algebraische Multiplikation* über!

Es ist bekannt aus der technischen Beobachtung, daß Sinus- und Cosinusschwingungen in linearen Systemen Sinus- und Cosinusschwingungen bleiben. Da LTI-Systeme ganz allgemein durch *lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* beschrieben werden, ist es naheliegend, die Eigenfunktion entsprechend dem allgemeinen Lösungsansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten anzusetzen.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Dieser Lösungsansatz ist aus der Mathematik bekannt und lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} &s(t) = e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \lambda = j \cdot \lambda_0 \Rightarrow \\ &s(t) = e^{j\lambda_0 t} = \cos(\lambda_0 t) + j \cdot \sin(\lambda_0 t) \end{aligned}} \tag{2.2}$$

Daher scheint es sinnvoll, folgenden Ansatz einer Eigenfunktion zu überprüfen:

$$s_E(t) = \cos(2\pi \cdot f \cdot t) + j\sin(2\pi \cdot f \cdot t) = e^{j2\pi \cdot f \cdot t}$$

Setzt man diesen Ansatz in das Faltungsintegral ein, so ergibt sich für die Ausgangsreaktion:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi \cdot f(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau} \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} d\tau \end{aligned}$$

$$\boxed{g(t) = e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau} \tag{2.3}$$

Da sich Summen innerhalb der Exponenten von e-Funktionen in Produkte aufspalten lassen, läßt sich der von der eigentlichen Zeitvariablen **t** abhängige Term aus dem Integral ausklammern. Dieser stellt in Bezug auf die Integrationsvariable **τ** lediglich eine Konstante dar.
Der verbleibende Integrand ist nur noch von **τ** abhängig und stellt in Bezug auf die Variable **t** ebenfalls eine Konstante dar. Somit ergibt sich die Ausgangsreaktion, bei der die Zeitvariable wiederum **t** darstellt, aus der Multiplikation einer Funktion in **t** und einem von **t** unabhängigen Term in **τ**.

Es gilt für die Ausgangsreaktion laut (2.1):

$$g_E(t) = s_E(t) * h(t) = \lambda_E \cdot s_E(t)$$

Die Ausgangsreaktion ist gleich der mit einem konstanten Faktor gewichteten Eingangsanregung. Somit ist mit Hilfe des Faltungsintegrals bewiesen, daß es sich tatsächlich bei Sinus- und Cosinusschwingungen um Eigenfunktionen handelt.
Dies rührt einfach daher, daß man die Abhängigkeit von dem Parameter **t** bedingt durch den Exponentialansatz ausklammern kann und man somit eine Auftrennung der Eingangsanregung in einen von **t** abhängigen und einen von **t** unabhängigen Teil erreicht. Eine solche Auftrennung ist nur im Falle von e-Funktionen möglich!

Führt man die oben definierten Begriffe Eigenfunktion und Eigenwert in dem Ergebnis ein so ergibt sich:

$$g(t) = e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \quad = s_E(t) \cdot \lambda_E$$

Das übriggebliebene Integral stellt den zugehörigen Eigenwert der Eigenfunktion dar, wobei dieser von der Frequenz **f** abhängt. Da dieser Eigenwert in Zusammenhang mit der Stoßantwort

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

des Systems im Zeitbereich steht, welche durch die Integration nur in den Frequenzbereich transformiert wird, stellt dieser Ausdruck auch die *Übertragungsfunktion* des LTI-Systems *im Frequenzbereich* dar.

$$\lambda_E(f) = H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \tag{2.4}$$

Reihenschaltung:

Betrachtet man nun die Reihenschaltung von zwei Systemen unterschiedlicher Stoßantworten ergibt sich bei Anregung mit einer Eigenfunktion folgender Zusammenhang:

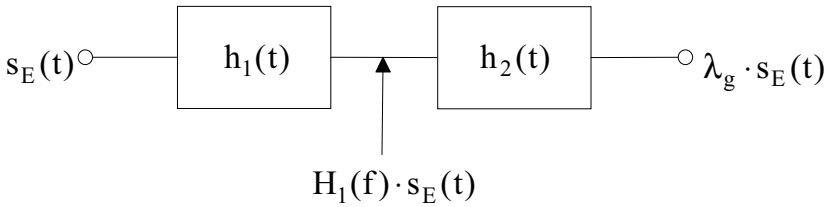


Abbildung 2.2: Reihenschaltung von zwei Systemen

Hier gilt unter Berücksichtigung des Kommutativgesetzes bzw. Assoziativgesetzes der Faltung folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} g(t) &= [s_E(t) * h_1(t)] * h_2(t) \\ &= [H_1(f) \cdot s_E(t)] * h_2(t) \\ &= H_1(f) \cdot [s_E(t) * h_2(t)] \\ g(t) &= H_1(f) \cdot H_2(f) \cdot s_E(t) \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhält man also für die Ausgangsreaktion der Reihenschaltung zweier Systeme:

$$g(t) = H_1(f) \cdot H_2(f) \cdot s_E(t) = \lambda_g \cdot s_E(t) \tag{2.5}$$

Nachdem das erste Teilfaltungsprodukt ermittelt wurde, kann der Eigenwert $\mathbf{H_1(f)}$, welcher von **t** unabhängig ist, als Konstante vor das Restfaltungsprodukt geschrieben werden. Bei dem Restfaltungsprodukt ergibt sich als Ergebnis ebenfalls eine algebraische Multiplikation der Eigenfunktion mit dem zweiten Eigenwert $\mathbf{H_2(f)}$.
Der Gesamteigenwert ergibt sich aus der Multiplikation der Eigenwerte der Teilsysteme, da diese eben für das Restfaltungsprodukt Konstanten in **t** darstellen, welche jeweils vorgezogen werden dürfen!
Hierin wird dann auch der eigentliche Vorteil der Betrachtung im Frequenzbereich deutlich:

Die *Faltung* geht in eine *algebraische Multiplikation* über, wobei die Teilübertragungsfunktionen im Frequenzbereich im Falle einer Hintereinanderschaltung multipliziert werden dürfen!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2.2. DAS FOURIER-INTEGRAL

Im vorigen Kapitel wurde eine neue Berechnungsmethode für das Übertragungsverhalten von LTI-Systemen im sogenannten Frequenzbereich hergeleitet. Es wurde gezeigt, daß man im Falle der Anregung mit einer Eigenfunktion einen speziellen Ausdruck für das Faltungsintegral erhält, wobei sich die Ausgangsreaktion hier aus der mit dem sogenannten Eigenwert gewichteten Eingangsanregung ergibt. Der Eigenwert wandelt die Stoßantwort eines Systems aus dem Zeitbereich in eine Funktion im Frequenzbereich um. Dieser Ausdruck wird auch *Übertragungsfunktion im Frequenzbereich* genannt, wobei die Umwandlung auch als *Transformation* bezeichnet wird. Diese stellt im Grunde genommen nichts anderes dar, als die Darstellung einer beliebigen Zeitfunktion als eine Summe von verschiedenartig gewichteten Sinus- und Cosinusschwingungen in Abhängigkeit von der Frequenz **f,** wobei die Gewichtung in der transformierten Funktion **H(f)** enthalten ist. Jeder Punkt dieser Funktion in **f** stellt also eine Sinus- bzw. Cosinusschwingung im Frequenzbereich dar. Es wird später noch gezeigt werden, daß Sinus- und Cosinusschwingungen im Frequenzbereich Dirac-Linien darstellen.
Ganz allgemein wird diese Transformation einer Zeitfunktion in den Frequenzbereich auch als **Fourier-Transformation** bezeichnet, wobei der Begriff des *Spektrums* ebenfalls gebräuchlich ist.

Somit stellt der in (2.4) hergeleitete Ausdruck für die Übertragungsfunktion die allgemeine Transformationsvorschrift für die Fouriertransformation dar.

Es gilt :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad = \mathcal{F}\{h(t)\} \tag{2.6}$$

wobei **H(f)** die Fouriertransformierte von **h(t)** darstellt. Der Parameter der Zeitfunktion kann beliebig gewählt werden (häufig auch **τ).** Wenn dies konsequent durchgeführt wird, erhält man das gleiche Ergebnis.
Diese Transformationsvorschrift wird auch abkürzend mit folgenden “Transformationshanteln“ dargestellt:

$$h(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

Falls man aus einem gegebenen Spektrum die unbekannte Zeitfunktion ermitteln möchte, erfolgt die Rückgewinnung über die sogenannte inverse Fouriertransformierte, wobei hier folgende Vorschrift gilt:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t} df = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} \tag{2.7}$$

$$H(f) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Gültigkeit für diese Rücktransformationsvorschrift ergibt sich durch Einsetzen von (2.6) in (2.7) Dabei erhält man zunächst das sogenannte Fourier´sche Integraltheorem, wobei hier jetzt eine ganz allgemeine Zeitfunktion in τ angesetzt ist:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \right] \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t} df$$

Faßt man die Exponentialterme zusammen, ergibt sich nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot (t-\tau)} df \right] d\tau$$

mit $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi \cdot f \cdot (t-\tau)} df = \delta(t-\tau)}$

folgt:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = s(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau = s(t) \cdot 1$$

Damit wäre die Vorschrift der inversen Fouriertransformierten bewiesen (siehe http://www.nv.et-inf.uni-siegen.de/pb2/theory/content.htm).

Einheitenmäßig gilt für die Fouriertransformierte **S(f)** von **s(t)** :

$$[S(f)] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \right] = \begin{cases} Vs = \frac{V}{Hz} \\ As = \frac{A}{Hz} \end{cases}$$

Da die Dimension der Bezugsvariable **f** im Nenner auftaucht, nennt man diesen Ausdruck auch *Amplitudendichtespektrum*.

Da LTI-Systeme im Frequenzbereich beschrieben werden sollen, genügt es natürlich nicht, nur das Spektrum einer beliebigen Zeitfunktion zu berechnen. Für diese Aufgabe wird das Äquivalent im Frequenzbereich zum Faltungstheorem im Zeitbereich benötigt, da die vollständige Beschreibung eines LTI-Systems im Zeitbereich mit Hilfe des Faltungstheoremes erfolgt.

Faltungstheorem im Frequenzbereich:

Geht man ganz allgemein von dem Faltungsprodukt im Zeitbereich aus

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

und führt auf beiden Seiten die Fouriertransformationsvorschrift durch, so erhält man für die Fouriertransformierte der Ausgangsreaktion:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau \right] \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt$$

Durch Aufspaltung des Integranden und Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, d\tau\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt\, d\tau$$

Substitution $\Rightarrow$ mit $\begin{bmatrix} t - \tau = u \\ dt = du \\ t = u + \tau \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot e^{-j2\pi \cdot f (u+\tau)}\, du\, d\tau$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot u}\, du}_{\mathbf{H(f)}} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau}\, d\tau$$

Da **H(f)** unabhängig von **τ** ist, läßt es sich herausziehen und man erhält:

$$G(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau}\, d\tau}_{\mathbf{S(f)}} \cdot H(f)$$

Das Restintegral stellt die Fouriertransformierte von **s(τ)** dar und damit ergibt sich abschließend folgende Identität:

$$\Rightarrow \qquad \boxed{G(f) = S(f) \cdot H(f)} \qquad (2.8)$$

Somit ist gezeigt, daß die *Faltung im Zeitbereich* durch eine Transformation in den *Frequenzbereich* in *eine algebraische Multiplikation* der beteiligten Spektren übergeht.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Zusammengefaßt ergibt sich für das Faltungstheorem:

$$g(t) = s(t) * h(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(f) = S(f) \cdot H(f) \tag{2.9}$$

Überdies gilt, daß eine Multiplikation im Zeitbereich in eine Faltung der beteiligten Spektren im Frequenzbereich übergeht!

$$s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S(f) = S_1(f) * S_2(f) \tag{2.10}$$

Beide Identitäten gelten in beide Richtungen. Die Zusammenhänge gelten auch für die inverse Fouriertransformation!

Fouriertransformation des Diracstoßes:

Wenn man das Faltungstheorem im Zeit- und Frequenzbereich auf folgenden bereits bekannten Zusammenhang anwendet,

$$s(t) * \delta(t) = s(t)$$

so ergibt sich im Frequenzbereich:

$$S(f) \cdot \mathcal{F}\{\delta(t)\} = S(f)$$

Damit dieser Zusammenhang erfüllt ist, muß gelten:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \tag{2.11}$$

Demnach ist die Fouriertransformierte des Diracstoßes die Konstante **1**.

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 \tag{2.12}$$

2.3. BEISPIEL: FOURIERTRANSFORMATION DES EXPONENTIALIMPULSES

In diesem Kapitel soll die Fouriertransformierte des Exponentialimpulses berechnet werden. Wie bereits aus Kapitel 1.4 bekannt ist, ist der Exponentialimpuls die Stoßantwort eines RC-Tiefpasses.

Es gilt laut (1.19) folgender Zusammenhang für die Stoßantwort des RC-Tiefpasses:

$$h(t) = \frac{1}{T_{RC}} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)}$$

wobei der Verlauf folgendermaßen aussieht:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

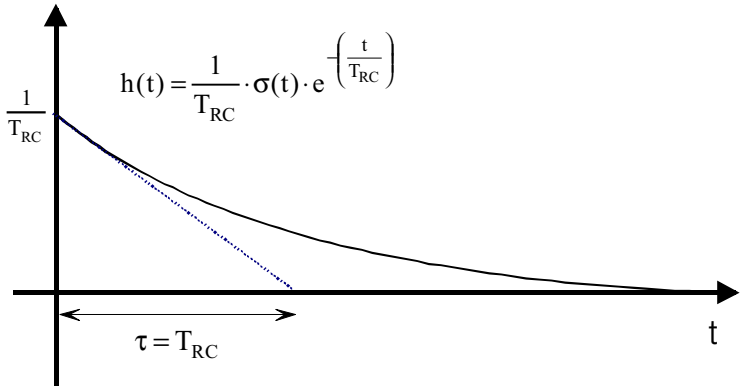


Abbildung 2.3: Stoßantwort des RC-Tiefpasses

Aus diesem Signalverlauf soll die Fouriertransformierte berechnet werden. Setzt man hierfür formal das Fourierintegral an, so ergibt sich:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_{RC}} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt$$

Berücksichtigt man die Multiplikation mit der Sigma-Funktion in den Integrationsgrenzen und faßt die Exponenten der e-Funktionen zusammen, so ergibt sich :

$$H(f) = \frac{1}{T_{RC}} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}} + j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t\right)} dt$$

$$= \frac{1}{T_{RC}} \cdot \frac{(-1)}{\frac{1}{T_{RC}} + j \cdot 2\pi \cdot f} \cdot \left[e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}} + j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t\right)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{(-1)}{1 + j \cdot 2\pi \cdot T_{RC} \cdot f} \cdot \left[e^{-\left(\frac{1}{T_{RC}} + j \cdot 2\pi \cdot f\right)(\infty)} - e^{-\left(\frac{1}{T_{RC}} + j \cdot 2\pi \cdot f\right)(0)} \right]$$

$$= \frac{(-1)}{1 + j \cdot 2\pi \cdot T_{RC} \cdot f} \cdot [0 - 1]$$

$$\boxed{H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi \cdot T_{RC} \cdot f}} \qquad (2.13)$$

Das Ergebnis ist eine komplexe Funktion in **f** (Frequenzbereich) !

Bringt man dieses Ergebnis auf die Form $Z = a + jb$, so ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi \cdot T_{RC} \cdot f}$$

Konj. komplex erweitern

$$= \frac{1 - j2\pi \cdot T_{RC} \cdot f}{(1 + j2\pi \cdot T_{RC} \cdot f) \cdot (1 - j2\pi \cdot T_{RC} \cdot f)}$$

$$= \frac{1 - j2\pi \cdot T_{RC} \cdot f}{1 + (2\pi \cdot T_{RC} \cdot f)^2}$$

$$H(f) = \underbrace{\frac{1}{1 + (2\pi \cdot T_{RC} \cdot f)^2}}_{\mathbf{Re\{H(f)\}}} - j\underbrace{\frac{2\pi \cdot T_{RC} \cdot f}{1 + (2\pi \cdot T_{RC} \cdot f)^2}}_{\mathbf{Im\{H(f)\}}} \qquad (2.14)$$

Skizziert ergibt sich für den Realteil:

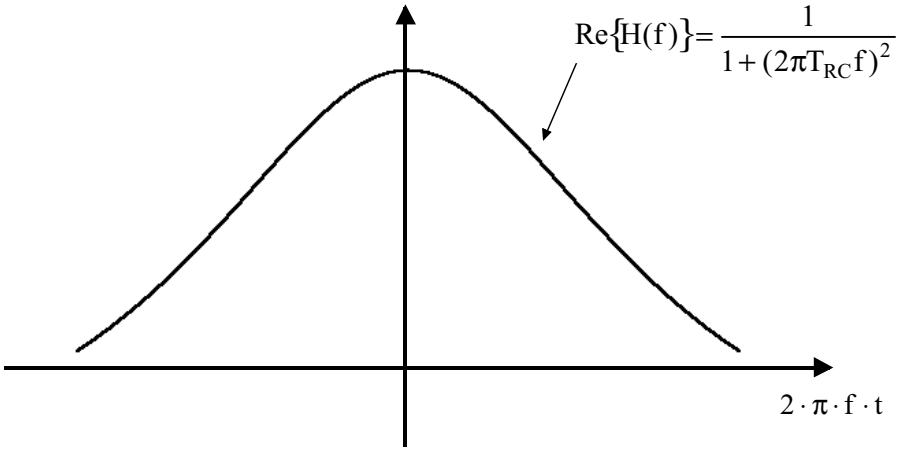


Abbildung 2.4: Skizze Realteil

Und für den Imaginärteil ergibt sich:

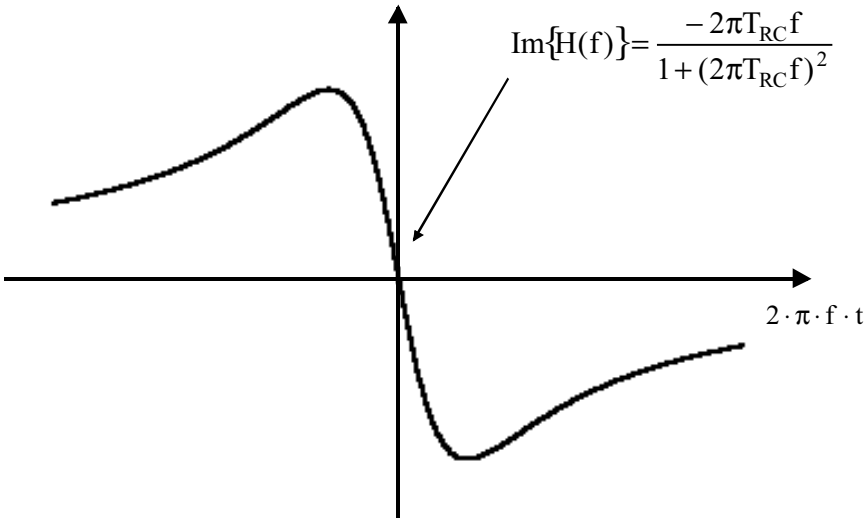


Abbildung 2.5: Skizze Imaginärteil

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Für den Betrag des Spektrums erhält man mit (2.14):

$$\begin{aligned}|H(f)| &= \sqrt{\mathrm{Re}\{H(f)\}^2 + \mathrm{Im}\{H(f)\}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1+(2\pi\cdot T_{RC}\cdot f)^2}{\left[1+(2\pi\cdot T_{RC}\cdot f)^2\right]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+(2\pi\cdot T_{RC}\cdot f)^2}} \\ |H(f)| &= \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi\cdot T_{RC}\cdot f)^2}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Skizziert ergibt sich hierbei für den Betrag folgender Verlauf :

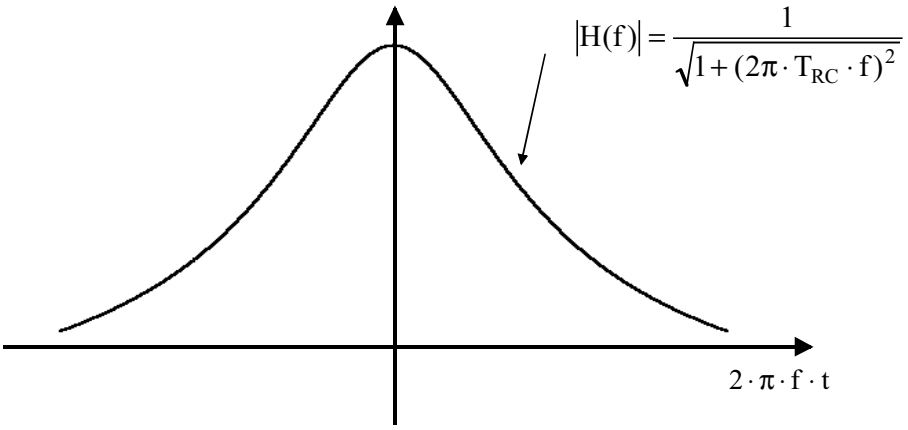


Abbildung 2.6: Betragsverlauf

Betrachtet man nun den Verlauf von Realteil und Imaginärteil der Funktion **H(f)**, so stellt man fest, daß der *Realteil* eine *gerade Funktion* (Achsensymmetrie) und der Imaginärteil eine *ungerade Funktion* in **f** ist (Punktsymmetrie), also gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{H(f)\} &= \mathrm{Re}\{H(-f)\} \\ \mathrm{Im}\{H(f)\} &= -\mathrm{Im}\{H(-f)\}\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dieser Zusammenhang läßt sich auch direkt aus dem Fourierintegral ableiten durch folgende Umformung:

$$\begin{aligned}H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt \\ H(f) &= \mathrm{Re}\{H(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{H(f)\}\end{aligned} \tag{2.17}$$

H(f) setzt sich also ganz allgemein aus Real- und Imaginärteil zusammen!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Was die Symmetrieeigenschaften angeht, ergibt sich für ein reelles Zeitsignal **h(t)**:

$$\mathrm{Re}\{H(-f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\cos(-2\pi ft)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\cos(2\pi ft)\,dt = \mathrm{Re}\{H(f)\}$$

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x)}$$

Der Realteil von **H(f)** ist eine gerade Funktion in **f,** da im Fourierintegral nur im Argument des Cosinus die Frequenzvariable auftaucht und der Cosinus eine gerade Funktion ist.

Für den Imaginärteil von **H(f)** ergibt sich entsprechend für reelle Zeitsignale:

$$\mathrm{Im}\{H(-f)\} = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\sin(-2\pi ft)\,dt = +\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\sin(2\pi ft)\,dt = -\mathrm{Im}\{H(f)\}$$

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$$

Der Imaginärteil von H(f) ist eine ungerade Funktion in **f,** da im Fourierintegral nur im Argument des Sinus die Frequenzvariable auftaucht und der Sinus eine ungerade Funktion ist.
Das *Spektrum* setzt sich also aus einem *geraden Anteil* und einem *ungeraden Anteil* zusammen!

Wir betrachten nun den Amplituden bzw. Betragsverlauf des Spektrums und schreiben:

$$|H(f)|^2 = \mathrm{Re}\{H(f)\}^2 + \mathrm{Im}\{H(f)\}^2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}|H(-f)|^2 &= \mathrm{Re}\{H(-f)\}^2 + \mathrm{Im}\{H(-f)\}^2\\ &= \mathrm{Re}\{H(f)\}^2 + (-\mathrm{Im}\{H(f)\})^2\end{aligned}$$

$$\boxed{|H(-f)|^2 = \mathrm{Re}\{H(f)\}^2 + \mathrm{Im}\{H(f)\}^2 = |H(f)|^2} \qquad (2.18)$$

Der Betragsverlauf des Spektrums ist ebenfalls eine gerade Funktion in **f**. Dies folgt durch Einsetzen der zuvor ermittelten Symmetriebedingungen für Realteil und Imgainärteil des Spektrums.

Da das Spektrum **H(f)** eine *komplexe Funktion* in **f** darstellt, läßt es sich vollständig durch Darstellung von *Betrag und Phase* beschreiben. Für den Phasengang einer komplexen Funktion gilt ganz allgemein:

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}\right) + k(f)\cdot\pi \qquad k(f) = \begin{cases}0, & \mathrm{Re}\{H(f)\} \geq 0\\ 1, & \mathrm{Im}\{H(f)\} < 0\end{cases}$$

Setzt man auch hier die Symmetriebedingungen für Imaginärteil und Realteil von **H(f)** ein, so ergibt sich für den Phasengang folgende Beziehung:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\varphi(-f) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(-f)\}}{\mathrm{Re}\{H(-f)\}}\right)$$

$$= \arctan\left(-\frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}\right)$$

$$\varphi(-f) = -\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(-f) = -\varphi(f)} \tag{2.19}$$

Der Phasengang stellt somit eine ungerade Funktion in f dar!

Wir haben gesehen, daß ein beliebiges Spektrum einer reellen Zeitfunktion aus einem geraden Realteil und einem ungeraden Imaginärteil zusammengesetzt ist. Im folgenden sollen nun die Zusammenhänge zwischen Real- und Imaginärteilspektrum einerseits und den zugehörigen Bestandteilen der Zeitfunktion andererseits ermittelt werden.
Setzt man ganz allgemein eine reelle Zeitfunktion mit **s(t)** an, so gilt doch im Falle, daß es sich bei dieser Funktion um eine *gerade Funktion* handelt folgender Zusammenhang:

$$s(t) = s_g(t) = s_g(-t) \tag{2.20}$$

Jede gerade Funktion ist *achsensymmetrisch* zum Ursprung!

Handelt es sich hingegen bei **s(t)** um eine *ungerade Funktion*, so gilt:

$$s(t) = s_u(t) = -s_u(-t) \tag{2.21}$$

Jede ungerade Funktion ist *punktsymmetrisch* zum Ursprung!

Diese beiden Zusammenhänge sind bekannt und wurden bereits bei der Betrachtung des Spektrums zuvor verwendet. Sie gelten ganz allgemein für jede beliebige Funktion.

Wenn man nun das Integral über eine derartige Funktion bildet, so weiß man, daß folgender Zusammenhang gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_g(t)\ \mathrm{dt} = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} s_g(t)\ \mathrm{dt}$$

Die gerade Funktion schließt links vom Ursprung betragsmäßig die gleiche Fläche wie rechts vom Ursprung ein, wobei bedingt durch die Achsensymmetrie die Integration für beide Fälle das gleiche Vorzeichen ergibt und somit die Integrale sich nicht gegenseitig aufheben.

Im Falle der Punktsymmetrie gilt folgender Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_u(t)\,\mathrm{dt} = 0$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Für die ungerade Funktion gilt auch, daß sie links vom Ursprung betragsmäßig die gleiche Fläche wie rechts vom Ursprung einschließt, wobei durch die Punktsymmetrie die Integrale unterschiedliches Vorzeichen aufweisen und sich in ihrer Gesamtheit daher aufheben.

Setzt man nun ganz allgemein eine reelle Zeitfunktion mit **s(t)** an, so läßt sich diese zunächst ganz formell folgendermaßen aufspalten:

$$s(t) = \frac{2}{2} \cdot s(t) = \frac{s(t)}{2} + \frac{s(t)}{2}$$

Nach einer Erweiterung durch Addition und Subtraktion der invertierten Zeitfunktion erhält man:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{s(t)}{2} + \frac{s(t)}{2} + \frac{s(-t)}{2} - \frac{s(-t)}{2} \\ &= \underbrace{\frac{s(t)}{2} + \frac{s(-t)}{2}}_{s_g(t} + \underbrace{\frac{s(t)}{2} - \frac{s(-t)}{2}}_{s_u(t)} \end{aligned}$$

$$\boxed{s(t) = s_g(t) + s_u(t)} \tag{2.22}$$

Dies gilt unter Verwendung der Zusammenhänge in (2.20) und (2.21) Somit ist gezeigt, daß sich *jede beliebige reelle Zeitfunktion* eindeutig durch die *Summe einer geraden und ungeraden Komponente* darstellen läßt.

Hierbei gilt für die gerade Komponente:

$$\boxed{s_g(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) + s(-t)\right]} \tag{2.23}$$

was sich auch durch folgenden Ansatz mit (2.22) herleiten läßt:

$$s(t) + s(-t) = s_g(t) + s_u(t) + s_g(-t) + s_u(-t) = 2s_g(t) \Rightarrow$$

$$s_g(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[s(t) + s(-t)\right]$$

und für die ungerade Komponente ergibt sich:

$$\boxed{s_u(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) - s(-t)\right]} \tag{2.24}$$

wobei auch hier wieder der gleiche Ansatz mit (2.22) zum Ziel führt:

$$s(t) - s(-t) = s_g(t) + s_u(t) - s_g(-t) - s_u(-t) = 2 \cdot s_u(t) \Rightarrow$$

$$s_u(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[s(t) - s(-t)\right]$$

Diese Zusammenhänge sollen für das Beispiel des Exponentialimpulses noch einmal in einer Skizze veranschaulicht werden:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

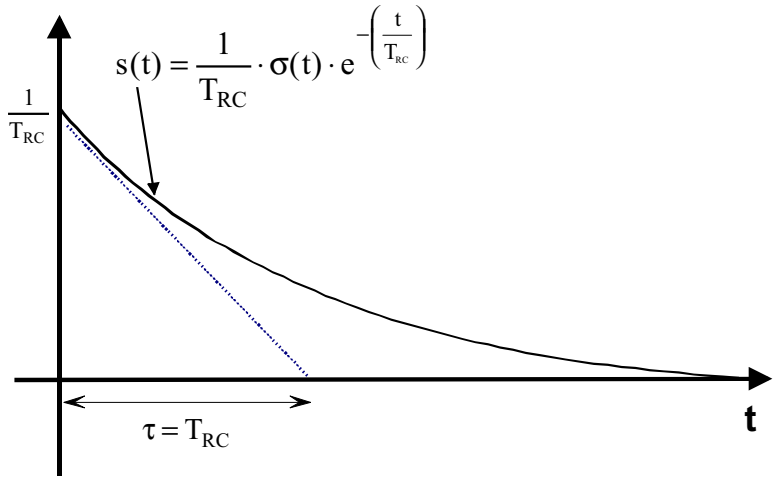


Abbildung 2.7: Exponentialimpuls

Diese Funktion setzt sich aus geradem und ungeradem Anteil zusammen→

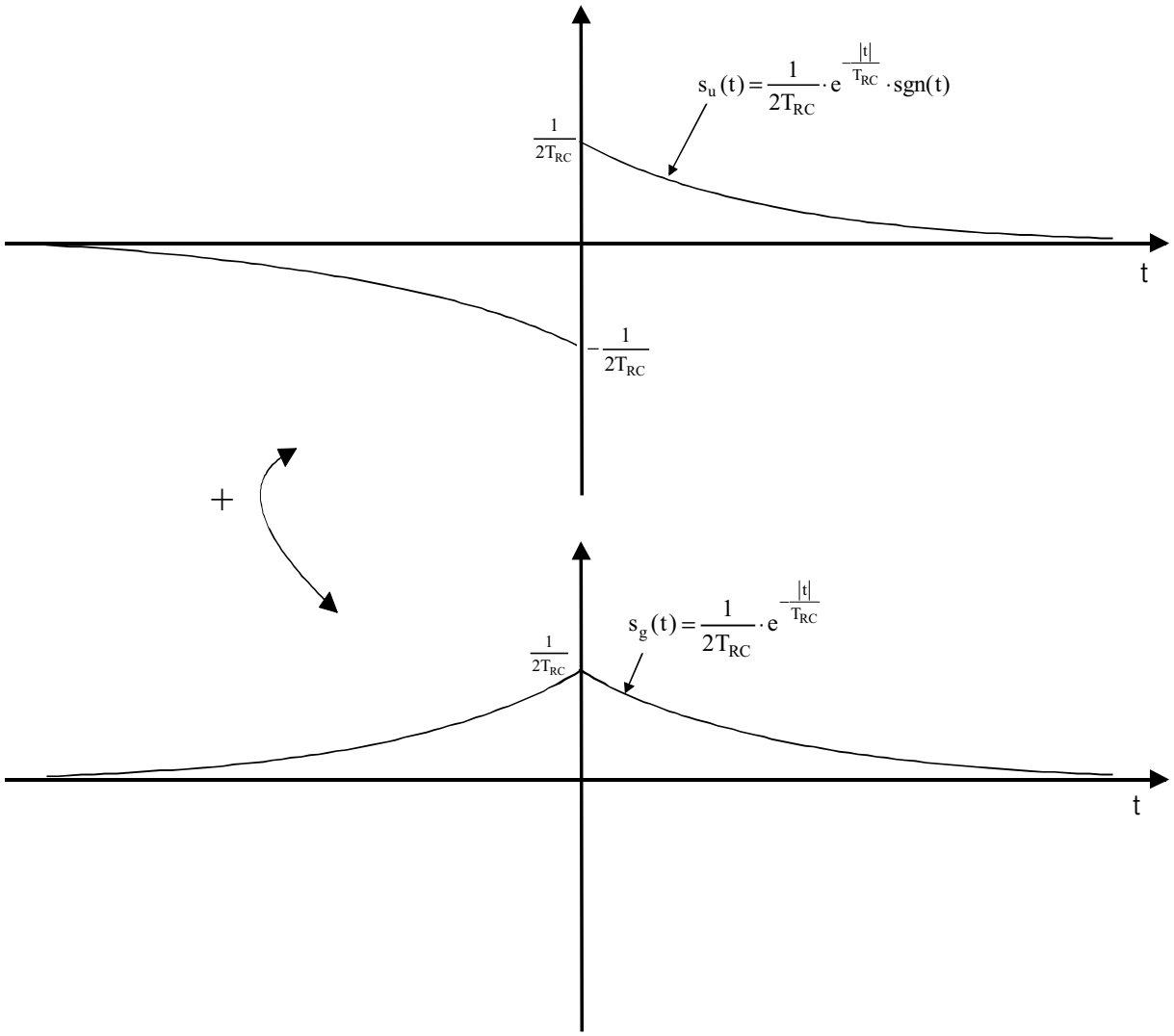


Abbildung 2.8: gerader und ungerader Anteil der Exponentialfunktion

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Addiert man beide Funktionsverläufe, so erhält man die ursprüngliche Funktion in Abbildung 2.7!

Setzt man nun den allgemeinen Ansatz für eine reelle Zeitfunktion in das Fourierintegral ein, so ergibt sich für das Spektrum:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[s_g(t)+s_u(t)\right]\cdot\left[\cos(2\pi\cdot f\cdot t) - j\sin(2\pi\cdot f\cdot t)\right]dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_g(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt}_{\text{gerade}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_u(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt}_{\text{ungerade}} -$$

$$j\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_g(t)\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt}_{\text{ungerade}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_u(t)\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt}_{\text{gerade}}\right]$$

$$\downarrow \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x_u(t)dt = 0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_g(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} s_u(t)\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt$$

$$\boxed{S(f) = \mathrm{Re}\{S(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{S(f)\}} \tag{2.25}$$

Dieses Ergebnis wurde bereits in (2.17) hergeleitet, wobei hier aber die Zusammenhänge der Teilspektren mit geradem und ungeradem Anteil der reellen Zeitfunktion hergestellt sind.

Es gilt demnach ganz allgemein:

$$\boxed{\mathrm{Re}\{S(f)\} = S_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_g(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt = \mathcal{F}\{s_g(t)\}} \tag{2.26}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\{S(f)\} = S_i(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} s_u(t)\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)\,dt = \mathcal{F}\{s_u(t)\}} \tag{2.27}$$

Aus den hier hergeleiteten Zusammenhängen ergibt sich folgendes Transformationspaar:

$$\boxed{\begin{array}{c} s(t) = s_g(t) + s_u(t) \\ \circ\!\!-\!\!\bullet \\ S(f) = \mathrm{Re}\{S(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{S(f)\} \end{array}} \tag{2.28}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2.4. THEOREME DER FOURIERTRANSFORMATION

Im Folgenden sollen einige allgemeingültige Sätze zur Fouriertransformation hergeleitet werden, die die Berechnung von Spektren erleichtern.
Dabei soll zunächst die Fouriertransformation hinsichtlich des bekannten *Superpositionssatzes* untersucht werden.

2.4.1. SUPERPOSITIONSSATZ

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$s(t) = \sum_i a_i \cdot s_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \sum_i a_i \cdot S_i(f) \tag{2.29}$$

Die Fouriertransformierte einer Summe von gewichteten Zeitfunktionen ist gleich der gewichteten Summe der Fouriertransformierten der einzelnen Zeitfunktionen.

Um dies zu beweisen, bedient man sich des Fourierintegrals:

BEWEIS:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i a_i \cdot s_i(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt \\ &= \sum_i a_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt \\ S(f) &= \sum_i a_i \cdot S_i(f) \end{aligned}$$

q.e.d.

Der Zusammenhang gilt also genau aus dem Grund, weil man Summation und Integration vertauschen kann und Konstanten vor Integrale ziehen darf.

Im Folgenden soll ein *Anwendungsbeispiel* hierzu näher betrachtet werden. Gegeben seien zwei Zeitfunktionen $\mathbf{s_1(t)}$ und $\mathbf{s_2(t)}$. Beide Funktionen lassen sich in einen geraden und ungeraden Anteil aufspalten, und somit gilt unter Berücksichtigung von (2.28):

$$s_1(t) = s_{1g}(t) + s_{1u}(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$S_1(f) = \mathrm{Re}\{S_1(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{S_1(f)\} = S_{1r}(f) + jS_{1i}(f) \tag{2.30}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_2(t) = s_{2g}(t) + s_{2u}(t)$$

$$S_2(f) = \mathrm{Re}\{S_2(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{S_2(f)\} = S_{2r}(f) + jS_{2i}(f) \tag{2.31}$$

Betrachtet man nun die komplexe Zeitfunktion **s(t),** die aus der Summe dieser beiden Zeitfunktionen gebildet wird, so gilt mit $\mathbf{s_1(t)}$ als Realteil und $\mathbf{s_2(t)}$ als Imaginärteil und (2.33) bzw. (2.30) und (2.31):

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + js_2(t) \\ S(f) &= S_1(f) + jS_2(f) \\ &= S_{1r}(f) + jS_{1i}(f) + j[S_{2r}(f) + jS_{2i}(f)] \\ S(f) &= S_{1r}(f) - S_{2i}(f) + j[S_{1i}(f) + S_{2r}(f)] \end{aligned} \tag{2.32}$$

Bildet man die konjugiert komplexe Zeitfunktion und führt ebenfalls eine Fouriertransformation durch, so erhält man:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= s_1(t) - js_2(t) \\ \mathcal{F}\{s^*(t)\} &= S_1(f) - jS_2(f) \\ &= S_{1r}(f) + jS_{1i}(f) - j[S_{2r}(f) + jS_{2i}(f)] \\ &= S_{1r}(f) + S_{2i}(f) + j[S_{1i}(f) - S_{2r}(f)] \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} S_r(f) = S_r(-f) \\ S_i(f) = -S_i(-f) \end{cases}$$

$$= S_{1r}(-f) - S_{2i}(-f) - j[S_{1i}(-f) + S_{2r}(-f)]$$

$$\mathcal{F}\{s^*(t)\} = S(-f)^* \tag{2.33}$$

Das Spektrum einer konjugiert komplexen Zeitfunktion ist gleich dem an der Ordinate gespiegelten konjugiert komplexen Spektrum der Zeitfunktion.

Somit erhält man abschließend folgende Identität:

$$\begin{aligned} s(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S(f) \\ s^*(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S(-f)^* \end{aligned} \tag{2.34}$$

Betrachtet man nun den Fall, daß ein rein *reelles Signal* vorliegt, so ist das konjugiert komplexe Signal identisch mit dem Signal selbst und es folgt daraus für das Spektrum:

$$s(t) = s^*(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathcal{F}\{s^*(t)\} = S(f) \tag{2.35}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Mit (2.34) folgt dann

$$\boxed{\mathcal{F}\{s^*(t)\} = S^*(-f) = S(f)} \tag{2.36}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} S^*(-f) &= S(f) \\ S(-f) &= S^*(f) \end{aligned}} \tag{2.37}$$

2.4.2. ÄHNLICHKEITSSATZ

Im Folgenden soll betrachtet werden, in welchem Verhältnis *zeitlich gedehnte bzw. gestauchte Signale* zu deren Fouriertransformierten stehen. Setzt man wieder ganz formell in das Fourierintegral ein, so erhält man:

$$\mathcal{F}\{s(b\cdot t)\} = \mathcal{F}\{s(\operatorname{sgn}(b)\cdot|b|\cdot t)\} \qquad \text{mit} \quad b = |b|\cdot\operatorname{sgn}(b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s\{\operatorname{sgn}(b)\cdot|b|\cdot t\}\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}dt$$

Substitution

$$\text{mit}\begin{cases} \operatorname{sgn}(b)\cdot|b|\cdot t = u \\ du = \operatorname{sgn}(b)\cdot|b|\cdot dt \\ t = \operatorname{sgn}(b)\cdot\dfrac{1}{|b|}\cdot u \end{cases}$$

$$= \int_{-\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty}^{\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty} s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\frac{f}{\operatorname{sgn}(b)\cdot|b|}\right)\cdot u\right\}\cdot\frac{1}{\operatorname{sgn}(b)\cdot|b|}du$$

$$\mathcal{F}\{s(b\cdot t)\} = \operatorname{sgn}(b)\cdot\frac{1}{|b|}\cdot\int_{-\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty}^{\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty} s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\frac{f}{b}\right)\cdot u\right\}du$$

Für das Ergebnis ergeben sich hinsichtlich der Grenzen zwei Fälle, die unterschieden werden müssen:

1.Fall:

$$\boxed{b>0}\begin{cases} \mathcal{F}\{s(b\cdot t)\} = \operatorname{sgn}(b)\cdot\dfrac{1}{|b|}\cdot\displaystyle\int_{-\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty}^{\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty} s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\frac{f}{b}\right)\cdot u\right\}du \\ \mathcal{F}\{s(b\cdot t)\} = \dfrac{1}{|b|}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\frac{f}{b}\right)\cdot u\right\}du \end{cases}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2.Fall:

$$\boxed{b<0}\quad\begin{cases}\mathcal{F}\{s(b\cdot t)\}=\operatorname{sgn}(b)\cdot\dfrac{1}{|b|}\cdot\displaystyle\int_{-\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty}^{\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty}s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\dfrac{f}{b}\right)\cdot u\right\}du\\ \quad=-\dfrac{1}{|b|}\cdot\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty}s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\dfrac{f}{b}\right)\cdot u\right\}du\\ \mathcal{F}\{s(b\cdot t)\}=\dfrac{1}{|b|}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\dfrac{f}{b}\right)\cdot u\right\}du\end{cases}$$

Da sich für beide Fälle das gleiche Ergebnis ergibt, gilt somit abschließend:

$$\mathcal{F}\{s(b\cdot t)\}=\frac{1}{|b|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(u)\cdot\exp\left\{-j2\pi\cdot\left(\frac{f}{b}\right)\cdot u\right\}du$$

$$\Longrightarrow\qquad\boxed{\mathcal{F}\{s(b\cdot t)\}=\frac{1}{|b|}\cdot S\left(\frac{f}{b}\right)}\qquad(2.38)$$

Zu *gedehnten Zeitsignalen* gehören *gestauchte Spektren* und zu *gestauchten Zeitsignalen* gehören *gedehnte Spektren*!

Es soll in diesem Zusammenhang noch angemerkt werden, daß das Produkt aus Zeitdauer und Bandbreite auch als *Unschärferelation der Nachrichtentechnik* bezeichnet wird. Dieses Produkt ist immer konstant, weil Zeitsignale und Spektren in ihrer Ausdehnung umgekehrt proportional sind.

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta t: & \text{Zeitdauer}\\ \Delta f: & \text{Frequenz}\end{array}\right\}\ \boxed{\Delta t\cdot\Delta f=\text{const}.}$$

Aus (2.38) ergeben sich die beiden Folgerungen:

Bei invertierten Zeitsignalen (**b=-1**) gilt :

$$\boxed{s(-t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ S(-f)}\qquad(2.39)$$

Bei reellen Zeitsignalen gilt:

$$\begin{aligned}S(-f)&=\operatorname{Re}\{S(-f)\}+j\operatorname{Im}\{S(-f)\}\\&=\operatorname{Re}\{S(f)\}-j\operatorname{Im}\{S(f)\}\end{aligned}$$

$$\boxed{S(-f)=S(f)^*}\qquad(2.40)$$

2.4.3. VERSCHIEBUNGSSATZ

In diesem Kapitel soll der Fall betrachtet werden, daß ein Signal zeitlich verzögert ist. Wir wissen bereits, daß zeitliche Verschiebungen in Zeitsignalen auch durch die Faltung mit einem zeitlich verschobenen Diracstoß dargestellt werden können.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Es gilt also ganz allgemein für das Spektrum einer zeitlich verzögerten Zeitfunktion unter Berücksichtung von (1.50) bzw. (2.9):

$$s(t-t_0) = s(t) * \delta(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S(f) \cdot \mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} \tag{2.41}$$

Um das Spektrum zu ermitteln muß also nur noch die Fouriertransformierte des verschobenen Diracstoßes zusätzlich berücksichtigt werden.

Setzt man zunächst ganz allgemein eine verschobene Zeitfunktion in das Fourierintegral ein, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\mathcal{F}\{s(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$\downarrow \quad \text{mit} \begin{cases} t - t_0 = u \\ du = dt \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \cdot e^{-j2\pi \cdot f (u+t_0)} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot u} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} du$$

$$= e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot u} du$$

$$\mathcal{F}\{s(t-t_0)\} = e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \cdot S(f)$$

Somit gilt ganz allgemein für die Fouriertransformierte eines um $\mathbf{t_0}$ zeitlich verzögerten Signals:

$$\mathcal{F}\{s(t-t_0)\} = e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \cdot S(f) \tag{2.42}$$

Das verschobene Spektrum ist also hinsichtlich seiner Amplitude unverändert und weist nur einen zusätzlichen Phasengang auf.

$$\Delta\varphi = -2\pi \cdot f \cdot t_0 \tag{2.43}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich von (2.41) mit (2.42) ergibt sich für die Fouriertransformierte des verschobenen Dirac-Impulses:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \tag{2.44}$$

Somit gilt für das ideale Laufzeitglied im Frequenzbereich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

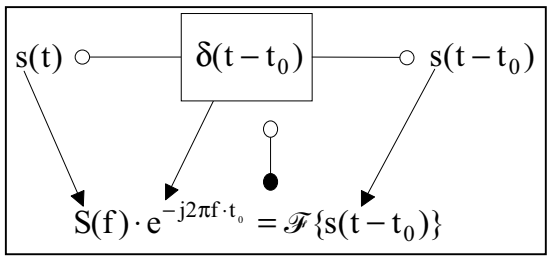


Abbildung 2.9: ideales Laufzeitglied im Frequenzbereich

2.4.4. DIFFERENTIATIONSSATZ

Für die Differentiation einer Funktion und deren Fouriertransformierte gilt der folgende Zusammenhang:

$$\frac{d}{dt}s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; j2\pi f \cdot S(f) \tag{2.45}$$

Das heißt, daß durch die Differentiation eines Signals das Spektrum mit $j2\pi f$ multipliziert wird.

BEWEIS:
Das inverse Fourierintegral lautet:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \qquad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot j2\pi f \cdot e^{j2\pi ft} df$$

$$= F^{-1}\{j2\pi f \cdot S(f)\} \qquad \text{q.e.d.}$$

Durch die Ableitung nach der Zeit t ergibt sich nur ein Beitrag des Exponentialausdruckes. In der Fouriertransformierten S(f) kommt t nicht vor. Also wird nur der Exponentialterm abgeleitet. So kommt der konstante Faktor $j2\pi f$ vor die Fouriertransformierte. Die Ableitungsregel gilt weiterhin auch für Ableitungen höherer Ordnung.
Allgemein kann man daher sagen:

$$\frac{d^n}{dt^n}s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; (j2\pi f)^n \cdot S(f) \tag{2.46}$$

Für die zweite Ableitung gilt dann z.B.:

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; (j2\pi f)^2 \cdot S(f)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2.4.5. SYMMETRIETHEOREM

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Dieses Fourierspektrum hat das folgende inverse Fourierintegral s(t). Das unterscheidet sich im Aufbau von S(f) nur durch das Vorzeichen des Exponenten.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

$$\Downarrow$$

Nun wird t durch –t substituiert.

$$s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{-j2\pi ft} df$$

Man tauscht nun formal t und f:

$$s(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$
$$= \mathcal{F}\{S(t)\}$$

Schon ergibt sich folgende Symmetriebeziehung:

$$s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f)$$
$$S(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s(-f) \qquad (2.47)$$

Tauscht man im Fourierspektrum die Frequenzvariable f durch t, so faßt man ein Spektrum als weiteres Zeitsignal S(t) auf (i.a. komplexe Funktion). Das Spektrum dieses Zeitsignals ist identisch mit der an der Ordinate gespiegelten vorherigen Zeitfunktion s(t).

Nun betrachten wir zusammenfassend:

$$s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \circ\!\!-\!\!\bullet\, \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{-j2\pi ft} df = s(-t) \qquad (2.48)$$

Daraus läßt sich schlußfolgern, daß zweimaliges Anwenden der Fouriertransformation ein Signal zeitinvertiert.

BEISPIEL:
Es ist schon die Fouriertransformierte des Rechteckimpulses bekannt:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{si}(\pi fT) \cdot |T|$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Mit dem Symmetrietheorem (2.47) ergibt sich

$$|T|\cdot si(\pi tT) \circ\!\!-\!\!\bullet\, rect\left(\frac{-f}{T}\right)$$

Mit |T|=a

$$|a|\cdot si(\pi ta) \circ\!\!-\!\!\bullet\, rect\left(\frac{-f}{a}\right)$$

2.4.6. FALTUNG UND MULTIPLIKATION

Durch den Faltungssatz ist schon bekannt, daß eine Faltung im Zeitbereich einer Multiplikation im Frequenzbereich entspricht:

$$s_1(t) * s_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_1(f)\cdot S_2(f) = G(f)$$

Durch das Symmetrietheorem (2.47) gilt zusätzlich:

$$S_1(t)\cdot S_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s_1(-f) * s_2(-f) = g(-f)$$

denn wie in Kapitel 2.4.5 gezeigt, gilt:

$$\mathcal{F}\{S_1(t)\} = s_1(-f)$$
$$\mathcal{F}\{S_2(t)\} = s_2(-f)$$

Diese Erkenntnis mit Hilfe des Symmetrietheorems bestätigt den Faltungssatz. Eine Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich und umgekehrt.

$$\cdot \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad *$$

Faßt man jetzt $S_1(t)$ und $S_2(t)$ als beliebige Zeitfunktionen auf, so gilt allgemeingültig:

$$s(t)\cdot h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) * H(f) \qquad (2.49)$$

Multiplikations- oder Faltungstheorem

2.4.7. MODULATIONSTHEOREM

Moduliert man das reelle Signal s(t) auf eine komplexe Trägerschwingung mit der Frequenz f_0, so kann man folgendes sagen:

$$s(t)\cdot e^{+j2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\cdot e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt}_{S(f-f_0)}$$

$$\Downarrow$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s(t)\cdot e^{+j2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f-f_0)$$

Das heißt also, daß eine Modulation auf eine komplexe Trägerschwingung mit der Frequenz f_0 eine Verschiebung des Frequenzspektrums um diese Trägerfrequenz bedeutet. Daraus folgt für den Realteil des modulierten Signals:

$$s(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)=\frac{1}{2}s(t)\cdot[e^{-j2\pi f_0 t}+e^{j2\pi f_0 t}]$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \tag{2.50}$$

$$\frac{1}{2}[S(f+f_0)+S(f-f_0)]$$

Der Realteil des Spektrums des modulierten Signals ist reell und achsensymmetrisch. Das Spektrum des reellen Tiefpaßsignals ist um f_0 nach links und rechts verschoben und mit dem Faktor ½ versehen.

Außerdem gilt für den Imaginärteil des modulierten Signals:

$$s(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t)=\frac{1}{2j}s(t)\cdot[e^{j2\pi f_0 t}-e^{-j2\pi f_0 t}] \tag{2.51}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\frac{1}{2j}[S(f-f_0)-S(f+f_0)]=-j\frac{1}{2}[S(f-f_0)-S(f+f_0)]$$

$$=j\frac{1}{2}[S(f+f_0)-S(f-f_0)]$$

Der Imaginärteil des Spektrums des modulierten Signals ist imaginär und punktsymmetrisch zum Ursprung. Das Spektrum des reellen Tiefpaßsignals ist um f_0 nach links und rechts verschoben und mit dem Faktor ½ bzw. -½ versehen.

Zusammenfassend kann man nun feststellen, daß das modulierte Signal in Real- und Imaginärteil aufgeteilt im Spektrum eine Verschiebung des Spektrums des unmodulierten Signals um die Trägerfrequenz nach links und rechts ergibt.
Das Spektrum des Realteils des modulierten Signals ist wiederum reell. Das Spektrum des modulierten Signals ist achsensymmetrisch.
Das Spektrum des Imaginärteils ist imaginär. Das Spektrum des modulierten Signals ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2.4.8. NÜTZLICHE IDENTITÄTEN

Um eine Spektralanalyse durchzuführen oder um bestimmte Werte eines Spektrums oder einer Zeitfunktion zu ermitteln, greift man gerne auf bekannte Identitäten zurück. Im Folgenden sind drei nützliche Identitäten aufgelistet.

1) $$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt\Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$$

Der Gleichanteil entspricht dem uneigentlichen Integral über die ganze Zeitfunktion. (2.52)

2) $$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$$

Das Signal zum Zeitpunkt t=0 entspricht dem Integral über das ganze Spektrum. (2.53)

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \cdot S_2^*(f) df$$

Für reelle Zeitsignale. Parsevalsches Theorem (Siehe unten stehender Beweis!) (2.54)

konjugiert komplex

BEWEIS ZU (2.54) (PARSEVALSCHES THEOREM):
Um die Herleitung zu vereinfachen, treffen wir folgende Vereinbarung:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) = g(t)$$

Mit der Identität aus (2.52) ergibt sich durch das Integral über das gesamte Signal der Gleichanteil, d.h. der Spektralwert an der Stelle 0:

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) = G(0)$$

Transformiert man nun die Zeitfunktion g(t) in den Frequenzbereich, so gilt das Multiplikationstheorem (2.49). Die Faltung wird weiterhin durch das dazugehörige Integral ausgedrückt.

$$g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; G(f) = S_1(f) * S_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(u) \cdot S_2(f-u) du$$

Nun kennt man den Wert des Spektrums bei f=0:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$
\begin{aligned}
G(0) &= G(f)\big|_{f=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\cdot s_2(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(u)\cdot S_2(-u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(u)\cdot S_2^*(u)du \qquad \text{für reelle Zeitsignale}
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Für reelle Signale gilt daher, daß sich das Energiedichtespektrum durch Gleichsetzen von $s_1(t)$ und $s_2(t)$ über das Integral der Spektrallinien berechnen läßt.wenn man das Integral über das Quadrat eines Signals –also die Signalenergie– betrachtet:

$$s_1(t) = s_2(t) = s(t)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\cdot S^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \qquad (2.55)$$

$|S(f)|^2$ Energiedichtespektrum

Parsevalsches Theorem

Demnach kann man die Signalenergie auch im Frequenzbereich aus dem quadratischen Betragsspektrum berechnen. Die Signalenergie ist auch der Funktionswert der Autokorrelationsfunktion an der Stelle 0.

Siehe auch im WWW zum Parsevalschen Theorem:
http://www.math.utep.edu/sosmath/fourier/fourier4/fourier4.html

2.5. Beispiele zur Anwendung der Theoreme

2.5.1. Fouriertransformierte des Rechteckimpulses

Der Rechteckimpuls ist in Abbildung 2.10 gezeigt.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

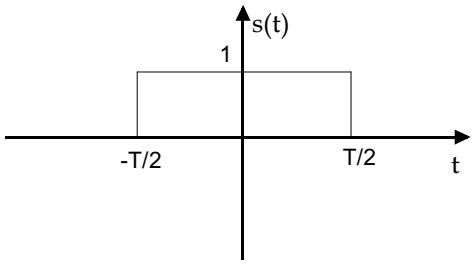


Abbildung 2.10: Rechteckimpuls

Mathematisch läßt er sich folgendermaßen beschreiben:

$$s(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= -\frac{1}{j2\pi f} \cdot \left[e^{-j2\pi f \cdot \frac{T}{2}} - e^{+j2\pi f \cdot \frac{T}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{j2\pi f} \cdot 2j \cdot \sin(\pi fT)$$

$$= T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$$= T \cdot \operatorname{si}(\pi fT)$$

Daraus ergibt sich die folgende Transformationsvorschrift:

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\; T \cdot \operatorname{si}(\pi fT)} \qquad (2.56)$$

Das Spektrum des Rechteckimpulses entspricht also einer in Abbildung 2.11 dargestellten si-Funktion.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

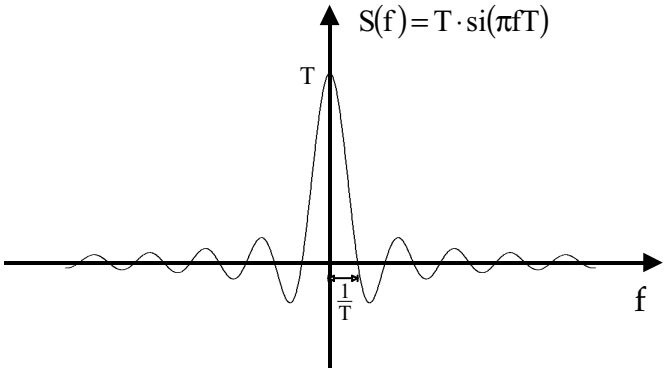


Abbildung 2.11: Spektrum des Rechteckimpulses

Durch die Anwendung des Symmetrietheorems (2.47) mit T=1 ergibt sich folgende Beziehung:

$$\text{rect}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \text{si}(\pi f)$$

$$\text{si}(\pi t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \text{rect}(-f) = \text{rect}(f)$$

$$\text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ T \cdot \text{rect}(f \cdot T) \qquad (2.57)$$

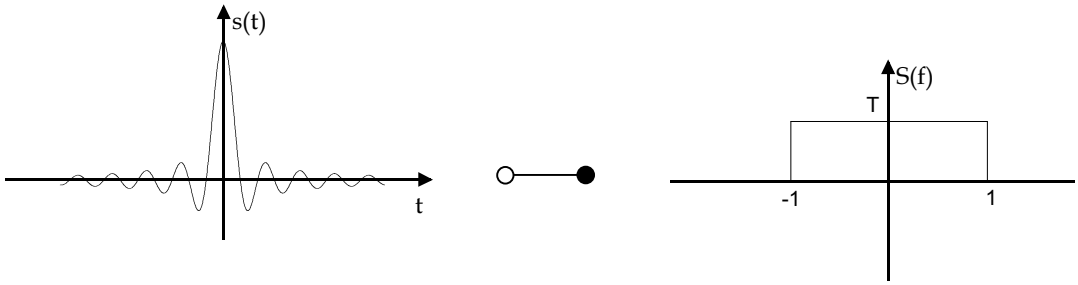


Abbildung 2.12: si-Funktion wird auf Rechteckfkt.

Das bedeutet, daß eine si-Funktion im Zeitbereich auf ein Rechteck im Frequenzbereich abgebildet wird.

2.5.2. FOURIERTRANSFORMATION DES DREIECKIMPULSES

Aus dem Seminar ist bekannt, daß der Dreieckimpuls der Faltung zweier Rechteckimpulse entspricht:

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{|T|} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\mathcal{F}\left\{\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{|T|}{|T|}\cdot si(\pi fT)\cdot|T|\cdot si(\pi fT) = |T|\cdot si^2(\pi fT)$$

Fouriertransformierte des Dreieckimpulses (2.58)

Durch das Multiplikationstheorem (2.49) und die bekannte Fouriertransformierte des Rechteckimpulses (2.56) ergibt sich schnell die in (2.58) dargestellte Form der Fouriertransformierten des Dreieckimpulses.

Zweiter Lösungsweg:
Dieses Ergebnis läßt sich auch auf anderem Weg mit dem auf 1 normierten Dreieckimpuls ermitteln:

$$\Lambda(t) = rect(t) * rect(t)$$

$$\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = si(\pi f)\cdot si(\pi f) = si^2(\pi f)$$

Durch den Ähnlichkeitssatz (2.38) ergibt sich:

$$\mathcal{F}\left\{\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = |T|\cdot si^2(\pi fT)$$

2.6. TRANSFORMATION SINGULÄRER SIGNALFUNKTIONEN

Es ist schon folgende Gleichung bekannt (2.11):

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

Daraus läßt sich durch die inverse Fouriertransformierte von 1 folgende Identität ermitteln:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot e^{+j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi ft}df \qquad (2.59)$$

Dies ist eine wichtige Identität, die später noch mehrmals gebraucht wird.
Die Anwendung des Symmetrietheorems (2.47) ergibt:

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$$

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(-f) = \delta(f)$$

Ebenso ist schon bekannt und anschaulich: $\delta(t) = \delta(-t)$
Das bedeutet, daß eine Gleichspannung einen Diracstoß im Spektrum bei f=0 liefert. Dies ist auch anschaulich, denn ein Gleichanteil entspricht der Spektrallinie für f=0.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Nach der klassischen Theorie der Fouriertransformation, d.h. ohne die Verwendung von singulären Funktionen, würde eine Gleichspannung nicht transformierbar sein, d.h. mathematisch kein Spektrum besitzen, obwohl es technisch trivial ist.

2.6.1. TRANSFORMATION VON COSINUS- UND SINUSSCHWINGUNGEN

Cosinus:
Mit (2.50) und (2.41) ergibt sich:

$$s(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left[S(f-f_0)+S(f+f_0)\right]$$

$$= S(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

mit $s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet S(f)$

$\cdot \circ\!\!-\!\!\bullet *$

$$\cos(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$S(f) * \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = S(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

Daraus kann man auf die Fouriertransformierte von der Cosinusfunktion schließen:

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]} \qquad (2.60)$$

Ein Cosinussignal konstanter Frequenz ergibt im Spektrum zwei achsensymmetrische Diracstöße bei $-f_0$ und f_0. Das läßt sich auch mit der herkömmlichen Fourierreihenentwicklung vereinbaren, denn ein Schwingungssignal konstanter Frequenz läßt sich durch eine einzige Cosinusschwingung darstellen.

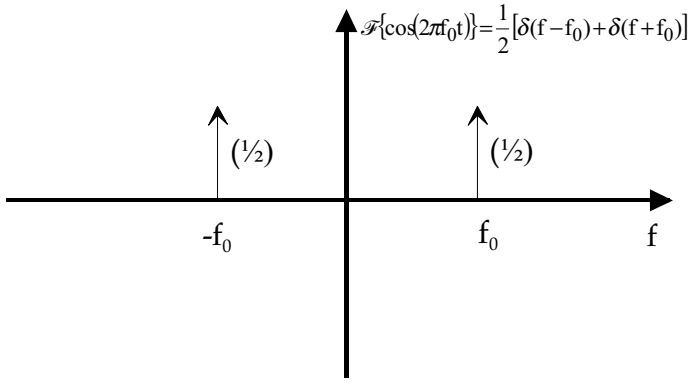


Abbildung 2.13: Spektrum des Cosinussignals

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Sinus:
Mit (2.51) und (2.41) ergibt sich:

$$s(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{j}{2}\left[S(f+f_0)-S(f-f_0)\right]$$

$$= S(f) * \frac{j}{2}\left[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right]$$

mit $s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet S(f)$

$\cdot \circ\!\!-\!\!\bullet *$

$$\sin(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{j}{2}\left[\delta(f+f_0)-(f-f_0)\right]$$

Daraus kann man auf die Fouriertransformierte der Sinusfunktion schließen:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{j}{2}\left[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right]} \qquad (2.61)$$

Ein Sinussignal konstanter Frequenz ergibt im Spektrum zwei zum Ursprung punktsymmetrische Diracstöße bei $-f_0$ und f_0. Es ist allerdings zu bemerken, daß das Spektrum hier imaginär ist. Auch das läßt sich durch die klassische Fourierreihenentwicklung bestätigen.

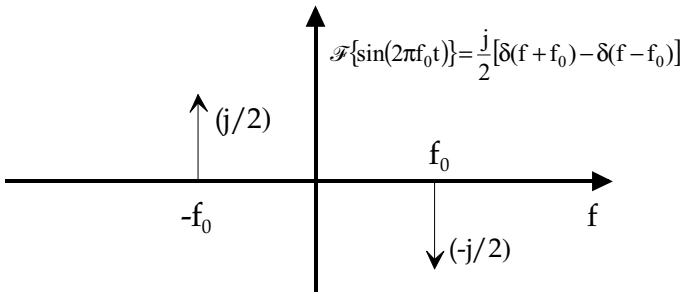


Abbildung 2.14: Spektrum des Sinussignals

2.6.2. TRANSFORMATION DER DIRACSTOßFOLGE

Normierte Betrachtung der Diracstoßfolge:
Man definiert die normierte Diracstoßfolge so:

$$\boxed{\text{Ш}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)} \qquad (2.62)$$

normierte Diracstoßfolge

„Schah“ : kyrillischer Buchstabe

Die folgende Abbildung zeigt die normierte Diracstoßfolge. Die Gewichtung der Diracstöße sind 1 und sie treten in konstanten Abständen von 1 auf. Diese Diracstoßfolge ist wichtig zu betrachten, da eine Abtastung meist auch mit Hilfe einer solchen Diracstoßfolge realisiert wird.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Hier wird zuerst die normierte Diracstoßfolge betrachtet. Die unnormierte Diracstoßfolge wird im weiteren Verlauf noch näher erläutert.

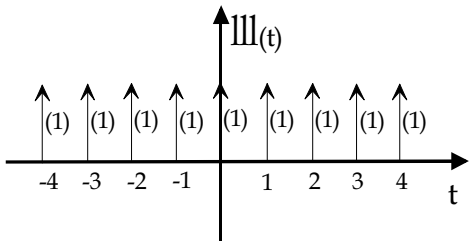


Abbildung 2.15: normierte Diracstoßfolge

Die Schah-Funktion Abbildung 2.15 läßt sich durch die Summe eines Gleichanteils (Spektralanteil für f=0) und unendlich vieler Cosinus-Schwingungen approximieren.
Mit dem Superpositions- und Verschiebungstheorem ((2.29) und (2.41)) gilt:

$$\mathcal{F}\{Ш(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nf}$$

Mit der Zerlegung der Fouriertransformierten in Real- und Imaginärteil

$$\delta(t+T) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{j2\pi Tf} = \cos(2\pi Tf) + j\sin(2\pi Tf)$$

ergibt sich durch die paarweise Zusammenfassung der Diracstöße der Schahfunktion:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n) \circ\!\!-\!\!\bullet\; &\ldots + \cos(-3\cdot 2\pi f) + j\sin(-3\cdot 2\pi f)\\ &+ \cos(-2\cdot 2\pi f) + j\sin(-2\cdot 2\pi f)\\ &+ \cos(-1\cdot 2\pi f) + j\sin(-1\cdot 2\pi f)\\ &+ \cos(0\cdot 2\pi f) + j\sin(0\cdot 2\pi f)\\ &+ \cos(1\cdot 2\pi f) + j\sin(1\cdot 2\pi f)\\ &+ \cos(2\cdot 2\pi f) + j\sin(2\cdot 2\pi f)\\ &+ \cos(3\cdot 2\pi f) + j\sin(3\cdot 2\pi f)\ldots\\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2\pi nf)\end{aligned}$$

Da die Cosinusfunktion eine gerade Funktion ist, summieren sich die Schwingungen positiver und negativer Frequenzen auf. Bei der Sinusfunktion handelt es sich um eine ungerade Funktion, die sich entsprechend aufhebt. Für n=0 entsteht ein Gleichanteil im Frequenzspektrum.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)\right\}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2\pi nf) \tag{2.63}$$

In Abbildung 2.16 ist die Summe für n=1,2,3 aufgezeichnet.

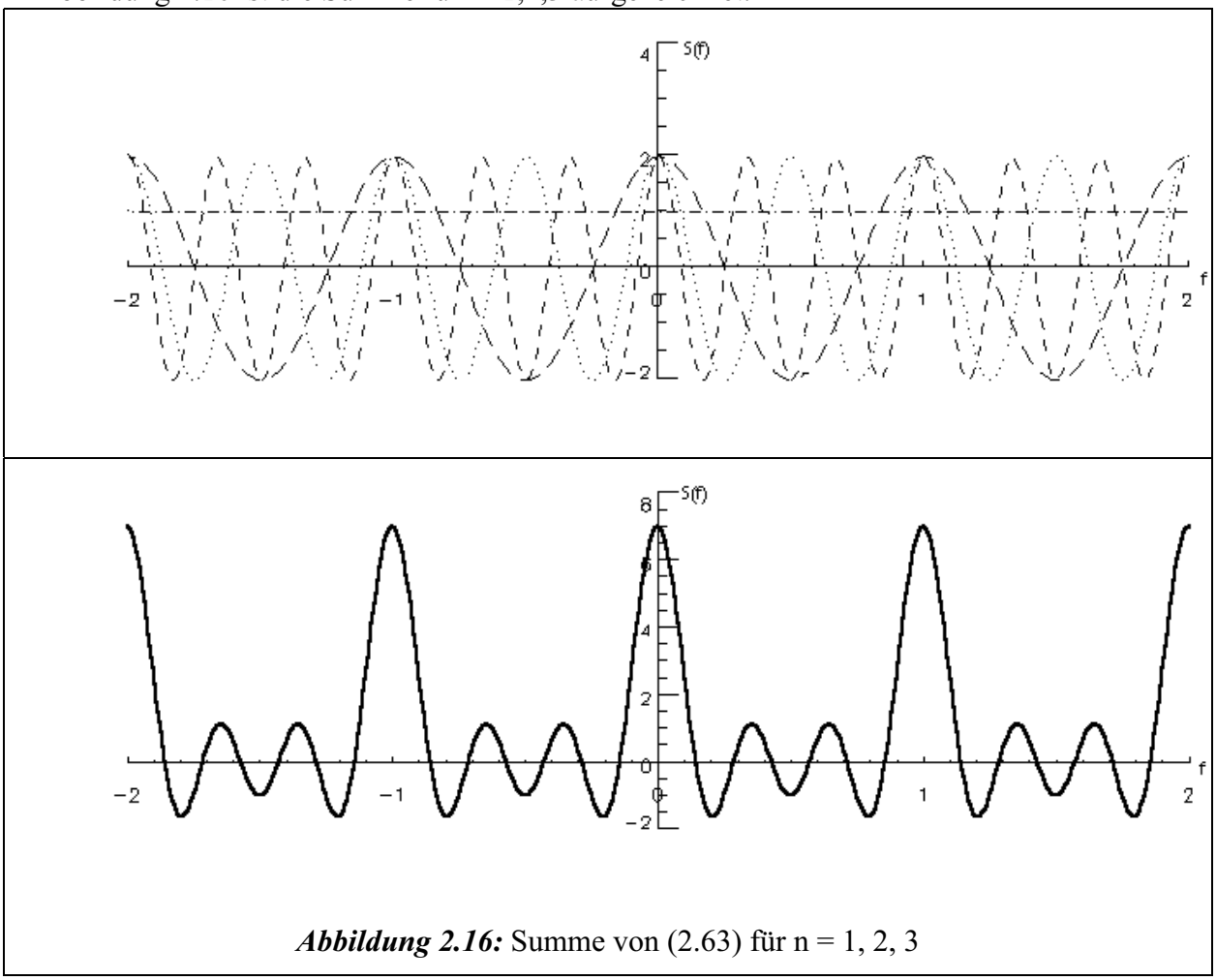


Abbildung 2.16: Summe von (2.63) für n = 1, 2, 3

Man erkennt, das die Fortführung dieser Summe wiederum eine äquidistante Diracstoßfolge ergibt. Man kann also schreiben:

$$\text{Ш}(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\,\text{Ш}(f) \tag{2.64}$$

Unnormierte Betrachtung der Diracstoßfolge:
Mit der nicht normierten Diracstoßfolge besteht folgender Zusammenhang:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\cdot T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(T\cdot\left(\frac{t}{T}-n\right)\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|T|}\cdot\delta\left(\frac{t}{T}-n\right)$$

$$=\frac{1}{|T|}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{T}-n\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$= \frac{1}{|T|} \cdot \text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T) = \frac{1}{|T|} \cdot \text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right)} \tag{2.65}$$

Die folgende Abbildung Zeit eine solche Diracstoßfolge mit dem Stoßabstand von T.

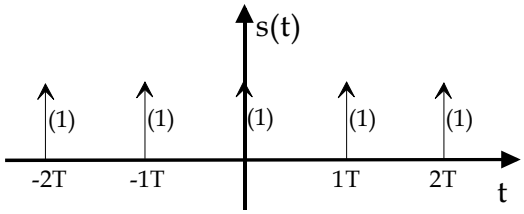


Abbildung 2.17: Diracstoßfolge mit Stoßabstand T

Der formale Weg über die Fouriertransformation mit dem Fourierintegral der Diracstoßfolge sieht folgendermaßen aus:

$$\mathcal{F}\{\text{Ш}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \cdot e^{-j2\pi ft} \right) dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right)$$

Integral- und Summenzeichen lassen sich vertauschen.

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \cdot e^{-j2\pi fn} dt \right)$$

Durch die Siebeigenschaft des Diracstoßes wird der Exponentialausdruck von t unabhängig.

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-j2\pi fn} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) dt}_{=1} \right)$$

Das Integral über einen Diracstoß ist bekannt.

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fn}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\text{Ш}(t)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fn}} \tag{2.66}$$

Mit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi fn) + j\sin(2\pi fn) = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi fn) = \text{Ш}(f)$$

ergibt sich der gleiche Zusammenhang wie in (2.64).

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Ansatz zur exakten Berechnung:

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ ist eine periodische Funktion mit der Periodendauer T_p=1.

Es ist bekannt, daß periodische Funktionen in Fourierreihen entwickelt werden können. Die Gleichung für die komplexe Fourierreihe lautet:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{+j2\pi n \cdot \frac{t}{T_p}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{+j2\pi n \cdot t} \quad \text{mit } T_p = 1$$

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi n \cdot t}{T_p}} dt \qquad \text{Mit } T_p=1$$

$$= 1 \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n \cdot t} dt \qquad \text{Im Integrationsintervall von -½ bis ½ liegt nur ein Diracstoß an der Stelle t=0.}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi n \cdot t} dt$$

$$= 1$$

Es ergibt sich die wichtige Identität

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi n \cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = \text{Ш}(t)} \qquad (2.67)$$

Diese Identität wird für Umformungen ausgenutzt. Man ersetzt t durch f:

$$\text{Ш}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$$

$$\mathcal{F}\{\text{Ш}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fn} = \text{Ш}(f)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ш}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \text{Ш}(f) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n) \end{array}} \qquad (2.68)$$

Durch den Ähnlichkeitssatz folgt dann:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|T|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)=\text{Ш}(f\cdot T) \tag{2.69}$$

$$\text{Ш}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \text{Ш}(f)$$

$$\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet |T|\cdot\text{Ш}(f)$$

$$|T|\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \circ\!\!-\!\!\bullet |T|\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f\cdot T-n)$$

mit T=1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n)$$

Die Diracstoßfolge ist eine sogenannte selbstreziproke Funktion.

2.6.3. FOURIERTRANSFORMATION DES EINHEITSSPRUNGES

Die Fouriertransformation des Einheitssprunges ist noch unbekannt.

$$\mathcal{F}\{\sigma(t)\}=?$$

Zuerst zerlegen wir den Einheitssprung in einen geraden und ungeraden Anteil:

$$\sigma(t)=s_g(t)+s_u(t)$$

$$s_g(t)=\frac{1}{2}[\sigma(t)+\sigma(-t)]=\frac{1}{2}$$

$$s_u(t)=\frac{1}{2}[\sigma(t)-\sigma(-t)]=\frac{1}{2}\cdot\text{sgn}(t)$$

Da man die einzelnen Summanden separat fouriertransfomieren kann, ergibt sich der einfache Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\sigma(t)\}&=\mathcal{F}\{s_g(t)\}+\mathcal{F}\{s_u(t)\}\\&=\text{Re}\{\mathcal{F}\{\sigma(t)\}\}+j\cdot\text{Im}\{\mathcal{F}\{\sigma(t)\}\}\\&=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\}+\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\cdot\text{sgn}(t)\right\}\\&=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2}\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\}\end{aligned} \tag{2.70}$$

Was ist nun $\frac{1}{2}\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\}$?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die Ableitung des Sprunges:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{sgn}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \delta(t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\mathrm{sgn}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\mathrm{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

$$j2\pi f \cdot \mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = 2$$

Durch diese Betrachtung haben wir die Fouriertransformierte der Signumfunktion gefunden.

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{2}{j2\pi f} = \frac{1}{j\pi f}} \tag{2.71}$$

Nach Einsetzen dieser Gleichung in (2.70) ergibt sich:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}} \tag{2.72}$$

Folgerung:
Eine eingeschaltete Cosinusschwingung kann man als das Produkt eines Einheitssprunges und einer Cosinusfunktion betrachten.

$$s(t) = \sigma(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{(eingeschaltete Cosinusschwingung)}$$

$$S(f) = \left[\frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right] * \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right] + \frac{1}{j4\pi}\left[\frac{1}{f + f_0} + \frac{1}{f - f_0}\right]$$

$$\boxed{S(f) = \frac{1}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) - \frac{j}{\pi}\left[\frac{1}{f + f_0} + \frac{1}{f - f_0}\right]\right]} \tag{2.73}$$

Die eingeschaltete Cosinusschwingung besitzt also kein reelles Spektrum mehr Im Gegensatz zur unendlichen Cosinusschwingung. Der Realteil des Spektrums ähnelt allerdings dem Spektrum der Cosinusschwingung. Der Unterschied ist der Faktor ¼ anstatt ½ vor den Diracstößen. Der Imaginärteil des Spektrums entspricht zwei verschobenen f^{-1}-Funktionen (=Hyperbeln) mit einem Vorfaktor.

