# Differenzenapproximation partieller Differentialgleichungen

**H.-J. Reinhardt**†

WS 1996/97

† Fachbereich Mathematik
**Universität – Gesamthochschule Siegen**
Hölderlinstr. 3, 57068 Siegen
E-Mail: hjreinhardt@numerik.math.uni-siegen.de

## Vorwort

Das vorliegende Skriptum ist aus einer Vorlesung entstanden, die der Autor zweimal — zuletzt im WS 96/97 — an der Univ.–GH Siegen gehalten hat. Zu der Vorlesung wurden theoretische und praktische Übungen gestellt. Die Übungsaufgaben finden sich im Anhang A; Musterlösungen der praktischen Aufgaben sind im Anhang B zusammengestellt.

Seinem verehrten akademischen Lehrer, Herrn Prof. Dr. F. Stummel, ist der Autor dafür zu Dank verpflichtet, Teile eines entsprechenden Skriptums verwenden zu dürfen.

Dieses Skriptum wurde von Frau M. Beier mit LaTeX erstellt. Herr Dipl.-Math. R. Ansorge hat die Übungsaufgaben zusammengestellt und betreut. Herr cand. math. M. Charton war bei der Aufarbeitung der praktischen Aufgaben behilflich. Ihnen und meinen Studenten sei für Ihren Einsatz und Ihre Mitarbeit gedankt.

Siegen, im März 1997 H.–J. Reinhardt

# Inhaltsverzeichnis


Allgemeine Vorbemerkungen . . . . . 1
Modellbeispiele für Rand- und Anfangswertaufgaben . . . . . 2

**1 Approximation elliptischer Differentialgleichungen 9**
1.1 Einfachste Approximation des Laplaceschen Differentialoperators . . . . . 9
1.2 Approximation in irregulären Gittern . . . . . 14
1.3 Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten . . . . . 19
1.4 Eine verbesserte Differenzenapproximation . . . . . 22
1.5 Randwertprobleme für elliptische Gleichungen mit differentiellen Randbedingungen . . . . . 26

**2 Elliptische Differentialgleichungen. Maximumprinzip 35**
2.1 Diskretes Maximumprinzip . . . . . 35
2.2 Existenz, Eindeutigkeit und Abschätzung der Lösungen . . . . . 38
2.3 Konvergenz der Differenzenapproximationen . . . . . 42
2.4 Numerische Lösung der diskreten Randwertaufgabe . . . . . 45

**3 Elliptische Differentialgleichungen. Hilbertraummethoden 49**
3.1 Der diskrete Laplace-Operator . . . . . 49
3.2 Numerische Lösung der approximierenden Gleichungssysteme . . . . . 53
3.3 Eigenwertaufgaben . . . . . 56
3.3.1 Schwingende Saite . . . . . 56
3.3.2 Diskrete schwingende Saite . . . . . 58
3.3.3 Schwingende Membran . . . . . 59
3.3.4 Diskrete schwingende Membran . . . . . 61

**4 Approximation parabolischer Anfangs-Randwertprobleme 63**
4.1 Einfachste Approximationen der Wärmeleitungsgleichung . . . . . 63
4.2 Struktur und Lösung der approximierenden Gleichungssysteme . . . . . 66
4.3 Anfangs-Randwertaufgaben unter Störungen der Anfangswerte . . . . . 70
4.4 Verfahren von Crank–Nicolson und von Douglas . . . . . 73

**5 Stabilität und Konvergenz bei parabolischen Problemen 79**

5.1 Die einfachsten Approximationen . . . . . 79

5.2 Stabilitätsbedingung und Spektralradius . . . . . 84

5.3 Verfahren von Crank–Nicolson . . . . . 86

5.4 Verfahren von Douglas . . . . . 89

5.5 Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten . . . . . 92

**6 Approximation der Wellengleichung 95**

6.1 Die homogene Wellengleichung . . . . . 95

6.2 Differenzenapproximation der inhomogenen Wellengleichung . . . . . 99

6.3 Konvergenz der Approximation . . . . . 103

**7 Hyperbolische Differentialgleichungen erster Ordnung 105**

7.1 Einfachste Approximation des Modellproblems . . . . . 105

7.2 Das Lax-Wendroff- und das Friedrichs-Schema . . . . . 112

7.3 Das Bocksprung–Schema[1)] . . . . . 119

7.4 Implizite Approximationen . . . . . 120

7.5 Das Kastenschema . . . . . 122

**8 Positivitätseigenschaften und die von-Neumann-Bedingung 127**

8.1 Allgemeine Darstellung von Differenzenverfahren und Stabilität . . . . . 127

8.2 Lineare positive Verfahren . . . . . 131

8.3 Die von Neumann–Bedingungen . . . . . 135

**9 Differenzenverfahren aus Variationsmethoden 147**

9.1 Elliptische Differentialgleichungen (1-dim.) . . . . . 147

9.2 Die Poisson–Gleichung (2–dim.) . . . . . 152

9.3 Parabolische Probleme . . . . . 160

9.4 Hyperbolische Probleme . . . . . 166

**A Übungsaufgaben 171**

**B Musterlösungen der praktischen Übungsaufgaben 185**

**Literaturverzeichnis 221**

[1)] (Englisch: Leap-frog Scheme)

**Index** **225**

# Allgemeine Vorbemerkungen

In dieser Vorlesung soll die Methode der *Differenzenapproximation* an einfachen klassischen Modellbeispielen von Rand- und Anfangswertaufgaben *partieller Differentialgleichungen* entwickelt werden. Außer den üblichen Vorkenntnissen der Differential- und Integralrechnung und der linearen Algebra aus dem ersten Studienjahr werden keine weiteren Kenntnisse vorausgesetzt. Es werden also insbesondere keine Kenntnisse über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen benötigt. Wir werden uns hier darauf beschränken, typische Rand- und Anfangswertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen zu formulieren und zugehörige Differenzenapproximationen anzugeben. An Hand dieser Approximationen werden wir in elementarer Weise auch eine Reihe von typischen Begriffsbildungen und Eigenschaften für die entsprechenden Differentialgleichungsprobleme kennenlernen.

Bei Rand- und Anfangswertaufgaben partieller Differentialgleichungen gibt es nur in sehr speziellen Fällen *explizite* Lösungen. In den Anwendungen ist man daher weitgehend auf *Näherungsverfahren* angewiesen. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beschäftigt sich vor allem mit Fragen nach der *Existenz, Eindeutigkeit* und den *Eigenschaften* der Lösungen von Differentialgleichungsproblemen. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der gestellten Probleme werden hier vorausgesetzt.

Wir bemerken noch, daß zu ein und demselben Differentialgleichungsproblem eine große Zahl verschiedener denkbarer Approximationen existiert. Dies entspricht ganz den Verhältnissen, wie sie etwa bei Approximation von Differentialquotienten durch Differenzenquotienten oder bestimmten Integralen durch Quadraturformeln anzutreffen sind.

Uns interessieren in dieser Vorlesung insbesondere

(1) die *Herleitung* von Differenzenapproximationen,

(2) *Existenz, Eindeutigkeit* und *Eigenschaften* der Lösungen der Differenzenapproximationen.

(3) Approximations- oder *Konsistenzordnung, Stabilität* und *Konvergenz* der Approximationen,

(4) die *Struktur* der approximierenden Probleme, insbesondere der zugehörigen *linearen Gleichungssysteme* und *Koeffizientenmatrizen*,

(5) numerische Methoden zur *Berechnung* der Lösungen durch direkte und iterative Verfahren.

Heute gibt es neben den Differenzenapproximationen die noch wesentlich allgemeineren und leistungsfähigeren *Finite–Elemente Approximationen* von partiellen Differentialgleichungen. Wir können uns daher auch aus diesem Grund bei den Differenzenapproximationen auf einfache *Modellbeispiele* beschränken, die das Typische sichtbar machen, und brauchen uns nicht um größere Allgemeinheit der Methoden zu bemühen.

## Modellbeispiele für Rand- und Anfangswertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen

1. *Elliptische Differentialgleichungen.* Die einfachsten Beispiele erhält man mit Hilfe des *Laplaceschen Differentialoperators*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

für Funktionen von $n$ Veränderlichen. Sei $G$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Damit lautet die sogenannte *Laplace–Gleichung* oder *Potentialgleichung*:

$$\Delta u = 0 \ \text{ in } \ G.$$

Lösungen dieser Gleichung heißen *harmonische Funktionen.* Es gibt unendlich viele Lösungen dieser Gleichung, insbesondere die *harmonischen Polynome*

$$1,\ x_1, \ldots,\ x_n,\ x_j x_k,\ x_j^2 - x_k^2,\ (j \neq k), \ldots\ .$$

Aus der Funktionentheorie weiß man, daß Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen stets harmonische Funktionen zweier reeller Veränderlicher sind.

Die zur Laplace-Gleichung gehörige inhomogene Gleichung

$$-\Delta u = f \ \text{ in } \ G$$

heißt *Poisson–Gleichung.* Sie beschreibt z.B. elektrostatische Felder der äußeren Ladungsdichte $f$, eine belastete Membran unter der äußeren Last $f$, Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten u.s.w. Die zugehörige *Eigenwertgleichung*

$$-\Delta u = \lambda u \ \text{ in } \ G$$

tritt z.B. bei der *schwingenden Saite* ($n = 1$), *schwingenden Membran* ($n = 2$) oder dreidimensionalen schwingenden Kontinua ($n = 3$) auf.

Eindeutig bestimmte Lösungen derartiger partieller Differentialgleichungen entstehen erst durch Hinzunahme von *Randbedingungen*:

1. Dirichlet–Problem: $\quad u = g \ \text{ auf } \ \partial G$

2. Neumann–Problem: $\quad \dfrac{\partial u}{\partial N} = g \ \text{ auf } \ \partial G,$
   wobei $\dfrac{\partial}{\partial N}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen bezeichnet.

3. Robbin–Problem $\quad \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial N} = g \ \text{ auf } \ \partial G.$

*Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten* haben im Falle zweiter Ordnung etwa die Form

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f \quad \text{in} \quad G,$$

wobei die Koeffizienten $a_{jk}$ der *Elliptizitätsbedingung*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k > 0, \; x \in G, \quad \text{für} \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 > 0,$$

genügen.

Ein Modellbeispiel für eine elliptische Differentialgleichung vierter Ordnung ist die sogenannte *Plattengleichung*

$$\Delta^2 u = f \quad \text{in} \quad G.$$

Die Randbedingungen der *eingespannten Platte* lauten

$$u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G.$$

Wir bemerken noch, daß im Falle $n = 1$ die obigen partiellen Differentialgleichungen und zugehörigen Randwertprobleme in gewöhnliche Differentialgleichungen und Zwei-Punkt-Randwertaufgaben übergehen.

2. *Parabolische Differentialgleichungen.* Grundtyp ist hier die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad \text{in} \quad G \times (0,T), \quad G \subset \mathbb{R}^n,$$

mit der *Randbedingung*

$$u(x,t) = r(x,t), \quad x \in \partial G, \quad 0 < t < T,$$

und der *Anfangsbedingung*

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in G.$$

Diese Gleichung beschreibt z.B. die Wärmeverteilung in einem Draht ($n = 1$), einer Membran ($n = 2$) oder einem homogenen Material ($n = 3$), die zu Beginn eine Temperaturverteilung $g$ haben, im Verlauf der Zeit am Rande auf der Temperatur $r$ gehalten und im Innern mit der Verteilung $f$ geheizt werden. Im Falle $n = 1$ ist einfacher

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad \text{in} \quad G \times (0,T).$$

Eine wichtige Methode der Analysis zur Behandlung derartiger Aufgabenstellungen besteht in der *Separation* der Zeit- und Ortsveränderlichen. Falls $f = 0$, $r = 0$ ist wählt man als Lösungsansatz

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t).$$

Dann wird

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{zu} \quad v\,w' = w\,\Delta v$$

oder

$$\frac{w'}{w} = \frac{\Delta v}{v} = -\lambda,$$

d. h. konstant in $t$ und $x$. Zusammen mit der Randbedingung genügt der Ortsanteil $v$ dann dem Eigenwertproblem

$$\Delta v + \lambda\, v = 0 \ \text{ in } \ G, \quad v = 0 \ \text{ auf } \ \partial G$$

und der Zeitanteil der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$w' = -\lambda\, w \quad : \quad w(t) = w(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

mit den Eigenwerten $\lambda$. Durch *Superposition* solcher spezieller Lösungen $u = vw$ entsteht ein Lösungsansatz der Form

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(0)\, v_k(x)\, \mathrm{e}^{-\lambda_k t} \quad .$$

Die Konstanten $w_k(0)$ werden nun so bestimmt, daß für $t = 0$ die Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ erfüllt ist. Dies ist möglich, solange sich die Anfangsbedingung $g$ nach dem System der Eigenfunktionen von $-\Delta$ entwickeln läßt. Man sieht hierbei übrigens, daß elliptische Eigenwertprobleme eine wichtige Rolle für die Struktur der Lösungen parabolischer Probleme spielen.

3. *Hyperbolische Differentialgleichungen.* Grundtyp dieser partiellen Differentialgleichungen ist die sogenannte *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f \ \text{ in } \ G \times (0,T)$$

mit der *Randbedingung*

$$u(x,t) = r(x,t), \quad x \in \partial G, \quad t \in (0,T),$$

und den *Anfangsbedingungen*

$$u(x,0) = g_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x), \quad x \in G.$$

Diese Aufgabe beschreibt etwa das zeitliche Verhalten einer schwingenden Saite ($n = 1$), Membran ($n = 2$) oder eines elastischen Kontinuums ($n = 3$) unter einer äußeren Anregung $f$, die am Rande wie $r$ geführt wird und am Anfang die Auslenkung $g_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $g_1$ aufweist. Für $f = r = 0$ kann man auch hier wieder die Zeitabhängigkeit separieren und Lösungsansätze in Form von Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen des zugehörigen elliptischen Ortsoperators gewinnen.

Ein einfaches Beispiel einer hyperbolischen Differentialgleichung erster Ordnung bildet die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f \quad \text{in} \quad G \times (0,T)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = g, \quad x \in G.$$

Das Gebiet $G$ ist hier z.B. der ganze $\mathbb{R}^n$. Bei beschränkten Gebieten treten Periodizitätsbedingungen oder ähnliches auf. Von besonderer Bedeutung sind Systeme entsprechender Gleichungen erster Ordnung, wobei dann $a$ durch eine Matrix zu ersetzen ist.