Integrationssatz der Fouriertransformation:
Als weitere Folgerung der Transformation des Einheitssprunges (2.72) gilt der Integrationssatz. Mit

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s(t)*\sigma(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\cdot\sigma(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}s(\tau)d\tau$$

ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{t}s(\tau)d\tau=s(t)*\sigma(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}\right] \tag{2.74}$$

$$\int_{-\infty}^{t}s(\tau)d\tau\circ\!\!-\!\!\bullet\,\frac{S(0)}{2}\cdot\delta(f)+\frac{S(f)}{j2\pi f}$$

2.7. ASYMPTOTISCHES VERHALTEN VON SPEKTREN

Ziel dieser Untersuchung ist es, das Spektrum eines Signals durch asymptotische Ausdrücke zu beschreiben.
Vorab ist zu bemerken, daß in diesem Kapitel zwei Symbole verwendet werden, die das asymptotische Verhalten von Funktionen beschreiben. Sie heißen Landau-Symbole (groß „O“ und klein „o“). Die Landau-Symbole drücken das gegenseitige Verhalten zweier Funktionen bezüglich einer beliebigen Stelle x=a aus. Die formale Definition sieht so aus:

$$f(x)=O(g(x)) \quad : \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0,\quad A=\text{const.}$$

$$f(x)=o(g(x)) \quad : \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

Für die Zahl a sind beliebige Werte zugelassen, auch a=∞. Allerdings hängt das durch die Landau-Symbole ausgedrückte Verhalten der beiden Funktionen zueinander von der Stelle a und der Bewegungsrichtung zu a ab.
Im Weiteren werden die Landau-Symbole nur im Zusammenhang mit Potenzfunktionen mit negativem Exponenten verwendet. Da uns nur das asymptotische Verhalten im Unendlichen interessiert, gilt a=∞. Somit kann man die Verwendung der Landau-Symbole folgendermaßen erklären:

$$\lim_{f\to\infty} f\cdot O\left(\frac{1}{f}\right)=\text{const.}$$

$$\lim_{f\to\infty} f\cdot o\left(\frac{1}{f}\right)=0$$

Das bedeutet, daß wenn $S(f)=O\left(\frac{1}{f}\right)$, dann $f\cdot S(f)\xrightarrow{f\to\infty}c=\text{const}$ und wenn $S(f)=o\left(\frac{1}{f}\right)$, dann $f\cdot S(f)\xrightarrow{f\to\infty}0$. Eine Funktion mit f im Nenner ist also eine $O\left(\frac{1}{f}\right)$-Funktion. Sie verhält sich also im Unendlichen genauso wie $\frac{1}{f}$. Die Schreibweise $O\left(\frac{1}{f^n}\right)$ verdeutlicht, daß ein

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Spektrum mit dem Faktor $\frac{1}{f^n}$ abfällt. Sie verhält sich also im Unendlichen genauso wie $\frac{1}{f^n}$. Eine Funktion, die noch schneller gegen 0 geht, d.h. mit einer höheren Ordnung verschwindet als $\frac{1}{f}$, ist also eine $o\left(\frac{1}{f}\right)$-Funktion. Die Schreibweise $o\left(\frac{1}{f^n}\right)$ verdeutlicht, daß ein Spektrum noch stärker abfällt als mit $\frac{1}{f^n}$.

Das Frequenzspektrum ermittelt man –wie bekannt– mit folgendem Integral:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Dieses Integral ist ein Spezialfall von dem allgemeinen $S(k) = \int_a^b s(t) \cdot e^{jkt} dt$

mit $a=-\infty$
$b=\infty$
$k=-2\pi f$

Es interessiert nun das asymptotische Verhalten $k \to \infty$. Wie verhält sich also das Frequenzspektrum im Unendlichen? Klingt es schnell ab, so ist z.B. eine originalgetreue Übertragung über einen bandpaßbegrenzten Kanal möglich. Spektren mit Anteilen im Unendlichen sind schlechter zu übertragen, da immer Informationen verloren gehen, die sich in den höheren Frequenzen befinden.

BEISPIELE:

1) RECHTECKIMPULS

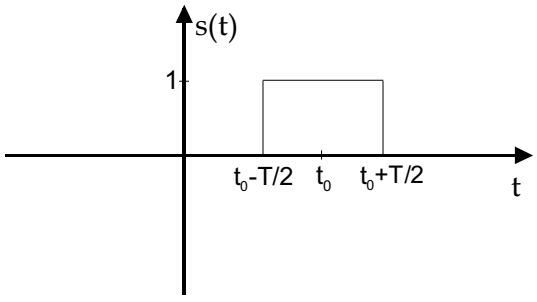


Abbildung 2.18: Rechteckimpuls

Wie verhält sich das Spektrum des Rechteckimpulses im Unendlichen?

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = e^{-j2\pi ft_0} \cdot T \cdot \text{si}(\pi fT) = e^{-j2\pi ft_0} \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$\Rightarrow |S(f)| \sim \frac{1}{f}$ Da das Spektrum mit $\frac{1}{f}$ gegen 0 geht, gilt also:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$\Rightarrow |S(f)| = O\left(\frac{1}{f}\right)$ Das Spektrum hat im Unendlichen immer kleiner werdende Anteile.

Allerdings fallen die Anteile nur mit f^{-1} ab.

2) DREIECKIMPULS

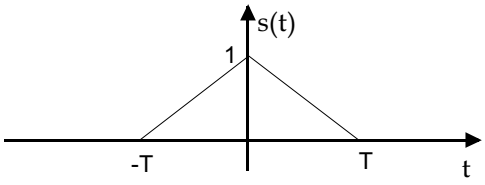


Abbildung 2.19: Dreieckimpuls

Wie verhält sich das Spektrum des Dreieckimpulses im Unendlichen?

$$s(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = T \cdot si^2(\pi fT) = T \cdot \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$$

$\Rightarrow |S(f)| \sim \frac{1}{f^2}$ Da das Spektrum mit $\frac{1}{f^2}$ gegen 0 geht, gilt:

$\Rightarrow |S(f)| = O\left(\frac{1}{f^2}\right) = o\left(\frac{1}{f}\right)$ Das Spektrum fällt schneller ab als das des Rechteckimpulses

Vermutung: Das asymptotische Verhalten von S(f) wird nur durch das Verhalten (stetige Differenzierbarkeit) von s(t) an den Grenzen des Integrationsintervalls bestimmt. Im Beispiel 1 hat die rect-Funktion an den Intervallgrenzen einen senkrechten Sprung, wobei die Dreiecksfunktion nicht so stark springt. Das Spektrum der Dreiecksfunktion fällt mit f^{-2} ab.

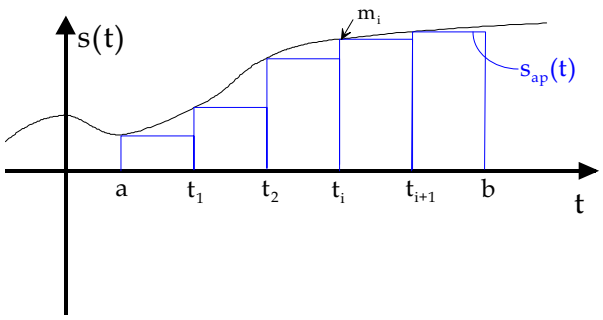
BEWEIS:
Den Beweis für diese Vermutung liefert das Riemann-Lebesgue-Lemma aus der Mathematik. Es zeigt, daß das Verhalten von S(f) (im Beweis wird M(k) verwendet) nur von der Form von s(t) und der Form ihrer Ableitung an den Endpunkten des Integrationsbereiches abhängt.

Riemann-Lebesgue-Lemma
Wenn s(t) absolut integrierbar ist, dann gilt:

$$M(k) = \int_a^b s(t) \cdot e^{jkt} dt \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty \tag{2.75}$$

1. Annahme: a,b beschreiben ein endliches Intervall. Dann kann eine Intervallteilung folgendermaßen gefunden werden:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen



t_0=a
$t_i \le t_{i+1}$
s_{ap}=Approximationsfunktion

Abbildung 2.20: Approximation von S_{ap} an s(t)

$$t_i \le t \le t_{i+1} \Rightarrow s_{ap}(t) = \min\big(s(t)\big) = m_i$$

In den Intervallen entspricht der ausgewählte Funktionswert dem kleinsten von s(t) in diesem Intervall. Die neue Funktion $s_{ap}(t)$ entspricht einer Treppenfunktion, die sich der ursprünglichen Funktion s(t) annähert. Die Fouriertransformierte von $s_{ap}(t)$ ist somit:

$$M_n(k) = \int_a^b s_{ap}(t) \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} m_i \cdot e^{jkt} dt$$

$$\boxed{M_n(k) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \frac{1}{jk}\left[e^{jkt_{i+1}} - e^{jkt_i}\right]} \qquad (2.76)$$

Für jedes ε>0 kann man nun eine genügend feine Intervallteilung finden (n genügend groß), so daß gilt:

$$\left|M_n(k) - M(k)\right| < \varepsilon$$

Es wird nun eine Abschätzung dieser Funktion gesucht, die auf den asymptotischen Verlauf im Unendlichen schließen läßt:

$$\left|M_n(k)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \frac{e^{jkt_{i+1}} - e^{jkt_i}}{jk}\right|$$

$$\le \frac{1}{|k|} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |m_i| \cdot \underbrace{\left|e^{jkt_{i+1}} - e^{jkt_i}\right|}_{\le 2}$$

$$\le \frac{2}{|k|} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|M_n(k)\right| \le \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\left|m_i\right|}_{} = 0$$

konvergiert für absolut integrierbare s(t).

$$\lim_{k\to\infty}\left|M_n(k)\right| = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Das bedeutet, daß $\lim_{f\to\infty} S(f) = O\left(\frac{1}{f}\right)$*, wenn s(t) einmal absolut integrierbar ist.*

2. Annahme: s(t) habe im Intervall [a,b] *eine* absolut integrierbare Ableitung.
Wir betrachten nun die Ableitung des Exponentialterms, um später partiell zu integrieren:

$$\frac{d}{dt}e^{jkt} = jk\cdot e^{jkt}$$

$$de^{jkt} = jk\cdot e^{jkt}dt$$

$$\Rightarrow e^{jkt} = \frac{1}{jk}\cdot\frac{d}{dt}e^{jkt}$$

Mit diesem Ergebnis läßt sich das Integral folgendermaßen schreiben:

$$\Rightarrow \qquad M(k) = \int_a^b s(t)\cdot e^{jkt}dt = \int_a^b \underbrace{\frac{s(t)}{jk}}_{v}\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}e^{jkt}}_{u'}dt \qquad \text{Mit partieller Integration}$$

$$= \left[\underbrace{\frac{s(t)}{jk}}_{v}\cdot\underbrace{e^{jkt}}_{u}\right]_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{s'(t)}{jk}}_{v'}\cdot\underbrace{e^{jkt}}_{u}dt$$

$$= \frac{s(b)\cdot e^{jkb} - s(a)\cdot e^{jka}}{jk} - \frac{1}{jk}\cdot\underbrace{\int_a^b s'(t)\cdot\underbrace{e^{jkt}dt}_{\frac{1}{jk}\cdot de^{jkt}}}_{J}$$

Man weiß nun, daß das letzte Integral entsprechend des Riemann-Lebesgue-Lemma (2.75) für $k\to\infty$ gegen 0 geht, da nach Voraussetzung die erste Ableitung auf dem angegebenen Intervall absolut integrierbar ist. Wir integrieren weiterhin partiell; durch Substitution ergibt sich das asymptotische Verhalten für das Integral J:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$J = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{jk} \cdot \int_a^b s'(t) \cdot \frac{d}{dt} e^{jkt}\, dt = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{jk} \cdot \left[s'(t) \cdot e^{jkt} \right]_a^b - \frac{1}{jk} \cdot \int_a^b \underbrace{s''(t)}_{\substack{\text{nach Vorauss.} \\ \text{nicht mehr absolut} \\ \text{integrierbar.}}} \cdot e^{jkt} dt \right]$$

$$= O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Man erkennt also, daß man immer weiter partiell integrieren könnte, bis eine nicht mehr absolut integrierbare Ableitung im Integral erscheint (z.B. Diracstöße). Durch jedes weitere partielle ableiten multipliziert man ein jk im Nenner. Das bedeutet, daß je mehr Ableitungen der Funktion absolut integrierbar sind, desto höher ist der Exponent im Nenner. Die fortgesetzte Integration zeigt dies:

$$M(k) = \int_a^b s(t) \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \frac{s(b) \cdot e^{jkb} - s(a) \cdot e^{jka}}{jk} - \frac{1}{jk} \cdot \underbrace{\int_a^b s'(t) \cdot e^{jkt} dt}_{\frac{1}{jk} \cdot \int_a^b s'(t) \frac{d}{dt} e^{jkt}\, dt}$$

$$= \frac{1}{jk} \cdot \left(s'(b) \cdot e^{jkb} - s'(a) \cdot e^{jka} \right) - \frac{1}{jk} \cdot \int_a^b s''(t) \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \frac{s(b) \cdot e^{jkb} - s(a) \cdot e^{jka}}{jk} - \underbrace{\frac{\left[s'(b) \cdot e^{jkb} - s'(a) \cdot e^{jka} \right]}{(jk)^2} + \frac{\int_a^b s''(t) \cdot e^{jkt} dt}{(jk)^2}}_{O\left(\frac{1}{k^2}\right) = o\left(\frac{1}{k}\right)}$$

Allgemein kann man nun schreiben:

$$M(k) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cdot \frac{s^{(m)}(b) \cdot e^{jkb} - s^{(m)}(a) \cdot e^{jka}}{(jk)^{m+1}} + o\left(\frac{1}{k^n}\right) \qquad (2.77)$$

$s^{(m)}(a)$ ist die m-te Ableitung an der Stelle a^+.

$s^{(m)}(b)$ ist die m-te Ableitung an der Stelle b^-.

n hängt von der Ordnung der Ableitung ab, die noch absolut integrierbar ist. Die n-te Ableitung ist nicht mehr absolut integrierbar.

Nun wenden wir diese Erkenntnis auf S(f) an. Es wird substituiert $k=-2\pi f$:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S(f) = \int_a^b s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

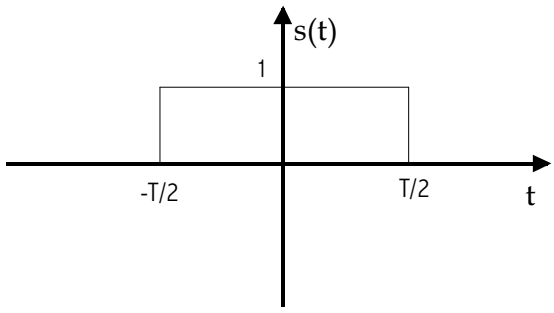
$$S(f) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cdot \frac{s^{(m)}(b) \cdot e^{-j2\pi fb} - s^{(m)}(a) \cdot e^{-j2\pi fa}}{(-j \cdot 2\pi f)^{m+1}} + o\left(\frac{1}{(2\pi f)^n}\right)$$

$$S(f) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{s^{(m)}(a) \cdot e^{-j2\pi fa} - s^{(m)}(b) \cdot e^{-j2\pi fb}}{(j \cdot 2\pi f)^{m+1}} + o\left(\frac{1}{(2\pi f)^n}\right) \quad (2.78)$$

Da n die Ordnung der Ableitung ist, die nicht mehr absolut integrierbar ist, kann man sagen, daß ein Spektrum desto stärker nach 0 geht je größer n ist. Funktionen mit „weichen“ Ecken an den Intervallgrenzen haben mehr Ableitungen, die noch absolut integrierbar sind, als Funktionen mit Sprungstellen. An den folgenden Beispielen wird dies verdeutlicht.

BEISPIEL:
1) RECHTECKIMPULS

$$s(t) = \text{rect}\frac{t}{T}$$



A

Abbildung 2.21: Rechteckimpuls

$$s'(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

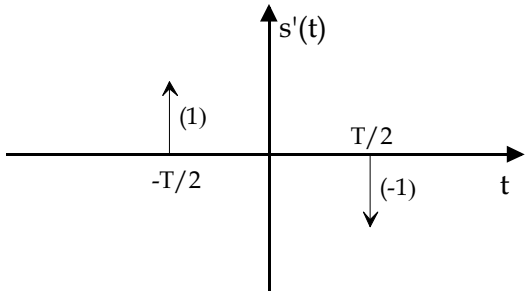


Abbildung 2.22: Ableitung des Rechteckimpulses

s‘(t) ist nicht absolut integrierbar im klassischen Sinn. Eingesetzt in die allgemeine Formel für n=1 ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S(f) = \frac{s^{(0)}(a)\cdot e^{-j2\pi fa} - s^{(0)}(b)\cdot e^{-j2\pi fb}}{(j\cdot 2\pi f)^1} + o\left(\frac{1}{2\pi f}\right)$$

$$= \frac{e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}}{j\cdot 2\pi f} + o\left(\frac{1}{2\pi f}\right)$$

$$= \frac{2j\cdot \sin(\pi fT)}{j\cdot 2\pi fT} + o\left(\frac{1}{2\pi f}\right)$$

$$= T\cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} + o\left(\frac{1}{2\pi f}\right)$$

$$= T\cdot si(\pi fT) + o\left(\frac{1}{2\pi f}\right)$$

Das Frequenzspektrum des Rechteckimpulses ist also eine si-Funktion, die mit $\frac{1}{f}$ abfällt. Dazu wird eine Funktion addiert, die noch stärker als mit $\frac{1}{f}$ abfällt. So kann man das asymptotische Verhalten des Frequenzspektrums beschreiben.

2) DREIECKIMPULS

$$s(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

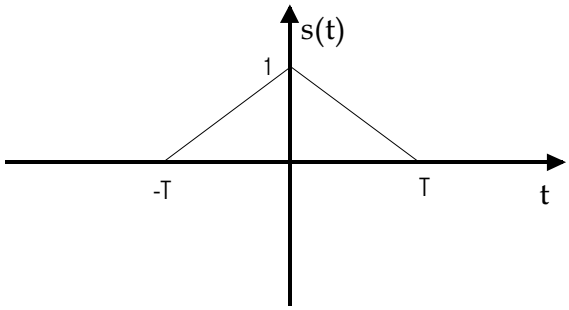


Abbildung 2.23: Dreieckimpuls

$$s'(t) = \frac{1}{T}\,rect\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{1}{T}\,rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

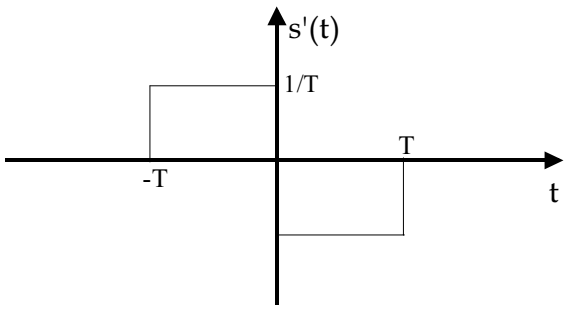


Abbildung 2.24: Ableitung des Dreieckimpulses

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s''(t)=\frac{1}{T}\left(\delta(t+T)-\delta(t)+\delta(t-T)\right)$$

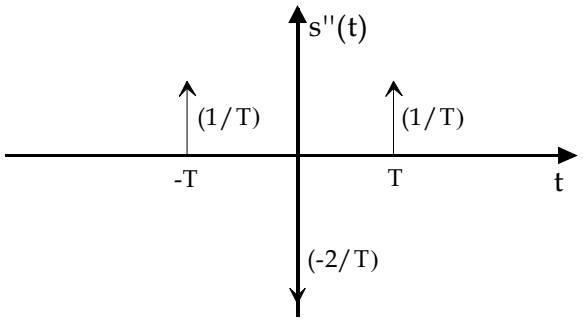


Abbildung 2.25: 2. Ableitung des Dreieckimpulses

Hier ist erst die zweite Ableitung nicht absolut integrierbar. Also ist n=2. Es ist zu beachten, daß die erste Ableitung unstetig ist. s(t) ist allerdings stückweise stetig differenzierbar. Deshalb ist es unbedingt notwendig, S(f) in zwei Teilintegrale aufzuteilen. In diesen beiden Intervallen ist die erste Ableitung der Zeitfunktion wiederum absolut integrierbar.

$$\begin{aligned}S(f)&=\int_{-T}^{0}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi ft}dt+\int_{0}^{T}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi ft}dt\\&=\frac{0-1}{j2\pi f}+\frac{1}{T}\cdot\frac{\left[e^{j2\pi fT}-1\right]}{(j2\pi f)^2}+\frac{1-0}{j2\pi f}+\frac{1}{T}\cdot\frac{\left[1-e^{-j2\pi fT}\right]}{(j2\pi f)^2}+o\left(\frac{1}{(2\pi f)^2}\right)\\&=T\cdot si^2(\pi ft)+o\left(\frac{1}{(2\pi f)^2}\right)\end{aligned}$$

Das Frequenzspektrum des Dreieckimpulses ist also eine quadratische si-Funktion, die mit $\frac{1}{f^2}$ abfällt. Dazu wird eine Funktion addiert, die noch stärker als mit $\frac{1}{f^2}$ abfällt. So kann man das asymptotische Verhalten des Frequenzspektrums beschreiben.

Vorgehensweise zum Finden der asymptotischen Näherung des Frequenzspektrums:
- Ableiten, bis Diracstöße auftreten
- Anwenden des Riemann-Lebesgue-Lemma

Wenn s(t) und die entsprechenden Ableitungen im Unendlichen schnell genug verschwinden, können die Grenzen a uns b auch gegen -∞ bzw. +∞ gehen, da die Funktionswerte an diesen Grenzen vernachlässigbar klein werden.
Insbesondere gilt für kausale Funktionen mit a=0 und b→∞, bei denen s(t) und alle Ableitungen von s(t) im Unendlichen gleich 0 sind, gilt durch Einsetzen in folgendes:

$$\begin{aligned}S(f)&=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{s^{(m)}(0)}{(j\cdot 2\pi f)^{m+1}}+o\left(\frac{1}{(2\pi f)^n}\right)\\&=\frac{s(0)}{(j\cdot 2\pi f)}+\underbrace{\frac{s'(0)}{(j\cdot 2\pi f)^2}+\frac{s''(0)}{(j\cdot 2\pi f)^3}+\ldots}_{\to 0}\end{aligned}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Nach entsprechender Umformung erhalten wir den interessanten Zusammenhang:

$$j \cdot 2\pi f \cdot S(f) = s(0) + o\left(\frac{1}{f}\right)$$

$$\boxed{\lim_{f\to\infty} j \cdot 2\pi f \cdot S(f) = s(0^+)} \qquad (2.79)$$

Anfangswerttheorem

Der Beginn der kausalen Zeitfunktion s(t) läßt auf den asymptotischen Verlauf des dazugehörigen Frequenzspektrums schließen.

Schlußfolgerung: Wenn die Funktion s(t) und die Ableitungen von s(t) bis zur Ordnung n-2 an den Intervallgrenzen verschwinden, dann geht das Spektrum S(f) proportional mit $\frac{1}{f^n}$ für $f\to\infty$ gegen 0.

Das bedeutet:

$$\left.\begin{matrix} s^{(m)}(a) \\ s^{(m)}(b) \end{matrix}\right\} = 0 \quad \forall \quad m \le n-2$$

$$\Rightarrow \lim_{f\to\infty} S(f) = o\left(\frac{1}{f^n}\right) \sim \frac{1}{f^n}$$

- **Endpunkt-Singularitäten**

Wie sieht das asymptotische Verhalten des Spektrums aus, wenn das Signal an den Intervallgrenzen Singularitäten besitzt?

Singularitäten am unteren Integrationsrand

$s(t) \to \infty$ für $t\to a, t\to b$

$\Rightarrow$ Jeder Diracstoß ist eine solche Singularität.

Zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Spektren von Funktionen mit Singularitäten am unteren Integrationsrand wird nun angenommen, daß die untere Grenze bei t=0 sei und sich dort eine Singularität befinde:

$\lim_{t\to a} s(t) \to \infty$ und a=0. Das heißt, es existiert eine Singularität im Ursprung.

Weiterhin soll gelten, daß $\lim_{t\to 0} s(t) \sim t^{\alpha}, \quad -1 < \alpha < 0$.

Die Singularität „verschwindet“, wenn man die Funktion s(t) durch t^{α} teilt, so daß die dazu proportionale Polstelle nicht mehr existiert:

$$\varphi(t) = s(t) \cdot t^{-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow s(t) = t^{\alpha} \cdot \varphi(t), \qquad -1 < \alpha < 0$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

φ(t) soll im Nullpunkt *eine* stetige Ableitung besitzen.

Nun gilt für das Spektrum:

$$M(k) = \int_0^b s(t) \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \int_0^b \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt$$

Folgende Behauptung für das asymptotische Verhalten dieses Spektrums wird aufgestellt:
Es gilt für $k \to \infty$:

$$M(k) = \varphi(0) \cdot \int_0^b t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + O\left(k^{-1}\right)$$

mit $\lim_{k \to \infty} k \cdot O\left(k^{-1}\right) = \text{const} = \text{endlich!}$

Mit der Gamma-Funktion (oder dem Eulerschen Integral) $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} \cdot e^{-t} dt$

ergibt sich

$$M(k) = \varphi(0) \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha+1}} \cdot e^{j\pi\frac{\alpha+1}{2}} + O\left(k^{-1}\right) \tag{2.80}$$

BEWEIS:
Das Integral wird in zwei Teilintegrale aufgeteilt:

$$M(k) = \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + \int_{\varepsilon}^b \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt \tag{2.81}$$

Das zweite Integral besitzt keine Singularitäten in [ε;b]. D.h. nach (2.77) ergibt sich:

$$\int_{\varepsilon}^b \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt = \frac{\varepsilon^{\alpha} \cdot \varphi(\varepsilon) \cdot e^{jk\varepsilon} - e^{jkb} \cdot b^{\alpha} \cdot \varphi(b)}{jk} + o\left(k^{-1}\right) = O\left(k^{-1}\right)$$

Ebenso folgt daraus für $b \to \infty$:

$$\lim_{b \to \infty} \int_{\varepsilon}^b \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt = O\left(k^{-1}\right)$$

Das kann man weiterhin so ausdrücken:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt = O\left(k^{-1}\right)$$

Dann gilt auch für das Differenzintegral im Intervall [b;∞] folgendes:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt - \int_{\varepsilon}^{b} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \int_{b}^{\infty} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt$$

$$= O\left(k^{-1}\right)$$

Für das erste Teilintegral von (2.81) schreiben wir nun:

Taylorreihenentwicklung

$$\int_{0}^{\varepsilon} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt = \int_{0}^{\varepsilon} \left[\varphi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{(i)}(0) \cdot \frac{1}{i!} \cdot t^{i} \right] \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \varphi(0) \cdot \int_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + \int_{0}^{\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{(i)}(0) \cdot \frac{1}{i!} \cdot t^{i} \right] \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \varphi(0) \cdot \int_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + \int_{0}^{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{(i)}(0) \cdot \frac{1}{i!} \cdot t^{i+\alpha} \cdot e^{jkt} dt$$

Keine Singularitäten im Integrationsbereich $=O(k^{-1})$

Da im zweiten Summand innerhalb des Integrals keine Singularitäten vorliegen, geht diese Funktion asymptotisch gegen 0. Nach Voraussetzung hat φ(t) im Nullpunkt *eine* stetige Ableitung.

Damit gilt zusammenfassend:

$$\int_{0}^{\varepsilon} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt = \varphi(0) \cdot \int_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + O\left(k^{-1}\right) \tag{2.82}$$

Nach Zusammenfassen der beiden Teilintegrale kann man nun für das Spektrum der Funktion mit einer Singularität am unteren Integrationsrand schreiben:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$M(k) = \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + \int_{\varepsilon}^{b} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) \cdot t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + O\left(k^{-1}\right)$$

$$= \varphi(0) \cdot \int_0^{\varepsilon} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + O\left(k^{-1}\right) + O\left(k^{-1}\right)$$

$$= \varphi(0) \cdot \left[\int_0^{\infty} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt - \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt}_{O\left(k^{-1}\right)} \right] + O\left(k^{-1}\right) + O\left(k^{-1}\right)$$

$$= \varphi(0) \cdot \int_0^{\infty} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt + O\left(k^{-1}\right)$$

Das Integral wird nun separat betrachtet und die komplexe Funktion in der Komponentenschreibweise geschrieben:

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} \cdot e^{jkt} dt = \int_0^{\infty} t^{\alpha} \cdot \cos(kt) dt + j \cdot \int_0^{\infty} t^{\alpha} \cdot \sin(kt) dt$$

Aus Tabelle in mathematischer Formelsammlung entnehmbar.

$$= \frac{1}{(-jk)^{\alpha+1}} \cdot \Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha+1}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(\alpha+1)}$$

$$M(k) = \varphi(0) \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha+1}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(\alpha+1)} + O\left(k^{-1}\right) \qquad (2.83)$$

q.e.d.

Damit ist die Annahme von oben bewiesen.

Singularitäten am oberen Integrationsrand

$s(t) \to \infty$ für $t \to b$

$\Rightarrow$ Jeder Diracstoß ist eine solche Singularität.

s(t) ist singulär bei t=b. Die Vorgehensweise ähnelt der bei Singularitäten am unteren Integrationsrand.
Nun schreiben wir für s(t)

$s(t) = (b-t)^{\beta} \cdot \varphi(t)$ mit $-1 < \beta < 0$.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$M(k) = \int_a^b (b-t)^{\beta} \cdot \varphi(t) \cdot e^{jkt} dt$$

Durch Substitution mit

$$\begin{aligned} b - t &= u \\ t &= b - u \\ du &= -dt \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} M(k) &= -\int_{b-a}^{0} u^{\beta} \cdot \varphi(b-u) \cdot e^{-jku} \cdot e^{jkb} du \\ &= \int_0^{b-a} u^{\beta} \cdot \varphi(b-u) \cdot e^{-jku} \cdot e^{jkb} du \\ &= e^{jkb} \cdot \int_0^{b-a} u^{\beta} \cdot \varphi(b-u) \cdot e^{-jku} du \\ &= e^{jkb} \cdot \varphi(b) \cdot \int_0^{\infty} u^{\beta} \cdot e^{-jku} du + O\left(k^{-1}\right) \end{aligned}$$

Nun existiert eine Singularität an der unteren Grenze

Führt man den Beweis wie bei Funktionen mit Singularitäten am unteren Integrationsrand fort, erhält man analog zu (2.83):

$$\lim_{k \to \infty} M(k) = e^{jkb} \cdot \varphi(b) \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)}{k^{\beta+1}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}(\beta+1)} + O\left(k^{-1}\right) \qquad (2.84)$$

Anmerkung: Wenn Singularitäten im Inneren des Integrationsbereiches auftreten, muß man das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen!

BEISPIEL:

$$M(k) = \int_0^b t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{jkt} dt$$

Die kausale Zeitfunktion s(t) ist hier also $s(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ mit den Parametern:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 \\ \alpha &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Am unteren Integrationsrand (bei t=0) hat diese Funktion eine Singularität. Somit führen wir die Ermittlung des Spektrums wie oben fort und verwenden (2.83):

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$M(k)=\int_0^{\varepsilon} t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{jkt}dt+\int_{\varepsilon}^{b} t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{jkt}dt$$

$$=1\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{k^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}+\int_{\varepsilon}^{b} t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{jkt}dt$$

Mit partieller Integration (vgl. (2.77))

$$\varphi(0)\quad=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{k^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}-\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{jk\varepsilon}-e^{jkb}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{jk}-\frac{1}{jk}\cdot\int_{\varepsilon}^{b}-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{jkt}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{k^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}+\frac{e^{jkb}\cdot b^{-\frac{1}{2}}}{jk}-\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{jk\varepsilon}}{jk}+\ldots$$

Allgemein kann man durch Anwendung von (2.77) und $\varepsilon\to 0$ schreiben:

$$M(k)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{k^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\cdot\frac{\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)^{(m)}\Big|_b\cdot e^{jkb}-0}{(jk)^{m+1}}+O\left(k^{-n}\right)\qquad(2.85)$$

2.7.1. METHODE DER STATIONÄREN PHASE

Es wird eine Beschreibung des Verhaltens des Spektrums eines Signals durch asymptotische Ausdrücke gesucht.
Man untersucht nun das Verhalten des Fourierspektrums der Form

$$N(k)=\int_a^b f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt\qquad(2.86)$$

BEISPIEL:
Als Funktion mit veränderlicher Phase nehmen wir später im Anwendungsbeispiel den Chirpimpuls als Funktion mit quadratischer Phase.

$$f(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{j\pi k_r t^2}$$

Diese Funktion nennt man „Chirp“-Impuls

Die Frequenz steigt mit zunehmendem t linear. In Abb. 2.26 sieht man den Realteil des komplexen Chirp-Signals.

$$s(t)=\mathrm{Re}\left\{\mathrm{rect}\frac{t}{T}\cdot e^{j\pi k_r t^2}\right\}=\mathrm{rect}\frac{t}{T}\cdot\cos\left(\pi k_r t^2\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

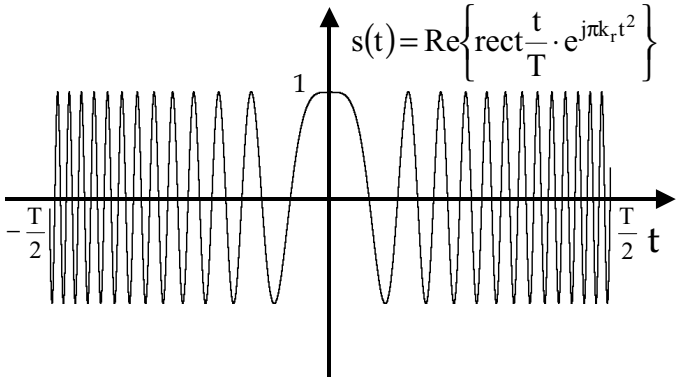


Abbildung 2.26: Realteil des komplexen Chirp-Signals

Die Fouriertransformierte des Chirps sieht so aus:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{j\pi k_r t^2} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\underbrace{j2\pi f \cdot \left(-t + \frac{k_r}{2} \cdot \frac{t^2}{f}\right)}_{e^{jk\mu(t)}}} dt$$

Mit der Substitution

$$k = 2\pi f \quad ; \quad \mu(t) = \frac{k_r}{2} \cdot \frac{t^2}{f} - t$$

ergibt sich die Form aus (2.86).
Es wird angenommen, daß μ(t) zweimal stetig differenzierbar ist im Intervall [a;b]!

1. Fall: μ(t) hat kein Maximum oder Minimum im Intervall
D.h. $\mu'(t) \neq 0$ für $a \leq t \leq b$

Die Phase μ(t) ist also an keiner Stelle stationär. Die Ableitung der Phase μ(t) ist im Intervall überall ungleich 0.
Setzt man dies nun in (2.86) ein und formt sie nach der bekannten Weise um (siehe Anfang des Kapitels 2.7), dann gilt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$N(k) = \int_a^b f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt$$

$$= \int_a^b f(t)\cdot \frac{d}{dt}\frac{e^{jk\mu(t)}}{jk\mu'(t)}dt$$

Mit partieller Integration

$$= \left[\frac{f(t)}{jk\mu'(t)}\cdot e^{jk\mu(t)}\right]_a^b - \frac{1}{jk}\cdot\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{\mu'(t)}\right)\cdot e^{jk\mu(t)}dt$$

$$= \frac{f(b)}{jk\mu'(b)}\cdot e^{jk\mu(b)} - \frac{f(a)}{jk\mu'(a)}\cdot e^{jk\mu(a)} - \frac{1}{jk}\cdot\int_a^b g(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt$$

mit $g(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{\mu'(t)}\right)$

g(t) hat keine Singularitäten, da nach Voraussetzung $\mu'(t) \neq 0$ und damit die das Differential nicht gegen ∞ geht.

Wir betrachten jetzt das übriggebliebene Integral von N(k):

$$\int_a^b g(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt = \int_a^b \frac{g(t)}{jk\mu'(t)}\frac{d}{dt}e^{jk\mu(t)}\,dt$$

Mit partieller Integration

$$= \frac{1}{jk}\left(\frac{g(b)}{\mu'(b)}\cdot e^{jk\mu(b)} - \frac{g(a)}{\mu'(a)}\cdot e^{jk\mu(a)}\right) - \frac{1}{jk}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{g(t)}{\mu'(t)}\right)\cdot e^{jk\mu(t)}dt$$

$$= o\left(k^{-1}\right)$$

Durch fortgesetzte Integration erkennt man, daß die Ableitung der Phase immer wieder in den Nenner des im Integral stehenden Quotienten rückt. Da nach Voraussetzung diese Ableitung im Intervall nicht null wird und somit die Funktion im Integral absolut integrierbar bleibt, weiß man daß dieses Integral im Unendlichen mindestens mit k^{-1} verschwindet.

Daraus folgt für die Funktion N(k):

$$N(k) = \frac{1}{jk}\left(\frac{f(b)}{\mu'(b)}\cdot e^{jk\mu(b)} - \frac{f(a)}{\mu'(a)}\cdot e^{jk\mu(a)}\right) + o\left(k^{-1}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} N(k) = O(k^{-1})$$

Das Fourierspektrum N(k) einer Funktion mit veränderlicher, nicht stationärer Phase besitzt also ein asymptotisches Verhalten im Unendlichen. (2.87)

2. Fall: μ(t) hat ein Maximum oder Minimum im Intervall

D.h. $\mu'(t) = 0$ für $t = t_0 \quad a \le t_0 \le b$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Es existiert also bei $t=t_0$ ein Punkt **stationärer Phase** im Intervall. Dort ändert sich die Phase (wenn auch nur an einer infinitesimal kleinen Stelle t_0) nicht.

$\mu''(t_0) \neq 0$ und $|\mu''(t_0)|$ relativ groß.

Das heißt, daß das Extremum der Phase (Punkt stationärer Phase) ziemlich spitz ist. Es ändert sich also die Richtung der Änderung. Es liegt kein Wendepunkt vor.
Wenn man nun das Integral N(k) in mehrere Teilintegrale aufteilt, indem man die Stelle der stationären Phase durch einen sehr kleinen Bereich $\pm\varepsilon$ ausspart, so ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} N(k) &= \int_a^b f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt \\ &= \int_a^{t_0-\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt + \int_{t_0+\varepsilon}^{b} f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt \\ &= O\left(k^{-1}\right) + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt + O\left(k^{-1}\right) \end{aligned}$$

Nach den Erkenntnissen aus dem 1. Fall sind die Spektren ohne stationäre Phase Funktionen, die im Unendlichen verschwinden (2.87). Nur das Integral, in dessen Intervall die stationäre Phase liegt, ergibt im Unendlichen einen Beitrag, der noch zu bestimmen ist.

$$N(k) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt + O\left(k^{-1}\right) \tag{2.88}$$

Nun muß das Integral mit der stationären Phase weiter betrachtet werden. In einer beliebig kleinen Umgebung ($\varepsilon\to 0$) von t_0 gilt durch die Entwicklung einer Taylorreihe:

$$\mu(t) = \mu(t_0) + \frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2 \ldots \tag{2.89}$$

Die erste Ableitung von $\mu(t)$ ist nach Voraussetzung gleich null (Extremum). Wir brechen nach dem quadratischen Glied ab.

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt \cong \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\left[\mu(t_0)+\frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2\right]}dt$$

$$N(k) = e^{jk\mu(t_0)}\cdot\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2}dt \tag{2.90}$$

Man betrachtet nun das Integral aus (2.90) unter den gegebenen Voraussetzungen:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\cdot\frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2}\,dt \qquad \mu''(t_0)\neq 0 \qquad (2.91)$$

$$|\mu''(t_0)| >> 0$$

Es gilt auch die Approximation des Diracstoßes durch einen beliebig „kurzen“ Gaußimpuls: (siehe http://www.nv.et-inf.uni-siegen.de/pb2/theory/content.htm)

$$\delta(t) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}$$

Mit der Substitution $\sigma^2 = {\sigma_0}^2\cdot j$ erhalten wir:

$$\delta(t) = \lim_{\sigma_0\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{j}\cdot\sigma_0}\cdot e^{j\frac{t^2}{(\sigma_0)^2}}$$

Für ein hinreichend kleines σ_0 können wir dann näherungsweise schreiben:

$$\delta(t) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{j}\cdot\sigma_0}\cdot e^{j\frac{t^2}{(\sigma_0)^2}} \qquad (2.92)$$

Nun setzen wir $\frac{k}{2}\cdot\mu''(t_0) = \frac{1}{{\sigma_0}^2}$

$$\Leftrightarrow \qquad \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{k\cdot\mu''(t_0)}}$$

Da μ_0“(t_0) sehr groß ist, ist σ_0 sehr klein.

Damit erhalten wir:

$$\delta(t) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{j}}\cdot\frac{\sqrt{k\cdot\mu''(t_0)}}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{t^2}{2}\cdot k\cdot\mu''(t_0)}$$

$$\Leftrightarrow e^{j\cdot\frac{t^2}{2}\cdot k\cdot\mu''(t_0)} \cong \delta(t)\cdot\frac{\sqrt{j}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}{\sqrt{k\cdot\mu''(t_0)}}$$

Nun setzen wir das in das Integral aus (2.91) ein:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\cdot\frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2}\,dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{j\frac{(t-t_0)^2}{\sigma_0^2}}\,dt$$

$$= \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\sigma_0\cdot\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot\underbrace{\frac{e^{j\frac{(t-t_0)^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\sigma_0}}_{\cong\delta(t-t_0)}\,dt$$

Durch diese Vereinfachungen ergibt sich aus dem Integral mit der durch die Taylorreihe angenäherte Phase:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\cdot\frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2}\,dt \cong \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\sigma_0\cdot\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt \tag{2.93}$$

Mit der Substitution $(t-t_0)=u$ erhält man weiterhin:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\cdot\frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2}\,dt \cong \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\sigma_0\cdot\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+t_0)\cdot\delta(u)\,du$$

In http://www.nv.et-inf.uni-siegen.de/pb2/theory/content.htm wird gezeigt, daß

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s(u)\cdot\delta(u)\,du = s(0)$$

gilt. Somit können wir für das Integral schreiben für das Integral:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot e^{jk\cdot\frac{\mu''(t_0)}{2}\cdot(t-t_0)^2}\,dt \cong \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\sigma_0\cdot f(t_0)$$

$$= \sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\frac{1}{\sqrt{k\cdot\mu''(t_0)}}\cdot f(t_0) \tag{2.94}$$

Damit formulieren wir abschließend das Endergebnis der asymptotischen Näherung eines Frequenzspektrum durch die Methode der stationären Phase.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Zusammenfassung der Methode der stationären Phase:

$$
\begin{aligned}
N(k) &= \int_a^b f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)\cdot f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt \\
&\cong \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{e^{jk\mu(t_0)}}{\sqrt{k\cdot\mu''(t_0)}}\cdot f(t_0)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t_0-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)+O\left(k^{-1}\right)
\end{aligned}
\qquad (2.95)
$$

mit $t_0: \quad \mu'(t_0)=0$

$\mu''(t_0)\neq 0$

Die asymptotische Näherung eines Spektrums mit Hilfe der stationären Phase vereinfacht die Berechnung sehr, da man zu dessen Bestimmung nur die Stelle stationärer Phase, den Wert der Phase an dieser Stelle und deren zweite Ableitung bestimmen muß.

ANWENDUNGSBEISPIEL:

$f(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{j\pi k_r t^2}$ Chirp-Impuls

Nun ist das Frequenzspektrum F(f) gesucht. Hier wird das Problem approximativ durch die asymptotische Näherung mit der Methode der stationären Phase gelöst.

$$
\begin{aligned}
F(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}\cdot e^{j\pi k_r t^2}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi ft}\cdot e^{j\pi k_r t^2}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi f\left[t-\frac{k_r}{2}\cdot\frac{t^2}{f}\right]}dt
\end{aligned}
\qquad (2.96)
$$

Man erkennt, daß die Form des Fourierintegrals der (2.86) entspricht. Man kann also die Methode der stationären Phase zur asymptotischen Berechnung des Spektrums benutzen.
Nun setzt man

$k_r = -2\pi f$

$\mu(t) = t-\frac{k_r}{2}\cdot\frac{t^2}{f}$

$f(t)=1$

Mit diesen Definitionen ergibt sich die Ableitung der Phase folgendermaßen:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\mu'(t) = 1 - \frac{k_r \cdot t}{f}$$

$$\Rightarrow \mu'(t_0) = 1 - \frac{k_r \cdot t_0}{f} = 0$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{f}{k_r}$$

Der stationäre Punkt liegt also bei t_0. Dort hat die Phase eine Extremstelle.

Natürlich muß $t_0 \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, also $f \in \left[-\frac{k_r \cdot T}{2}; \frac{k_r \cdot T}{2}\right]$ sein.

Die Phase an der Stelle t_0 ergibt sich durch Einsetzen:

$$\mu(t_0) = t_0 - \frac{k_r \cdot t_0^2}{2f}$$

$$= \frac{f}{k_r} - \frac{k_r \cdot f^2}{2f \cdot k_r^2}$$

$$= \frac{f}{k_r}\left[1 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{f}{2k_r}$$

Eine weitere Voraussetzung zum Anwenden der Methode der stationären Phase ist, daß die zweite Ableitung der Phase ungleich null und der Betrag davon ziemlich groß ist.

$$\mu''(t_0) = -\frac{k_r}{f} \neq 0$$

Dadurch erhalten wir mit dem Hauptterm der stationären Phase (1.1):

$$F(f) \cong \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{j} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{e^{-j2\pi f \cdot \frac{f}{2k_r}}}{\sqrt{(-2\pi f) \cdot \left(-\frac{k_r}{f}\right)}} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\frac{f}{k_r}}{T}\right)$$

$$= \sqrt{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_r}} \cdot e^{-j\pi \cdot \frac{f^2}{k_r}} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{k_r T}\right) \qquad \text{mit } \sqrt{j} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_r}} \cdot e^{-j\pi \cdot \left[\frac{f^2}{k_r} - \frac{1}{4}\right]} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{k_r T}\right)$$

Daraus ergibt sich abschließend die Fouriertransformation:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$f(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{j\pi k_r t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(f) \cong \frac{1}{\sqrt{k_r}}\cdot e^{-j\pi\cdot\left[\frac{f^2}{k_r}\right]}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{k_r T}\right)\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad (2.97)$$

Das Betragsspektrum eines Signals mit quadratischer Phase (hier „Chirp"-Impuls) ist durch die Methode der stationären Phase angenähert ebenfalls eine Rechteckfunktion.

3. ABTASTTHEOREME

Abtastung ist die Wandlung eines zeitkontinuierlichen Signals in ein zeitdiskretes Signal. Sie ist gewissermaßen das Bindeglied zwischen digitaler und analoger Signalverarbeitung und somit die Basis für reale technische Anwendungen. Da die numerische Verarbeitung von Signalen immer wichtiger wird, ist die Abtastung wichtig, um eine endliche und damit verarbeitbare Anzahl von Werten zu bekommen.
Allerdings ist sie nicht zu verwechseln mit der Quantisierung. Die Quantisierung ist die Wandlung eines *wert*kontinuierlichen Signals in ein *wert*diskretes Signal. Auch mit der Codierung sollte die Abtastung nicht verwechselt werden, denn Codierung ist die Wandlung der wertdiskreten Zahlendarstellung von einer in eine andere wertdiskrete Darstellung; z.B. der Zweier-Komplement-Vorzeichen-Absolutwertdarstellung (Siehe auch Lüke, Signalübertragung, Kapitel 3 und Vorlesung Nachrichtenübertragung.).

3.1. ABTASTUNG IM ZEITBEREICH

Der Ausgangspunkt dieser Veranschaulichung ist eine Abtast-Halteschaltung. Sie nimmt Werte des Signals s(t) und hält den Probenwert für ein gewisses Intervall konstant.

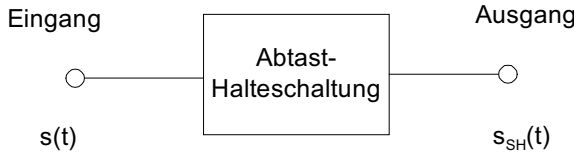


Abbildung 3.1: Abtast-Halteschaltung

In Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3 sind zwei Möglichkeiten des Haltens des Funktionswertes dargestellt.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

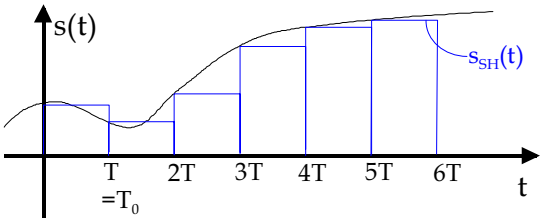


Abbildung 3.2: 1. Möglichkeit des Haltens des Funktionswertes

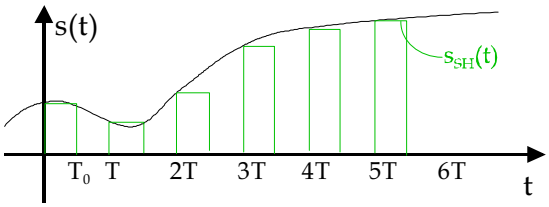


Abbildung 3.3: 2. Möglichkeit des Haltens des Funktionswertes

Das Ausgangssignal, das die Abtast-Halteschaltung ausgibt, kann man allgemein durch eine Summe von Rechteckfunktionen beschreiben:

$$s_{SH}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2} - n \cdot T}{T_0} \right) \cdot s(\overbrace{n \cdot T}^{t})$$

In Abbildung 3.2 ist T_0=T. Das heißt, daß ein abgetasteter Wert solange gehalten wird, bis ein neuer Wert aufgenommen wird. In Abbildung 3.3 ist T_0=T/2. Der Wert wird nur für die Hälfte des Abtastintervalls gehalten. Es entstehen Lücken. Schon von der Anschauung her wird man sagen, daß das Ausgangssignal wie in Abbildung 3.2 dem Originalsignal näher kommt als das in Abbildung 3.3. Unter Verwendung der Faltungseigenschaft der Diracstoßfolge findet man eine andere Beschreibung der obigen Aussage:

$$s_{SH}(t) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n \cdot T) \cdot \delta(t - n \cdot T)}_{\text{Probenlieferant Abtaster}} * \underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0} \right)}_{\text{Halteglied}}$$

Siebeigenschaft des Diracstoßes

$$= \underbrace{\left[s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T) \right]}_{s_a(t)} * \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0} \right)$$

Die abgetasteten Werte werden also mathematisch mit einem Halteglied (Rechteckfunktion) gefaltet. In Abbildung 3.4 sieht man die technische Realisierung.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T)$$

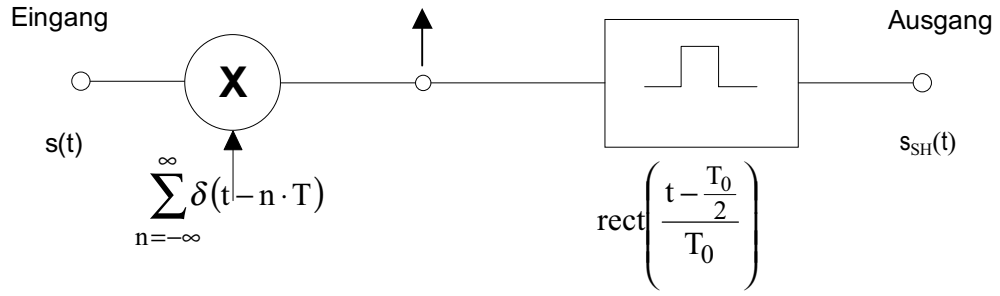


Abbildung 3.4: technische Realisierung der Faltung

Diese Art der Abtastung mit Abtaster und Halteglied nennt man *Sample-Hold-Abtastung*.

Es stellt sich nun die Frage der Fehlerbetrachtung. Diese Abtastung ist nicht fehlerfrei. Dies zeigt das sich ergebende Frequenzspektrum $S_{SH}(f)$. Aus der Faltung mit einer Rechteckfunktion wird durch die Fouriertransformation eine Multiplikation mit einer si-Funktion. Die Multiplikation mit den Diracstößen im Zeitbereich wird zu einer Faltung mit einer Diracstoßfolge im Frequenzbereich, was eine Wiederholung des Spektrums zur Folge hat. Wir nehmen an, das Spektrum von s(t) sei dreieckförmig.

$$S_{SH}(f) = S_a(f) \cdot \mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)\right\} = S_a(f) \cdot \mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) * \delta\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right\}$$

$$= \underbrace{S(f) * \frac{1}{T} \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right) \cdot T_0}_{\text{Periodisch wiederholtes Spektrum kann zu Fehlern führen!}} \cdot \underbrace{\mathrm{si}(\pi f T_0)}_{\text{Filterfunktion}} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi f \cdot \frac{T_0}{2}}}_{\text{Phasenlinearität}}$$

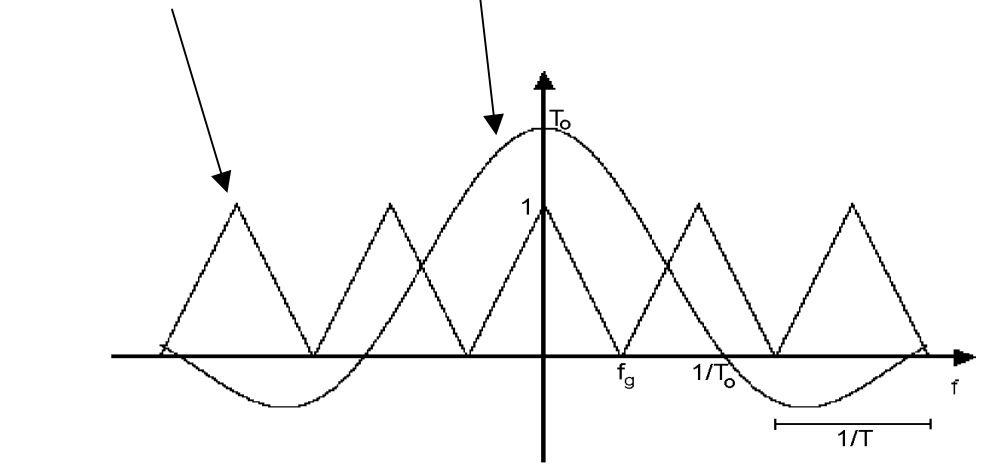


Abbildung 3.5: Filterfunktion und dreieckförmiges Spektrum

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

nach der Multiplikation:

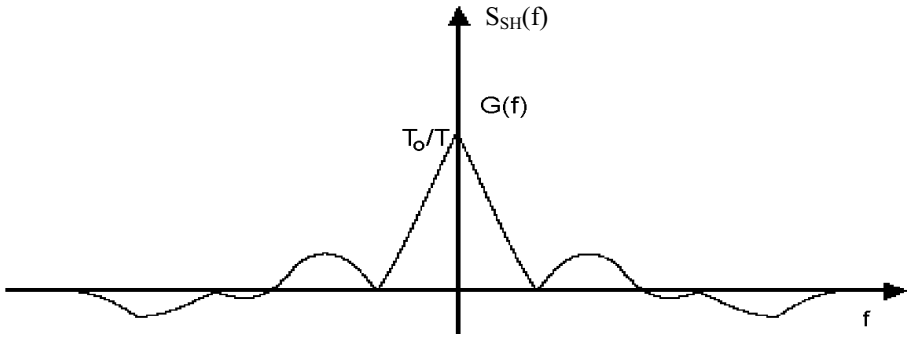


Abbildung 3.6: Multiplikation von Filterfunktion und Spektrum

Wie man erkennt, hat weitere Frequenzanteile außerhalb des Bereiches $-f_g \le f \le f_g$. Das Spektrum des abgetasteten Signals enthält also höhere Frequenzanteile. Dies ist auch gedanklich nachvollziehbar, denn durch die Abtastung wird die sich ergebende Zeitfunktion „eckiger" (unstetiger). Dies führt zu hohen Frequenzen. Diese kann man durch ein Tiefpaßfilter unterdrücken. Allerdings bleibt immer noch die Verzerrung des Spektrums durch die Multiplikation mit der si-Funktion.
Die Bedingungen, daß der Fehler minimiert wird, sind folgende:

- S(f) muß bandbegrenzt sein. D.h.

$$\frac{1}{T} - f_g \ge f_g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \ge 2f_g$$

Sonst würden sich die periodisch wiederholten Spektren überlappen. Diese Folgerung finden wir im Abtasttheorem wieder.

- Die Beeinflussung des Gesamtspektrums durch $T_0 \cdot si(\pi f T_0)$ muß minimiert werden, damit das Spektrum so wenig wie möglich verformt wird. D.h. $T_0 \to 0$. Dadurch würde die si-Funktion im Tiefpaßbereich des Originalspektrums nahezu konstant. Das Problem hierbei ist allerdings, daß dann auch $T_0 \cdot si(\pi f T_0)$ gegen null geht (Höhe der si-Funktion entspricht der Signalamplitude). Die Signalamplitude würde sinken.

Man sollte also durch die Erweiterung mit T_0 folgendermaßen modifizieren:

$$s_{SH}(t) = \left[T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - n \cdot T) \right] * \frac{1}{T_0} \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0} \right)$$

$$= s_a(t) * \frac{1}{T_0} \cdot \left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0} \right) * \delta\left(t - \frac{T_0}{2} \right) \right]$$

mit

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_a(t) = T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - n \cdot T)$$

$$= T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n \cdot T) \cdot \delta(t - n \cdot T)$$

Mit dem idealen Abtaster sieht die Realisierung folgendermaßen aus:

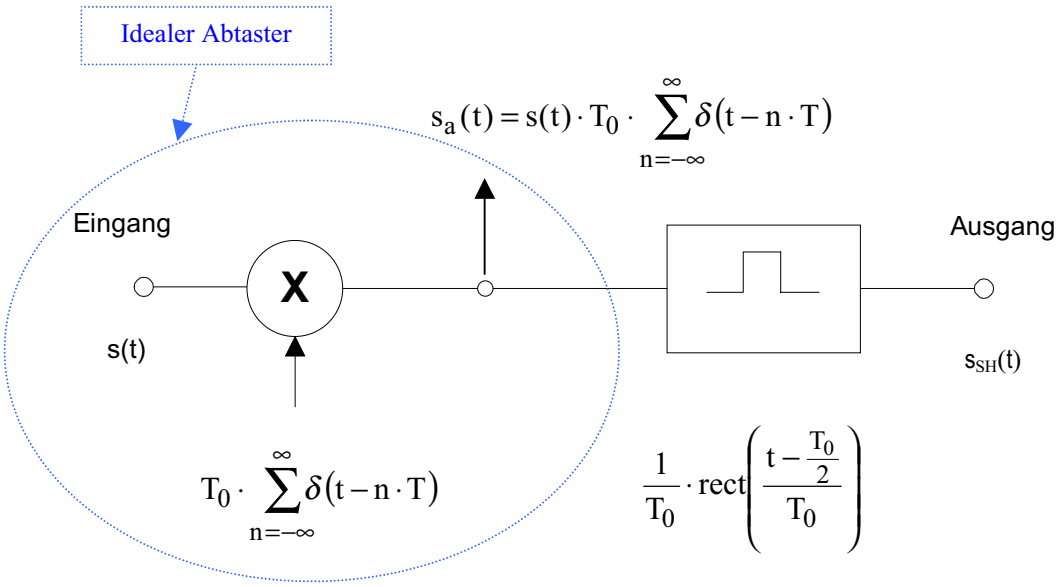


Abbildung 3.7: Realisierung mit idealem Abtaster

Das Spektrum sieht dann folgendermaßen aus:

$$S_{SH}(f) = \left[\frac{T_0}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) * S(f)\right] \cdot si(\pi f T_0) \cdot e^{-j2\pi f \cdot \frac{T_0}{2}}$$

$$= \left[\frac{T_0}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right)\right] \cdot \underbrace{si(\pi f T_0) \cdot e^{-j\pi f T_0}}_{\lim_{T_0 \to 0} si(\pi f T_0) = 1} \quad \text{...wird nahezu konstant.}$$

Im Grenzfall für $T_0 \to 0$ gilt:

$$S_{SH}(f) = \frac{T_0}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right) \tag{3.1}$$

$$\bullet \!\!-\!\!\circ$$

$$s_a(t) = s(t) \cdot T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

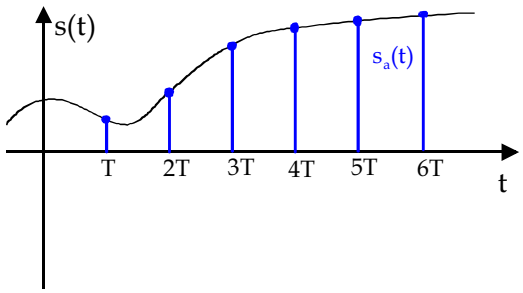
$$s_a(t) = T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n \cdot T) \cdot \delta(t - nT) \tag{3.2}$$

Man sieht, daß die Rücktransformation des Frequenzspektrums (3.2) der mit Diracstößen abgetasteten Signalfunktion entspricht. Allerdings ist die Signalamplitude recht klein.

Zusammenfassung der Abtastungsarten

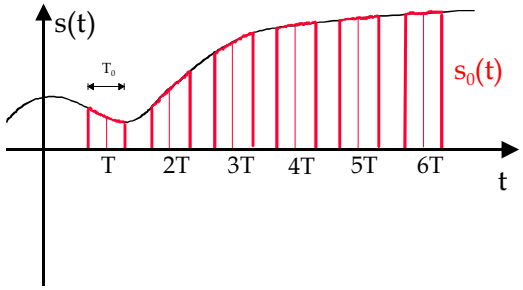
Ideale Abtastung

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T)$$



Natürliche Abtastung (reale Abtastung)

$$s_0(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - n \cdot T}{T_0}\right)$$

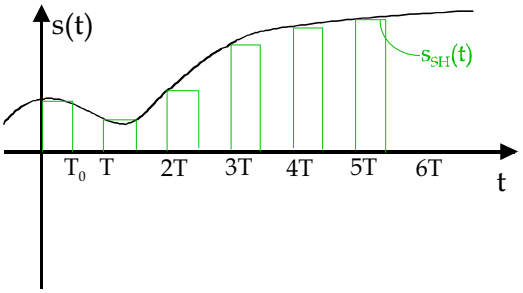


Sample-Hold-Abtastung

$$s_{SH} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2} - n \cdot T}{T_0}\right) \cdot s(n \cdot T)$$

$$= \left[s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T)\right] * \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)$$

$$= s_a(t) * \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)$$



Ideale Abtastung und Rekonstruktion (Abtasttheorem)

Die Bedingung für die überlappungsfreie Wiederholung der periodisch wiederkehrenden Spektren sind folgende:

- $S(f) = S(f) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)$ $\Rightarrow$ Tiefpaßbegrenzung des Originalsignals (Spektrum hat endliche Länge)

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

- $\frac{1}{T} \geq 2f_g$ $\Rightarrow$ Die Abtastfrequenz $f_{abt} = \frac{1}{T}$ muß nach dem Abtasttheorem größer als $2f_g$ sein.

f_g ist hierbei die Grenzfrequenz.

Ist $f_{abt} < 2f_g$, spricht man von Unterabtastung.
Ist $f_{abt} > 2f_g$, heißt das Überabtastung.
Bei $f_{abt} = 2f_g$ spricht man von Abtastung mit der Nyquist-Rate.

Die folgenden Abbildungen zeigen das Spektrum eines beliebigen abgetasteten Signals bei den verschiedenen Abtastraten. Man erkennt, daß bei Unterabtastung $T_{Abt} > \frac{1}{2f_g}$ bzw. Überabtastung $T_{Abt} < \frac{1}{2f_g}$ Verzerrungen im Frequenzbereich entstehen.

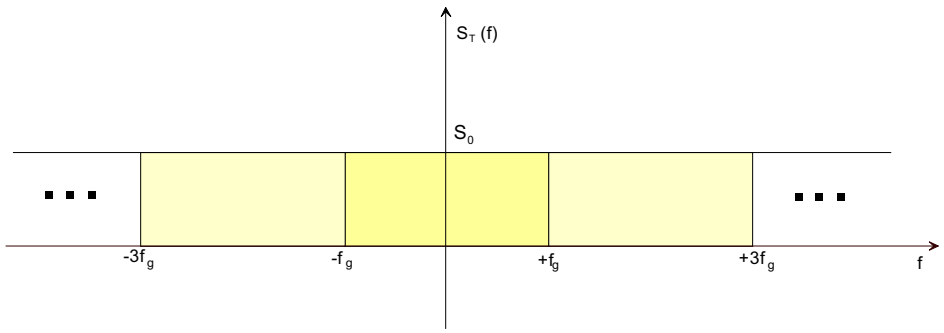
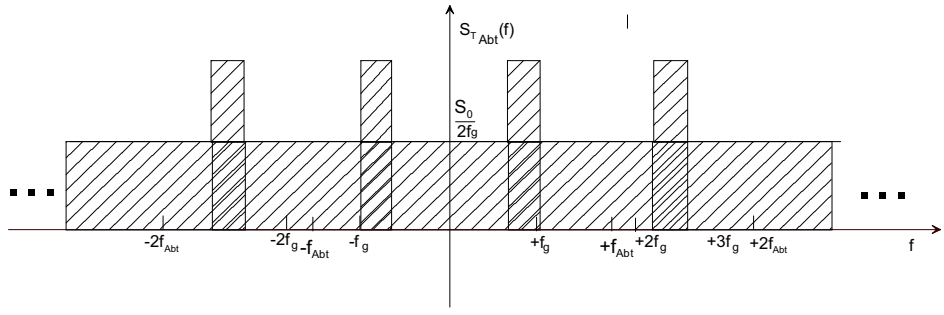
Abtastung mit Nyquistrate Die Frequenzbänder schließen exakt einander an.	
Unterabtastung Die Frequenzbänder überlappen sich und die Frequenzen addieren sich in diesen Bereichen	

Abbildung 3.8: Abtastung mit Nyquistrate

Abbildung 3.9: Unterabtastung

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Überabtastung

Es entstehen Lücken zwischen den Frequenzbändern

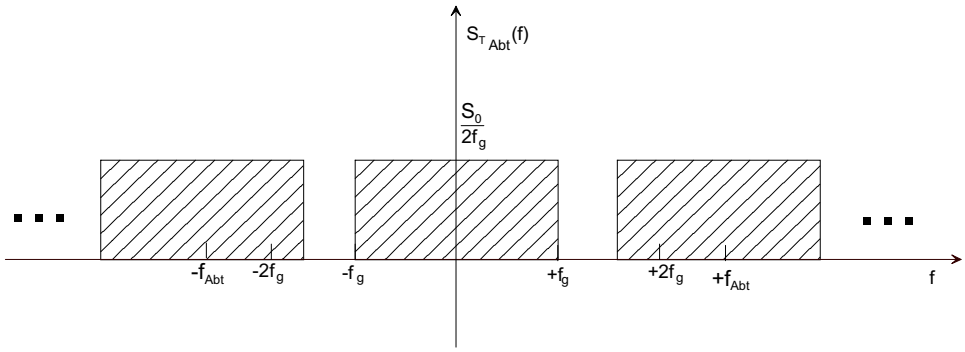


Abbildung 3.10: Überabtastung

Rekonstruktion des Originalsignals aus dem ideal abgetasteten Signal

Wie oben gezeigt, sieht bei idealer Abtastung das Spektrum nach der Abtastung folgendermaßen aus:

$$S_a(f) = \frac{T_0}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

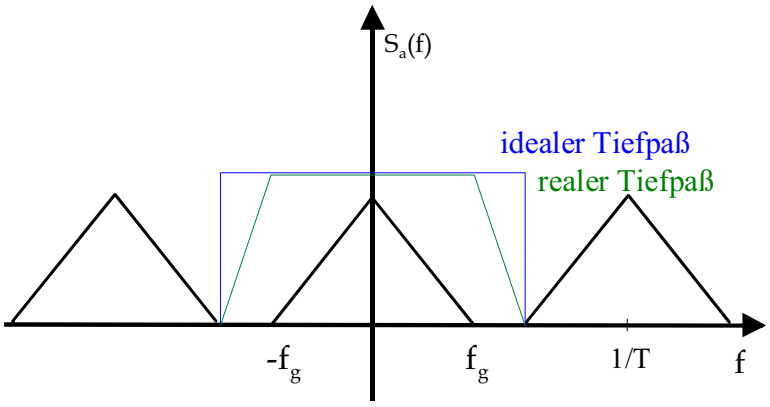


Abbildung 3.11: Frequenzspektrum des Originalsignals

Das Spektrum des Originalsignal wird im Frequenzspektrum in gleichen Abständen wiederholt. Die Rekonstruktion ist durch einen idealen Tiefpaß möglich, durch den man das Originalspektrum herausfiltert:

$$H_{TP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_{g_{TP}}}\right) \qquad \text{mit} \quad f_{g_{TP}} \le \frac{1}{T} - f_g$$

$$\text{und} \quad f_{g_{TP}} \ge f_g$$

$$f_g \le f_{g_{TP}} \le \frac{1}{T} - f_g$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$f_g \le f_{g_{TP}} \le f_{abt} - f_g$$

Für die Nyquist-Abtastung:

$$f_g \le f_{g_{TP}} \le 2f_g - f_g$$
$$f_g \le f_{g_{TP}} \le f_g$$
$$f_{g_{TP}} = f_g$$

Bei einer Überabtastung ist auch eine fehlerfreie Rekonstruktion mit einem Tiefpaß endlicher Flankensteilheit möglich, da ja keine Überlappung der Spektren erfolgt, sondern nur eine größere Lücke zwischen den wiederkehrenden Originalspektren vorhanden ist. Je größer die Abtastfrequenz ist, desto größere Lücken entstehen. Man sollte also mit einer höheren Frequenz als bei der Nyquist-Abtastung abtasten, um einen realen Tiefpaßfilter verwenden zu können.

Mit einem idealen Tiefpaßfilter gilt dann:

$$\widetilde{S}(f) = \frac{T_0}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{g_{TP}}}\right)$$
$$= \frac{T_0}{T} \cdot S(f)$$

Amplitudenfaktor

So kann man ein Originalspektrum durch das Spektrum der abgetasteten Funktion bis auf einen Korrekturfaktor rekonstruieren.

Den Weg des Signals kann man sich technisch so vorstellen:

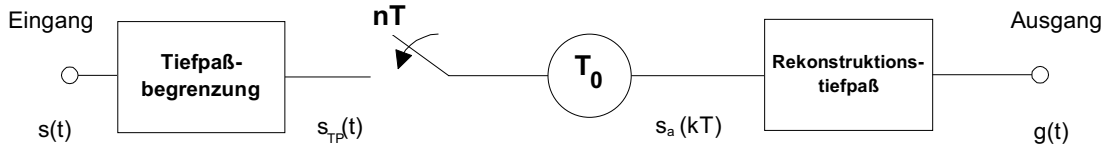


Abbildung 3.12: Signalweg

Die gesamte Kette aus Abtaster und Rekonstruktion sieht in einer Formel ausgedrückt folgendermaßen aus:

$$\overbrace{\underbrace{\left[\underbrace{\left[S(f) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)\right]}_{\text{Bei Tiefpaßsignalen } S(f)} * \frac{T_0}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right]}_{S_a(f)} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{g_{TP}}}\right)}^{G(f)} = \frac{T_0}{T} \cdot S(f) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\left[s(t) \cdot T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] * 2f_{g_T} \cdot si\left(\pi \cdot 2f_{g_T} \cdot t\right) = \frac{T_0}{T} \cdot s(t) = \tilde{s}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \cdot s(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t - nT) \right] * 2f_{g_T} \cdot si\left(\pi \cdot 2f_{g_T} \cdot t\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[s(nT) \cdot \left[\delta(t - nT) * 2f_{g_T} \cdot si\left(\pi \cdot 2f_{g_T} \cdot t\right) \right] \right]$$

$$= 2f_{g_T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[s(nT) \cdot si\left(\pi \cdot 2f_{g_T} \cdot (t - nT)\right) \right]$$

Im Spektrum des abgetasteten Signals werden durch einen Tiefpaß die hohen Frequenzen „abgeschnitten“ und das Originalspektrum und somit das Originalsignal (annähernd) zurückgewonnen. Es ist zu bedenken, daß wir hier von der idealen Abtastung ausgehen. Diese bewirkt eine periodische Wiederholung des Originalspektrums nach der Abtastung. In diesem Fall kann man annähernd davon ausgehen, daß s(t) ~ g(t). Bei der realen Abtastung mittels Sample-Hold-Abtastung entsteht ein verzerrtes Spektrum (siehe ***Abbildung 3.6***). Zur Rückgewinnung des Originalsignals wäre also noch ein Entzerrglied notwendig.

$$s(t) = T \cdot 2f_{g_T} \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot si\left(\pi \cdot 2f_{g_T} \cdot (t - nT)\right) \right] \tag{3.3}$$

mit der Nyquist-Abtastung: $T = \frac{1}{2f_g}$ $\quad f_{g_T} = f_g$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot si\left(\pi \cdot 2f_g \cdot (t - nT)\right) \tag{3.4}$$

Die Rekonstruktion des ursprünglichen Signals (3.3) kann man als Interpolation der Abtastwerte mit si-Funktionen verstehen (siehe Abbildung 3.13).

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

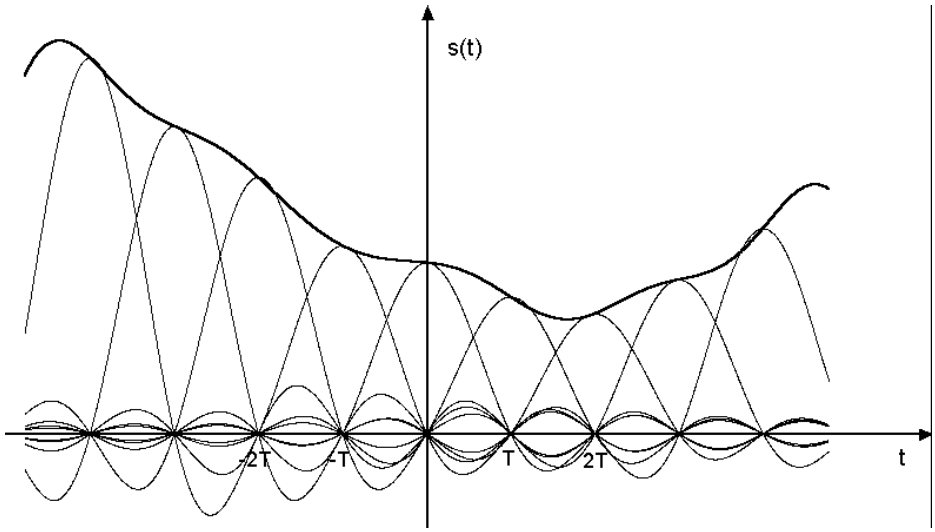


Abbildung 3.13: Rekonstruktion des ursprünglichen Signals

Reale Abtastung: Siehe Seminar

Wenn man die Theorie in die Praxis umsetzen möchte, und die Systeme physikalisch realisieren will, muß man auf folgende Dinge achten:

- Man muß dem Diracstoß ein Gewicht T_0 geben (Fläche der realen Abtastimpulse).
- Man muß dem idealen Tiefpaß die Stoßantwort $h_{TP}(t) = 2f_g \cdot si(\pi \cdot 2f_g \cdot t)$ geben.

3.2. ABTASTUNG IM FREQUENZBEREICH

Die Abtastung im Frequenzbereich bedeutet, daß man einzelne Spektralwerte im Frequenzbereich darstellt. Bei der Signalverarbeitung mit einem Mikroprozessor ist dies sogar notwendig, da sich kein kontinuierliches Frequenzspektrum berechnen läßt. Das Integral von -∞ bis +∞ müßte kontinuierlich gerechnet werden. Um trotzdem eine Spektralanalyse zu bekommen, weicht man auf die Diskrete-Fourier-Transformation (DFT) und die Fast-Fourier-Transformation (FFT) aus. Diese liefern endlich viele diskrete Frequenzanteile.
Zuerst diskretisiert man das Spektrum an den Stellen nF und multipliziert die Abtastwerte mit F, analog zur Abtastung im Zeitbereich:

$$S_p(f) = S(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF) \cdot F$$

$$= F \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF) \cdot \delta(f - nF)$$

Das ergibt im Zeitbereich

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_p(t) = s(t) * \frac{1}{F} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{F}\right) \cdot F$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(t - \frac{n}{F}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(t - nT_p\right) \qquad \text{mit } T_p = \frac{1}{F}$$

Die Folgerung daraus ist, daß das Signal s(t) durch die Abtastung des Spektrums periodisch wiederholt wird. Umgekehrt entstand bei der Abtastung im Zeitbereich ein periodisches Frequenzspektrum, wie im letzten Abschnitt betrachtet wurde.
Ebenso ist aus der Spektralanalyse periodischer Zeitfunktionen $s_p(t)$ bekannt, daß sich ein Spektrum mit diskreten Frequenzlinien ergibt.
Die Periodendauer T_p des Signals $s_p(t)$ führt zu einer äquidistanten Folge von Diracstößen, deren Abstand $F=1/T_p$ beträgt. Das Spektrum setzt sich folglich aus den Spektrallinien mit dem Vielfachen der Grundfrequenz ($nF=n/T_p$, n=0,1,2,3,4,...) zusammen. Das Gewicht der einzelnen Diracstöße entspricht den jeweiligen (Abtast-)Werten des Spektrums S(f) des einmaligen Zeitsignals s(t) an den Stellen $_{nF=}\frac{n}{T}$.

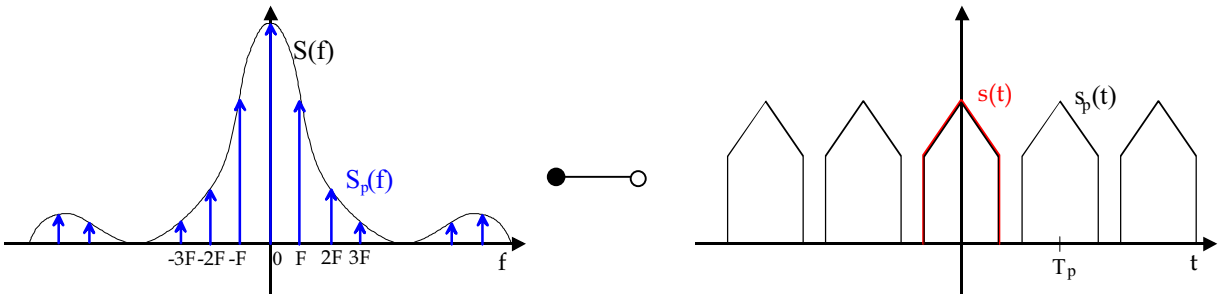


Abbildung 3.14: Abtastung im Zeitbereich – periodisches Signal im Frequenzbereich

Zu jedem frequenzdiskreten Spektrum (Linienspektrum) gehört eine periodische Zeitfunktion. Werden nur diskrete Werte eines Spektrums (Stützstellen) berechnet (z.B. DFT oder FFT), analysiert man implizit immer eine periodisch fortgesetzte Zeitfunktion.
Dies ist uns schon aus der Mathematik bekannt, wenn wir die Fourierkoeffizienten einer Fourierreihe berechnen. Mit dieser Methode werden die Wertigkeiten der äquidistanten Frequenzen berechnet. Darauf wird weiter unten noch eingegangen.

<u>Rekonstruktion des Originalspektrums durch Interpolation im Frequenzbereich</u>
Das Originalsignal kann durch eine Zeittorschaltung rekonstruiert werden. Um das Originalsignal aus dem abgetasteten Frequenzspektrum zu ermitteln, „schneidet“ man sich eine Periode aus dem wiederholten Signal aus.

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) \cdot s_p(t) = \mathrm{rect}\left(t \cdot F\right) \cdot s_p(t)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S(f) = T_p \cdot si(\pi \cdot f \cdot T_p) * \underbrace{\left(F \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF) \cdot \delta(f - nF) \right)}_{S_p(f)}$$

Ermittelt man das Spektrum des ausgeschnittenen Signals, so erkennt man, daß es aus einer Überlagerung von si-Funktionen besteht. Die Faltung ergibt eine Verschiebung der si-Funktion. Damit gilt:

$$S(f) = T_p \cdot F \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF) \cdot si(\pi \cdot (f - nF) \cdot T_p) \right) \tag{3.5}$$

Interpolation der Stützstellen des Spektrums durch si-Funktionen.
Dies ist die Umkehrung der Interpolation im Zeitbereich (vgl. Abbildung 3.14).

Mit $T_p = \frac{1}{F}$ vereinfacht sich das Spektrum S(f) zu:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF) \cdot si(\pi \cdot (f - nF) \cdot T_p).$$

Abtastung im Frequenzbereich – Fourierreihen

Die Abtastung im Frequenzbereich läßt sich auch mit der Fourierreihenentwicklung betrachten. Ein beliebiges, kontinuierliches Zeitsignal s(t) läßt sich durch eine Überlagerung von unendlich vielen Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener (aber äquidistanter) Frequenzen darstellen, die unterschiedlich gewichtet sind. Das wird unten gezeigt.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{S_p(f)\} &= s_p(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_p(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \\ S_p(f) &= F \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF) \cdot \delta(f - nF) \end{aligned}\right\}$$

$$s_p(t) = F \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF) \cdot \delta(f - nF) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \cdot S(nF) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - nF) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \cdot S(nF) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - nF) \cdot e^{j2\pi nFt} df$$

Siebeigenschaft des Diracstoßes

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \cdot S(nF) \cdot e^{j2\pi nFt} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - nF) df$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \cdot S(nF) \cdot e^{j2\pi nFt} \cdot 1 \qquad \text{Integral über einen Diracstoßes ergibt 1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \cdot S(nF) \cdot e^{j2\pi n \frac{1}{T_p} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{j2\pi n \frac{1}{T_p} t}$$

mit

$$\underline{c}_n = F \cdot S(nF) = F \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) \cdot s_p(t)}_{s(t)} \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_p}} dt$$

$$= \frac{1}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s_p(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_p}} dt$$

3.3. ZEITDISKRETE VERARBEITUNG ZEITKONTINUIERLICHER SIGNALE

Es wurde bereits zuvor angedeutet, daß die *numerische Verarbeitung von Signalen* mit Hilfe von Rechnern in der Nachrichtentechnik immer wichtiger wird. Diese Art der Verarbeitung setzt voraus, daß man Signale in der Form von einzelnen *diskreten Werten* hat. Um nun aus kontinuierlichen analogen Signalen digitale, diskrete Werte zu gewinnen, bedient man sich der **Abtastung**, die ja bereits zuvor beschrieben wurde.

Damit ist der Ausgangspunkt für die zeitdiskrete Verarbeitung von Signalen das *Abtast- und Interpolationstheorem im Zeitbereich*. Es gilt:

Tiefpaßbegrenzung mit f_{gT} als Grenzfrequenz

$$s(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT}(t - nT)) \qquad (3.6)$$

Abtastproben im Abstand t=nT

Das Abtasttheorem besagt, daß man ein tiefpaßbegrenztes Signal fehlerfrei aus seinen Abtastproben rekonstruieren kann, wobei die Tiefpaßbegrenzung deshalb erforderlich ist, weil diskrete Zeitsignale kontinuierliche Spektren besitzen, die sich im Abstand $f_{abt} = \frac{1}{T}$ wiederholen!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Wenn sich also das kontinuierliche Signal aus seinen Abtastproben fehlerfrei rekonstruieren läßt, so können auch alle Parameter und Kenngrößen und damit alle Informationen des kontinuierlichen Signals fehlerfrei aus den Abtastwerten berechnet werden. Somit lassen sich derartige Signale digital mit Hilfe eines Rechners fehlerfrei verarbeiten, wobei keinerlei Informationsverlust in Kauf genommen werden muß!

3.3.1. SPEKTREN

Möchte man nun das Spektrum eines derartigen kontinuierlichen Signals mit Hilfe der Abtastproben berechnen, so braucht man nur den Zusammenhang des Abtasttheoremes aus (3.6) in das Fourierintegral einzusetzen. Zweckmäßigerweise spaltet man dazu zunächst die zeitliche Verschiebung im Argument der si-Funktion in ein Faltungsprodukt mit einer Diracstoßfolge auf.

Damit ergibt sich (3.6) zu:

$$\begin{aligned} s(t) &= T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t-nT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \\ &= T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t-nT) * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Setzt man nun diesen Zusammenhang in das Fourierintegral ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t-nT) * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right] \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt \\ &= \mathcal{F}\left\{ T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t-nT) \right\} \cdot \mathcal{F}\left\{ 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right\} \end{aligned}$$

Da die Abtastproben unabhängig von der Zeitvariablen sind und lediglich die Gewichte der Diracstoßfolge darstellen, können diese als Konstanten aus dem Fourierintegral ausgeklammert werden und man erhält:

$$S(f) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \mathcal{F}\{\delta(t-nT)\} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}} \right)$$

$$\delta(t-nT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j2\pi f \cdot n \cdot T}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S(f) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot e^{-j2\pi f \cdot n \cdot T} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \tag{3.8}$$

Abtastproben von s(t) — **Ausschnitt von $-f_{gT}..f_{gT}$**

Man erhält also mit Hilfe der Abtastproben ein kontinuierliches Spektrum für Frequenzen kleiner der Grenzfrequenz des Tiefpasses. Da für die Berechnung dieses Spektrums nur noch eine Summe diskreter Werte und keinerlei Integration mehr berechnet werden muß, kann diese Berechnungsformel von einem Digitalrechner ausgewertet werden. Man braucht also zur Berechnung des Spektrums eines diskreten Signals nur den Rechner mit den Abtastwerten zu "Füttern" und die Summe darüber zu bilden.

3.3.2. FOURIERTRANSFORMATION ZEITDISKRETER SIGNALE

Das eigentliche Spektrum des abgetasteten Signals ohne Tiefpaßbegrenzung ergibt sich zu:

$$S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T} \tag{3.9}$$

wobei **s(n)** die Folge der Abtastwerte darstellt. **S_a(f)** nennt man die Fouriertransformierte des diskreten Signals.

Die Rücktransformation des Spektrums in den Zeitbereich erfolgt mit Hilfe der Rücktransformationsformel für die Fouriertransformation. Setzt man dort das tiefpaßbegrenzte Spektrum aus (3.8) ein, so ergibt sich:

$$s(n) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T} df = s(nT)$$

$$= T \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \cdot S_a(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T} df$$

$$s(n) = T \cdot \int_{-f_{gT}}^{f_{gT}} S_a(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T} df = s(nT) \tag{3.10}$$

Durch die Integrationsgrenzen wird der Tiefpaß berücksichtigt!

Um die Zusammenhänge noch einmal näher zu verdeutlichen, sind in Abbildung 3.15 die Verhältnisse für ein kontinuierliches Signal **s(t)** und das zugehörige Spektrum **S(f)** dargestellt, bzw. der Übergang zu dem abgetasteten Signal **s_a(t)** bzw. dessen Spektrum **S_a(f)** in Abbildung 3.16!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

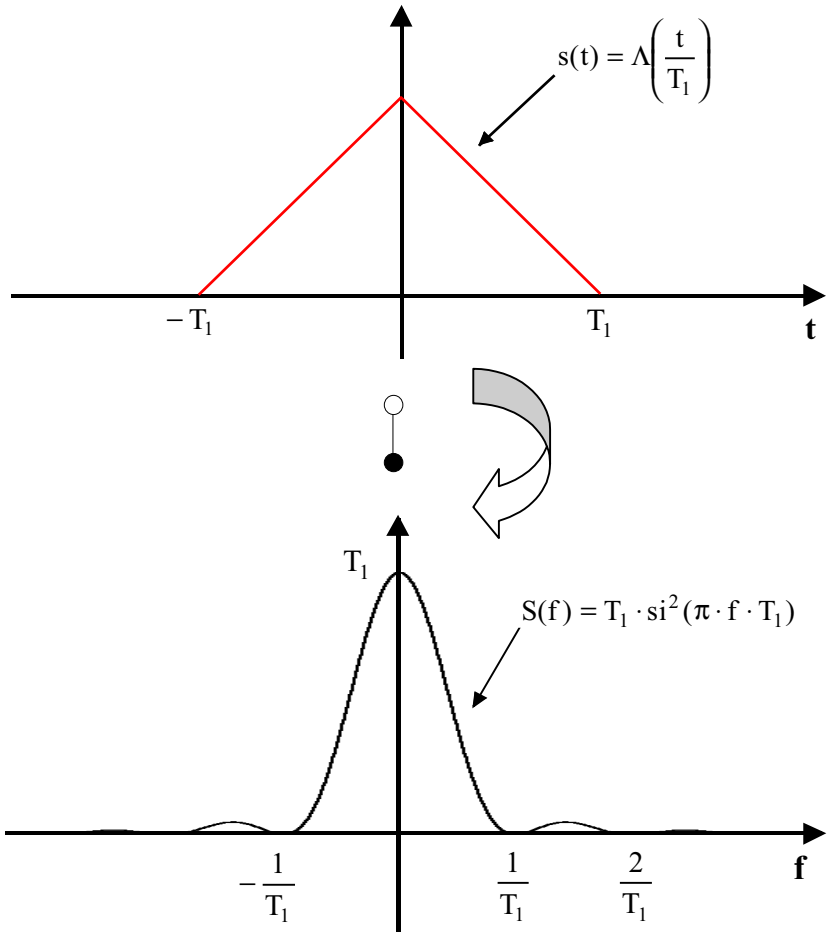


Abbildung 3.15: Kontinuierliches Signal und zugehöriges Spektrum

Abbildung 3.15 zeigt, daß ein kontinuierliches, einmaliges Signal, ein unendlich ausgedehntes, kontinuierliches Spektrum hat.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Betrachtet man nun das einmalige abgetastete Signal, ohne Tiefpaßbegrenzung, so ergibt sich der in Abbildung 3.16 dargestellte Zusammenhang im Zeit- bzw. Frequenzbereich:

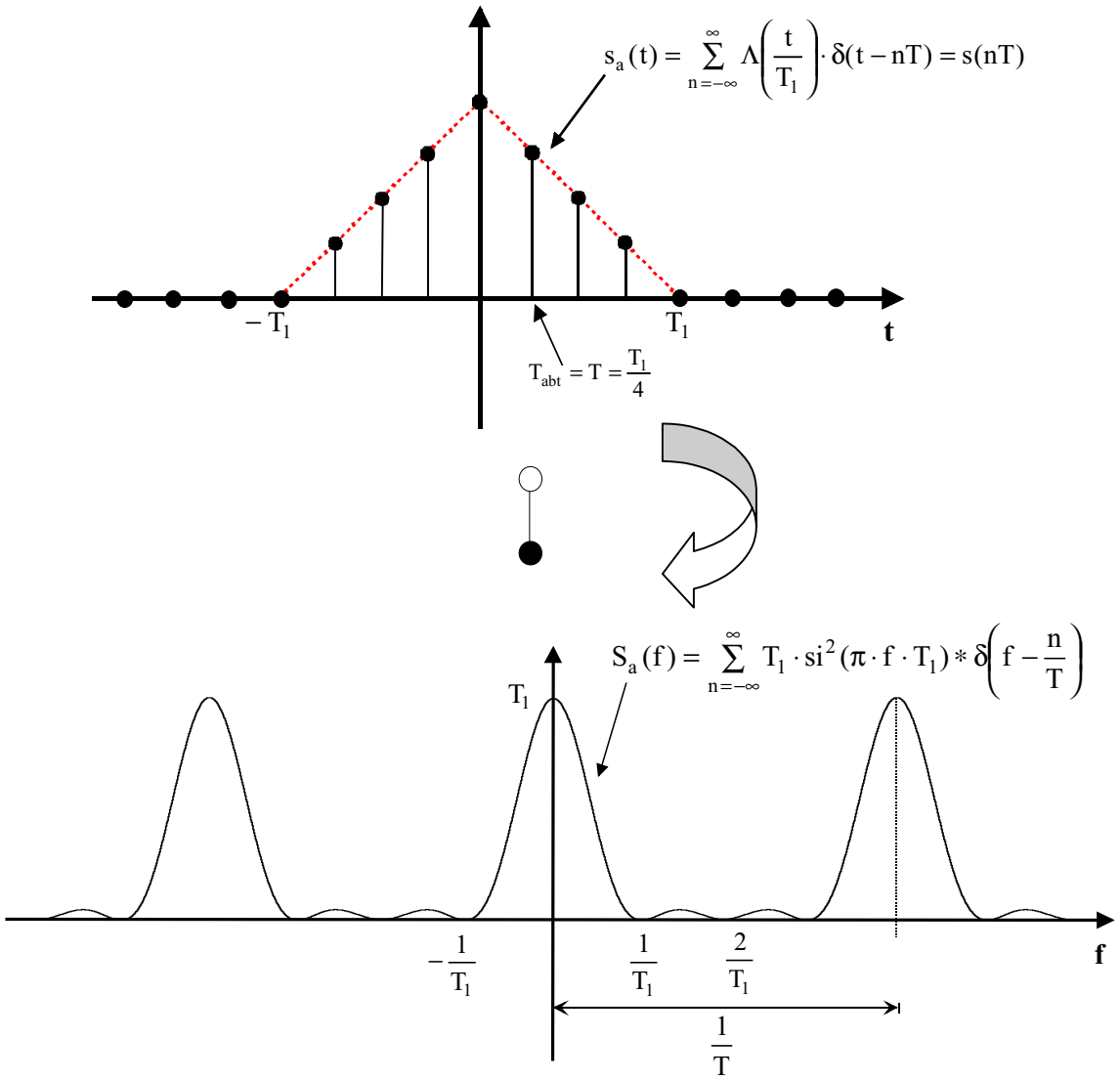


Abbildung 3.16: Abgetastetes Signal und zugehöriges Spektrum

Abbildung 3.16 verdeutlicht, daß ein abgetastetes Signal ein periodisches Spektrum besitzt.

Wenn jetzt $\mathbf{T_T=1}$ gesetzt wird, so ergibt sich der gleiche formelmäßige Zusammenhang wie in Lüke:Signalübertragung

$$f_{gT} = \frac{1}{2T_T} = \frac{1}{2} \longrightarrow s(n) = T \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_a(f) \cdot e^{+j2\pi fn} df$$

(Lüke 3.37)

Die zuvor hergeleiteten Zusammenhänge gelten für nicht periodische Zeitsignale und ergeben ein kontinuierliches periodisches Spektrum. Dieses kann aber bei einer numerischen Berechnung

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

nicht für unendlich viele Frequenzen berechnet werden. Für diese Zwecke ist es daher sinnvoller, wenn von vorneherein der *diskreten Zeitfunktion* auch ein *diskretes Spektrum* zugeordnet werden kann. Ein solches Spektrum erhält man doch genau dann, wenn man im Frequenzbereich abtastet, d.h. wenn das kontinuierliche Spektrum mit der Schahfunktion multipliziert wird. Da dies rückwirkend im Zeitbereich einer Faltung mit der Schahfunktion entspricht, erhält man daher genau dann ein diskretes Spektrum, wenn die diskrete Zeitfunktion zusätzlich periodisch wiederholt wird!

Mit diesem Ansatz gelangt man dann zur sogenannten **Diskreten Fourier Transformation (DFT)**

3.3.3. FOURIERTRANSFORMATION DISKRETER PERIODISCHER SIGNALE DFT

Man geht zunächst ganz allgemein von der Fouriertransformierten eines zeitdiskreten Signals aus. Mit (3.9) gilt:

$$S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T}$$

$$S_a(f) = \mathcal{F}\left\{ s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\}$$

Siebeigenschaft

$$S_a(f) = \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t - nT) \right\} = \mathcal{F}\{s_a(t)\} \qquad (3.11)$$

Nutzt man nun die Periodizität des Zeitsignals aus, so erhält man für **s(t)** ganz allgemein:

$$s(t) = s(t \pm m \cdot T_p)$$

Da dieser Zusammenhang natürlich in gleicher Weise für das abgetastete Signal gilt, folgt:

$$s_a(t) = s_a(t \pm m \cdot T_p)$$

Das abgetastete Signal ist also ebenfalls periodisch in $\mathbf{T_p}$. Trennt man das Signal auch wieder in ein Faltungsprodukt aus unverschobenem Zeitsignal und verschobener Schahfunktion auf, so erhält man:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_a(t) = s_a(t \pm mT_p) = s_{a0}(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_p)$$

wobei $\mathbf{s_{a0}(t)}$ das einmalige abgetastete Signal darstellt.

Die periodische Fortsetzung des abgetasteten Signals wird also ebenfalls durch eine Schahfunktion beschrieben. Da eine Doppelsumme berechnet werden muß, wird im Folgenden die Summe für die periodische Fortsetzung mit **m** indiziert, damit beide Summen auch auseinandergehalten werden können. Geht man davon aus, daß die periodische Zeitfunktion innerhalb einer Periode **n=N** Abtastwerte enthält, so kann man die unendliche Summe im ersten Fall reduzieren auf die Anzahl der Abtastwerte in einer Periode, da die periodische Fortsetzung ja ganz automatisch von der unendlichen zweiten Schahfunktion hervorgerufen wird.
Somit gilt für das periodische abgetastete Signal:

$$s_a(t) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot \delta(t - nT)}_{\text{N-Abtastwerte des einmaligen Signals } \mathbf{s_{a0}(t)}} * \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_p)}_{\text{periodische Fortsetzung}}$$

Damit das periodisch fortgesetzte Signal keine Überlappung aufweist, muß gelten:

$$T_p = N \cdot T$$

Das einmalige, abgetastete Signal muß um den gesamten Wertebereich, bezogen auf die Abtastperiode, verschoben werden. Somit ergibt sich für das periodische, abgetastete Signal bzw. dessen Spektrum:

$$s_a(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot \delta(t - nT) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m \cdot N \cdot T) \tag{3.12}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$S_a(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot n \cdot T} \cdot \frac{1}{N \cdot T} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{N \cdot T}\right) \tag{3.13}$$

Unter Ausnutzung der Siebeigenschaft des Diracstoßes ergibt sich :

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N \cdot T} \cdot \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot \frac{m}{N \cdot T} n \cdot T} \right]}_{\text{Gewichte der Diracstöße = Spektralwerte des abgetasteten Spektrums}} \cdot \delta\left(f - \frac{m}{N \cdot T} \right)$$

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_a(m) \cdot \delta\left(f - \frac{m}{N \cdot T} \right) \tag{3.14}$$

Das abgetastete, diskrete Spektrum $\mathbf{S_a(f)}$, ergibt sich aus dem kontinuierlichen Spektrum $\mathbf{S_a(m)}$ durch Multiplikation mit der Schahfunktion, wobei durch die Siebeigenschaft der Diracstöße jeweils der Wert des abgetasteten Signals an den Stellen $f = \frac{m}{N \cdot T}$ herausgesiebt wird!

Diese *Spektralwerte des abgetasteten Spektrums* stellen die sogenannte *diskrete Fouriertransformierte* dar.
Es gilt also:

$$S_a(m) = \frac{1}{N \cdot T} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N} \right)}}$$

$$\boxed{S(m) = DFT\{s(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N} \right)}} \tag{3.15}$$

Lediglich der Summenausdruck, bezogen auf die Abtastwerte einer Periode, definiert also die diskrete Fouriertransformierte des Signals. Somit braucht man bei der Berechnung der Fouriertransformierten eines periodischen Signals nur die Summe über die Abtastwerte einer Periode zu bilden, da der daraus resultierende Ausdruck alle Spektralwerte enthält, welche zur Berechnung des diskreten Spektrums erforderlich sind. Es gilt also zusammengefaßt für die diskrete Fouriertransformierte eines diskreten periodischen Signals:

$$\boxed{S(m) = DFT\{s(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot \frac{m \cdot n}{N}}} \tag{3.16}$$

Betrachtet man nun das einmalige diskrete Signal, bezogen auf eine Periode des diskreten periodischen Signals, so ergibt sich für die Fouriertransformierte, unter Berücksichtigung, daß **s(nT)** in Bezug auf **t** und damit **f** eine Konstante darstellt:

$$s_{oa}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\delta(t-nT) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-j2\pi f\cdot nT}$$

$$S_{oa}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot nT} \tag{3.17}$$

Daher geht die eigentlich auftretende Faltung bedingt durch den konstanten Vorfaktor in eine Multiplikation über! Das auftretende Spektrum ist periodisch, da es von einer diskreten Zeitfunktion gebildet wurde.

3.3.3.1. Nachweis der Periodizität des Spektrums zeitdiskreter Signale

Dies läßt sich zeigen mit Hilfe folgender Nebenrechnung:

Beweis:

Im Falle der Periodizität muß gelten:
Forderung:

$$S_{oa}(f) = S_{oa}\left(f+\frac{m}{T}\right)$$

Setzt man diesen Zusammenhang nun ganz formal in (3.17) ein, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot nT} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot\left(f+\frac{m}{T}\right)\cdot nT}$$

Spaltet man das Argument der e-Funktion auf, so ergibt sich :

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot nT} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot nT}\cdot e^{-j2\pi\cdot\left(\frac{m}{T}\right)\cdot nT}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot nT} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot nT}\cdot e^{-j2\pi\cdot m\cdot n}$$

=1 für m,n ganzzahlig

Im Argument des zweiten Exponentialtermes tauchen nur ganzzahlige Vielfache von **2π** auf. Da die e-Funktion betragsmäßig immer **=1** und für diese Werte im Exponenten rein reell ist, bewirkt diese keinerlei Veränderung und somit gilt tatsächlich:

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot nT} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\cdot e^{-j2\pi\cdot\left(f+\frac{m}{T}\right)\cdot nT}$$

$$S_{oa}(f) = S_{oa}\left(f+\frac{m}{T}\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Damit ist bewiesen, daß das Spektrum der diskreten Zeitfunktion periodisch ist. Um nun aus diesem kontinuierlichen Spektrum ein diskretes Spektrum zu machen, braucht man dieses nur an diskreten Stellen auszuwerten.
Wenn man davon ausgeht, daß die Anzahl der Spektralwerte des diskreten Spektrums bezogen auf eine Periodendauer identisch mit dem Wertebereich der einmaligen Zeitfunktion ist, so haben die Spektrallinien einen Abstand von $\Delta f = \frac{1}{T \cdot N}$ zueinander. Somit muß das kontinuierliche Spektrum an ganzzahligen Vielfachen des Spektralabstandes ausgewertet werden.

Setzt man nun ganz formell für $f = \frac{m}{T \cdot N}$ ein, so erhält man für das diskrete Spektrum:

$$S_{oa}\left(\frac{m}{TN}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N}\right)} = S(m) = DFT\{s(n)\}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der diskreten Fouriertransformierten.

Abschließend ergeben sich also folgende **Erkenntnisse**:

Die DFT liefert die Abtastwerte des Spektrums des einmaligen abgetasteten Signals und die periodische Fortsetzung im Zeitbereich entspricht der Abtastung im Frequenzbereich!
Die Zusammenhänge für die DFT sollen nun in Abbildung 3.17 noch einmal verdeutlicht werden. Hierbei wird dasselbe Beispiel wie in Abbildung 3.15 und Abbildung 3.16, betrachtet.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

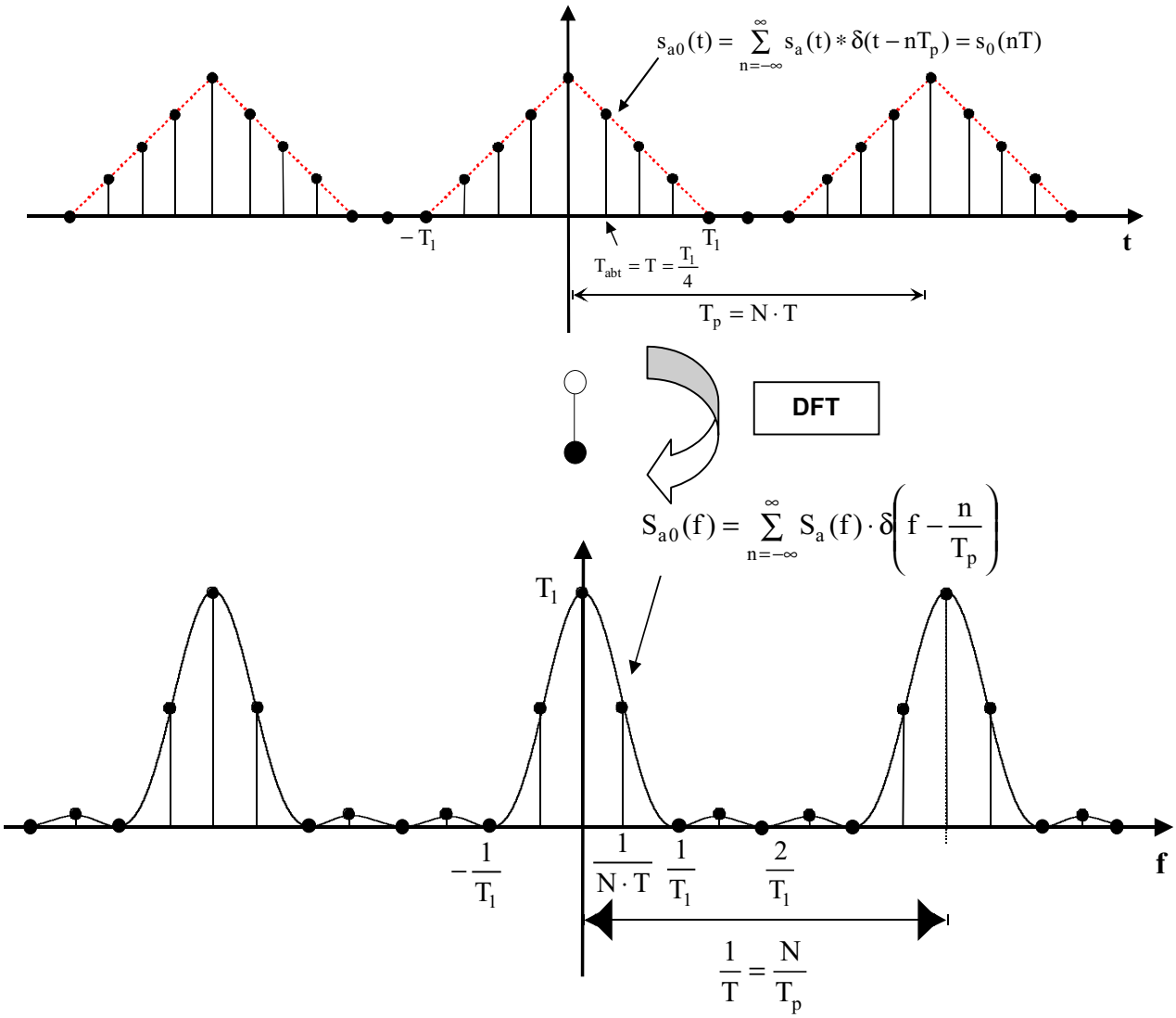


Abbildung 3.17: Zusammenhänge für die DFT

Abbildung 3.17 verdeutlicht, wie durch die periodische Fortsetzung des Zeitsignals das Spektrum abgetastet wird.

3.3.3.2. ZUSAMMENHANG FOURIERREIHE - DFT

Betrachtet man nun die Tatsache, daß jede periodische Zeitfunktion als eine Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen dargestellt werden kann, was der Darstellung dieses Signals in einer Fourierreihe entspricht, so muß doch die Diskrete-Fouriertransformierte im Zusammenhang mit der *komplexen Fourierreihe* stehen.

Geht man von der periodischen abgetasteten Zeitfunktion aus

$$s_a(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot \delta(t - nT) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_p)$$

und betrachtet die allgemeine Darstellung dieser Zeitfunktion durch ihre komplexe Fourierreihe

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{c}_m \cdot e^{j2\pi \cdot m \cdot \left(\frac{t}{T_p}\right)} \tag{3.18}$$

so ergibt sich für deren komplexe Fourierkoeffizienten unter Berücksichtigung der allgemeinen Berechnungsvorschrift:

$$\underline{c}_m = \frac{1}{T_P} \cdot \int_{t_0 - \frac{T_p}{2}}^{t_0 + \frac{T_p}{2}} s_a(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot m \cdot \left(\frac{t}{T_p}\right)} dt$$

wobei t_0 beliebig ist, erhält man mit $t_0 = \frac{T_p}{2}$

$$\underline{c}_m = \frac{1}{T_P} \cdot \int_0^{T_p} \left[\sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot \delta(t - nT) \right] \cdot e^{-j2\pi \cdot m \cdot \left(\frac{t}{T_p}\right)} dt$$

Da die Integration nur über eine Periode durchgeführt werden muß, verschwindet der Faltungsterm mit der Schah-Funktion in $\mathbf{T_p}$, da diese nur das abgetastete Signal periodisch fortsetzt!
Da **s(nT)** eine Konstante bezüglich der Zeit darstellt, kann diese vor das Integral gezogen werden. Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge und Berücksichtigung der Siebeigenschaft des Diracstoßes in dem Exponentialterm folgt somit:

$$\underline{c}_m = \frac{1}{T_P} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot \int_0^{T_p} \delta(t - nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot m \cdot \left(\frac{nT}{T_p}\right)} dt$$

$$\downarrow \boxed{T_p = N \cdot T}$$

$$\underline{c}_m = \frac{1}{N \cdot T} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N}\right)}$$

Der übrigbleibende Summenterm ist identisch mit der Definition der diskreten Fouriertransformierten und somit ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen den komplexen Fourierkoeffizienten der Fourierreihe und der zugehörigen diskreten Fouriertransformierten zu:

$$\underline{c}_m = \frac{1}{N \cdot T} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \cdot e^{j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N}\right)}$$

$$= \frac{1}{N \cdot T} \cdot S(m)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\underline{c}_m = \frac{1}{N \cdot T} \cdot DFT\{s(n)\} \tag{3.19}$$

Somit ergibt sich abschließend folgender Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten des abgetasteten Signals und der DFT:

$$\underline{c}_m = \frac{1}{N \cdot T} \cdot S(m) = \frac{1}{N \cdot T} \cdot DFT\{s(n)\} = \frac{1}{T_p} \cdot DFT\{s(n)\} \tag{3.20}$$

Die Fourierkoeffizienten der Fourierreihe ergeben sich also aus dem Spektralwert der diskreten Fouriertransformierten an der jeweiligen Stelle **m**, wobei dieser mit dem Faktor $\frac{1}{T_P}$ gewichtet ist.

3.3.4. INVERSE DISKRETE FOURIERTRANSFORMATION IDFT

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß die diskrete Fouriertransformation ein periodisches, diskretes Spektrum beinhaltet. Die Rücktransformation der Spektren ist periodisch in $F_p = \frac{1}{T}$ → Deshalb schreiben wir:

$$S_a(f) = \frac{1}{T_p} \cdot \left[\sum_{m=0}^{N-1} S_a(m) \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T_p} \right) \right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T} \right) \tag{3.21}$$

Diskretes Spektrum — **periodische Fortsetzung**

$$s_a(t) = \frac{1}{N \cdot T} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S_a(m) \cdot e^{j2\pi \cdot m \left(\frac{t}{T_p} \right)} \cdot T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{3.22}$$

Da $\mathbf{S_a(m)}$ unabhängig von der Frequenz bzw. Zeit ist, stellt dieser Wert in Bezug auf die Rücktransformation eine Konstante dar und bleibt somit erhalten. Für die Rücktransformation gilt im einzelnen:

$$\delta\left(f - \frac{m}{T_p} \right) \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{j2\pi \cdot m \cdot \left(\frac{t}{T_p} \right)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T} \right) \bullet\!\!-\!\!\circ\, T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Nach Kürzen des Faktors **T** ergibt sich :

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S_a(m) \cdot e^{j2\pi \cdot m \cdot \left(\frac{t}{T_p}\right)} \cdot \delta(t - nT)$$

Wendet man nun noch die Siebeigenschaft des Diracstoßes im Argument der e-Funktion an, so erhält man abschließend die Identität aus (3.22) für die abgetastete Zeitfunktion:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S_a(m) \cdot e^{j2\pi \left(\frac{m \cdot n}{N}\right)}}_{\substack{s_a(nT)=s(nT) \\ \text{Gewichte der} \\ \text{Diracstöße}}} \cdot \delta(t - nT)$$

Für die Rücktransformationsformel gilt also:

$$s(n) \equiv s(nT) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S_a(m) \cdot e^{j2\pi \left(\frac{mn}{N}\right)} = \mathrm{IDFT}\{S(m)\} \tag{3.23}$$

Dies ist der Ausdruck für die *inverse diskrete Fouriertransformierte*.

Somit erhält man abschließend folgendes Transformationspaar:

Die DFT berechnet das Spektrum eines abgetasteten periodischen Signals über eine Periode

$$S(m) = \mathrm{DFT}\{s(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N}\right)}$$

$$\bullet \!\!-\!\!\circ$$

$$s(n) = \mathrm{IDFT}\{S(m)\} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S(m) \cdot e^{+j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N}\right)} \tag{3.24}$$

3.3.5. Folgerungen, Identitäten und Transformationssätze der DFT

Die DFT ordnet diskreten periodischen Signalen diskrete periodische Spektren zu:

Beweis:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Dies läßt sich beweisen durch Erweitern der Transformationsvorschrift mit einem Exponentialterm, dessen Argument ein ganzzahliges Vielfaches von $\mathbf{2\pi}$ darstellt:

$$S(m) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{m \cdot n}{N}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{m \cdot n}{N}\right)} \cdot \underbrace{e^{\pm j2\pi \cdot n \cdot n_0}}_{\text{Erweitern mit 1}}$$

Faßt man nun die einzelnen Exponentialterme wieder zusammen, so erhält man:

$$= \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-j2\pi \cdot \frac{n}{N} \cdot (m \pm n_0 N)}$$

$$S(m) = S(m \pm n_0 N) \qquad \text{q.e.d.}$$

Somit ist die Periodizität der DFT in **N** bewiesen.

Völlig analog erhält man für das diskrete periodische Zeitsignal unter Anwendung der gleichen Erweiterung:

$$s(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S(m) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{m \cdot n}{N}\right)} \cdot e^{\pm j2\pi \cdot m \cdot n_0}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S(m) \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{m}{N}\right)(n \pm n_0 N)}$$

$$s(n) = s(n \pm n_0 N)$$

Somit ist auch die Periodizität des diskreten Zeitsignals in **N** bewiesen.

Die **DFT** ordnet also *periodischen diskreten* (abgetasteten) *Zeitfunktionen periodische diskrete* (abgetastete) *Spektren* zu!

Betrachtet man nun als Beispiel den zeitdiskreten Diracstoß in der ´DFT-Welt´, der nicht mit dem kontinuierlichen Dirac-Stoß verwechselt werden darf

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad t = t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \delta(k - k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = k_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ergibt sich für dessen diskrete Fouriertransformierte:

$$\text{DFT}\{\delta(k - k_0)\} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\delta(n - k_0)}_{1 \text{ für } n=k_0} \cdot e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{mn}{N}\right)} = e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{mk_0}{N}\right)}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\boxed{\delta(k-k_0) \overset{DFT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{-j2\pi\cdot\left(\frac{mk_0}{N}\right)} \quad \text{für} \quad k_0 \in [0;N-1]} \tag{3.25}$$

Ebenso gilt für das periodisch fortgesetzte Signal:

$$DFT\{\delta(k-k_0 \pm n_0 N)\} = e^{-j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot(k_0 \mp n_0 N)}$$

$$= e^{-j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot k_0} \cdot e^{\pm j2\pi\cdot m\cdot n_0} \qquad (\mathbf{1})$$

$$DFT\{\delta(k-k_0 \pm n_0 N)\} = e^{-j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot k_0} = DFT\{\delta(k-k_0)\}$$

$$\boxed{\delta(k-k_0 \pm n_0 N) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-j2\pi\cdot\left(\frac{mk_0}{N}\right)} \quad \text{für} \quad k_0 \pm n_0 \cdot N \in [0;N-1]} \tag{3.26}$$

Hierbei gilt, daß $\mathbf{k_0}$ beliebig gewählt werden darf und für $\mathbf{n_0}$ muß gelten

Daraus ergibt sich folgende wichtige Identität

$$\delta(k-k_0 \pm n_0 N) = IDFT\left\{e^{-j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot(k_0 \pm n_0 N)}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot(k_0 \pm n_0 N)} \cdot e^{j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot k}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot(k_0 - k \pm n_0 N)}$$

$$\boxed{\delta(k-k_0 \pm n_0 N) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{m}{N}(k-k_0 \mp n_0 N)}} \tag{3.27}$$

3.3.6. FALTUNGSTHEOREM DER DISKRETEN FOURIERTRANSFORMATION

In den vorigen Kapiteln wurde die Fouriertransformierte zeitdiskreter Signale hergeleitet. Für den Fall, daß kontinuierliche Signale vorliegen, gilt folgende Identität im Zeit- bzw. Frequenzbereich:

$$g(t) = s(t) * h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(f) = S(f)\cdot H(f)$$

Es stellt sich natürlich die Frage, ob ein ähnlicher Zusammenhang für die DFT gilt. Gesucht ist also die Operation, die im Zeitbereich der Multiplikation der DFT-Spektren entspricht, d.h.

$$G(m) = S(m)\cdot H(m) \bullet\!\!-\!\!\circ g(k) = s(k) * h(k) \quad ?$$

Dazu beginnt man mit der Inversionsformel der DFT und schreibt

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(k) = \mathrm{IDFT}\{G(m)\} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} G(m)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{m\cdot k}{N}\right)} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} S(m)\cdot H(m)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{m\cdot k}{N}\right)}$$

Im nächsten Schritt ersetzt man **S(m)** und **H(m)** durch die entsprechenden Transformationsgleichungen, wobei man berücksichtigen muß, daß die einzelnen Summen unabhängig voneinander sind und man daher jeweils unterschiedliche Indizes wählen sollte. Man erhält dann:

$$g(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\underbrace{\left[\sum_{n=0}^{N-1} s(n)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{m\cdot n}{N}\right)}\right]}_{\boxed{S(m)}}\cdot\underbrace{\left[\sum_{l=0}^{N-1} h(l)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{m\cdot l}{N}\right)}\right]}_{\boxed{H(m)}}\cdot e^{j2\pi\left(\frac{m\cdot k}{N}\right)}$$

Nach Zusammenfassung der einzelnen Exponentialterme und anschließender Umordnung folgt:

$$g(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} s(n)\cdot h(l)\cdot e^{-j2\pi\cdot\left(\frac{m}{N}\right)\cdot[n+l-k]}$$

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} s(n)\cdot h(l)\cdot\underbrace{\frac{1}{N}\cdot\sum_{m=0}^{N-1} e^{+j2\pi\cdot\left(\frac{m}{N}\right)\cdot[k-n-l]}}_{\boxed{\mathrm{IDFT}\{\delta(k-n-l)\}}}$$

Wenn man das negative Vorzeichen vor dem Exponenten der e-Funktion mit in die Klammer des Argumentes hineinzieht, so stellt der sich daraus ergebende Ausdruck die IDFT des diskreten Dirac-Stoßes **$\delta(k-n-l)= \delta(k-n-l \pm n_0 N)$** dar:

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi\cdot\left(\frac{m}{N}\right)\cdot[k-n-l]} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta(k-n-l) = \delta(k-n-l\pm n_0 N)$$

Setzt man dieses Ergebnis für den Summenausdruck in obige Gleichung ein, so ergibt sich:

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} s(n)\cdot h(l)\cdot\delta(k-n-l\pm n_0 N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\cdot\sum_{l=0}^{N-1} h(l)\cdot\underbrace{\delta(k-n-l\pm n_0 N)}_{\boxed{=1 \text{ für } l=k-n\pm n_0 N}}$$

Durch die Wahl von $\mathbf{n_0}$ kann nun aber dafür gesorgt werden, daß für beliebige Kombinationen von **k** und **n** sich immer genau ein diskreter Diracstoß innerhalb des Summationsbereiches $0 \le l \le N-1$ befindet, der den entsprechenden Wert der Stoßantwortfolge **h(l)** mit 1, alle anderen Werte mit Null gewichtet (Siebeigenschaft).

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Somit gilt unter Berücksichtigung der Siebeigenschaft

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot h(k - n \pm n_0 N)$$

bzw. aus Gründen der Periodizität für **$0 \le k \le N-1$:**

$$\boxed{g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot h(k - n) = s(k) * h(k)} \qquad (3.28)$$

Dieser Ausdruck stellt nichts anderes als ein "zyklisches" Faltungsprodukt im Zeitbereich dar, wobei hier die Integration in eine Summation bezogen auf den jeweiligen Wertebereich der zeitdiskreten Funktionen übergeht.
Somit gelten also auch für diskrete Signale die gleichen Zusammenhänge wie für kontinuierliche Signale.

$$\boxed{g(k) = s(k) * h(k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(m) = S(m) \cdot H(m)} \qquad (3.29)$$

zeitdiskrete Faltung, auch periodische oder zyklische Faltung

Mit:

$$g(k) = g(k \pm n_0 N)$$
$$s(k) = s(k \pm n_0 N)$$
$$h(k) = h(k \pm n_0 N)$$

3.3.7. SIGNALENERGIE

Die Signalenergie eines Signals ist ganz allgemein definiert als das Integral über das Quadrat der Zeitfunktion, bezogen auf den gesamten Definitionsbereich des Signals.
Im folgenden soll der Zusammenhang für die Signalenergie aus den diskreten Abtastwerten des Signals hergeleitet werden. Setzt man ganz allgemein für **s(t)** die Darstellung aus (3.7) ein so ergibt sich zunächst ganz formell für die Signalenergie:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt$$

$$= T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[s(nT) \cdot \delta(t - nT) * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right] \cdot$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[s(mT) \cdot \delta(t - mT) * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right] dt$$

Nach Auflösen des Faltungsproduktes und Herausziehen der konstanten Vorfaktoren aus dem Integral, ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$= T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[s(nT) \cdot s(mT) \cdot 4f_{gT}{}^2 \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t-nT)) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t-mT)) \right] dt$$

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T^2 \cdot 4f_{gT}{}^2 \cdot s(nT) \cdot s(mT) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left[si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t-nT)) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t-mT)) \, dt \right]}_{\mathbf{I}}$$

Betrachtet man nun das Integral **I** separat, ergibt sich unter Anwendung der Substitution **t-nT=u** folgender Ausdruck:

$$\boxed{\begin{array}{c} t-nT=u \\ du=dt \\ t=u+nT \end{array}}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot u) \cdot \underbrace{si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (u-T(m-n)))}_{\equiv si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (T(m-n)-u))} du$$

$$\boxed{si(x) = si(-x)}$$

Die si-Funktion ist eine gerade Funktion und deshalb kann man auch schreiben:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot u) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (T(m-n)-u)) du$$

Der daraus resultierende Integralausdruck stellt nichts anderes dar, als ein Faltungsinteral, somit läßt sich dieser Ausdruck auch umschreiben zu

$$\boxed{\begin{array}{l} s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t-\tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) \cdot s_2(t-u) \, du \\ \text{mit} \quad t = T(m-n) \end{array}}$$

$$I = si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)\Big|_{t=T(m-n)}$$

Ein derartiges Faltungsprodukt läßt sich durch Transformation in den Frequenzbereich lösen

$$\mathcal{F}\{I\} = \left[\left(\frac{1}{2f_{gT}} \right) \cdot rect\left(\frac{f}{2f_{gT}} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2f_{gT}} \right) \cdot rect\left(\frac{f}{2f_{gT}} \right) \right]$$

Nach Vereinfachung ergibt sich durch Rücktransformation in den Zeitbereich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\boxed{\text{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right)\cdot\text{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right)=\text{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right)}$$

$$I=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2f_{gT})^2}\cdot\text{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right)\right\}=\frac{1}{2f_{gT}}\cdot\text{si}(\pi\cdot t\cdot 2f_{gT})$$

Damit ergibt sich :

$$I=\left(\frac{1}{2f_{gT}}\right)\cdot\text{si}(\pi\cdot 2f_{gT}\cdot t)\Big|_{t=T(m-n)}$$

$$=\left(\frac{1}{2f_{gT}}\right)\cdot\text{si}(\pi\cdot 2f_{gT}\cdot T(m-n))$$

$$=\left(\frac{1}{2f_{gT}}\right)\cdot\text{si}\left(\pi\cdot\frac{1}{T}\cdot T(m-n)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2f_{gT}}\right)\cdot\text{si}(\pi\cdot(m-n))$$

$$I=\begin{cases}\left(\frac{1}{2f_{gT}}\right) & m=n\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}=\left(\frac{1}{2f_{gT}}\right)\cdot\delta_k(m-n)$$

$$\boxed{2f_{gT}=\frac{1}{T}}$$

Der Integralausdruck reduziert sich auf zwei Werte in Abhängigkeit von **m** und **n,** wobei er nur dann einen Beitrag liefert, wenn das Argument der si-Funktion = **0** wird. Dies ist nur für **m=n** der Fall. Für alle anderen Fälle liefert das Integral keinen Beitrag, da sich im Integranden der si-Funktion ganzzahlige Vielfache von **π** ergeben, welche die Nulldurchgänge der si-Funktion darstellen. Dies läßt sich auch mit Hilfe des zeitdiskreten Diracstoßes beschreiben!
Abschließend ergibt sich damit für die Energie des Signals:

$$E_s=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}T^2\cdot(2f_{gT})^2\cdot s(nT)\cdot s(mT)\cdot I$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}T^2\cdot\frac{(2f_{gT})^2}{2f_{gT}}\cdot s(nT)\cdot s(mT)\cdot\delta_k(m-n)$$

$$\boxed{2f_{gT}=\frac{1}{T}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}T^2\cdot\left(\frac{1}{T}\right)\cdot s(nT)\cdot s(mT)\cdot\delta_k(m-n)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Unter Berücksichtigung der Siebeigenschaft des Diracstoßes folgt (m=n) und damit entfällt eine Summe und auch der Delta fällt weg!

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \cdot s(nT) \cdot s(nT)$$

Somit ergibt sich abschließend für den Zusammenhang der Signalenergie eines kontinuierlichen Signals durch seine Abtastwerte:

$$E_s = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 \, dt \tag{3.30}$$

Die Energie läßt sich also aus der unendlichen Summe des Quadrates der Abtastwerte bestimmen, wobei dieser Wert im Gegensatz zum kontinuierlichen Fall noch mit der Abtastperiodendauer gewichtet werden muß!

3.3.8. ZEITDISKRETE FALTUNG

In diesem Kapitel soll es um die Realisierung der zeitkontinuierlichen Faltung (eines Analog-Filters) durch digitale zeitdiskrete Verarbeitung (digitales Filter) gehen. Die Voraussetzung dafür sind tiefpaßbegrenzte Signale und Filterstoßantworten.
Die Abtastfrequenz muß so gewählt werden, daß das Signal mit der höchsten Grenzfrequenz noch richtig abgetastet wird (in aller Regel s(t)!).

Es ist bekannt, daß bei kontinuierlichen Signalen für die Faltung folgender Zusammenhang gilt:

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(f) = S(f) \cdot H(f)$$

Im Falle zeitdiskreter *periodischer* Signale ergibt sich im Grunde genommen ein völlig analoger Zusammenhang, der ja auch bereits im vorigen Kapitel hergeleitet wurde:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

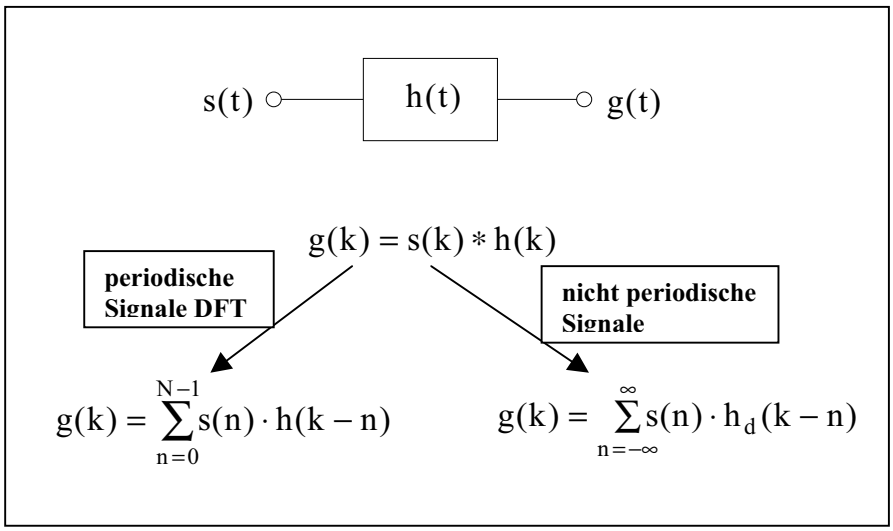


Abbildung 3.18: Zusammenhang zeitdiskreter periodischer Signale

Die Herleitung für den nicht periodischen Fall wurde noch nicht geliefert und soll nun im Folgenden nachgereicht werden.

Geht man von der Darstellung eines kontinuierlichen Signals durch seine Abtastproben aus, so gilt für die Stoßantwort bzw. Eingangsanregung mit dem Abtasttheorem:

$$h(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t - nT))$$

$$= T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \cdot \delta(t - nT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)$$

$$s(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t - nT))$$

$$= T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t - nT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)$$

Wenn sowohl die Eingangsanregung als auch die Stoßantwort bandbegrenzt sind, so ist auch die Ausgangsreaktion bandbegrenzt. Somit gilt für die Ausgangsreaktion der gleiche Zusammenhang:

$$g(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \cdot \delta(t - nT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)$$

Setzt man nun diese Zusammenhänge in das Faltungsprodukt formal ein, so folgt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = s(t) * h(t)$$
$$= \left[T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t - nT) * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) * \right.$$
$$\left. T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(mT) \cdot \delta(t - mT) * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right]$$

Wendet man das Kommutativgesetz der Faltung an, so ergibt sich für das aufgelöste Faltungsprodukt der beiden Diracstöße:

$$\delta(t - nT) * \delta(t - mT) = \delta(t - nT - mT) = \delta[t - (n + m)T]$$

$$g(t) = \left[T^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot h(mT) \cdot \delta[t - (n+m)T] * \right.$$
$$\left. 4f_{gT}{}^2 \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right]$$

Nach Aufspalten des Vorfaktors der si-Funktionen erhält man für das Teilfaltungsprodukt eine geeignete Form für die Fouriertransformation:

$$g(t) = \left[T^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot h(mT) \cdot \delta[t - (n+m)T] * \underbrace{2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)} \right]$$

$$rect\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \cdot rect\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) = rect\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)$$

Das Faltungsprodukt der si-Funktionen reduziert sich auf eine si-Funktion und somit ergibt sich für die Ausgangsreaktion:

$$g(t) = T^2 \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [s(nT) \cdot h(mT) \cdot \delta(t - (n+m)T)] * 2f_{gT} \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right]$$

Substitution $\quad \text{mit} \begin{cases} n + m = l \\ m = l - n \end{cases}$

$$g(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot T \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [s(nT) \cdot h((l-n)T) \cdot \delta(t - lT)] * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right]$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot T \cdot h((l-n) \cdot T) \right] \cdot \delta(t - lT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \right]$$

$g(lT)$

Durch geschickte Klammersetzung und Hineinziehen des Faktors **T** läßt sich die innere Summe auch als **g(lT)** schreiben, da diese nichts anderes als ein Faltungsprodukt ist. Dies läßt sich deshalb so realisieren, da der Summenindex n in sonst keinem Argument der beteiligten Funktionen enthalten ist. Die innere Summe läßt sich somit auflösen und man erhält für die Ausgangsreaktion:

$$g(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l \cdot T) \cdot \delta(t - l \cdot T) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \tag{3.31}$$

mit

$$g(l \cdot T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n \cdot T) \cdot T \cdot h((l-n)T)$$

Somit ist gezeigt, daß man kontinuierliche, tiefpaßbegrenzte Signale ohne Informationsverlust digital aus ihren Abtastwerten verarbeiten kann! Betrachtet man die Abtastwerte der Ausgangsreaktionsfolge, so ergibt sich jeder Abtastwert der Ausgangsfolge aus der Summe der Abtastwerte der Eingangsfolge über den gesamten Wertebereich. Die Abtastwerte von g(t) können aus den Abtastwerten von s(t) und h(t) berechnet werden! Somit ist die zeitdiskrete Verarbeitung nichts anderes als eine zeitdiskrete Faltung.
Zusammengefaßt ergibt sich für die zeitdiskrete Faltung:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

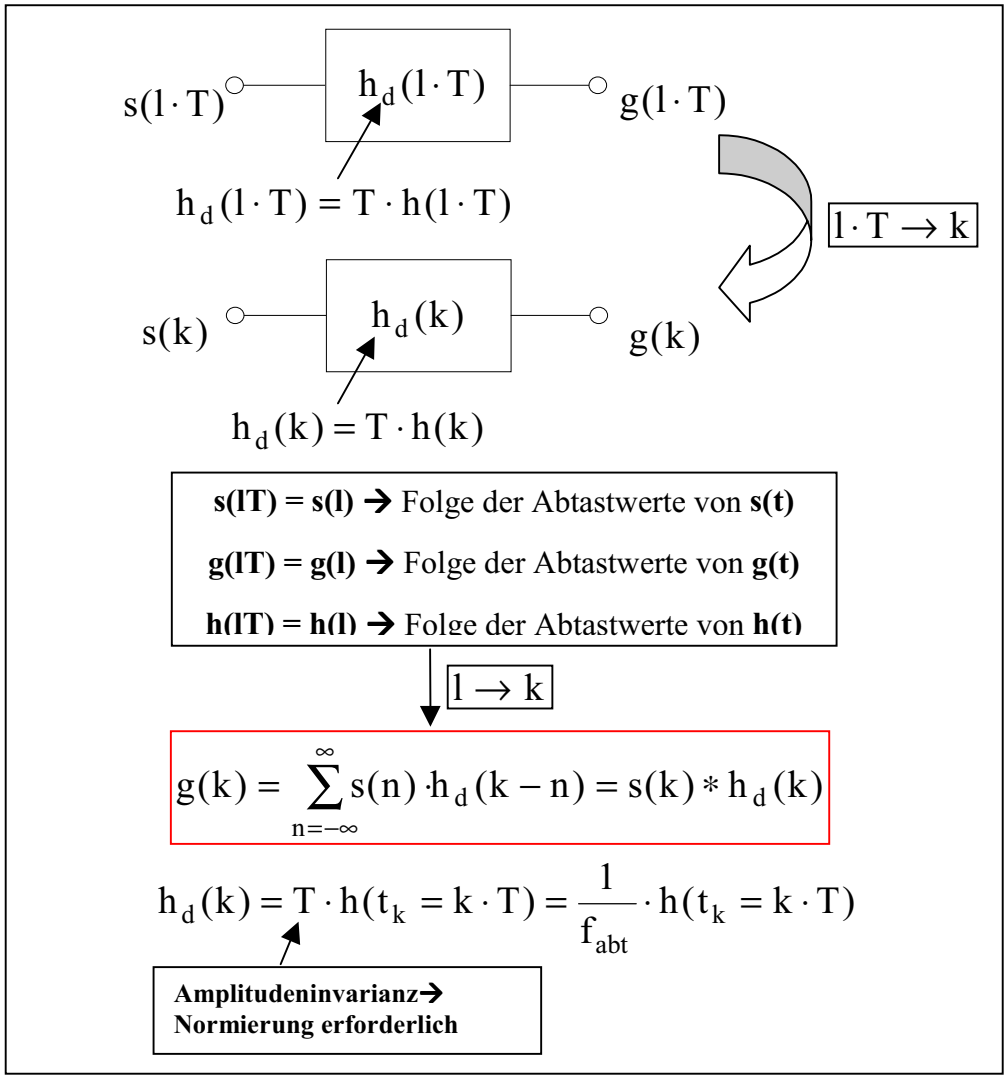


Abbildung 3.19: Zusammenfassung

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

4. KORRELATIONSFUNKTIONEN DETERMINIERTER SIGNALE

In der Nachrichtentechnik kommt es sehr häufig vor, daß man Signale hinsichtlich ihrer Ähnlichkeit zueinander betrachten muß, damit man entsprechende Empfangsverfahren bzw. Methoden zur mathematischen Signalanalyse bzw. Synthese aufbauen kann. Die Messung oder Bestimmung der Ähnlichkeit zweier Signale wird auch mit dem Begriff der *Korrelation* bezeichnet, wobei hier alle Verfahren gemeinsam haben, daß sie ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale berechnen.
Die Definition der Korrelation steht im sehr engen Zusammenhang zum Energie bzw. Leistungsbegriff von Signalen. Daher werden nun zunächst im folgenden diese Begriffe näher erläutert.

4.1. ENERGIE UND LEISTUNG

Die Energie eines Signals ist ganz allgemein definiert, als das Integral über das Quadrat des Signalverlaufes bezogen auf den gesamten Definitionsbereich des Signals. Die Quadrierung ist deshalb erforderlich, weil man sehr häufig mit Wechselsignalen zu tun hat. Ohne Quadrierung des Signalverlaufes kann es nämlich bei solchen Signalen passieren, daß sich u.U. positive und negative Flächen aufheben, die aber gleichermaßen zum Energieinhalt des Signals beitragen! Da man in der Elektrotechnik entweder mit Spannungs- oder Stromsignalen zu tun hat, gilt hier jeweils für die Energie:

$$E_{el} = \frac{1}{R} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t)^2 dt = R \cdot \int_{t_1}^{t_2} i(t)^2 dt \tag{4.1}$$

Man bezieht sich also hier auf Widerstände, da diese keinerlei Energie speichern sondern lediglich elektrische Energie in Wärme umwandeln.
Unter Verwendung normierter Werte gilt für die Energie ganz allgemein in der Systemtheorie:

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s(t)^2 dt \tag{4.2}$$

Um diese Form zu erreichen, muß man, je nachdem ob ein Spannungs- oder Stromsignal vorliegt, entweder mit oder durch einen Widerstand multiplizieren bzw. dividieren!
Es ergibt sich damit für die normierte elektrische Energie eines Spannungs- bzw. Stromsignals:

$$E_{el} = \int_{t_1}^{t_2} u(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} i(t)^2 dt \tag{4.3}$$

Ergibt sich für die Energie eines Signals innerhalb seines gesamten Definitionsbereiches ein endlicher Wert, so nennt man ein solches Signal *Energiesignal*.

$$E_{el} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt < \infty \longrightarrow \boxed{\textbf{Energiesignal}}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Falls man Signale hat, die in ihrer Ausdehnung zeitlich nicht begrenzt sind, so ergibt sich fast zwangsläufig eine unendliche Energie. Dies ist z.B. bei allen periodischen Signalen und Zufallssignalen der Fall. Für solche Fälle kann aber eine *Energie pro Zeitintervall* definiert werden. Diese Definition wird auch als mittlere Leistung des Signals bezeichnet und es gilt:

$$P_S = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} s(t)^2 \, dt \tag{4.4}$$

Signale mit $\mathbf{0 < P_S < \infty}$ werden auch *Leistungssignale* genannt !

Das eigentliche Ziel in diesem Kapitel sollte sein, eine Beschreibung für die Ähnlichkeit zweier Signale zu definieren. Dabei stellt sich nun natürlich die Frage, in welchem Zusammenhang der Begriff der Ähnlichkeit mit den Begriffen Energie und Leistung von Signalen steht. Im folgenden soll nun der Begriff der Ähnlichkeit zweier Signale in Bezug zur Energie hergeleitet werden.

4.2. DEFINITION DER KORRELATIONSFUNKTION FÜR ENERGIESIGNALE

Es ist einleuchtend, daß wenn man zwei Signalverläufe hinsichtlich ihrer Ähnlichkeit zueinander untersuchen möchte, man die Lage der jeweiligen Funktionswerte an den gleichen Stellen zueinander untersuchen muß. Ist die Abweichung der jeweiligen Funktionswerte zueinander sehr groß, so ist die Ähnlichkeit der Signale eher gering, wohingegen die Ähnlichkeit dann sehr groß ist, wenn die Abweichung der jeweiligen Funktionswerte zueinander sehr klein ist. Somit stellt die *Differenz zweier Signale* sicherlich ein Maß für die Ähnlichkeit dar, wobei die Differenzfunktion ebenfalls eine Funktion der Zeit ist. Diese enthält die jeweiligen Abweichungen der Funktionswerte zueinander bezogen auf jeden einzelnen Zeitpunkt. Um nun einen Gesamteindruck in Bezug auf die Ähnlichkeit zweier Signale zu erhalten, ist natürlich die Aussage über den Verlauf der Abweichung über der Zeit nicht aussagekräftig genug. Hierzu ist es sinnvoller, die Summe aller Abweichungen zu bilden. Man muß also die gesamte Fläche, welche von der Differenzfunktion innerhalb ihres Definitionsbereiches aufgespannt wird, betrachten. Da die Differenzfunktion sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, bildet man hierzu zweckmäßigerweise das Integral über das Quadrat der Differenzfunktion. Somit wäre dann der Bezug der Ähnlichkeit zur Energie hergestellt, da laut Definition das Integral über das Quadrat eines Funktionsverlaufes dessen Energie darstellt. Die Quadrierung sorgt zusätzlich dafür, daß größere Abweichungen überproportional gewertet werden und sehr kleine Abweichungen nur wenig ins Gewicht fallen! Somit ist die daraus resultierende Maßzahl in Bezug auf die Ähnlichkeit der Signale zueinander sehr aussagekräftig!
Betrachtet man nun die beiden Signale **s(t)** und **g(t)**, so gilt für das Differenzsignal:

$$\Delta(t) = s(t) - g(t)$$

Die Energie des Differenzsignals ergibt sich somit zu:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$E_\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t)^2 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - g(t)]^2 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 \, dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) \, dt$$

$$E_\Delta = E_s + E_g - 2E_{sg} \tag{4.5}$$

Kreuzenergie der Signale

Die Differenzenergie besteht also aus der Summe der Teilenergien der einzelnen Signale, wobei hiervon noch der gemeinsame Anteil, den die Signale verursachen, abgezogen werden muß. Der Gesamtausdruck verschwindet nur für den Fall, daß beide Signale gleich sind, da nur dann die Differenzfunktion Null ist! Somit gilt laut dieser Definition:
Zwei Signale sind dann und nur dann *maximal ähnlich bzw. identisch*, wenn deren *Differenzenergie Null* ist!
Der Nachteil dieser Definition liegt darin, daß sich damit lediglich eine Aussage über die *absolute Ähnlichkeit* zweier Funktionen zueinander machen läßt. Betrachtet man hierzu das Beispiel zweier Sinusfunktionen der gleichen Frequenz und Phasenlage, so ist die Differenzenergie im Falle unterschiedlicher Amplituden absolut gesehen ungleich Null. Die beiden Funktionen sind also laut Definition unähnlich, obwohl sie relativ gesehen einen identischen Funktionsverlauf besitzen. Um nun auch eine Aussage über die *relative Ähnlichkeit* treffen zu können, *normiert* man die Signale auf eine *Signalenergie* ***=1***. Für diesen Fall wird die Differenzenergie unabhängig von der absoluten Energie der Signale. Für die normierten Signale muß daher gelten:

$$\tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E_g}} \qquad \tilde{s}(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{E_s}}$$

Die Wurzeln im Nenner rühren daher, daß die Energie über das Quadrat des jeweiligen Signalverlaufes gebildet werden muß.

Somit ergibt sich für das normierte Differenzsignal

$$\tilde{\Delta}(t) = \tilde{g}(t) - \tilde{s}(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E_g}} - \frac{s(t)}{\sqrt{E_s}}$$

und für die normierte Differenzenergie gilt

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$E_{\tilde{\Delta}} = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{g}(t) - \tilde{s}(t)]^2 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(t)^2 \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t)^2 \, dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t) \cdot \tilde{g}(t) \, dt$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 \, dt}{E_g} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 \, dt}{E_s} - 2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) \, dt}{\sqrt{E_s} \cdot \sqrt{E_g}}$$

$$= \frac{E_g}{E_g} + \frac{E_s}{E_s} - 2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) \, dt}{\sqrt{E_s} \cdot \sqrt{E_g}}$$

$$E_{\tilde{\Delta}} = 2 - 2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) \, dt}{\sqrt{E_s} \cdot \sqrt{E_g}} \qquad (4.6)$$

Normierte Kreuzenergie

Das Ergebnis zeigt, daß die normierte Differenzenergie lediglich von der normierten Kreuzenergie der beiden Signale abhängt. Dieser Faktor wird auch als *normierter Kreuzkorrelationskoeffizient* bezeichnet.

$$p_{sg}^{E} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) \, dt}{\sqrt{E_s} \cdot \sqrt{E_g}} = 1 - \frac{E_{\tilde{\Delta}}}{2} \qquad (4.7)$$

Normierter Kreuzkorrelationskoeffizient für Energiesignale

Die normierte Differenzenergie stellt also ein Maß für die relative Ähnlichkeit zweier Funktionen dar, und hängt nicht mehr von der absoluten Signalhöhe ab.

Wenn der Wert des Kreuzkorrelationskoeffizienten verschwindet, so muß gelten:

$$p_{sg}^{E}(\tau) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) \, dt = 0 \qquad (4.8)$$

Orthogonalität

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Signale, welche diesem Zusammenhang genügen, werden auch *orthogonale Signale* genannt! Die Vorgänge bei der Normierung der Kreuzenergie sollen im folgenden anhand einer Skizze noch einmal für das Beispiel zweier Rectangularsignale verdeutlicht werden.

BEISPIEL:

Man betrachte die beiden Signale :

$$s_1(t) = A_1 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \qquad s_2(t) = A_2 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Skizziert erhält man unter Berücksichtigung, daß $T_2 > T_1$ ist, folgende zeitliche Lage der Signale zueinander:

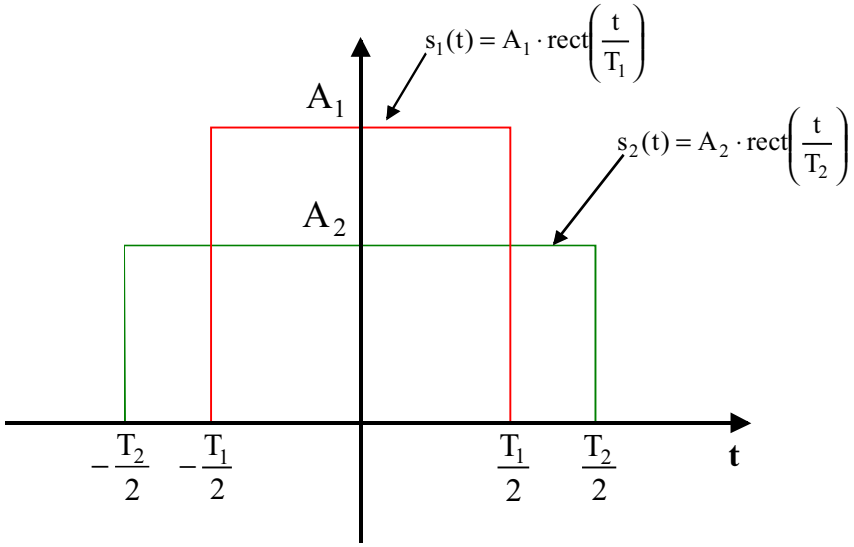


Abbildung 4.1: zeitliche Lage der Signale zueinander

Um nun die Ähnlichkeit dieser beiden Signale zueinander zu berechnen, müssen diese zunächst auf ihre Energie normiert werden.

Für die Energie des Signals $\mathbf{s_1(t)}$ ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.2):

$$E_{s1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)\,dt = A_1^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}^2\left(\frac{t}{T_1}\right)dt = A_1^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right)dt$$

$$E_{s1} = A_1^2 \cdot \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} 1\,dt = A_1^2 \cdot T_1$$

Damit erhält man für das normierte Signal $\mathbf{s_{1norm}(t)}$**:**

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_{1norm}(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s1}}} = \frac{A_1 \cdot rect\left(\frac{t}{T_1}\right)}{\sqrt{A_1^2 \cdot T_1}} = \frac{1}{\sqrt{T_1}} \cdot rect\left(\frac{t}{T_1}\right)$$

Wie man erkennen kann hat die Amplitude des Zeitsignals im normierten Fall keinen Einfluß mehr. Es spielt lediglich die Pulsbreite eine Rolle. Dies gilt allerdings nur für den Sonderfall der Rectangular-Funktion.
Für die Energie des Signals $\mathbf{s_2(t)}$ gilt entsprechend

$$E_{s2} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t)\,dt = A_2^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} rect^2\left(\frac{t}{T_2}\right)dt = A_2^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t}{T_2}\right)dt$$

$$E_{s2} = A_2^2 \cdot \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} 1\,dt = A_2^2 \cdot T_2$$

und damit erhält man schließlich für das normierte Signal $\mathbf{s_{2norm}(t)}$:

$$s_{2norm}(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_{s2}}} = \frac{A_2 \cdot rect\left(\frac{t}{T_2}\right)}{\sqrt{A_2^2 \cdot T_2}} = \frac{1}{\sqrt{T_2}} \cdot rect\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Skizziert ergibt sich dann für die normierten Signale:

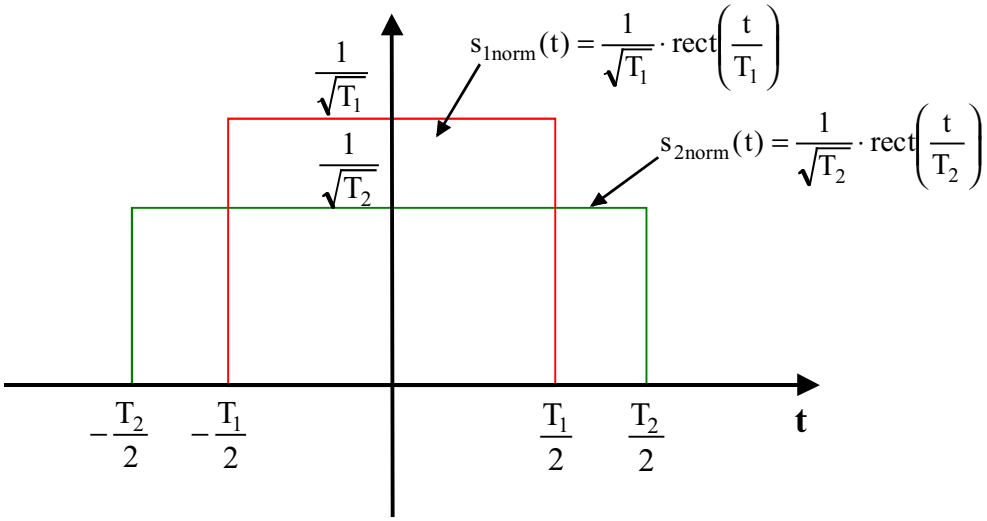


Abbildung 4.2: normierte Signale

Um nun die Ähnlichkeit der beiden Signale zueinander zu bestimmen, muß man nun noch den normierten Kreuzkorrelationskoeffizienten bilden.

Für diesen gilt laut (4.7):

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$p_{sg}^{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s_{1norm}(t) \cdot s_{2norm}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{T_1}} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{T_2}} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_2}\right) dt$$

$$p_{sg}^{E} = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_2}\right) dt$$

Die schmalere der beiden Funktionen bestimmt die Integrationsgrenzen. Da hier $T_2 > T_1$ ist, reduziert sich das unendliche Integral zu:

$$p_{sg}^{E} = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} 1\,dt = \frac{T_1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}} = \sqrt{\frac{T_1^2}{T_1 \cdot T_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Der Wert des normierten Kreuzkorrelationskoeffizienten wird also nicht mehr von den Signalamplituden, sondern lediglich durch das Verhältnis der Pulsbreiten zueinander, bestimmt. Sind die Pulsbreiten beider Signale identisch, so erhält man für den normierten Kreuzkorrelationskoeffizienten den Wert 1, was maximale Ähnlichkeit bedeutet.

Die Definition der Ähnlichkeit über den normierten Kreuzkorrelationskoeffizienten sorgt also dafür, daß man eine Aussage über die relative Ähnlichkeit zweier Signale zueinander machen kann, wobei hier eben auch identische Signale unterschiedlicher Amplituden bedingt durch die Normierung als ähnlich ausgewiesen werden. Wenn aber zwei Signale von ihrem Verlauf her identisch sind und lediglich zeitlich gegeneinander versetzt sind, versagt diese Art der Definition. Man betrachte noch einmal das Beispiel eines Rechteckimpulses:

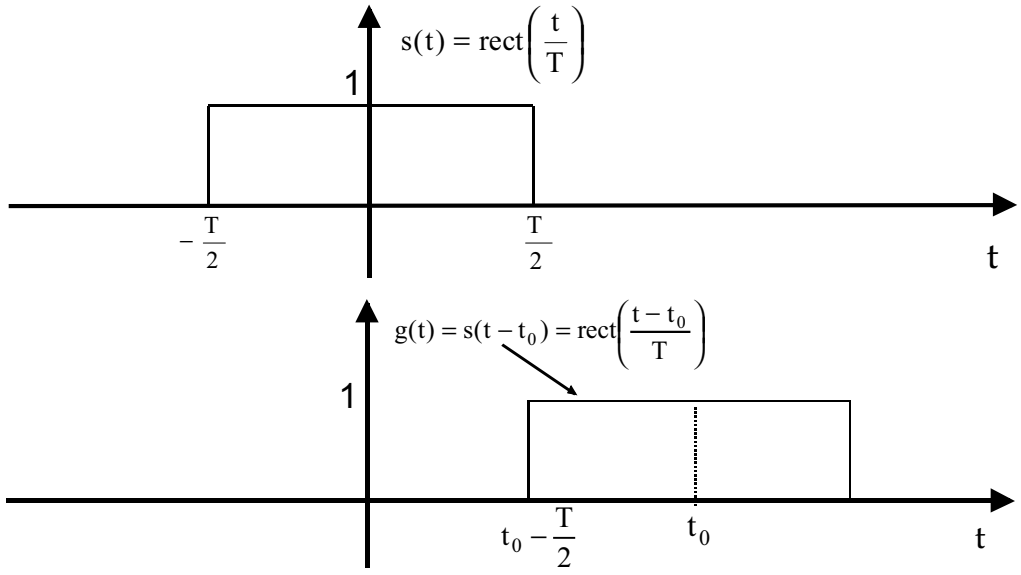


Abbildung 4.3: beide Signale sind nach dem normierten Kreuzkorrelationskoeffizient unähnlich

Rein von der Anschauung her sind diese Signale sehr ähnlich, aber bereits für $\mathbf{t_0 > T}$ ergibt die Kreuzenergie keinen Beitrag mehr und die Signale sind laut Definition maximal unähnlich!

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Es könnte ja die Ähnlichkeit verbessert werden, wenn man die Funktionen gegeneinander verschieben würde. Ergänzt man das Argument einer der beiden Funktionen um den Relativverschiebungsfaktor **τ**, so läßt sich die Kreuzkorrelationsfunktion jeweils in Abhängigkeit dieses Relativverschiebungsfaktors berechnen und es ergibt sich für den nicht normierten Fall mit dem Hilfssignal

$$s_0(t) = s(t-\tau)$$

folgender Ausdruck für die Kreuzkorrelationsfunktion in Abhängigkeit von der Verschiebung **τ:**

$$E^E_{s_0 g} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)\cdot g(t)\,dt = E^E_{sg}(\tau)$$

Substitution

$$\text{mit} \begin{cases} t-\tau = u \\ t = u+\tau \\ dt = du \end{cases}$$

$$E^E_{s_0 g} = E^E_{sg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\cdot g(u+\tau)\,du = \varphi^E_{sg}(\tau) \qquad (4.9)$$

Somit ergibt sich also die Kreuzkorrelationsfunktion von **s(t)** und **g(t)** in Abhängigkeit von der Relativverschiebung **τ** !
Für das Beispiel des verschobenen Rechteckimpulses nimmt diese Kreuzkorrelationsfunktion für **$\tau = t_0$** ihr Maximum an, da dann beide Signale genau übereinanderliegen und somit für diesen Fall am ähnlichsten (identisch) sind!

4.2.1. Eine nützliche Abschätzung für die Korrelationsfunktion

Im folgenden soll eine nützliche Abschätzung für die Kreuzkorrelationsfunktion hergeleitet werden.

Es gilt: $E_\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t-\tau) - \lambda\cdot g(t)]^2\,dt \geq 0$

Betrachtet man nun den Grenzfall $E_\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t-\tau) - \lambda\cdot g(t)]^2\,dt = 0$ (4.10)

so kann diese Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn gilt**:**

$$\boxed{E_\Delta = 0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g(t) = 0 \wedge s(t-\tau) = 0 \\ g(t) \neq 0 \wedge s(t-\tau) \neq 0 \quad \text{für} \quad \lambda = \dfrac{s(t-\tau)}{g(t)} = \lambda(\tau) \end{cases}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Um nun dieses $\boldsymbol{\lambda}$ für den zweiten Fall ganz allgemein zu ermitteln, muß man zunächst den Integranden in (4.10) auflösen. Dabei erhält man dann eine Gleichung der Form:

$$E_\Delta = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t-\tau)dt}_{E_s} + \lambda^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt}_{E_g} - 2\lambda \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)\cdot g(t)dt}_{\varphi_{sg}^{E}(\tau)} = 0$$

$$\boxed{E_s + \lambda^2 \cdot E_g - 2\lambda \cdot \varphi_{sg}^{E}(\tau) = 0} \tag{4.11}$$

Diese quadratische Gleichung kann keine zwei verschiedenen reellen Lösungen für $\boldsymbol{\lambda}$ haben.
Nach einer Umformung von (4.11) in die Normalform, ergibt sich für $\boldsymbol{\lambda}$ unter Anwendung der PQ-Formel:

$$E_g\lambda^2 + E_s - 2\lambda \cdot \varphi_{sg}^{E}(\tau) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \cdot \frac{\varphi_{sg}^{E}(\tau)}{E_g} + \frac{E_s}{E_g} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{\varphi_{sg}^{E}(\tau)}{E_g} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\varphi_{sg}^{E}(\tau)}{{E_g}^2} - \frac{E_s}{E_g}}}_{\leq 0 \text{ sonst zwei verschiedene reelle Lösungen}} \tag{4.12}$$

Die Bedingung, daß $\boldsymbol{\lambda}$ nicht zwei verschiedene reelle Lösungen haben darf, ist nur dann erfüllt, wenn der Wert der Diskriminante in (4.12) $\boldsymbol{\leq 0}$ ist!

Es muß also gelten:

$$\frac{{\varphi_{sg}^{E}}^2(\tau)}{{E_g}^2} - \frac{E_s}{E_g} \leq 0 \Rightarrow {\varphi_{sg}^{E}}^2(\tau) \leq E_s E_g$$

$$\left|\varphi_{sg}^{E}\right| \leq \sqrt{E_s E_g}$$

$$\boxed{\frac{\left|\varphi_{sg}^{E}(\tau)\right|}{\sqrt{E_s E_g}} = \left|\rho_{sg}(\tau)\right| \leq 1} \tag{4.13}$$

Somit ergibt sich anhand der Lösung, daß der Betrag der normierten Kreuzkorrelationsfunktion immer $\boldsymbol{\leq 1}$ ist. Anders ausgedrückt gilt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$-1 \le \frac{\varphi_{sg}^{E}(\tau)}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{E_g}} \le 1 \qquad (4.14)$$

minimale Ähnlichkeit
maximale Unähnlichkeit

maximale Ähnlichkeit
minimale Unähnlichkeit

Dieser Zusammenhang läßt sich auch ganz leicht anschaulich erklären!
Zwei Signale sind sich dann am ähnlichsten, wenn sie identisch sind, also wenn gilt :

$$s(t) = g(t) \Rightarrow \varphi_{sg}^{E}(\tau) = \frac{E_s}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{E_s}} = 1$$

obere Grenze

Dieser Wert kann durch keine Maßnahme weiter erhöht werden, da er die maximale Ähnlichkeit darstellt. Somit erklärt sich die obere Grenze für den Kreuzkorrelationskoeffizienten aus (4.14)!
Der Wert für größte Unähnlichkeit ergibt sich bei dieser Definition im Falle von:

$$s(t) = -g(t) \Rightarrow \varphi_{sg}{}^{E}(\tau) = \frac{-E_s}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{E_s}} = -1$$

untere Grenze

Zwei Signale sind sich dann am unähnlichsten, wenn die Signalverläufe zwar identisch sind, aber an jeder Stelle genau entgegengesetztes Vorzeichen zueinander haben. Somit läßt sich auch die untere Grenze für die Kreuzkorrelationsfunktion aus (4.14) erklären! Da die Signalenergien normiert sind, gelten diese Zusammenhänge natürlich auch für amplitudenmäßig unterschiedliche, aber vom Verlauf her identische Signale.