4. *Klassifizierung von partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung*

Die allgemeine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in $x, y$ hat die Form

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e \text{ in } G\ ,$$

wobei $a, b, c, e$ Funktionen von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $u, x, y$ sind. Hängen $a, b, c$ nicht von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $u$ ab und hängt $e$ höchstens linear von $u$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder $\frac{\partial u}{\partial y}$ ab, dann ist die Differentialgleichung *linear*. Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung heißt

*elliptisch,* wenn $b^2 < 4ac$ in $G$,

*parabolisch,* wenn $b^2 = 4ac$ in $G$,

*hyperbolisch,* wenn $b^2 > 4ac$ in $G$.

Sind $a, b, c$ von $x$ und $y$ abhängig, dann kann sich der Typ der Differentialgleichung in $G$ ändern. Im folgenden geben wir Modellbeispiele für die verschiedenen Typen an:

*elliptisch:* „1. Randwertproblem der Potentialtheorie“ (auch: „Poisson–Gleichung“)

$$\begin{aligned} -(u_{xx} + u_{yy}) &= f \text{ in } G = \Big\{(x,y) : 0 < x, y < 1\Big\} \\ u &= g \text{ auf } \partial G (= \text{ Rand von } G) \end{aligned}$$

Da $a = c = -1$, $b = 0$, ist $b^2 < 4ac$.

*hyperbolisch:* „Wellengleichung“

$$u_{tt} = u_{xx} \text{ in } G = \Big\{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \le T\Big\}$$

$$\begin{aligned} \text{mit Randbedingungen} \qquad u(0,t) &= u(1,t) = 0,\ 0 < t \le 1\ , \\ \text{und Anfangsbedingungen} \qquad u(x,0) &= g_0(x)\ , \\ u_t(x,0) &= g_1(x)\ ,\ 0 \le x \le 1\ . \end{aligned}$$

Da $a = -c = 1$, $b = 0$, ist $b^2 > 4ac$.

*parabolisch:* „Wärmeleitungsgleichung“ $(\sigma > 0)$

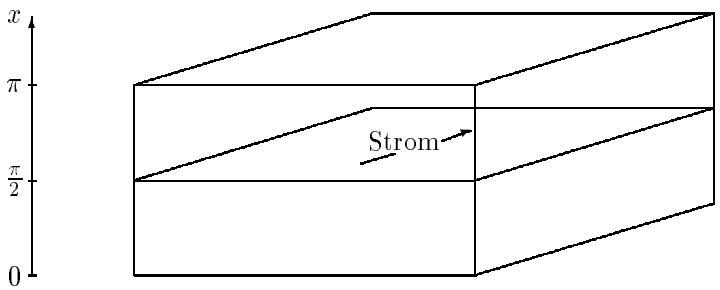
$$u_t = u_{xx} \text{ in } G = \Big\{(x,t) : 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T\Big\}$$

mit Anfangsbedingungen $u(x,0) = g(x)\,,\ 0 \le x \le \pi$, und *Dirichlet–Randbedingungen* $u(0,t) = r_0(t)\,,\ u(\pi,t) = r_1(t)\,,\ 0 < t \le T$. Anstelle der Dirichlet–Randbedingungen betrachtet man auch Randbedingungen mit Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x(0,t) - pu(0,t) &= \lambda_0(t)\,, \\ u_x(\pi,t) + qu(\pi,t) &= \lambda_1(t)\,, \quad 0 < t \le T\,, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_0\,,\ \lambda_1$ — und oben auch $r_0, r_1$ — stetige, beschränkte Funktionen sind. Ist $p = q = 0$, dann heißen diese Randbedingungen *von Neumann–Randbedingungen*. Es gibt auch noch andere Arten von Randbedingungen, z. B. periodische $u(-\ell,t) = u(\ell,t), t > 0$. Da $a = -1\,,$ $b = c = 0$, ist $b^2 = 4ac$.

Als Beispiel für die Wärmeleitungsgleichung betrachten wir eine stromdurchflossene, isolierte Platte:

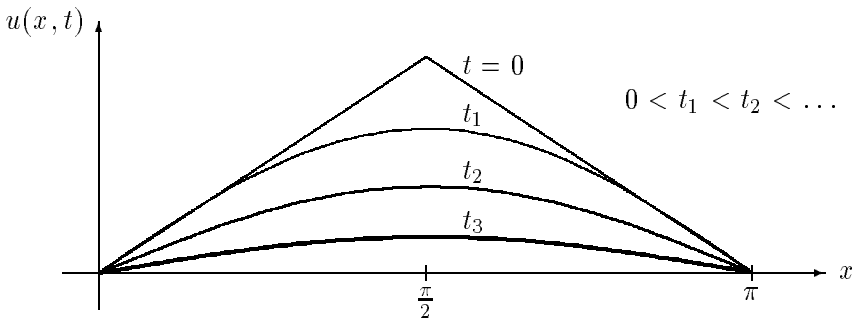



Durch Abschalten des Stroms ergibt sich für $t = 0$ folgende Wärmeverteilung

$$g(x) = \begin{cases} Cx & , \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,, \\ C(\pi - x) & , \ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Wir nehmen an, daß homogene Dirichlet–Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ vorliegen.

Untersucht man nun die Wärmeverteilung für $t > 0$, so beobachtet man ein symmetrisches Angleichen an Null (für $t \to \infty$).




Mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen erhält man für die Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $G = (0,\pi)\times(0,T)$ mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen

$$u(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp(-m^2 t)\exp(imx)\ .$$

Wegen der homogenen Randbedingungen bleiben von den komplexen Exponentialfunktionen nur die Sinusanteile erhalten und man kann die Lösung auch als Sinusreihe schreiben.

Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, müssen die Koeffizienten $A_m$ als Fourierkoeffizienten von $g$ gewählt werden,

$$A_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\exp(-imx)\,dx\ , \quad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

wobei $g$ als ungerade Funktion auf $[-\pi,\pi]$ fortgesetzt ist. Nach Richtmyer–Morton [RM67], S. 6, ergibt sich für die obige Anfangsverteilung, daß

$$\begin{aligned} A_m &= 0\ ,\ m \text{ gerade}\ , \\ A_m &= \frac{2iC}{\pi m^2}(-1)^{(m+1)/2}\ ,\ m \text{ ungerade}\ ; \end{aligned}$$

damit erhält man als Lösung

$$u(x,t) = \frac{4C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\Big((2n-1)x\Big)\exp\Big(-(2n-1)^2 t\Big)\ .$$

# Kapitel 1

# Approximation elliptischer Differentialgleichungen

## 1.1 Einfachste Approximation des Laplaceschen Differentialoperators

1. In diesem Abschnitt wollen wir die einfachste Approximation des Laplaceschen Differentialoperators und der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G, \quad u = g \quad \text{auf } \partial G \tag{1}$$

für ein Modellbeispiel herleiten. Zur Veranschaulichung betrachten wir das in Figur 1.2 dargestellte $L$–förmige Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Zur Formulierung von Differenzenapproximationen wird mit einer positiven *Schrittweite* $h > 0$ ein *Gitter* $\mathbb{R}_h^n$ des $\mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\mathbb{R}_h^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (m_1, \ldots, m_n) \cdot h,\ m_j \text{ ganz },\ j = 1, \ldots, n\}\,.$$

Für den Fall $n = 1$ erhält man damit ein äquidistantes Gitter auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$, für $n = 2$ ein quadratisches Gitter, das die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$ überzieht u.s.w.

Sei $\overline{G}$ die Abschließung des Gebiets $G$, so wird

$$\overline{G}_h = \overline{G} \cap \mathbb{R}_h^n$$

die Menge aller Gitterpunkte in $\overline{G}$. Weiter führen wir die Einheitsvektoren

$$e_j = (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{nj}), \quad e_{-j} = -e_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

ein. Zu jedem Gitterpunkt $x$ heißen die Punkte $x + he_j$, $j = \pm 1, \ldots \pm n$, *Nachbarpunkte* von $x$ (s. Fig. 1.1). Mit $G_h$ wird die Menge aller derjenigen Punkte $x \in \overline{G}_h$ bezeichnet, für die auch die abgeschlossenen Intervalle

$$[x - he_j, x + he_j] \quad j = 1, \ldots, n,$$

in $\overline{G}$ liegen. Für ein Gebiet der in Figur 1.2 veranschaulichten Art liegen offenbar alle Gitterpunkte der Differenz $\overline{G}_h - G_h$ auf dem Rande $\partial G$ des Gebiets $G$. Daher bezeichnen wir $\partial G_h = \overline{G}_h - G_h$ als den *Rand* und $G_h$ als das *Innere* der Gittermenge $\overline{G}_h$.

2. Mit Hilfe der *Taylor-Formel* gilt für jede in $\overline{G}$ stetige, viermal stetig differenzierbare

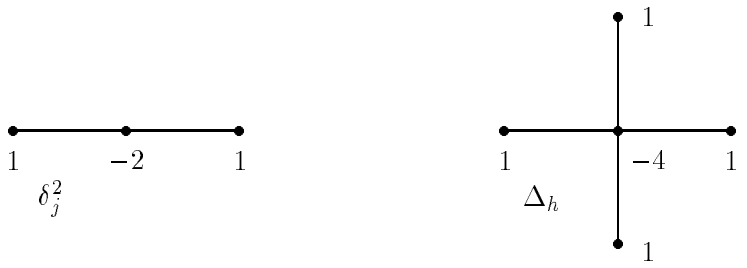



Fig. 1.1: Differenzensterne von $\delta_j^2$ und $\Delta_h$.

Funktion in $G$ die Darstellung

$$u(x \pm he_j) = u(x) \pm h\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) \pm \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(x) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}(\xi_j^{\pm})$$

mit einer Zwischenstelle $\xi_j^{\pm}$ in $\overline{x, x \pm he_j}$, für jedes $j = 1, \ldots, n$ und für jeden Gitterpunkt $x \in G_h$. Aus dieser Darstellung ergibt sich unmittelbar für die *zentralen partiellen Differenzenquotienten* 2. Ordnung $\delta_j^2$ bezüglich der Variablen $x_j$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \delta_j^2 u(x) &= \frac{1}{h^2}(u(x + he_j) + u(x - he_j) - 2u(x)) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) + \frac{h^2}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}(\xi_j^+) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}(\xi_j^-)\right), \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Summiert man diese Beziehungen über $j = 1, \ldots, n$ so entsteht die folgende *Differenzenapproximation des Laplaceoperators* $\Delta$:

$$\Delta_h u(x) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^2 u(x) = \Delta u(x) + T_h(x)$$

mit dem sogenannten *Abschneidefehler*

$$T_h(x) = \frac{h^2}{24}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}(\xi_j^+) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}(\xi_j^-)\right), \quad x \in G_h.$$

Der Abschneidefehler ist von der Ordnung $h^2$, wird also sehr klein für kleine Schrittweiten $h$.

3. Der Laplacesche Differentialoperator $\Delta$ läßt sich in diesem Sinne durch den zugehörigen *Laplaceschen Differenzenoperator*

$$\Delta_h = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^2$$

approximieren. Auf diese Weise wird die Randwertaufgabe (1) approximiert durch

$$-\Delta_h u_h = f_h \ \text{ in } \ G_h, \quad u_h = g_h \ \text{ auf } \ \partial G_h. \tag{2}$$

Zusammen mit der Approximation von $\Delta$ und $G$ werden hier also auch noch die rechte Seite $f$ und die Randbedingung $g$ approximiert. Natürlich kann man, falls möglich, auch einfach $f_h(x) = f(x), x \in G_h$, $g_h(x') = g(x')$, $x' \in \partial G_h$ setzen. Die obige Aufgabe (2) hat die Lösung $u_h$, von der wir im weiteren Verlauf der Überlegungen noch zeigen werden, daß $u_h(x)$ Näherungen für die gesuchten Funktionswerte $u(x)$ der Lösung $u$ von (1) an Gitterpunkten $x \in G_h$ liefert.

4. Die zugehörige homogene Differentialgleichung oder Potentialgleichung wird also approximiert durch

$$\Delta_h u_h = 0 \ \text{ in } \ G_h.$$

Die Lösungen $u_h$ heißen *diskret harmonische Funktionen.* Diese Funktionen genügen der *Mittelwertgleichung*

$$u_h(x) = \frac{1}{2n} \sum_{j=-n}^{+n}{}' \, u_h(x + he_j), \quad x \in G_h. \tag{3}$$

(Dabei zeigt der Apostroph an den beiden Summen an, daß der Summationsindex $j \neq 0$ sein soll.) In Worten: Der Funktionswert von $u_h$ an der Stelle $x$ ist gleich dem Mittelwert von $u_h$ an den $2n$ Nachbarpunkten von $x$.

Im Falle von zwei unabhängigen Veränderlichen nimmt der Laplacesche Differenzenoperator die Form

$$\Delta_h v(x) = \frac{1}{h^2} \left( v(x + he_1) + v(x + he_2) + v(x - he_1) + v(x - he_2) - 4v(x) \right)$$

an. Im quadratischen Gitter $\mathbb{R}_h^2$ treten zusammen mit dem Punkt $x$ die vier Nachbarpunkt im Abstand $h$ von $x$ auf. Figur 1.1 veranschaulicht die sogenannten Differenzensterne von $\delta_j^2$ und $\Delta_h$, aus denen man in einfacher Weise die Gewichte ablesen kann, mit denen die Funktionswerte an den betreffenden Gitterpunkten auftreten.