4.3. KORRELATIONSPRODUKT UND FALTUNGSPRODUKT

Die in (4.9) hergeleitete Beziehung für den unnormierten Korrelationskoeffizienten wird auch *Impulskorrelationsfunktion* genannt. Wenn man den Integranden dieses Ausdruckes noch einmal näher betrachtet, stellt man fest, daß eine sehr starke Ähnlichkeit zu dem bereits definierten Faltungstheorem besteht.

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot g(t+\tau)\,dt = s(\tau) \otimes g(\tau)$$

Korrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot g(-t+\tau)\,dt = s(\tau) * g(\tau)$$

Faltung

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Es ändert sich also bei der Definition lediglich das Vorzeichen für den Verschiebungsparameter im Integranden! So wie man für die Faltung ganz formal als Abkürzung den Faltungsstern verwendet, so verwendet man für die Korrelation ein ähnliches Zeichen, wobei hier ein Kreis um den Stern gemalt wird, damit man die Operationen auch leichter auseinanderhalten kann.

Im folgenden soll nun der Zusammenhang zwischen Korrelationsprodukt und Faltungsprodukt hergeleitet werden.

Geht man von der formalen Schreibweise für die Korrelation aus, so gilt:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(\tau) \otimes g(\tau)$$

$$= \int_{t_u=-\infty}^{t_o=\infty} s(t) \cdot g(t+\tau)\,dt$$

Substitution

$$t = -u \qquad u_o = -t_o = -(\infty) - \infty$$
$$dt = -du \qquad u_u = -t_u = -(-\infty) = \infty$$

$$= -\int_{u_u=\infty}^{u_o=-\infty} s(-u) \cdot g(\tau - u)\,du$$

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-u) \cdot g(\tau - u)\,du$$

Setzt man nun wieder rückwirkend ganz formell statt **u=t** ein, dann läßt sich der daraus resultierende Ausdruck als Faltungsprodukt deuten:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-u) \cdot g(\tau - u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) \cdot g(\tau - t)\,dt$$

Zusammenhang zwischen Faltung und Korrelation

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(-\tau) * g(\tau) \qquad (4.15)$$

Somit läßt sich also eine Faltung in eine äquivalente Korrelation und umgekehrt überführen!
Es gilt ganz allgemein mit (4.15) für die Kreuzkorrelationsfunktion:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(\tau) \otimes g(\tau) = s(-\tau) * g(\tau) \tag{4.16}$$

Die Tatsache, daß sich Korrelation und Faltung ineinander überführen lassen, bedeutet aber nicht, daß man jegliche bereits aus der Faltung bekannten Rechengesetzte in gleicher Weise für die Korrelation anwenden darf. Das Kommutativgesetz der Faltung z.B. gilt **nicht** für die Korrelation! Dies soll im folgenden gezeigt werden.
Vertauscht man ganz formal die Koeffizienten beim Korrelationsprodukt, so ergibt sich:

$$\varphi_{gs}^{E}(\tau) = g(\tau) \otimes s(\tau) = g(-\tau) * s(\tau)$$

$$= \int_{u_u=-\infty}^{u_o=\infty} g(-u) \cdot s(\tau - u)\,du$$

Substitution

$$\begin{aligned} -u &= v & v_o &= -u_o = -(\infty) = -\infty \\ -du &= dv & v_u &= -u_u = -(-\infty) = \infty \end{aligned}$$

$$\varphi_{gs}^{E}(\tau) = -\int_{v_u=\infty}^{v_o=-\infty} g(v) \cdot s(\tau + v)\,dv = \int_{v_u=-\infty}^{v_o=\infty} g(v) \cdot s(\tau + v)\,dv$$

Substitution

$$\begin{aligned} \tau + v &= x & x_o &= v_o = \infty \\ dv &= dx & x_u &= v_u = -\infty \end{aligned}$$

$$\varphi_{gs}^{E}(\tau) = \int_{x_u=-\infty}^{x_o=\infty} g(x - \tau) \cdot s(x)\,dx = \varphi_{sg}^{E}(-\tau)$$

Der daraus resultierende Ausdruck läßt sich also auch wieder als Korrelationsprodukt deuten, und es gilt zusammengefaßt für die Symmetrie:

$$\varphi_{gs}^{E}(\tau) = \varphi_{sg}^{E}(-\tau) \tag{4.17}$$

Es liegt also keine Identität vor und somit gilt das Kommutativgesetz **nicht** bei der Korrelation.

Das *Distributivgesetz* hingegen ist im Falle der Korrelation wieder gültig.

$$s(\tau) \otimes [g_1(\tau) + g_2(\tau)] = s(\tau) \otimes g_1(\tau) + s(\tau) \otimes g_2(\tau) \tag{4.18}$$

Dieser Zusammenhang läßt sich durch formales Einsetzen in (4.9) beweisen.

BEWEIS:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s(\tau)\otimes\left[g_1(\tau)+g_2(\tau)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\cdot\left[g_1(t+\tau)+g_2(t+\tau)\right]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\cdot g_1(t+\tau)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\cdot g_2(t+\tau)\,dt$$

$$s(\tau)\otimes\left[g_1(\tau)+g_2(\tau)\right]=s(\tau)\otimes g_1(\tau)+s(\tau)\otimes g_2(\tau)$$

Die Voraussetzung zur Definition des Korrelationsproduktes als Faltungsprodukt ist, daß das Faltungsintegral konvergieren muß! Diese Konvergenzbedingung ist in aller Regel dann erfüllt, wenn mindestens ein Signal ein Energiesignal ist. Die Energie über den Definitionsbereich des Signals muß also endlich sein! Da dies nicht immer der Fall ist und es eben auch die sogenannten Leistungssignale gibt, deren Energie nicht endlich ist, muß die Korrelation für solche Fälle anders definiert werden. Hier betrachtet man - genau wie bei der Berechnung der Energie solcher Signale -, die Korrelation in Bezug auf ein Zeitintervall.
Somit gelangt man zur abgewandelten Definition der Korrelation für Leistungssignale:

$$\boxed{\varphi_{sg}^{L}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}s(t)\cdot g(t+\tau)\,dt} \tag{4.19}$$

Diese Definition wird sehr häufig bei stochastischen Signalen benötigt, die im Rahmen dieser Vorlesung nicht angesprochen werden (siehe Vorlesung Estimationstheorie).

4.3.1. Spezialfall der Kreuzkorrelation: Autokorrelationsfunktion

Im folgenden soll nun ein in der Nachrichtentechnik sehr wichtiger Sonderfall der Kreuzkorrelation betrachtet werden. Dieser Sonderfall wird auch als **Autokorrelationsfunktion** bezeichnet, da er die *Korrelation eines Signals mit sich selbst* in Abhängigkeit von der Verschiebung berechnet.
Formelmäßig ergibt sich hierfür:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\cdot g(t+\tau)\,dt$$

$$\boxed{g(t)=s(t)}$$

$$\boxed{\varphi_{sg}^{E}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\cdot s(t+\tau)\,dt=\varphi_{ss}^{E}(\tau)} \tag{4.20}$$

Anhand des formelmäßigen Zusammenhangs läßt sich erkennen, daß die Autokorrelationsfunktion die Ähnlichkeit eines Signals mit sich selbst, in Abhängigkeit von der zeitlichen Verschiebung τ berechnet. Im Nullpunkt liegen beide Signale genau übereinander. Somit nimmt die Autokorrelationsfunktion im *Nullpunkt ihr Maximum* an. Da das Kreuzkorrelationsprodukt nichts anderes als die Kreuzenergie zweier Signale in Abhängigkeit

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

der Verschiebung darstellt, stellt die Autokorrelationsfunktion für den Fall, daß *beide Signale genau übereinander liegen* (**τ=0**), nichts anderes als die *Energie des Signals* dar!
Somit gilt:

$$\varphi_{ss}^{E}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot s(t+\tau)\big|_{\tau=0}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E_s \tag{4.21}$$

Was die Symmetrieeigenschaften der Autokorrelationsfunktion angeht, so gilt:

$$\varphi_{ss}^{E}(-\tau) = \varphi_{ss}^{E}(\tau) \tag{4.22}$$

Die Autokorrelationsfunktion ist also immer eine gerade Funktion!

Wenn man zeitlich begrenzte Signale betrachtet, so hat die Autokorrelationsfunktion die doppelte Breite des Zeitsignals!

BEISPIEL:

Betrachtet man den Rechteckimpuls, so gilt für die Autokorrelationsfunktion:

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = s(\tau)\otimes s(\tau) = s(-\tau) * s(\tau)$$
$$= \mathrm{rect}\left(\frac{-\tau}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

gerade Funktion

$$\mathrm{rect}\left(\frac{-\tau}{T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = T\cdot\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Da die Gewichtung der Dreieckfunktion gleichzeitig den Funktionswert an der Stelle **τ=0** darstellt, erhält man für die Energie des Rechteckimpulses:

$$E_s = \varphi_{ss}^{E}(0) = T\cdot\Lambda\left(\frac{0}{T}\right) = T\cdot 1 = T$$

Skizziert ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion der Rect-Funktion:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

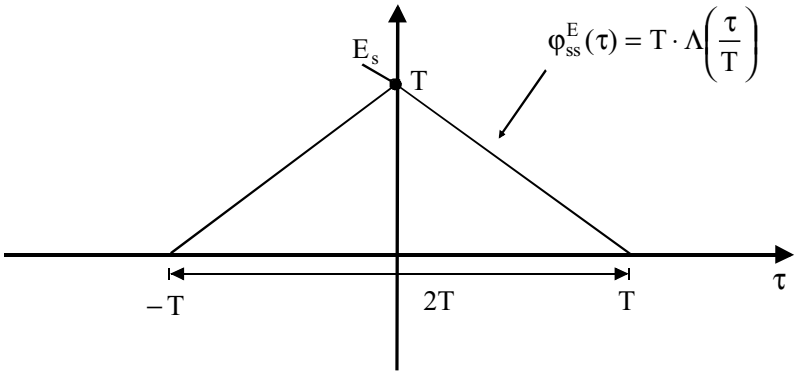


Abbildung 4.4: Autokorrelationsfunktion der Rect-Funktion

Für die Autokorrelationsfunktion lassen sich auch die bereits hergeleiteten Abschätzungen für die Kreuzkorrelationsfunktion anwenden. Hierbei ergibt sich speziell:

Mit (4.13)

$$\frac{\left|\varphi_{sg}^{E}(\tau)\right|}{\sqrt{E_s E_g}} = \left|\rho_{sg}(\tau)\right| \le 1$$

folgt mit **g(t)=s(t):**

$$\boxed{\left|\varphi_{ss}^{E}(\tau)\right| \le \sqrt{E_s E_s} \le E_s} \qquad (4.23)$$

Da aber die Autokorrelationsfunktion laut (4.21) im Nullpunkt die Energie eines Signals liefert, folgt:

$$\boxed{\left|\varphi_{ss}^{E}(\tau)\right| \le E_s = \varphi_{ss}{}^{E}(0)} \qquad (4.24)$$

Für die normierte Autokorrelationsfunktion ergibt sich damit:

$$\boxed{\rho_{ss}^{E}(\tau) = \frac{\varphi_{ss}^{E}(\tau)}{E_S} \le 1} \qquad (4.25)$$

4.4. FOURIERTRANSFORMATION DER ENERGIEKORRELATIONSFUNKTIONEN (IMPULSKORRELATIONSFUNKTIONEN)

Formal kann man die Korrelationsfunktionen mit der unabhängigen Verschiebungsvariablen **τ** auch fouriertransformieren. Somit lassen sich den Korrelationsfunktionen Spektren im Frequenzbereich zuordnen. Im folgenden soll hier nur als Beispiel die Autokorrelationsfunktion näher betrachtet werden. Im Falle der Kreuzkorrelationsfunktion ergeben sich analoge Zusammenhänge, da man lediglich die einzelnen Funktionen richtig substituieren und zuordnen muß!
Setzt man nun ganz formal, anstatt eines Zeitsignals die Autokorrelationsfunktion in das Fourierintegral ein, so ergibt sich für das Spektrum :

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \phi_{ss}^{E}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}^{E}(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot \tau}\, d\tau \tag{4.26}$$

Für die Spektren von Korrelationsfunktionen verwendet man, genau wie bei Zeitsignalen auch, Großbuchstaben!
Geht man nun von der Darstellung der Autokorrelationsfunktion als Faltungsprodukt im Zeitbereich aus, so ergibt sich ganz formal für die Fouriertransformierte:

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = s(\tau) \otimes s(\tau) = s(-\tau) * s(\tau)$$

$$\phi_{ss}^{E}(f) = S(f)^{*} \cdot S(f)$$

$$Z \cdot Z^{*} = |Z|^{2}$$

$$\phi_{ss}^{E}(f) = |S(f)|^{2} \tag{4.27}$$

Die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion eines Energiesignals ist also gleich dem Betragsquadrat der Fouriertransformierten dieses Energiesignals. Dieser Ausdruck wird auch als *Wiener-Khintchine-Theorem* bezeichnet, da er formal die gleiche Identität, wie das Wiener-Khintchine-Theorem, welches für zufällige Leistungssignale gilt, liefert.
Betrachtet man auch hier wieder den Sonderfall für τ**=0**, welcher ja der Energie des Korrelationssignals entspricht, so ergibt sich unter Anwendung der inversen Fouriertransformation:

$$\varphi_{ss}^{E}(0) = E_S = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ss}^{E}(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot \tau}\big|_{\tau=0}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ss}^{E}(f)\, df$$

Betrachtet man diesen Ausdruck bezüglich seiner Einheiten, so gilt:

$$[E_S] = \left[\phi_{ss}^{E}(f)\right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} df\right] = \left[\phi_{ss}^{E}(f)\right] \cdot [f]$$

Stellt man dies nach der Spektralfunktion um, so erhält man für diese als Einheit:

$$\left[\phi_{ss}^{E}(f)\right] = \frac{[E_S]}{[f]} = \frac{Ws}{Hz} = \frac{\text{Signalenergie}}{\text{Frequenz}}$$

Die Spektralfunktion stellt also, bezogen auf die Frequenz, die Energiedichte dar und wird deshalb auch als *Energiedichtespektrum* bezeichnet.

Setzt man nun noch für die Spektraldichtefunktion den in (4.21) hergeleiteten Zusammenhang ein, so erhält man das sogenannte *Parsevalsche-Theorem*:

$$\varphi_{ss}^{E}(0) = E_S = \int_{-\infty}^{\infty} s^{2}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ss}^{E}(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^{2}\, df \tag{4.28}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

wobei hier ganz allgemein für die inverse Fouriertransformierte gilt:

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ss}^{E}(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot \tau}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot \tau}\, df \qquad (4.29)$$

Als Beispiel hierzu soll das Energiedichtespektrum des uns bereits bekannten Exponentialimpulses berechnet werden!

BEISPIEL: ENERGIEDICHTESPEKTRUM DES EXPONENTIALIMPULSES

Gegeben sei folgender Exponentialimpuls:

$$s(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_{RC}}\right)}$$

Skizziert ergibt sich hierfür:

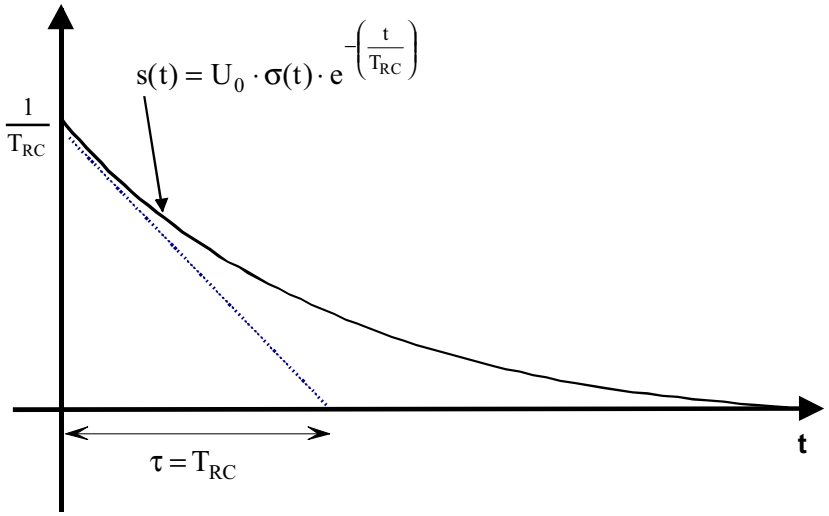


Abbildung 4.5: Exponentialimpuls

Für die Autokorrelationsfunktion gilt:

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = s(-\tau) * s(\tau)$$

Das daraus resultierende Faltungsintegral ist kompliziert und nicht leicht lösbar. Eine andere Möglichkeit stellt die Berechnung mit Hilfe des *Energiedichtespektrums* über das *Parsevalsche Theorem* (4.28) dar. Der Betrag des Spektrums des Exponentialimpulses läßt sich nämlich mit Hilfe einer Integraltabelle ganz leicht bestimmen. Im folgenden gilt der Einfachheit halber $\mathbf{T=T_{RC}}$. Mit (2.13) gilt:

$$S(f) = U_0 \cdot T \cdot \frac{1}{1 + j2\pi \cdot f \cdot T}$$

$$|S(f)|^2 = \frac{U_0^{\,2} \cdot T^2}{1 + (2\pi \cdot f \cdot T)^2} = \phi_{ss}^{E}(f)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Autokorrelationsfunktion ergibt sich nun durch Rücktransformation dieser Gleichung in den Zeitbereich. Da es sich aber um ein Betragsspektrum handelt, muß es zunächst in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden. Dies wurde bereits in Kapitel 2.3 durchgeführt und es gilt laut (2.14):

$$\mathrm{Re}\{S(f)\} = U_0 \cdot T \cdot \frac{1}{1+(2\pi \cdot f \cdot T)^2}$$

$$\mathrm{Im}\{S(f)\} = -U_0 \cdot T \cdot \frac{2\pi \cdot f \cdot T}{1+(2\pi \cdot f \cdot T)^2}$$

Laut (2.28) muß man nun normalerweise getrennt beide Anteile rücktransformieren. Betrachtet man aber genauer die Gleichung für den Realteil, so stellt man fest, daß dieser in einem proportionalen Zusammenhang zum Betrag des Energiedichtespektrums steht. Es gilt nämlich:

$$|S(f)|^2 = U_0 \cdot T \cdot \mathrm{Re}\{S(f)\}$$

Da konstante Vorfaktoren nicht bei der Fouriertransformation berücksichtigt werden müssen, ergibt sich somit für die Autokorrelationsfunktion des Exponentialimpulses:

$$|S(f)|^2 = U_0 \cdot T \cdot \mathrm{Re}\{S(f)\} = {U_0}^2 \cdot T^2 \cdot \frac{1}{1+(2\pi \cdot f \cdot T)^2}$$

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = U_0 \cdot T \cdot s_g(\tau)$$

$$\boxed{s_g(\tau) = \frac{1}{2} \cdot [s(\tau) + s(-\tau)]}$$

$$= \frac{U_0 \cdot T}{2} \cdot [s(\tau) + s(-\tau)]$$

$$= \frac{{U_0}^2 \cdot T}{2} \cdot \left[\underbrace{\sigma(\tau) \cdot e^{-\left(\frac{\tau}{T}\right)} + \sigma(-\tau) \cdot e^{+\left(\frac{\tau}{T}\right)}}_{\equiv\, e^{-\left(\frac{|\tau|}{T}\right)}} \right]$$

$$\boxed{\varphi_{ss}^{E}(\tau) = \frac{{U_0}^2 \cdot T}{2} \cdot e^{-\left(\frac{|\tau|}{T}\right)}}$$

Somit ergibt sich für die Energie des Exponentialimpulses:

$$E_S = \varphi_{ss}^{E}(\tau = 0) = \frac{{U_0}^2 \cdot T}{2}$$

Skizziert ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion des Exponentialimpulses:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

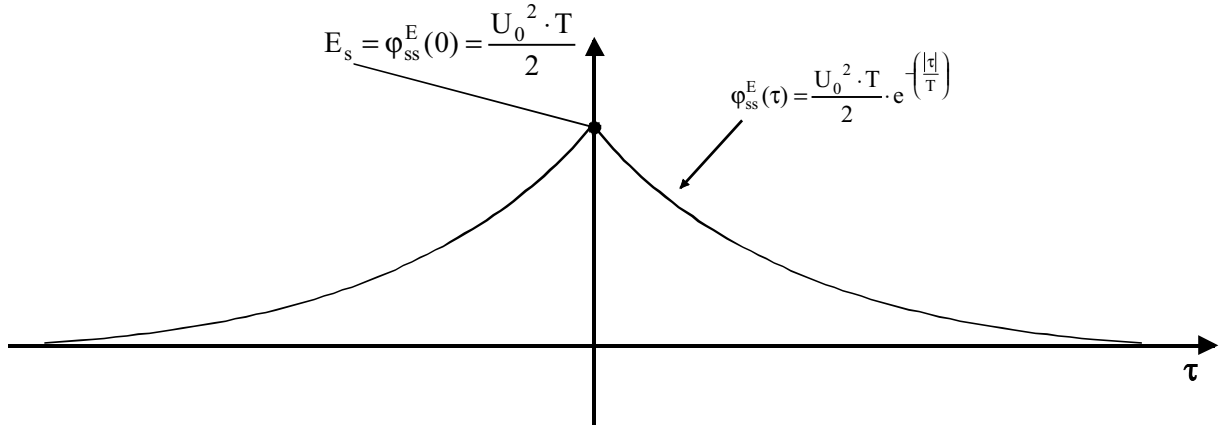


Abbildung 4.6: Autokorrelationsfunktion des Exponentialimpulses

4.5. IMPULS- (ENERGIE-)KORRELATIONSFUNKTION UND LTI - SYSTEME

In diesem Kapitel sollen die Autokorrelationsfunktionen und Kreuzkorrelationsfunktionen im Zusammenhang mit einem System betrachtet werden. Zunächst soll dabei die Frage geklärt werden, wie denn der Ausgang in Abhängigkeit der Eingangsanregung für den Fall der Autokorrelationsfunktion reagiert!

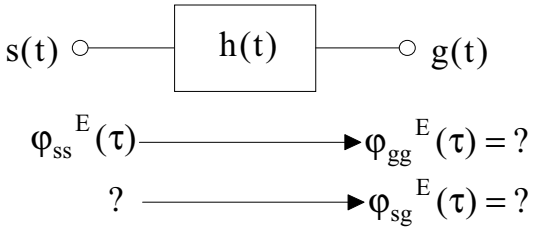


Abbildung 4.7: Abhängigkeit des Ausgangs von der Eingangsanregung

Für die autokorrelierte Ausgangsreaktion gilt doch ganz formell:

$$\varphi_{gg}^E(\tau) = g(\tau) * g(-\tau)$$

Setzt man nun hier für die Ausgangsreaktion ebenfalls ganz formell die bekannten Zusammenhänge ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Kommutativgesetzes der Faltung:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\varphi_{gg}^{E}(\tau) = s(\tau) * h(\tau) * s(-\tau) * h(-\tau)$$
$$= \underbrace{s(-\tau) * s(\tau)} * \underbrace{h(-\tau) * h(\tau)}$$
$$\varphi_{gg}^{E}(\tau) = \varphi_{ss}^{E}(\tau) * \varphi_{hh}^{E}(\tau) \tag{4.30}$$

Wiener-Lee-Theorem für Energiekorrelationen

Das Energiedichtespektrum der Ausgangsreaktion ergibt sich unter Berücksichtigung des Parsevalschen Theorems aus (4.28) zu:

$$\phi_{gg}^{E}(f) = |G(f)|^2 = \phi_{ss}^{E}(f) \cdot \phi_{hh}^{E}(f) = |S(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 \tag{4.31}$$

Im Falle der Kreuzkorrelationsfunktion am Ausgang ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(-\tau) * g(\tau)$$
$$= \underbrace{s(-\tau) * s(\tau)} * h(\tau)$$
$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \varphi_{ss}^{E}(\tau) * h(\tau) \tag{4.32}$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion am Ausgang ergibt sich also automatisch bei Anregung des Systems mit der Autokorrelationsfunktion! Somit ist diese zur Bestimmung unbekannter Stoßantworten geeignet.

Für das Energiedichtespektrum ergibt sich analog:

$$\phi_{sg}^{E}(f) = \phi_{ss}^{E}(f) \cdot H(f) = |S(f)|^2 \cdot H(f) \tag{4.33}$$

Abschließend soll noch angemerkt werden, daß diese Zusammenhänge nicht gelten, wenn **h(t)** ein Leistungssignal ist!

4.6. KORRELATION ZEITDISKRETER SIGNALE

Im Folgenden soll die Korrelation für zeitdiskrete Signale betrachtet werden. Um die bereits bekannten Zusammenhänge für die Korrelation kontinuierlicher Signale auf zeitdiskrete Signale zu übertragen, bedient man sich auch hier wieder des bekannten Abtasttheoremes aus. (3.6) Dieses besagt, daß sich jedes kontinuierliche, tiefpaßbegrenzte Signal, fehlerfrei aus seinen Abtastproben darstellen läßt und liefert somit einen eindeutigen formelmäßigen Zusammenhang

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

zwischen einem kontinuierlichen Signal und dem zugehörigen diskreten Signal. Wendet man nun das Abtasttheorem ganz formell auf die Korrelationsfunktionen an, so gilt:

$$\varphi_{ss}^{E}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}^{E}(n) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t - nT))$$

$$\varphi_{gg}^{E}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{gg}^{E}(n) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t - nT))$$

Die kontinuierliche Korrelationsfunktion ergibt sich also aus einer unendlichen Summe verschobener si-Funktionen, welche mit dem jeweiligen Abtastwert der Korrelationsfunktion gewichtet sind.

Betrachtet man auch hier wieder das Beispiel der Autokorrelationsfunktion, so lassen sich doch die einzelnen diskreten Abtastwerte der kontinuierlichen Funktion mit Hilfe des bereits bekannten äquivalenten Faltungstheoremes für zeitdiskrete Signale aus (3.28) formulieren zu:

$$\begin{aligned}\varphi_{ss}^{E}(n) &= T \cdot s(-n) * s(n) \\ &= T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(-m) \cdot s(-m+n)\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{ss}^{E}(n) = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \cdot s(m+n)} \tag{4.34}$$

Somit ergibt sich für die Energie des Signals aus seinen Abtastproben mit (4.34):

$$\boxed{E_S = \varphi_{ss}^{E}(0) = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} s^2(m)} \tag{4.35}$$

Wendet man dies analog für die Kreuzkorrelationsfunktion an, so erhält man hier für die Abtastproben der Kreuzkorrelationsfunktion

$$\begin{aligned}\varphi_{sg}^{E}(n) &= T \cdot s(-n) * g(n) \\ &= T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(-m) \cdot g(-m+n)\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{sg}^{E}(n) = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \cdot g(m+n)} \tag{4.36}$$

bzw. für die Energie der Kreuzkorrelationsfunktion bezogen auf die Abtastproben

$$\boxed{E_S = \varphi_{sg}^{E}(0) = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \cdot g(m)}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

4.7. MATCHED FILTERS

Nachdem die Korrelation für kontinuierliche und diskrete Signale hergeleitet wurde, soll nun ein praktischer Anwendungsfall in Bezug auf die Autokorrelationsfunktion näher betrachtet werden. Gesucht ist die Stoßantwort eines angepaßten Filters, welches zu einer Anregung mit dem Signal **s(t)** die Autokorrelationsfunktion $\boldsymbol{\varphi_{ss}^{E}(t-t_0)}$ bildet!
Betrachtet man die Ausgangsreaktion des Filters, so läßt sich die zeitliche Verschiebung auch durch ein Faltungsprodukt mit einem verschobenen Diracstoß darstellen. Somit gilt:

$$\varphi_{ss}^{E}(t-t_0) = \varphi_{ss}^{E}(t) * \delta(t-t_0)$$

Schreibt man nun die Autokorrelationsfunktion ebenfalls als Faltungsprodukt und wendet das Kommutativgesetz der Faltung an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &= s(-t) * s(t) * \delta(t-t_0) \\ &= s(t) * [s(-t) * \delta(t-t_0)] \\ &= s(t) * [s(-(t-t_0))] \end{aligned}$$

Somit erhält man abschließend für die Autokorrelationsfunktion als Ausgangsreaktion:

$$\boxed{\varphi_{ss}^{E}(t-t_0) = s(t) * [s(-t+t_0)]} \tag{4.37}$$

Die Ausgangsreaktion ergibt sich also aus dem Faltungsprodukt der Eingangsanregung mit der gespiegelten, um $\mathbf{t_0}$ verschobenen Eingangsanregung. Somit läßt sich durch Vergleich die Stoßantwort des Filters ablesen zu:

$$g(t) = s(t) * h(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$g(t) = \varphi_{ss}^{E}(t-t_0) = s(t) * [s(-t+t_0)]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h(t) = s(-t+t_0) = s(-(t-t_0)) = s(-t) * \delta(t-t_0)}$$

Die Stoßantwort muß also gleich der an der Ordinaten gespiegelten und zeitlich verschoben Eingangsanregung sein, damit sich am Ausgang die zeitlich verzögerte Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals ergibt. Da die Stoßantwort aber die Übertragungsfunktion eines Filters darstellen soll, muß man durch geschickte Wahl von $\mathbf{t_0}$ dafür sorgen, daß diese *kausal* wird, da in der Realität nur kausale Systeme existieren. Dies läßt sich allerdings nur für den Fall realisieren, daß man ein zeitlich begrenztes Signal hat.
Hierzu ein Beispiel:

BEISPIEL:

Nimmt man an, daß $s(t-t_0)$ folgenden Verlauf besitzt

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

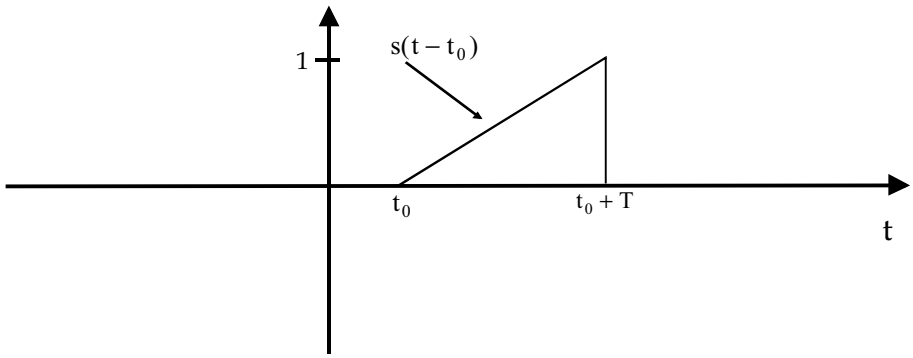


Abbildung 4.8: Verlauf von $s(t-t_0)$

so ergibt sich für die Stoßantwort:

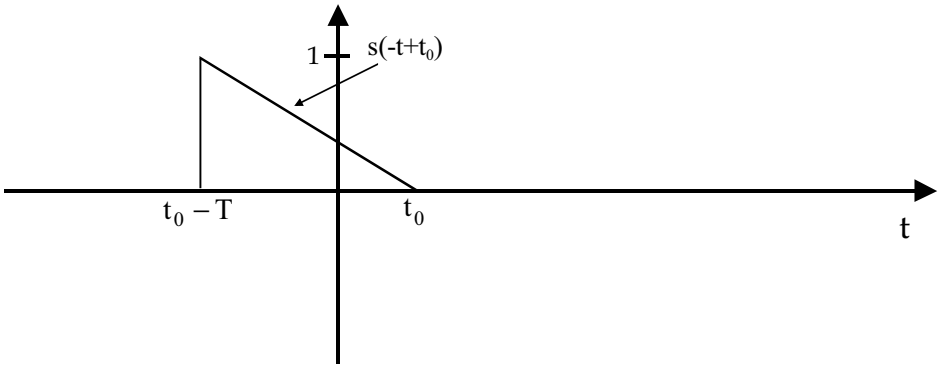


Abbildung 4.9: Stoßantwort

Diese Stoßantwort wird genau dann kausal, wenn gilt:

$$t_0 - T > 0 \Rightarrow t_0 > T$$

Somit ergibt sich abschließend für die kausale Stoßantwortfunktion:

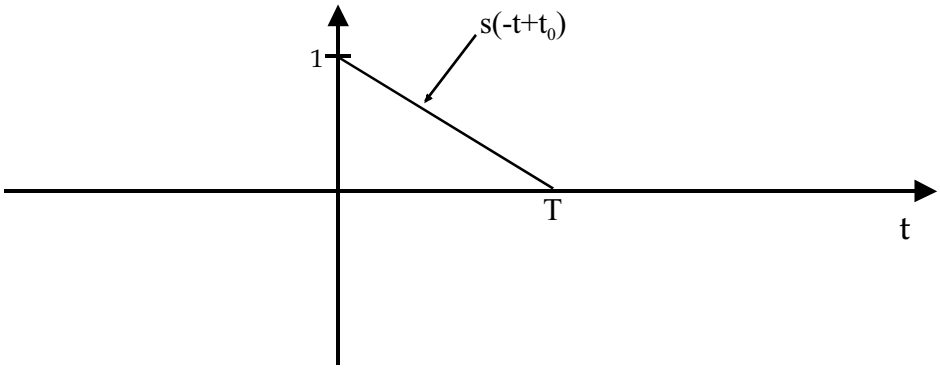


Abbildung 4.10: kausale Stoßantwortfunktion

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

BEISPIEL: RECHTECKIMPULS

Für diese Zusammenhänge soll nun noch ein konkretes Beispiel berechnet werden. Betrachtet man als Eingangsanregung den bereits bekannten Rechteckimpuls, so gilt: (Hierbei wird die Kausalitätsbedingung für die Eingangsanregung vernachlässigt!)

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Somit ergibt sich die Stoßantwortfunktion allgemein zu:

$$h(t) = s(-t + t_0) = s(-t) * \delta(t - t_0)$$

$$= \mathrm{rect}\left(-\frac{t}{T}\right) * \delta(t - t_0)$$

gerade Funktion

$$\boxed{\mathrm{rect}\left(-\frac{t}{T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}$$

$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \delta(t - t_0)$$

$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

Unter Berücksichtigung der Kausalitätsbedingung ergibt sich damit für die kausale Stoßantwort:

$$\boxed{h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)}$$

Somit erhält man für die Ausgangsreaktion:

$$g(t) = \varphi_{ss}^{E}(t - t_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)}_{= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)}$$

$$\boxed{t_0 = \frac{T}{2}}$$

$$= \underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}_{= T \cdot \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)} * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$= T \cdot \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$g(t) = \varphi_{ss}^{E}\left(t - \frac{T}{2}\right) = T \cdot \Lambda\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

Für die Energie der Ausgangsreaktion gilt:

$$E_s = \varphi_{ss}^{E}\left(t - \frac{T}{2} = 0\right) = T \cdot \Lambda\left(\frac{0}{T}\right) = T \cdot 1 = T$$

Die Ausgangsreaktion ist demnach die mit der Energie des Ausgangssignals gewichtete Dreieckfunktion!

Somit ergibt sich folgendes Blockschaltbild:

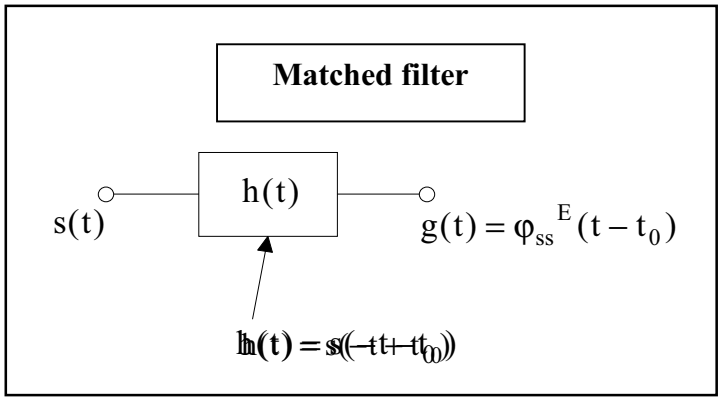
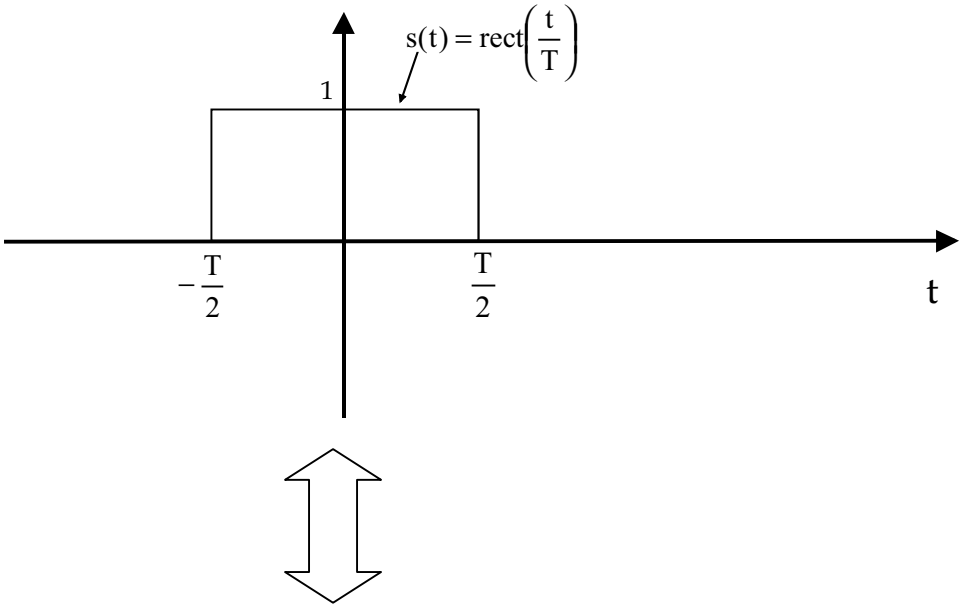
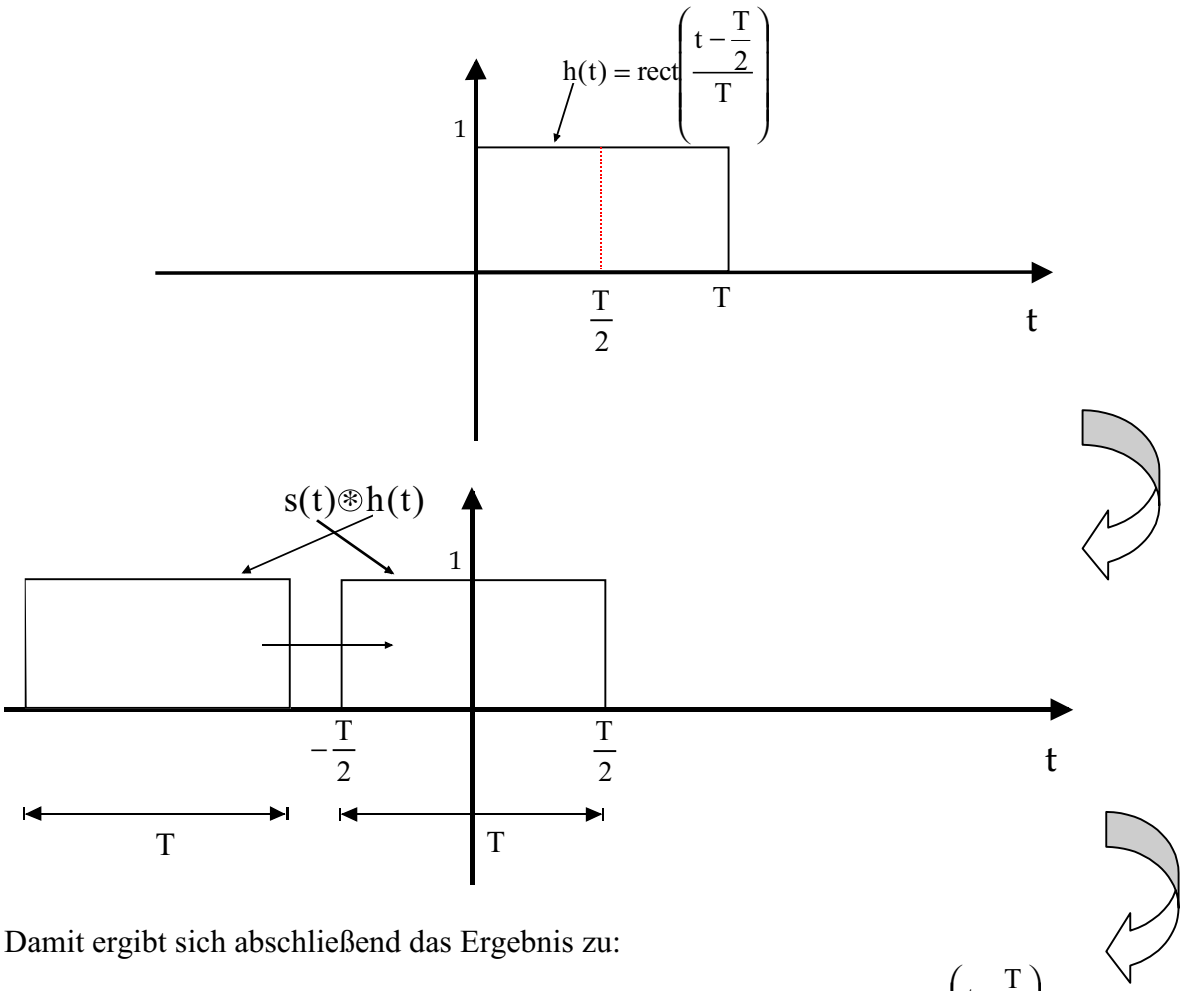


Abbildung 4.11: Matched Filter

Skizziert ergeben sich abschließend folgende Verläufe:



© ZESS PB2, Universität-GH Siegen



Damit ergibt sich abschließend das Ergebnis zu:

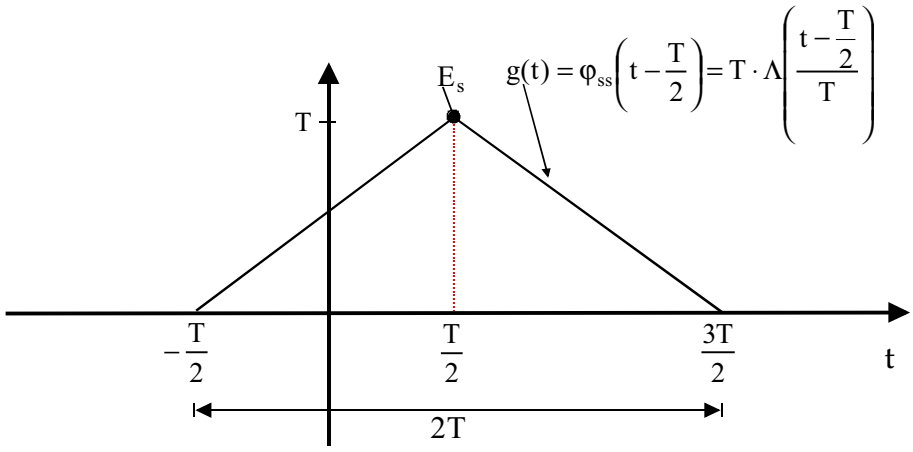


Abbildung 4.12: Berechnung der Ausgangsreaktion

Ergebnis:

Die *Ausgangsamplitude* ist *proportional der Dauer* des Eingangssignals und damit *proportional der Energie* des Eingangssignals. Man kann also die Ausgangsamplitude erhöhen, indem man die Dauer des Eingangssignals vergrößert und die Amplitude des Eingangssignals unverändert läßt.
Somit ist das Matched-Filter ein sehr wichtiger Baustein in der Übertragungstechnik, gerade in den Fällen, wo die Sendesignalamplitude begrenzt durch die Leistung ist.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Anwendungsgebiete:

- Signalübertragung über gestörte Kanäle
- Radarsignalverarbeitung – SAR
- Laserentfernungsmeßtechnik
- Nachrichtenübertragung allgemein

Man kann zeigen, daß ein Matched Filter das Signal-Rauschverhältnis SNR maximiert, aber dazu später mehr.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

5. SYSTEMTHEORIE DER TIEFPAß- UND BANDPAßSIGNALE UND -SYSTEME

In diesem Kapitel soll noch einmal auf die eingangs gestellte Frage nach der Beschreibung von nachrichtentechnischen Systemen näher eingegangen werden. Bereits zu Beginn wurde gesagt, daß man es in der Realität fast ausschließlich mit sehr komplexen Gebilden zu tun hat, deren Beschreibung sehr aufwendig ist. Damit man trotzdem ansatzweise komplexe Systeme beschreiben kann, muß man einige Vernachlässigungen treffen. Man versucht hierbei reale Systeme durch *Abstraktion* und *Idealisierung* auf einfacher zu beschreibende Systeme zurückzuführen, so daß zumindest grundsätzliche Eigenschaften klar erkennbar werden. Mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen lassen sich dann Rückschlüsse auf das reale Verhalten ziehen. Genau diese Idee der Idealisierung wird in der sogenannten *Systemtheorie* verfolgt.
Im folgenden sollen nun zunächst die wichtigsten grundlegenden idealen Systeme hinsichtlich ihres Verhaltens im Zeit- und Frequenzbereich näher untersucht werden. Dazu gehört zunächst das *verzerrungsfreie System*, welches bereits zuvor angesprochen wurde.

5.1. DAS VERZERRUNGSFREIE SYSTEM

Verzerrungsfreie Systeme sind all diejenigen Systeme, welche das Eingangssignal nicht hinsichtlich seiner *Form* verändern. Somit gelten auch diejenigen Systeme als verzerrungsfrei, welche lediglich eine zeitliche Verzögerung der Eingangsanregung hervorrufen, bzw. die Signalamplitude verändern. Die Ausgangsreaktion muß also folgender Gleichung genügen:

$$g(t) = s(t) * h(t) = h_0 \cdot s(t - t_0) = h_0 \cdot s(t) * \delta(t - t_0)$$

Variation der Amplitude

Signalverzögerung

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich daher ganz allgemein für die *Stoßantwort* bzw. Übertragungsfunktion eines verzerrungsfreien Systems :

$$h(t) = h_0 \cdot \delta(t - t_0) \tag{5.1}$$

h_0, t_0 reell und konstant

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Diese Zusammenhänge sollen in einer Skizze näher verdeutlicht werden:

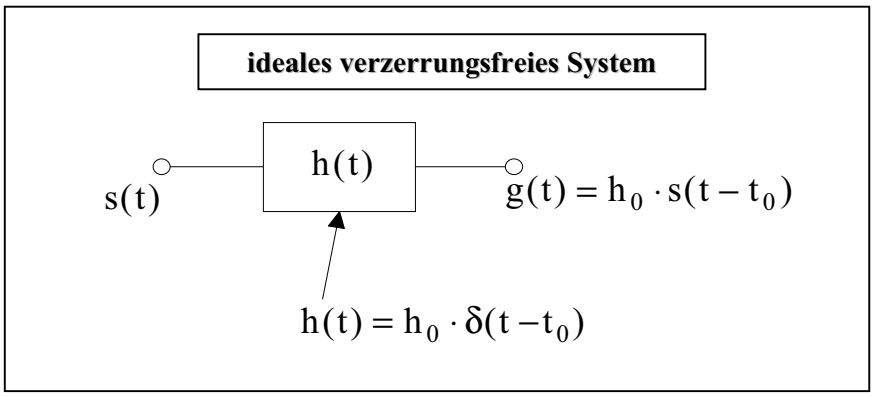


Abbildung 5.1: ideales verzerrungsfreies System

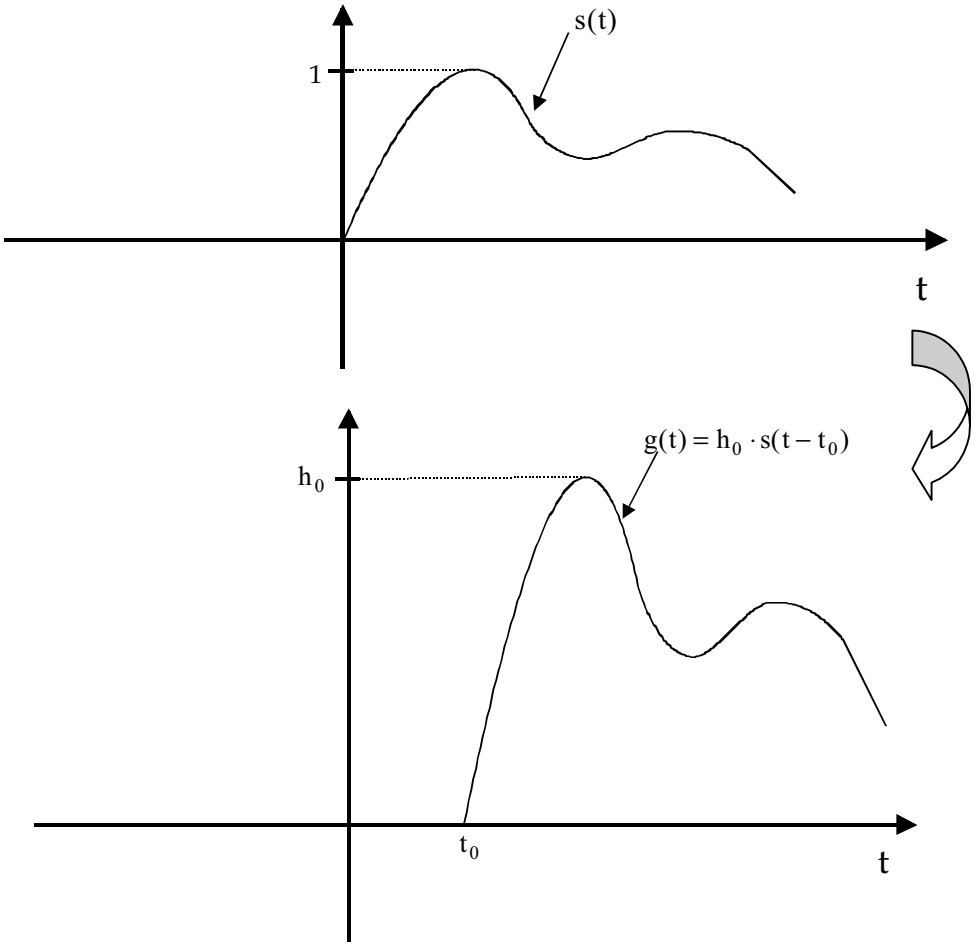


Abbildung 5.2: Eingangssignal und Ausgangsreaktion

Wie sieht nun die Beschreibung eines solchen Systems im Frequenzbereich aus?

Durch Fouriertransformation der Stoßantwort erhält man die *Übertragungsfunktion* des idealen verzerrungsfreien Systems im Frequenzbereich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$h(t) = h_0 \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H(f) = h_0 \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \tag{5.2}$$

Da der Betrag der Übertragungsfunktion für alle Frequenzen konstant ist, handelt es sich bei dem verzerrungsfreien System um einen **Allpaß**. Der Exponentialterm hat lediglich einen zusätzlichen *linearen Phasengang* zur Folge!
Es gilt für Betrag und Phase der Übertragungsfunktion:

$$\boxed{\begin{aligned} |H(f)| &= h_0 \\ \varphi(f) &= \arctan\left(-\frac{\sin(2\pi \cdot f \cdot t_0)}{\cos(2\pi \cdot f \cdot t_0)}\right) = -2\pi \cdot f \cdot t_0 \end{aligned}} \tag{5.3}$$

Skizziert folgt damit für den Betrag:

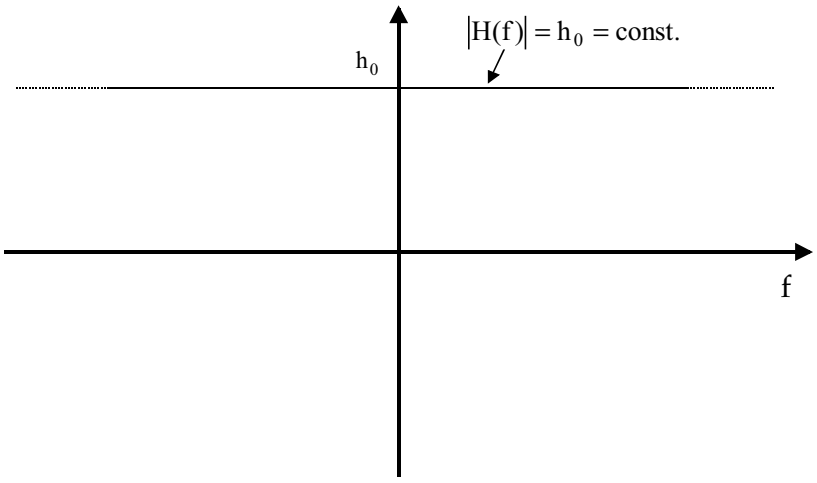


Abbildung 5.3: Skizze des Betrags

und für die Phase ergibt sich:

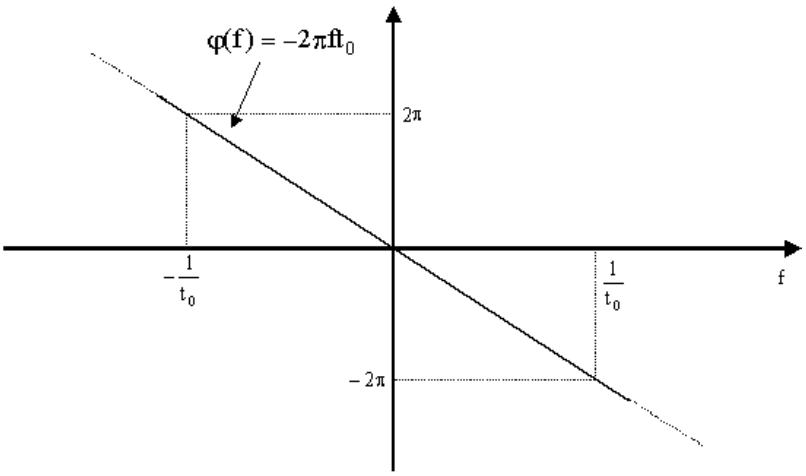


Abbildung 5.4: Skizze der Phase

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Darstellung der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich getrennt nach Betrag und Phase bzw. Real- und Imaginärteil gibt die Haupteigenschaften des Systems wieder, da Frequenzgang und Phasengang ein Signal im Frequenzbereich völlig beschreiben. Diese Art der Darstellung hat noch zusätzlich einen weiteren Vorteil:
Betrachtet man die *Kettenschaltung* zweier Systeme und stellt deren Übertragungsfunktionen jeweils getrennt nach Betrag und Phase auf, so gilt:

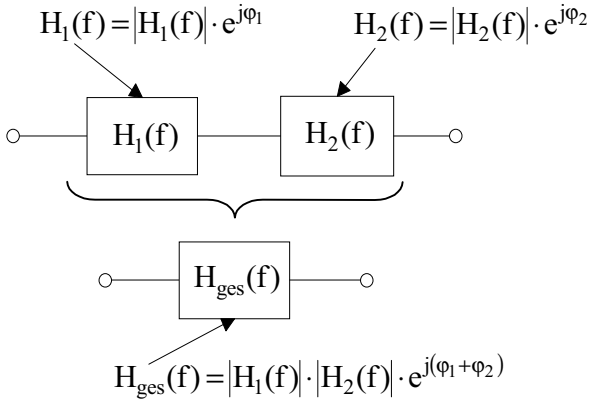


Abbildung 5.5: Kettenschaltung zweier Systeme

Der Betrag der resultierenden Übertragungsfunktion ist gleich dem **Produkt der Beträge** der einzelnen Übertragungsfunktionen und der Phasengang der resultierenden Übertragungsfunktion ist gleich der **Summe der Phasengänge** der einzelnen Übertragungsfunktionen. Diese Zusammenhänge resultieren aus dem Faltungstheorem für Zeit- und Frequenzbereich.
Da man bei Systemen für die Phasengänge häufig keine geschlossenen Ausdrücke angeben kann, läßt sich mit Hilfe dieser Methode **grafisch** die resultierende Übertragungsfunktion vollständig ermitteln. Man braucht lediglich die Beträge der Teilübertragungsfunktionen zu multiplizieren und die Phasen zu addieren.
Diese Zusammenhänge gelten für beliebig viele in Reihe geschaltete Systeme.

Neben Betrag und Phase der Übertragungsfunktion gibt es noch weitere Kenngrößen, die ein System beschreiben. Insgesamt werden folgende Kenngrößen unterschieden:

a) Amplitudengang:

Der Amplitudengang ist der Betrag der Übertragungsfunktion des Systems im Frequenzbereich. Er macht eine Aussage darüber, welche Frequenzen beim Durchlaufen über das System verstärkt, gedämpft, oder auch nicht beeinflußt werden. Systeme mit konstantem Amplitudengang werden Allpässe genannt, da sie alle Frequenzen mit der gleichen Amplitude wichten.

Formelmäßig gilt:

$$\boxed{A(f) = |H(f)|} \tag{5.4}$$

b) Dämpfungsmaß:

Das Dämpfungsmaß ist nichts anderes als der negative, logarithmierte Amplitudengang, wobei dieser noch auf eine konstante Größe **(H_0)** bezogen wird. Die Einheit dieses Ausdrucks ist **dB** (Dezibel). Das negative Vorzeichen kehrt allerdings die Bedeutung dieses Ausdrucks in Bezug

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

auf den Amplitudengang um. Ein positives Dämpfungsmaß ist eine negative Verstärkung in **dB**, also ein Amplitudengang, der betragsmäßig kleiner als **1** ist. Ein negatives Dämpfungsmaß hingegen ist eine positive Verstärkung in **dB** und damit ein Amplitudengang der betragsmäßig größer als **1** ist.
Die Betrachtung von logarithmierten Größen hat einige Vorteile:

- Algebraische Multiplikationen gehen in Additionen über. Somit kann man das Dämpfungsmaß eines Gesamtsystems, das aus der Reihenschaltung mehrerer Teilsysteme besteht, durch die vorzeichengerechte Addition der Dämpfungsmaße der Teilsysteme bestimmen.
- Durch die Logarithmierung lassen sich sehr große Zahlenbereiche überschaubar abdecken.

Formelmäßig ergibt sich für das Dämpfungsmaß:

$$\boxed{\begin{aligned} a(f) &= -20 \cdot \log\left|\frac{H(f)}{H_0}\right| \quad \text{in} \quad \text{dB} \\ a(f) &= -\ln\left|\frac{H(f)}{H_0}\right| \quad \text{in} \quad \text{Np} \end{aligned}} \tag{5.5}$$

c) Phasengang:

$$\boxed{\varphi(f) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}\right) + k(f)\cdot\pi} \quad k(f) = \begin{cases} 0, & \mathrm{Re}\{H(f)\} \geq 0 \\ 1, & \mathrm{Im}\{H(f)\} < 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

d) Dämpfungswinkel:

$$\boxed{b(f) = -\varphi(f)} \tag{5.7}$$

e) Phasenlaufzeit:
Die Phasenlaufzeit ist der Dämpfungswinkel bzw. Phasengang, bezogen auf die jeweilige Frequenz. Sie macht eine Aussage darüber, welche Laufzeitunterschiede sich für die unterschiedlichen Frequenzen, beim Durchlaufen über das System ergeben. Eine konstante Phasenlaufzeit bedeutet, daß alle Frequenzen beim Durchlaufen über das System gleichmäßig zeitlich verzögert werden, und das Signal somit nicht verzerrt wird.

$$\boxed{t_P(f) = \tau_P(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi \cdot f}} \tag{5.8}$$

f) Gruppenlaufzeit:
Die Gruppenlaufzeit ist die Ableitung des Phasengangs nach der Frequenz. Sie macht eine Aussage darüber wie stark sich die Phasenlaufzeit in Abhängigkeit der Frequenz ändert. Wenn der Phasengang linear ist, ist die Gruppenlaufzeit konstant. Ansonsten ergeben sich für nicht lineare Phasengänge Verzerrungen des Signals beim Durchlaufen über das System.

$$\boxed{t_g(f) = \tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df}} \tag{5.9}$$

Zur Veranschaulichung soll folgende Skizze dienen:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

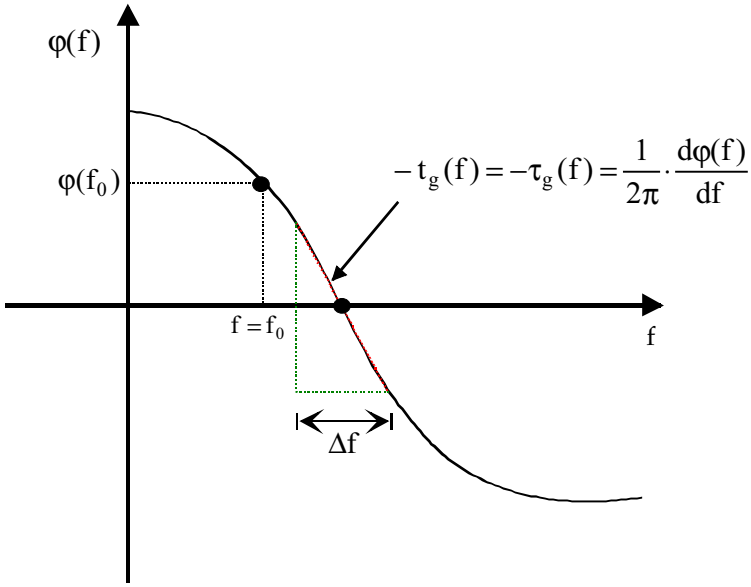


Abbildung 5.6: Gruppenlaufzeit

Nur in dem Bereich **Δf** ist der Phasengang linear und damit die Gruppenlaufzeit konstant. Somit ist das System nur für diese Frequenzen verzerrungsfrei. Ein Signal wird also nur dann verzerrungsfrei übertragen, wenn es aus einer Überlagerung von Frequenzen zusammengesetzt ist, die innerhalb dieses Bereiches **Δf** liegen.

Betrachtet man nun wieder speziell das *verzerrungsfreie System*, so ergeben sich hier für die einzelnen Kenngrößen:

$$a(f) = -20 \cdot \log(h_0) = \text{const.}$$

konstantes, frequenzunabhängiges Dämpfungsmaß

$$b(f) = -\varphi(f) = 2\pi \cdot f \cdot t_0$$

$$\varphi(f) = -2\pi \cdot f \cdot t_0$$

linearer Phasengang

$$t_p(f) = \tau_p(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi \cdot f} = t_0 = \text{const.}$$

konstante Phasen- und Gruppenlaufzeit

$$t_g(f) = \tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df} = -\frac{1}{2\pi}(-2\pi \cdot t_0) = t_0 = \text{const.}$$

- Das verzerrungsfreie System wird also durch ein konstantes, frequenzunabhängiges Dämpfungsmaß, linearen Phasengang und konstante frequenzunabhängige Phasen- und Gruppenlaufzeit beschrieben. Phasen- und Gruppenlaufzeit sind identisch.

Lineare Systeme, deren Übertragungscharakteristiken von diesen Eigenschaften abweichen, verursachen

- Amplitudenverzerrungen
- Phasenverzerrungen

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

5.2. TIEFPAßSYSTEME

Im letzten Kapitel wurde als grundlegendes ideales System das sogenannte ideale, verzerrungsfreie System betrachtet. Nun soll ein weiteres, grundlegendes, ideales System beschrieben werden, nämlich der sogenannte *ideale Tiefpaß*!

5.2.1. DER IDEALE TIEFPAß

Der ideale Tiefpaß wird dadurch charakterisiert, daß er für tiefe Frequenzen bis zu einer bestimmten Grenzfrequenz ein Signal *ideal passieren* läßt und für Frequenzen oberhalb dieser Grenzfrequenz *ideal sperrt*. Somit läßt sich seine Übertragungsfunktion im Frequenzbereich in zwei Bereiche aufteilen, nämlich den *Durchlaßbereich* und den *Sperrbereich*. Innerhalb des Durchlaßbereiches weist der ideale Tiefpaß also ideal, verzerrungsfreies Verhalten auf. Der Übergang vom Durchlaßbereich in den Sperrbereich erfolgt idealerweise schlagartig unstetig. Demnach existiert kein stetiger Übergangsbereich, in dem Frequenzen, die geringfügig größer als die Grenzfrequenz sind, mit zunehmender Frequenz allmählich immer stärker gedämpft werden. An dieser Stelle soll bereits angemerkt werden, daß das hier betrachtete ideale Verhalten in der Realität so nicht zu verwirklichen ist. Dort ist der Übergang zwischen Durchlassen und Sperren immer stetig! Trotzdem lassen sich mit dem hier betrachteten idealen Tiefpaß die grundsätzlichen Eigenschaften realer Tiefpaßsysteme erfassen.

5.2.1.1. STOßANTWORT DES IDEALEN TIEFPASSES

Das beschriebene ideale Tiefpaßverhalten läßt sich im Frequenzbereich mit Hilfe der Rectangular-Funktion beschreiben:

Hier gilt für die Übertragungsfunktion:

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \tag{5.10}$$

Der Durchlaßbereich beschränkt sich auf die angegebene Grenzfrequenz $\mathbf{f_{gT}}$.
Skizziert ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

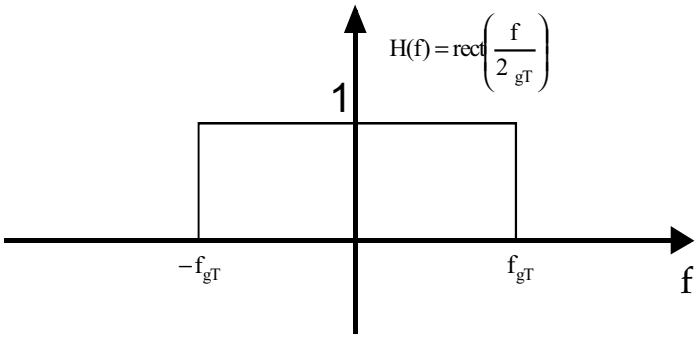


Abbildung 5.7: Übertragungsfuktion

Bildet man die inverse Fouriertransformierte der Übertragungsfunktion **H(f)**, so ergibt sich die Übertragungsfunktion bzw. Stoßantwort des idealen Tiefpasses im Zeitbereich.

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \boxed{h(t) = 2f_{gT} \cdot \text{si}(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)} \tag{5.11}$$

Die Stoßantwort des idealen Tiefpasses ist die zugehörige mit der Grenzfrequenz $\mathbf{f_{gT}}$ gewichtete si-Funktion.
Skizziert ergibt sich im Zeitbereich für die Stoßantwort bzw. Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses:

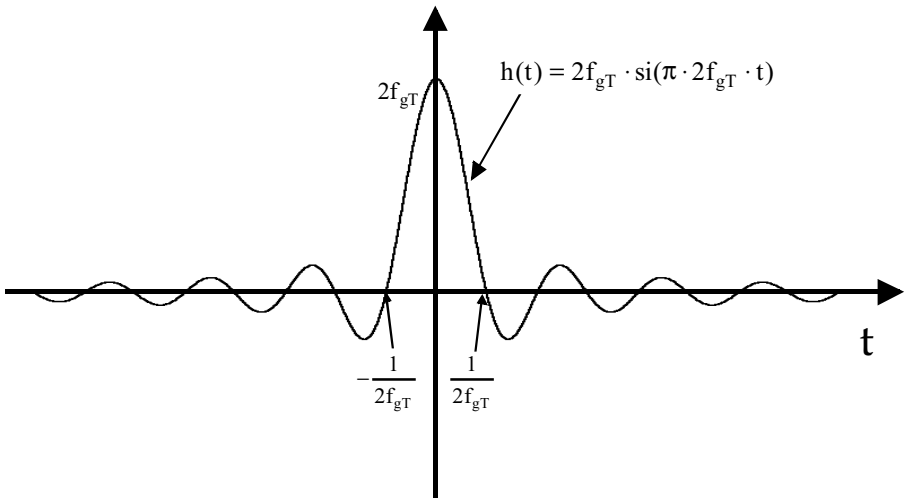


Abbildung 5.8: Stoßantwort des Tiefpasses

Wie man deutlich erkennen kann, handelt es sich hierbei um eine nicht kausale Stoßantwort und damit um ein nicht kausales System.
Bei den bisher angegebenen Gleichungen für die Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses wurde kein zusätzlicher Phasengang berücksichtigt. Da sich das Spektrum betragsmäßig durch einen zusätzlichen Phasengang nicht ändert, ergibt sich im Frequenzbereich unter Berücksichtigung einer Verzögerungszeit betragsmäßig keinerlei Unterschied. Dieser Unterschied macht sich lediglich im Zeitbereich in einer zeitlichen Verschiebung der Stoßantwortfunktion bemerkbar. Unter Berücksichtigung einer Verzögerungszeit ergeben sich folgende abgewandelte Übertragungsfunktionen:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

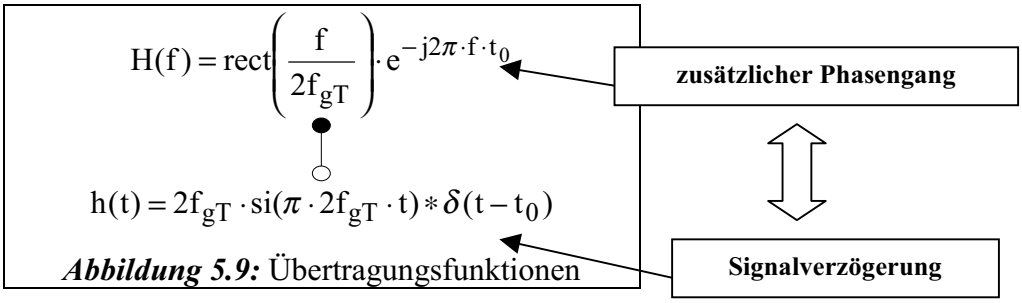


Abbildung 5.9: Übertragungsfunktionen

Für die zeitlich verschobene Stoßantwort ergibt sich somit skizziert:

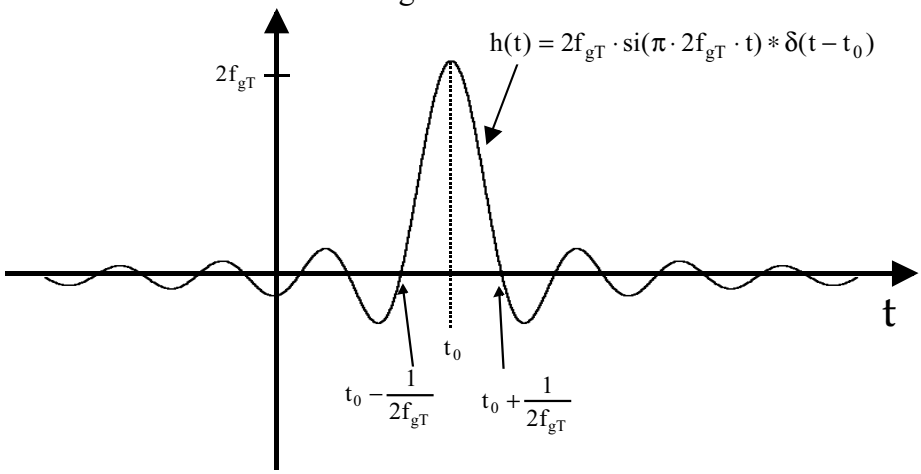


Abbildung 5.10: zeitlich verschobene Stoßantwort

Wenn man nun die Stoßantwort im Zeitbereich betrachtet, so läßt sich beispielsweise die *Signaldauer*, als eine Kenngröße des Systems, bedingt durch die unendliche Dauer des Signals, nicht feststellen. Man behilft sich hierbei mit folgender Überlegung: Approximiert man die Ausgangsreaktion des Systems durch eine endliche Zeitfunktion, so läßt sich doch eine Signaldauer angeben. Damit die Approximation in der Leistungsbetrachtung korrekt ist, muß die von dem approximierten Signal aufgespannte Fläche gleich der Fläche unter der Ausgangsreaktion sein. Der Einfachheit halber bedient man sich als Approximationsfunktion der Rectangular-Funktion. Wie aus Abbildung 5.11 ersichtlich, wird die Maximalamplitude der Approximationsfunktion gleich der Maximalamplitude der Ausgangsreaktion gesetzt.

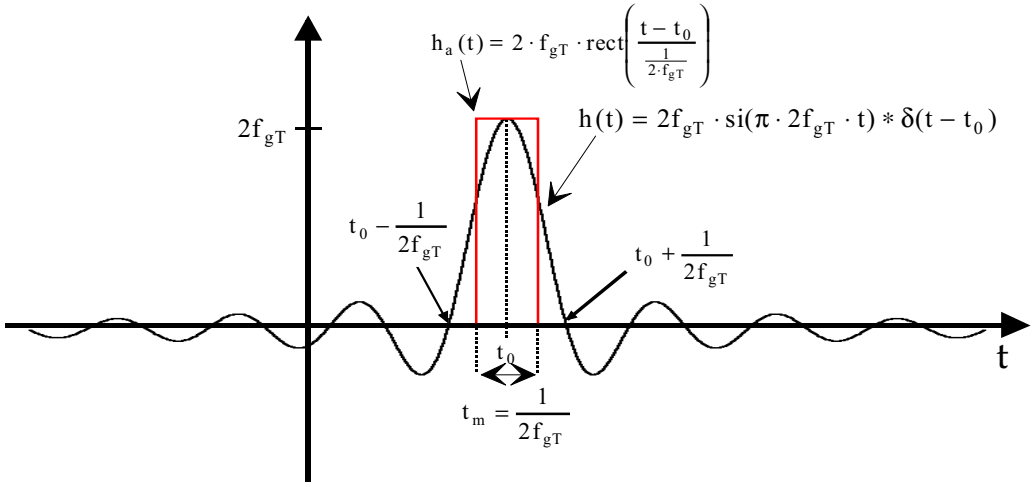
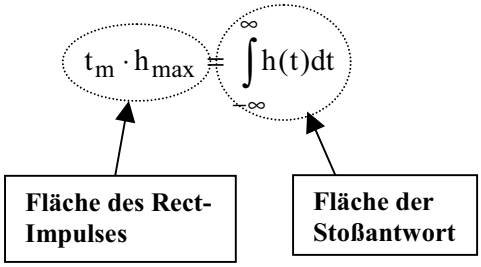


Abbildung 5.11: Approximationsfunktion

Schließlich ergibt sich für die gesuchte Signaldauer der Rectangular-Funktion:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen



Die Fläche der Stoßantwort läßt sich mit Hilfe des Spektrums berechnen. Rein formal wird hierbei die Fouriertransformierte einer bestimmten Frequenz betrachtet. Es gilt ganz allgemein für die Fouriertransformierte eines Signals:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, dt$$

Somit läßt sich doch das Integral über die Zeitfunktion für den Sonderfall **f=0** folgendermaßen ausdrücken:

$$e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot t} = 1$$

$$S(f)\big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \underbrace{e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot t}}_{=1} dt$$

$$\boxed{S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt}$$

Damit ergibt sich für die Dauer $\mathbf{t_m}$ des Rect-Impulses:

$$t_m = \frac{1}{h_{max}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = \frac{1}{h_{max}} \cdot H(0)$$

$$= \frac{1}{2f_{gT}} \cdot 1$$

$$\boxed{t_m = \frac{1}{2f_{gT}}}$$

Es stellt sich also heraus, daß die Signaldauer $\mathbf{t_m}$ eines idealen Tiefpasses umgekehrt proportional seiner Grenzfrequenz bzw. Bandbreite ist.

Betrachtet man nun das sogenannte **Zeit-Bandbreite-Produkt**, so ergibt sich

$$t_m \cdot f_{gT} = \frac{1}{2 \cdot f_{gT}} \cdot f_{gT} = \frac{1}{2} = \text{const.}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Das Ergebnis ist eine Konstante und stellt somit einen Spezialfall dar. Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein für beliebige Tiefpaßsysteme, wobei der Wert dieser Konstanten jeweils variieren kann.
Das Zeit-Bandbreite-Produkt besagt, daß das Spektrum eines Zeitsignals hinsichtlich seiner Ausdehnung umgekehrt proportional zur Dauer des Signals im Zeitbereich ist. Dieser Sachverhalt wurde ja bereits bei der Herleitung des Ähnlichkeitstheorems (2.38) festgestellt. Verringert man also bei einem Zeitsignal die Pulsbreite, so erhöht sich automatisch die Bandbreite des Signals. Wird hingegen die Pulsbreite erhöht, so verringert sich die Bandbreite des Signals. Man benötigt also für die Darstellung eines schmalen Pulssignals einen größeren Frequenzbereich, als zur Darstellung eines breiten Pulssignals. Auf diese Zusammenhänge wird bei der Modulation noch näher eingegangen.

Da die Stoßantwort des idealen Tiefpasses eine Schwingung darstellt, deren Amplitude mit zunehmender Zeit immer weiter abnimmt, bis sie einen bestimmten Wert (hier **0**) erreicht hat, handelt es sich hierbei offensichtlich um einen Einschwingvorgang. Die Stoßantwort schwingt sich also solange ein, bis sie einen konstanten Wert erreicht hat, den sie dann beibehält. In diesem Zusammenhang ist es natürlich interessant, wie stark die Stoßantwort in Bezug auf diesen konstanten Wert überschwingt bzw. wie stark die Schwingung gedämpft wird.

Als Maß für das Überschwingen bzw. die Dämpfung der Stoßantwort definiert man somit das Verhältnis der Amplitude des Hauptmaximums zu der Amplitude der dem Betrage nach größten Nebenschwingung.
Skizziert ergibt sich hier:

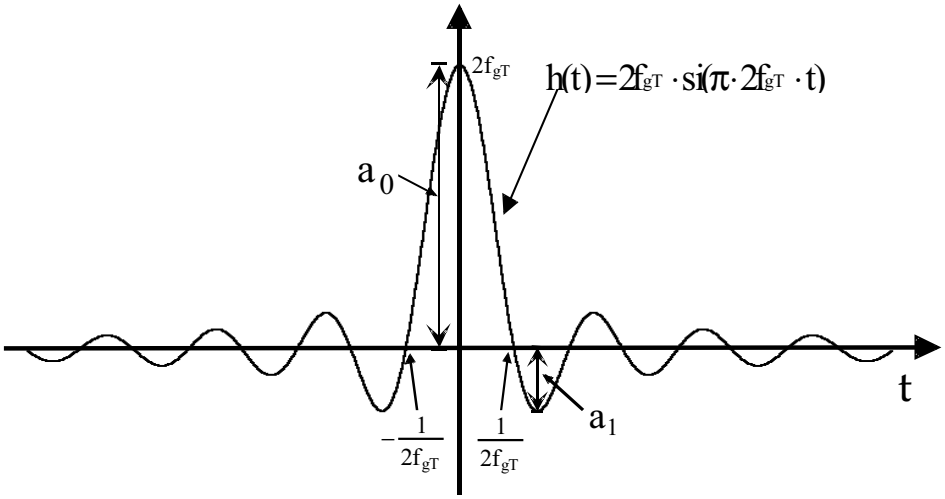


Abbildung 5.12: Überschwingen

Somit gilt:

$$\ddot{u} = \frac{a_1}{a_0} = \frac{\textbf{größtes Nebenmaximum}}{\textbf{Hauptmaximum}}$$

Aus den Eigenschaften der si-Funktion ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\ddot{u} = \frac{a_1}{a_0} = \frac{si\left(\pi \cdot 2 \cdot f_{gT} \cdot \frac{1{,}4303}{2 \cdot f_{gT}}\right)}{si(0)} = \frac{\sin(1{,}4303 \cdot \pi)}{(1{,}4303 \cdot \pi) \cdot 1} = 21{,}7\%$$

Das Maß für die Überschwingungen ist ein konstanter Wert und damit unabhängig von der Grenzfrequenz des Tiefpasses. Diese Konstanz der Überschwinger wird auch als *Gibb´sches Phänomen* bezeichnet.
Was passiert nun, wenn man den idealen Tiefpaß statt mit einem Stoß, mit einer Sprungfunktion anregt?

5.2.1.2. SPRUNGANTWORT DES IDEALEN TIEFPASSES

Die Sprungantwort ergibt sich aus dem Faltungsintegral, was eben im Falle der Sprunganregung das laufende Integral über die Stoßantwort ist. Somit gilt:

$$a(t) = s(t) * h(t) = \sigma(t) * h(t) = h(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

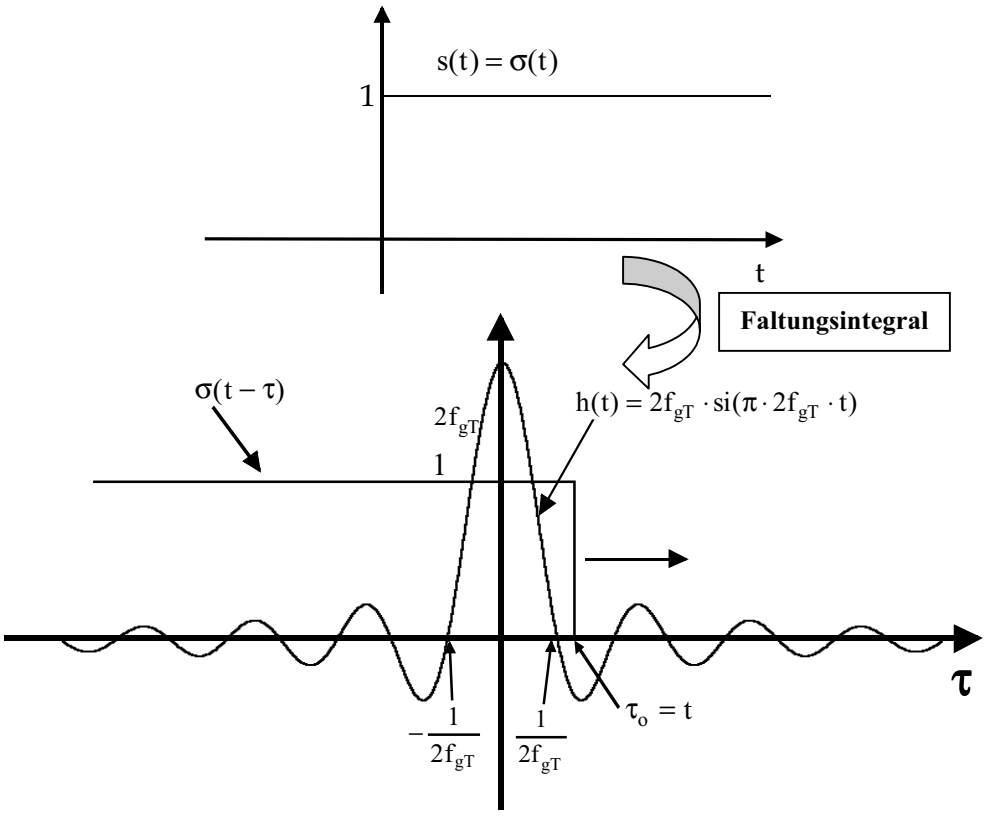


Abbildung 5.13: Sprungantwort aus Faltungsintegral

Setzt man nun ganz formal das Integral über die Stoßantwort mit (5.11) an, so ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} 2f_{gT} \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot \tau)\mathrm{d}\tau \\
&= 2f_{gT}\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{si}(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot \tau)\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} \mathrm{si}(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot \tau)\mathrm{d}\tau \right]
\end{aligned}
$$

Das in dem Klammerausdruck auftauchende Integral über die Sinusfunktion ist auch in der Mathematik als sogenannte Integral-Sinus Funktion bekannt.
Diese Funktion ist ganz allgemein definiert als

$$\mathrm{Si}(x) = \int_{0}^{x} \mathrm{si}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.12}$$

Bedient man sich nun der Eigenschaften der Integralsinusfunktion, so läßt sich die Sprungantwort des idealen Tiefpasses berechnen. Dazu muß man natürlich zunächst klären, welche Eigenschaften die Integralsinus-Funktion hat, damit man das bestimmte, unendliche Integral lösen kann.
Betrachtet man die Symmetrie, so ergibt sich zunächst ganz formell für negative **x**:

$$\mathrm{Si}(-x) = \int_{\xi_u=0}^{\xi_o=-x} \mathrm{si}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Da die si-Funktion eine gerade Funktion ist, gilt unter Anwendung einer geeigneten Substitution:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= -u \\ \mathrm{d}\xi &= -\mathrm{d}u \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} u_o &= -\xi_o = -(-x) = x \\ u_u &= -\xi_u = 0 \end{aligned}}$$

$$\mathrm{Si}(-x) = -\left[\int_{u_u=0}^{u_o=x} \mathrm{si}(-u)\mathrm{d}u \right]$$

Unter Berücksichtigung der Achsensymmetrie der si-Funktion folgt somit:

$$\boxed{\mathrm{si}(-u) = \mathrm{si}(u)}$$

$$\boxed{\mathrm{Si}(-x) = -\int_{0}^{x} \mathrm{si}(u)\mathrm{d}u = -\mathrm{Si}(x)} \tag{5.13}$$

Das Ergebnis zeigt, daß es sich bei der Integralsinusfunktion um eine ungerade Funktion handelt.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Weiterhin läßt sich unter Berücksichtigung der Achsensymmetrie der si-Funktion der unendliche Integralausdruck auch schreiben als

$$\mathrm{Si}(\infty) = \int_0^\infty \mathrm{si}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)\mathrm{d}t$$

Betrachtet man nun die Fouriertransformierte der si-Funktion an der Stelle **f=0** so erhält man:

$$\mathcal{F}\{\mathrm{si}(t)\}\big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$$

=1 für f=0

Das gesuchte Integral stellt somit im Frequenzbereich den Sonderfall **f=0** dar! Somit läßt sich also der Wert des gesuchten Integrals mit Hilfe der Fouriertransformierten der si-Funktion ermitteln. (Es sei an dieser Stelle nur angemerkt, daß die Integralsinusfunktion nicht mit der Fouriertransformierten der si-Funktion hinsichtlich ihrer Schreibweise (Großbuchstaben) verwechselt werden darf !)

$$\mathrm{Si}(\infty) = \frac{1}{2}\cdot \mathcal{F}\{\mathrm{si}(t)\}\big|_{f=0} = \frac{1}{2}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}\,\mathrm{d}t\big|_{f=0}$$

Mit der Fouriertransformierten der si-Funktion unter Anwendung des Ähnlichkeitstheorems (2.38):

$$\mathrm{Si}(\infty) = \frac{1}{2}\cdot \mathcal{F}\left\{s(t) = \mathrm{si}\left(\frac{\pi}{\pi}t\right)\right\}\Big|_{f=0} = \frac{1}{2}\cdot S(f=0)$$

$$\mathrm{Si}(\infty) = \frac{1}{2}\cdot \pi\cdot \mathrm{rect}(\pi f)\big|_{f=0} = \frac{\pi}{2}$$

Somit ergibt sich aus der Achsensymmetrie der si-Funktion als weitere wichtige Eigenschaft der Integralsinusfunktion:

$$\boxed{\mathrm{Si}(\infty) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{si}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{si}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} = -\mathrm{Si}(-\infty)} \qquad (5.14)$$

Dieses Ergebnis läßt sich nun für die Berechnung der Sprungantwort des idealen Tiefpasses verwenden. Es ergibt sich somit, nachdem das Argument der si-Funktion mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf die richtige Form gebracht wurde:

$$a(t) = 2\cdot f_{gT}\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{si}(\pi\cdot 2\cdot f_{gT}\cdot t)\mathrm{d}t + \int_0^t \mathrm{si}(\pi\cdot 2\cdot f_{gT}\cdot t)\mathrm{d}t\right]$$

Substitution

$$\xi = \pi\cdot 2\cdot f_{gT}\cdot t$$
$$\mathrm{d}\xi = \pi\cdot 2\cdot f_{gT}\cdot \mathrm{d}t$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$= \frac{2 \cdot f_{gT}}{\pi \cdot 2 \cdot f_{gT}} \cdot \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{0} si(\xi)\,d\xi}_{=\frac{\pi}{2}} + \int_{0}^{\pi \cdot 2 \cdot f_{gT} \cdot t} si(\xi)\,d\xi \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\pi + Si(\pi \cdot 2 \cdot f_{gT} \cdot t) \right]$$

$$\boxed{a(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t)} \qquad (5.15)$$

Die Sprungantwort ergibt sich also aus einer Integralsinusfunktion mit überlagertem Gleichanteil.

Wendet man hierbei die Eigenschaften für das Verhalten der Integralsinusfunktion im Uendlichen aus (5.14) an, so gilt:

$$\lim_{t \to \infty} a(t) = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{t \to -\infty} a(t) = \lim_{t \to -\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(-\infty) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

Für den Sonderfall **t=0** erhält man:

$$a(t = 0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t) \right]_{t=0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(0) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Abschließend gilt für den Zusammenhang zwischen **a(t)** und **a(-t):**

$$a(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t)$$

$$\Downarrow$$

$$a(-t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(-\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t)$$

$$\downarrow \quad \boxed{Si(-x) = -Si(x)}$$

$$a(-t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(-\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} Si(\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{Erweiterung}} \underbrace{- \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} Si(\pi \cdot 2 f_{gT} \cdot t)}_{= -a(t)}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$a(-t) = 1 - a(t) \tag{5.16}$$

Skizziert ergibt sich somit für die Sprungantwort folgender Verlauf:

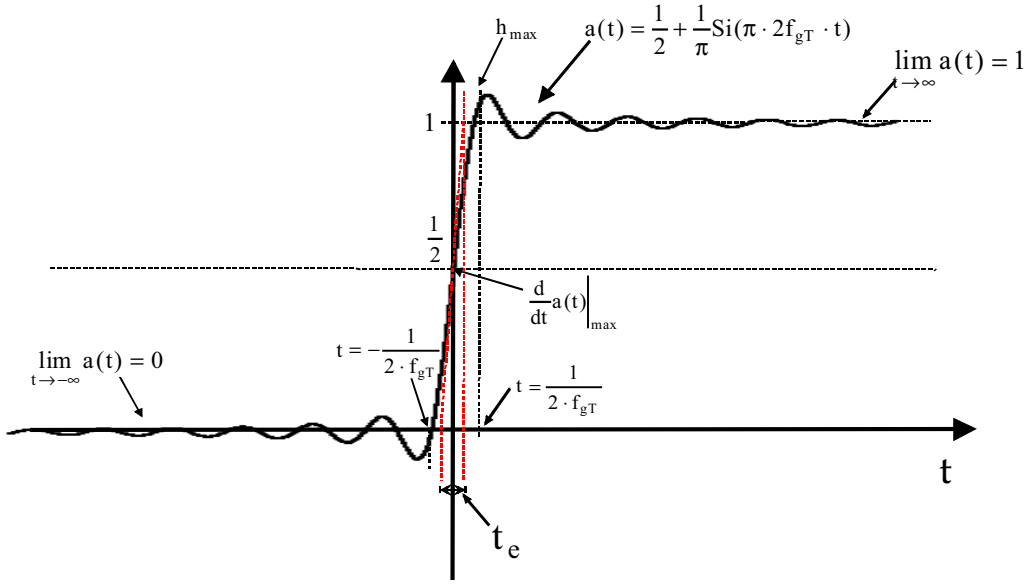


Abbildung 5.14: Sprungantwort

Für die sogenannte *Einschwingzeit* der Sprungantwort definiert man die Anstiegszeit derjenigen Rampenfunktion, welche die maximale Steigung der Sprungantwort besitzt und deren Höhe gleich der maximalen Höhe der Sprungantwort ist.
Somit gilt:

$$t_e = \frac{a(\infty) - a(-\infty)}{\left.\frac{d}{dt}a(t)\right|_{max}} = \frac{1-0}{h(t)|_{max}} = \frac{1}{h(0)} = \frac{1}{2 \cdot f_{gT}} \tag{5.17}$$

Folgende Skizze verdeutlicht noch einmal die Zusammenhänge für die Einschwingzeit:

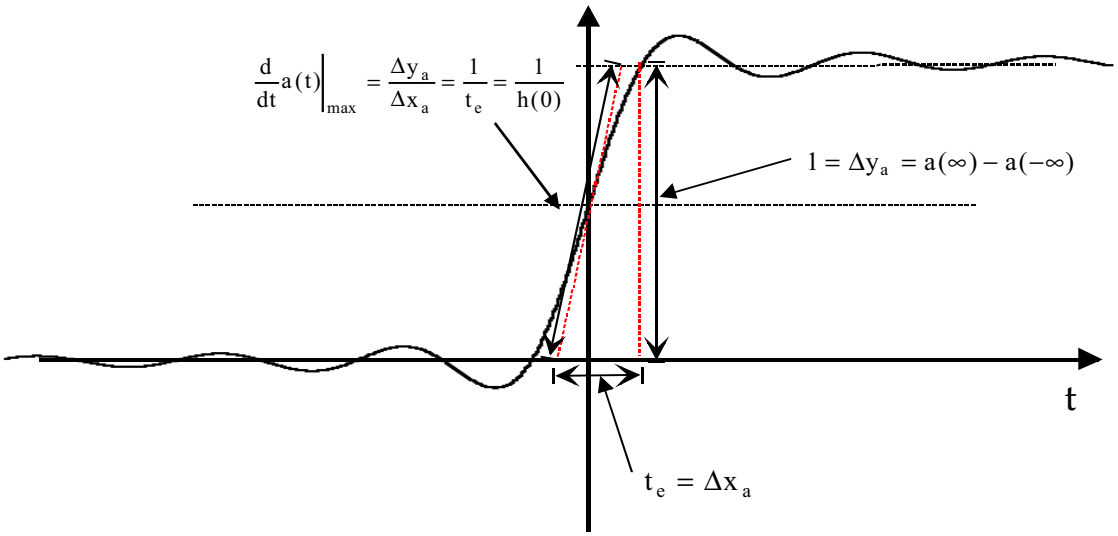


Abbildung 5.15: Zusammenhang für die Einschwingzeit

Wie man erkennen kann, folgt das Ergebnis für die Einschwingzeit aus dem Steigungsdreieck.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Da auch die Sprungantwort einen Einschwingvorgang darstellt, lassen sich auch hier Betrachtungen hinsichtlich des Überschwingens durchführen. Bei der Sprungantwort von Tiefpässen wird als Maß für das Überschwingen $\mathbf{\ddot{u}_a}$ das Verhältnis der Abweichung des Maximums der Sprungantwort $\mathbf{a_0=a_{max}}$ von dem Wert der Sprungantwort im eingeschwungenen Zustand $\mathbf{a(\infty)}$ zu diesem Wert $\mathbf{a(\infty)}$ definiert.

Es gilt also:

$$\ddot{u}_a = \frac{a_0 - a(\infty)}{a(\infty)} = \frac{a_{max} - a(\infty)}{a(\infty)}$$

$$= \frac{a\left(\frac{1}{2 \cdot f_{gT}}\right) - a(\infty)}{a(\infty)} = \frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\left(\frac{\pi \cdot 2 \cdot f_{gT} \cdot 1}{2 \cdot f_{gT}}\right)\right] - 1}{1}$$

Der Wert der Integralsinusfunktion läßt sich aus einer Integraltabelle ablesen

$$\boxed{\mathrm{Si}(\pi) = 1.852 \cdot \frac{\pi}{\pi} = 0.5895 \cdot \pi}$$

$$\ddot{u}_a = \frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot 0.5895 \cdot \pi\right] - 1}{1} = \frac{0.0895}{1} = 8.95\% \qquad (5.18)$$

Das Maß für das Überschwingen ist also auch hier konstant und unabhängig von der Grenzfrequenz des Tiefpasses! (Gibb´sches Phänomen)

Somit gilt eben auch:

$$\lim_{f_g \to \infty} \ddot{u}_a = 8.95\% \qquad \lim_{f_g \to \infty} t_e = \frac{1}{2f_{gT}} \to 0$$

Für den Grenzfall ergibt sich skizziert:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

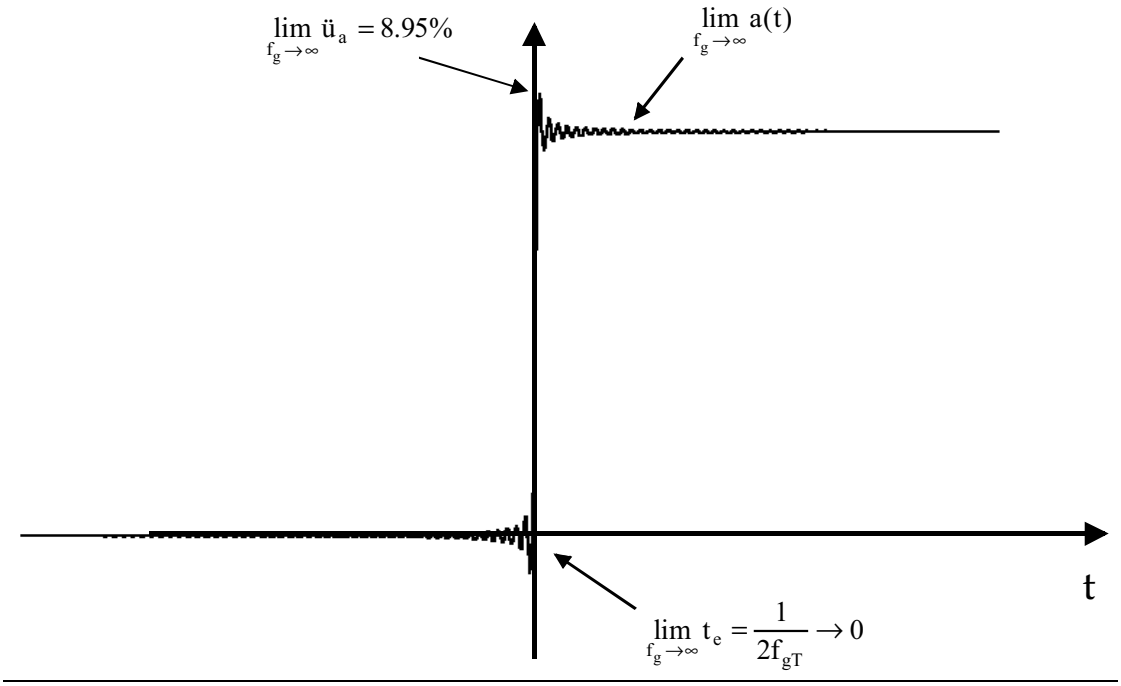


***Abbildung 5.16**:* Grenzfall

5.2.1.3. Approximation des idealen Tiefpasses durch kausale LTI-Systeme

In den vorigen Kapiteln wurde sowohl die Stoßantwort als auch die Sprungantwort eines idealen Tiefpasses hergeleitet. Wie der Name schon sagt, repräsentieren diese Funktionen natürlich das Verhalten und die Eigenschaften eines *idealen Tiefpasses*. Derartige Eigenschaften sind aber in dieser Form in der Realität nicht zu verwirklichen. Beide Funktionen weisen nämlich eine unendliche Ausdehnung auf und sind überdies *nicht kausal*. Somit muß man folgende Schritte durchführen, um einen realen, kausalen Tiefpaß durch einen idealen, nicht kausalen Tiefpaß zu approximieren:

***1.)* Die zeitliche Dauer der Stoßantwort muß auf ein endliches Maß beschnitten werden:**

Dies läßt sich im Zeitbereich durch die Multiplikation mit einer idealen Fensterfunktion (Rectangular-Funktion) endlicher Pulsbreite erreichen.

$$h_t(t) = h(t) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = 2f_{gT} \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

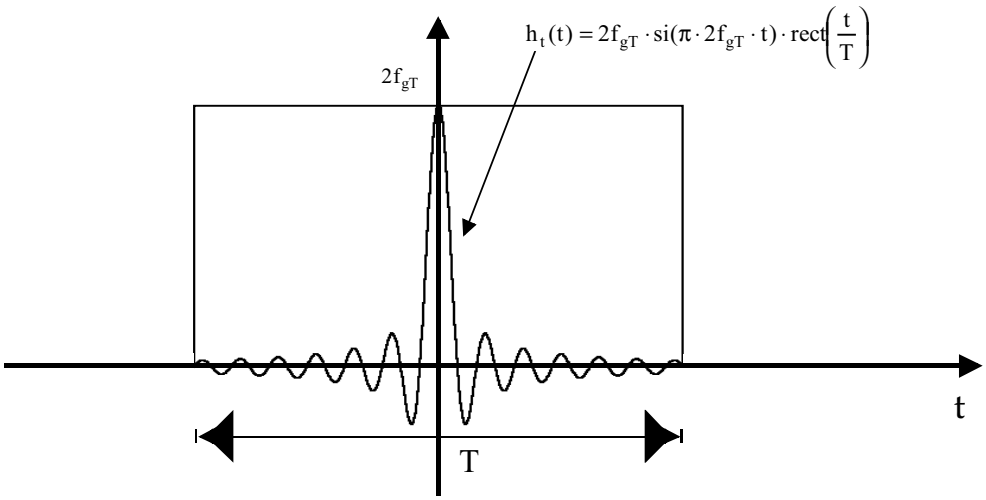


***Abbildung 5.17**:* endliche Stoßantwort der Breite T

Durch diese Maßnahme erhält man eine endliche Stoßantwort der Breite **T**. Um diese Stoßantwort nun kausal zu machen, muß man daß Signal derart verschieben, daß die komplette Stoßantwort im Bereich **t>0** liegt. Damit erhält man die *kausalverschobene endliche Stoßantwort*, für die ganz allgemein gilt:

***2.)* Kausalverschiebung der endlichen Stoßantwort:**

$$h_{ts}(t) = h_t(t - t_0) = h_t(t) * \delta(t - t_0) = \left[h(t) \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] * \delta(t - t_0)$$

Die Verschiebung läßt sich durch das Faltungsprodukt mit einem um $\mathbf{t_0}$ verschobenen Diracstoß darstellen. Technisch stellt sie eine Faltung mit einem idealen Verzögerungsglied dar. Der Wert für die Verschiebung ergibt sich aus der Breite der einhüllenden Fensterfunkion. Da das nicht kausale endliche Stoßantwortsignal eine Breite von **T** besitzt, folgt für die Verschiebung:

$$\boxed{t_0 = \frac{1}{2} \cdot T = \frac{T}{2}}$$

Somit ergibt sich abschließend für die *kausalverschobene endliche Stoßantwort* folgender Ausdruck:

$$h_{ts}(t) = \left[h(t) \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\boxed{h_{ts}(t) = 2f_{gT} \cdot \left[si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)} \qquad (5.19)$$

Skizziert ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

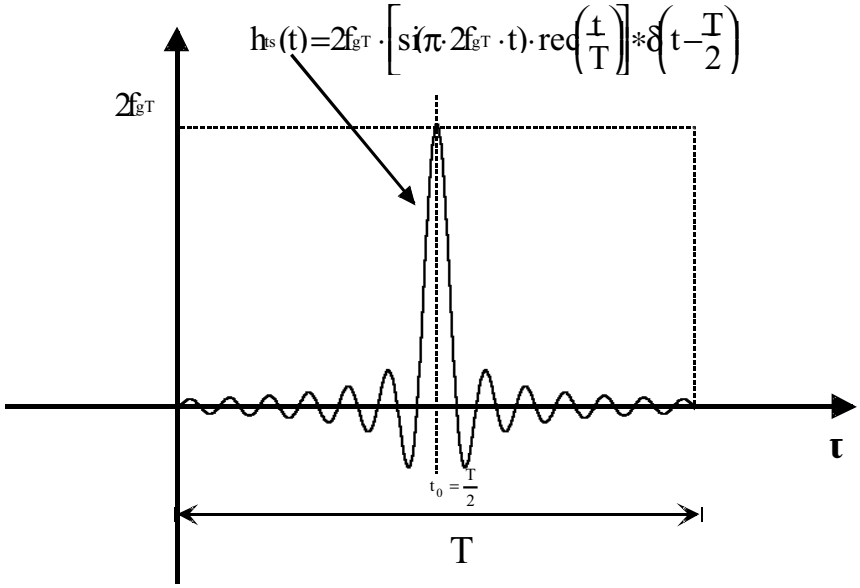


Abbildung 5.18: kausalverschobene endliche Stoßantwort

Welche Folgen haben nun die Maßnahmen hinsichtlich der Funktion des Tiefpasses bzw. welche Veränderungen ergeben sich im Frequenzbereich im Vergleich zur Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses?
Um diese Frage zu klären, braucht man lediglich die Fouriertransformierte der kausalverschobenen, endlichen Stoßantwort zu bilden und mit der ursprünglichen Übertragungsfunktion zu vergleichen.
Führt man also ganz formal eine Fouriertransformation durch, so ergibt sich :

$$h_{ts}(t)=\underbrace{\left[\underbrace{2\cdot f_{gT}\cdot si(\pi\cdot 2f_{gT}\cdot t)}\cdot\underbrace{rect\left(\frac{t}{T}\right)}\right]}*\underbrace{\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)}$$

$$H_{TS}(f)=\left[rect\left(\frac{f}{2\cdot f_{gT}}\right)*T\cdot si(\pi\cdot f\cdot T)\right]\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot\frac{T}{2}}$$

H(f

zusätzlicher linearer Phasengang

Die Übertragungsfunktion der realen Stoßantwort im Frequenzbereich ergibt sich also aus der ursprünglichen Übertragungsfunktion der idealen Stoßantwort durch Faltung mit einer si-Funktion und Multiplikation mit einem zusätzlichen Exponentialterm. Was das Amplitudenberagsspektrum angeht, hat der Exponentialterm keinerlei Auswirkungen. Er hat lediglich einen zusätzlichen linearen Phasengang zur Folge, der nicht weiter stört.

Welche Folgen die Faltung mit der si-Funktion hat, soll mit einer Skizze verdeutlicht werden.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

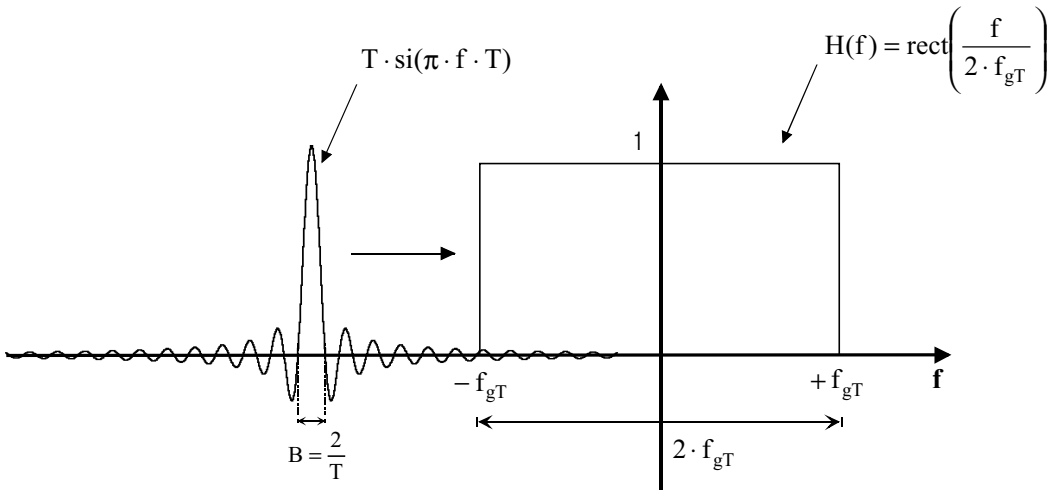


Abbildung 5.19: Faltung mir der si-Funktion

Das Ergebnis dieser Faltungsoperation sieht folgendermaßen aus:

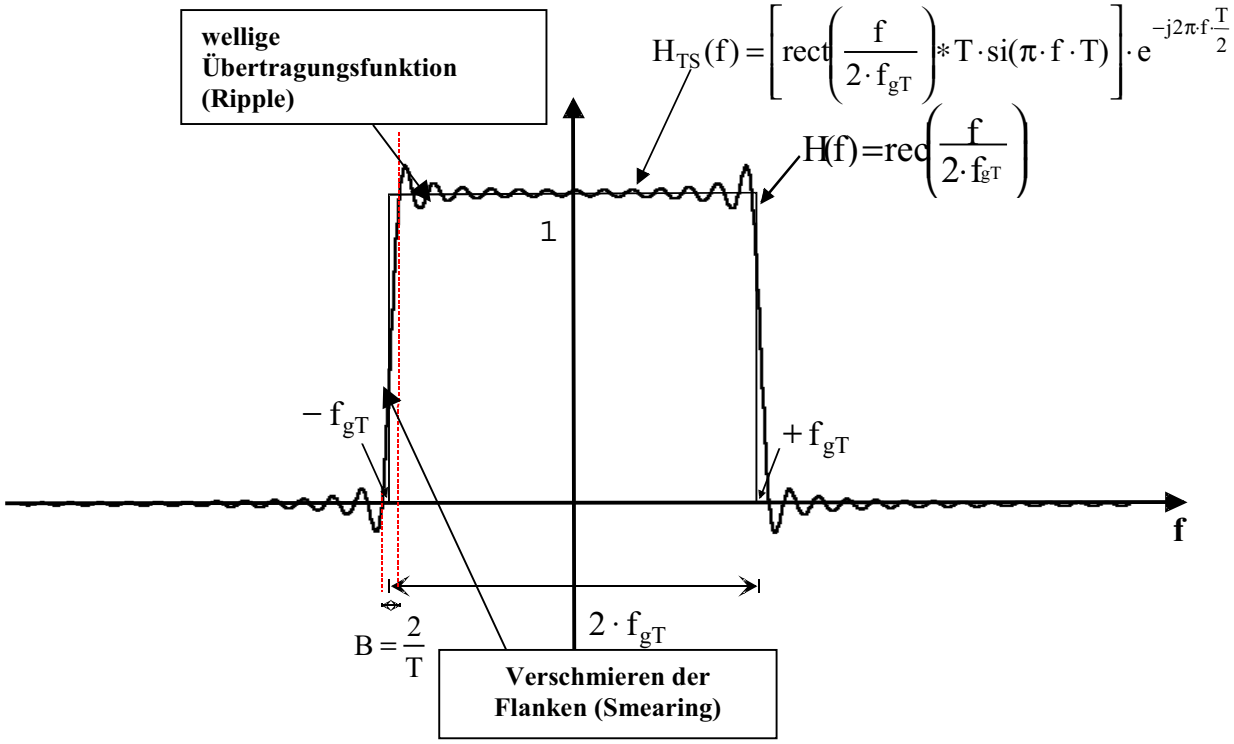


Abbildung 5.20: Ergebnis dieser Faltungsoperation

Die reale Übertragungsfunktion weicht also von der idealen Form ab. Zunächst einmal weist sie *welligen Charakter* auf. Dieses Phänomen wird auch als **Ripple** bezeichnet und wird durch die negativen Nebenmaxima der si-Funktion hervorgerufen. Je niedriger die Pulsbreite der Fensterfunktion im Zeitbereich, desto niedriger ist die Frequenz der si-Funktion im Frequenzbereich. Damit wird die Übertragungsfunktion umso welliger, da eben die gesamte si-Funktion im Frequenzbereich verbreitert und feiner aufgelöst wird.
Zusätzlich hat die Faltung mit der si-Funktion zur Folge, daß die senkrechten *Flanken* des idealen Tiefpasses *verschmiert* und *verbreitert* werden. Dieses Phänomen wird auch als **smearing** bezeichnet. Verantwortlich für diesen Effekt ist die Hauptkeule der si-Funktion, da

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

diese den Hauptanteil des Faltungsintegrals ausmacht und damit den steilen Anstieg der Übertragungsfunktion verursacht. Wertemäßig ergibt sich eine Flankenverbreiterung um die Breite der Hauptkeule. Damit gilt für die Verbreiterung **B**:

$$\boxed{B = \frac{1}{T} + \frac{1}{T} = \frac{2}{T}}$$

Diese Welligkeit hat zur Folge, daß der *Durchlaßbereich des Tiefpasses vergrößert* wird. Je breiter die si-Funktion ist, desto stärker werden die Flanken verbreitert und desto größer wird damit der Durchlaßbereich des Tiefpasses.
Die Eigenschaften des Tiefpasses lassen sich also durch die Wahl der Fensterfunktion sehr stark beeinflussen. Somit kann man beliebige Übertragungsfunktionen mit unterschiedlichen Fensterfunktionen erzeugen, die jeweils völlig unterschiedliche Eigenschaften aufweisen, obwohl sie alle auf den gleichen Tiefpass angewandt werden.
Es gilt also ganz allgemein für die Übertragungsfunktion des kausalverschobenen Tiefpasses für beliebige Fensterfunktionen:

$$H_{TS}(f) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot f_{gT}} \right) * \mathcal{F}\{w(t)\} \right] \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \tag{5.20}$$

Verwendet man also zum Beispiel statt einer Rectangular-Funktion eine Dreieck-Funktion gleicher Breite **T** als Fensterfunktion, so gilt für die Übertragungsfunktion des kausalverschobenen Tiefpasses:

$$H_{TS}(f) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot f_{gT}} \right) * \mathcal{F}\left\{ \Lambda\left(\frac{2 \cdot t}{T} \right) \right\} \right] \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0}$$

$$\Downarrow$$

$$H_{TS}(f) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot f_{gT}} \right) * \frac{T}{2} \cdot \mathrm{si}^2\left(\pi \cdot f \cdot \frac{T}{2} \right) \right] \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0}$$

Das Faltungsprodukt ergibt skizziert:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

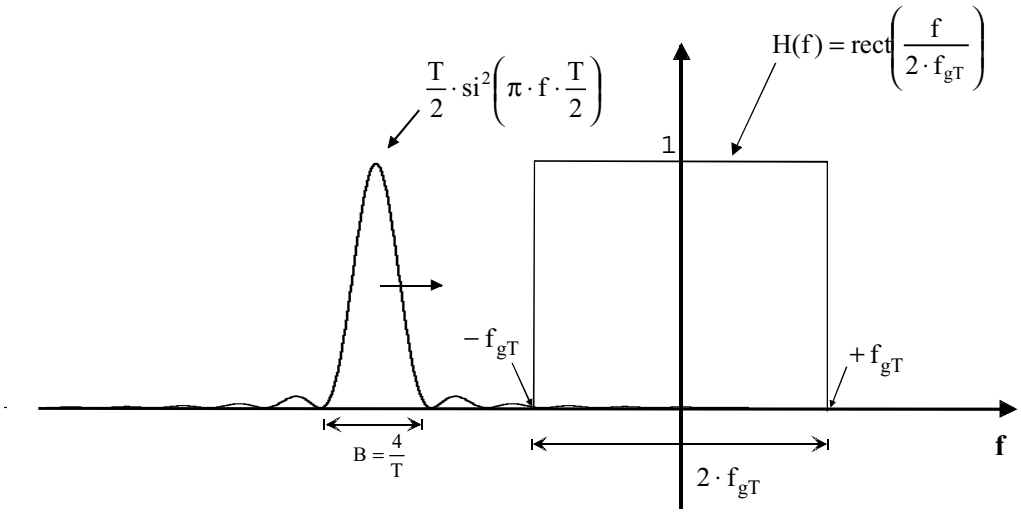


Abbildung 5.21: abgewandelte Übertragungsfunktion des idealen TP

Das Ergebnis stellt wieder die abgewandelte Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses dar, wobei diesmal eben als Fensterfunktion eine Dreieck-Funktion verwendet wurde. Der Wert für $\mathbf{t_0}$ bleibt gleich, da die Breite der Fensterfunktion konstant gewählt wurde. Es ergibt sich:

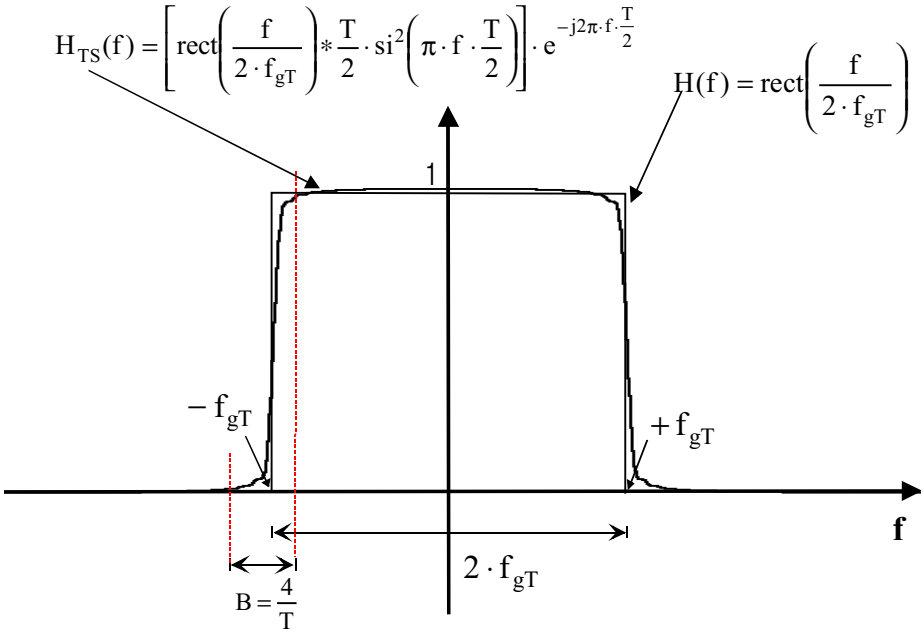


Abbildung 5.22: Stoßantwortfunktion bei Verwendung eines Dreieckimpulses

Das Ergebnis zeigt, daß die reale Stoßantwortfunktion unter Verwendung eines Dreickimpulses als Fensterfunktion einen wesentlich glatteren Verlauf im Frequenzbereich aufweist, als wenn ein Rectangular-Impuls als Fensterfunktion verwendet wird. Der Verlauf dieser Übertragungsfunktion schmiegt sich besser an die ideale Übertragungsfunktion an, da sie keinerlei Welligkeit mehr aufweist. Dies rührt daher, daß die quadrierte si-Funktion im Frequenzbereich keine negativen Nebenmaxima mehr besitzt. Außerdem geht die Welligkeit der quadrierten si-Funktion mit zunehmender Frequenz viel stärker zurück als bei der si-Funktion, da Werte quadriert werden, die dem Betrage nach kleiner als **1** sind.
Allerdings ergibt sich auch hier eine Verbreiterung der Flanken, die im Vergleich zur nicht quadratischen si-Funktion doppelt so breit ist. Dies rührt daher, daß die Hauptkeule der

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

quadratischen si-Funktion ihren Nulldurchgang bei $\frac{2}{T}$ hat. Der Durchlaßbereich ist also ebenfalls verbreitert und zwar um den doppelten Wert als bei der Rectangular-Funktion.

Es gilt also zusammengefaßt ganz allgemein:

Die realisierte Übertragungsfunktion entsteht durch Faltung der Ziel-Übertragungsfunktion mit der Fouriertransformierten der Fensterfunktion.

Die Fouriertransformierte der *Fensterfunktion* sollte folgenden Forderung genügen:

- Sie sollte eine möglichst schmale Hauptkeule besitzen, damit die Flanken der idealen Tiefpassübertragungsfunktion nur geringfügig verbreitert werden und somit der Durchlaßbereich nicht zu stark vergrößert wird. (→geringes Smearing)

- Sie sollte möglichst geringe negative Nebenmaxima aufweisen, damit die Welligkeit gering bleibt.

- Die Nebenmaxima sollten möglichst schnell abfallen, da dies einen schnelleren Abfall der Welligkeit zur Folge hat. (→geringes Ripple)

Unglücklicherweise sind nicht alle Forderungen gleichzeitig zu erfüllen! Somit muß man Prioritäten setzen, um Kompromißlösungen zu finden, die am ehesten den gestellten Anforderungen entsprechen. Hierbei kommt es natürlich darauf an, auf welche Eigenschaften am meisten Wert gelegt wird.

5.2.2. TIEFPAßSYSTEME MIT NICHT IDEALER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Wie im vorigen Kapitel deutlich wurde, sind Tiefpässe in der idealen Form in der Realität nicht zu verwirklichen. Bedingt durch die Beschneidung der zeitlichen Dauer der idealen Tiefpaßübertragungsfunktion im Zeitbereich wird diese im Frequenzbereich hinsichtlich ihrer Form grundsätzlich verändert, da sich das Ergebnis aus der Faltung der idealen Tiefpaßübertragungsfunktion mit der Spektralfunktion der Fensterfunktion ergibt. Die Faltung hat also grundsätzlich Abweichungen von der idealen Form zur Folge, außer wenn man mit einer Linie (Diracstoß) zeitlich beschneiden würde, was aber keinen Sinn macht. Nun gibt es aber in der Realität auch Anwendungsbeispiele, bei denen eine abgewandelte Form der idealen Tiefpaßübertragungsfunktion sogar erwünscht ist. Muß man z.B. die Forderung einhalten, daß Überschwinger minimiert werden sollen, so ist eine Variation der idealen Übertragungsfunktion sogar unumgänglich, da diese in der idealen Form sehr stark überschwingt.
Im Folgenden soll nun eine Methode vorgestellt werden, mit der von der Rechteckform abweichende Tiefpaßübertragungsfunktionen im Frequenz- und Zeitbereich übersichtlich dargestellt und auch realisiert werden können. Dieses Verfahren wird auch als **Echomethode** bezeichnet.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

5.2.2.1. ECHOMETHODE

Das Abtasttheorem besagt, daß man jede kontinuierliche Zeitfunktion aus ihren Abtastproben als eine Summe von si-Funktionen, die mit den Abtastproben gewichtet sind, fehlerfrei darstellen und rekonstruieren kann. Somit gilt ganz allgemein im Falle einer beliebigen Stoßantwort eines Systems folgender Zusammenhang:

$$h(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t - nT)) \tag{5.21}$$

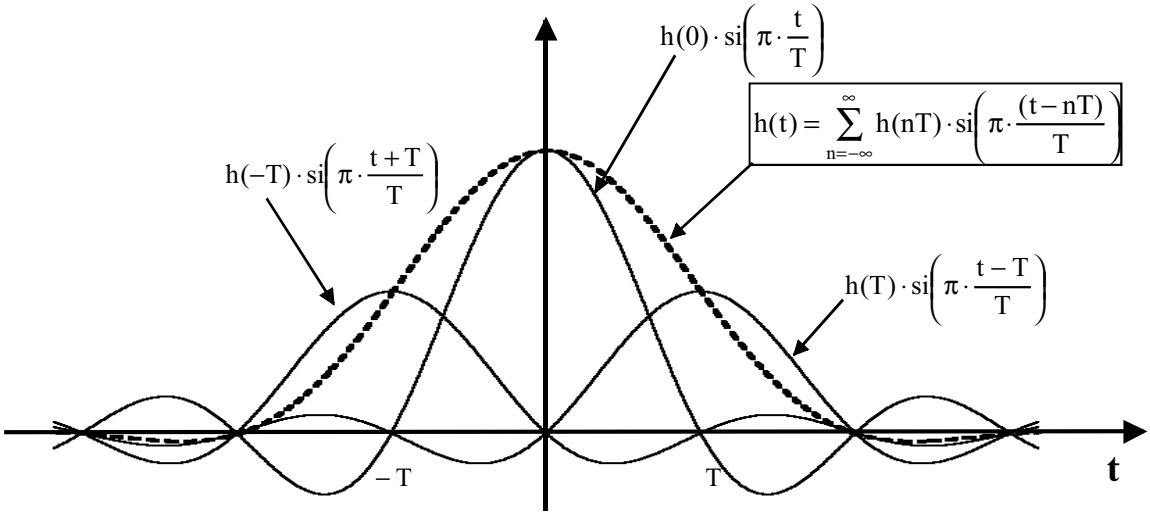


Abbildung 5.23: Summe von si-Funktionen

Die allgemeine Stoßantwort eines beliebigen Systems weicht also von der Stoßantwort eines idealen Tiefpasses durch zusätzliche mit den Abtastproben gewichtete, zeitlich verschobene si-Funktionen ab. Diese werden daher auch Echos genannt. Man kann also eine beliebige kontinuierliche Stoßantwort durch ihre diskreten Abtastwerte erzeugen, indem man die Abtastwerte auf einen idealen Tiefpaß gibt. Die Ausgangsreaktion stellt dann die abgewandelte Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses dar. Dieser Zusammenhang wird besser verdeutlicht, wenn man die zeitliche Verschiebung im Argument der si-Funktion in ein Faltungsprodukt mit einem zeitlich verschobenen Diracstoß umschreibt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

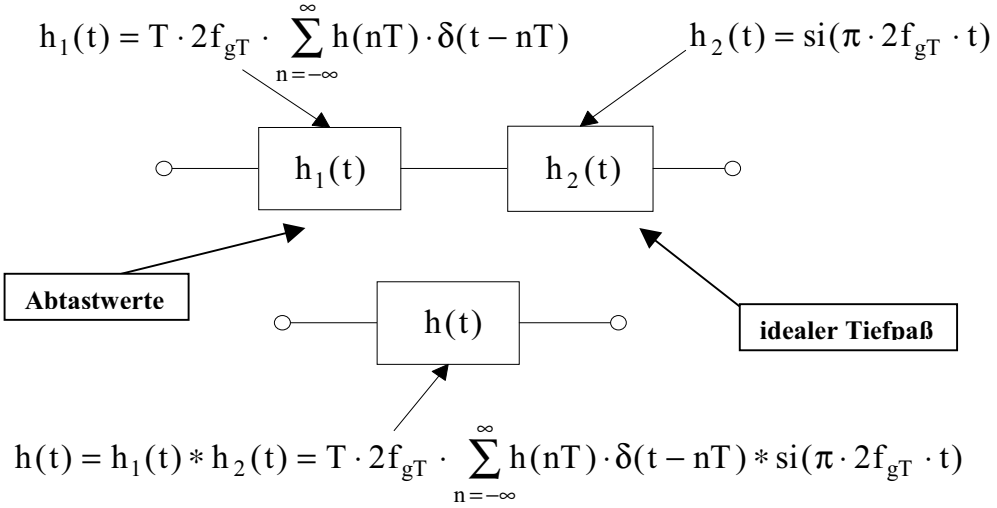
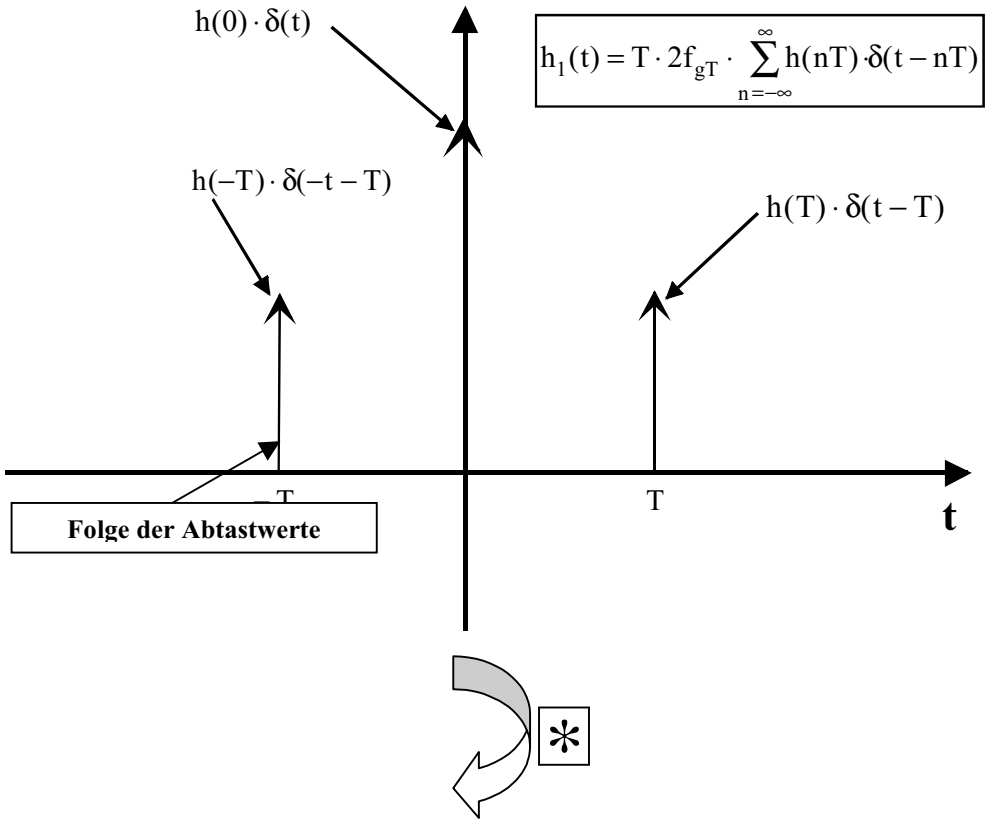


Abbildung 5.24: Zur Echomethode

Die verschobenen si-Funktionen lassen sich also auch durch folgendes Faltungsprodukt darstellen:



© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

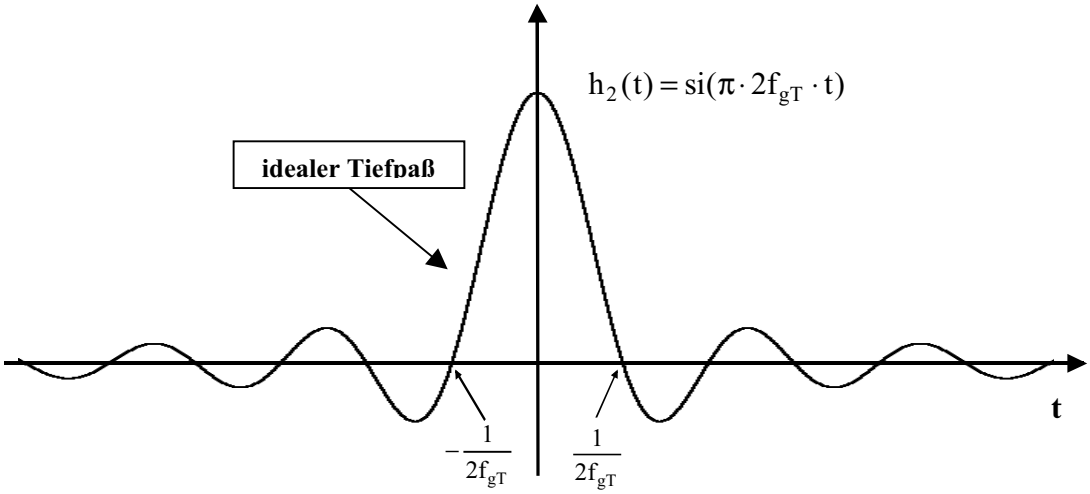


Abbildung 5.25: verschobene si-Funkion als Faltungsprodukt

Das aus der Faltung resultierende Ergebnis sieht man in Abbildung 5.23.

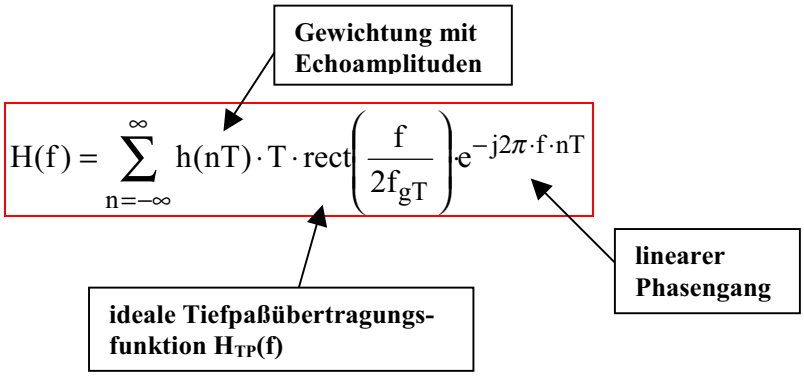
Verwendet man die Schreibweise mit Hilfe eines Faltungsproduktes, so ergibt sich die Fouriertransformierte zu:

$$h(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \cdot \delta(t - nT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H(f) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \cdot e^{-j2\pi fnT} \cdot \left(\frac{1}{2f_{gT}} \right) \cdot rect\left(\frac{f}{2f_{gT}} \right)$$

Kürzt man den Faktor $\mathbf{2f_{gT}}$ so erhält man ganz allgemein für das Spektrum einer beliebigen tiefpaßbegrenzten Stoßantwortfunktion:



(5.22)

Das Spektrum setzt sich also aus der Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses, den Abtastproben der Stoßantwort als Gewichtungsfaktoren und einem linearen Phasenglied zusammen. Die Gewichtungsfaktoren werden auch *Echoamplituden* genannt, da sie die Amplituden der jeweiligen verschobenen si-Funktionen im Zeitbereich darstellen.
Ist das Spektrum der Stoßantwortfunktion gegeben, so gilt für die inverse Fouriertransformierte ganz allgemein mit (2.7):

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t}\, df$$

Da das Spektrum aber bedingt durch die ideale Tiefpaßübertragungsfunktion frequenzmäßig beschränkt ist, ändert sich nichts am Ergebnis, wenn man das vorhandene Spektrum zusätzlich mit einer Rectangular-Funktion derselben Breite im Frequenzbereich multipliziert.

Dies kann man machen, da gilt:

Erweiterung ↓

$$\boxed{\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right)}$$

Damit ergibt sich unverändert für die inverse Fouriertransformierte

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right) \cdot e^{+j2\pi ft} df = \int_{-f_{gT}}^{f_{gT}} H(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

Hierbei wird die frequenzmäßige Beschneidung innerhalb der Integrationsgrenzen berücksichtigt. Möchte man nun lediglich die einzelnen Werte für die Echoamplituden haben, so muß man die kontinuierliche Stoßantwortfunktion an den jeweiligen diskreten Stellen **t=nT** auswerten.
Somit ergibt sich abschließend der Zusammenhang der Echoamplituden mit dem Spektrum der Stoßantwortfunktion zu:

$$\boxed{h(t = nT) = \int_{-f_{gT}}^{f_{gT}} H(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot nT} df} \qquad (5.23)$$

Diese Zusammenhänge gelten natürlich zunächst wieder nur für eine ideale Stoßantwortfunktion und müssen daher auf reale Verhältnisse übertragen werden.
In der Realität bildet man digitale Filter mit Hilfe von Rechnern nach, die man zunächst mit Abtastwerten "füttert" und dann die jeweiligen Berechnungen durchführen läßt. Da man hierbei nur endliche und kausale Berechnungen durchführen kann, muß man die Gleichungen, welche sich auf unendliche Vorgänge beziehen und nicht kausal sind, dementsprechend umformen.
Um nun ein digitales Filter mit einer abgewandelten Tiefpaßübertragungsfunktion zu realisieren muß man daher in folgenden Schritten vorgehen:

1.) Beschneidung der Anzahl der Koeffizienten auf 2N+1

Ganz allgemein gilt ja für die kontinuierliche Stoßantwortfunktion mit (5.21):

$$h(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{h(nT) \cdot \delta(t - nT)}_{\text{diskrete Abtastwerte der Stoßantwort=Echoamplituden}} * \underbrace{\mathrm{si}(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)}_{\text{Stoßantwort des idealen Tiefpasses}}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Kontinuität der Stoßantwort rührt von der Faltung der diskreten Abtastwerte mit der kontinuierlichen Stoßantwort des idealen Tiefpasses. Sowohl die unendliche Summe der Abtastwerte, als auch die kontinuierliche Tiefpaßübertragungsfunktion sind weder endlich, noch kausal. Somit muß man bei der Realisierung des digitalen Filters beide Funktionen dementsprechend bearbeiten und für die digitale Verarbeitung zuschneiden. Da aber die eigentliche digitale Verarbeitung sich nur auf die Summe der diskreten Abtastwerte bezieht, stört dies bei der Realisierung des digitalen Filters nicht weiter und man beschränkt sich daher nur auf die Betrachtung der Abtastwerte. Man stellt sich einfach das gesamte Filter, wie oben bereits verdeutlicht, als eine Hintereinanderschaltung zweier Systeme unterschiedlicher Stoßantworten vor, was ja durch das Faltungsprodukt in obiger Gleichung ausgedrückt wird und beschränkt sich nur auf die Betrachtung des ersten Teilsystems. Für den nachgeschalteten Tiefpaß nimmt man einfach ideale Verhältnisses an.

Beschränkt man sich also auf die unendliche Summe der diskreten Abtastwerte, so muß man zunächst die Anzahl der Koeffizienten auf einen endlichen Wert herabsetzen, da man den Rechner nur mit einer endlichen Zahl von Abtastwerten "füttern" kann und dieser auch nur eine endliche Summe von Abtastwerten berechnen kann. Beschneidet man also die Anzahl der Koeffizienten auf **2N+1** Werte, so erhält man für die tiefpaßbegrenzte Stoßantwortfunktion

$$h_T(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-N}^{N} h(nT) \cdot \delta(t - nT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)$$

Nimmt man für die abgetastete Funktion $\mathbf{h_1(t)}$ (siehe Abbildung 5.24**)** den Fall einer si-Funktion an, so ergibt sich skizziert für die beschnittene Abtastwertfolge:

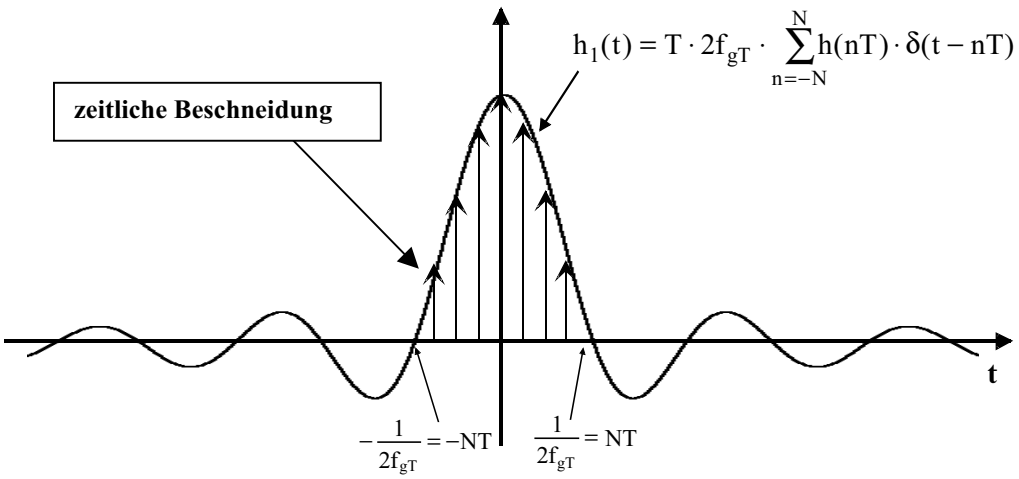


Abbildung 5.26: Abtastwertfolge der si-Funktion

Die Summe der Abtastwerte ist zwar zeitlich beschnitten, aber nicht kausal, da sie Achsensymmetrisch zum Ursprung ist. Somit muß man nun im nächsten Schritt die Stoßantwort $\mathbf{h_1(t)}$ so verschieben, daß sich ein kausaler Verlauf ergibt, also der Wertebereich der diskreten Abtastwerte sich auf positive t beschränkt.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2.) Kausalverschiebung:

Da die endliche Stoßantwortfunktion **2N+1** Werte enthält, muß man eine Verschiebung um $\mathbf{t_0=NT}$ durchführen. Damit ergibt sich dann für die tiefpaßbegrenzte Stoßantwortfunktion**:**

$$h_{TS}(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-N}^{N} h(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t - (NT + nT))) = h_T(t - NT)$$

bzw. für die Stoßantwort $\mathbf{h_1(t)}$ im Falle einer abgetasteten si-Funktion:

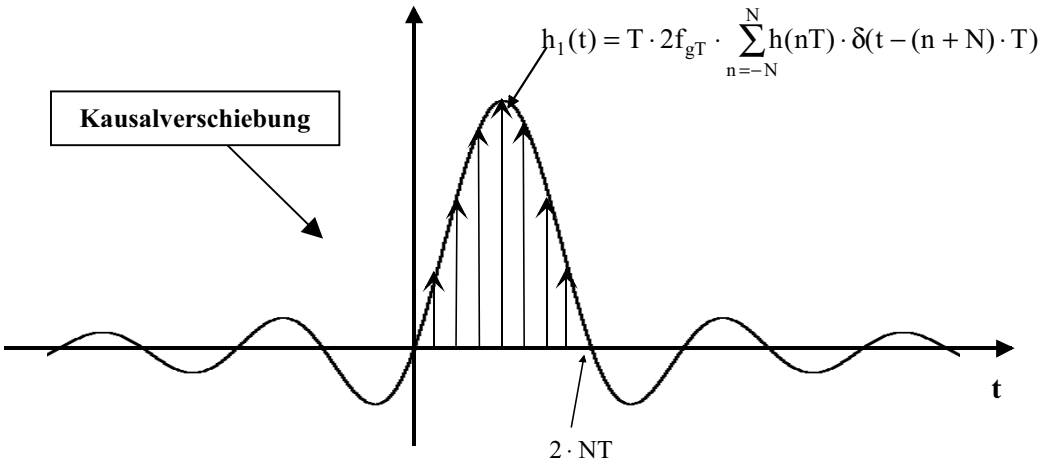


Abbildung 5.27: Stoßantwort einer abgetasteten si-Funktion

Die abschließend resultierende Stoßantwortfunktion $\mathbf{h_1(t)}$ ist nun für die Verarbeitung mit einem Digitalrechner geeignet. Nun stellt sich natürlich die Frage wie sich die Veränderungen im Spektrum auswirken?
Führt man hierzu eine Fouriertransformation der abgewandelten, tiefpaßbegrenzten Stoßantwortfunktion durch, so erhält man:

$$h_{TS}(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n=-N}^{N} h(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot (t - (NT + nT))) = h_T(t - NT)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H_{TS}(f) = T \cdot \sum_{n=-N}^{N} h(nT) \cdot e^{-j2\pi f(NT+nT)} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right)$$

$$= T \cdot \sum_{n=-N}^{N} h(nT) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot nT} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot NT} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_{gT}}\right)$$

Die zeitliche Beschneidung der Stoßantwort im Zeitbereich macht sich im Frequenzbereich in einer Verschleifung der Gesamt-Übertragungsfunktion bemerkbar, da eine endliche Summe berechnet wird und die Kausalverschiebung hat einen zusätzlichen linearen Phasengang zur Folge. Wenn man also die Gesamtübertragungsfunktion eines idealen Tiefpasses hinsichtlich der Form beeinflussen möchte, so kann man dies durch die Wahl der Abtastwerte bzw. durch die Anzahl der Abtastwerte erreichen. Die Anzahl und die Amplituden der Echos der

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

tiefpaßbegrenzten Stoßantwort im Zeitbereich beeinflussen also die Gesamtübertragungsfunktion des idealen Tiefpasses im Frequenzbereich.
Betrachtet man jetzt noch einmal die abgewandelte Stoßantwort des idealen Tiefpasses:

$$h_{TS}(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{n_u=-N}^{n_o=N} h(nT) \cdot \delta(t-(N+n)T) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t)$$

$$\left.\begin{aligned} n+N &= m \\ n &= m-N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} m_u &= n_u + N = -N+N = 0 \\ m_o &= n_o + N = N+N = 2N \end{aligned}\right\}$$

$$h_{TS}(t) = T \cdot 2f_{gT} \cdot \sum_{m_u=0}^{m_o=2N} h([m-N]T) \cdot \delta(t-mT) * si(\pi \cdot 2f_{gT} \cdot t) \qquad (5.24)$$

Diese Form der Gleichung ist praktisch sehr gut umsetzbar und es ergibt sich skizziert als Blockschaltbild:

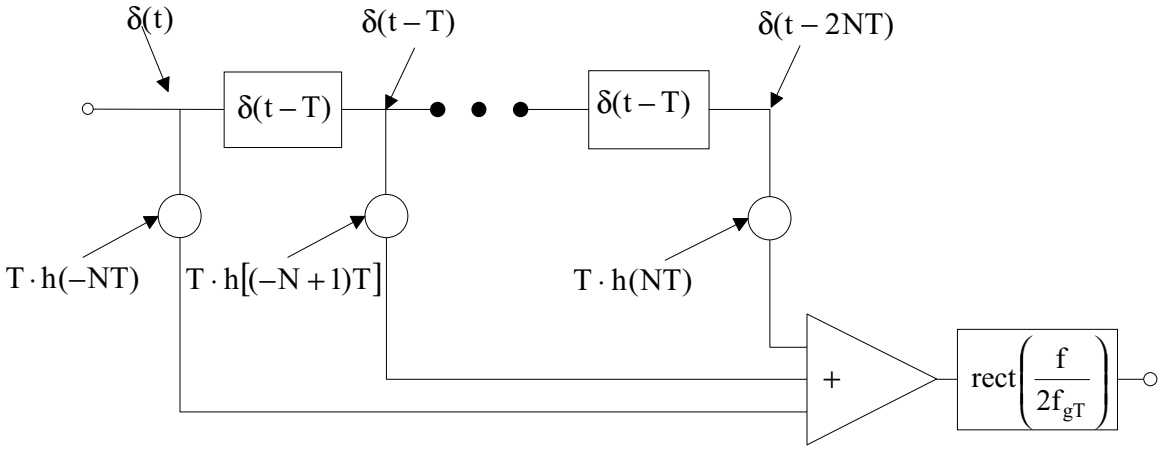


Abbildung 5.28: Blockschaltbild für (5.24)

Es ist also die Erzeugung beliebiger Tiefpaßsysteme möglich!

Pulsformfilter:
Optimierung der Stoßantwort bei gegebener Bandbreite im Hinblick auf geringes Überschwingen und schnellen Abfall der Nebenmaxima

5.3. ZEITDISKRETE TIEFPAßSYSTEME

siehe Lüke bzw. Nachrichtenverarbeitung Teil I

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

5.4. BANDPAßSYSTEME UND BANDPAßSIGNALE

In den vorigen Kapiteln wurden ausschließlich Tiefpaßsysteme betrachtet. Ausgangspunkt hierbei war der ideale Tiefpass, der dadurch charakterisiert wird, daß er für tiefe Frequenzen bis zu einer bestimmten Grenzfrequenz ein Signal ideal passieren läßt und für Frequenzen oberhalb dieser Grenzfrequenz ideal sperrt. Ein derartiges Verhalten wird im Frequenzbereich durch eine Rechteckfunktion beschrieben. Im folgenden soll nun der sogenannte *Bandpaß* definiert und auf seine Eigenschaften hin untersucht werden. Wie der Name schon sagt handelt es sich hierbei um ein System, welches ein Band von Frequenzen innerhalb eines *endlichen Durchlaßbereiches* ideal passieren läßt, wobei dieser Durchlaßbereich nicht die Frequenz Null enthält. Somit sperrt der ideale Bandpaß ideal für alle Frequenzen die nicht innerhalb dieses Frequenzbandes liegen.

5.4.1. DER IDEALE BANDPAß

Die Übertragungsfunktion eines idealen Bandpasses wird im Frequenzbereich durch zwei gegenüber dem Ursprung verschobene, symmetrische Rechteckfunktionen derselben Breite, beschrieben. Somit folgt seine Übertragungsfunktion aus der Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses und es gilt:

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f + f_0}{f_\Delta}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f - f_0}{f_\Delta}\right) \tag{5.25}$$

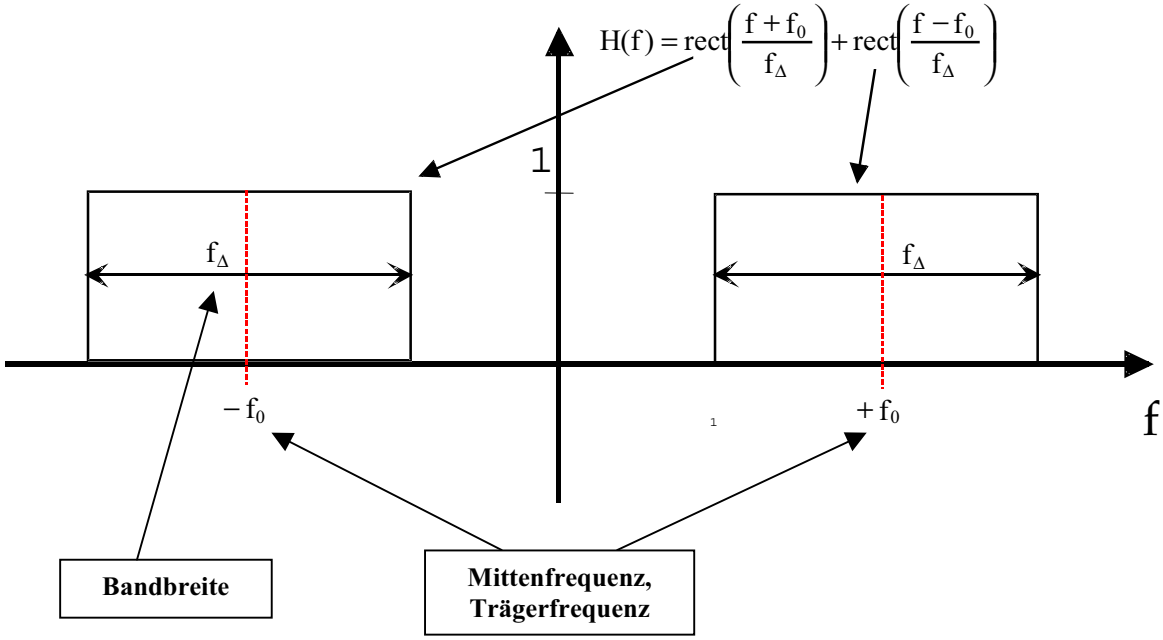


Abbildung 5.29: idealer Bandpaß

Schreibt man nun die Verschiebung mit Hilfe eines Faltungsproduktes, so erhält man den Zusammenhang der Übertragungsfunktion des idealen Bandpasses zum idealen Tiefpass:

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f + f_0}{f_\Delta}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f - f_0}{f_\Delta}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Übertragungsfunktion des idealen Bandpasses ergibt sich also aus der Faltung der Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses mit zwei idealen Verzögerungsgliedern, wobei diese jeweils in positiver und negativer Richtung um die Mittenfrequenz verschoben sind.
Bildet man von diesem Ausdruck die inverse Fouriertransformierte, so erhält man die Stoßantwort des idealen Bandpasses:

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * \underbrace{[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]}$$

$$h(t) = f_\Delta \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot f_\Delta \cdot t) \cdot 2\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \qquad (5.26)$$

Stoßantwort des idealen Tiefpasses

Die Stoßantwort des idealen Bandpasses ergibt sich also aus dem Produkt der Stoßantwort des idealen Tiefpasses mit einer cos-Schwingung der Frequenz $\mathbf{f_0}$ und Amplitude zwei.
Somit läßt sich also ein ideales Bandpaßsystem durch ein sogenanntes äquivalentes Tiefpaßsytem beschreiben. Skizziert ergibt sich für die Stoßantwort des idealen Bandpasses:

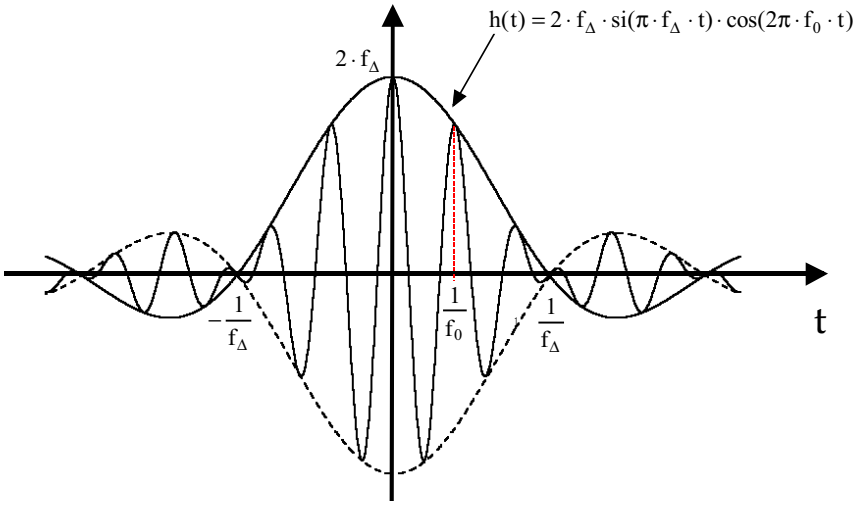


Abbildung 5.30: Stoßantwort eines idealen Bandpasses

5.4.2. BANDPAßSIGNALE UND IHRE BESCHREIBUNG IM ÄQUIVALENTEN TIEFPAßBEREICH

Grundlage für die nachfolgenden Ausführungen ist die Tatsache, daß Bandpaßsignale durch einen idealen Bandpaß mit entsprechend abgestimmter Mittenfrequenz und Bandbreite nicht verändert werden. Es gilt also:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

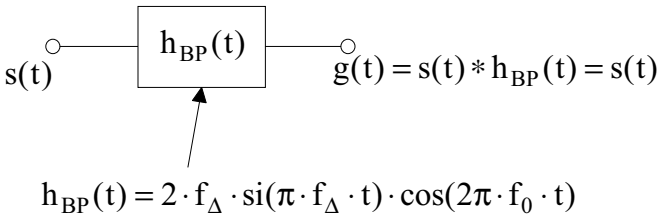


Abbildung 5.31: idealer Bandpaß

Demnach gibt es sicherlich unter allen Bandpaßsystemen eines, bei welchem die Mittenfrequenz $\mathbf{f_0}$ so abgestimmt wird, daß das Signal **s(t)** mit geringst möglicher Bandbreite $\mathbf{f_\Delta}$ noch unverändert übertragen wird.
Dann gilt für das Spektrum dieses Zeitsignals:

$$S(f) = S(f) \cdot H_{BP}(f) = S(f) \cdot \left[\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta} \right) * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \right]$$

Dies gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daß das Spektrum des Zeitsignals innerhalb des Durchlaßbereiches des idealen Bandpasses liegt.
Betrachtet man nun das Spektrum eines solchen Bandpaßsignals unter der Voraussetzung, das es sich bei dem zugehörigen Zeitsignal um ein reelles Signal handelt, so gilt:

$$\mathrm{Re}\{S(f)\} = \mathrm{Re}\{S(-f)\}$$
$$\mathrm{Im}\{S(f)\} = -\mathrm{Im}\{S(-f)\}$$

Der Realteil des Spektrums ist eine gerade Funktion in **f** und der Imaginärteil des Spektrums ist eine ungerade Funktion in **f**.