**Beispiel 1.** Ebene Strömung um eine Ecke (s. Collatz [Col66], S. 355 f.). Es soll die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem zweidimensionalen Kanal (s. Figur 1.2) berechnet werden. Die zugehörige Stromfunktion $u$ genügt dann der ersten Randwertaufgabe

$$\Delta u = 0 \ \text{ in } \ G, \quad u = g \ \text{ auf } \ \partial G. \tag{4}$$

Die Funktion $g$ auf dem Rande $\partial G$ soll stetig sein und den Bedingungen

$$g = \begin{cases} 0 & \text{auf } ABC, \\ 1 & \text{auf } DEF, \\ linear & \text{auf } AF, CD, \end{cases}$$

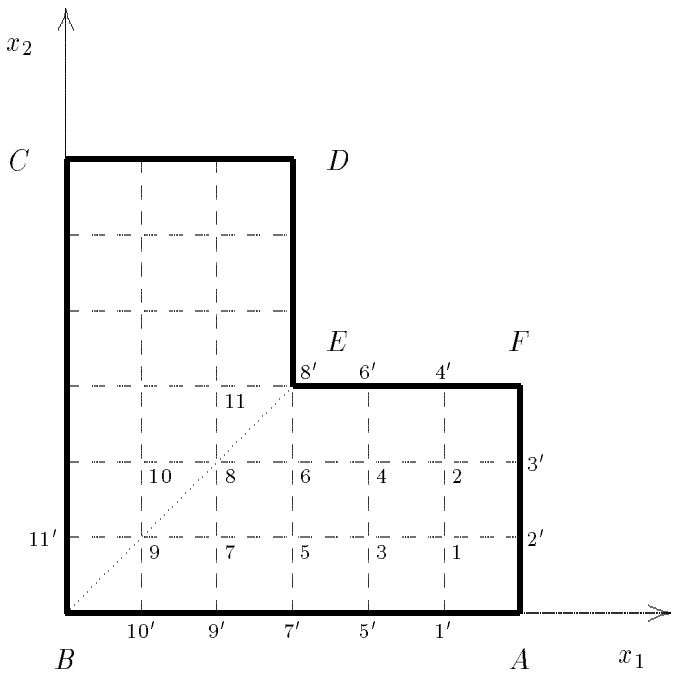



Fig. 1.2: L–förmiges Gebiet mit zugehörigem Gitter.

genügen. Wir wählen ein quadratisches Gitter in $G$ der Maschenweite $h = \frac{1}{6}\overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AF}$. Gitterpunkte aus $G_h$ sind in Fig. 1.2 mit $1, 2, \ldots$ und Punkte auf dem Rande $\partial G_h$ mit $1', 2', \ldots$ durchnumeriert. Die Randwerte von $g$ in den Punkten $2', 3'$ werden dann $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Wir bezeichnen die Funktionswerte der Lösung $u_h$ an den Gitterpunkten $1, 2, \ldots, 1', 2', \ldots$ mit $u_i$ für $i = 1, 2, \ldots, 1', 2', \ldots$ und die Werte von $g$ an den Stellen $1', 2', \ldots$ mit $g_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Dann lautet die Differenzenapproximation der Aufgabe (4) in dem betrachteten Gitter

$$
\begin{aligned}
4u_1 - u_2 - u_3 &= g_1 + g_2 \\
-u_1 + 4u_2 - u_4 &= g_3 + g_4 \\
-u_1 + 4u_3 - u_4 - u_5 &= g_5 \\
-u_2 - u_3 + 4u_4 - u_6 &= g_6 \\
-u_3 + 4u_5 - u_6 - u_7 &= g_7 \\
-u_4 - u_5 + 4u_6 - u_8 &= g_8 \\
-u_5 + 4u_7 - u_8 - u_9 &= g_9 \\
-u_6 - u_7 + 4u_8 - u_{10} - u_{11} &= 0 \\
-u_7 + 4u_9 - u_{10} &= g_{10} + g_{11} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Das Gebiet $G$ und die Funktion $g$ sind symmetrisch bezüglich einer Vertauschung der Ko-

ordinaten $x_1, x_2$. Damit ist sowohl die Lösung der Randwertaufgabe als auch die Differenzenapproximation symmetrisch bezüglich einer Vertauschung der Koordinaten. Anstelle weiterer Differenzengleichungen kann man an den Punkten 10, 11 die Symmetriebedingungen

$$u_{10} = u_7, \quad u_{11} = u_6$$

fordern. Das obige System reduziert sich damit auf ein Gleichungssystem mit 11 Gleichungen. Offensichtlich lassen sich $u_{10}$, $u_{11}$ unmittelbar aus diesem Gleichungssystem eliminieren, so daß die 8. und 9. Gleichung die Gestalt

$$-u_6 - u_7 + 2u_8 = 0, \quad -u_7 + 2u_9 = \frac{1}{2}(g_{10} + g_{11}),$$

annehmen. Die Matrix dieses Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix}
4 & -1 & -1 & & & & & & \\
-1 & 4 & 0 & -1 & & & & 0 & \\
-1 & 0 & 4 & -1 & -1 & & & & \\
 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & & & \\
 & & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & & \\
 & & & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & \\
 & & & & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\
 & 0 & & & & -1 & -1 & 2 & 0 \\
 & & & & & & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

Offenbar ist diese Matrix diagonal dominant und genügt dem schwachen Zeilensummenkriterium

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \leq |a_{jj}| \quad \text{und} \quad \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}|, \quad j = 1, \ldots, n$$

(die erste der Bedingungen ist dabei die Diagonaldominanz). Unter dieser Bedingung ist die Matrix nichtsingulär (s. Stummel/Hainer: Abschnitt 8.2). Wir sehen weiter, daß die Matrix symmetrisch ist und Bandgestalt hat. Daher ist das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung des obigen linearen Gleichungssystems besonders geeignet, wie wir später noch im einzelnen erläutern werden. □

**Beispiel 2.** Approximation von

$$-\Delta u = f \ \text{ in } \ G, \quad u = 0 \ \text{ auf } \ \partial G,$$

in einem rechteckigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Seitenverhältnis $a : b = 2 : 3$. Wir wählen die Schrittweite $h = a/4$ und ein quadratisches Gitter in $G$. Die Gitterpunkte seien einmal wie in Figur 1.3a und ein anderes Mal wie in Figur 1.3b numeriert.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |

Figur 1.3a

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Figur 1.3b

Fig. 1.3: Numerierung der Gitterpunkte in $G_h$.

Das zugehörige approximierende Gleichungssystem

$$-h^2\Delta_h u_h = h^2 f_h \ \text{ in } \ G_h, \quad u_h = 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h,$$

hat dann im ersten Fall die in Fig. 1.4 und im zweiten Fall die in Fig. 1.5 angegebene Koeffizientenmatrix, wobei Nullen durch Leerstellen dargestellt sind. Wie man aus den Figuren abliest, haben die Koeffizientenmatrizen Bandgestalt, im Falle a mit Bandbreite 7 und im Falle b mit Bandbreite 11. Darüber hinaus sind die Koeffizientenmatrizen blocktridiagonal. □

## 1.2 Approximation in irregulären Gittern

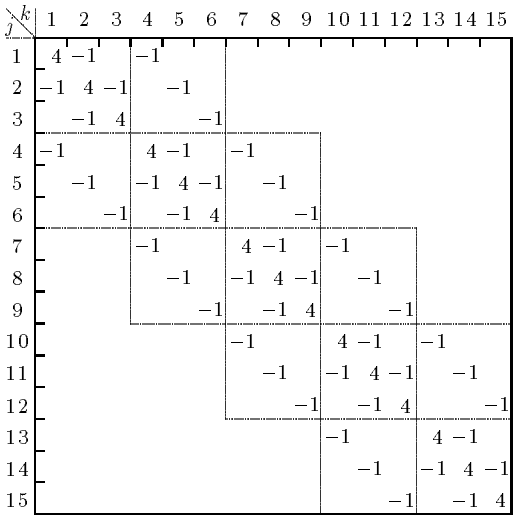
1. Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sollen jetzt in einem irregulären Rechteckgitter approximiert werden, in dem die Gitterpunkte nicht mehr notwendig äquidistant sind. Eine derartige Situation ist in Fig. 1.6 veranschaulicht. Approximationen dieser Art treten bei der Anpassung quadratischer Gitter an krummlinige Ränder der betrachteten Grundgebiete auf. Ein Beispiel zeigt Fig. 1.7.

Zu einem Gitterpunkt $x$ seien positive Schrittweiten $h_j, h_{-j}$, $j = 1, \ldots, n$, gegeben und damit die Nachbarpunkte $x + h_j e_j, x - h_{-j} e_j$ definiert. Zu diesen Gitterpunkten sind die *vorwärts-* und *rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten erster Ordnung* durch

$$D_j v(x) = \frac{1}{h_j}(v(x + h_j e_j) - v(x)), \quad D_{-j} v(x) = \frac{1}{h_{-j}}(v(x) - v(x - h_{-j} e_j) \tag{1}$$

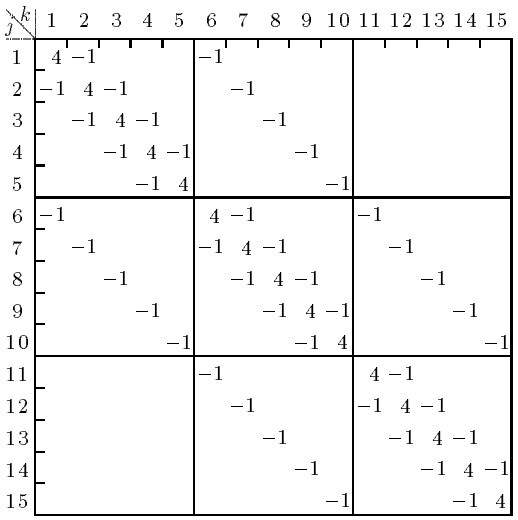
für $j = 1, \ldots, n$ definiert. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u$ erhält man mit Hilfe der Taylor-Formel zweiter Ordnung die Darstellungen

$$\begin{aligned} u(x + h_j e_j) &= u(x) + h_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{h_j^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\xi_j^+), \\ u(x - h_{-j} e_j) &= u(x) - h_{-j} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{h_{-j}^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\xi_j^-), \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$



| j \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | −1 | | −1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | −1 | 4 | −1 | | −1 | | | | | | | | | | |
| 3 | | −1 | 4 | | | −1 | | | | | | | | | |
| 4 | −1 | | | 4 | −1 | | −1 | | | | | | | | |
| 5 | | −1 | | −1 | 4 | −1 | | −1 | | | | | | | |
| 6 | | | −1 | | −1 | 4 | | | −1 | | | | | | |
| 7 | | | | −1 | | | 4 | −1 | | −1 | | | | | |
| 8 | | | | | −1 | | −1 | 4 | −1 | | −1 | | | | |
| 9 | | | | | | −1 | | −1 | 4 | | | −1 | | | |
| 10 | | | | | | | −1 | | | 4 | −1 | | −1 | | |
| 11 | | | | | | | | −1 | | −1 | 4 | −1 | | −1 | |
| 12 | | | | | | | | | −1 | | −1 | 4 | | | −1 |
| 13 | | | | | | | | | | −1 | | | 4 | −1 | |
| 14 | | | | | | | | | | | −1 | | −1 | 4 | −1 |
| 15 | | | | | | | | | | | | −1 | | −1 | 4 |

Fig. 1.4: Koeffizientenmatrix zur Numerierung der Gitterpunkte nach Fig. 1.3a.



| j \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | −1 | | | | −1 | | | | | | | | | |
| 2 | −1 | 4 | −1 | | | | −1 | | | | | | | | |
| 3 | | −1 | 4 | −1 | | | | −1 | | | | | | | |
| 4 | | | −1 | 4 | −1 | | | | −1 | | | | | | |
| 5 | | | | −1 | 4 | | | | | −1 | | | | | |
| 6 | −1 | | | | | 4 | −1 | | | | −1 | | | | |
| 7 | | −1 | | | | −1 | 4 | −1 | | | | −1 | | | |
| 8 | | | −1 | | | | −1 | 4 | −1 | | | | −1 | | |
| 9 | | | | −1 | | | | −1 | 4 | −1 | | | | −1 | |
| 10 | | | | | −1 | | | | −1 | 4 | | | | | −1 |
| 11 | | | | | | −1 | | | | | 4 | −1 | | | |
| 12 | | | | | | | −1 | | | | −1 | 4 | −1 | | |
| 13 | | | | | | | | −1 | | | | −1 | 4 | −1 | |
| 14 | | | | | | | | | −1 | | | | −1 | 4 | −1 |
| 15 | | | | | | | | | | −1 | | | | −1 | 4 |

Fig. 1.5: Koeffizientenmatrix zur Numerierung der Gitterpunkte nach Fig. 1.3b.

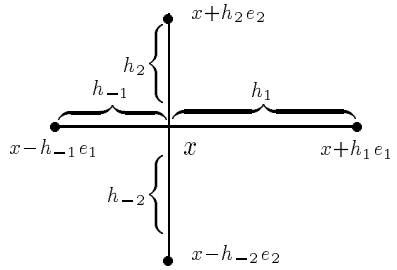



Fig. 1.6: Irregulärer Punktestern in einem Rechteckgitter.

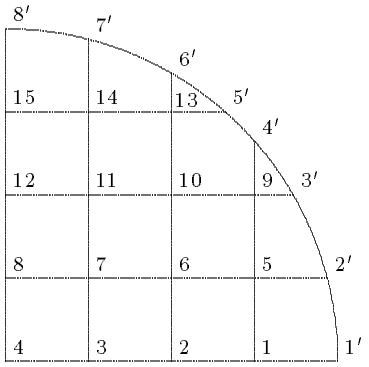



Fig. 1.7: Approximation eines Quadranten einer Kreisscheibe in einem Rechteckgitter.

Daher wird

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = D_j u(x) - \frac{h_j}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\xi_j^+), \quad \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = D_{-j} u(x) - \frac{h_{-j}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\xi_j^-). \tag{3}$$

Die Differenzenquotienten erster Ordnung ergeben also Approximationen der partiellen Ableitungen mit Restgliedern erster Ordnung in $h_j, h_{-j}$.

2. Als Grundlage für die Herleitung weiterer Approximationen wählen wir jetzt Taylor-Entwicklungen bis einschließlich zur dritten Ordnung :

$$\begin{aligned} u(x + h_j e_j) &= u(x) + h_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{h_j^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) + \frac{h_j^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^+), \\ u(x - h_{-j} e_j) &= u(x) - h_{-j} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{h_{-j}^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) - \frac{h_{-j}^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^-), \end{aligned} \tag{4}$$

für dreimal stetig differenzierbare Funktionen $u$ und jedes $j = 1, \ldots, n$, mit neuen Zwischen-

stellen $\xi_j^+, \xi_j^-$ in $(x, x+h_j e_j)$, $(x, x-h_{-j}e_j)$. Damit wird

$$\begin{aligned} D_j u(x) &= \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{h_j}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) + \frac{h_j^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^+), \\ D_{-j} u(x) &= \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) - \frac{h_{-j}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) + \frac{h_{-j}^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^-). \end{aligned} \tag{5}$$

Dividiert man die erste Gleichung durch $h_j$, die zweite durch $h_{-j}$ und addiert beide Gleichungen, so wird $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)$ eliminiert. Löst man die entstehende Gleichung nach $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$ auf, so folgt die Darstellung

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \frac{h_{-j}}{h_j + h_{-j}} D_j u(x) + \frac{h_j}{h_j + h_{-j}} D_{-j} u(x) + R_j(x) \tag{6}$$

mit dem Restglied

$$R_j(x) = \frac{1}{6}\frac{h_j h_{-j}}{h_j + h_{-j}} \left( h_j \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^+) + h_{-j}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^-) \right). \tag{7}$$

Für mindestens dreimal stetig differenzierbare Funktionen läßt sich das Restglied abschätzen durch

$$|R_j(x)| \le \frac{1}{6}(h_j + h_{-j})^2 M_3, \quad M_3 = \max_{\xi} \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi)\right|.$$

3. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung werden daher durch die *zentralen partiellen Differenzenquotienten*

$$\begin{aligned} \delta_j v(x) &= \frac{1}{h_j + h_{-j}} \left( h_{-j} D_j v(x) + h_j D_{-j} v(x) \right) \\ &= \frac{1}{h_j + h_{-j}} \left( \frac{h_{-j}}{h_j} v(x + h_j e_j) - \frac{h_j}{h_{-j}} v(x - h_{-j} e_j) \right) \\ &\quad + \frac{h_j - h_{-j}}{h_j h_{-j}} v(x) \end{aligned} \tag{8}$$

von zweiter Ordnung in $h_j + h_{-j}$ approximiert. Für $h_j = h_{-j} = h$ wird einfach

$$\delta_j v(x) = \frac{1}{2h}\left( v(x + h e_j) - v(x - h e_j) \right), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Weiter ergeben sich aus den obigen Gleichungen (4) Approximationen der zweiten partiellen Ableitungen. Subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung in (4) und löst die so gewonnene Beziehung nach $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)$ auf, so bekommt man die Darstellung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = \frac{2}{h_j + h_{-j}} \left( D_j u(x) - D_{-j} u(x) \right) + R_j(x) \tag{10}$$

mit

$$R_j(x) = \frac{1}{3(h_j + h_{-j})} \left\{ h_j^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^+) + h_{-j}^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^-) \right\}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite in (10) definiert den zentralen partiellen Differenzenoperator zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \delta_j^2 v(x) &= \frac{2}{h_j + h_{-j}} (D_j v(x) - D_{-j} v(x)) \\ &= \frac{2}{h_j(h_j + h_{-j})} u(x + h_j e_j) \\ &\quad + \frac{2}{h_{-j}(h_j + h_{-j})} u(x - h_{-j} e_j) - \frac{2}{h_j h_{-j}} u(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Das Restglied dieser Approximation der zweiten partiellen Ableitung ist von erster Ordnung in $h_j + h_{-j}$. Für $h_j = h_{-j} = h$ geht der obige Ausdruck (11) einfach in die bereits in Abschnitt 1.1 angegebene Form über.