Somit ergibt sich skizziert für ein beliebiges Spektrum eines reellen Bandpaßsignals:

$$\boxed{S(f) = \mathrm{Re}\{S(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{S(f)\}}$$

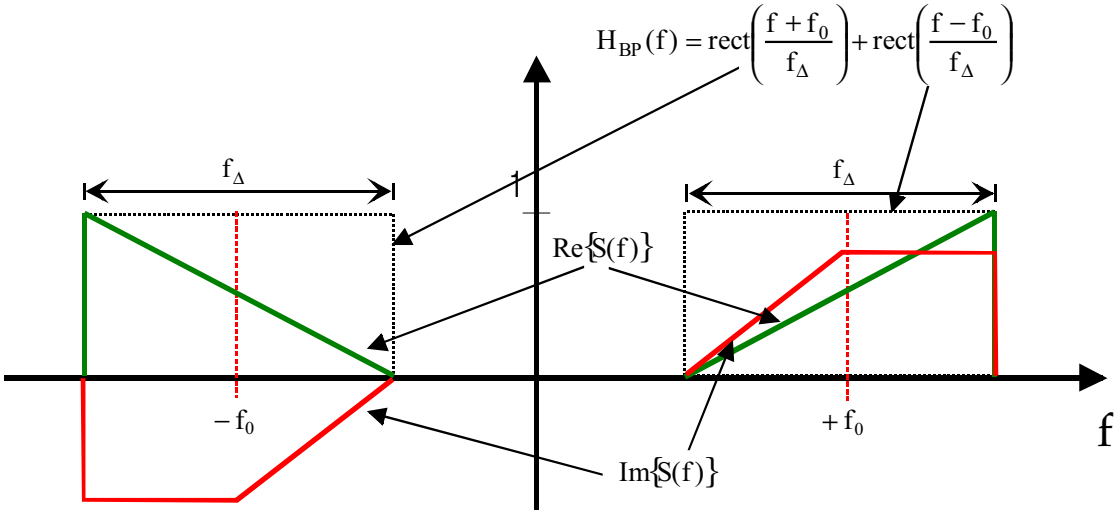


Abbildung 5.32: beliebiges Spektrum eines reellen Bandpaßsignals

Damit gilt für das bandpaßbegrenzte Zeitsignal:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t} df$$

Unter Berücksichtigung der Bandpaßbegrenzung des Spektrums im Frequenzbereich ergibt sich :

$$= \underbrace{\int_{f_u = -f_0 - \frac{f_\Delta}{2}}^{f_o = -f_0 + \frac{f_\Delta}{2}} S(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t} df}_{\text{mit } x = f + f_0,\ dx = df} + \underbrace{\int_{f_u = f_0 - \frac{f_\Delta}{2}}^{f_o = f_0 + \frac{f_\Delta}{2}} S(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t} df}_{\text{mit } x = f - f_0,\ dx = df}$$

$$x_o = f_o + f_0 = -f_0 + f_0 + \frac{f_\Delta}{2} = +\frac{f_\Delta}{2}$$
$$x_u = f_u + f_0 = -f_0 + f_0 - \frac{f_\Delta}{2} = -\frac{f_\Delta}{2}$$

$$x_o = f_o - f_0 = -f_0 + f_0 + \frac{f_\Delta}{2} = +\frac{f_\Delta}{2}$$
$$x_u = f_u - f_0 = -f_0 + f_0 - \frac{f_\Delta}{2} = -\frac{f_\Delta}{2}$$

Unter Anwendung obiger Substitution erhält man dann:

$$s(t) = \int_{-\frac{f_\Delta}{2}}^{+\frac{f_\Delta}{2}} S(x - f_0) \cdot e^{+j2\pi \cdot (x - f_0) \cdot t} dx + \int_{-\frac{f_\Delta}{2}}^{+\frac{f_\Delta}{2}} S(x + f_0) \cdot e^{+j2\pi \cdot (x + f_0) \cdot t} dx$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-j2\pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot \int_{-\frac{f_\Delta}{2}}^{+\frac{f_\Delta}{2}} S(x - f_0) \cdot e^{+j2\pi \cdot x \cdot t} dx + \\ e^{+j2\pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot \int_{-\frac{f_\Delta}{2}}^{+\frac{f_\Delta}{2}} S(x + f_0) \cdot e^{+j2\pi \cdot x \cdot t} dx \end{bmatrix}$$

Aufspalten der Exponential-terme

Der Exponentialterm, welcher nicht die Integrationsvariable enthält, läßt sich jeweils aus dem Integral herausziehen, da er in Bezug auf die Integrationsvariable eine Konstante darstellt. Die verbleibenden Integrale stellen Rücktransformationsintegrale in den Zeitbereich dar, wenn man die Grenzen als Tiefpaßbegrenzung auffaßt und es ergibt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\begin{cases} s_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{f_\Delta}\right) \cdot S(f - f_0) \right\} \\ s_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{f_\Delta}\right) \cdot S(f + f_0) \right\} \end{cases}$$

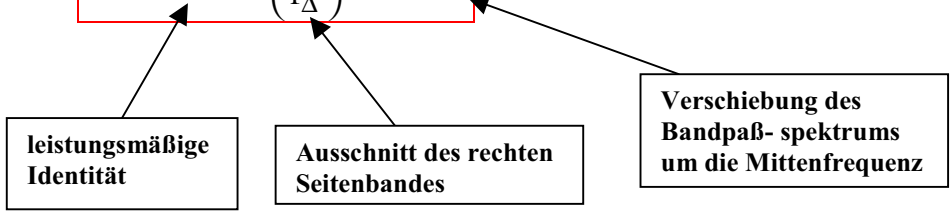
$$\boxed{s(t) = e^{-j2\pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot s_1(t) + e^{+j2\pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot s_2(t)}$$

Betrachtet man nun noch einmal die Spektren hinsichtlich ihrer Symmetrie, unter der Voraussetzung das der Realteil eines Spektrums eine gerade Funktion in **f** und der Imaginärteil eine ungerade Funktion in **f** ist, so muß doch gelten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{S(f - f_0)\} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) &= \mathrm{Re}\{S(f + f_0)\}\big|_{f=-f} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\{S(-f + f_0)\} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) \\ \mathrm{Im}\{S(f - f_0)\} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) &= -\mathrm{Im}\{S(f + f_0)\}\big|_{f=-f} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) \\ &= -\mathrm{Im}\{S(-f + f_0)\} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) \end{aligned}$$

Das Spektrum des Bandpaßsignals für negative Frequenzen ist gleich dem konjugiert komplexen Spektrum des Bandpaßsignals für positive Frequenzen. Der Informationsinhalt läßt sich also vollständig durch eines der beiden Bänder beschreiben und ist auch nicht abhängig von der Mittenfrequenz des Bandpasses, da die Teilspektren jeweils achsensymmetrisch zu der Mittenfrequenz des Bandpasses sind. Wenn man das Gesamtspektrum des Bandpasses um den Wert der Mittenfrequenz in Richtung Ursprung verschiebt ergibt sich für das rechte Seitenband eine achsensymmetrische Lage zum Ursprung. Schneidet man dieses Seitenband durch Multiplikation mit einer rect-Funktion aus dem Gesamtbandpaßspektrum heraus, so erhält man ein Tiefpaßsignal, daß den Informationsgehalt des Bandpaßsignals vollständig beschreibt. Hierbei handelt es sich aber noch nicht um das äquivalente Tiefpaßsignal, da das Bandpaßsignal durch zwei Bänder repräsentiert wird und dadurch keine leistungsmäßige Identität vorliegt. Somit muß man dieses Tiefpaßsignal noch mit dem Faktor zwei multiplizieren, damit man das äquivalente Tiefpaßsignal erhält. Es ergibt sich also ganz allgemein für das äquivalente Tiefpaßsignal:

$$\boxed{S_T(f) = 2 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) \cdot S(f + f_0)} \qquad (5.27)$$



© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Skizziert ergibt sich für diese Vorgänge:

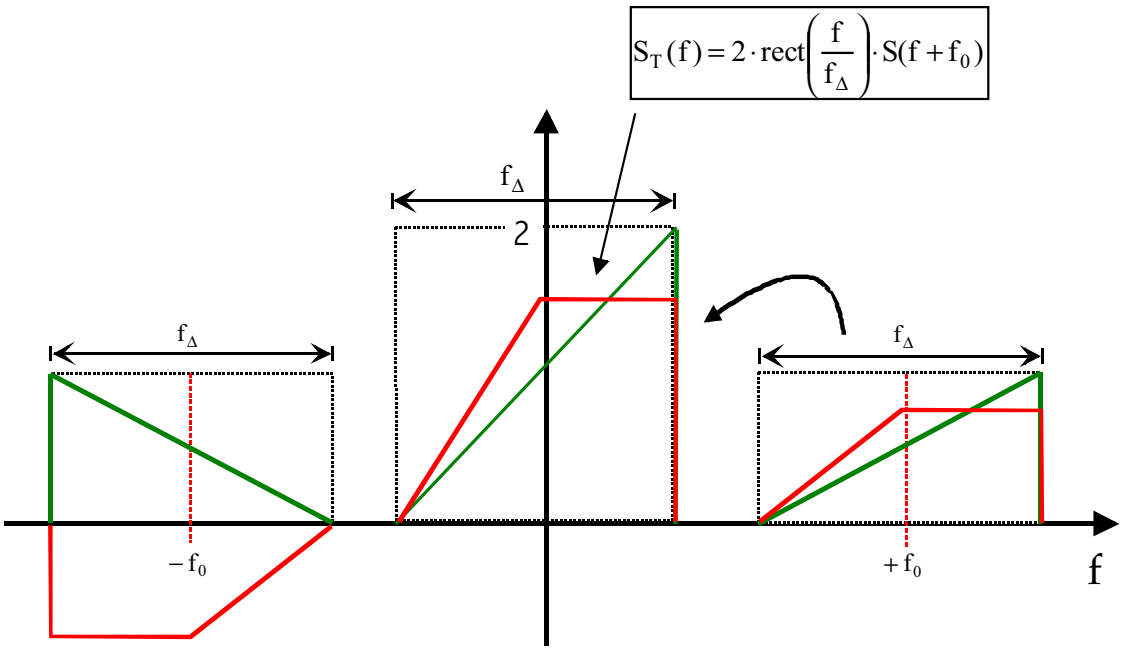


Abbildung 5.33: äquvalentes Tiefpaßsignal

Verschiebt man das Bandpaßspektrum um den Wert der Mittenfrequenz nach rechts, so ist das linke Seitenband achsensymmetrisch zum Ursprung. Separiert man auch dieses Seitenband durch Multiplikation mit einer rect-Funktion von dem rechten Seitenband, so erhält man ebenfalls wieder ein Tiefpaßsignal. Da die beiden Seitenbänder des Bandpaßsspektrums konjugiert komplex zueinander sind, gilt somit:

$$S(f - f_0) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) = \frac{1}{2} S_T(-f)^*$$

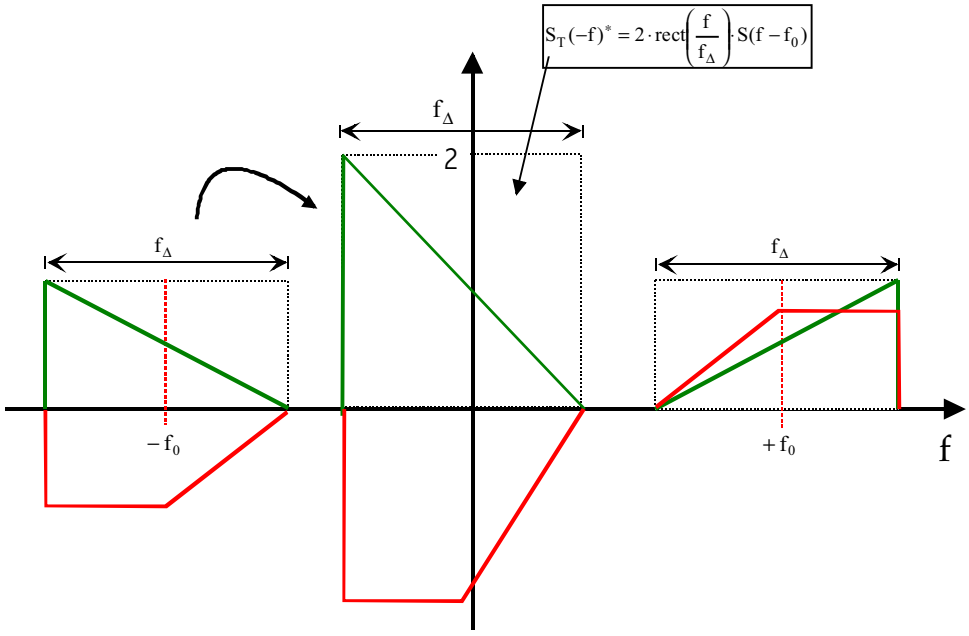


Abbildung 5.34: zwei verschiedene äquivalente Tiefpaßspektren

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Wir haben ja nun zwei verschiedene äquivalente Tiefpaßspektren. Das eine bildet man aus dem oberen Seitenband, das andere aus dem unteren Seitenband durch Verschiebung und Multiplikation mit 2. Welche Zeitfunktionen verbergen sich hinter den beiden Tiefpaßspektren? Mit den obigen Ausführungen ergibt sich:

$$s_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot S_T(f)\right\} = \frac{1}{2}\cdot s_T(t)$$

$$s_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot S_T^*(-f)\right\} = \frac{1}{2}\cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{S_T^*(-f)\right\}$$

Nun stellt sich die Frage: $S_T^*(-f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ ?$ Wir lösen das Problem mit dem Fourierintegral:

Aus $S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt \quad \Rightarrow$

$$S_T^*(-f) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_T(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=-f}\right]^*$$

$$S_T^*(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt = \mathcal{F}\left\{s_T^*(t)\right\}$$

Durch die Inversion des Imaginärteils wird $s_T(t)$ konjugiert komplex und der Exponent des e-Terms invertiert sein Vorzeichen, was durch die Substitution von f durch –f kompensiert wird.

$$\boxed{S_T^*(-f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ s_T^*(t)} \qquad (5.28)$$

Das bedeutet, daß die beiden Signale, die aus den unterschiedlichen äquivalenten Tiefpaßspektren resultieren, sich nur durch die konjugierte Komplexität unterscheiden.

$$\begin{cases} s_1(t) = \frac{1}{2}\cdot s_T(t) \\ s_2(t) = \frac{1}{2}\cdot s_T^*(t) \end{cases}$$

Möchte man nun den Realteil des Bandpaßsignals im äquivalenten Tiefpaßbereich ermitteln, so addiert man einfach die beiden Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$. Möchte man den Imaginärteil haben, so subtrahiert man die Signale. Das Bandpaßsignal ergibt sich folgendermaßen aus den Zeitsignalen im äquivalenten Tiefpaßbereich:

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2}\cdot s_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}\cdot s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} \\ &= \mathrm{Re}\left\{s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} \end{aligned}} \qquad (5.29)$$

und $\quad s_T(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_T(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_T(f)\cdot e^{j2\pi ft}df$

$$S_T(f) = 2\cdot \mathrm{rect}\frac{f}{f_\Delta}\cdot S(f+f_0)$$

mit $\quad S_T(f)$: Tiefpaßspektrum

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$s_T(t)$: Tiefpaßsignal

Zusammenfassend gilt die Beziehung:

$S(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, s(t)$

Im folgenden wird die Beziehung zwischen Band- und Tiefpaßbereich aufgezeigt:

Bandpaßbereich **Tiefpaßbereich**

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[S_T(f-f_0) + S_T^*(-f-f_0)\right]$$

$$S_T(f) = 2 \cdot S(f+f_0) \cdot \mathrm{rect}\frac{f}{f_\Delta}$$

Spektrum des äquivalenten Tiefpaßbereiches

$$s_T(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_T(f)\}$$
$$= 2 \cdot s(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} * f_\Delta \cdot \mathrm{si}(\pi f_\Delta t)$$

Äquivalentes Tiefpaßsignal

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{s_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

Bandpaßsignal

$S_T(f)$ besitzt im allgemeinen keinerlei besondere Symmetrie.

Es wird nun das System bzw. die blockschaltbildmäßige Umsetzung ermittelt:

$$S_T(f) = S(f+f_0) \cdot 2 \cdot \mathrm{rect}\frac{f}{f_\Delta}$$

Das Tiefpaßspektrum besteht aus der Verschiebung des Bandpaßspektrums um die Mittenfrequenz f_0. Die Rechteckfunktion filtert die tiefen Frequenzen. Der Faktor zwei stellt sicher, daß die Signalenergie auch nach dem abschneiden der hohen Frequenzen gleich bleibt.

$$s_T(t) = 2 \cdot s(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} * f_\Delta \cdot \mathrm{si}(\pi f_\Delta t)$$
$$= 2 \cdot s(t) \cdot \left[\cos(2\pi f_0 t) - j\sin(2\pi f_0 t)\right] * f_\Delta \cdot \mathrm{si}(\pi f_\Delta t)$$
$$= s_{T_r}(t) + j\, s_{T_i}(t)$$

Das Tiefpaßsignal kann man in Real- und Imaginärteil aufspalten:

$$s_{T_r}(t) = \mathrm{Re}\{s_T\} = 2 \cdot s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) * f_\Delta \cdot \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \quad \text{Realteil}$$
$$s_{T_i}(t) = \mathrm{Im}\{s_T\} = -2 \cdot s(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) * f_\Delta \cdot \mathrm{si}(\pi f_\Delta t) \quad \text{Imaginärteil}$$

} Quadratur-Komponenten

In Abbildung 5.35 sieht man einen sogenannten Quadraturmischer, der aus einem Bandpaßsignal das in Real- und Imaginärteil aufgespaltete Tiefpaßsignal ermittelt. Durch die Multiplikation mit den Cosinus- bzw. Sinusschwingungen der Mittenfrequenz f_0 des Bandpaßsignals bilden sich spektrale Komponenten doppelter und nullter Trägerfrequenz. Die Signalenergie wird dabei gleich verteilt, so daß nur noch die Hälfte im Basisband zur Verfügung steht. Durch den nachfolgenden Tiefpaß werden die spektralen Komponenten doppelter Frequenz entfernt. Um

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

wieder die volle Signalenergie herzustellen, müssen die Ausgangssignale s_{Tr} und s_{Ti} mit dem Faktor 2 multipliziert werden.

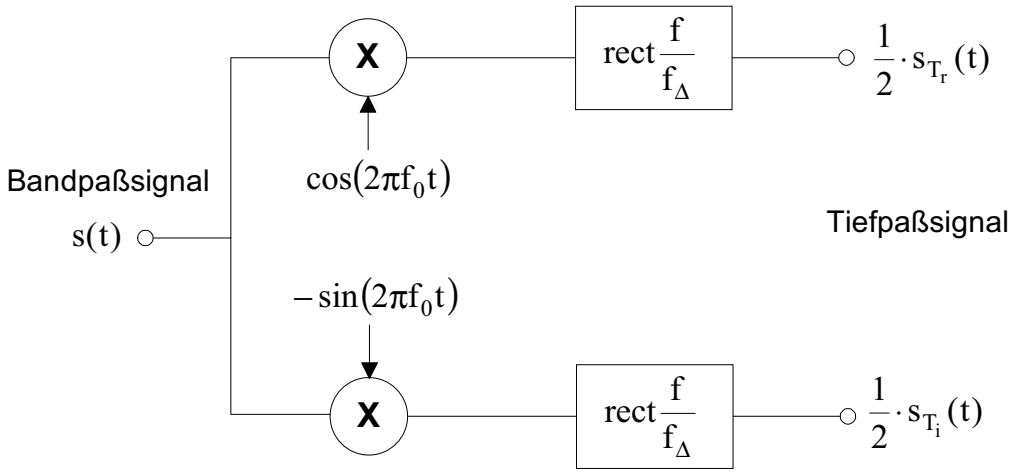


Abbildung 5.35: Quadraturmischer

Die Umkehrung von Tiefpaß- in Bandpaßbereich ist möglich, indem man den Realteil des Produktes aus Tiefpaßsignal und einer komplexen Trägerschwingung ermittelt:

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathrm{Re}\left\{ s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{ s_{T_r}(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) + j\cdot s_{T_i}(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) + j\cdot s_{T_r}(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) - s_{T_i}(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) \right\} \\ &= s_{T_r}(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) - s_{T_i}(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

$$\boxed{s(t) = s_{T_r}(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) - s_{T_i}(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t)} \qquad (5.30)$$

In Abbildung 5.36 ist das Blockschaltbild dieser Umkehrung zu sehen. Aus dem Real- und Imaginärteil des äquivalenten Tiefpaßsignals wird durch entsprechende Multiplikation mit den Trägerschwingungen (Verschiebung im Spektrum) und abschließender Summenbildung das Bandpaßsignal ermittelt. Das Tiefpaßspektrum wird durch die Multiplikation mit den Schwingungen der Trägerfrequenz f_0 um f_0 und $-f_0$ verschoben. Die Teilspektren (positive und negative Frequenzen) des Bandpaßsignals haben nur die halbe Gewichtung des Tiefpaßspektrums, da die Signalenergie gleich bleibt.

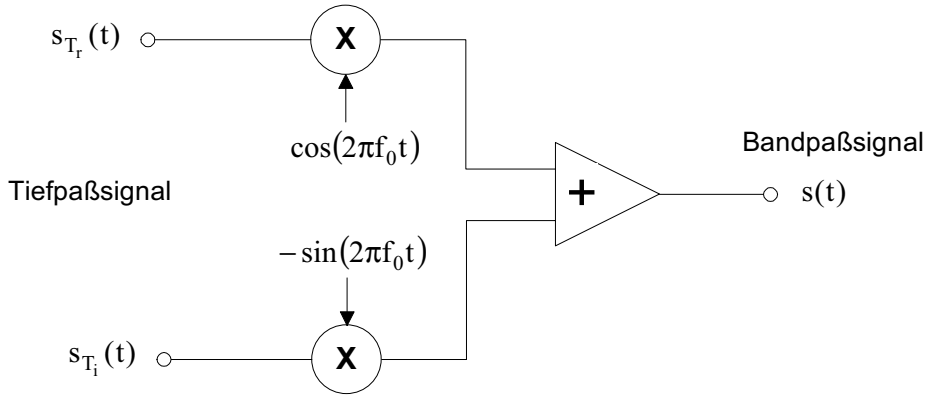


Abbildung 5.36: Umkehrung von Tiefpaß- in Bandpaßbereich

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

5.4.3. KOMPLEXE SIGNALDARSTELLUNG

Zeitsignale kann man in Real- und Imaginärteil aufspalten. Der Realteil läßt sich durch eine unendliche Summe von Cosinusschwingungen darstellen und der Imaginärteil durch eine unendliche Summe von Sinusschwingungen. Das Signal läßt sich entweder in Komponentenform schreiben, also in Real und Imaginärteil oder durch Betrag und Phase. Hier ist dies für ein Signal im äquivalenten Tiefpaßbereich aufgezeigt.

$$\begin{aligned} s_T(t) &= s_{T_r}(t) + j s_{T_i}(t) \\ &= |s_T(t)| \cdot e^{j\Theta_T(t)} \end{aligned} \qquad \text{komplexes Signal}$$

mit $$|s_T(t)| = \sqrt{s^2_{T_r}(t) + s^2_{T_i}(t)}$$

$$\Theta_T(t) = \arctan \frac{s_{T_i}(t)}{s_{T_r}(t)}$$

Aus dieser Darstellung läßt sich mit (5.29) folgender Zusammenhang beschreiben:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad s(t) &= \mathrm{Re}\left\{ s_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{ |s_T(t)| \cdot e^{j\Theta_T(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \\ &= |s_T(t)| \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \Theta_T(t)\right) \end{aligned}$$

Einhüllende des Bandpaßsignals: reelle Hüllkurve

Momentanphase

$s_T(t)$: komplexe Hüllkurve des Bandpaßsignals

$e^{j2\pi f_0 t}$: komplexer Träger des Bandpaßsignals

ANWENDUNGSBEISPIEL:

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right) \\ &= a(t) \cdot \cos\left(\psi(t)\right) \end{aligned}$$

Momentanamplitude

Momentanphase

Es gibt nun drei Möglichkeiten, Informationen mit einem Bandpaßsignal zu übertragen:

1. Bei konstanter Phase trägt a(t) die Information.

   $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi_0$

   $s(t) = a(t) \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_0\right)$ Amplitudenmodulation (AM)

2. Bei konstanter Amplitude trägt die Phase die Information.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$a(t) = a_0$

$s(t) = a_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ Winkelmodulation (WM)

3. Wenn die Amplitude und die Phase variieren, so können zwei unterschiedliche Informationen über einen Kanal übermittelt werden.

$s(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ a(t) und φ(t) tragen die Informationen. Kombinierte AM-WM. Man nennt dies auch QAM (Quadraturamplitudenmodulation)

Die mathematische Beschreibung für Fall 3 ist folgende:

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \\ &= a(t) \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j\cdot(2\pi f_0 t + \varphi(t))}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{a(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{s_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} \end{aligned}$$

mit $s_T(t) = a(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$

Zeigerlänge ≅ AM Phasenlage ≅ WM

Für $a(t) \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} s_T(t) &= |s_T(t)| \cdot e^{j\Theta_T(t)} \\ \Rightarrow |s_T(t)| &= a(t) \\ \Theta_T(t) &= \varphi(t) \end{aligned}$$

Die Beschreibung von amplituden- und winkelmodulierten Signalen im äquivalenten Tiefpaßbereich ist sehr elegant.

Einfache AM-Demodulation:
Diese Art der Demodulation wird z.B. in einfachen Radio-Mittelwellen-Empfängern angewendet. Man nennt sie Hüllkurvendemodulation. Da die Information bei der Amplitudenmodulation in der Signalamplitude steckt, wird der Momentanbetrag gebildet. So entsteht die Hüllkurve, die annähernd dem äquivalenten Tiefpaßsignal entspricht.

$a(t) \geq 0$

$$a(t) = |s_T(t)| = \sqrt{s_{T_r}^2(t) + s_{T_i}^2(t)}$$

Dieser mathematische Zusammenhang ist hier dargestellt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

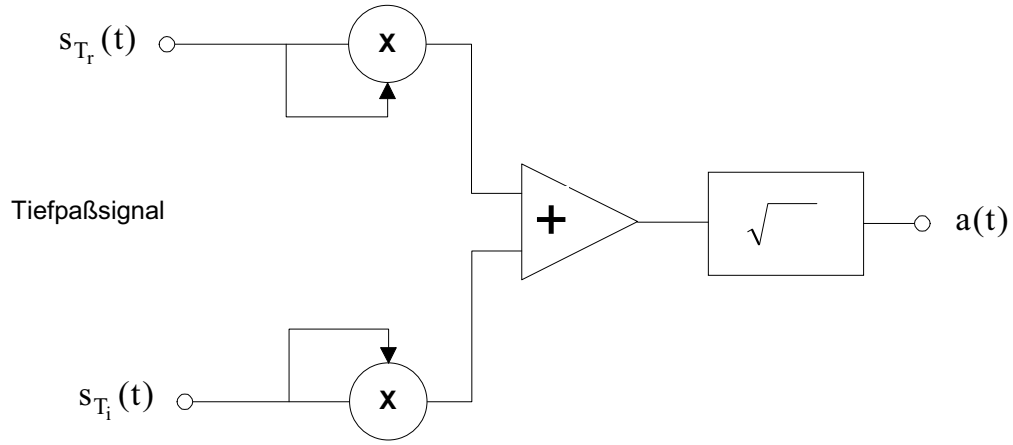


Abbildung 5.37: Hüllkurvendemodulation

Technisch ist der Hüllkurvendemodulator folgendermaßen realisiert werden:

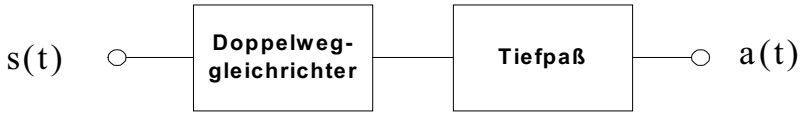


Abbildung 5.38: technische Realisierung des Hüllkurvendmodulators

a(t) ist nur annähernd gleich der Hüllkurve, da die Kapazität des Tiefpaß Auf- und Entladekurven verursacht. In Abbildung 5.39 sieht man den idealen Fall.

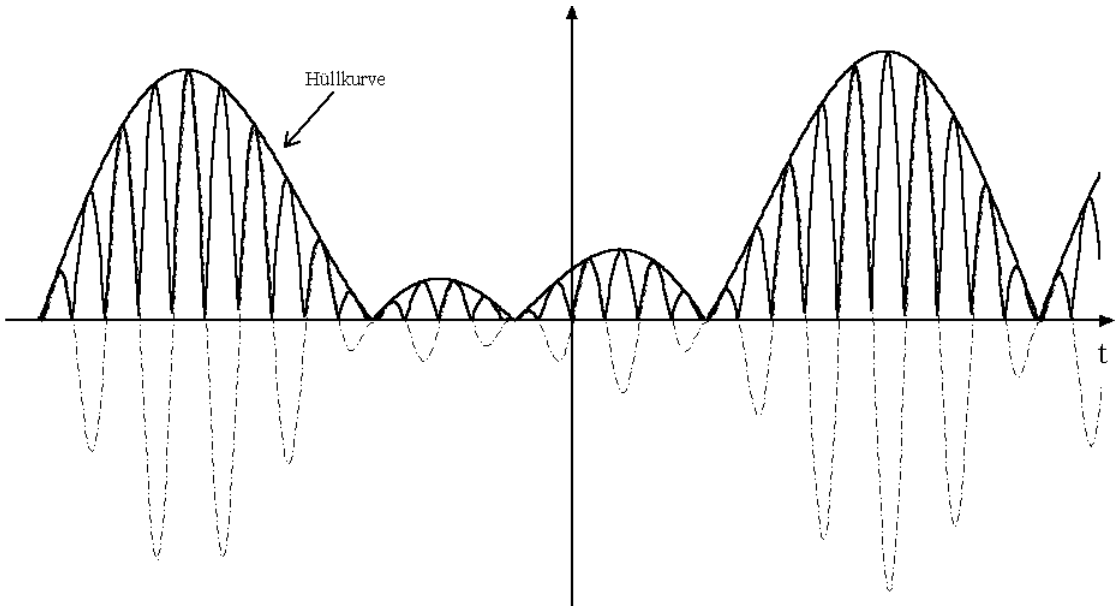


Abbildung 5.39: idealer Fall der Hüllkurvendemodulation

Einfache WM-Demodulation:
Diese Methode ist nur mit dem Digitalrechner zu realisieren, da Imaginär- und Realteil dividiert werden und davon der arctan gebildet wird.

$$\varphi(t) = \arctan \frac{s_{T_i}(t)}{s_{T_r}(t)}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Abbildung 5.40 zeigt die Realisierung dieses mathematischen Ausdrucks.

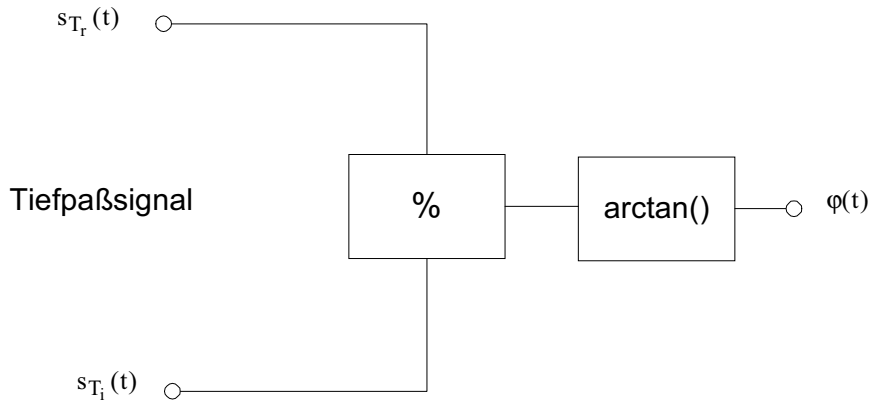


Abbildung 5.40: Realisierung der einfachen WM-Demodulation

5.4.4. ANALYTISCHE SIGNALE UND HILBERTTRANSFORMATION

Signale, deren Spektrum für f<0 identisch verschwindet, nennt man analytische Signale. Analytische Signale können auch komplex sein.
Hierzu betrachten wir ein reelles Bandpaßsignal:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{s^+(t)\right\} \tag{5.31}$$

mit $s^+(t) = s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}$

Das Tiefpaßsignal $s_T(t)$ kann komplex sein. Die Multiplikation mit dem Exponentialausdruck entspricht im Frequenzbereich einer Faltung mit einem um f_0 in positive Richtung verschobenen Diracstoß. Das Spektrum verschiebt sich also um f_0 in positive Richtung (siehe Abbildung 5.41 und Abbildung 5.42).

$$S^+(f) = S_T(f - f_0)$$

Es gilt durch die Verschiebung, daß $S^+(f)$ wirklich analytisch ist:

$S^+(f) = 0$ für $f < 0$ $\Longrightarrow$ Das Spektrum ist links der Ordinate = 0.

In Abbildung 5.41 und Abbildung 5.42 erkennt man die Verschiebung des Tiefpaßspektrums um f_0.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

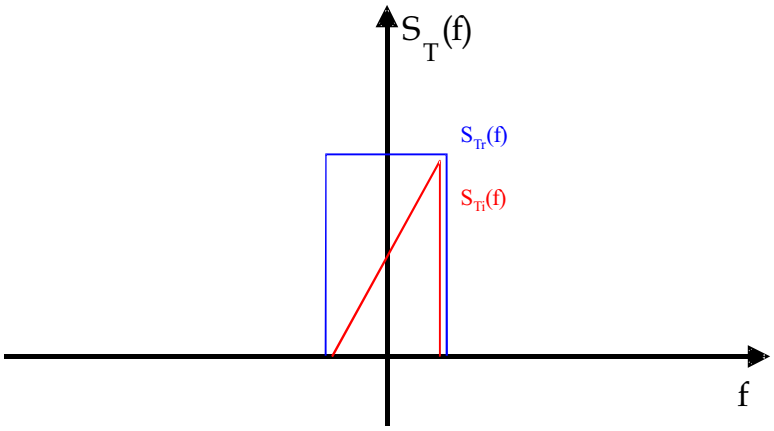


Abbildung 5.41: Tiefpaßspektrum

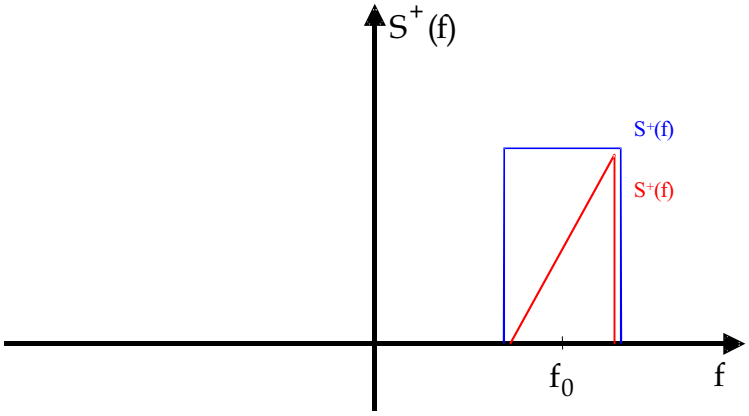


Abbildung 5.42: Tiefpaßspektrum um f_0 verschoben

Aus jedem reellen Signal kann man ein analytisches Signal machen, indem man die Hilbert-Transformierte addiert. Das geht so:

Es gilt:	$S(f)$:	Spektrum eines reellen Signals
	$S(f)\cdot\sigma(-f)$:	Spektralanteil für negative Frequenzen. Durch die an der Ordinate gespiegelte Sprungfunktion werden nur die negativen Frequenzanteile herausgefiltert.

Nun betrachten wir das Spektrum des gewünschten analytischen Signals (neg. Frequenzen abgeschnitten):
Wir fassen zusammen:

$$\left.\begin{aligned} S^+(f) &= S_T(f-f_0) \\ S_T(f) &= S(f+f_0)\cdot 2\cdot \mathrm{rect}\frac{f}{f_\Delta} \end{aligned}\right\} \qquad S^+(f) = S(f)\cdot 2\cdot \mathrm{rect}\frac{f-f_0}{f_\Delta}$$

Bei einem bandbegrenzten Zeitsignal s(t) kann man anstatt der Rechteckfunktion auch die Sprungfunktion σ(t) verwenden:

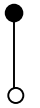
© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S^+(f) = 2 \cdot S(f) \cdot \sigma(f)$$

Das gleiche drückt auch folgende Beschreibung aus.

$$S^+(f) = 2 \cdot S(f) - 2 \cdot S(f) \cdot \sigma(-f)$$
$$= 2 \cdot S(f) \cdot [1 - \sigma(-f)] = 2 \cdot S(f) \cdot \sigma(f)$$

... damit die Energie bzw. Leistung gleich bleibt.



$$s^+(t) = 2 \cdot s(t) * \mathcal{F}^{-1}\{\sigma(f)\} \tag{5.32}$$

Aus (2.72) ist die Fouriertransformierte der Sprungfunktion bekannt.

$$\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{j2\pi t} \circ\!\!-\!\!\bullet \sigma(-f)$$

$$\frac{1}{2}\delta(-t) - \frac{1}{j2\pi t} \circ\!\!-\!\!\bullet \sigma(+f)$$

←Symmetrietheorem

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\sigma(f)\} = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t}$$

Setzt man die inverse Fouriertransformierte nun in die obige (5.32) ein, erhält man:

$$s^+(t) = 2 \cdot s(t) * \mathcal{F}^{-1}\{\sigma(f)\}$$
$$= 2 \cdot s(t) * \left[\frac{1}{2}\delta(-t) - \frac{1}{j2\pi t}\right]$$
$$= s(t) * \left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right]$$
$$= s(t) + \left[\frac{j}{\pi} \cdot \frac{1}{t} * s(t)\right]$$
$$= s(t) + \frac{j}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \frac{1}{t-\tau} d\tau$$
$$= s(t) + j \cdot H\{s(t)\}$$
$$= s(t) + j \cdot \tilde{s}(t)$$

$$\tilde{s}(t) = H\{s(t)\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \frac{1}{t-\tau} d\tau \tag{5.33}$$

Hilbert-Transformierte von s(t)

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Hilberttransformierte muß also mit j multipliziert und zum Zeitsignal addiert werden, damit eine analytische Funktion entsteht, die keine negativen Frequenzen im Spektrum aufweist. Das entstandene analytische Signal hat s(t) als Realteil (nach Voraussetzung reell), und die Hilberttransformierte entspricht dem Imaginärteil. Die Eigenschaften von Real- und Imaginärteil dieses speziellen analytischen Signals kann man sich in der Einseitenbandmodulation zu Nutze machen (siehe Kapitel 6.1.3).

5.4.5. Momentanphase und Momentanfrequenz eines Signals

Zur Betrachtung von Momentanphase und Momentanfrequenz wird zunächst ein analytisches Signal verwendet und die Erkenntnisse anschließend allgemein angewendet.

Das komplexe analytische Signals kann man schreiben:

$$s^+(t) = \left|s^+(t)\right| \cdot e^{j\Theta_+(t)}$$

$$\text{mit } \Theta_+(t) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{s^+(t)\}}{\mathrm{Re}\{s^+(t)\}}\right) = \arctan\left(\frac{H\{s(t)\}}{s(t)}\right)$$

Das analytische Signal hat s(t) als Realteil, und die Hilberttransformierte entspricht dem Imaginärteil. Darum kann man die Phase wie oben geschrieben ermitteln. Der arctan des Quotienten der Hilberttransformierten und des reellen Originalsignals entspricht der Momentanphase $\Theta_+(t)$ des analytischen Signals. Man kann also die Momentanphase jedes beliebigen reellen Signals mit Hilfe der Hilbertransformierten ermitteln. Durch die Ableitung der Momentanphase ergibt sich die Momentanfrequenz.

$f_+(t) = f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Theta_+(t)}{dt}$ ist die Momentanfrequenz dieses Signals.

Nun ermitteln wir mit Hilfe von (5.31) die Momentanphase und –frequenz von Bandpaßsignalen:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{s^+(t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left|s_T(t)\right| \cdot e^{j\Theta_T(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{\left|s_T(t)\right| \cdot e^{j(\Theta_T(t)+2\pi f_0 t)}\right\}$$

$$\underbrace{\Theta_+(t) = 2\pi f_0 t + \Theta_T(t)}_{\text{Momentanphase}} \qquad (5.34)$$

$$\underbrace{f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Theta_T(t)}{dt}}_{\text{Momentanfrequenz}} \qquad (5.35)$$

Mitten- oder Trägerfrequenz

Frequenzvariation um die Mittenfrequenz

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

5.4.6. ÄQUIVALENZEN IM BANDPAßBEREICH

Verzögerung von Bandpaßsignalen

$$s(t-t_0) = \mathrm{Re}\left\{s_T(t-t_0)\cdot e^{j2\pi f_0(t-t_0)}\right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{s_T(t-t_0)\cdot e^{-j2\pi f_0 t_0}\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

Dem verzögerten Bandpaßsignal entspricht das verzögerte äquivalente Tiefpaßsignal mit einer konstanten Phasenverschiebung

$$s(t-t_0) \Rightarrow s_T(t-t_0)\cdot e^{-j2\pi f_0 t_0}$$

Zeitinversion von Bandpaßsignalen

Die Zeitinversion eines Signals ergibt ein konjugiert komplexes Frequenzspektrum.

BEWEIS:

$g(t) = s(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(f) = S^*(f)$ Das ist die Behauptung.

$$G_T(f) = 2\cdot S^*(f+f_0)\cdot \mathrm{rect}\frac{f}{f_\Delta} = S_T^*(f)$$

$$g_T(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{S_T^*(f)\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_T^*(f)\cdot e^{j2\pi ft}df$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_T(f)\cdot e^{-j2\pi ft}df\right]^*$$

Durch die Ausklammerung des Sterns (Zeichen für: konjugiert komplex) verliert $S_T^*(t)$ den Stern und der Exponent des e-Terms invertiert sein Vor- zeichen.

$$g(t) = s(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(f) = S^*(f)$$

$$\Downarrow$$

$$g_T(t) = s_T^*(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G_T(f) = S_T^*(f) \qquad (5.36)$$

q.e.d.

Zeitinvertiert man ein Bandpaßsignal, so ergibt sich im äquivalenten Tiefpaßbereich das konjugiert komplexe Spektrum des Ursprungsignals. Das bedeutet, daß das Betragsspektrum unabhängig von einer Zeitinversion ist.

Faltung von Bandpaßsignalen - Bandpaßfilter

Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Wenn

$g(t) = s(t) * h(t)$ dann entspricht das äquivalente Tiefpaßsignal

$g_T(t) = \frac{1}{2}\cdot s_T(t) * h_T(t)$ mit dem Spektrum

$G_T(f) = \frac{1}{2}\cdot S_T(f)\cdot H_T(f)$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

BEWEIS:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= s(t) * h(t) \\
&= \mathrm{Re}\left\{s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} * \mathrm{Re}\left\{h_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} + s_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t}\right] * \frac{1}{2}\cdot\left[h_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} + h_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t}\right] \\
&= \frac{1}{4}\cdot\Big[s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} * h_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} + s_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} * h_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t} \\
&\quad + s_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t} * h_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} + s_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t} * h_T^*(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t}\Big]
\end{aligned}
$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$
\begin{aligned}
G(f) = \frac{1}{4}\Big[& S_T(f-f_0)\cdot H_T(f-f_0) + \underbrace{S_T(f-f_0)\cdot H_T^*(-f-f_0)}_{=0} \\
& + \underbrace{S_T^*(-f-f_0)\cdot H_T(f-f_0)}_{=0} + S_T^*(-f-f_0)\cdot H_T^*(-f-f_0)\Big] \\
= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot & \left[S_T(f-f_0)\cdot H_T(f-f_0) + S_T^*(-f-f_0)\cdot H_T^*(-f-f_0)\right]
\end{aligned}
$$

$$\boxed{G(f) = \frac{1}{2}\left[G_T(f-f_0) + G_T^*(-f-f_0)\right]} \tag{5.37}$$

Definition der Bandpaß-Tiefpaß-Spektren

mit

$$\boxed{G_T(f) = \frac{1}{2}\cdot S_T(f)\cdot H_T(f)} \tag{5.38}$$

$$\boxed{g_T(t) = \frac{1}{2}\cdot s_T(t) * h_T(t)} \tag{5.39}$$

q.e.d.

5.4.7. ÜBERTRAGUNG VON BANDPAßSIGNALEN ÜBER BANDPAßSYSTEME

Bandpaßbereich:
Im Bandpaßbereich sieht das System wie in Abbildung 5.43 aus. h(t) ist die Stoßantwort des Bandpaßsystems.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

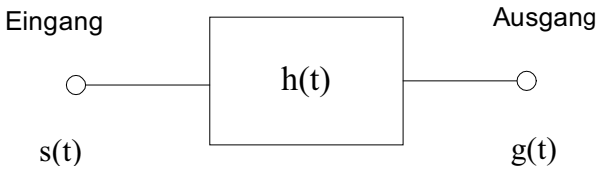


Abbildung 5.43: System im Bandpaßbereich

$$s(t) * h(t) = g(t)$$
$$S(f) \cdot H(f) = G(f)$$

Äquivalenter Tiefpaßbereich:
Da das äquivalente Tiefpaßsignal mit dem Faktor 2 multipliziert wurde, gilt im äquivalenten Tiefpaßbereich, wie in (5.39) gezeigt:

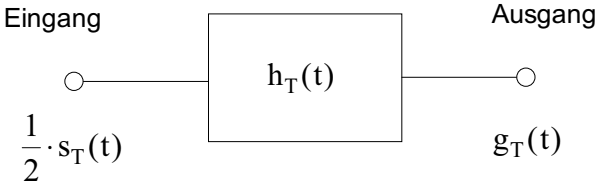


Abbildung 5.44: äquivalenter Tiefpaßbereich

$$\frac{1}{2} \cdot s_T(t) * h_T(t) = g_T(t)$$
$$\frac{1}{2} \cdot S_T(f) \cdot H_T(f) = G_T(f)$$

$$g(t) = \mathrm{Re}\left\{ g_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[s_T(t) * h_T(t) \right] \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \qquad (5.40)$$

5.4.8. Übertragung des eingeschalteten Cosinus-Signals über den idealen Bandpaß

$s(t) = \sigma(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ (Das entspricht im Lüke: $s(t) = \varepsilon(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$)

Ein Problem ist, daß $\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathcal{F}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$ kein echtes Tiefpaßsignal ist, da auch höhere Frequenzen durch den Imaginärteil eingehen. Deshalb ist $s(t) = \sigma(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ auch kein echtes Bandpaßsignal., denn $S(f) = \left(\frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) * \frac{1}{2} \cdot \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right]$ ist nicht echt bandbegrenzt.

Das äquivalente Tiefpaßspektrum $S_T(f)$ entspricht einer Verschiebung des Spektrums $S(f)$ um f_0 und der Multiplikation mit dem Faktor 2. Vergleicht man nun das Spektrum $S_T(f)$ mit dem Spektrum des Sprunges $\sigma(t)$, so kann man sagen:

$$S_T(f) \approx \mathcal{F}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_T(t) \approx \sigma(t)$$

Diese Ähnlichkeit ist um so größer, je größer die Bandbreite f_Δ des Tiefpasses $H_T(f)$ ist, da $\frac{1}{j2\pi f}$ nicht begrenzt ist. Das Ausgangssignal im äquivalenten Tiefpaßbereich $g_T(t)$ entspricht dann:

$$\begin{aligned} g_T(t) &= \frac{1}{2} \cdot [s_T(t) * h_T(t)] \approx \sigma(t) * [f_\Delta si(\pi f_\Delta t)] \\ &= f_\Delta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} si(\pi f_\Delta \tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau \\ &= f_\Delta \cdot \int_{-\infty}^{t} si(\pi f_\Delta \tau) d\tau \\ &= f_\Delta \cdot \left(\int_{-\infty}^{0} si(\pi f_\Delta \tau) d\tau + \int_{0}^{t} si(\pi f_\Delta \tau) d\tau \right) \\ &= f_\Delta \cdot \left(\frac{1}{\pi f_\Delta} \cdot Si(t \to \infty) + \frac{1}{\pi f_\Delta} \cdot Si(\pi f_\Delta t) \right) \\ &= f_\Delta \cdot \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi f_\Delta} + \frac{1}{\pi f_\Delta} \cdot Si(\pi f_\Delta t) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot Si(\pi f_\Delta t) \end{aligned}$$

$$g_T(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot Si(\pi f_\Delta t) \qquad (5.41)$$

Sprungantwort des idealen Tiefpasses der Bandbreite f_Δ

$$g(t) \approx \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot Si(\pi f_\Delta t) \right] \cdot \cos(2\pi f_0 t) \qquad (5.42)$$

Antwort des idealen Bandpasses auf ein eingeschaltetes Cosinus-Signal

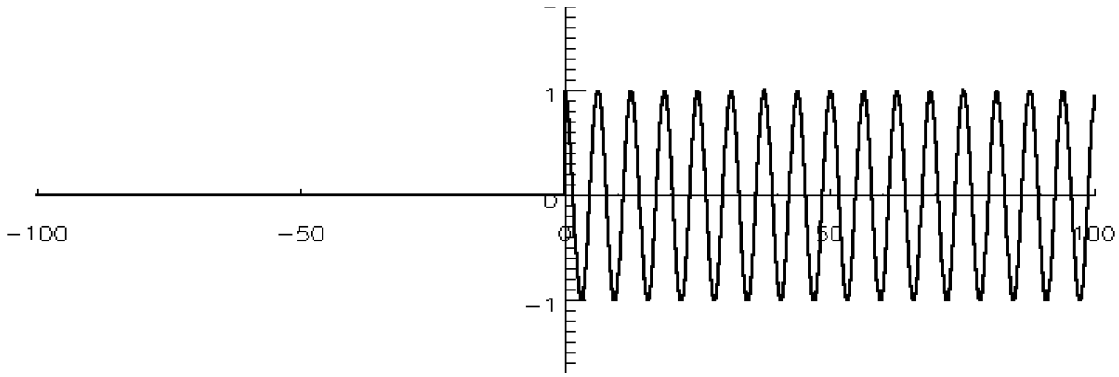


Abbildung 5.45: eingeschaltetes Cosinus-Signal

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

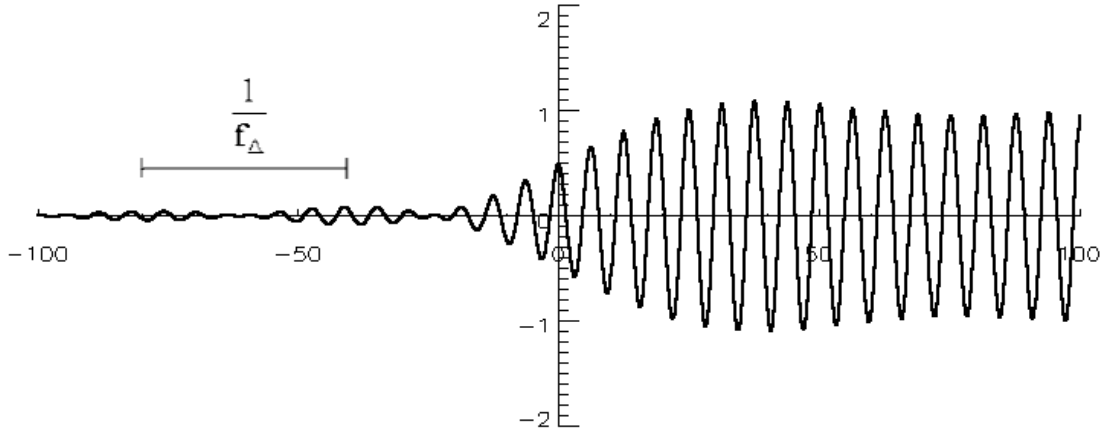


Abbildung 5.46: Antwort auf ein eingeschaltetes Cosinus-Signal

In Abbildung 5.45 ist ein eingeschaltetes Cosinus-Signal skizziert. Die Antwort eines idealen Bandpasses mit kleiner Bandbreite f_Δ ist in Abbildung 5.46 ist aufgezeichnet. Die Bandbreite des idealen Bandpasses, entspricht den Abständen $\frac{1}{f_\Delta}$ der Extrema der Hüllkurve.

(Siehe auch Lüke Kap. 5.4.5)

5.4.9. REALISIERUNG VON BANDPAßSYSTEMEN IM ÄQUIVALENTEN TIEFPAßBEREICH

Wie in Abbildung 5.46 zu sehen ist, kann man sagen:

$$\begin{aligned} g_T(t) &= \frac{1}{2}\cdot\left[s_T(t) * h_T(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[s_{T_r}(t) + j s_{T_i}(t)\right] * \left[h_{T_r}(t) + j h_{T_i}(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[s_{T_r}(t) * h_{T_r}(t)\right] + \frac{j}{2}\cdot\left[s_{T_r}(t) * h_{T_i}(t) + s_{T_i}(t) * h_{T_r}(t)\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[s_{T_i}(t) * h_{T_i}(t)\right] \end{aligned}$$

Spaltet man das Ergebnis in Real- und Imaginärteil auf, so ergibt sich:

$$\begin{cases} g_{T_r}(t) = \frac{1}{2}\cdot\left[s_{T_r}(t) * h_{T_r}(t) - s_{T_i}(t) * h_{T_i}(t)\right] \\ g_{T_i}(t) = \frac{1}{2}\cdot\left[s_{T_r}(t) * h_{T_i}(t) + s_{T_i}(t) * h_{T_r}(t)\right] \end{cases}$$

Die technische Realisierung dieser Aufspaltung sieht folgendermaßen aus:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

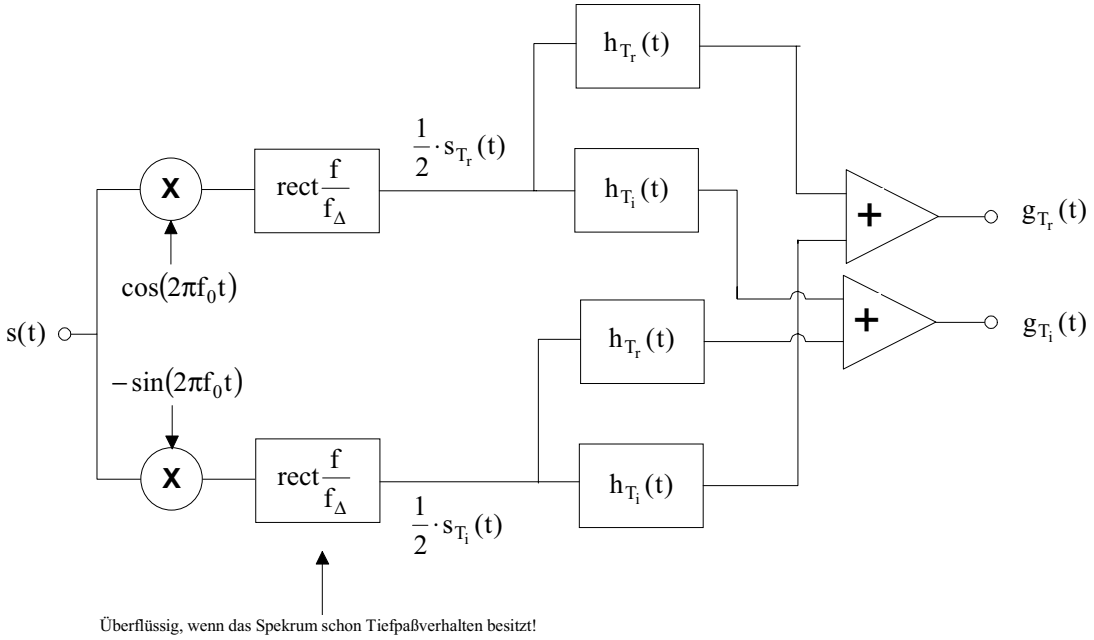


Abbildung 5.47: technische Realisierung dieser Aufspaltung

So sieht die Realisierung eines Bandpaßsystems im äquivalenten Tiefpaßbereich aus:

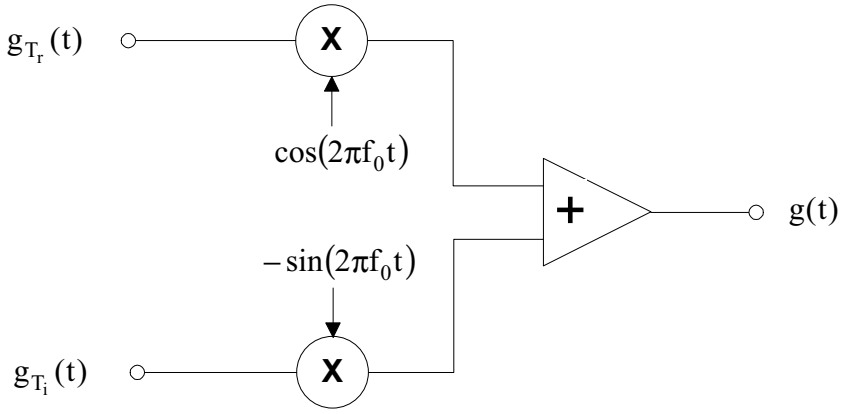


Abbildung 5.48: Bandpaßsystem im äquivalenten Tiefpaßbereich

Spezialfälle:

1. S(f) ist symmetrisch zur Mittenfrequenz f_0 (Realteil gerade; Imaginärteil ungerade)

$\Longrightarrow$ $S_T(f)$ ist symmetrisch zu f=0 (Realteil gerade; Imaginärteil ungerade)

$\Longrightarrow$ $s_T(t)$ ist reell $\quad s_{Ti}(t)=0$

Solche Signale heißen **symmetrische Bandpaßsignale**. Abbildung 5.49 zeigt ein solches System.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

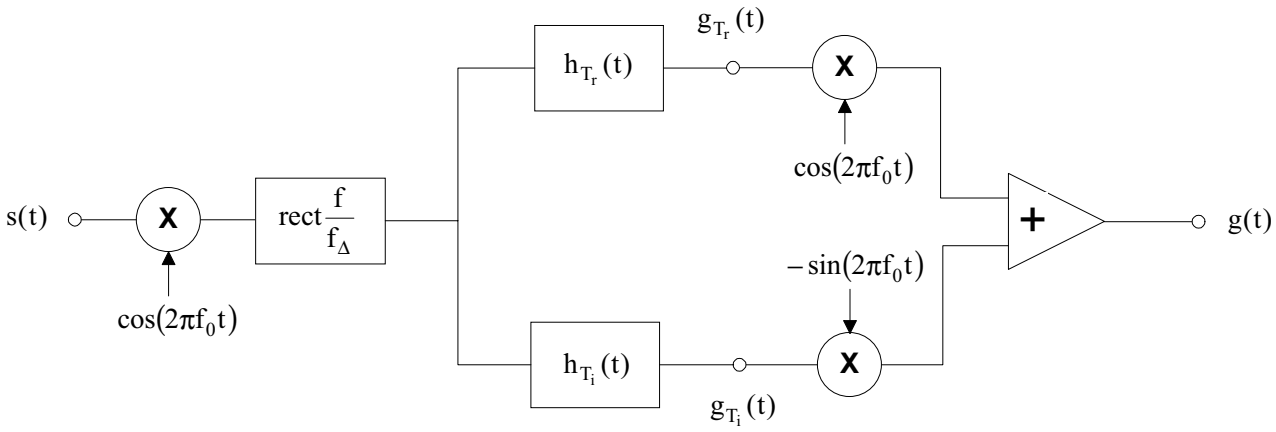


Abbildung 5.49: symmetrische Bandpaßsignale

Da $s_{Ti}(t)=0$, fällt im Gegensatz zu Abbildung 5.47 die Verarbeitung des Imaginärteils weg.

2. H(f) ist ein symmetrisches Bandpaßfilter

$\Longrightarrow h_{Ti}(t)=0$

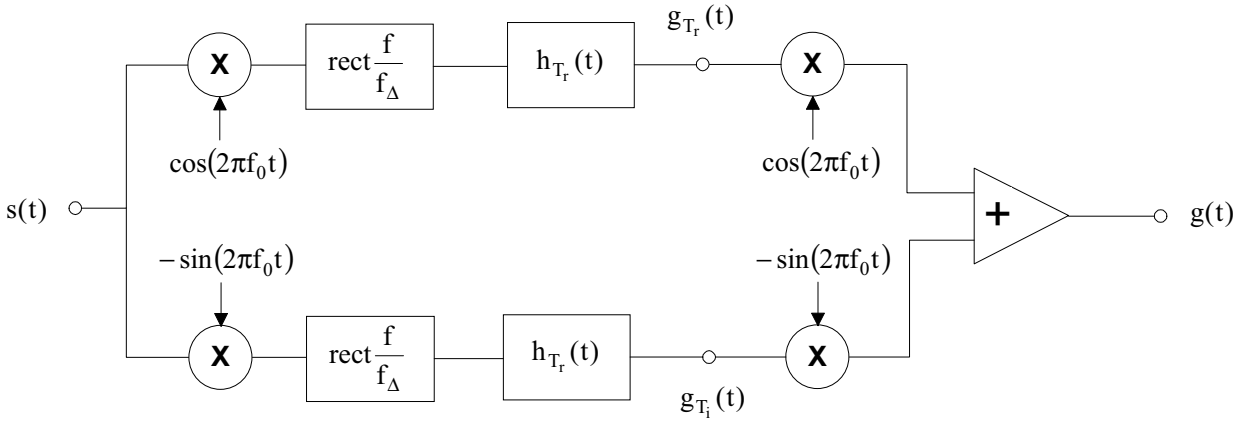


Abbildung 5.50: symmetrisches Bandpaßfilter

Das Filter besitzt nur einen Realteil. Dadurch fällt die Verarbeitung des Signals über den Imaginärteil des Filters weg.

3. Symmetrische Signale und symmetrisches Filter

$\Longrightarrow h_{Ti}(t)=0$ und $s_{Ti}(t)=0$. Es existieren nur die Realteile von Filter und Signal.

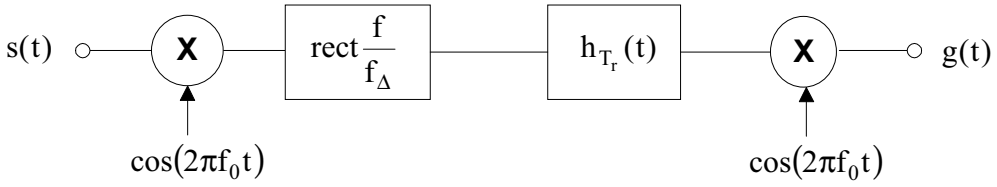


Abbildung 5.51: symmetrische Signale und symmtrisches Filter

Gibt es sowohl keinen Imaginärteil des Signals als auch des Filters, so stellt sich nur die reelle Verarbeitung dar.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Bildung der Einhüllenden – AM-Demodulation:

Es gilt die Darstellung in Betrag und Phase eines Ausgangssignals im äquivalenten Tiefpaßbereich:

$$g_T(t) = |g_T(t)| \cdot e^{j\Theta_g(t)} \qquad \text{mit} \qquad |g_T(t)| = \sqrt{g_{T_r}^2(t) + g_{T_i}^2(t)} \quad \text{reelle Einhüllende}$$

$$\text{und} \qquad \Theta_g(t) = \arctan\frac{g_{T_i}(t)}{g_{T_r}(t)}$$

In Abbildung 5.52 sieht man die technische Realisierung der Aufspaltung in Betrag und Phase. Dies ist allerdings nur mit einem Digitalrechner möglich.

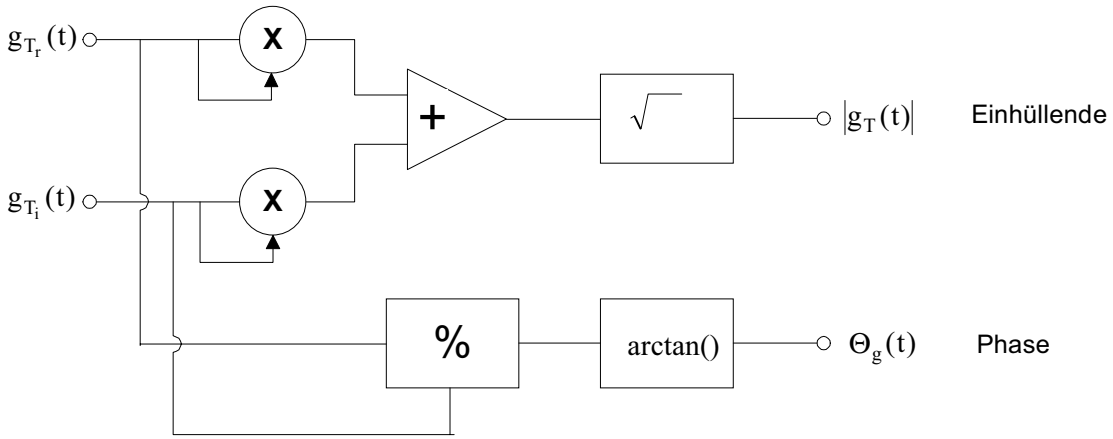


Abbildung 5.52: technische Realisierung der Aufspaltung in Betrag und Phase

5.4.10. ABTASTUNG VON BANDPAßSIGNALEN IM ÄQUIVALENTEN TIEFPAßBEREICH

Die Abtastung im äquivalenten Tiefpaßbereich scheint im Vorhinein günstiger zu sein, obwohl mehr Aufwand nötig ist, um erst das Signal im äquivalenten Tiefpaßbereich zu ermitteln. Da das Bandpaßsignal allerdings durch die höhere Frequenz von viel schnellerer Signaländerung betroffen ist, scheint eine Abtastung im Bandpaßbereich schwieriger. Wir betrachten ein begrenztes Tiefpaßspektrum $S_T(f)$. Die Abtastung des Tiefpaßsignals $s_T(t)$ ist mit einer Abtastfrequenz (Nyquist) von

$$f_{abt} = 2f_g = f_\Delta$$

möglich.
Nach der inversen Fouriertransformation des Tiefpaßspektrums sieht das Tiefpaßsignal nach dem in Kapitel 3 behandelten Interpolationstheorem (3.3) dann folgendermaßen aus:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T \cdot 2f_g) \cdot s_T(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_g(t-nT))$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (T \cdot 2f_g) \cdot s_{T_r}(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_g(t-nT))}_{=s_{T_r}(t)}$$

$$+ j \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (T \cdot 2f_g) \cdot s_{T_i}(nT) \cdot si(\pi \cdot 2f_g(t-nT))}_{=s_{T_i}(t)}$$

In Komponenten-schreibweise

Das Bandpaßsignal mit der Trägerfrequenz f_0 kann man nach (5.30) dann so schreiben:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_{T_r}(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) - s_{T_i}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T \cdot f_\Delta) \cdot s_{T_r}(nT) \cdot si(\pi \cdot f_\Delta(t-nT)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T \cdot f_\Delta) \cdot s_{T_i}(nT) \cdot si(\pi \cdot f_\Delta(t-nT)) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \qquad (5.43)$$

In der Abbildung 5.53 sieht man die Darstellung eines Bandpaßsignals s(t), welches zuerst in den äquivalenten Tiefpaßbereich gebracht und dann abgetastet wird. Mit Hilfe eines Tiefpasses interpoliert man die Funktion im äquivalenten Tiefpaßbereich durch si-Funktionen. Durch die Multiplikation des Realteiles mit dem Cosinus und des Imaginärteils mit dem negativen Sinus und anschließender Addition bekommt man das ursprüngliche Bandpaßsignal wieder. Allerdings werden hier keine Faktoren berücksichtigt.

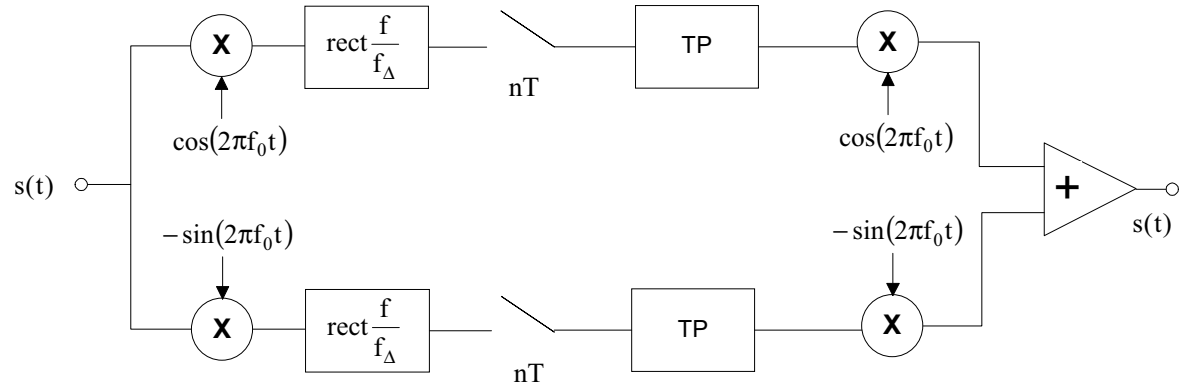


Abbildung 5.53: Bandpaßsignal im äquivalenten Tiefpaßbereich

Hierbei wird das Signal im äquivalenten Tiefpaßbereich abgetastet. Der Vergleich mit der direkten Abtastung im Bandpaßbereich ergibt folgendes:
Nach dem Nyquistkriterium gilt für die Mindestabtastfrequenz:

$$f_{abt} = 2 \cdot \left(f_0 + \frac{f_\Delta}{2} \right) = 2f_0 + f_\Delta$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

z.B.

$$\left.\begin{array}{l} f_0 = 10\,\text{GHz} \\ f_\Delta = 20\,\text{MHz} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{abt} = 20{,}020\,\text{GHz}$$

Hingegen wird bei der Abtastung im Tiefpaßbereich nur eine Abtastfrequenz von $f_{abt} = 20\,\text{MHz}$ benötigt.
Der große Vorteil dieser Art Abtastung ist also die geringere Abtastfrequenz, die nach Nyquist benötigt wird. Tastet man im Bandpaßbereich ab, so ist die hohe Abtastrate u.U. technisch kaum möglich.

5.4.11. ZEITDISKRETE VERARBEITUNG VON BANDPAßSIGNALEN

Wir wissen, daß aus der kontinuierlichen Faltung folgende zeitdiskrete wird (Abbildung 3.19):

$$g_T(t) = \frac{1}{2} s_T(t) * h_T(t)$$

$$\Downarrow$$

$$g_T(k) = \frac{1}{2} s_T(k) * \frac{h_T(k)}{f_{abt}}$$

Veranschaulicht sieht man in Abbildung 5.54, welches Ergebnis man mit der zeitdiskreten Verarbeitung erzielen will. Man erhält ein zeitdiskretes Ausgangssignal in Real- und Imaginärteil.

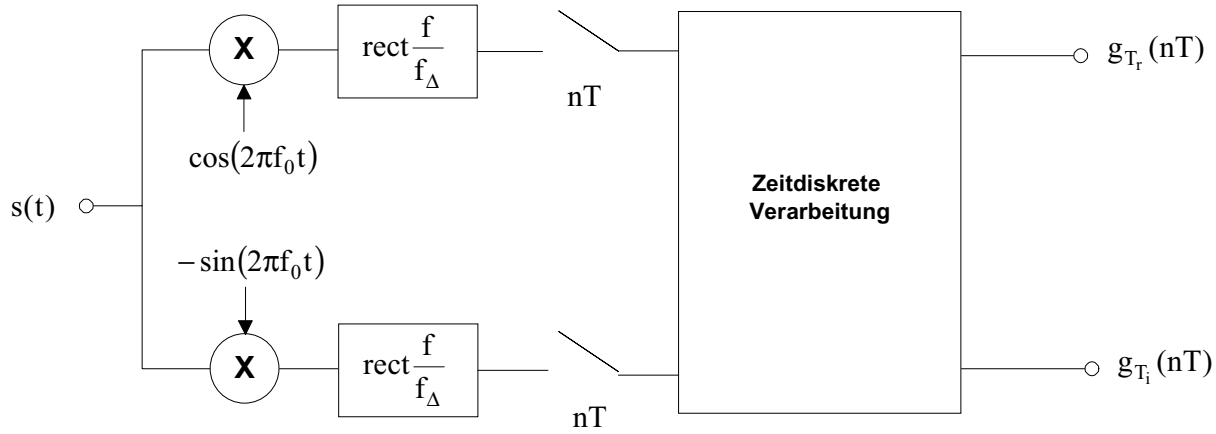


Abbildung 5.54: Ergebnis der zeitdiskreten Verarbeitung

In den meisten Fällen dieser Verarbeitung geht man nicht mehr in den Bandpaßbereich zurück, denn die Information ist im Tiefpaßsignal enthalten. Dort setzt die digitale Datenverarbeitung an (siehe Vorlesung Nachrichtenverarbeitung).

5.4.12. PHASEN- UND GRUPPENLAUFZEIT EINES SYSTEMS

Ein Bandpaßsystem H(f) mit rechteckförmiger Betragsübertragungsfunktion der Bandbreite f_Δ besitze einen schwach nichtlinearen Phasenverlauf $\varphi_H(f)$. Diese Phase wird im Durchlaßbereich

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

des Systems genügend genau durch die ersten Glieder einer Taylorreihenentwicklung um die Frequenz f_0 angenähert.

$$H(f) = H(f) \cdot \left[\text{rect}\frac{f}{f_\Delta} * [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] \right]$$

D.h. die Übertragungsfunktion ist begrenzt und um die Mittenfrequenzen f_0 und $-f_0$ verschoben.

Phasengang:

$$\varphi_H(f) = \arctan\frac{\text{Im}\{H(f)\}}{\text{Re}\{H(f)\}}$$

Taylorreihe

$$= \varphi_H(f_0) + \dot{\varphi}_H(f_0) \cdot (f - f_0) + \ldots$$

und $\varphi_H(-f) = -\varphi_H(f)$ (... weil arctan-Funktion)

Wenn der Phasengang in der Umgebung von f_0 nur schwach nichtlinear ist (höhergradige Glieder der Taylorreihe [„higher order terms“] $\rightarrow 0$) und die Bandbreite f_Δ klein gegenüber f_0 ist kann man schreiben:

$$\varphi_H(f) \cong \varphi_H(f_0) + \dot{\varphi}_H(f_0) \cdot (f - f_0)$$

Phasenlaufzeit Gruppenlaufzeit

Mit $t_p = -\frac{\varphi_H(f_0)}{2\pi f_0}$ und $t_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi_H(f)}{df}\Big|_{f=f_0} = -\frac{\dot{\varphi}_H(f_0)}{2\pi}$ gilt dann:

$$\varphi_H(f) = -2\pi f_0 \cdot t_p - t_g \cdot 2\pi(f - f_0) \tag{5.44}$$

und das Tiefpaßspektrum des Systems $H_T(f)$ ist dann mit der Schreibweise in Betrag und Phase:

$$H_T(f) = |H(f+f_0)| \cdot \text{rect}\frac{f}{f_\Delta} \cdot e^{j\varphi_H(f+f_0)}$$

$$H_T(f) \cong |H(f+f_0)| \cdot \text{rect}\frac{f}{f_\Delta} \cdot e^{-j2\pi f_0 \cdot t_p} \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_g} \tag{5.45}$$

Die Stoßantwort des Systems läßt sich dann über die inverse Fouriertransformation bestimmen.

$$h_T(t) \cong \mathcal{F}^{-1}\left\{ |H(f+f_0)| \cdot \text{rect}\frac{f}{f_\Delta} \cdot e^{-j2\pi f_0 \cdot t_p} \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_g} \right\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{ |H(f+f_0)| \cdot \text{rect}\frac{f}{f_\Delta} \right\} \cdot e^{-j2\pi f_0 \cdot t_p} * \delta(t - t_g)$$

$$= \tilde{h}_T(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 \cdot t_p} * \delta(t - t_g)$$

Die Stoßantwort ist um die Gruppenlaufzeit t_g verzögert. Die Phase des Ausgangssignals ist um t_p zum Eingangssignal verschieden.

Die Antwort des Systems auf ein Signal s(t) ist nach (5.29) und (5.39):

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = \mathrm{Re}\left\{\left(s_T(t) * \frac{1}{2} h_T(t)\right) \cdot e^{+j2\pi f_0 \cdot t}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\left(s_T(t) * \tilde{h}_T(t)\right) * \delta\left(t - t_g\right) \cdot e^{j2\pi f_0 \cdot (t - t_p)}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\tilde{g}_T\left(t - t_g\right) \cdot e^{j2\pi f_0 \cdot (t - t_p)}\right\}$$

Verzögerung des komplexen Trägers um die Phasenlaufzeit t_p

Verzögerung der komplexen Einhüllenden um die Gruppenlaufzeit t_g

Die Gruppenlaufzeit ergibt also eine Verzögerung der Einhüllenden und die Phasenlaufzeit eine Verzögerung der Trägerschwingung.
Bilder hierzu findet man im Lüke, Kapitel 5.4.7 .

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

6. MODULATIONSVERFAHREN – ÜBERTRAGUNG ANALOGER SIGNALE

In der Nachrichtentechnik liegen zum größten Teil modulierte Analogsignale (z.B. Sprach-, Ton- und Bildsignale) vor. Die Modulation dient der Anpassung eines zu übertragenden Signals an die Übertragungscharakteristik eines Übertragungskanals. Durch diverse Modulationsverfahren können mehrere Signale über einen Kanal übertragen werden. Es existieren lineare (AM) und auch nichtlineare Modulationsverfahren (PM, FM). Hier werden die grundlegenden Modulationsarten zur Übertragung analoger Signale erörtert.
Die Grundform jedes modulierten harmonischen Signals ist folgende:

$$\begin{aligned} m(t) &= a(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \\ &= a(t)\cdot\cos(\psi(t)) \end{aligned}$$

Im folgenden sei s(t) das zu übertragende Quellsignal (Tiefpaßsignal).

Spezialfälle:

1. $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi_0$

   $a(t) = L(s(t))$ Amplitudenmodulation $\Longrightarrow$ Die Amplitude beinhaltet die Information.

2. $a(t) = \text{const}$

   $\psi(t) = f(s(t))$ Winkel- oder Argumentmodulation $\Longrightarrow$ Information im Winkel

Bei Tiefpaßsignalen, die auf eine Trägerschwingung moduliert worden sind, gibt es die Möglichkeit, die Information in die Amplitude oder in den Phasenwinkel zu legen. Man kann auch zwei voneinander unabhängige Signale über einen Kanal schicken, indem man verschiedene Modulationsverfahren verwendet.
Technisch sieht die Modulation meist folgendermaßen aus:

$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(s(t))$ Modulation auf oder um einen konstantfrequenten Träger.

$$\begin{aligned} m(t) &= a(t)\cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j(2\pi f_0 t+\varphi(t))}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{a(t)\cdot e^{j\varphi(t)}\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{m_T(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \boxed{m_T(t) = a(t)\cdot e^{j\varphi(t)}} \qquad (6.1)$$

äquivalentes Tiefpaßsignal

Es enthält die gesamte Information (in Amplitude und/oder Phase).

Die Beschreibung von Modulationsverfahren im äquivalenten Tiefpaßbereich ist sehr elegant und effektiv möglich.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

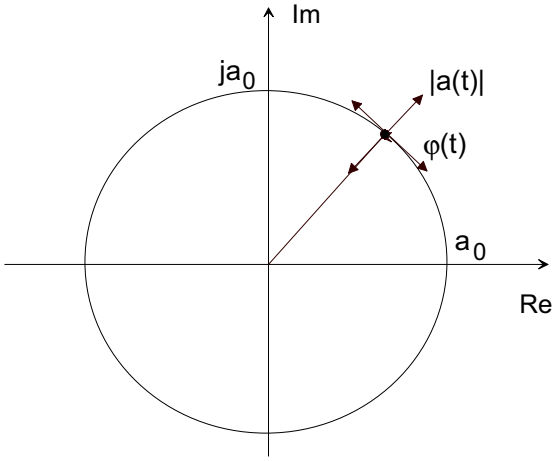


Abbildung 6.1: Tiefpaßsignal als Zeiger in der komplexen Ebene

Das Tiefpaßsignal kann man wie in Abbildung 6.1 erkennbar in der komplexen Ebene als Zeiger abbilden. Die Phasenlage entspricht dem Winkel gegenüber der reellen Achse. Ist das Signal phasenmoduliert, steckt die Information in diesem Winkel. Die Länge des Zeigers entspricht der momentanen Amplitude des Signals. Durch deren Variation kann man ein Signal amplitudenmodulieren.

Betrachte man nun die Eigenschaften von a(t):

1. $a(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad s_T(t) = |a(t)| \cdot e^{j\varphi(t)}$
$s_T(t) \cdot \mathrm{sgn}(a(t)) = m_T(t)$

2. $a(t) < 0$ oder $a(t) > 0 \Rightarrow \quad a(t) = \mathrm{sgn}(a(t)) \cdot |a(t)|$

$$\Rightarrow \quad m_T(t) = \mathrm{sgn}(a(t)) \cdot |a(t)| \cdot e^{j\varphi(t)}$$

$$= |a(t)| \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot \underbrace{e^{j[1-\mathrm{sgn}(a(t))]\frac{\pi}{2}}}_{\mathrm{sgn}(a(t))}$$

$$= |a(t)| \cdot e^{j\left[\varphi(t)+[1-\mathrm{sgn}(a(t))]\frac{\pi}{2}\right]}$$

Das bedeutet, daß Vorzeichenwechsel von a(t) Phasensprünge um π verursachen. D.h. die Amplitudeninformation wird auf die Phaseninformation abgebildet.

Interaktives Lernprogramm zu den Modulationsarten von Didactronic©:
http://www.hof.de/~tronic/programme/amfmpm.zip

6.1. LINEARE MODULATIONSVERFAHREN

Linearität ist folgendermaßen definiert:

$$s(t) = \sum_i a_i \cdot s_i(t) \quad \xrightarrow{\text{Linearität}} \quad m_T(t) = \sum_i a_i \cdot m_{T_i}(t)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Ein System ist linear, wenn a_i als konstanter Faktor des Eingangssignals im Ausgangssignal unverändert erhalten bleibt.
Diese Linearität ist nur bei der Amplitudenmodulation gegeben!

6.1.1. AMPLITUDENMODULATION

Bei der Amplitudenmodulation (AM) wird die Amplitude durch das Nutzsignal s(t) zu einer variablen Amplitude a(t) umgewandelt. Das Nutzsignal ist nun als Hüllkurve der Trägerschwingung zu verstehen. In Abbildung 6.2 ist die Zeigerdarstellung des amplitudenmodulierten Signals zu betrachten.

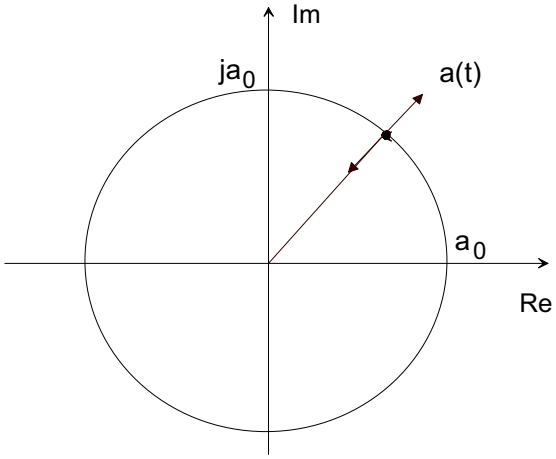


Abbildung 6.2: Zeigerdarstellung des amplidutenmodulierten Signals

$$a(t) = a_0 + k \cdot s(t) \qquad \text{mit } |s(t)| < 1$$
$$= a_0 \cdot \left[1 + \frac{k}{a_0} \cdot s(t)\right]$$

Mit dem sogenannten Amplitudenmodulationsgrad. wird das Verhältnis der Amplitudenänderung der modulierten Trägerschwingung zur Amplitude a_0 des unmodulierten Trägers bezeichnet. Er ist ein Maß für die Intensität der Modulation.