4. Die Approximation des Laplaceschen $\Delta$–Operators an den durch Fig. 1.6 veranschaulichten Gitterpunkten lautet dann

$$-\Delta u = -\Delta_h u(x) + T_h(x) \tag{12}$$

mit dem Laplaceschen Differenzenoperator

$$-\Delta_h v(x) = \sum_{j=-n}^{+n\,\prime} \frac{1}{h_j h_{-j}} v(x) - \sum_{j=-n}^{n\,\prime} \frac{2}{h_j(h_j + h_{-j})} v(x + h_j e_j). \tag{13}$$

Der zugehörige Abschneidefehler ergibt sich zu

$$\begin{aligned} T_h(x) &= -\sum_{j=1}^{n} R_j(x) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3(h_j + h_{-j})} \left\{ h_j^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^+) + h_{-j}^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}(\xi_j^-) \right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Für Polynome $u$ höchstens zweiten Grades in $x_1, \ldots, x_n$ ist der Abschneidefehler also Null und daher $\Delta u(x) = \Delta_h u(x)$, so daß die Approximation exakt wird. Setzt man insbesondere $u(x) = 1$, dann folgt daraus $\Delta_h u(x) = 0$, also

$$\sum_{j=-n}^{n\,\prime} \frac{1}{h_j h_{-j}} = \sum_{j=-n}^{n\,\prime} \frac{2}{h_j(h_j + h_{-j})},$$

was man natürlich leicht auch direkt verifizieren kann.

5. Als eine einfache Anwendung betrachten wir wieder diskret-harmonische Funktionen, also Lösungen der Differenzengleichungen

$$\Delta_h v(x) = 0, \quad x \in G_h.$$

Aus der obigen Beziehung (13) ergibt sich dann

$$v(x) = \sum_{j=-n}^{+n}{}' \mu_j v(x + h_j e_j), \quad x \in G_h, \tag{15}$$

mit den Koeffizienten

$$\mu_j = \frac{2}{h_j(h_j + h_{-j})} \Bigg/ \sum_{j=-n}^{+n}{}' \frac{1}{h_j h_{-j}} > 0, \quad \sum_{j=-n}^{+n}{}' \mu_j = 1.$$

Diskret harmonische Funktionen $v$ besitzen also die *Mittelwerteigenschaft:* Der Funktionswert $v$ an einem Gitterpunkt $x$ ist das gewichtete Mittel der Funktionswerte an den $2n$ Nachbarpunkten. Dies ist das Analogon der aus der Potentialtheorie bekannten Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen. Für ein äquidistantes Gitter hat die Mittelwerteigenschaft für diskret harmonische Funktionen die Form 1.1.(3) .

6. Wir bemerken noch, daß die Restglieder der oben hergeleiteten Differenzenapproximationen partielle Ableitungen mindestens von zweiter oder höherer Ordnung der Funktion $u$ enthalten. Wenn die Funktion $u$ daher konstant oder ein Polynom höchstens ersten Grades in $x_1, \ldots, x_n$ ist, dann sind alle diese Restglieder Null. Das heißt, die obigen Differenzenapproximationen der partiellen Ableitungen sind exakt für Polynome höchstens ersten Grades in $x_1, \ldots, x_n$. Die oben angegebene Approximation des Laplaceschen Differentialoperators ist exakt für Polynome zweiten Grades und bei äquidistantem Gitter sogar für Polynome dritten Grades in $x_1 \ldots, x_n$.

## 1.3 Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten

1. Wir wollen nun Differenzenapproximationen des elliptischen Differentialoperators

$$Lu(x) = -\sum_{j=1}^{n} \left\{ A_j(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) + B_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right\} + C(x)u(x), \; x \in G, \tag{1}$$

mit stetigen Koeffizienten $A_j, B_j, C$ in $\overline{G}$ und

$$A_j(x) > 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad C(x) \geq 0, \quad x \in G, \tag{2}$$

angeben. Die zugehörige erste Randwertaufgabe lautet

$$Lu = f \;\text{ in }\; G, \quad u = g \;\text{ auf }\; \partial G. \tag{3}$$

in Abschnitt 1.2 wurden bereits Approximationen der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung hergeleitet. Ersetzt man dementsprechend in dem obigen Differentialoperator die partiellen Ableitungen durch approximierende Differenzenquotienten, so ergeben sich Approximationen $L_h$ des Differentialoperators $L$. Das Randwertproblem (3) wird damit auf den Gittern $\overline{G}_h$ durch

$$L_h u_h = f_h \ \text{ in } \ G_h, \quad u_h = g_h \ \text{ auf } \ \partial G_h. \tag{4}$$

approximiert.

2. Wählt man die zentralen partiellen Differenzenquotienten erster und zweiter Ordnung zur Approximation der Ableitungen, dann lautet der Differenzenoperator

$$L_h = -\sum_{j=1}^{n} \left\{ A_j(x)\delta_j^2 + B_j(x)\delta_j \right\} + C(x). \tag{5}$$

Mit Hilfe der Restglieddarstellungen aus Abschnitt 1.2 wird

$$Lu(x) = L_h u(x) + T_h(x), \quad x \in G_h,$$

mit einem *Abschneidefehler* $T_h$ von erster Ordnung in $h_{max} = \max_j(h_j, h_{-j})$,

$$T_h(x) = \mathrm{O}(h_{max}), \quad x \in G_h,$$

vorausgesetzt die Funktion $u$ ist dreimal stetig differenzierbar in $\overline{G}$. Für ein äquidistantes Gitter ist $h_j = h_{-j} = h$ und der Abschneidefehler von zweiter Ordnung in $h$,

$$T_h(x) = \mathrm{O}(h^2).$$

3. Zur Abkürzung verwenden wir für Gitterpunkte $x \in G_h$ auch die Bezeichnungen

$$x^0 = x, \quad x^j = x + h_j e_j, \quad j = \pm 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Setzt man die Darstellungen (8), (11) aus 1.2 für die zentralen Differenzenquotienten in den Differenzenoperator $L_h$ ein, dann ergibt sich die Darstellung

$$L_h v(x) = \sum_{j=-n}^{+n} a_h(x, x^j) v(x^j), \quad x \in G_h, \tag{7}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_h(x, x^0) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{h_j h_{-j}} \{2A_j(x) - (h_j - h_{-j})B_j(x)\} + C(x), \\
a_h(x, x^j) &= -\frac{2A_j(x) + h_{-j}B_j(x)}{h_j(h_j + h_{-j})}, \quad j = 1, \ldots, n, \\
a_h(x, x^{-j}) &= -\frac{2A_j(x) - h_j B_j(x)}{h_{-j}(h_j + h_{-j})}, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{8}$$

4. Unter der Voraussetzung, daß sich die Koeffizienten $A_j, B_j$ mit positiven Konstanten $\alpha, \beta$ durch

$$A_j(x) \geq \alpha, \quad |B_j(x)| \leq \beta, \quad x \in \overline{G}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

abschätzen lassen, ist

$$2A_j(x) - (h_j - h_{-j})B_j(x) > 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

solange $h_j, h_{-j} < 2\alpha/\beta$ bleiben. Unter dieser Bedingung ist weiter

$$a_h(x, x^0) > 0, \quad a_h(x, x^j) \leq 0, \quad j = \pm 1, \ldots, \pm n. \tag{10}$$

Differenzenoperatoren mit dieser Eigenschaft heißen vom *nichtnegativen Typ*. Bei der Strukturuntersuchung der Differenzenapproximation (4) des Randwertproblems (3) spielt diese Eigenschaft eine zentrale Rolle, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden. Weiter besitzen die Koeffizienten von $L_h$ offenbar die Eigenschaft

$$\sum_{j=-n}^{+n} a_h(x, x^j) = C(x) \leq 0, \quad x \in G_h.$$

Damit gilt insbesondere die Bedingung

$$\sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} |a_h(x, x_j)| \leq a_h(x, x), \quad x \in G_h, \tag{11}$$

die man als *Diagonaldominanz* bezeichnet. Man beachte, daß die obigen Vorzeichenbedingungen unter den einschränkenden Bedingungen (9) und $h_j, h_{-j} \leq 2\alpha/\beta$, also nur für hinreichend kleine Schritweiten gültig sind.

5. Den Nachteil der Definitheitsbedingung (10) und der Schrittweitenbeschränkung kann man vermeiden, wenn die ersten partiellen Ableitungen durch die vorwärts- und rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten approximiert werden. Man approximiert dabei

$$B_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{durch} \quad \begin{cases} B_j(x)D_j & \text{für} \quad B_j(x) \geq 0, \\ B_j(x)D_{-j} & \text{für} \quad B_j(x) < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Im Englischen wird diese Art der Approximation als „upwind scheme“ bezeichnet. Der Differenzenquotient richtet sich nach dem Vorzeichen von $B_j(x)$ wie die Wetterfahne nach dem Wind. Auf diese Weise gewinnt man einen Differenzenoperator $L_h$ der Gestalt (7) mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_h(x, x^0) &= \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{2A_j(x)}{h_j h_{-j}} + |B_j(x)| \Big/ \begin{Bmatrix} h_j \\ h_{-j} \end{Bmatrix} \right) + C(x) \\ a_h(x, x^j) &= -\left( \frac{2A_j(x)}{h_j(h_j + h_{-j})} + \frac{|B_j(x)|}{h_j} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right), \ j = 1, \ldots, n, \\ a_h(x, x^{-j}) &= -\left( \frac{2A_j(x)}{h_{-j}(h_j + h_{-j})} + \frac{|B_j(x)|}{h_{-j}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right), \ j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei jeweils die erste bzw. zweite Zeile in den geschweiften Klammern gilt, je nach dem ob $B_j(x) \geq 0$ ist oder nicht. Wie man sieht, sind jetzt die Vorzeichenbedingungen (10) ohne jede Schrittweitenbeschränkung erfüllt. Ebenso gilt die Bedingung (11) der Diagonaldominanz. Diese Eigenschaft wird im Vergleich zur Approximation (5) auch für ein äquidistantes Gitter durch eine um eine Ordnung geringere Konsistenzordnung erkauft. Der Abschneidefehler $T_h$ wird jetzt nur noch

$$T_h(x) = \mathrm{O}(h_{max}), \quad x \in G_h,$$

wie wir aus den Restgliedabschätzungen in Abschnitt 1.2 entnehmen können.

## 1.4 Eine verbesserte Differenzenapproximation für die Laplace– bzw. Poissongleichung

Wir haben bisher zur Approximation des Laplace–Operators den sogenannten 5–Punkt–Laplace–Differenzenoperator herangezogen, der, wie wir gesehen haben, die Approximationsgüte $\mathrm{O}(h^2+k^2)$ hat. Speziell sei jetzt $n = 2$ , $h = h_1$ , $k = h_2$. Man könnte nun hergehen und die zweiten Ableitungen von $u$ in $\Delta u$ durch den Differenzenquotienten der Ordnung $\mathrm{O}(h^4)$ bzw. $\mathrm{O}(k^4)$ zu approximieren. Dies führt auf:

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{12h^2}\left\{ -1 \quad 16 \quad \underset{x,y}{-30} \quad 16 \quad -1 \right\} + \frac{1}{12k^2}\left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 16 \\ \underset{x,y}{-30} \\ 16 \\ -1 \end{array} \right\} +$$

$$+ \mathrm{O}(h^4 + k^4)\,.$$

Speziell für $h = k$ ergibt sich

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{12h^2}\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & -1 & & & \\ & & & 16 & & & \\ -1 & & 16 & & \underset{x,y}{-60} & & 16 & & -1 \\ & & & 16 & & & \\ & & & -1 & & & \end{array} \right\} + \mathrm{O}(h^4)\,.$$

Diese Differenzenapproximation hat den Nachteil, daß sie in Randnähe nicht ohne weiteres verwendet werden kann. Es bietet sich hier jedoch noch eine andere Möglichkeit einer Differenzenapproximation an, die auf einen kompakteren Differenzenstern führt, der dann ohne Schwierigkeiten auch in Randnähe herangezogen werden kann.

Wir betrachten die Poissongleichung

$$\Delta u(x,y) = f(x,y)$$

für $(x,y)$ aus einem rechteckigen Gebiet

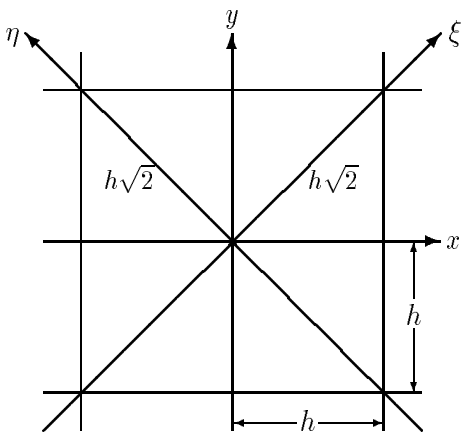
$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < X\,,\; 0 < y < Y \right\}\,,$$

mit der Randbedingung

$$u(x,y) = g(x,y)\,, \quad (x,y) \in \partial G\,.$$

Aus Gründen der Einfachheit nehmen wir hier an, daß $h = k$ gewählt werden kann, daß also das Verhältnis von $X$ zu $Y$ rational ist. Ferner setzen wir voraus, daß die rechte Seite $f$ und damit auch die Lösung $u$ hinreichend glatt ist.

Die zentrale Idee besteht nun darin, zur Approximation von $\Delta u$ eine Linearkombination von $\Delta_h u$ bezogen auf das $(x,y)$–Koordinatensystem sowie auf ein gegenüber diesem System um 45° gedrehtes Koordinatensystem zu verwenden.




Im $(x,y)$–System ist :

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \\ &= \frac{1}{h^2}\Big[u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) \\ &\quad - 4u(x,y)\Big] - \frac{h^2}{12}\left[u_{xxxx}(x,y) + u_{yyyy}(x,y)\right] + \mathrm{O}(h^4) = \\ &= f(x,y)\,, \quad (x,y) \in G_h\,. \end{aligned}$$

Im $(\xi,\eta)$–System ist

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi}(x,y) + u_{\eta\eta}(x,y) = \\ = \frac{1}{(h\sqrt{2})^2}\Big[u(x-h,y-h) + u(x+h,y+h) + u(x-h,y+h) + \\ u(x+h,y-h) - 4u(x,y)\Big] - \frac{(h\sqrt{2})^2}{12}\Big[u_{\xi\xi\xi\xi}(x,y) + \\ + u_{\eta\eta\eta\eta}(x,y)\Big] + \mathrm{O}(h^4) = f(x,y)\,, \quad (x,y) \in G_h\,. \end{aligned}$$

Wir müssen nun die Ableitungen nach $\xi$ und $\eta$ umrechnen in Ableitungen nach $x$ und $y$. Zu diesem Zweck benötigen wir die Koordinatentransformation, die gegeben ist durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \xi - \eta \\ \xi + \eta \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}\,.$$

Damit ergibt sich für die Ableitungen:

$$u_\xi = u_x x_\xi + u_y y_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_x + u_y)$$

und

$$u_\eta = u_x x_\eta + u_y y_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u_x + u_y)\,.$$

Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) \\ u_{\eta\eta} &= \frac{1}{2}(u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy})\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = u_{xx} + u_{yy}\,.$$

Den Term, der proportional zu $h^2$ ist, können wir mit Hilfe der DGL umformen:

$$u_{xxxx} + u_{yyyy} = \Delta^2 u - 2u_{xxyy} = \Delta f - 2u_{xxyy}\,.$$

Analog ist:

$$u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\eta\eta\eta\eta} = \Delta^2 u - 2u_{\xi\xi\eta\eta} = \Delta f - 2u_{\xi\xi\eta\eta}\,.$$

Wir formen daher noch $u_{\xi\xi\eta\eta}$ um in

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi\eta\eta} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}[u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}]_{xx}-[u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}]_{xy}+\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2}[u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}]_{yy}\right\}= \\ &= \frac{1}{4}\{u_{xxxx}-2u_{xxyy}+u_{yyyy}\}= \\ &= \frac{1}{4}\{u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}-4u_{xxyy}\} \\ &= \frac{1}{4}\Delta^2 u-u_{xxyy}=\frac{1}{4}\Delta f-u_{xxyy}\ . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir wie früher mit $\Delta_h$ die Differenzenapproximation von $\Delta$ und mit $\Delta_h^{\times}$ den Differenzenoperator $\Delta_h$ bezüglich der Schrittweite $h\sqrt{2}$ bezogen auf das gedrehte Koordinatensystem, so ergibt sich zusammenfassend:

$$\Delta_h u(x,y)-\frac{h^2}{12}\Big[\Delta f(x,y)-2u_{xxyy}(x,y)\Big]=f(x,y)+\mathrm{O}(h^4)$$

und

$$\begin{aligned} &\Delta_h^{\times}u(x,y)-\frac{(h\sqrt{2})^2}{12}\left[\Delta f(x,y)-2\left\{\frac{1}{4}\Delta f(x,y)-u_{xxyy}(x,y)\right\}\right] \\ &\quad =f(x,y)+\mathrm{O}(h^4) \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\Delta_h^{\times}\big(u(x,y)-\frac{h^2}{12}\Big[\Delta f(x,y)+4u_{xxyy}(x,y)\Big]=f(x,y)+\mathrm{O}(h^4)\ .$$

Demzufolge ist:

$$\Big[2\Delta_h+\Delta_h^{\times}\Big]\,u(x,y)=3f(x,y)+\frac{1}{4}h^2\Delta f(x,y)+\mathrm{O}(h^4)\ .$$

Als Bestimmungsgleichung für die Gitterfunktion $U$ erhalten wir somit:

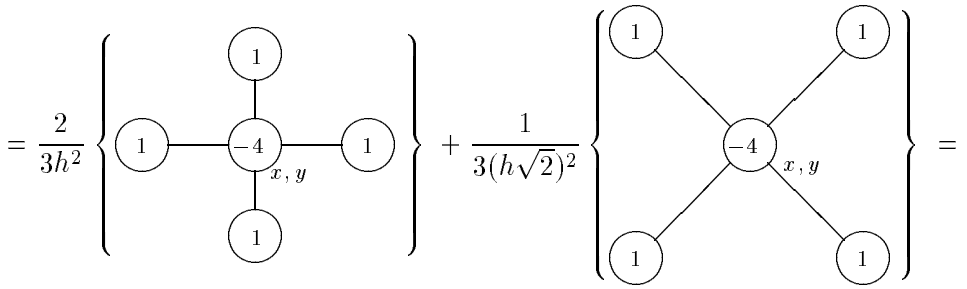
$$\left[\frac{2}{3}\Delta_h+\frac{1}{3}\Delta_h^{\times}\right]U(x,y)=f(x,y)+\frac{h^2}{12}\Delta f(x,y)$$

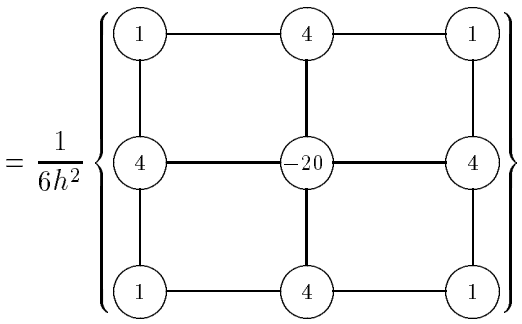
für $(x,y)\in G_h$ und

$$U(x,y)=g(x,y)\ ,\quad (x,y)\in\partial G_h\ ,$$

wobei $\partial G_h$ im Unterschied zu dem Abschnitt 1.1 entsprechend dem Differenzenstern

$$\left[\frac{2}{3}\Delta_h+\frac{1}{3}\Delta_h^{\times}\right]U(x,y)=$$




nun auch noch die vier Eckpunkte des Rechtecks $\overline{G}$ enthält.

Wir haben damit einen 9–Punkt–Laplace–Differenzenoperator hergeleitet. Zu ergänzen wäre noch, daß in den Näherungsgleichungen die rechte Seite nur für harmonisches $f$ mit der rechten Seite, wie wir sie von der 5–Punkt–Differenzenapproximation des Laplace–Operators her gewohnt sind, zusammenfällt. Man kann ferner zeigen, daß die 9–Punkt–Differenzenapproximation speziell für die Laplace–Gleichung ($f = 0$) von der Ordnung $O(h^6)$, also bereits von extrem hoher Genauigkeit ist.

Zur Lösung der Differenzengleichungen mit dem 9–Punkt–Laplace–Differenzenapproximator kann man wie in Abschnitt 1.1 ein direktes Verfahren, z. B. das Gaußsche Eliminationsverfahren, oder die punkt– bzw. blockiterativen Verfahren, wie etwa das Jacobi–, das Gauß–Seidel– sowie das zugehörige Relaxationsverfahren heranziehen. Bei der Verwendung von Relaxationsmethoden ist auf die richtige Wahl des Relaxationsparameters zu achten.

## 1.5 Randwertprobleme für elliptische Gleichungen mit differentiellen Randbedingungen

Wir betrachten nun das *Neumann–Problem* für die Laplace–Gleichung im Einheitsquadrat:

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0\ , \quad (x,y) \in G = (0,1) \times (0,1)$$

mit der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = g(x,y)\,, \quad x = 0,1\,;\; y \in [0,1] \qquad \text{sowie}$$
$$y = 0,1\,;\; x \in [0,1]\,.$$

Dabei ist $g$ eine auf dem Rand von $[0,1]\times[0,1]$ gegebene stetige Funktion mit $\int_{\partial G} g\,ds = 0$. Ferner bezeichnet $n$ die äußere Normale bezüglich $G$.

Wie man sofort sieht, ist die Lösung $u$ nur bis auf eine additive Konstante eindeutig. Wir werden diese Eigenschaft auch bei den Differenzengleichungen wiederfinden.

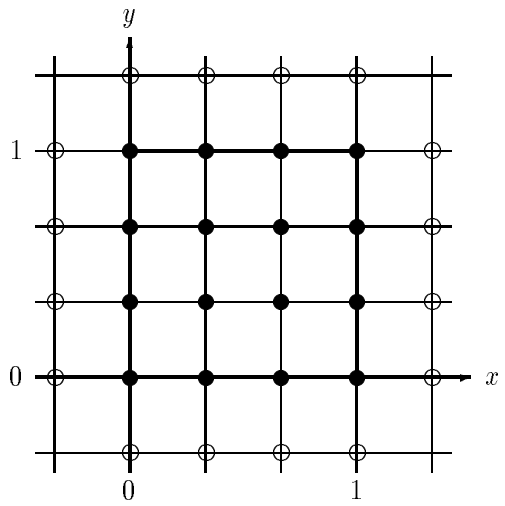
Zur Formulierung der Differenzenapproximation erklären wir ein Punktegitter

$$\mathbb{R}_h^2 = \{(ih,jh) \in \mathbb{R}^2 \mid i,j \in \mathbb{Z}\}\,, \quad hI = 1\,,\; I \in \mathbb{N}\,,$$

betrachten also nur den Fall $h = k$.

Um die Normalenableitung mit der Ordnung $\mathrm{O}(h^2)$ approximieren zu können, diskretisieren wir hier die DGL auf allen Gitterpunkten, die in $[0,1]\times[0,1]$ liegen. Dies erfordert, daß wir die Gitterfunktion auf der folgenden Gitterpunktmenge erklären:

$\{(ih,jh) \mid i,j = -1,\ldots,I+1\} \setminus \{(-h,-h),(-h,1+h),(1+h,-h),(1+h,1+h)\}$.




$h = \dfrac{1}{3}$

Die durch o bezeichneten Punkte sind ihrem Charakter nach Hilfspunkte.

Damit erhalten wir die Differenzenapproximation:

$$\Delta_h U(x,y) = 0\,,\;\; (x,y) = (ih,jh)\,,\;\; i,j = 0,\ldots,I\,,$$

und

$$\frac{1}{2h}\Big[U(-h,jh) - U(h,jh)\Big] \;=\; G_{0j}\,,\;\; j = 0,\ldots,I\,,$$
$$\frac{1}{2h}\Big[U(1+h,jh) - U(1-h,jh)\Big] \;=\; G_{Ij}\,,\;\; j = 0,\ldots,I\,,$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h}\Big[U(ih,-h)-U(ih,h)\Big] &= G_{i0}\,,\quad i=0,\ldots,I\,,\\ \frac{1}{2h}\Big[U(ih,1+h)-U(ih,1-h)\Big] &= G_{iI}\,,\quad i=0,\ldots,I\,.\end{aligned}$$

Es ergeben sich also insgesamt $(I+1)^2+4(I+1)$ Gleichungen für $(I+3)^2-4=(I+1)^2+4(I+1)+4-4$ unbekannte Funktionswerte. Mit Hilfe der Randbedingungen können die Werte von $U$ an den Gitterpunkten, die außerhalb von $[0,1]\times[0,1]$ liegen, eliminiert werden. Fassen wir die verbleibenden Gleichungen wieder in Form eines Gleichungssystems zusammen, so ergibt sich bei der zeilenweisen Anordnung der unbekannten Funktionswerte beginnend bei $j=0$:

$$\mathbb{B}\,U=\begin{pmatrix} B & -2E & & & & & \\ -E & B & -E & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & -E & B & -E \\ & & & & & -2E & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ U_I \end{pmatrix}=2h\begin{pmatrix} G_0 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ G_I \end{pmatrix}=2hG\,,$$

wobei

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -2 & 4 \end{pmatrix}\qquad (I+1)\times(I+1)\text{–Matrix}\,,$$

$$U_j=(U_{0j},U_{1j},\ldots,U_{Ij})^T\,,\quad j=0,\ldots,I\,,$$

und

$$\begin{aligned}G_j &= (2G_{0j},G_{1j},\ldots,G_{I-1,j},2G_{Ij})^T\,,\quad j=0,I\,,\\ G_j &= (G_{0j},0,\ldots,0,G_{Ij})^T\,,\quad j=1,\ldots,I-1\,.\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat also insgesamt die Ordnung $(I+1)^2$. Man prüft hier sofort nach, daß die Koeffizientenmatrix $\mathbb{B}$ singulär ist, denn das homogene System hat die Lösung

$\hat{U} := (1,\ldots,1)^T$. Somit ist das obige Gleichungssystem nicht mehr für jede rechte Seite lösbar und im Falle der Lösbarkeit ist die Lösung höchstens bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Man kann zeigen, daß $\hat{U}$ abgesehen von skalaren Vielfachen die einzige Lösung des homogenen Systems ist.