Für $a(t) \geq 0$ muß gelten:

$$a_{min} \geq 0 \qquad \text{mit} \qquad a_{min} = a_0 \cdot \left[1 - \frac{k}{a_0} \cdot |s(t)|\right]$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{k}{a_0} \cdot |s(t)| \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{k}{a_0} \cdot |s(t)| \overset{!}{\leq} 1$$

Da vereinbarungsgemäß $|s(t)| < 1$, beschreibt $\frac{k}{a_0}$ die maximale Amplitude des Wechselanteil.

Man definiert:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Maximale Amplitudenänderung der modulierten Trägerschwingung

Amplitude des unmodulierten Trägersignals

$$\frac{k}{a_0} = \mu_{AM} \tag{6.2}$$

Amplitudenmodulationsgrad

$$\Rightarrow \boxed{a(t) = a_0 \cdot [1 + \mu_{AM} \cdot s(t)]} \quad \text{mit } |s(t)|_{max} < 1 \tag{6.3}$$

Den Modulationsgrad kann man am Oszilloskop verdeutlichen, in dem man das unmodulierte Quellsignal an die Horizontalablenkung und das modulierte Signal an die Vertikalablenkung anlegt. Es entsteht ein sogenanntes *Modulationstrapez* (siehe Abbildung 6.3). In diesem Fall gilt für den Modulationsgrad die Definition:

$$\mu_{AM} = \frac{b - c}{b + c}$$

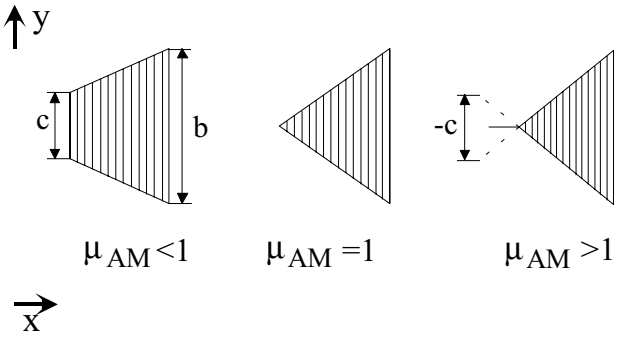


Abbildung 6.3: Modulationstrapez

- **Bedeutung für das modulierte Signal:**

Man setze:

$s(t) = \cos(2\pi f_s t)$ cosinusförmiges Quellsignal mit der Amplitude 1

$$\Rightarrow a(t) = a_0 \cdot [1 + \mu_{AM} \cdot \cos(2\pi f_s t)]$$

Daraus ergibt sich das amplitudenmodulierte Signal m(t) mit der Trägerfrequenz f_0 ohne Phasenoffset:

$$\begin{aligned} m(t) &= a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \qquad \text{mit } \varphi_0 = 0 \\ &= a_0 \cdot [1 + \mu_{AM} \cdot \cos(2\pi f_s t)] \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &= a_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \cdot a_0 \cdot \mu_{AM} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_s t) \\ &= a_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \cdot a_0 \cdot \frac{\mu_{AM}}{2} \cdot \underbrace{[\cos(2\pi (f_0 + f_s) t) + \cos(2\pi (f_0 - f_s) t)]}_{\text{Additionstheorem}} \end{aligned}$$

Abbildung 6.4 zeigt das Betragsspektrum dieses modulierten Signals.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

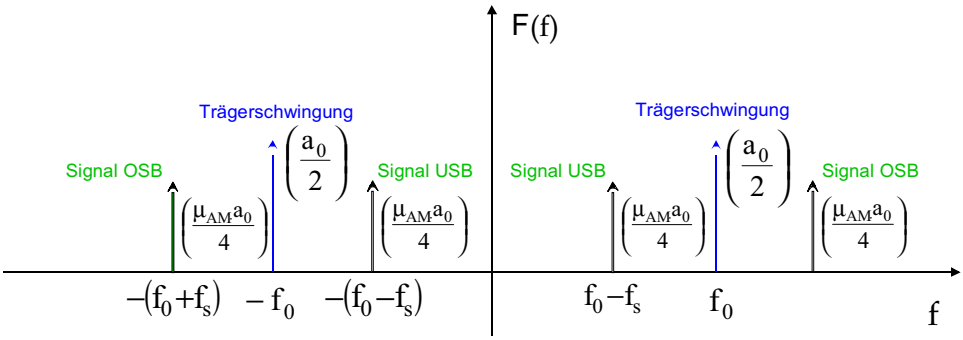


Abbildung 6.4: Betragsspektrum des modulierten Signals

Die Addition des Gleichanteils a_0 sorgt für das Auftreten der Trägerschwingung. Das nennt man dann Amplitudenmodulation mit Träger. Andererseits kann man den Träger im Spektrum unterdrücken, wenn $a_0 = 0 \Rightarrow \mu_{AM} \to \infty$.

Die in Abbildung 6.4 dargestellte Amplitudenmodulation nennt man **Zweiseitenbandmodulation (ZSB, DSB)**, da die Information im oberen und unteren Seitenband gleich vertreten ist. Es ist eine gewisse Redundanz enthalten, wie wir weiter unten erkennen werden.

- **Allgemeines Spektrum eines amplitudenmodulierten Signals**

Allgemein gilt:

$$m_T(t) = a(t)\cdot e^{j\varphi_0}$$
$$\text{Mit } \varphi_0 = 0$$

$$m_T(t) = a(t) \Rightarrow \text{reell}$$

$$M_T(f) = A(f)\cdot e^{j\varphi_0} = A(f)$$
$$A(f) = a_0 \cdot \left[\delta(f) + \frac{k}{a_0}\cdot S(f)\right]$$

Nach (5.37) gilt für das modulierte Bandpaßsignal:

$$M(f) = \frac{1}{2}\cdot\left[M_T(f-f_0) + M_T^*(-(f+f_0))\right]$$
$$= \frac{a_0}{2}\cdot[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] + \frac{\mu_{AM}\cdot a_0}{2}\cdot\left[S(f-f_0)+S^*(-(f+f_0))\right]$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

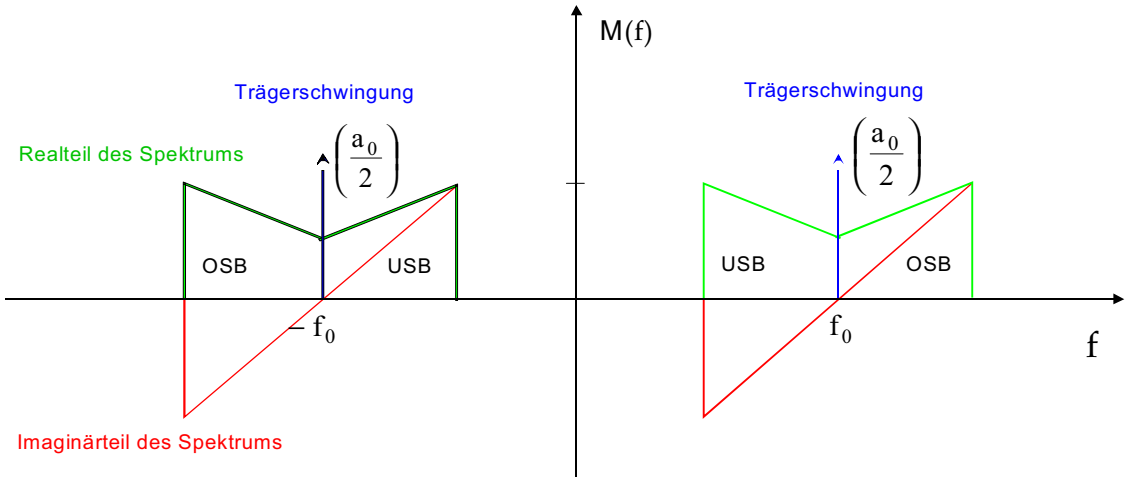


Abbildung 6.5: Einseitenbandmodulation

Wie in Abbildung 6.5 zu erkennen ist, ist offensichtlich das untere Seitenband (USB) die gespiegelte Version des oberen Seitenbandes (OSB). Also ist eines der Bänder redundant. Die Übertragung eines Seitenbandes genügt. Das nennt man dann Einseitenbandmodulation. Diese Modulation hat den Vorteil, daß mehr Kanäle über ein bestimmtes Frequenzband übertragen werden können. Das Frequenzband pro Kanal braucht nur halb so breit zu sein.

6.1.2. INKOHÄRENTER EMPFANG IN AM-SYSTEMEN

Ein inkohärenter Empfänger ist ein Hüllkurvendemodulator, auf den schon in Kapitel 5 (Abbildung 5.38) eingegangen wurde. Er bildet die Einhüllende des Ausgangssignals.
Nur für $\mu_{AM} \leq 1$ ist eine Hüllkurvendemodulation möglich. Für $\mu_{AM} > 1$ (Übermodulation) treten Verzerrungen auf.

- **Quadraturempfänger**

In Abbildung 6.6 wird die technische Realisierung eines Quadraturempfängers erläutert. Durch Betragsbildung aus Real- und Imaginärteil (Quadraturkomponenten) des äquivalenten Tiefpaßsignals wird die Hüllkurve ermittelt.

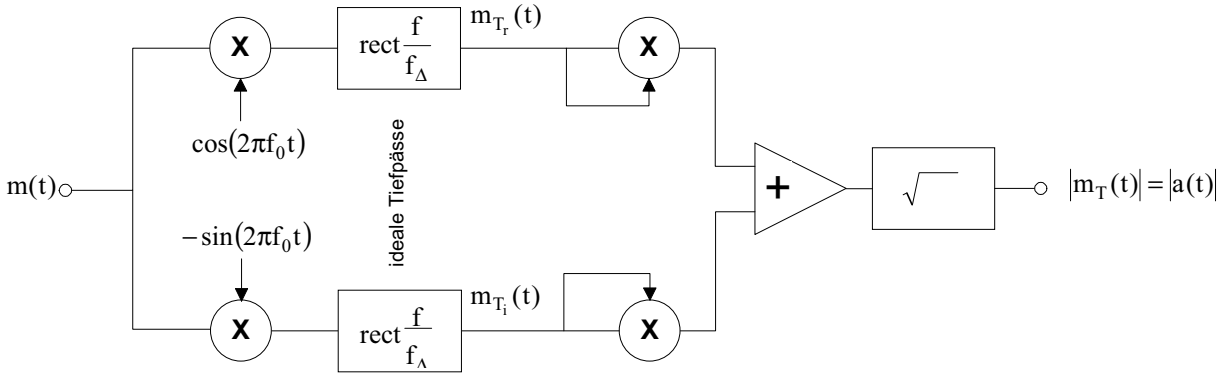


Abbildung 6.6: technische Realisierung eines Quadraturempfängers

Abbildung 6.6 zeigt die technische Verwirklichung bei reellen Bandpaßsignalen. Der Imaginärteil fällt durch die Betragsbildung bei Quadraturempfängern weg.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

- **Geradeausempfänger (Homodynempfänger)**

Eine andere Möglichkeit zur Ermittlung der Hüllkurve ist der Geradeausempfänger. Zuerst passiert das modulierte Signal einen Bandpaß mit der Trägerfrequenz als Mittenfrequenz. Der Doppelweggleichrichter fungiert als Betragsbildner des modulierten Signals. Der Tiefpaß erzeugt näherungsweise die Hüllkurve.

Abbildung 6.7: Geradeausempfänger

- **Zwischenfrequenzempfänger/Überlagerungsempfänger (Heterodynempfänger)**

Oft wird vom AM-Demodulator gefordert, daß er Signale mit verschiedener Trägerfrequenz demodulieren kann. Der Quadraturempfänger ist dazu gut geeignet, da nur die Oszillatorfrequenz verändert werden muß. Der Geradeausempfänger allerdings muß das Übertragungsverhalten des Bandpasses ändern. Um diese Problem zu umgehen, hat man den Zwischenfrequenzempfänger entwickelt. Die technische Realisierung ist in Abbildung 6.8 zu betrachten.

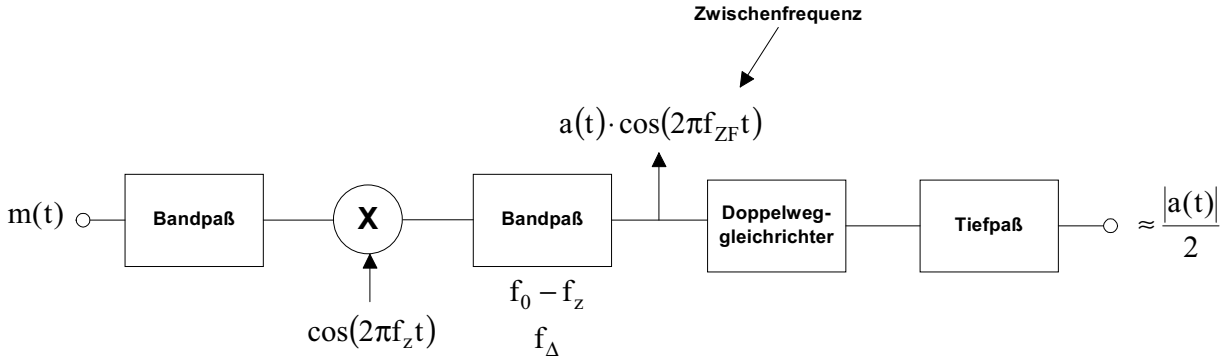


Abbildung 6.8: technische Realisierung des Geradeausempfängers

Der Zwischenfrequenzempfänger ist eine Abwandlung des Geradeausempfängers, bei der das amplitudenmodulierte Eingangssignal mit der Trägerfrequenz f_0 zunächst mit einem Cosinus-Signal der einstellbaren Frequenz f_z multipliziert wird. Im nachfolgenden Geradeausempfänger kann dieses neue Signal dann mit einem Korrelationsfilter der festen Mittenfrequenz $(f_0-f_z)=f_{ZF}$ empfangen werden.
Das modulierte Eingangssignal sieht so aus:

$$m(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

Durch die Multiplikation mit der variablen Frequenz f_z zeigt sich:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$m(t)\cdot\cos(2\pi f_z t) = a(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)\cdot\cos(2\pi f_z t)$$
$$= \frac{a(t)}{2}\cdot\left[\cos(2\pi(f_0+f_z)t)+\cos(2\pi(f_0-f_z)t)\right]$$
$$= \frac{a(t)}{2}\cdot\left[\cos(2\pi(f_0+f_z)t)+\underbrace{\cos(2\pi f_{ZF}t)}_{\substack{\text{wird durch den zweiten}\\ \text{Bandpaß selektiert}}}\right]$$

Nach dem zweiten Bandpaßfilter um die Zwischenfrequenz f_{ZF} ergibt sich folgendes Signal:

$$\frac{a(t)}{2}\cdot\cos(2\pi f_{ZF}t)$$

Durch die Betragsbildung und den Tiefpaß ergibt sich am Ausgang $\frac{|a(t)|}{2}$.

Der Zwischenfrequenzempfänger hat seine Vorteile insbesondere bei höheren Trägerfrequenzen.

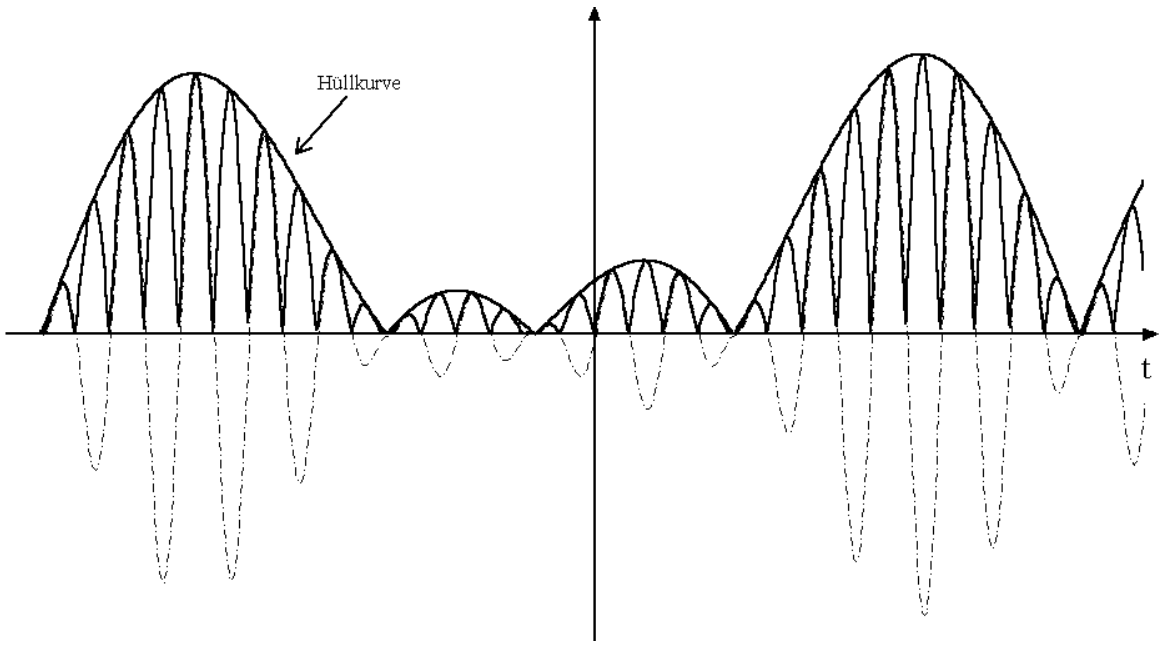


Abbildung 6.9: Ergebnis der Hüllkurvendemodulation

In Abbildung 6.9 sieht man das Ergebnis der Hüllkurvendemodulation. |a(t)| entspricht nicht ganz der Hüllkurve, da man bei der Überlegung die Auf- und Entladekurven der verwendeten Kapazitäten außer acht läßt. Ein Tiefpaß wird folglich nie exakt die Hüllkurve herausfiltern.

Siehe auch im WWW zur Amplitudenmodulation:
http://www.math.tu-cottbus.de/institut/nam/cdrom/daten/part_3a/node187.htm#SECTION00533000000000000000
http://mwtb.e-technik.uni-ulm.de/world/lehre/signale+stoerungen/ammodweiter.html
http://vulcain.fb12.tu-berlin.de/ILR/Aquarius/Telemetrie/am.html
http://wkweb4.cableinet.co.uk/simon.collings/Modulation/AM.htm#AmplitudeModulation
http://robotics.eecs.berkeley.edu/~sastry/ee20/modulation/node3.html
http://web.wse.nadn.navy.mil/wse/academic/courses/es310/Lectures/AM.htm
http://www.avista.com/AppNotes/PhaseNoise/page1.html

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

6.1.3. EINSEITENBANDMODULATION

Wie schon in Kapitel 6.1.1 erwähnt, ist es manchmal nützlich, ein Seitenband zu unterdrücken, um mehr Kanäle in einem Frequenzband unterzubringen. Es gibt zwei Möglichkeiten, dies zu tun:

- Filtermethode: Verwendung steilflankiger und schmalbandiger Bandpaßfilter
- Phasenmethode: Verwendung analytischer Signale (Hilberttransformation)

1. Filtermethode mit einem Bandpaßfilter:

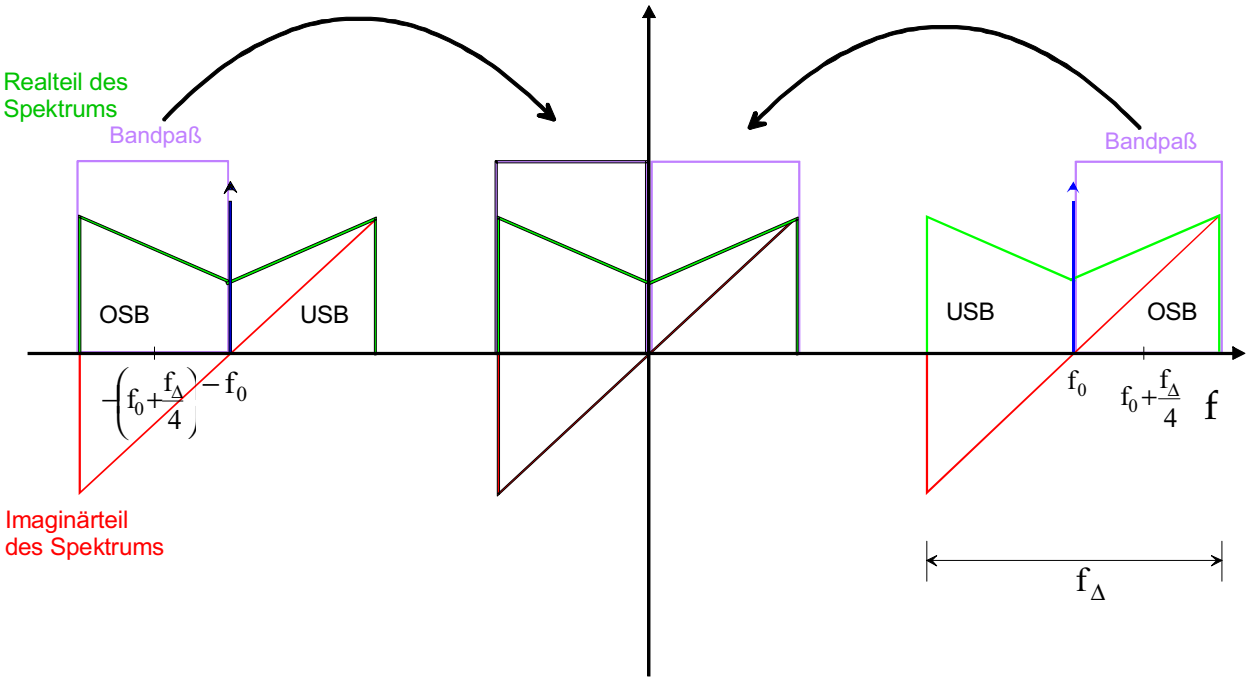


Abbildung 6.10: Filtermethode mit einem Bandpaßfilter

Bandbreite des Filters: $\frac{f_\Delta}{2}$

Mittenfrequenz des oberen Seitenbandes: $f_0+\frac{f_\Delta}{4}$

Es wird nur das obere (bzw. untere) Seitenband des Signals übertragen. Dies geschieht über einen idealen Bandpaß. Möchte man das Tiefpaßsignal zurückgewinnen, so multipliziert man wieder mit einem Cosinus-Signal der Frequenz f_0. Nach der Tiefpaßfilterung erhält man wieder das Originalsignal.
Allerdings sind solche steilflankigen Filter nicht ohne weiteres zu realisieren. Darum nutzt man in der Praxis die Restseitenbandmodulation. Hierzu braucht man keine steilflankigen Filter. Hierbei wird der im oberen Seitenband aufgrund der Filterflanke endlicher Steilheit fehlende Anteil in einem Teil des unteren Seitenbandes übertragen. Beispiele zur Einseiten- und Restseitenbandmodulation findet man im Lüke, Kapitel 8.1.5 oder in der praktischen Übungen Teil 2 zur Allgemeinen Nachrichtentechnik (Fernsehtechnik).

Zur Restseitenbandmodulation im WWW:
http://mwt.e-technik.uni-ulm.de/world/lehre/signale+stoerungen/restseitenband.h.tml

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

2. Phasenmethode

Für reelle Quellsignale ist das modulierte Signal auch reell und es gilt für das Spektrum des modulierten Signals:

$$M_{T_r}(f) = M_{T_r}(-f)$$
$$M_{T_i}(f) = -M_{T_i}(-f)$$

mit $a_0 = 0$, $a(t) = k \cdot s(t)$ und $m_T(t) = a(t)$

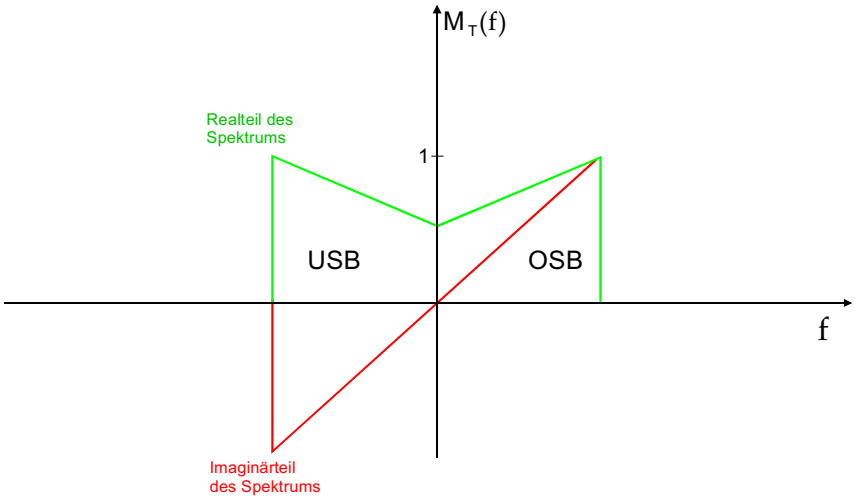


Abbildung 6.11: Tiefpaßspektrum des modulierten Signals

Aus dem in Abbildung 6.11 dargestellten Tiefpaßspektrum soll nun das analytische Spektrum in Abbildung 6.12 werden.

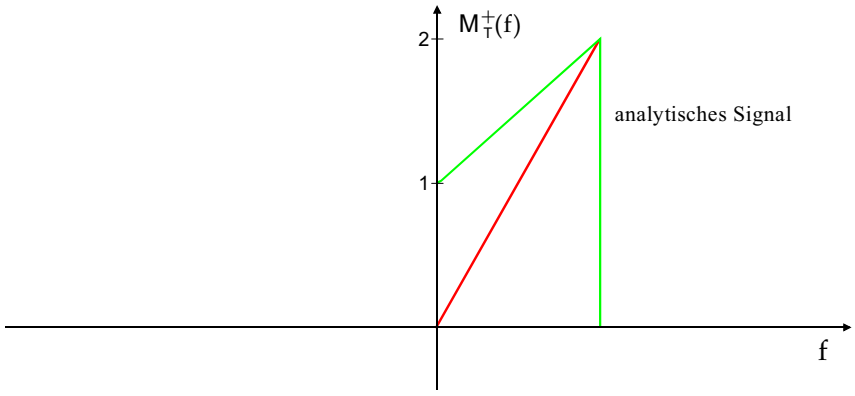


Abbildung 6.12: analytisches Spektrum

<u>Erzeugung des oberen Seitenbandes:</u>

Die Idee ist die Unterdrückung eines Seitenbandes vor der Modulation (also im Tiefpaßbereich). Hier sollen nun die negativen Frequenzen von $M_T(f)$ durch die Erzeugung eines analytischen Signals unterdrückt werden (siehe Kapitel 5.4.4 (Hilberttransformation)).

$$m_T^+(t) = m_T(t) + \underbrace{j \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_T(\tau) \cdot \frac{1}{t-\tau} d\tau}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Hilberttransformation

Die Umwandlung in ein analytisches Signal ergibt ein nur positives Spektrum, welches doppelt so hoch ist, wie das Ursprüngliche. (Siehe Abbildung 6.11 und Abbildung 6.12)

$$M_T^+(f) = 2 \cdot M_T(f) \qquad \text{für } f \geq 0$$

$$M_T^+(f) = 0 \qquad \text{für } f < 0$$

Erzeugung des unteren Seitenbandes:
Nun werden die positiven Frequenzen von $M_T(f)$ unterdrückt.

$$M_T^-(f) = 2 \cdot M_T(f) - M_T^+(f)$$

$$m_T^-(t) = 2 \cdot m_T(t) - \left[m_T(t) + j \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_T(\tau) \cdot \frac{1}{t-\tau} d\tau \right]$$

$$= m_T(t) - j \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_T(\tau) \cdot \frac{1}{t-\tau} d\tau$$

In Abbildung 6.13 sieht man nun die technische Realisierung des Modulators:

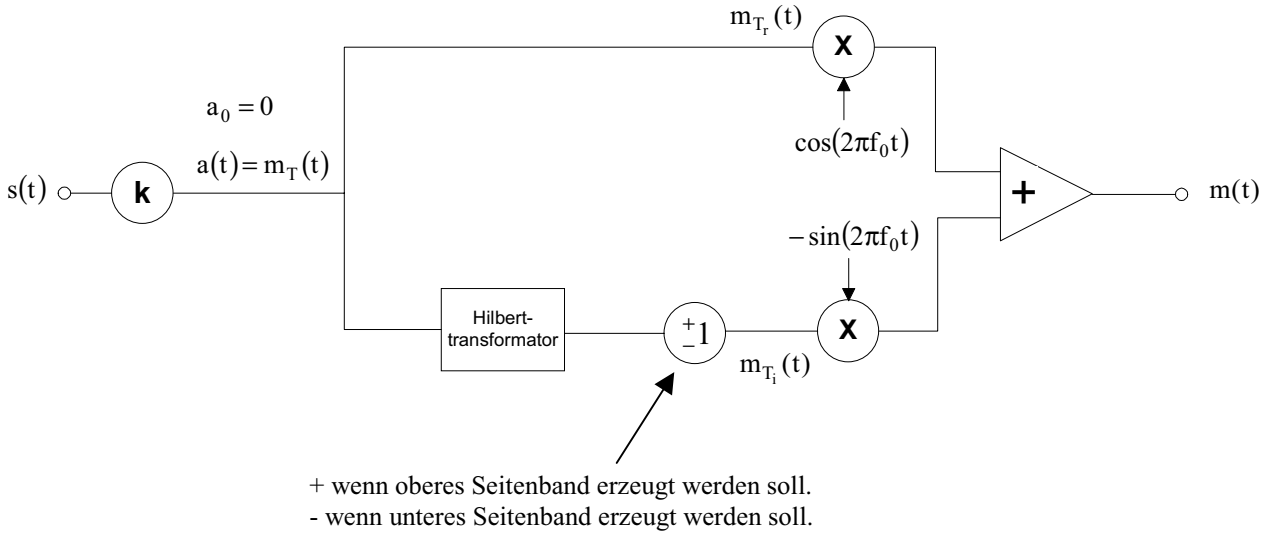


Abbildung 6.13: technische Realisierung des Modulators

Nebenrechnung zur Erläuterung der Multiplikation der Sinus- und Cosinussignale zum Erhalt des modulierten Signals (nach Voraussetzung reell):

$$m(t) = \mathrm{Re}\left\{ m_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \left(m_{T_r}(t) + j \cdot m_{T_i}(t) \right) \cdot \left(\cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t) \right) \right\}$$

$$= m_{T_r}(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) - m_{T_i}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

Die Stoßantwort des Hilberttransformators sieht folgendermaßen aus:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$h_{HT}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot \frac{1}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi \cdot t}$$

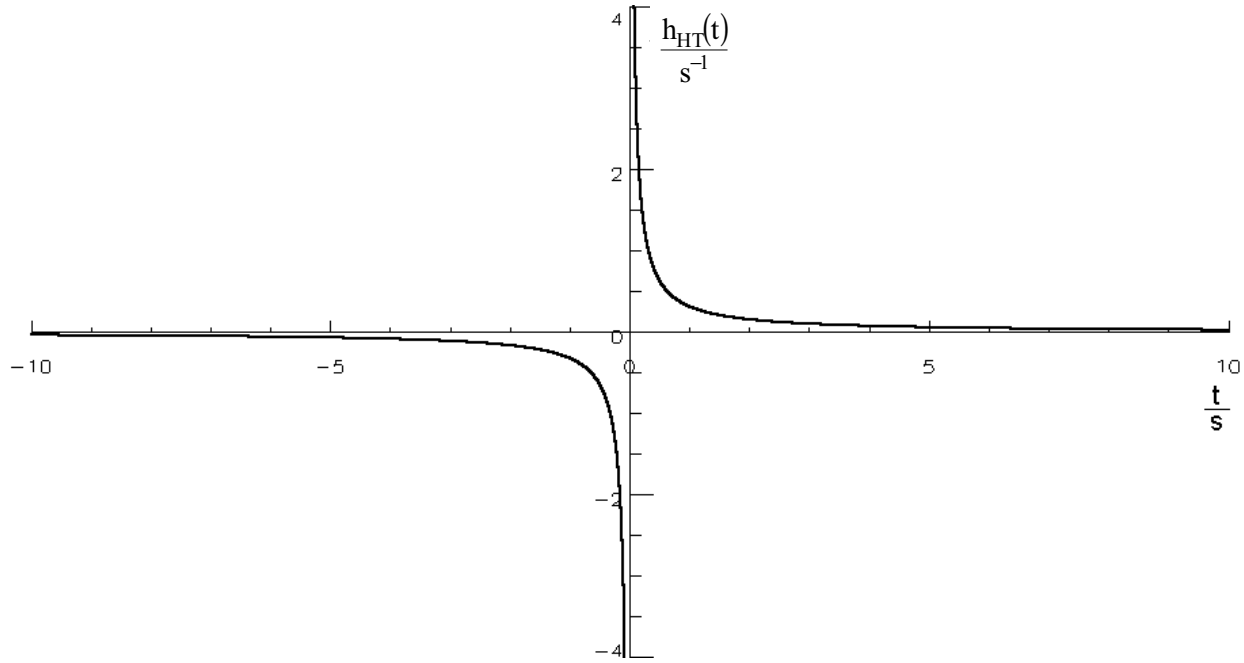


Abbildung 6.14: Stoßantwort des Hilberttransformators

Diese Funktion ist durch ein kausales Filter (digitale Signalverarbeitung) beliebig genau zu realisieren (siehe Vorlesung Nachrichtenverarbeitung).

6.2. WINKELMODULATIONSVERFAHREN

Die Winkelmodulation basiert auf der Zeitabhängigkeit der Momentanfrequenz. In der Zeigerdarstellung (Abbildung 6.15) kann man erkennen, daß sich der Phasenwinkel mit dem Nutzsignal ändert.

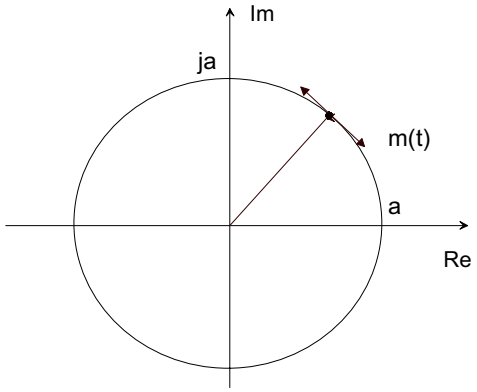


Abbildung 6.15: Zeigerdarstellung von Phasenwinkel und Nutzsignal

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$m(t) = a \cdot \cos(\psi(t)) = \mathrm{Re}\left\{a \cdot e^{j\psi(t)}\right\}$$

mit

spektrale Verschiebung

$$\psi(t) = f(s(t)) = 2\pi f_0 t + \varphi(t) \quad \Longrightarrow \text{technische Realisierung}$$

$$m(t) = \mathrm{Re}\left\{a \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{m_T(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{m_T(t) = a \cdot e^{j\varphi(t)}} \qquad (6.4)$$

äquivalentes Tiefpaßsignal

Augenblicksfrequenz und Augenblicksphase des winkelmodulierten Signals:
Man betrachte:

$$m^+(t) = 2 \cdot a \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \varphi(t))} = 2 \cdot a \cdot e^{j\psi(t)}$$

Es handelt sich hier um das analytische Signal. Die Amplitude ist darum doppelt so groß als beim nichtanalytischen (siehe Kap. 6.1.3, Phasenmethode)

$$\boxed{\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t)} \qquad (6.5)$$

Momentanphase

$$\boxed{f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\psi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \dot{\varphi}(t)} \qquad (6.6)$$

Momentanfrequenz (instantaneous frequency)

Bei den Winkelmodulationsverfahren steckt die Information in der Phase bzw. der Frequenz.

6.2.1. Phasenmodulation und Frequenzmodulation

- **Phasenmodulation (PM):**

Wir wählen $\varphi(t) = \gamma_0 \cdot s(t)$. Die Information ist also in der Phase enthalten.

Modulationsindex

$\Longrightarrow$ Die Momentanphase $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \gamma_0 \cdot s(t)$ ist eine affine Funktion des Quellsignals (d.h. mit Konstant- und Linearanteil).

$\Longrightarrow$ Die Momentanphase des äquivalenten Tiefpaßsignals $\varphi(t) = \gamma_0 \cdot s(t)$ ist eine lineare Funktion des Quellsignals.

Der Modulationsindex ist in der Bedeutung vergleichbar mit dem Modulationsgrad bei der Amplitudenmodulation.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Momentanfrequenz des modulierten Signals ist:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \dot{\varphi}(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \gamma_0 \cdot \dot{s}(t)$$

$\Rightarrow$ Die Momentanfrequenz des modulierten Signals ist eine affine Funktion der Ableitung des Quellsignals.

Die Momentanfrequenz des äquivalenten Tiefpaßsignals ist $f_{i\,TP} = \frac{1}{2\pi} \cdot \gamma_0 \cdot \dot{s}(t)$.

Darin steckt die Ableitung des Informationssignals.

Siehe auch im WWW zu Phasenmodulation:
http://mwtb.e-technik.uni-ulm.de/world/lehre/signale+stoerungen/phasenmodulation.html
http://www.avista.com/AppNotes/PhaseNoise/page1.html

- **Frequenzmodulation (FM):**

Wir wählen:

$$\varphi(t) = \gamma_0 \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau \tag{6.7}$$

Dies entspricht der Phasenmodulation mit dem Integral des Quellsignals.

Die Momentanphase des frequenzmodulierten Signals ist:

$$\psi_{FM}(t) = 2\pi f_0 t + \gamma_0 \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau$$

Die Momentanfrequenz des modulierten Signals ist

$$f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \dot{\varphi}(t) = f_0 + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \cdot \gamma_0 \cdot s(t)}_{f_{i\,TP}(t)}$$

$\Rightarrow$ Die Momentanfrequenz des modulierten Signals ist eine affine Funktion des Quellsignals.

$\Rightarrow$ Die Momentanfrequenz des äquivalenten Tiefpaßsignals ist $f_{i\,TP}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \gamma_0 \cdot s(t)$.

$\Rightarrow$ Die Momentan*frequenz* des äquivalenten Tiefpaßsignals ist eine lineare Funktion des Quellsignals.

Siehe auch im WWW zu Frequenzmodulation:
http://mwtb.e-technik.uni-ulm.de/world/lehre/signale+stoerungen/frequenzmodulation.html
http://wkweb4.cableinet.co.uk/simon.collings/Modulation/FM.htm#FrequencyModulation
http://robotics.eecs.berkeley.edu/~sastry/ee20/modulation/node4.html
http://web.wse.nadn.navy.mil/wse/academic/courses/es310/Lectures/FM.htm

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

D.h. bei der Phasenmodulation ist die Frequenz linear zur Ableitung des Signals und bei der Frequenzmodulation linear zum Signal selbst.

Zusammenhänge zwischen Phasen- und Frequenzmodulation:

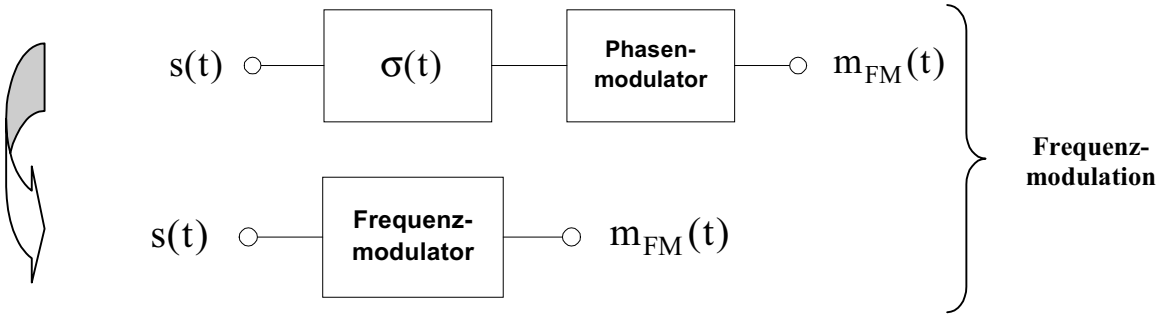


Abbildung 6.16: Frequenzmodulation

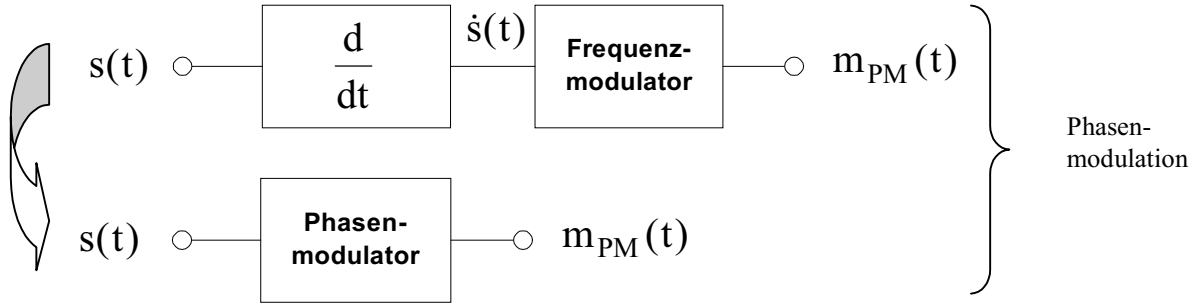


Abbildung 6.17: Phasenmodulator

Ohne Kenntnis des Quellsignals s(t) ist die Frequenzmodulation nicht von der Phasenmodulation zu unterscheiden. D.h. die Winkelmodulationsverfahren Phasen- und Frequenzmodulation sind signaltheoretisch äquivalent.

6.2.2. Das Spektrum eines winkelmodulierten Signals

Wir betrachten das äquivalente Tiefpaßsignal:

$$m_T(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot a \cdot e^{j\varphi(t)}$$ Energiesignal wegen der begrenzten Dauer

mit dem Spektrum

$$M_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot a \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Dieses Integral ist im allgemeinen nicht geschlossen lösbar, da das Argument nicht stetig differenzierbar ist.

Methoden zur Lösung:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

- **Asymptotische Näherung mit der Methode der stationären Phase**

Allgemein gilt (2.95):

$$N(k)=\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-\frac{c+b}{2}}{b-c}\right)\cdot f(t)\cdot e^{jk\mu(t)}dt$$

Wir vergleichen dieses Integral mit

$$M_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot a\cdot e^{j[\varphi(t)-2\pi ft]}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot a\cdot e^{-j2\pi f\cdot\left[-\frac{\varphi(t)}{2\pi f}+t\right]}dt$$

mit

$$b=\frac{T}{2} \qquad k=-2\pi f$$

$$c=-\frac{T}{2} \qquad \mu(t)=-\frac{\varphi(t)}{2\pi f}+t$$

$$f(t)=a$$

und

$$\dot{\mu}(t)=1-\frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi f}$$

$$\ddot{\mu}(t)=-\frac{\ddot{\varphi}(t)}{2\pi f}$$

erhält man den stationären Punkt bei t_0 durch

$$\dot{\mu}(t_0)=1-\frac{\dot{\varphi}(t_0)}{2\pi f}\overset{!}{=}0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\varphi}(t_0)=2\pi f$$

$$\ddot{\mu}(t_0)=-\frac{\ddot{\varphi}(t_0)}{2\pi f}\neq 0 \qquad \text{Zusätzliche Bedingung}$$

das Spektrum

$$M_T(f)=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{j}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{-2\pi f\cdot\ddot{\mu}(t_0)}}\cdot e^{-j2\pi f\cdot\left[t_0-\frac{\varphi(t_0)}{2\pi f}\right]}\cdot a\cdot\text{rect}\left(\frac{t_0}{T}\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$M_T(f) = \frac{1}{\sqrt{j \cdot f \cdot \ddot{\varphi}(t_0)}} \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_0} \cdot e^{j\frac{\varphi(t_0)}{2\pi f}} \cdot a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t_0}{T}\right) \tag{6.8}$$

- **Lösungsmethode mit der Taylorreihe von e^x**

Die Taylorreihe der Exponentialfunktion sieht laut Formelsammlung so aus:

$$e^{j\varphi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (j\varphi(t))^n \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (j)^n \cdot (\varphi(t))^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Diese Reihe setzen wir in das Integral für das Tiefpaßspektrum ein:

$$M_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot a \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (j)^n \cdot (\varphi(t))^n \cdot \frac{1}{n!}\right] \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (j)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot a \cdot \mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot (\varphi(t))^n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (j)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot a \cdot \left[T \cdot \mathrm{si}(\pi fT) * \mathcal{F}\left\{(\varphi(t))^n\right\}\right]$$

$$= a \cdot \left[\underbrace{T \cdot \mathrm{si}(\pi fT)}_{n=0} + \underbrace{jT \cdot \mathrm{si}(\pi fT) * \Phi(f)}_{n=1} + T \cdot \mathrm{si}(\pi fT) * \sum_{n=2}^{\infty} j^n \cdot \frac{1}{n!} \mathcal{F}\left\{(\varphi(t))^n\right\}\right]$$

mit

$$\mathcal{F}\left\{(\varphi(t))^2\right\} = \Phi(f) * \Phi(f)$$

$$\mathcal{F}\left\{(\varphi(t))^3\right\} = \Phi(f) * \Phi(f) * \Phi(f)$$

Die fortgesetzte Auflösung der Summe ergibt:

$$\frac{M_T(f)}{a \cdot T} = \mathrm{si}(\pi fT)$$

$$+ j \cdot \mathrm{si}(\pi fT) * \Phi(f)$$

$$- \frac{\mathrm{si}(\pi fT)}{2!} * \Phi(f) * \Phi(f)$$

$$- j \cdot \frac{\mathrm{si}(\pi fT)}{3!} * \Phi(f) * \Phi(f) * \Phi(f)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$+\frac{\mathrm{si}(\pi \mathrm{fT})}{4!} * \Phi(\mathrm{f}) * \Phi(\mathrm{f}) * \Phi(\mathrm{f}) * \Phi(\mathrm{f})$$

$$\ldots$$

$$+ \mathrm{j}^{\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{si}(\pi \mathrm{fT})}{\mathrm{i}!} * \Phi(\mathrm{f}) * \Phi(\mathrm{f}) * \Phi(\mathrm{f}) * \Phi(\mathrm{f}) * \ldots * \Phi(\mathrm{f})$$

Hierbei handelt es sich um eine fortgesetzte Faltung des Spektrums mit sich selbst.
Dadurch entwickelt sich ein gaußförmiges Spektrum!

- **Lösungsmethode bei cosinusförmiger Modulation**

$$m(t) = \cos(\psi(t)) = \cos(2\pi f_0 t + \gamma_0 \cdot 2\pi \cdot \varphi(t))$$

$$\Longrightarrow m_T(t) = e^{j\gamma_0 \cdot 2\pi \cdot \varphi(t)} \quad \text{(äquivalentes Tiefpaßsignal)}$$

Nach (6.7) ergibt sich für ein eine Cosinusschwingung mit der Frequenz f_1 als Quellsignal die Phase:

$$\varphi(t) = a \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= a \cdot \int_{-\infty}^{t} \cos(2\pi f_1 \tau)\mathrm{d}\tau$$

Das Einsetzen in die FM-Modulation ergibt:

$$m_{T_{FM}}(t) = e^{j\gamma_0 \cdot 2\pi \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{t} \cos(2\pi f_1 \tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$= e^{j\gamma_0 \cdot 2\pi \cdot a \cdot \left[\sin(2\pi f_1 \tau) \cdot \frac{1}{2\pi f_1}\right]_{-\infty}^{t}}$$

$$= e^{j\gamma_0 \cdot \frac{a}{f_1} \cdot [\sin(2\pi f_1 t) - c_0]}$$

$$= e^{j\gamma_0 \cdot \frac{a}{f_1} \cdot \sin(2\pi f_1 t)} \cdot e^{-j\gamma_0 \cdot \frac{a}{f_1} \cdot c_0} = e^{j\gamma_0 \cdot \frac{a}{f_1} \cdot \sin(2\pi f_1 t)} \cdot \underline{c}_0$$

$\underline{c}_0$ ist eine komplexe Konstante, die willkürlich auf 1 gesetzt wird. (Verschiebung spielt keine Rolle.)

$$\boxed{m_{T_{FM}}(t) = e^{j\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t)}} \tag{6.9}$$

$$\text{mit } \mu_{FM} = \gamma_0 \cdot \frac{a}{f_1} \text{ (Frequenzmodulationsindex)}$$

In der Literatur wird μ_{FM} auch als γ_{FM} und γ_0 als γ_{PM} bezeichnet. Es ist allerdings zu beachten, das $\gamma_{FM}=\mu_{FM} \neq \gamma_0=\gamma_{PM}$.
Das Spektrum des äquivalenten Tiefpaßsignals ergibt dann:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$M_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} m_{T_{FM}}(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t)} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t) - 2\pi ft]} dt$$

Das ist asymptotisch mit der Methode der stationären Phase zu lösen.
Zur exakten Lösung kann man folgendes sagen:

$e^{j\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t)}$ ist periodisch mit der Periodendauer $T_1 = \frac{1}{f_1}$. Es ist also eine Fourierreihenzerlegung möglich.

$$m_T(t) \overset{!}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c_n} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_1}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c_n} \cdot e^{j2\pi n f_1 t}$$

mit dem Tiefpaßspektrum

$$M_T(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c_n} \cdot \delta(f - n \cdot f_1)$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T_1} \cdot \int_{t_0 - \frac{T_1}{2}}^{t_0 + \frac{T_1}{2}} e^{j\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t)} \cdot e^{-j2\pi n f_1 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_1} \cdot \int_{t_0 - \frac{T_1}{2}}^{t_0 + \frac{T_1}{2}} e^{j[\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t) - 2\pi n f_1 t]} dt$$

$$= \frac{1}{T_1} \cdot \left[\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{j\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t)} \cdot \cos(2\pi n f_1 t) dt - \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{j\mu_{FM} \cdot \sin(2\pi f_1 t)} \cdot \sin(2\pi n f_1 t) dt \right]$$

mit $2\pi f_1 t = \varphi; \quad \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f_1$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{2\pi f_1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) + j \cdot \sin(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi))] \cdot [\cos(n\varphi) - j \cdot \sin(n\varphi)] d\varphi$$

$$= \frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{2\pi f_1} \cdot \Bigg[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \cos(n\varphi) d\varphi$$

$$+ j \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi))}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{\cos(n\varphi)}_{\text{gerade}} d\varphi$$

$$- j \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi))}_{\text{gerade}} \cdot \underbrace{\sin(n\varphi)}_{\text{ungerade}} d\varphi$$

fällt weg wegen Orthogonalität

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \sin(n\varphi) d\varphi \Bigg]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \left[\int_{0}^{\pi} \cos(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \cos(n\varphi) d\varphi + \int_{0}^{\pi} \sin(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \sin(n\varphi) d\varphi \right]$$

Diese Gleichung sagt noch nicht viel über die Fourierkoeffizienten $\underline{c}_n$ aus. Die Fourierkoeffizienten $\underline{c}_n$ bestehen aus dem Integral von 0 bis π über zwei Produkte von trigonometrischen Funktionen. Nun ist die Frage, für welche n die Funktionen symmetrisch zur senkrechten Geraden bei π/2 sind. Die Funktion $\cos(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi))$ ist achsensymmetrisch zu π/2. Das heißt sie ist gerade. Für $\sin(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi))$ gilt dasselbe. Nun ist

$\cos(n\varphi)$	ungerade für n ungerade
	gerade für n gerade
$\sin(n\varphi)$	gerade für n ungerade
	ungerade für n gerade

Daraus folgt für die Einzelintegrale:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \cos(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \cos(n\varphi) d\varphi = 0 \qquad \text{für n ungerade}$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \cos(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \cos(2n\varphi) d\varphi = J_{2n}(\mu_{FM})$$

Besselfunktion erster Gattung
2n-ter Ordnung

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \sin(n\varphi) d\varphi = 0 \qquad \text{für n gerade}$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(\mu_{FM} \cdot \sin(\varphi)) \cdot \sin((2n+1)\varphi) d\varphi = J_{2n+1}(\mu_{FM})$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Faßt man nun diese Ergebnisse zusammen kann man sagen:

$$\underline{c_n} = J_n(\mu_{FM}) \tag{6.10}$$

Besselfunktion 1. Gattung n-ter Ordnung

Wie die Werte der Besselfunktion aussehen sind einem mathematischen Tabellenbuch zu entnehmen.

Daraus folgt wiederum:

$$m_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\mu_{FM}) \cdot e^{j2\pi n f_1 t} \tag{6.11}$$

Fourierbesselreihe – FM-moduliertes Cosinussignal im äquivalenten Tiefpaßbereich

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$M_T(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\mu_{FM}) \cdot \delta(f - n f_1) \tag{6.12}$$

Es ergibt sich das Spektrum (inkl. Trägerfrequenz) des ursprünglichen Signals m(t):

$$M(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[M_T(f - f_0) + M_T^*(-f - f_0) \right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{FM})}{2} \cdot \left[\delta(f - f_0 - n f_1) + \delta(-f - f_0 - n f_1) \right]$$

$$M(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{FM})}{2} \cdot \left[\delta(f - f_0 - n f_1) + \delta(f + f_0 + n f_1) \right] \tag{6.13}$$

mit $J_{-n}(\mu_{FM}) = (-1)^n \cdot J_n(\mu_{FM})$

Frequenzspektrum eines FM-modulierten Cosinussignals

Veranschaulichung:
Wie sehen die einzelnen Summanden von M(f) aus?
Annahme: $\mu_{FM} = 3$

$J_0(3) = -0{,}2601$
$J_1(3) = 0{,}3391$
$J_2(3) = 0{,}4861$
$J_3(3) = 0{,}3091$
$J_4(3) = 0{,}1320$

$J_{-1}(3) = -J_1(3) = -0{,}3391$
$J_{-2}(3) = J_2(3) = 0{,}4861$
$J_{-3}(3) = -J_3(3) = -0{,}3091$
$J_{-4}(3) = J_4(3) = 0{,}1320$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

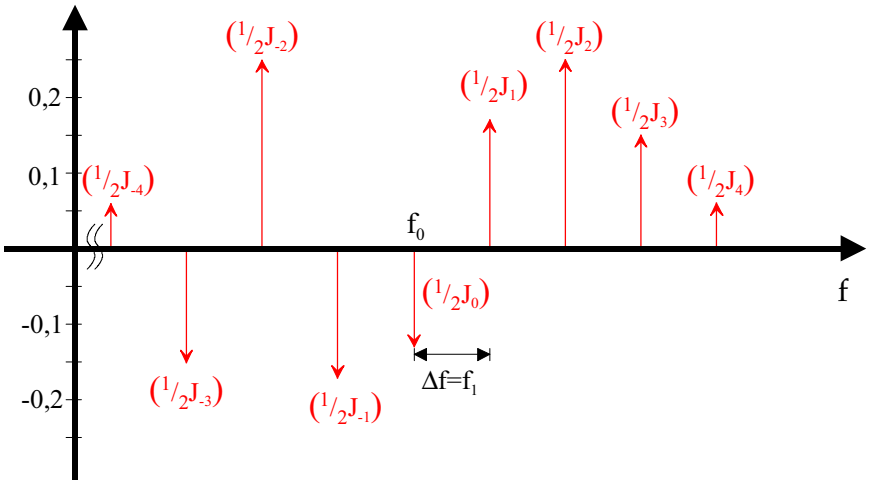


Abbildung 6.18: einzeln aufsummierende Diracstöße

In Abbildung 6.18 sieht man die einzeln aufzusummierenden Diracstöße Bereich f>0. Im Bereich f<0 findet man das achsensymmetrische Bild. Das FM-Spektrum ist also bei cosinusförmigem Quellsignal ein Linienspektrum, dessen Diracstöße symmetrisch zur Trägerfrequenz f_0 im Abstand von Vielfachen der Frequenz f_1 des Quellsignals liegen.

Man schätzt nun ab, daß $J_n(\mu_{FM}) \approx 0$ für $n \geq \mu_{FM}$. Die Bandbreite des modulierten Signals ist praktisch durch den schnellen Abfall der Besselfunktion beschränkt.

$$\begin{aligned} f_\Delta &= 2 \cdot (\mu_{FM} + 1) \cdot f_1 \\ &= 2 \cdot \left[\gamma_0 \cdot \frac{a_1}{f_1} + 1 \right] \cdot f_1 \\ &= 2\gamma_0 \cdot a_1 + 2f_1 \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Carson-Bandbreite

Die Carson-Bandbreite ist also die mindeste angestrebte Bandbreite, die man auf einem Kanal braucht, um ein Signal mit der Frequenz f_1 zu frequenzmodulieren. Da das Spektrum aus mit der Besselfunktion gewichteten Diracstößen besteht und diese mit zunehmender Frequenz immer stärker abfallen, definiert man die Carson-Bandbreite. Wollte man genau rechnen, so bräuchte man eine unendlich große Bandbreite. Dadurch wäre allerdings die Übertragung von mehreren Kanälen (wie z.B. bei Radio) nicht möglich. Mit einem Bandpaß werden die restlichen Frequenzen unterdrückt.

Frequenzhub: $$\Delta F = \mu_{FM} \cdot f_1 = a_1 \cdot \gamma_0 \qquad (6.15)$$

Bei monofrequenten Quellsignalen bezeichnet der Frequenzhub den zusätzlich zur Frequenz f_1 des Quellsignals notwendigen Frequenzabstand, den man braucht, um ein Signal mit der Frequenz f_1 zu frequenzmodulieren, ohne den Nachbarkanal zu stören.

BEISPIEL: UKW MONO

$\Delta F = 75\text{kHz} \Longrightarrow$ definierter Frequenzhub im UKW-Band

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$f_l = f_g = 12{,}5\text{kHz}$ obere Grenzfrequenz

$\approx 15\text{kHz}$ Sicherheitsabstand

$f_\Delta = 2 \cdot [75\text{kHz} + 15\text{kHz}] = 180\text{kHz}$

BEISPIEL: UKW STEREO

$\Delta F = 75\text{kHz}$

$f_l = 15\text{kHz} + 38\text{kHz} = 53\text{kHz}$ links und rechts

$f_\Delta = 2 \cdot [75\text{kHz} + 53\text{kHz}] = 256\text{kHz}$

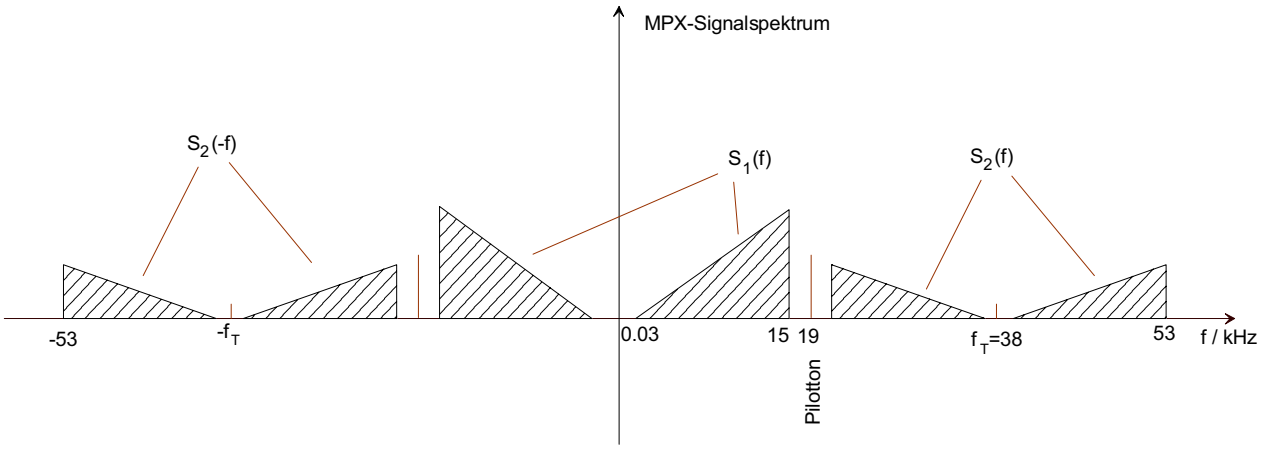


Abbildung 6.19: schematische Darstellung einer Stereoübertragung im Frequenzbereich

Abbildung 6.19 zeigt die schematische Darstellung einer Stereoübertragung im Frequenzbereich. Mit einem Monoempfänger muß das Stereosignal auch auszuwerten sein. Darum wird folgende Modulation durchgeführt:

$$s_1(t) = s_R(t) + s_L(t)$$
$$s_2(t) = s_R(t) - s_L(t)$$

Das Differenzsignal wird mit Zweiseitenbandmodulation (AM) auf einen Träger von 38 kHz gebracht. Um bei der Demodulation mit einem Quadraturempfänger einen phasentreuen Träger vorzufinden, wird ein Pilotton mit der halben Trägerfrequenz (19 kHz) zum Gesamtsignal hinzugefügt. Das sogenannte Stereo-Multiplex-Signal (MPX) besteht nun aus dem unmodulierten Signal $s_1(t)$, dem Pilotton und dem zweiseitenbandmodulierten Signal $s_2(t)$ um den Träger bei 38 kHz. Das zwischenmodulierte MPX-Signal wird anschließend per Frequenzmodulation auf eine Trägerfrequenz im UKW-Band moduliert und gesendet. Mehr dazu ist den Laborunterlagen zu entnehmen (praktische Übung Teil 2).

6.2.3. SPEZIELLE FREQUENZ- ODER PHASENMODULIERTE SIGNALE – SIGNALE MIT QUADRATISCHER PHASE (CHIRPS)

Hierzu betrachten wir die Funktion:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s(t) = \text{rect}\frac{t}{T} \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \pi k_r t^2\right)$$

Dies ist ein linear frequenzmoduliertes Chirp-Signal (quadratische Phase). Anders kann man schreiben:

$$s(t) = \text{Re}\left\{\text{rect}\frac{t}{T} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j\pi k_r t^2}\right\}$$

Das äquivalente Tiefpaßsignal lautet also:

$$\Longrightarrow s_T(t) = \text{rect}\frac{t}{T} \cdot e^{j\pi k_r t^2}$$

Die Augenblicksphase ist: $\varphi(t) = \pi k_r t^2$.

Die Augenblicksfrequenz ist: $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_r t$.

Der Frequenzhub ist hier die maximale Frequenzvariation im Zeitfenster. Der Betrag der Augenblicksfrequenz geht von 0 Hz bis auf $\frac{k_r T}{2}$.

Also ist der Frequenzhub: $\Delta F = \frac{k_r T}{2}$

Das Spektrum des äquivalenten Tiefpaßsignals wurde bereits ermittelt (siehe Anwendungsbeispiel in Kapitel 2.7.1).

$$S_T(f) = \frac{1}{\sqrt{k_r}} \cdot \text{rect}\frac{f}{k_r T} \cdot e^{-j\pi\left(\frac{f^2}{k_r} - \frac{1}{4}\right)}$$

Die Bandbreite ist $f_\Delta = B_r \cong k_r T = 2 \cdot \Delta F$.

Eine Besonderheit der Chirp-Funktion ist die hohe Bedeutung in der Laufzeitmessung mit Hilfe der Anwendung eines Matched Filter. Im Folgenden wird darauf eingegangen.

$$s(t) = \text{rect}\frac{t}{T} \cdot e^{j\left(2\pi f_0 t + \pi k_r t^2\right)}$$

Im äquivalenten Tiefpaßbereich ergibt das:

$$s_T(t) = \text{rect}\frac{t}{T} \cdot e^{j\pi k_r t^2}$$

Die verschobene und mit Faktor versehene Funktion im Bandpaßbereich kann man so beschreiben:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$r(t) = r_0 \cdot s(t - t_0)$$
$$= r_0 \cdot \text{rect}\frac{(t - t_0)}{T} \cdot e^{j\left(2\pi f_0 (t - t_0) + \pi k_r (t - t_0)^2\right)}$$

Eine allgemeine Beschreibung dieser Funktion r(t) im äquivalenten Tiefpaßbereich:

$$r_T(t) = r_0 \cdot \text{rect}\frac{(t - t_0)}{T} \cdot e^{j\left(2\pi f_0 (t - t_0) + \pi k_r (t - t_0)^2\right)} \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$
$$= r_0 \cdot \text{rect}\frac{(t - t_0)}{T} \cdot e^{j\left(2\pi f_0 (t - t_0) + \pi k_r (t - t_0)^2 - 2\pi f_0 t\right)}$$
$$= r_0 \cdot \text{rect}\frac{(t - t_0)}{T} \cdot e^{j\left(-2\pi f_0 t_0 + \pi k_r (t - t_0)^2\right)}$$
$$= r_0 \cdot \text{rect}\frac{(t - t_0)}{T} \cdot e^{j\pi k_r (t - t_0)^2} \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0}$$
$$= r_0 \cdot s_T(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0}$$

Die Funktion r(t) wird nun mit einer Funktion $h_k(t)$ gefaltet:

$$g(t) = r(t) * h_k(t)$$

Mit (5.39) ergibt sich:

$$g_T(t) = \frac{1}{2} \cdot r_T(t) * h_{k_T}(t)$$

Nun setzen wir für die Funktion $h_k(t)$ die bekannte Funktion s(-t) ein.

$$h_k(t) = s(-t)$$

mit (5.36)

$$\Rightarrow h_{k_T}(t) = s_T^*(-t) = \text{rect}\frac{-t}{T} \cdot e^{-j\pi k_r t^2} = \text{rect}\frac{t}{T} \cdot e^{-j\pi k_r t^2}$$

$$g_T(t) = \frac{1}{2} \cdot r_T(t) * s_T^*(-t)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot r_0 \cdot s_T(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0} * s_T^*(-t)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot r_0 \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0} \cdot \left[s_T(t) * s_T^*(-t)\right] * \delta(t - t_0)$$
$$= r_0 \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot s_T(t) * s_T^*(-t)\right]}_{\varphi_{ss_T}(t)} * \delta(t - t_0)$$

$\varphi_{ss_T}(t)$ Autokorrelationsfunktion $\left(\varphi_{ss_T}(t) \neq \varphi_{s_T s_T}(t)\right)$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g_T(t) = r_0 \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0} \cdot \varphi_{ss_T}(t - t_0) \tag{6.16}$$

Diese Beziehung kann man zur Laufzeitmessung verwenden. Man muß nur das empfangene verschobene Signal mit dem bekannten Sendesignal falten, so bekommt man im Tiefpaßbereich die Autokorrelationsfunktion heraus, mit der man dann die Laufzeit t_0 bestimmen kann, indem man das Maximum ermittelt.

Anwendung von Chirps in der Radartechnik:

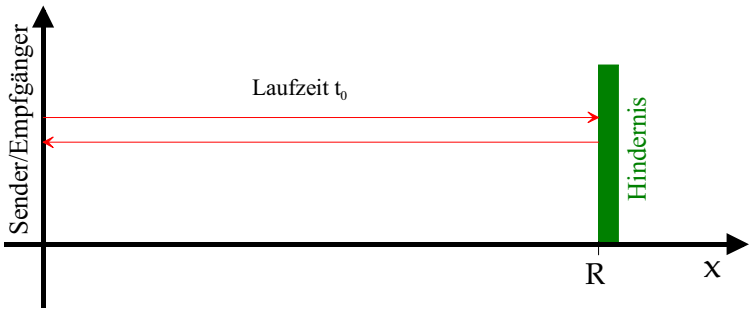


Abbildung 6.20: Chirps in der Radartechnik

Das gesendete Signal ist $s(t)$

Reflexionsfaktor

Das empfangene Signal ist $r(t) = r \cdot s(t - t_0)$ mit $t_0 = \frac{2R}{c}$

Um das Empfangssignal möglichst sicher zu detektieren, muß die Amplitude möglichst groß sein. D.h. die Sendeleistung muß hoch sein. Das Problem ist allerdings, daß die Sendeleistung beschränkt ist. Abhilfe kann ein Matched Filter schaffen. Die Dauer des Sendesignals müßte auch vergrößert werden. Hier tritt ein weiteres Problem auf. Die Korrelationsfunktion wird auch breiter. Dadurch ist das Maximum schlecht zu detektieren (Maximum wird breiter). Hier ist das Chirp-Signal die Lösung.
Das empfangene Signal wird wie folgt weiterverarbeitet.

- Korrelationsempfang

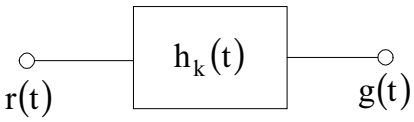


Abbildung 6.21: Korrelationsempfang

$$\begin{aligned} g(t) &= r(t) * h_k(t) \\ &= r(t) * s(-t) \\ &= r \cdot s(t - t_0) * s(-t_0) \\ s(t - t_0) &= s(t) * \delta(t - t_0) \\ s(t - t_0) * s(-t) &= s(t) * \delta(t - t_0) * s(-t) \\ &= \varphi_{ss}(t) * \delta(t - t_0) \end{aligned}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g(t) = r \cdot \varphi_{ss}(t - t_0) \tag{6.17}$$

Autokorrelationsfunktion von s(t)

So hat man ein an das Signal angepaßtes Filter angewandt – ein Matched Filter. $h_k(t)=s(-t)$ ist in der Regel kein kausales Filter. Zur Berechnung muß ein Digitalrechner verwendet werden.

$$\begin{aligned} g_{max}(t) &= r \cdot \varphi_{ss}(0) \\ &= r \cdot E_s && E_s \text{ ist die Signalenergie.} \\ &= g(t_0) && \textbf{Das Maximum von g(t) liefert die Laufzeit und damit die Entfernung.} \end{aligned}$$

Der Matched Filter muß auf das Sendesignal abgestimmt sein. Das Sendesignal muß also bekannt sein. Die Amplitude $\varphi_{ss}(0)$ des Matched-Filter-Empfangs beschreibt die verwendete Signalenergie des gesamten Sendesignals.
Im Weiteren wird ein weiterer Weg der Berechnung des Matched Filter bei der Verwendung von Chirps dargestellt. Das gesendete und empfangene Signal sieht folgendermaßen aus:

$$s(t) = \text{rect}\frac{t}{T} \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \pi k_r t^2\right)$$

$$r(t) = r \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right) \cdot \cos\left(2\pi f_0 (t - t_0) + \pi k_r (t - t_0)^2\right)$$

Im äquivalenten Tiefpaßbereich sehen die Signale wie oben erörtert so aus:

$$r_T(t) = r \cdot s_T(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0}$$

$$g_T(t) = \frac{1}{2} \cdot s_T(t) * h_{k_T}(t)$$

Das Filter sieht wie oben ermittelt im Tiefpaßbereich so aus:

$h_{k_T}(t) = s_T^*(-t)$ konjugiert komplex, da mit komplexem $s_T(t)$ gerechnet wird.

Abbildung 6.22 zeigt den grundsätzlichen Aufbau des Systems. Das verzögerte und mit Reflexionsfaktor versehene Signal wird im Tiefpaßbereich mit der an der Ordinate gespiegelten und konjugiert komplexen ursprünglichen Funktion gefaltet.

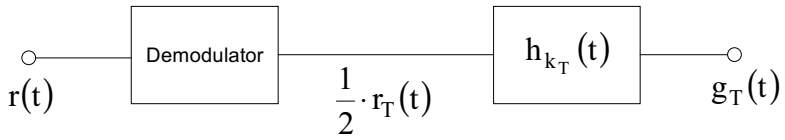


Abbildung 6.22: Aufbau des Systems für Korrelationsempfang

Das Ausgangssignal sieht dann folgendermaßen aus:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$g_T(t) = \frac{1}{2} \cdot r_T(t) * h_{k_T}(t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot r \cdot s_T(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0} * s_T^*(-t)$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{2} s_T(t) * s_T^*(-t)\right]}_{\varphi_{ss_T}(t)} \cdot r \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0} * \delta(t - t_0)$$

Wie sieht nun $\varphi_{ss_T}(t)$ des Chirp-Signals aus?

Berechnung von $\varphi_{ss_T}(t)$ bei $s_T(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{j\pi k_r t^2}$:

$$\varphi_{ss_T}(t) = \frac{1}{2} s_T(t) * s_T^*(-t)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_T(\tau) \cdot s_T^*(-(t-\tau)) d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot e^{j\pi k_r \tau^2} \cdot \text{rect}\left(-\frac{\tau - t}{T}\right) \cdot e^{-j\pi k_r (t-\tau)^2} d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\tau - t}{T}\right) \cdot e^{+j\pi k_r \tau^2} \cdot e^{-j\pi k_r t^2} \cdot e^{-j\pi k_r \tau^2} \cdot e^{+j2\pi k_r t\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-j\pi k_r t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\tau - t}{T}\right) \cdot e^{+j2\pi k_r t\tau} d\tau$$

Nun betrachten wir die einzelnen Überlappungsfälle der beiden multiplizierten rect-Funktionen. Zur Veranschaulichung sind die beiden übereinandergeschobenen Rechteckfunktionen in Abbildung 6.23 dargestellt.

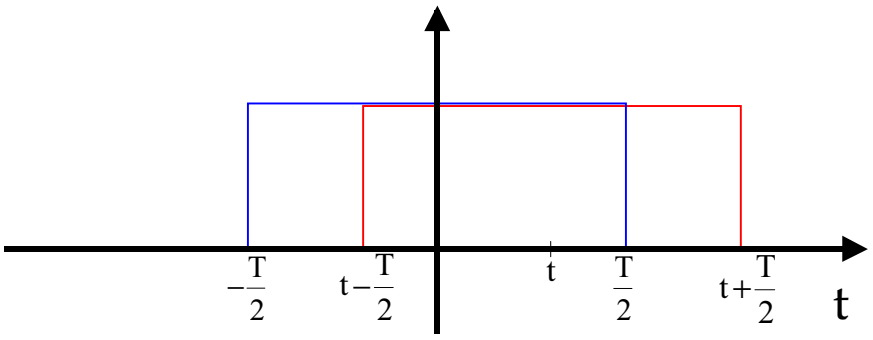


Abbildung 6.23: übereinandergeschobene Rechteckfunktionen

1. Fall: $t + \frac{T}{2} \le -\frac{T}{2}$

$t \le -T \implies \varphi_{ss_T}(t) = 0$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die Rechtecke überlappen sich in diesem Fall nicht. Das rote Rechteck befindet sich noch links des feststehenden blauen (siehe Abbildung 6.23).

2. Fall: $t+\frac{T}{2} \geq -\frac{T}{2}$ und $t+\frac{T}{2} \leq +\frac{T}{2}$

$t \geq -T$ und $t \leq 0$

Es gibt eine Überlappungsfläche. Das rote Rechteck ist allerdings von links kommend noch nicht vollständig in das blaue eingedrungen (siehe Abbildung 6.23).

$$\varphi_{ss_T}(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\pi k_r t^2} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{j2\pi k_r t \tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-j\pi k_r t^2} \cdot \left[\frac{e^{j2\pi k_r t \tau}}{j2\pi k_r t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-j\pi k_r t^2}}{j2\pi k_r t} \cdot \left[e^{j2\pi k_r t\left(t+\frac{T}{2}\right)} - e^{-j2\pi k_r t \cdot \frac{T}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-j\pi k_r t^2}}{j2\pi k_r t} \cdot \left[e^{j\pi k_r t(2t+T)} - e^{-j\pi k_r t \cdot T} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j2\pi k_r t} \cdot \left[e^{j\pi k_r t(t+T)} - e^{-j\pi k_r t \cdot (t+T)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j2\pi k_r t} \cdot \left[2j \cdot \sin\left(\pi k_r t(t+T)\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(t+T) \cdot \sin\left((t+T) \cdot \pi k_r t\right)}{(t+T) \cdot \pi k_r t}$$

$$= \frac{T}{2} \cdot \left(1+\frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{si}\left(\pi k_r T \cdot t \cdot \left(1+\frac{t}{T}\right)\right)$$

$$\boxed{\varphi_{ss_T}(t) = \frac{T}{2} \cdot \left(1+\frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{si}\left(\pi k_r T \cdot t \cdot \left(1+\frac{t}{T}\right)\right)} \qquad (6.18)$$

für $-\tau \leq t \leq 0$

3. Fall: $t+\frac{T}{2} \geq +\frac{T}{2}$ und $t-\frac{T}{2} \leq +\frac{T}{2}$

$0 \leq t \leq T$:

Es gibt eine Überlappungsfläche. Das rote Rechteck ist allerdings schon links kommend mit einem Teil nach rechts aus dem blauen herausgelaufen (siehe Abbildung 6.23).

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\varphi_{ss_T}(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-j\pi k_r t^2}\cdot \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi k_r t\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-j\pi k_r t^2}}{j2\pi k_r t}\cdot\left[e^{+j2\pi k_r t\cdot\frac{T}{2}} - e^{+j2\pi k_r t\cdot\left(t-\frac{T}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j2\pi k_r t}\cdot\left[e^{j\pi k_r t(T-t)} - e^{+j\pi k_r t\cdot(t-T)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j2\pi k_r t}\cdot\left[2j\cdot\sin(\pi k_r t(t-T))\right]$$

$$= \frac{T}{2}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)\cdot si\left(\pi k_r T\cdot t\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)\right)$$

$$\varphi_{ss_T}(t) = \frac{T}{2}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)\cdot si\left(\pi k_r T\cdot t\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right)\right) \qquad (6.19)$$

für $0 \le t \le T$

4. Fall: $t \ge T$

$\Rightarrow \quad \varphi_{ss_T}(t) = 0$

Die Rechtecke überlappen sich in diesem Fall nicht. Das rote Rechteck befindet sich rechts des feststehenden blauen (siehe Abbildung 6.23).

Zusammenfassung der Fälle 2 und 3:

$$\varphi_{ss_T}(t) = \frac{T}{2}\cdot\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\cdot si\left(\pi k_r T\cdot t\cdot\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\right) \quad \text{für } |t| \le T$$

$$\varphi_{ss_T}(t) = \frac{T}{2}\cdot\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\cdot si\left(\pi B_r\cdot t\cdot\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right) \qquad (6.20)$$

für $|t| \le T$

mit $B_r = k_r T$ (Bandbreite)

In Abbildung 6.24 erkennt man die Autokorrelationsfunktion. Man erkennt das hohe Maximum an der Stelle t=0.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

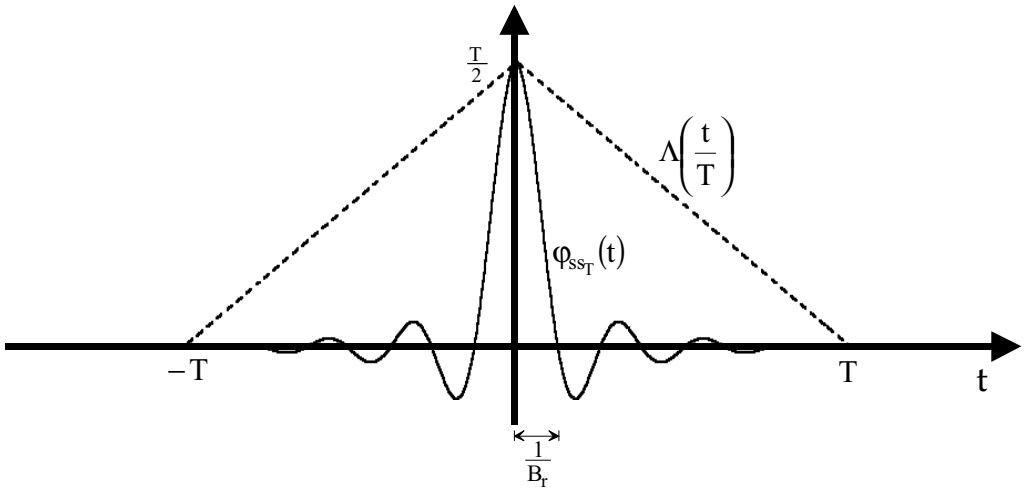


Abbildung 6.24: Autokorrelationsfunktion mit Maximum an der Stelle t=0

Für kleine t kann man sagen:

$$\mathrm{si}\left(\pi B_r \cdot t \cdot \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right) \cong \mathrm{si}(\pi B_r \cdot t)$$

Darum ist die erste Nullstelle der Autokorrelationsfunktion bei

$$t_1 \cong \frac{1}{B_r}$$

Das Fazit ist, daß die Autokorrelationsfunktion des Chirps fast eine si-Funktion ist (siehe Abbildung 6.24). D.h. also auch die Funktion $g_T(t)$ sieht bis auf die zeitliche Verschiebung um t_0 einer si-Funktion ähnlich. Der Vorteil des Chirp-Signals in der Radartechnik ist offensichtlich. Er besitzt eine schmale und hohe Autokorrelationsfunktion, bei der Störungen (Rauschen) nicht so ins Gewicht fallen. Man kann relativ genau das Maximum detektieren. Die Bandbreite ist proportional der Dauer des Impulses.