**Lemma 1** $N(\mathbb{B}) := \left\{ V \in \mathbb{R}^{(I+1)^2} \;\middle|\; \mathbb{B}\,V = 0 \right\} = [\hat{U}]$, *d. h.* $N(\mathbb{B})$ *ist 1–dimensional.*

*Beweis.* Wir betrachten die Rand–Eigenwertaufgabe $-\Delta w = \lambda w$ in $\overline{G}$, $\partial w/\partial n = 0$ auf $\partial G$ und wollen diese in diskreter Form (explizit) lösen, d. h. wir suchen eine Lösung der diskreten EW–Aufgabe

$$-\Delta_h w_h = \lambda_h w_h \quad \text{in } \overline{G}_h\ , \quad \delta_j w_h = 0 \quad \text{auf } \partial G_h \quad (j = 1 \text{ bzw. } 2)$$

Mit dem Ansatz ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x = (x_1, x_2)$)

$$w_{h,k}(x) = \cos k_1\pi x_1 \cos k_2\pi x_2\ , \quad k_1, k_2 = 0,\ldots,I\ ,$$

erhält man mit Hilfe von Additionstheoremen für trigon. Funktionen

$$\begin{aligned} -\Delta_h w_{h,k}(x) &= -(\delta_1^2 + \delta_2^2) w_{h,k}(x) \\ &= \frac{-1}{h^2}\Big( w_{h,k}(x_1 - h, x_2) - 2w_{h,k}(x_1, x_2) + w_{h,k}(x_1 + h, x_2) \\ &\quad + w_{h,k}(x_1, x_2 - h) - 2w_{h,k}(x_1, x_2) + w_{h,k}(x_1, x_2 + h)\Big) \\ &= \lambda_{h,k} w_{h,k}(x) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_{h,k} = \frac{4}{h^2}\left( \sin^2 \frac{k_1\pi h}{2} + \sin^2 \frac{k_2\pi h}{2} \right)\ , \quad k_1, k_2 = 0,\ldots,I\ .$$

Im Falle $k_1 = k_2 = 0$ hat man $\lambda_{h,(0,0)} = 0$ mit zugehöriger diskreter Eigenfunktion $w_{h,(0,0)} = 1\ \forall x \in \overline{G}_h$. Man sieht sofort, daß die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \delta_1 w_{h,k}(0, x_2) &= \frac{1}{2h}\Big( w_{h,k}(h, x_2) - w_{h,k}(-h, x_2) \Big) \\ &= \frac{1}{2h}\Big( \underbrace{\cos(k_1\pi h) - \cos(-k_1\pi h)}_{=0} \Big) \cos(k_2\pi x_2) \;=\; 0\ , \end{aligned}$$

(analog)

$$\begin{aligned} \delta_1 w_{h,k}(1, x_2) &= 0\ , \quad x_2 = jh\ ,\ j = 0,\ldots,I\ , \\ \delta_2 w_{h,k}(x_1, 0) &= \delta_2 w_{h,k}(x_1, 1) \;=\; 0\ , \quad x_1 = ih\ ,\ i = 0,\ldots,I\ , \end{aligned}$$

erfüllt sind. Damit hat man $(I+1)^2$ linear unabh. Eigenfunktionen mit den zugehörigen Eigenwerten der obigen diskreten Randwertaufgabe gefunden. Von denen verschwindet der

mit Index $(0,0)$, $\lambda_{h,(0,0)} = 0$, während alle anderen $\lambda_{h,k} > 0$, $(k_1, k_2) \neq (0,0)$. Der Eigenraum zu $\lambda_{h,(0,0)}$ ist gerade der Nullraum der zugehörigen Matrix und damit eindimensional. Die zugehörige Matrix ist gerade $\mathbb{B}$, wie man sich leicht überzeugt. Damit ist die Beh. gezeigt. □

Zur Herleitung einer Lösbarkeitsbedingung zeigen wir, daß $\mathbb{B}$ einer symmetrischen Matrix ähnlich ist. Wir betrachten dabei die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad (I+1) \times (I+1)\text{–Matrix} .$$

Es ist $D^{-1} B D =: \widetilde{B}$ mit

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} & & & & \\ -\sqrt{2} & 4 & -1 & & 0 & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -1 & 4 & -\sqrt{2} \\ & & & & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} .$$

Setzt man nun

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D & & & & \\ & D & & 0 & \\ & & D & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & D \end{pmatrix}, \quad (I+1)^2 \times (I+1)^2\text{–Matrix},$$

so folgt:

$$\widetilde{\mathbb{B}} := \mathbb{D}^{-1}\, \mathbb{B}\, \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \widetilde{B} & -2E & & & & \\ -E & \widetilde{B} & -E & & 0 & \\ & -E & \widetilde{B} & -E & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -E & \widetilde{B} & -E \\ & & & & -2E & \widetilde{B} \end{pmatrix} .$$

Jetzt betrachten wir noch

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}E & & & & \\ & E & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & 0 & & E & \\ & & & & \sqrt{2}E \end{pmatrix} \quad (I+1)^2 \times (I+1)^2\text{–Matrix} \ .$$

Damit wird

$$\widetilde{\widetilde{B}} = \mathbb{E}^{-1}\,\widetilde{\mathbb{B}}\,\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \widetilde{B} & -\sqrt{2}E & & & & & \\ -\sqrt{2}E & \widetilde{B} & -E & & 0 & & \\ & -E & \widetilde{B} & -E & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & -E & \widetilde{B} & -\sqrt{2}E & \\ & & & & -\sqrt{2}E & \widetilde{B} \end{pmatrix} .$$

Folglich ist $\mathbb{B}$ einer symmetrischen Matrix ähnlich und hat daher nur reelle Eigenwerte, für die aus dem Satz von Gerschgorin angewandt auf die Matrix $\mathbb{B}$ die Abschätzung

$$|\lambda(\mathbb{B}) - 4| \le 4 \ , \quad \text{also} \quad \lambda(\mathbb{B}) \ge 0$$

folgt. Demnach ist die Matrix $\widetilde{\widetilde{B}} = \mathbb{E}^{-1}\,\widetilde{\mathbb{B}}\,\mathbb{E}$ positiv semidefinit.

Das Gleichungssystem $\mathbb{B}\,U = 2hG$ ist nun äquivalent zu $\widetilde{\widetilde{B}}\,\widetilde{U} = 2h\widetilde{G}$ mit $\widetilde{U} = \mathbb{E}^{-1}\,\mathbb{D}^{-1}\,U$ und $\widetilde{G} = \mathbb{E}^{-1}\,\mathbb{D}^{-1}\,G$.

**Lemma 2** *Es ist $\widetilde{\hat{U}} := \mathbb{E}^{-1}\,\mathbb{D}^{-1}\,\hat{U}$ Lösung des homogenen Systems $\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}\,\widetilde{U} = 0$ und umgekehrt ist jede solche Lösung ein skalares Vielfaches von $\widetilde{\hat{U}}$.*

*Beweis.* Da $(\mathbb{B}\,U = 0 \Rightarrow U = \alpha\hat{U})$ gilt für $\widetilde{U} : \widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}\,\widetilde{U} = 0$ und $\hat{\widetilde{U}} := \mathbb{D}\,\mathbb{E}\,\widetilde{U}$, daß

$$0 = \mathbb{E}^{-1}\,\widetilde{\mathbb{B}}\,\mathbb{E}\,\widetilde{U} = \mathbb{E}^{-1}\,\mathbb{D}^{-1}\,\mathbb{B}\,\underbrace{\mathbb{D}\,\mathbb{E}\,\widetilde{U}}_{\hat{\widetilde{U}}} = \mathbb{E}^{-1}\,\mathbb{D}^{-1}\,\mathbb{B}\,\hat{\widetilde{U}} = 0 \Longrightarrow \mathbb{B}\,\hat{\widetilde{U}} = 0$$

$$\Longrightarrow \hat{\widetilde{U}} = \alpha\hat{U} \quad \Longrightarrow \left(\hat{\widetilde{U}} = \alpha\hat{U} = \mathbb{D}\,\mathbb{E}\,\widetilde{U} \Longleftrightarrow\right) \widetilde{U} = \alpha\,\underbrace{\mathbb{E}^{-1}\,\mathbb{D}^{-1}\,\hat{U}}_{\widetilde{\hat{U}}} \ .$$

□

Bezeichnet man mit $(.,.)$ das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{(I+1)^2}$ und nutzt noch die Symmetrie von $\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}$ aus, dann erhält man das folgende Lösbarkeitskriterium.

**Satz 3** *Das Gleichungssystem* $\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}\tilde{U} = 2h\tilde{G}$ *ist genau dann lösbar, wenn* $(\tilde{\hat{U}}, \tilde{G}) = 0$ *ist.*

*Beweis.* Für symmetrische Matrizen ist $R(\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}})^{\perp} = N(\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}})$, denn $y \in R(\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}})^{\perp} \Longleftrightarrow (y, \widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}v) = 0 \ \ \forall\, v \Longleftrightarrow (\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}y, v) = 0 \ \ \forall\, v \Longleftrightarrow \widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}y = 0 \Longleftrightarrow y \in N(\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}})$ . Da (s. Lemma 2) $N(\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}) = [\tilde{\hat{U}}]$ folgt aus $(\tilde{G}, \tilde{\hat{U}}) = 0$, daß $\tilde{G} \in N(\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}})^{\perp} = R(\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}})$. Sei umgekehrt $\tilde{U} : \widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}\tilde{U} = \beta\tilde{G}$ (mit $\beta \neq 0$) $\Longrightarrow (\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}\tilde{U}, v) = \beta(\tilde{G}, v) \ \ \forall v \Longrightarrow (\tilde{U}, \widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}v) = \beta(\tilde{G}, v) \ \ \forall v$. Speziell für $v = \tilde{\hat{U}} : 0 = (\tilde{U}, \widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}\tilde{\hat{U}}) = \beta(\tilde{G}, \tilde{\hat{U}}) \overset{\beta\neq 0}{\Longrightarrow} (\tilde{G}, \tilde{\hat{U}}) = 0$ . □

Wir berechnen $(\tilde{\hat{U}}, \tilde{G}) =$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \ldots, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}; \ldots; \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \cdot \\
& \cdot \left(G_{00}, \frac{1}{\sqrt{2}}G_{10}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}G_{I-1,0}, G_{I0}; \frac{1}{\sqrt{2}}G_{01}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}G_{I1}; \ldots; \right. \\
& \left. G_{0I}, \frac{1}{\sqrt{2}}G_{1I}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}G_{I-1,I}, G_{II}\right)^T \\
= \quad & \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=0}^{I}(G_{i0} + G_{iI}) + \sum_{j=1}^{I-1}(G_{0j} + G_{Ij})\right\} \\
= \quad & \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}G_{00} + \sum_{i=1}^{I-1} G_{i0} + \frac{1}{2}G_{I0} + \frac{1}{2}G_{I0} + \sum_{j=1}^{I-1} G_{Ij} + \frac{1}{2}G_{II} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}G_{00} + \sum_{j=1}^{I-1} G_{0j} + \frac{1}{2}G_{0I} + \frac{1}{2}G_{0I} + \sum_{i=1}^{I-1} G_{iI} + \frac{1}{2}G_{II}\right\} .
\end{aligned}
$$

Demnach ist das System $\mathbb{B}\,U = 2hG$ genau dann lösbar, wenn die Summe der Funktionswerte von $g$ an den auf dem Rand liegenden Gitterpunkten verschwindet. Diese Bedingung kann interpretiert werden als Diskretisierung der Gleichung

$$\int_{\partial G} g(s)\,ds = 0 \ , \quad (G = (0,1) \times (0,1)) \ ,$$

die, wie wir bereits erwähnt haben, notwendig für die Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems ist. Der Ausdruck für $(\tilde{\hat{U}}, \tilde{G})$, genauer für $2h(\tilde{\hat{U}}, \tilde{G})$ ist gleich dem Ausdruck, der sich durch Anwendung der summierten Sehnentrapezformel auf das Randintegral — und zwar auf jede der vier Seiten des Quadrats — ergibt (s. oben). Für kleines $h$ wird somit $(\tilde{\hat{U}}, \tilde{G})$ betragsmäßig klein sein. Falls $(\tilde{\hat{U}}, \tilde{G}) \neq 0$ ist, so kann man etwa $G$ leicht modifizieren oder aber $G_{ij}$ nicht durch punktweise Restriktion, sondern durch einen Mittelungsprozeß gewinnen.

Die Diskretisierung von Neumann–Randbedingungen bei krummlinigen Rändern kann äußerst kompliziert werden, da die Normalenrichtung i. a. kaum mit einer Gitterlinie zusammenfallen wird. Wir gehen auf Einzelheiten nicht ein, ebensowenig wie auf die Approximation von Randbedingungen dritter Art.

## Kapitel 2

# Elliptische Differentialgleichungen. Maximumprinzip

## 2.1 Diskretes Maximumprinzip

1. Die in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten Differenzenapproximationen führen auf Differenzenoperatoren der Form

$$L_h v(x) = \sum_{y \in \overline{G}_h} a_h(x,y) v(y), \quad x \in G_h, \tag{1}$$

auf Teilmengen endlicher Gitterpunktmengen $\overline{G}_h$. Der Differenzenoperator $L_h$ heißt vom *nichtnegativen Typ*, wenn

$$a_h(x,x) > 0, \quad a_h(x,y) \le 0, \quad y \ne x, \tag{2}$$

für alle Gitterpunkte $x \in G_h$ und $y \in \overline{G}_h$ ist. Der Differenzenoperator heißt weiter *diagonal dominant*, wenn die Bedingung

$$\sum_{\substack{y \in \overline{G}_h \\ y \ne x}} |a_h(x,y)| \le |a_h(x,x)|, \quad x \in G_h, \tag{3}$$

erfüllt ist. Unter der Voraussetzung (2) besitzt $L_h$ diese Eigenschaft genau dann, wenn die Ungleichungen

$$\sum_{y \in \overline{G}_h} a_h(x,y) \ge 0, \quad x \in G_h, \tag{4}$$

oder

$$0 \le \sum_{\substack{y \in \overline{G}_h \\ y \ne x}} \frac{|a_h(x,y)|}{a_h(x,x)} \le 1, \quad x \in G_h, \tag{5}$$

gelten. Wir setzen im folgenden stets voraus, daß der Differenzenoperator (1) diese Eigenschaften besitzt.

2. Zu jedem Gitterpunkt $x \in G_h$ ist die Menge $N_h(x)$ aller *Nachbarpunkte* $y \ne x$ von $x$ in $\overline{G}_h$ durch die Eigenschaft $a_h(x,y) \ne 0$ definiert. Das Gitter heißt *zusammenhängend*, wenn zu jedem Punktepaar $x \in G_h$, $y \in \overline{G}_h$ eine Folge von Gitterpunkten $z_0 = x$, $z_1 \ldots, z_{m-1}$, $z_m = y$ existiert derart, daß $z_i$ Nachbarpunkt von $z_{i-1}$ ist für $i = 1 \ldots, m$. Wir machen im folgenden

die *Voraussetzung*, daß das Gitter zusammenhängend und der Rand $\partial G_h = \overline{G}_h - G_h$ nicht leer ist.