6.2.4. EMPFANG VON FM - SIGNALEN

Nachdem die Vorgehensweise bei der Aufbau eines frequenzmodulierten Signals erläutert wurde, stellt sich nun die Frage der Demodulation. Ein Demodulator hat die Aufgabe, aus einem FM-Signal der Form

$$m(t) = \cos(\psi(t))$$

das Quellsignal s(t) möglichst ungestört zurückzugewinnen. Das Quellsignal verbirgt sich bei der Frequenzmodulation in der zeitlichen Änderung der Phase, also deren Ableitung. Um das Quellsignal nun zu isolieren, gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Variante: Signaltheoretische Lösung
Das modulierte Signal sieht so aus:

$$m(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

Deren Tiefpaßspektrum kann man deuten als:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$m_T(t) = e^{j\varphi(t)}$$

Die Information steckt in der Phase. Diese wird durch die arctan-Funktion aus dem Quotienten von Imaginär- und Realteil gewonnen:

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{m_{T_i}(t)}{m_{T_r}(t)}\right)$$

Wie oben schon erwähnt, ist die FM-Modulation so definiert, daß die Phase dem Integral über dem Quellsignal entspricht:

$$\varphi(t) = \gamma_0 \cdot 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau$$ Die Phase ist das laufende Integral über das Signal.

$$m_T(t) = e^{j\gamma_0 \cdot 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau}$$ Die Rückgewinnung der Phase erlangt man durch die Bildung des arctan( ).

Allerdings ergibt sich das Problem, daß die arctan-Funktion nur Werte zwischen $-\pi$ und π annimmt. Bei der Rückgewinnung folgt:

$$\varphi(t) = \left[\gamma_0 \cdot 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau\right]_{\mathrm{mod}(2\pi)}$$

Das ist in Abbildung 6.25 zu sehen. Um das Sendesignal zu erlangen, muß $\varphi(t)$ differenziert werden. Hierbei ergibt sich die in Abbildung 6.26 angedeutete Problematik, daß die Ableitung an den Sprungstellen der Phase „Nadeln“ der Wertigkeit 2π aufweisen. Abbildung 6.25 zeigt den sogenannten „Wrap around“-Effekt, der durch die Tatsache hervorgerufen wird, daß die arctan-Funktion nicht eindeutig auf das Argument schließen läßt.

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\left[\gamma \cdot 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau\right]_{\mathrm{mod}(2\pi)}$$

$$= \gamma \cdot 2\pi \cdot s(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pm 2\pi \cdot \delta\left(t - t_{0_n}\right)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

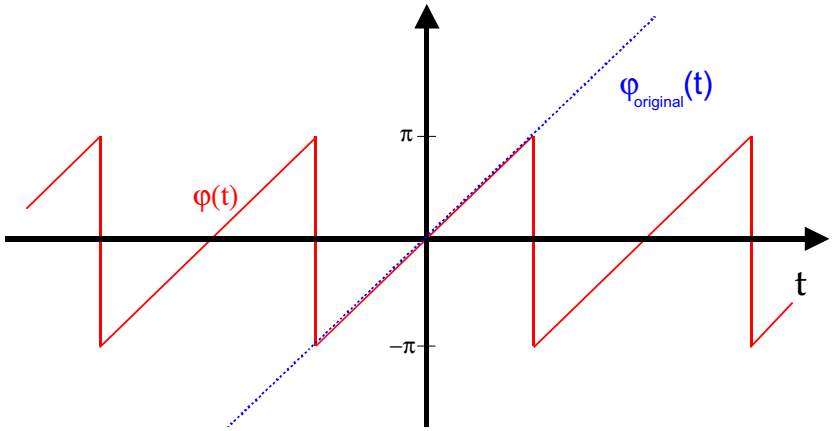


Abbildung 6.25: $\varphi(t)$

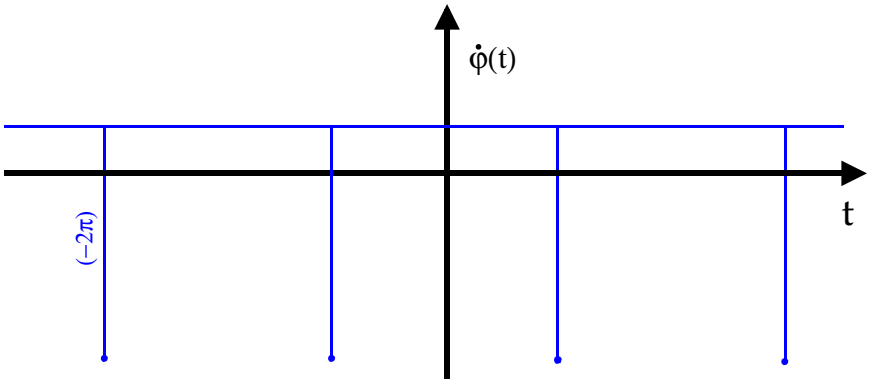


Abbildung 6.26: $\dot{\varphi}(t)$

Bei zeitdiskreter Abtastung (siehe Abbildung 6.27) entspricht die Ableitung von φ(t) dem Differenzenquotient:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{\varphi(k) - \varphi(k-1)}{T} \text{ mit der Abtastfrequenz } \frac{1}{T} \text{ und } k = n \cdot T .$$

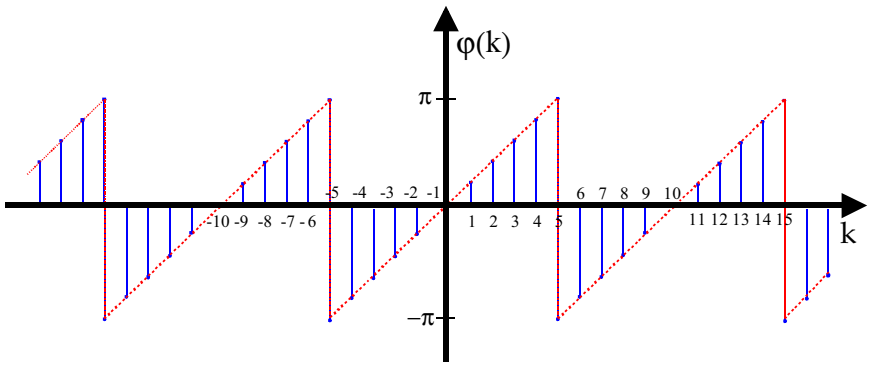


Abbildung 6.27: zeitdiskrete Abtastung

Die Sprungstellen belaufen sich bei angenähertem Differenzieren als Impulse mit endlicher Amplitude an den kritischen Stellen auf ±2π (mit T=1). Diese „Nadeln lassen sich durch einen Trick in der Verarbeitung beseitigen. Generell gilt:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$x = \arctan(\tan(x)) = \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

Wendet man nun diese mathematische Regel auf unser Problem an, so heißt das:

$$\dot{\varphi}(t) = \arctan\left(\frac{\sin(\dot{\varphi}(t))}{\cos(\dot{\varphi}(t))}\right) \cong 2\pi \cdot \gamma \cdot s(k)$$

Bei diskreter Abtastung (siehe Abbildung 6.27) und der Abtastrate T=1 bedeutet das:

$$g(k) = \arctan\left(\frac{\sin(\varphi(k) - \varphi(k-1))}{\cos(\varphi(k) - \varphi(k-1))}\right) \cong 2\pi \cdot \gamma \cdot s(k)$$

Die Diracstöße verschwinden im Ausgangssignal. Diese Möglichkeit des Demodulierens eines FM-Signals kann nur mit einem Digitalrechner realisiert werden.

2. Variante: Zähldiskriminator

Der Zähldiskriminator zählt die Nulldurchgänge des empfangenen Tiefpaßsignals pro Zeiteinheit. Die Zahl N (Nulldurchgänge pro Zeiteinheit) ist ein Maß für die Amplitude des zu rekonstruierenden Signals. Die Qualität dieser Demodulation ist nicht einwandfrei, da die Amplitudenerzeugung im Ausgangssignal nicht kontinuierlich erfolgen kann.

$$\begin{aligned} m_T(t) &= e^{j\varphi(t)} \\ &= \underbrace{\cos(\varphi(t))}_{m_{T_r}(t)} + j\underbrace{\sin(\varphi(t))}_{m_{T_i}(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\varphi(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\left[\gamma \cdot 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau\right] \\ &= \gamma \cdot s(t) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß die Anzahl der Nulldurchgänge

$$N(t) \sim 2 \cdot f_i(t) = 2 \cdot \gamma \cdot s(t)$$

proportional zum Signal ist.

3. Variante: Phasengerasteter Regelkreis (Phase Locked Loop)

Mit einem PLL (Phase Locked Loop) wird die Phasenänderung in eine Ausgangsspannung umgewandelt. Gegenüber dem Zähldiskriminator hat der PLL den Vorteil, daß kontinuierlich die Momentanfrequenz in einen Amplitudenwert umgewandelt wird. So kann man das gesendete Signal aus dem modulierten zurückgewinnen. Der PLL versucht, die Frequenz des modulierten Signals „einzufangen“. Dabei wird eine der Phasendifferenz proportionale Spannung auf den Eingang eines VCO (Voltage Controlled Oscillator) gegeben. Dieser erzeugt eine Frequenz, die mit dem modulierten Signal multipliziert wird. Sind die Frequenzen nicht exakt gleich, so

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

entsteht eine „Schwebung“, die über einen Tiefpaß geglättet wird, und die entstehende Ausgangsspannung wieder auf den Eingang des VCO geschaltet wird (siehe Abbildung 6.28).

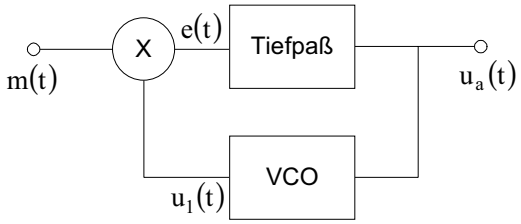


Abbildung 6.28: Phasengerasteter Regelkreis (Phase Locked Loop)

Ausgang des VCO:

$$u_1(t) = u_0 \cdot \sin\left(2\pi f_c t + \Phi_v(t)\right)$$

mit der Momentanfrequenz $f_{i_{VCO}} = f_c + \frac{1}{2\pi} \cdot \dot{\Phi}_v(t)$

$$\text{mit } \dot{\Phi}_v(t) = k \cdot u_a(t)$$

$$\Rightarrow \Phi_v(t) = k \cdot \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)\,d\tau$$

$$u_1(t) = u_0 \cdot \sin\left(2\pi f_c t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)\,d\tau \right)$$

Das entspricht der FM-Modulation von $u_a(t)$. Das entstandene Signal $u_1(t)$ wird mit dem modulierten Eingangssignal m(t) multipliziert.

$$e(t) = m(t) \cdot u_1(t)$$

$$= u_0 \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right) \cdot \sin\left(2\pi f_c t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)\,d\tau \right)$$

$$= \frac{u_0}{2} \cdot \left[\sin\left(2\pi (f_c - f_0) \cdot t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)\,d\tau - \varphi(t) \right) \right.$$

$$\left. + \sin\left(2\pi (f_c + f_0) \cdot t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)\,d\tau + \varphi(t) \right) \right]$$

Die hohe Frequenz wird vom Tiefpaß nicht durchgelassen.

$$\tilde{e}(t) = \frac{u_0}{2} \cdot \sin\left(2\pi (f_c - f_0) \cdot t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)\,d\tau - \varphi(t) \right)$$

$$= \frac{u_0}{2} \cdot \sin\left(\Phi_e(t)\right)$$

mit

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\Phi_e(t) = 2\pi(f_c - f_0)\cdot t + k\cdot \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)d\tau - \varphi(t)$$

Die Ableitung der Phase (Momentanfrequenz) ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_e(t) &= 2\pi(f_c - f_0) + k\cdot u_a(t) - \dot{\varphi}(t)\\ &= 2\pi(f_c - f_0) + k\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau - \dot{\varphi}(t)\\ &= 2\pi(f_c - f_0) + k\cdot \frac{U_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\Phi_e(t))\cdot h(t-\tau)d\tau - \dot{\varphi}(t)\end{aligned}$$

Wenn es einen stabilen Punkt gibt, muß nach Abklingen aller Einschwingvorgänge gelten:

$$\dot{\Phi}_e(t) = 0$$

Das bedeutet, daß die Momentanfrequenz von $u_a(t)$ dann 0 wird.

$$\begin{aligned}0 &= k\cdot u_a(t) + 2\pi(f_c - f_0) - \dot{\varphi}(t)\\ \Leftrightarrow k\cdot u_a(t) &= \dot{\varphi}(t) - 2\pi(f_c - f_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{d}{dt}\gamma\int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau - 2\pi(f_c - f_0)\\ &= \gamma\cdot s(t) - 2\pi(f_c - f_0)\\ &= \gamma\cdot s(t) + u_{a_0}\end{aligned}$$

$$\boxed{k\cdot u_a(t) = \gamma\cdot s(t) + u_{a_0}} \qquad (6.21)$$

Dieser Zusammenhang wird für die FM-Demodulation ausgenutzt. Der VCO stellt seinen Arbeitspunkt so ein, daß $u_a(t)\sim s(t)$.

Blockschaltbild:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

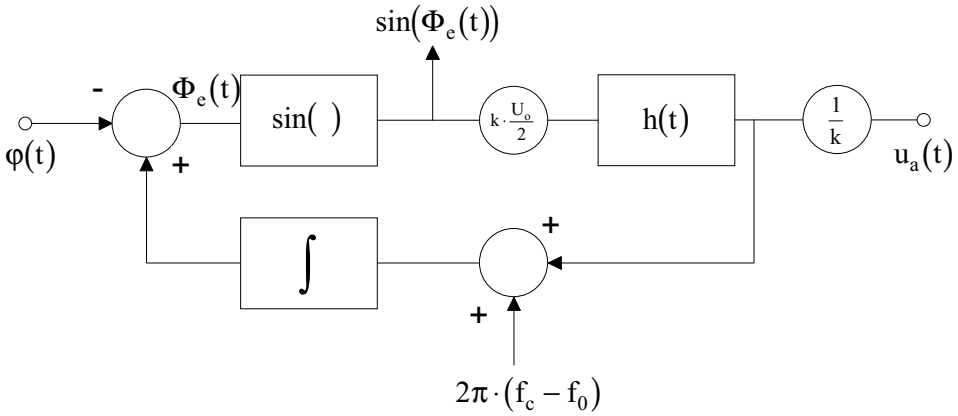


Abbildung 6.29: Blockschaltbild für die FM-Demodulation

Das Blockschaltbild in Abbildung 6.29 ist das exakte nichtlineare Blockschaltbild für die regelungstechnische Analyse. Für kleine $\phi_e(t)$ kann man ein anderes Blockschaltbild () entwerfen, daß auf darauf basiert, daß die Taylorreihe für die Sinusfunktion um den Ursprung nach dem linearen Glied abgebrochen wird.

$$\sin(\Phi_e(t)) \cong \Phi_e(t)$$

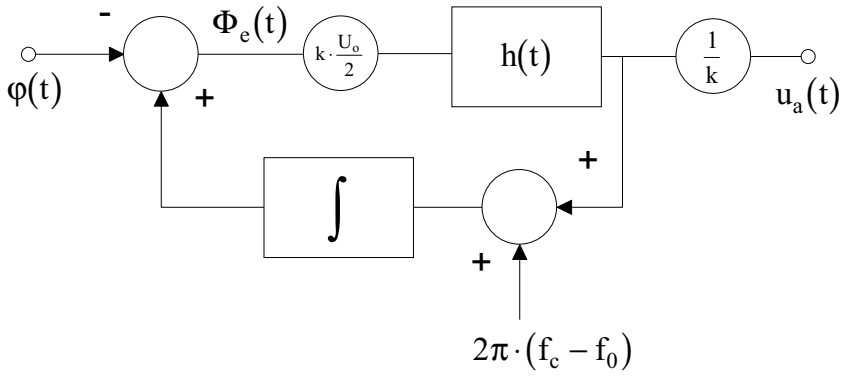


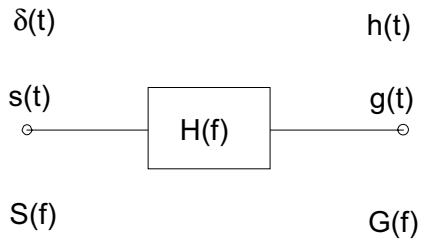
Abbildung 6.30: Blockschaltbild für kleine $\Phi_e(t)$

Das Einschwingverhalten ist mit den Methoden der Regelungstechnik analysierbar.
Siehe auch im WWW zum PLL:
http://www.yake.ecu.purdue/~roos/modem/pll/pll.htm

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

7. MEHRDIMENSIONALE SYSTEMTHEORIE

Bisher:



Bekannt:

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

$$G(f) = S(f) \cdot H(f)$$

Gesucht: Eine Erweiterung auf weitere Dimensionen, z.B. t_1, t_2 (Bildverarbeitung x_1, x_2) oder gar: $s(x_1, x_2, t)$ => Bewegtbildverarbeitung.

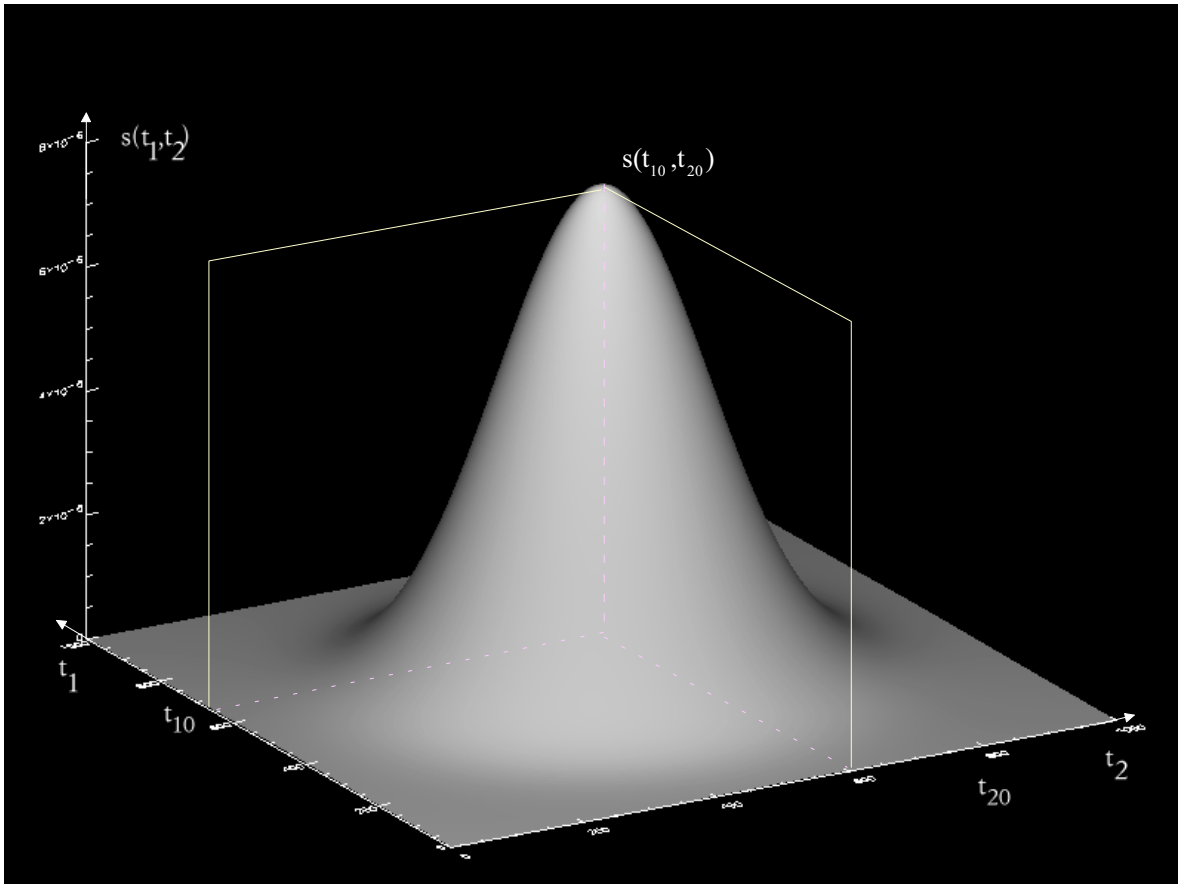


Abbildung 7.1: zweidimensionale Gaußverteilung

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Gesucht wird eine mehrdimensionale Betrachtung von Signalen und Systemen. Dazu betrachten wir beispielsweise einen Amplitudenverlauf über der Ebene t_1, t_2. Zur Darstellung mehrerer Dimensionen verwenden wir die vektorielle Schreibweise:

$$s(\underline{t}) = s(t_1, t_2) \qquad \text{mit: } \underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Ein eindimensionales Signal entsteht immer, wenn man eine Koordinate festhält und die andere variiert:

$$\Rightarrow\ s_{10}(t_1) = s(t_1, 0)$$

Verallgemeinert schreibt man:
Mit $s(\cdot, t_2)$ wird der Verlauf entlang der t_1- Achse beschrieben mit einem konstanten Wert t_2 in t_2 - Richtung.

Eindimensionale Signale können also auch als mehrdimensionale Signale aufgefaßt werden, die in den restlichen Dimensionen konstant sind.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion: $s(t) = a \cdot t^2$ Betrachten wir s(t) als mehrdimensionale Funktion, so ergibt sich mit t_1=t folgende Funktion:

$$s(t_1, t_2, t_3) = a \cdot t_1^{\,2} \cdot 1(t_2) \cdot 1(t_3)$$

Die Stoßantwort eines mehrdimensionalen Systems ist selbstverständlich ebenfalls eine mehrdimensionale Funktion:

$$h(t) \Rightarrow h(\underline{t}) = h(t_1, t_2, t_{3,\ldots})$$

7.1. ERWEITERUNG DER AUS DER EINDIMENSIONALEN SYSTEMTHEORIE BEKANNTEN ZUSAMMENHÄNGE

7.1.1. FALTUNGSINTEGRAL

Bei Betrachtung eines mehrdimensionalen Systems lautet das nun mehrdimensionale Faltungsintegral zur Bestimmung von g(t):

$$g(\underline{t}) = s(\underline{t}) * h(\underline{t})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\underline{\tau}) h(\underline{t} - \underline{\tau}) d\underline{\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n) h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \ldots t_n - \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

7.1.2. DIRACSTOß

Betrachten wir Diracstöße zur Anregung, so muß die Siebeigenschaft angewandt werden:

$$g(\underline{t}) = \delta(\underline{t}) * h(\underline{t}) = h(\underline{t})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\underline{\tau}) h(\underline{t} - \underline{\tau}) d\underline{\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n) h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \ldots t_n - \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

$$\Rightarrow \delta(\underline{\tau}) h(\underline{t} - \underline{\tau}) = \delta(\underline{\tau}) h(\underline{t})$$

Konvention: $\delta(\underline{\tau}) = \delta(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_n) = \begin{cases} \infty & \underline{\tau} = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

7.1.3. MEHRDIMENSIONALE FOURIERTRANSFORMATION

Ausgehend von der eindimensionalen Fouriertransformation in vektorieller Schreibweise wird nun die mehrdimensionale Fouriertransformation betrachtet:

$$S(\underline{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{t}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, \ldots t_n) \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} \cdot e^{-j2\pi f_2 t_2} \ldots \cdot e^{-j2\pi f_n t_n} dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

1. BEISPIEL EINER 2-DIMENSIONALEN FOURIERTRANSFORMATION:

$$s(\underline{t}) = s(t_1, t_2) = \text{rect}\left[\frac{t_1}{T_1}\right] \cdot \text{rect}\left[\frac{t_2}{T_2}\right]$$

$\circ - \bullet$

$$S(\underline{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{t}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left[\frac{t_1}{T_1}\right] \cdot \text{rect}\left[\frac{t_2}{T_2}\right] \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} \cdot e^{-j2\pi f_2 t_2} dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left[\frac{t_1}{T_1}\right] \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left[\frac{t_2}{T_2}\right] \cdot e^{-j2\pi f_2 t_2} dt_2$$

$$= T_1 \cdot \text{si}(\pi f_1 T_1) \cdot T_2 \cdot \text{si}(\pi f_2 T_2)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Die beiden Rectangular-Funktionen waren unabhängig voneinander, so daß sich offensichtlich die Einzelspektren multiplizieren. Auf diesen Zusammenhang wird später nochmals eingegangen.

2. BEISPIEL EINER 2-DIMENSIONALEN FOURIERTRANSFORMATION:

$$s(\underline{t}) = s(t_1, t_2) = \mathrm{rect}\left[\frac{t_1 - t_2}{T_1}\right]$$

$\circ - \bullet$

$$S(\underline{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{t}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left[\frac{t_1 - t_2}{T_1}\right] \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} \cdot e^{-j2\pi f_2 t_2} dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T_1 \cdot \mathrm{si}(\pi f_1 T_1) \cdot e^{-j2\pi f_1 t_2} \cdot e^{-j2\pi f_2 t_2} dt_2$$

$$= T_1 \cdot \mathrm{si}(\pi f_1 T_1) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_1 t_2} \cdot e^{-j2\pi f_2 t_2} dt_2}_{\equiv \underset{t_2 \to f_2}{\mathcal{F}} \left\{ e^{-j2\pi f_1 t_2} \right\}}$$

$$= T_1 \cdot \mathrm{si}(\pi f_1 T_1) \cdot \delta(f_2 + f_1)$$

Weiterer Lösungsweg: Das Integral ließe sich auch zuerst über t_2 integrieren:

$$S(\underline{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{t}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left[\frac{t_1 - t_2}{T_1}\right] \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} \cdot e^{-j2\pi f_2 t_2} dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T_1 \cdot \mathrm{si}(\pi f_2 T_1) \cdot e^{-j2\pi f_2 t_1} \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} dt_1$$

$$= T_1 \cdot \mathrm{si}(\pi f_2 T_1) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_2 t_1} \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} dt_1}_{\equiv \underset{t_1 \to f_1}{\mathcal{F}} \left\{ e^{-j2\pi f_2 t_1} \right\}}$$

$$= T_1 \cdot \mathrm{si}(\pi f_2 T_1) \cdot \delta(f_2 + f_1)$$

Teilspektren:

$$s(t_1, t_2) \circ \overset{t_1 \to f_1}{\text{---}} \bullet \quad S_{t_1}(f_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} dt_1$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s(t_1,t_2) \circ\!\!-\!\!\bullet^{t_2\to f_2} S_{t_2}(t_1,f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_2 t_2}\,dt_2$$

Berechnung des ersten Teilspektrums:

$$s(t_1,t_2) \circ\!\!-\!\!\bullet^{t_1\to f_1} S_{t_1}(f_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_1 t_1}\,dt_1$$

$$\circ \;\; | \;\; t_2 \to f_2 \;\; \bullet$$

gesamt:
$$S_{t_1 t_2}(f_1,f_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi[f_1 t_1 + f_2 t_2]}\,dt_1 dt_2$$
$$= S(f_1,f_2)$$

Zusammengefaßt dargestellt wird die zweidimensionale Fouriertransformation folgendermaßen vollzogen:

a):
$$\circ\!\!-\!\!\bullet^{t_1\to f_1} S_{t_1}(f_1,t_2) \equiv s_{t_2}(f_1,t_2) \circ\!\!-\!\!\bullet^{t_2\to f_2} S(f_1,f_2)$$

$$s(t_1,t_2) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S(f_1,f_2)$$

oder b):
$$\circ\!\!-\!\!\bullet^{t_2\to f_2} S_{t_2}(t_1,f_2) \equiv s_{t_1}(t_1,f_2) \circ\!\!-\!\!\bullet^{t_1\to f_1} S(f_1,f_2)$$

7.2. RECHENGESETZE DER MEHRDIMENSIONALEN FOURIERTRANSFORMATION

$$s(t_1,t_2,t_3,\ldots t_n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S((f_1,f_2,f_3,\ldots f_n)$$

Faltungstheorem:

$$g(t) = s(t) *_n h(t)$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$
\begin{aligned}
G(\underline{f}) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\underline{t}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{\tau}) \cdot h(\underline{t}-\underline{\tau}) d\underline{\tau} \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{\tau}) \cdot h(\underline{t}-\underline{\tau}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t} d\underline{\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{\tau}) \int_{-\infty}^{\infty} h(\underline{t}-\underline{\tau}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t} \, d\underline{\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{\tau}) \cdot H(\underline{f}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{\tau}} d\underline{\tau} \\
&= H(\underline{f}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{\tau}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{\tau}} d\underline{\tau} \\
&= H(\underline{f}) \cdot S(\underline{f}) \\
&= S(\underline{f}) \cdot H(\underline{f})
\end{aligned}
$$

Partielle Faltungen:

$$
s(t_1,t_2) *_{t_1} h(t_1,t_2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet^{\,t_1 \to f_1} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_1,t_2) \cdot h(t_1-\tau_1,t_2) d\tau_1 \right] \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} dt_1
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_1,t_2) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau_1,t_2) \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1} dt_1 d\tau_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_1,t_2) \cdot H_{t_1}(f_1-\tau_1,t_2) \cdot e^{-j2\pi f_1 \tau_1} d\tau_1 \\
&= S_{t_1}(f_1,t_2) \cdot H_{t_1}(f_1,t_2)
\end{aligned}
$$

Die eindimensionale Fouriertransformation ergibt sich durch Multiplikation der Teilspektren! Betrachten wir nun die zweidimensionale Fouriertransformierte:

$$
\begin{array}{l}
\circ \\
| \quad t_2 \to f_2 \\
\bullet
\end{array}
$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{t_1}(f_1,t_2)\cdot H_{t_1}(f_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_2 t_2}\,dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(f_1,f_2)\cdot e^{+j2\pi f_2\tau_2}\,df_2\cdot H_{t_1}(f_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_2 t_2}\,dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(f_1,\eta_2)\cdot e^{+j2\pi\eta_2\tau_2}\,d\eta_2\cdot H_{t_1}(f_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_2 t_2}\,dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(f_1,\eta_2)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} H_{t_1}(f_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi(f_2-\eta_2)t_2}\,dt_2\,d\eta_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{t_1t_2}(f_1,\eta_2)\cdot H_{t_1t_2}(f_1,f_2-\eta_2)\,d\eta_2$$

$$= S(f_1,f_2)*_{f_2} H(f_1,f_2)$$

Daraus folgt zusammengefaßt:

$$s(t_1,t_2)*_{t_1} h(t_1,t_2) \;\circ\!\!-\!\!\bullet^{\,t_1\to f_1}\; S_{t_1}\cdot H_{t_1}(f_1,t_2) \;\circ\!\!-\!\!\bullet^{\,t_2\to f_2}\; S(f_1,f_2)*_{f_2} H(f_1,f_2)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet^{\,t_1\to f_1,\,t_2\to f_2}$$

Die eindimensionale Faltung im Zeitbereich transformiert sich in die eindimensionale Faltung der verbleibenden Variablen im Frequenzbereich.

7.2.1. KOORDINATENTRANSFORMATION

$$s(\underline{t}') = s(A\cdot\underline{t}) = \tilde{s}(\underline{t})$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{s}(\underline{t})\} = \mathcal{F}\{s(A\cdot\underline{t})\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(A\cdot\underline{t})\cdot e^{-j2\pi\underline{f}^T\underline{t}}\,d\underline{t}$$

Substitution: $A\cdot\underline{t} = \underline{u}$

$$\underline{t} = A^{-1}\cdot\underline{u}$$

$$\Rightarrow d\underline{t} = \left|\det(A^{-1})\right|\cdot d\underline{u}$$

$$= \frac{1}{|\det(A)|}\cdot d\underline{u}$$

$\Rightarrow$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\mathcal{F}\{s(A\cdot\underline{t})\}=\frac{1}{|\det(A)|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(\underline{u})\cdot e^{-j2\pi\underline{f}^T A^{-1}\underline{u}}d\underline{u}$$

$$=\frac{1}{|\det(A)|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(\underline{u})\cdot e^{-j2\pi\left(A^{-1T}\underline{f}\right)^T\underline{u}}d\underline{u}$$

$$=\frac{1}{|\det(A)|}\cdot S\left(A^{-1T}\underline{f}\right)$$

7.2.2. BETRACHTUNG DES DREHSINNS EINER DREHMATRIX

$$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$ Drehmatrix

Daraus folgt:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\left(A^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=A$$

Drehung des (Zeit-)Signals bewirkt Drehung des Spektrums (siehe auch Bilder!)

Betrachten wir nun den Drehsinn:

Dazu betrachten wir einen Diracstoß an der Stelle t_0: $\delta(\underline{t}-\underline{t}_0)$

Diese Funktion wird nun mit der Drehmatrix A gedreht: $\delta(A\cdot\underline{t}-\underline{t}_0)$

Wir substituieren: $\tilde{\underline{t}}_0=A^{-1}\cdot\underline{t}_0$

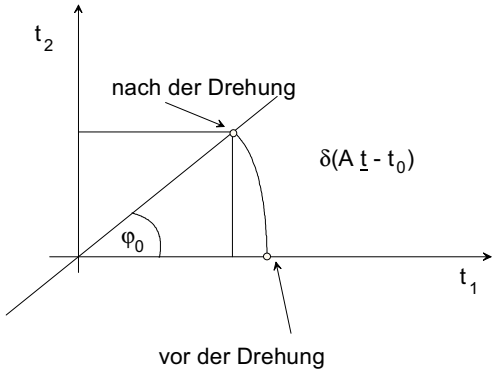


Abbildung 7.2: Drehung der verschobenen Diracfunktion

$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi_0 & \sin\varphi_0\\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0\\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\end{bmatrix}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\underline{\tilde{t}}_0 = A^{-1} \cdot \underline{t}_0 = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} t_{01} \\ t_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{01} \cdot \cos\varphi_0 & - & t_{02} \cdot \sin\varphi_0 \\ t_{01} \cdot \sin\varphi_0 & + & t_{02} \cdot \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Für $\underline{t}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\tilde{t}}_0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{bmatrix}$

7.3. WICHTIGE THEOREME

7.3.1. VERSCHIEBUNGSTHEOREM

$$s(\underline{t} - \underline{t}_0) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{t} - \underline{t}_0) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}} d\underline{t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{u}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T (\underline{u} + \underline{t}_0)} d\underline{u} \qquad \underline{u} = \underline{t} - \underline{t}_0 \quad \text{Subst.!}$$

$$= S(\underline{f}) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \underline{t}_0}$$

7.3.2. ZIRKULAR SYMMETRISCHE SYSTEME

z.B.:

$$t_1 = r \cdot \cos\varphi \qquad \underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$$
$$t_2 = r \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow \quad \underline{t} = \underline{f}(\underline{x})$ nichtlinear!

$$S(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \cdot e^{-j2\pi \underline{f}^T \cdot \underline{t}} \, d\underline{t}$$

Subst. $\underline{t} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} = \underline{f}(\underline{u})$

$$\frac{d\underline{t}}{d\underline{u}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \quad d\underline{t} = \left| \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \right| d\underline{u} = r \cdot d\underline{u}$$

$$S(f_1, f_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} s(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) \cdot e^{-j2\pi [f_1, f_2] \cdot \begin{bmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}} \cdot r \cdot d\underline{u}$$

$$S(f_1, f_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} s(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) \cdot e^{-j2\pi f_1 \cdot r \cdot \cos\varphi} \, e^{-j2\pi f_2 \cdot r \cdot \sin\varphi} \cdot r \cdot d\underline{r} \, d\underline{\varphi}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Für zirkular symmetrische Signale gilt:

$$\underline{\underline{s(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi) = s(r)}}$$

$$S(f_1,f_2) = \int_0^{\infty} s(r)\cdot r \int_0^{2\pi} e^{-j2\pi r\cdot[f_1\cdot\cos\varphi + f_2\cdot\sin\varphi]}\cdot dr\, d\varphi$$

Betrachte jetzt das innere Integral:

$$I(r,f_1,f_2) = \int_0^{2\pi} e^{-j2\pi r\cdot[f_1\cdot\cos\varphi + f_2\cdot\sin\varphi]}\, d\varphi$$

$$1.\,\text{Subst.}: \tilde{\varphi} = \varphi - \pi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j2\pi r\cdot[f_1\cdot\cos(\tilde{\varphi}+\pi) + f_2\cdot\sin(\tilde{\varphi}+\pi)]}\, d\tilde{\varphi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j2\pi r\cdot[-f_1\cdot\cos(\tilde{\varphi}) - f_2\cdot\sin(\tilde{\varphi})]}\, d\tilde{\varphi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r\cdot[f_1\cdot\cos(\tilde{\varphi}) + f_2\cdot\sin(\tilde{\varphi})]}\, d\tilde{\varphi}$$

$$2.\,\text{Subst.}: \quad f_1 = f_0\cdot\cos\varphi_f$$

$$f_1 = f_0\cdot\sin\varphi_f$$

$$I(r, f_0\cdot\cos\varphi_f, f_0\cdot\sin\varphi_f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r\cdot[f_0\cdot\cos\varphi_f\cdot\cos(\tilde{\varphi}) + f_0\cdot\sin\varphi_f\cdot\sin(\tilde{\varphi})]}\, d\tilde{\varphi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r\cdot f_0[\cdot\cos\varphi_f\cdot\cos(\tilde{\varphi}) + \cdot\sin\varphi_f\cdot\sin(\tilde{\varphi})]}\, d\tilde{\varphi}$$

Mit den Additionstheoremen folgt dann:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$I(r, f_0\cdot\cos\varphi_f, f_0\cdot\sin\varphi_f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r\cdot f_0\cos(\varphi_f-\tilde{\varphi})}\, d\tilde{\varphi}$$

Setze jetzt $\varphi_f - \tilde{\varphi} = \alpha$ und $d\tilde{\varphi} = -d\alpha$

$$= -\int_{\varphi_f+\pi}^{\varphi_f-\pi} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha$$

$$= \int_{\varphi_f-\pi}^{\varphi_f+\pi} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha - \int_{-\pi}^{-\pi+\varphi_f} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha + \int_{\pi}^{\pi+\varphi_f} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha - \int_{-\pi}^{-\pi+\varphi_f} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos(\alpha+2\pi)}\, d\alpha + \int_{\pi}^{\pi+\varphi_f} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha$$

Subst.: $\alpha + 2\pi = \tilde{\alpha}$ und $d\alpha = d\tilde{\alpha}$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha \underbrace{- \int_{\pi}^{\pi+\varphi_f} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\tilde{\alpha}}\, d\tilde{\alpha} + \int_{\pi}^{\pi+\varphi_f} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha}_{=0}$$

$$I(r, f_0\cdot\cos\varphi_\delta, f_0\cdot\sin\varphi_f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi r f_0\cdot\cos\alpha}\, d\alpha = 2\pi\, J_0(2\pi r\cdot f_0)$$

Besselfunktion nullter Ordnung 1. Art

Damit erhalten wir zusammenfassend:

$$S(f_1, f_2) = S(f_0\cdot\cos\varphi_\delta, f_0\cdot\sin\varphi_\delta)$$

$$= \int_0^{\infty} s(r)\cdot r\cdot J_0(2\pi r\cdot f_0)\cdot 2\pi\cdot dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r\cdot s(r)\cdot J_0(2\pi r\cdot f_0)\cdot dr = S(f_0) = S(f_r) \quad \text{mit} \quad f_r = f_0$$

$$S_{f_r}(f_r) = 2\pi \int_0^{\infty} r\cdot s(r)\cdot J_0(2\pi r\cdot f_r)\cdot dr$$

Über eine analoge Herleitung erhält man die Rücktransformationsvorschrift:

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$s_r(r) = 2\pi \int_0^\infty f_r \cdot S_{f_r}(f_r) \cdot J_0(2\pi r \cdot f_r) \cdot df_r$$

Man spricht bei den beschriebenen Zusammenhängen von der Hankel – Transformation 0-ter Ordnung !

7.3.3. PROJEKTIONSTHEOREM

Bekannt bei eindimensionalen Signalen sind die Zusammenhänge:

$$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\,df$$

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt$$

Betrachten wir nun ein zweidimensionales Signal

$$S(f_1,f_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2) \cdot e^{-j2\pi f_1 \cdot t_1} \cdot e^{-j2\pi f_2 \cdot t_2}\, dt_1\, dt_2$$

Schnitt entlang der f_2 – Achse durch das Spektrum!

$$S(f_1 = 0, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2) \cdot e^{-j2\pi f_1 \cdot t_1} \cdot dt_1}_{s_p(t_2)} \cdot e^{-j2\pi f_2 \cdot t_2}\, dt_2$$

$$= \mathcal{F}_{t_2 \to f_2}\{s_p(t_2)\} \quad , \text{mit } s_p(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2)\,dt_1$$

Projektion auf die t_2 Achse!

Ebenso :

$$S(f_1, f_2 = 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2) \cdot e^{-j2\pi f_1 \cdot t_1}\, dt_1\, dt_2$$

Schnitt durch das Spektrum entlang der f_1 – Achse!

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2) \cdot dt_2 \cdot e^{-j2\pi f_1 \cdot t_1}\, dt_1$$

$$= \mathcal{F}_{t_1 \to f_1}\{s_p(t_1)\} \quad , \text{mit } s_p(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1,t_2)\, dt_2$$

Die Projektion einer Zeitfunktion auf eine Achse ergibt einen Zentralschnitt durch das Spektrum, bei dem die korrespondierende Frequenzachse = 0 gesetzt wird.

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Erweitert auf 3-dimensionale Signale erhalten wir:

$$S(f_1 = 0, f_2, f_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3) \cdot e^{-j2\pi f_2 \cdot t_2} \cdot e^{-j2\pi f_3 \cdot t_3}\, dt_1\, dt_2\, dt_3$$

$f_1 = 0$ beschreibt eine Schnittfläche

$$= \mathcal{F}_{\substack{t_2 \to f_2 \\ t_3 \to f_3}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_1 \right\}$$

$$= \mathcal{F}_{\substack{t_2 \to f_2 \\ t_3 \to f_3}} \{ s_p(t_2, t_3) \}$$

$$S(f_1 = 0, f_2 = 0, f_3) = \mathcal{F}_{t_3 \to f_3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_1\, dt_2 \right\}$$

$f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ beschreibt eine Schnittlinie

$$= \mathcal{F}_{t_3 \to f_3} \{ s_{pp}(t_3) \}$$

usw...
Zusammenfassend schreiben wir:

$$S(f_1 = 0, f_2) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2)\, dt_1$$

$$S(f_1, f_2 = 0) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2)\, dt_2$$

n = 3 :

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S(f_1 = 0, f_2, f_3) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_1$$

$$S(f_1, f_2 = 0, f_3) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_2$$

$$S(f_1, f_2, f_3 = 0) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_3$$

$$S(f_1 = 0, f_2 = 0, f_3) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_1\, dt_2$$

$$S(f_1 = 0, f_2, f_3 = 0) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_1\, dt_3$$

$$S(f_1, f_2 = 0, f_3 = 0) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2, t_3)\, dt_2\, dt_3$$

Allgemein :

Betrachte jetzt : Nullsetzen von n – m Frequenzen

$$S\left(\underline{f}, f_i = 0 \atop i=m,m+1,\ldots n\right) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} s(t_1, t_2, \ldots t_n)\, dt_m\, dt_{m+1} \ldots dt_n$$

Systematisch :

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \ldots \\ \underline{f}_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{t} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1 \\ \ldots \\ \underline{t}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s(\underline{t}) = s(\underline{t}_1, \underline{t}_2)$$

$$S(\underline{f}) = S(\underline{f}_1, \underline{f}_2) \qquad \text{und} \qquad S(\underline{f}_1, 0) = \mathcal{F}_{\underline{t}_1 \to \underline{f}_1}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(\underline{t})\, d\underline{t}_2 \right\}$$

7.3.4. RADIALSCHNITTE IN BELIEBIGER RICHTUNG

Für zwei Dimensionen :

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$S(f_1,f_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(t_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_1\cdot t_1}\cdot e^{-j2\pi f_2\cdot t_2}\,dt_1\,dt_2$$

Für einen Radialschnitt durch das Spektrum setzen wir:

$$f_1=f_r\cdot\cos\varphi_0$$
$$f_2=f_r\cdot\sin\varphi_0$$

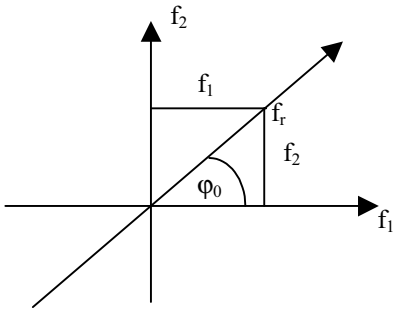
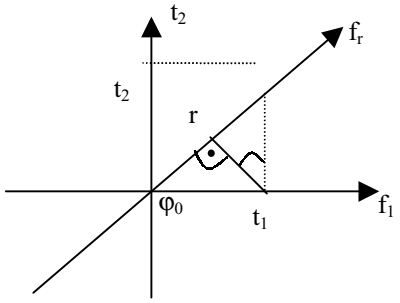


Abbildung 7.3: Radialschnitt durch Spektrum

$$S(f_r\cdot\cos\varphi_0,f_r\cdot\sin\varphi_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(t_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_r\cdot\cos\varphi_0\cdot t_1}\cdot e^{-j2\pi f_r\cdot\sin\varphi_0\cdot t_2}\,dt_1\,dt_2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(t_1,t_2)\cdot e^{-j2\pi f_r\cdot[\cos\varphi_0\cdot t_1+\sin\varphi_0\cdot t_2]}\cdot e\;\;dt_1\,dt_2$$



Subst.:

$$\tilde{t}_2=t_2$$
$$\tilde{t}_1=\cos\varphi_0\cdot t_1+\sin\varphi_0\cdot t_2=r$$
$$\tilde{t}_1=r=t_1\cdot\cos\varphi_0+t_2\cdot\sin\varphi_0$$
$$d\underline{t}=dt_1\,dt_2=\frac{1}{\det|J|}\cdot d\underline{\tilde{t}}$$

Abbildung 7.4: Radialschnitt durch Spektrum

$$t_1=(\tilde{t}_1-t_2\cdot\sin\varphi_0)\cdot\frac{1}{\cos\varphi_0}$$
$$=(\tilde{t}_1-\tilde{t}_2\cdot\sin\varphi_0)\cdot\frac{1}{\cos\varphi_0}$$

$$\frac{d\underline{\tilde{t}}}{d\underline{t}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_0 & \sin\varphi_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\cos\varphi_0$$

$$\Rightarrow\quad d\underline{t}=\frac{1}{|\cos\varphi_0|}\cdot d\underline{\tilde{t}}$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\Rightarrow S(f_r \cdot \cos\varphi_0 \, , \, f_r \cdot \sin\varphi_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\frac{\tilde{t}_1}{\cos\varphi_0} - \frac{\tilde{t}_2}{\cos\varphi_0} \cdot \sin\varphi_0 \, , \, \tilde{t}_2 \right) \cdot e^{-j2\pi f_r \cdot \tilde{t}_1} \, \frac{d\tilde{t}_1}{|\cos\varphi_0|} \, d\tilde{t}_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\frac{\tilde{t}_1}{\cos\varphi_0} - \tilde{t}_2 \cdot \tan\varphi_0 \, , \, \tilde{t}_2 \right) \frac{d\tilde{t}_2}{|\cos\varphi_0|} \cdot e^{-j2\pi f_r \cdot \tilde{t}_1} \, d\tilde{t}_1$$

$$= \mathcal{F}_{\tilde{t}_1 \to f_r} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\frac{\tilde{t}_1}{\cos\varphi_0} - \tilde{t}_2 \cdot \tan\varphi_0 \, , \, \tilde{t}_2 \right) \cdot \frac{1}{|\cos\varphi_0|} \cdot d\tilde{t}_2 \right\}}_{\text{Projektion auf die } \tilde{t}_1 = r \text{ Achse !}}$$

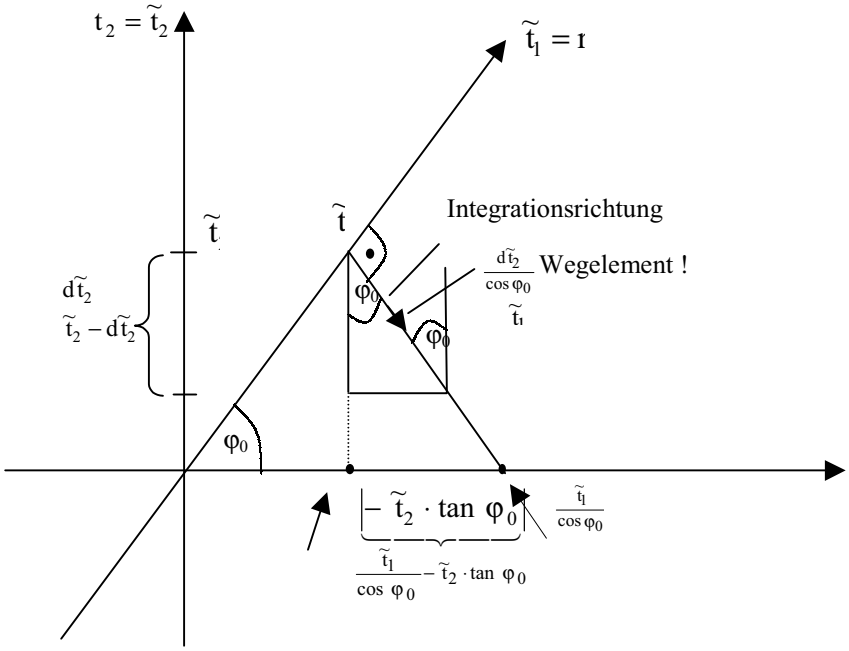


Abbildung 7.5: Zentralschnitt durch das Spektrum entlang der r-Achse

Zentralschnitt durch das Spektrum entlang der r – Achse im Winkel φ_0 = Projektion der Signale auf die r – Achse !!

Wichtig für die Tomographie :
Die Projektion auf die r – Achse ist die sogenannte Radon – Transformation !

7.4. MEHRDIMENSIONALE ABTASTUNG

Generell gilt :

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

$$\underbrace{s(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\cdot T)}_{abt(t)} \quad \circ\!-\!\bullet \quad S(f)*\underbrace{\frac{1}{T}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)}_{ABT(f)}$$

im eindimensionalen, d.h. wir kennen den Zusammenhang

$$s(t)\cdot abt(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad S(f)*ABT(f) \qquad \text{eindimensional}$$

Bekannt ist auch :

$$s(\underline{t})\cdot abt(\underline{t}) \quad \overset{\underline{t}\to\underline{f}}{\circ\!-\!\bullet} \quad S(\underline{f})*ABT(\underline{f}) \qquad \text{mehrdimensional}$$

Dies ist das Faltungstheorem !

Wie sieht aber im mehrdimensionalen Fall ein Abtastgitter aus ?

<u>Wir betrachten zunächst :</u>

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\cdot T_1) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{T_1}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_1}\right) \qquad \text{(eindimensional)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-n\cdot T_1) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-n\cdot T_1)\cdot \underbrace{1}_{\equiv t_2} \qquad \text{(zweidimensional)}$$

Der Separierungssatz sagt aus:

$$\underset{t_2\to f_2}{\mathcal{F}_{t_1\to f_1}}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-n\cdot T_1)\cdot 1(t_2)\right\} = \mathcal{F}_{t_1\to f_1}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-n\cdot T_1)\right\}\cdot \mathcal{F}_{t_2\to f_2}\{1(t_2)\}$$

$$= \frac{1}{T_1}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_1-\frac{n}{T_1}\right) \quad \cdot \quad \delta(f_2)$$

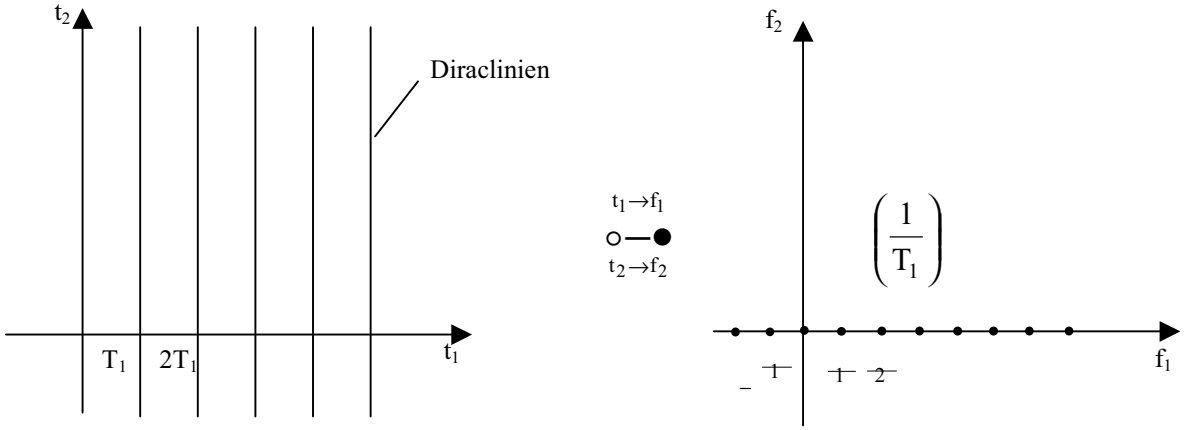


Abbildung 7.6: vertikale Diraclinien im Zeitbereich – horizontale Diracreihen im Zeitbereich

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

(Vorstellung: vertikale Diraclinien im Zeitbereich führen zu horizontaler Diracreihe im Frequenzbereich !)

$$\mathrm{abt_1}(t_1,t_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-nT_1)\cdot 1(t_2)\quad\circ\!-\!\bullet\quad\frac{1}{T_1}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_1-\frac{n}{T_1}\right)\cdot\delta(f_2)$$

$$\mathrm{abt_1}(\underline{t})\qquad\circ\!-\!\bullet\qquad\mathrm{ABT_1}(\underline{f})$$

Drehung des Koordinatensystems $\quad A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

$$\mathrm{abt_1}(A\cdot\underline{t})\circ\!-\!\bullet\frac{1}{\det A}\cdot\mathrm{ABT_1}\left(\left(A^{-1}(f)\right)^{T}\right)=\frac{1}{1}\cdot\mathrm{ABT_1}(A\cdot\underline{f})$$

Was bedeutet diese Drehung ?

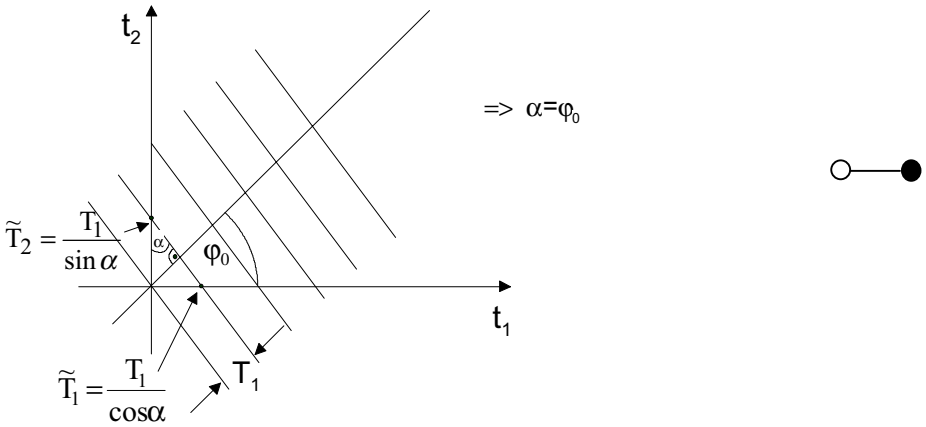


Abbildung 7.7: gedrehte Diraclinien im Zeitbereich

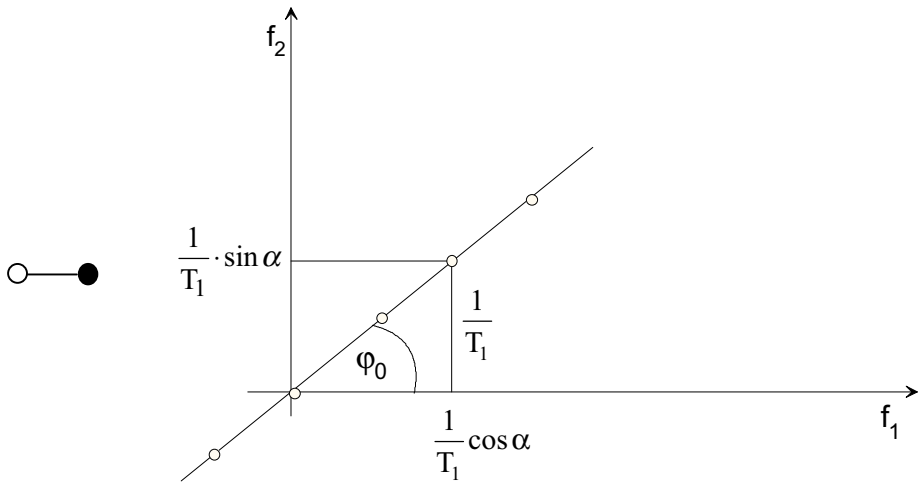


Abbildung 7.8: „schräge“ Punktreihe im Frequenzbereich

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

(Vorstellung: gedrehte Diraclinien im Zeitbereich führen zu "schräger" Punktereihe im Frequenzbereich)

$$\mathrm{abt}_1(A\cdot \underline{t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\cos\alpha\cdot t_1 + \sin\alpha\cdot t_2 - n\cdot T_1)\cdot 1\cdot(-\sin\alpha\cdot t_1 + \cos\alpha\cdot t_2)$$

$$A\cdot \mathscr{F}\{\mathrm{abt}_1(A\cdot \underline{t})\} = \mathrm{ABT}_1\{A\cdot \underline{f}\} = \frac{1}{T_1}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\cos\alpha\cdot f_1 + \sin\alpha\cdot f_2 - \frac{n}{T_1}\right) \cdot \delta(-\sin\alpha\cdot f_1 + \cos\alpha\cdot f_2)$$

Völlig analog :

$$\mathscr{F}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t_2 - i\cdot T_2)\cdot 1(t_2)\right\} = \frac{1}{T_2}\cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_2 - \frac{i}{T_2}\right)\cdot \delta(f_1)$$

Konstruktion eines Punkte - Rasters:

Durch Schnitt von vertikalen und horizontalen Diraclinien wird ein Punktraster erzeugt:

$$\mathrm{abt}_{2D}(t_1,t_2) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - n\cdot T_1)\cdot 1(t_2)\right]\cdot\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t_2 - i\cdot T_1)\cdot 1(t_1)\right]$$

||| ≡

$$\mathrm{ABT}_{2D}(f_1,f_2) = T_1^{-1}\cdot T_2^{-1}\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_1 - \frac{n}{T_1}\right)\cdot \delta(f_2)\right] * \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_2 - \frac{i}{T_2}\right)\cdot \delta(f_1)\right]$$

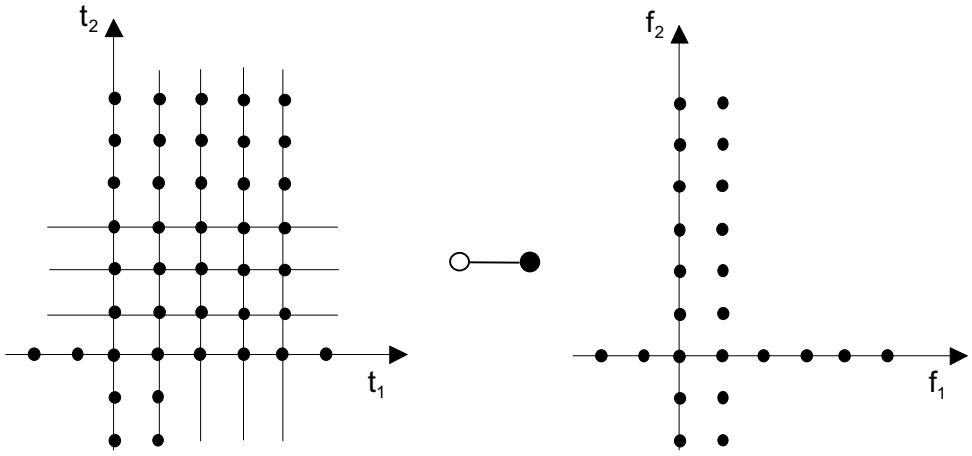


Abbildung 7.9: Diracpunkteraster im Zeitbereich – Diracpunkteraster im Frequenzbereich

(Vorstellung: Schnitt von Diraclinien => Diracpunkte-Raster im Zeitbereich. Daraus ergibt sich im Frequenzbereich aus Faltung einer horizontalen mit einer vertikalen Diracpunktereihe ein Diracpunkte-Raster im Frequenzbereich!)

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Anderer Weg :

$$s_{abt_2}(t_1,t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - n\cdot T_1)\cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t_2 - i\cdot T_2)$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - n\cdot T_1\,,\, t_2 - i\cdot T_2)}}$$

$$S_{abt_2}(f_1,f_2) = \frac{1}{T_1}\cdot\frac{1}{T_2}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_1 - \frac{n}{T_1}\right)\cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_2 - \frac{i}{T_2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{T_1}\cdot\frac{1}{T_2}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_1 - \frac{n}{T_1}, f_2 - \frac{i}{T_2}\right)}}$$

Für beliebige Raster :

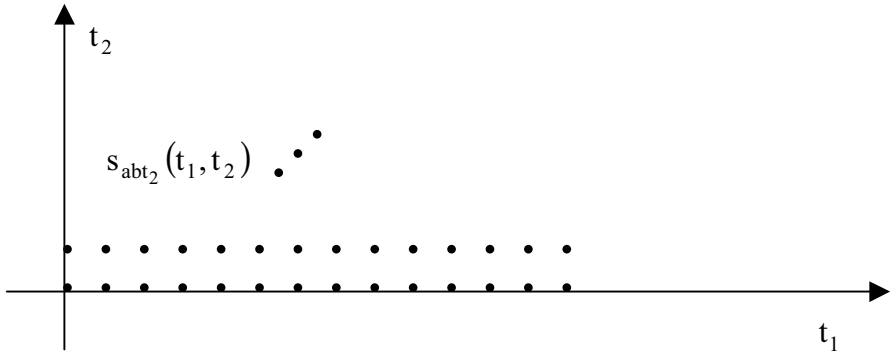


Abbildung 7.10: beliebige Raster

$$\underline{\tilde{t}} = A\cdot t \qquad ,\text{mit } A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 1$$

$$\delta(\underline{t} - \underline{t}_0) \;\rightarrow\; \delta(A\cdot\underline{t} - \underline{t}_0) = \frac{1}{\det A}\cdot\delta\left(\underline{t} - A^{-1}\cdot\underline{t}_0\right)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +a & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & +a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

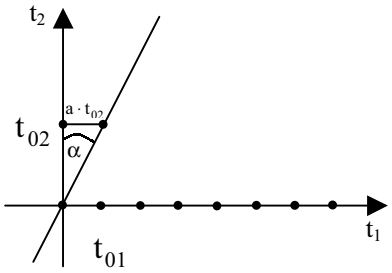
Betrachte jetzt die Lage

$$\underline{\tilde{t}}_0 = A^{-1}\cdot\underline{t}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & +a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\underline{t}_0 = \begin{bmatrix} t_{01} + a\cdot t_{02} \\ t_{02} \end{bmatrix}$$

$$\delta(t_1 - \tilde{t}_{01}, t_2 - \tilde{t}_{02}) = \delta(t_1 - t_{01} - a\cdot t_{02}, t_2 - t_{02})$$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen



$$\tan\alpha = \frac{a \cdot t_{02}}{t_{02}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = \arctan a}}$$

$$t_{01} + a \cdot t_{02} = \tilde{t}_0$$

Abbildung 7.11: Scherung des Koordinatensystems

Die Matrix A bewirkt offensichtlich eine Scherung des Koordinatensystems. Wir betrachten nun das Abtastgitter nach Scherung des Koordinatensystems:

$$\Rightarrow s_{abt_2}\left(A \cdot \underline{t}\right) \quad \circ\!-\!\bullet \quad S_{Abt_2}\left(A^{-1} \cdot \underline{f}\right)$$

$$\text{mit} \quad \left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

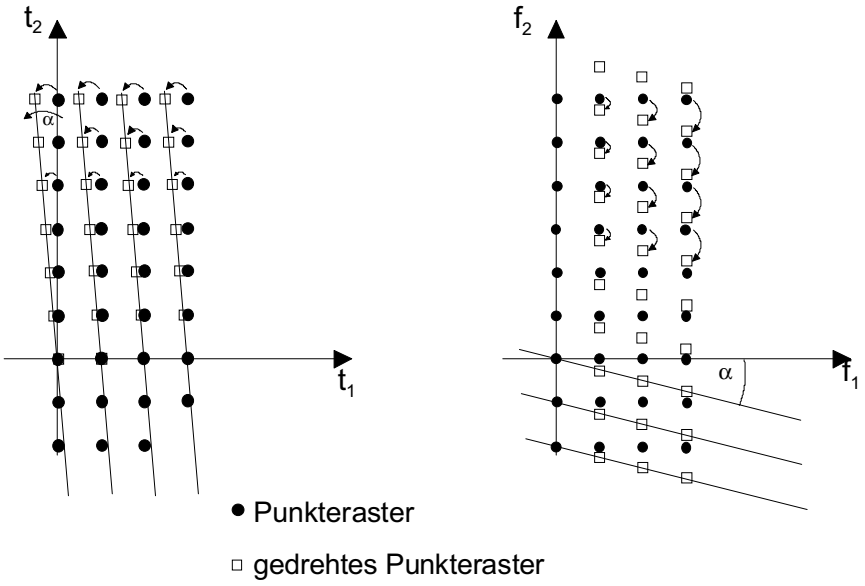


Abbildung 7.12: Abtastgitter nach Scherung des Koordinatensystems

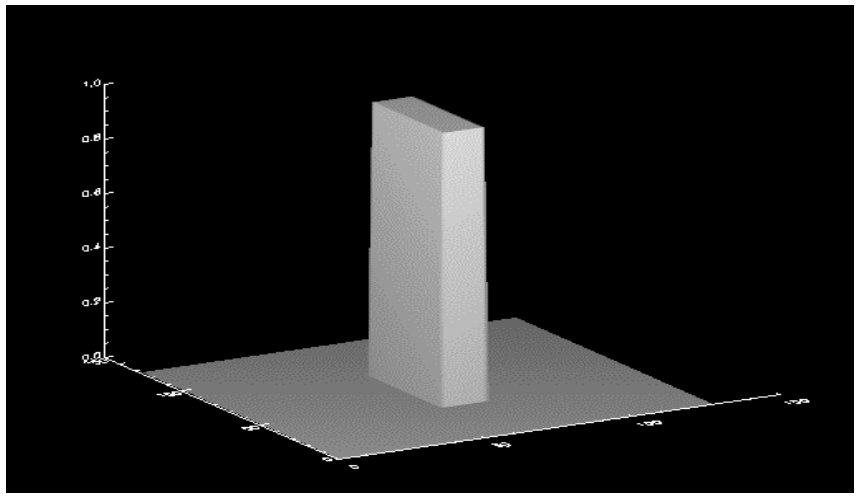
(Vorstellung: Eine Drehung des Gitters im Zeitbereich nach links führt zu einer Drehung des Gitters im Frequenzbereich nach rechts um den gleichen Winkel. Die Drehrichtung ändert sich!)

$\alpha = \arctan(a)$

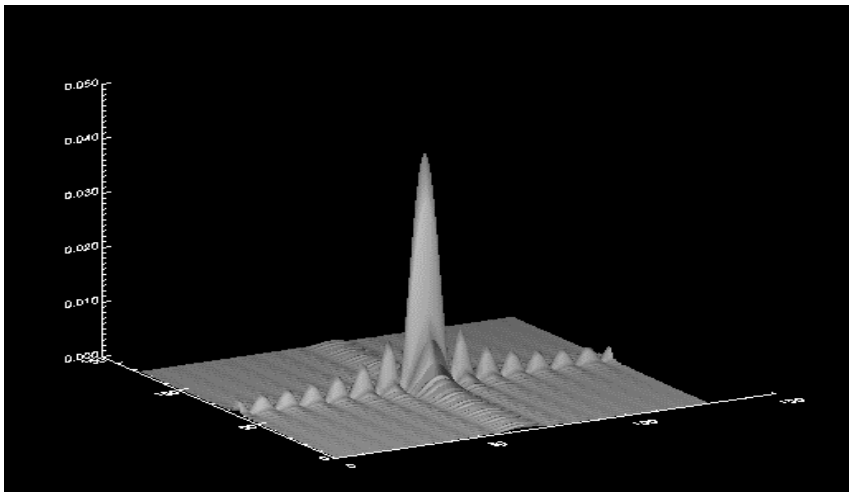
$\tan\alpha = a \qquad a \cdot T = \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

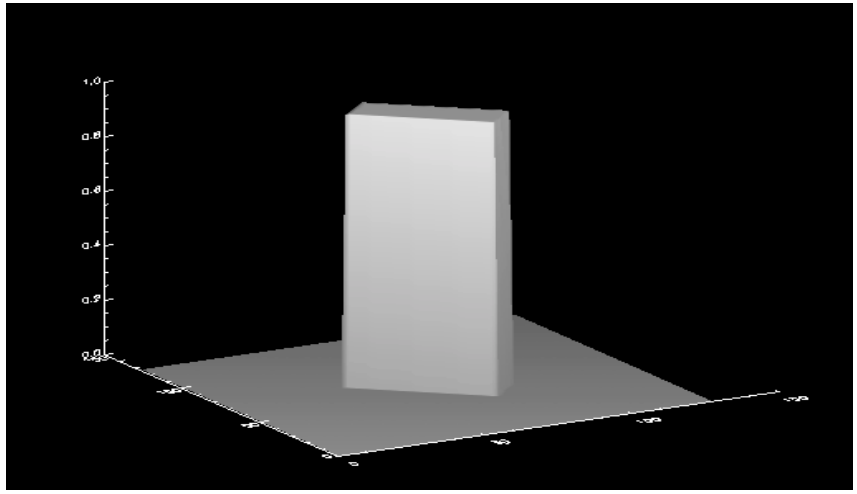
Drehung einer zweidimensionalen Rechteckfunktion:



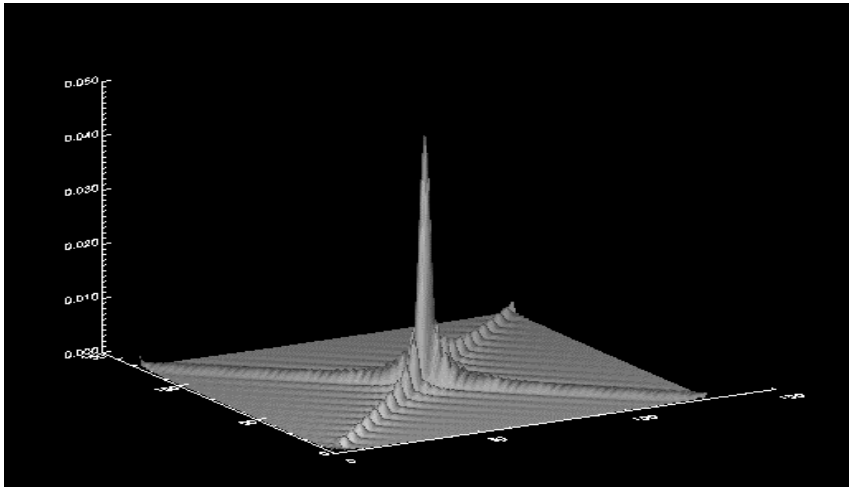
Rechtecktunktion in Normallage



Amplitudendichtespektrum der Recheckfunktion



Rechteckfunktion um 45° gedreht



Amplitudendichtespektrum der gedrehten Rechteckfunktion

Stichwortverzeichnis:

Abstraktion ... 11
Abtast-Halteschaltung ... 127
Abtasttheorem ... 130, 133
Abtastung ... 127
Abtastung, ideal ... 132
Abtastung, mehrdimensional ... 312
Abtastung, natürlich ... 133
Abtastung, real ... 138
Abtastung, Sample-Hold ... 129
Ähnlichkeit ... 167
Ähnlichkeit, absolut ... 169
Ähnlichkeit, relativ ... 169
Ähnlichkeitssatz ... 83
Allpaß ... 197
Amplitudendichtespektrum ... 71
Amplitudengang ... 198
Amplitudenmodulation ... 260
Amplitudenmodulation, Einseitenbandmodulation ... 263
Amplitudenmodulation, Modulationsgrad ... 260
Amplitudenmodulation, Modulationstrapez ... 261
Amplitudenmodulation, Zweiseitenbandmodulation ... 262
Anfangswerttheorem ... 114
Approximation ... 29
Approximation, ideal ... 32
Arctan-Bildner ... 241
Assoziativgesetz ... 47
asymptotisches Verhalten ... 106
Autokorrelationsfunktion ... 180
Bandpaß ... 228
Bandpaß, äquivalenter Tiefpaßbereich ... 233
Bandpaß, ideal ... 228
Bandpaßbereich, Äquivalenzen zum TP-Bereich ... 246
Bandpaßsignal, symmetrisch ... 251
Bandpaßsignale, Abtastung im äquivalenten TP-Bereich ... 253
Basisband ... 237
Besselfunktion ... 278
Black-Box ... 14
Carson-Bandbreite ... 280
Chirp ... 281
Chirp, Anwendung in der Radartechnik ... 283
Chirp, Autokorrelationsfunktion ... 283, 288
Chirp, Matched Filter ... 285
Chirpimpuls ... 119
Dämpfungsmaß ... 199
Dämpfungswinkel ... 199
Differentiationssatz ... 87
Differentiator, ideal ... 62
Differenzenergie ... 169
Diraclinie ... 313
Diracreihe ... 313
Diracstoß ... 29
Diracstoß, Dehnungsfaktor ... 58
Diracstoß, Differentiation ... 61
Diracstoß, Faltungsintegral ... 60
Diracstoß, Gewicht ... 55, 56
Diracstoß, Meßtechnik ... 51
Diracstoß, Siebeigenschaft ... 56, 57
Diracstoßfolge ... 97
Diskrete Fourier Transformation ... 146, 148
Distributivgesetz ... 48, 179
Doppeldiracstoß ... 62
Doppeldiracstoß, Eigenschaften ... 65
Doppeldiracstoß, Funktionalapproximation ... 64
Drehmatrix ... 303
Drehsinn ... 303
Echoamplituden ... 223
Echomethode ... 220
Echomethode, Zusammenfassung ... 224
Eigenfunktion ... 67
Eigenwert ... 67
Einschwingvorgang ... 205
Einseitenbandmodulation, Filtermethode ... 266
Einseitenbandmodulation, Phasenmethode ... 267
Elementarsignal ... 6
Energie ... 167
Energiedichtespektrum ... 183
Energiesignal ... 167
Exponentialimpulses ... 73
Faltung, Einselement ... 45
Faltung, partiell ... 301
Faltung, zeitdiskret ... 165
Faltungsalgebra ... 43
Faltungsintegral ... 35
Faltungstheorem ... 72, 89, 300
Faltungstheorem, diskret ... 158
Fensterfunktion ... 219
Fourierreihe ... 151
Fourier-Transformation ... 70
Frequenzbereich ... 67
Frequenzhub ... 280
Frequenzmodulation ... 271
Frequenzmodulation, Momentanfrequenz ... 272
Frequenzmodulation, Momentanphase ... 271
Gauß-Impuls ... 63
Geradeausempfänger ... 264
Gibb´sches Phänomen ... 206, 212
Gruppenlaufzeit ... 200

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen

Hankel – Transformation 307
Hilbert-Transformation 244
Hüllkurvendemodulation 240
Hüllkurvendemodulator 263
Impulskorrelationsfunktion 177
Integrator, ideal 62
Inverse Diskrete Fouriertransformation 154
Kommutativgesetz 46
Korrelation 167
Korrelation für Leistungssignale 180
Korrelation, diskret 188
Kreuzkorrelationsfunktion 174, 178
Kreuzkorrelationskoeffizient, normiert 170
Landau-Symbole 105
Laufzeitglied, ideal 51, 60, 86
Laufzeitmessung 283
Leistungssignal 168
Linearität 14
Matched Filter 189, 192
Matched Filter, Eigenschaften 194
Methode der stationären Phase 125, 273
Modulation 258
Nyquist-Rate 134
Orthogonalität 171
Oszilloskop, ideal 53
Oszilloskop, real 53
Parsevalsches Theorem 92, 184
Phasengang 199
Phasengerasteter Regelkreis (PLL) 292
Phasenlaufzeit 199
Phasenmodulation 271
Phasenmodulation, Modulationsindex 271
Phasenmodulation, Momentanfrequenz 271
Phasenmodulation, Momentanphase 271
Projektion 308
Punkte - Raster 314
Punktereihe 314
Quadraturempfänger 263
Quadraturmischer 237
Quantisierung 127
Radialschnitt 310
Radon – Transformation 312
RC-Tiefpaß 10, 20, 36
Restseitenbandmodulation 267
Riemann-Lebesgue-Lemma 107
Ripple 216
Schah-Funktion 98
Scherung 316
selbstreziproke Funktion 103
Separierungssatz 312
Siebeigenschaft 49
Signal 5
Signal, analytisch 241
Signal, analytisch- Momentanphase und -frequenz 245
Signalenergie 161
Signalverarbeitung, zeitdiskret 141
Singularitäten 114
smearing 217
Stoßantwort 28
Superpositionsintegral 35
Superpositionssatz 81
Symmetrietheorem 87
System 5
System ,verzerrungsfrei - Eigenschaften 200
System, ideal, verzerrungsfrei 45
System, verzerrungsfrei 195
Systemtheorie 195
Tiefpaß, ideal 201
Tiefpaß, ideal - Durchlaßbereich 201
Tiefpaß, ideal - Sprungantwort 209
Tiefpaß, ideal - Stoßantwort 202
Transformation 14
Überabtastung 134
Übertragungsfunktion 69
Unschärferelation 85
Unterabtastung 134
Verschiebungssatz 85
Wiener-Khintchine-Theorem 183
Wiener-Lee-Theorem 187
Wrap-around-Effekt 290
Zähldiskriminator 291
Zeit-Bandbreite-Produkt 205
Zeitinvarianz 16
Zeittorschaltung 139
Zentralschnitt 308
Zweiseitenbandmodulation 281
Zwischenfrequenzempfänger 264

© ZESS PB2, Universität-GH Siegen