In Analogie zu Begriffsbildungen bei elliptischen Differentialgleichungen bezeichnen wir Lösungen $v$ der homogenen Gleichung

$$L_h v(x) = 0, \quad x \in G_h, \tag{6}$$

als *diskret harmonische* Funktionen. Die Funktion $v$ auf $\overline{G}_h$ heißt *diskret subharmonisch* bzw. *superharmonisch* wenn $L_h v(x) \le 0$ bzw. $L_h v(x) \ge 0$ für alle $x \in G_h$ ist. Man beachte, daß jede diskret harmonische Funktion sowohl diskret subharmonisch als auch superharmonisch ist. Führt man noch den *Mittelwertoperator*

$$M_h v(x) = \sum_{y \in N_h(x)} \frac{|a_h(x,y)|}{a_h(x,x)} v(y), \quad x \in G_h, \tag{7}$$

ein, dann ist $v$ diskret harmonisch (subharmonisch bzw. superharmonisch), wenn

$$v(x) = M_h v(x), \quad (\ v(x) \le M_h v(x) \quad \text{bzw.} \quad v(x) \ge M_h v(x)\ )$$

für alle $x \in G_h$ ist. Ist $L_h$ vom nichtnegativen Typ, dann sind alle Koeffizienten von $M_h$ nichtnegativ. Ist $L_h$ zum Beispiel die übliche Differenzenapproximation $\Delta_h$ des Laplaceoperators $\Delta$ in einem quadratischen Gitter, dann sind genau $2n$ Koeffizienten von $M_h$ gleich $\dfrac{1}{2n}$ und alle anderen Koeffizienten gleich Null, also

$$M_h v(x) = \frac{1}{2n} \sum_{y \in N_h(x)} v(y), \quad x \in \overline{G}_h.$$

3. Unter den obengenannten Voraussetzungen können wir jetzt das diskrete Analogon des wichtigen Hopfschen Maximumprinzips [1)] beweisen.

**Satz 1 (Starkes Maximumprinzip)** *Nimmt eine diskret subharmonische (superharmonische) Funktion $v$ auf $\overline{G}_h$ ein nichtnegatives Maximum (nichtpositives Minimum) in $G_h$ an, so ist $v$ konstant in $\overline{G}_h$.*

*Beweis.* (i) Sei $v$ diskret subharmonisch und $z \in G_h$ ein Punkt mit der Eigenschaft

$$v(z) = \max_{y \in \overline{G}_h} v(y)\,.$$

Dann muß $v(y) = v(z)$ in allen Nachbarpunkten $y$ von $z$ sein. Andernfalls gäbe es nämlich einen Nachbarpunkt $y$ von $z$ mit $v(y) < v(z)$, was auf den Widerspruch

$$v(z) \le M_h v(z) = \sum_{y \in N_h(z)} \frac{|a_h(z,y)|}{a_h(z,z)} v(y) < \sum_{y \in N_h(z)} \frac{|a_h(z,y)|}{a_h(z,z)} v(z) \le v(z)$$

[1)] E. Hopf: Elementare Bemerkungen über Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1927, physik.-mathemat. Klasse

führt. Da das Gitter zusammenhängend sein soll, gibt es zu jedem Punkt $y \in \overline{G}_h$ eine Folge von Punkten $z_0, \ldots, z_m$ mit $z_0 = z,\ z_m = y$ derart, daß $z_i$ Nachbarpunkt von $z_{i-1}$ ist für $i = 1, \ldots, m$. Wie wir eben gezeigt haben, ist dann

$$v(z) = v(z_0) = v(z_1) = \ldots = v(z_m) = v(y),$$

also $v$ konstant gleich $v(z)$ auf $\overline{G}_h$.

(ii) Analog erschließt man für eine diskret superharmonische Funktion, daß für eine Stelle $z$ mit

$$0 \geq v(z) = \min_{y \in \overline{G}_h} v(y)$$

auch $v(y) = v(z)$ für alle Nachbarpunkte $y$ und weiter $v$ konstant gleich $v(z)$ sein muß für alle $y \in \overline{G}_h$. □

4. Als einfache Folgerung aus dem starken Maximumprinzip ergibt sich ein

**Satz 2 (Schwaches Maximumprinzip)** *Jede diskret subharmonische (superharmonische) Funktion nimmt ein nichtnegatives Maximum (nichtpositives Minimum) auf dem Rande $\partial G_h$ des Gitters an.*

*Beweis.* Wäre nämlich $v$ subharmonisch und $v(x) < \max_{y \in \overline{G}_h} v(y) = v(z)$ für alle $x \in \partial G_h$ dann nähme die Funktion $v$ ihr Maximum in $G_h$ an. Nach dem starken Maximumprinzip müßte dann $v$ konstant in $\overline{G}_h$, also auch $v(x) = \max_{y \in \overline{G}_h} v(y)$ für $x$ aus $\partial G_h$ sein, was ein Widerspruch ist. Analog schließt man für diskret superharmonische Funktionen $v$ und das Minimum von $v$ auf $\overline{G}_h$. □

**Satz 3 (Korollar)** *Jede diskret harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand $\partial G_h$ an.*

*Beweis.* Seien $\hat{z}, \check{z} \in \overline{G}_h$ mit $v(\check{z}) = \min_{\overline{G}_h} v(x)$, $v(\hat{z}) = \max_{\overline{G}_h} v(x)$.

*1. Fall:* $v(\hat{z}) \geq 0 \wedge v(\check{z}) \leq 0$

Nach dem diskreten schwachen Maximumprinzip (Abk.: dMp) ist dann

$$\min_{x \in \partial G_h} v(x) = v(\check{z}) \leq v(y) \leq v(\hat{z}) = \max_{x \in \partial G_h} v(x) \quad \forall y \in \overline{G}_h\ .$$

*2. Fall:* $v(\hat{z}) < 0$. (Dann ist auch $v(\check{z}) < 0$.)

Sei $\hat{c} > 0$ so, daß $v(\hat{z}) + \hat{c} \geq 0 \wedge v(\check{z}) + \hat{c} \leq 0$ — z. B. mit $\hat{c} = -v(\hat{z})$. Aus dem dMp folgt

$$\min_{x \in \partial G_h} v(x) + \hat{c} \leq v(y) + \hat{c} \leq \max_{x \in \partial G_h} v(x) + \hat{c} \quad \forall y \in \overline{G}_h\ ,$$

da mit $v$ auch $w = v + \hat{c}$ diskret harmonisch ist. Substrahiert man $\hat{c}$ in den letzten Ungleichungen, so folgt die Behauptung.

*3. Fall:* $v(\check{z}) > 0$ (Dann ist auch $v(\hat{z}) > 0$.)

Mit einem $\check{c} > 0$ (z. B. $\check{c} = v(\check{z})$) gilt $v(\check{z}) - \check{c} \leq 0$ und $v(\hat{z}) - \check{c} \geq 0$. Wie im 2. Fall folgt daraus

$$\min_{x \in \partial G_h} v(x) - \check{c} \leq v(y) - \check{c} \leq \max_{x \in \partial G_h} v(x) - \check{c} \quad \forall y \in \overline{G}_h \ ,$$

was die Behauptung auch in diesem Fall beweist. □

## 2.2 Existenz, Eindeutigkeit und Abschätzung der Lösungen

1. Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften diskreter Randwertaufgaben

$$L_h v_h = f_h \ \text{ in } \ G_h, \quad v_h = g_h \ \text{ auf } \ \partial G_h, \tag{1}$$

herleiten. Dabei setzen wir wie oben voraus, daß der Rand $\partial G_h$ nicht leer und das Gitter zusammenhängend sowie der Differenzenoperator $L_h$ vom nichtnegativen Typ und diagonal dominant ist. Zuerst stellen wir fest, daß die obige Aufgabe als inhomogenes lineares Gleichungssystem geschrieben werden kann. Sei nämlich irgendeine Numerierung der Gitterpunkt in $G_h$ und $\partial G_h$ gegeben derart, daß

$$G_h = \{x^1 \ldots, x^n\}, \quad \partial G_h = \{x^{n+1}, \ldots, x^{n+m}\} \tag{2}$$

ist. Damit setzen wir

$$\begin{array}{lllllll} a_{jk} & = & a_h(x^j, x^k), & j & = & 1, \ldots, n, & k = 1, \ldots, n+m. \\ f_j & = & f_h(x^j), & j & = & 1, \ldots, n, & \\ g_j & = & g_h(x^j), & j & = & n+1, \ldots, n+m & \\ v_j & = & v_h(x^j), & j & = & 1, \ldots, n+m. & \end{array} \tag{3}$$

In diesen Bezeichnungen ist (1) gleichbedeutend mit

$$\sum_{k=1}^{n+m} a_{jk} v_k = f_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad v_j = g_j, \quad j = n+1, \ldots, n+m.$$

Die Lösungen $v_j$ sind für $j = n+1, \ldots, n+m$ also direkt durch die Randbedingungen bestimmt. Diese Unbekannten kann man sofort aus dem Gleichungssystem eliminieren und erhält so das inhomogene Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k = f_j - \sum_{k=n+1}^{n+m} a_{jk} g_k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

zur Bestimmung von $v_1, \ldots, v_n$.

2. Die $n \times n$ Matrix $A = (a_{jk})$ nennen wir die *Matrix* des diskreten Randwertproblems (1) bezüglich der gegebenen Numerierung. Für jede beliebige Numerierung ist auf Grund von (2) und (3) (aus 2.1)

$$a_{jj} > 0, \quad a_{jk} \leq 0, \quad j \neq k \tag{5}$$

und

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \leq a_{jj}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Das heißt, die Matrix $A$ ist diagonal dominant und vom nichtnegativen Typ. Weiter heißt $A$ eine *M–Matrix*, wenn $a_{jk} \leq 0$ für $j \neq k$ ist, A invertierbar ist und alle Elemente der zugehörigen inversen Matrix nichtnegativ sind. Eine wichtige Folgerung aus dem starken bzw. schwachen Maximumprinzip ist der

**Satz 1 (Eindeutigkeits- und Lösbarkeitssatz)** *Die diskrete Randwertaufgabe (1) ist für alle rechten Seiten $f_h$ in $G_h$, $g_h$ in $\partial G_h$ eindeutig lösbar. Zu jeder Numerierung der Gitterpunkte ist die zugehörige $n \times n$ Matrix $A$ eine M–Matrix.*

*Beweis.* (i) Wir zeigen zuerst, daß es höchstens eine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß die zugehörige homogene diskrete Randwertaufgabe

$$L_h v = 0 \ \text{ in } \ G_h, \quad v = 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h,$$

nur die triviale Lösung hat. Lösungen $v$ dieser Aufgabe sind sowohl diskret subharmonisch als auch superharmonisch. Nach dem schwachen Maximumprinzip nehmen derartige Funktionen ihr nichtnegatives Maximum und ihr nichtpositives Minimum auf dem Rande $\partial G_h$ an. Da $v$ auf dem Rande Null ist, wird dann

$$0 = \min_{y \in \overline{G}_h} v(y) \leq v(x) \leq \max_{y \in \overline{G}_h} v(y) = 0,$$

also $v(x) = 0$ für alle $x \in \overline{G}_h$.

(ii) Zu jeder beliebigen Numerierung der Gitterpunkte in $\overline{G}_h$ ist damit die zugehörige $n \times n$ Matrix $A$ nichtsingulär. Denn jede Lösung $(v_1, \ldots, v_n)$ der homogenen Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

läßt sich durch

$$v(x^j) = v_j, \ j = 1, \ldots, n, \quad v(x^j) = 0, \ j = n+1, \ldots, n+m,$$

zu einer Lösung der homogenen Randwertaufgabe fortsetzen. In Beweisteil (i) haben wir gezeigt, daß $v(x) = 0, \ x \in \overline{G}_h$, also auch $v_j = 0, \ j = 1, \ldots, n$, ist. Die $n \times n$ Matrix $(a_{jk})$ ist daher invertierbar, also das lineare Gleichungssystem (1) bzw. (4) stetig eindeutig lösbar.

(iii) Sei weiter $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k = f_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

für eine beliebige rechte Seite $f_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Dann ist die wie oben definierte Fortsetzung $v$ Lösung von

$$L_h v = f \ \text{ in } \ G_h, \quad v = 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h,$$

mit $f \geq 0$ in $G_h$, also $v$ eine diskret superharmonische Funktion mit Randwerten Null. Nach dem schwachen Maximumprinzip nimmt die Funktion $v$ ihr nichtpositives Minimum auf dem Rande an, womit

$$v(z) \geq \min_{x \in \overline{G}_h} v(x) = 0, \quad z \in G_h,$$

also $v_j = v(x^j) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$ ist. Aus der Relation $v \geq 0$ für alle $f \geq 0$ folgt unmittelbar, daß alle Elemente der Inversen $A^{-1}$ nichtnegativ sind, also $A$ eine $M$–Matrix ist. □

3. Zusammen mit dem voll inhomogenen diskreten Randwertproblem (1) kann man die zugehörige homogene Randwertaufgabe mit inhomogener Randbedingung

$$L_h v_h^0 = 0 \ \text{ in } \ G_h, \quad v_h^0 = g_h \ \text{ auf } \ \partial G_h, \tag{7}$$

und die inhomogene Randwertaufgabe mit homogener Randbedingung

$$L_h v_h^1 = f_h \ \text{ in } \ G_h, \quad v_h^1 = 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h, \tag{8}$$

betrachten. Auf Grund des Lösbarkeits- und Eindeutigkeitssatzes haben auch diese beiden Aufgaben eindeutig bestimmte Lösungen. Wie man unmittelbar sieht, gestattet die Lösung $v_h$ von (1) die Zerlegung

$$v_h = v_h^0 + v_h^1 \tag{9}$$

mit den Lösungen $v_h^0, v_h^1$ der beiden halbhomogenen Probleme. Mit Hilfe dieser Zerlegung können wir schließlich noch den folgenden wichtigen Satz beweisen.

**Satz 2** *Sei $w_h$ eine beliebige Funktion auf $\overline{G}_h$ mit den Eigenschaften*

$$L_h w_h \geq 1 \ \text{ in } \ G_h, \quad w_h \geq 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h. \tag{10}$$

*Dann genügt die Lösung der diskreten Randwertaufgabe (1) der Abschätzung*

$$\max_{x \in \overline{G}_h} |v_h(x)| \leq \max_{x \in \partial G_h} |g_h(x)| + K \max_{x \in G_h} |f_h(x)| \tag{11}$$

*mit der Konstanten*

$$K = \max_{x \in G_h} w_h(x).$$

*Beweis.* (i) Die Lösung $v_h$ von (1) besitzt die Zerlegung (9). Die erste Komponente $v_h^0$ ist diskret harmonisch, also sowohl sub- als auch superharmonisch. Aus dem schwachen Maximumprinzip (s. Satz 2.1.3 ) ergibt sich dann für $v_h^0$ die Einschließung

$$\min_{x\in\partial G_h} v_h^0(x) \le v_h^0(x) \le \max_{x\in\partial G_h} v_h^0(x), \quad x \in \overline{G}_h;$$

und damit die Abschätzung

$$\max_{x\in\overline{G}_h} |v_h^0(x)| \le \max_{x\in\partial G_h} |g_h(x)|.$$

(ii) Der Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n)$ der Funktionswerte $v_j = v_h^1(x^j)$ der zweiten Komponente der Zerlegung (9) ist Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Av = f$. Da $A$ eine $M-$ Matrix ist, sind die Elemente $a_{jk}^{(-1)}$ der inversen Matrix $A^{-1}$ nichtnegativ. Also gelten die Abschätzungen

$$|v_j| \le \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(-1)} \max_{k=1,\ldots,n} |f_k|, \quad j = 1, \ldots, n,$$

oder

$$\max_{x\in\overline{G}_h} |v_h^1(x)| \le K_0 \max_{x\in G_h} |f_h(x)|$$

mit der Konstanten

$$K_0 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(-1)}.$$

Aus den Abschätzungen von $v^0, v^1$ ergibt sich dann unmittelbar die Gültigkeit der behaupteten Ungleichung (11) mit $K_0$ anstelle von $K$.

(iii) Der Vektor $z = (z_1, \ldots, z_n)$ mit den Komponenten

$$z_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(-1)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

ist die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Az = 1$. Setzt man

$$z_h(x^j) = z_j,\ j = 1, \ldots, n, \quad z_h(x^j) = 0,\ j = n+1, \ldots, n+m,$$

so ist $z_h$ Lösung der diskreten Randwertaufgaben

$$L_h z_h = 1 \ \text{ in } \ G_h, \quad z_h = 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h.$$

Die Funktion $z_h$ ist diskret superharmonisch und nimmt daher ihr nichtpositives Minimum auf dem Rande $\partial G_h$ an, so daß $z_h \ge 0$ in $\overline{G}_h$ ist. Für jede Funktion $w_h$ mit den Eigenschaften (10) genügt die Differenz $d_h = w_h - z_h$ den Ungleichungen

$$L_h d_h \ge 0 \ \text{ in } \ G_h, \quad d_h \ge 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h.$$

Folglich ist $d_h$ diskret superharmonisch und $d_h \ge 0$ in $\overline{G}_h$, also

$$0 \le z_h \le w_h \ \text{ in } \ \overline{G}_h$$

und

$$K_0 = \max_{x \in G_h} z_h(x) \leq \max_{x \in G_h} w_h(x) = K,$$

so daß die behauptete Ungleichung (11) auch mit der Konstanten $K$ gültig ist. □

## 2.3 Konvergenz der Differenzenapproximationen

1. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir mit Hilfe des Maximumprinzips die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der diskreten Randwertaufgaben bewiesen und darüber hinaus eine Abschätzung der Lösungen gewonnen. Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Konvergenz der diskreten Randwertaufgaben gegen die Lösungen der entsprechenden elliptischen Differentialgleichungsprobleme beweisen.

Wir betrachten im folgenden die in Abschnitt 1.3 hergeleiteten Differenzenapproximationen elliptischer Differentialoperatoren mit variablen Koeffizienten der Form

$$L_h = -\sum_{j=1}^{n} \{A_j(x)\delta_j^2 + B_j(x)\delta_j\} + C(x) \tag{1}$$

in einem achsenparallelen irregulären Gitter und setzen voraus, daß die Koeffizienten des Differentialoperators den Bedingungen

$$A_j(x) \geq \alpha > 0, \quad |B_j(x)| \leq \beta, \quad j = 1, \ldots, n, \quad C(x) \geq 0, \quad x \in G, \tag{2}$$

mit positiven Konstanten $\alpha, \beta$ genügen. Für diese Klasse von Approximationen gilt der folgende grundlegende Stabilitätssatz.

**Satz 1** *Es gibt eine Konstante $K_0 > 0$ derart, daß für alle hinreichend kleinen Schrittweiten und alle Funktionen $v_h$ auf dem Gitter $\overline{G}_h$ die Ungleichung*

$$\max_{x \in \overline{G}_h} |v_h(x)| \leq \max_{x \in \partial G_h} |v_h(x)| + K_0 \max_{x \in G_h} |L_h v_h(x)|$$

*gilt.*

*Beweis.* Wir werden anschließend zeigen, daß die Funktion

$$w(x) = e^{2\mu d} - e^{\mu(x_1 + d)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

bei Einschränkung auf das Gitter $\overline{G}_h$ eine Funktion $w_h$ liefert, die bei geeigneter Wahl der Parameter $\mu, d$ den Bedingungen $L_h w_h \geq 1$ in $G_h$, $w_h \geq 0$ in $\overline{G}_h$ genügt. Zuerst wählt man die positive Zahl $d$ so groß, daß das beschränkte Gebiet $G$ ganz im $n$–dimensionalen Intervall

$$[-d, d] = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x_j| \leq d, \ j = 1, \ldots, n\}$$

enthalten ist. Da $\overline{G}_h \subset \overline{G}$ ist, folgt dann $w_h \geq 0$ in $\overline{G}_h$ und

$$0 \leq \max_{x \in \overline{G}_h} w_h(x) \leq e^{2\mu d} - 1 =: K_\mu.$$

Als nächstes wird gezeigt, daß bei geeigneter Wahl des Parameters $\mu$ und hinreichend kleinen Schrittweiten der Differenzenoperator (1) der Bedingung $L_h w_h \geq 1$ in $G_h$ genügt. Aus den Darstellungen in Abschnitt 1.2 erhält man die Beziehungen

$$\delta_j w_h(x) = \frac{\partial w}{\partial x_j}(x) - R_j^{(1)}(x), \quad \delta_j^2 w_h(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x) - R_j^{(2)}(x),$$

mit den zugehörigen Restgliedern $R_j^{(1)}, R_j^{(2)}$. Da $w$ nur von $x_1$ abhängt, ist $\delta_j w_h(x) = \delta_j^2 w_h(x) = 0$ für $j = 2, \ldots, n$. Weiter wird

$$-\delta_1 w_h(x) = \mu e^{\mu(x_1+d)} + R_1^{(1)}(x)$$

mit

$$|R_1^{(1)}(x)| \leq \frac{1}{6}\mu^3 h_1 h_{-1} e^{2\mu d}$$

und

$$-\delta_1^2 w_h(x) = \mu^2 e^{\mu(x_1+d)} + R_1^{(2)}(x)$$

mit

$$|R_1^{(2)}(x)| \leq \frac{1}{3}\mu^3 (h_1 + h_{-1}) e^{2\mu d}.$$

Für beliebiges $\mu$ wähle man $h_1, h_{-1}$ so klein, daß

$$\frac{1}{3}\mu(h_1 + h_{-1})e^{2\mu d} \leq 1 \tag{3}$$

und damit $-\delta_1^2 w_h(x) \geq 0,\ x \in G_h$, ausfällt. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_h w_h(x) &\geq -\alpha\delta_1^2 w_h(x) - \beta|\delta_1 w_h(x)| \geq \\ &(\alpha\mu^2 - \beta\mu)e^{\mu(x_1+d)} - \frac{1}{6}\mu^3(2\alpha(h_1 + h_{-1}) + \beta h_1 h_{-1})e^{2\mu d}. \end{aligned} \tag{4}$$

Nun macht man $\mu$ so groß, daß $\alpha\mu^2 - \beta\mu \geq 2$ wird. Für genügend kleine $h_1, h_{-1}$ ist

$$\frac{\mu^3}{6}\{2\alpha(h_1 + h_{-1}) + \beta h_1 h_{-1}\} \leq e^{-2\mu d}.$$

Da $e^{\mu(x_1+d)} \geq 1$ ist für $x \in \overline{G}_h$ folgt dann $L_h w_h(x) \geq 1$. In Abschnitt 1.3 haben wir gezeigt, daß unter den oben genannten Voraussetzungen der Differenzenoperator vom positiven Typ ist. Nach Satz 2 ist daher die behauptete Ungleichung mit der Konstanten $K = K_\mu$ erfüllt. □

2. In Abschnitt 2.2 haben wir gezeigt, daß für Differenzenapproximationen vom nichtnegativen Typ für jedes $h$ eine Ungleichung der obigen Gestalt gilt, wobei die Konstante $K$ im

allgemeinen allerdings von $h$ abhängen wird. Betrachtet man also eine Folge von Gittern mit Schrittweiten $h \to 0$, dann gibt es ein $h_0 > 0$ derart, daß für alle maximalen Schrittweiten $h \le h_0$ der Folge die Ungleichung auf Grund des obigen Satzes mit einer Konstanten $K_0$ gilt und für die endlich vielen Gitter mit maximalen Schrittweiten $h > h_0$ die Ungleichung auf Grund des obigen Satzes 1 mit Konstanten $K_1, \ldots, K_m$ gültig ist. Damit gilt die Ungleichung für alle Gitter der Folge mit der Konstanten

$$K = \max_{j=0,\ldots,m} K_j.$$

In Abschnitt 1.3 wurde für die betrachteten Differenzenoperatoren die Beziehung

$$Lu(x) = L_h u(x) + T_h(x), \quad x \in G_h, \tag{5}$$

mit einem Abschneidefehler $T_h(x)$ von erster Ordnung in $h_{max} = \max_j(h_j, h_{-j})$ bzw. bei einem äquidistanten Gitter von zweiter Ordnung in $h = h_j = h_{-j}$ hergeleitet, vorausgesetzt, daß $u$ drei- bzw. viermal stetig differenzierbar in $\overline{G}$ ist.

Sei jetzt $u$ eine derartige Lösung der elliptischen Randwertaufgabe

$$Lu = f \ \text{ in } \ G, \quad u = g \ \text{ auf } \ \partial G, \tag{6}$$

und $u_h$ Lösung der approximierenden diskreten Randwertaufgabe

$$L_h u_h = f_h \ \text{ in } \ G_h, \quad u_h = g_h \ \text{ auf } \ \partial G_h. \tag{7}$$

Die Einschränkung $u^h$ der Lösung $u$ von (6) auf das Gitter $\overline{G}_h$ genügt auf Grund von (5) der diskreten Randwertaufgabe

$$L_h u^h = f - T_h \ \text{ in } \ G_h, \quad u^h = g \ \text{ auf } \ \partial G_h.$$

Die Differenz $v_h = u_h - u^h$ ist daher Lösung der diskreten Randwertaufgabe

$$L_h v_h = f_h - f + T_h \ \text{ in } \ G_h, \quad v_h = g_h - g \ \text{ auf } \ \partial G_h. \tag{8}$$

Nach Satz 1 genügt die Differenz $v_h$ also der *Diskretisierungsfehlerabschätzung*

$$\max_{x \in \overline{G}_h} |(u_h - u)(x)| \le \max_{x \in \partial G_h} |(g_h - g)(x)| + K \max_{x \in G_h} |(f_h - f + T_h)(x)|$$

für alle hinreichend kleinen Schrittweiten. Damit hat man den folgenden *Konvergenzsatz*:

**Satz 2** *Wählt man in (7) die rechten Seiten und Randbedingungen*

$$f_h(x) = f(x), \quad x \in G_h, \quad g_h(x) = g(x), \quad x \in \partial G_h,$$

*dann konvergieren die Lösungen $u_h$ der diskreten Randwertaufgabe gemäß*

$$\max_{x \in \overline{G}_h} |(u_h - u)(x)| \le K \max_{x \in G_h} |T_h(x)| \to 0$$

*für $h_{max} \to 0$. Insbesondere gilt für ein irreguläres achsenparalleles Gitter die Konvergenzaussage*

$$\max |(u_h - u)(x)| = \mathrm{O}(h_{max}) \to 0$$

*und für ein äquidistantes Gitter*

$$\max |(u_h - u)(x)| = \mathrm{O}(h^2) \to 0.$$

Den obigen Satz kann man auch kurz so formulieren, daß unter den obigen Randbedingungen die Konvergenzordnung mindestens gleich der Konsistenzordnung der Differenzenapproximation ist. Diese Aussage bleibt gültig, wenn man anstelle von der Randbedingungen etwas allgemeinere Approximationen $f_h, g_h$ von $f, g$ wählt mit der Eigenschaft

$$\max_{x \in G_h} |(f_h - f)(x)| + \max_{x \in \partial G_h} |(g_h - g)(x)| = \mathrm{O}(h_{max}) \text{ bzw. } \mathrm{O}(h^2).$$

## 2.4 Numerische Lösung der diskreten Randwertaufgabe

1. Die diskrete Randwertaufgabe nimmt bei einer beliebigen Numerierung der Gitterpunkte die Form eines inhomogenen linearen Gleichungssystems an. Wie wir in Abschnitt 2.2 gezeigt haben, ist die Matrix $A$ dieses Gleichungssystems eine $M$–Matrix. Derartige lineare Gleichungssysteme lassen sich mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens ohne Pivotisierung, das heißt, ohne Zeilenvertauschungen lösen. An Beispielen haben wir gezeigt, daß bei geeigneter Numerierung die Matrix des Gleichungssystems eine Bandmatrix ist. In diesem Falle verringern sich sowohl der Speicherbedarf als auch die Zahl der notwendigen Rechenoperationen zur Berechnung der Lösungen beträchtlich. Wir wollen in diesem Abschnitt kurz auf die Besonderheiten der Lösung linearer Gleichungssysteme mit bandförmiger Koeffizientenmatrix eingehen.

2. Das Eliminationsverfahren ist auch auf Gleichungssysteme mit sehr vielen Gleichungen und Unbekannten noch anwendbar, wenn die Koeffizientenmatrix eine Bandmatrix ist, deren Elemente nur in der Hauptdiagonalen und einigen dazu parallelen Nebendiagonalen von Null verschieden sind. Es gibt dann ganze Zahlen $m_1,\ m_2 \geq 0$ derart, daß

$$a_{jk} = 0, \quad k < j - m_1, \quad j + m_2 < k, \quad j, k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

wird. Die Matrix hat in diesem Falle *Bandtyp* $(m_1, m_2)$, die Zahl $m_1 + m_2 + 1$ bezeichnen wir als die *Bandbreite* (vgl. Fig. 2.1 für $t = 1$). Für $m_1 = 0$ bzw. $m_2 = 0$ ist $A$ eine obere bzw. untere Banddreiecksmatrix. Für $m_1 = m_2 = 0$ ist $A$ eine Diagonalmatrix, für $m_1 = m_2 = 1$ eine Tridiagonalmatrix.

**Satz 1** *Ist $A$ eine Matrix vom Bandtyp $(m_1, m_2)$, für die das Eliminationsverfahren ohne Zeilenvertauschungen durchführbar ist, dann sind auch alle reduzierten Matrizen $A_t$, $t = 2, \ldots, n$, Bandmatrizen des gleichen Typs und die Faktoren $L, U$ der Dreieckszerlegung von $A$ sind Banddreiecksmatrizen des Bandtyps $(m_1, 0)$ bzw. $(0, m_2)$.*

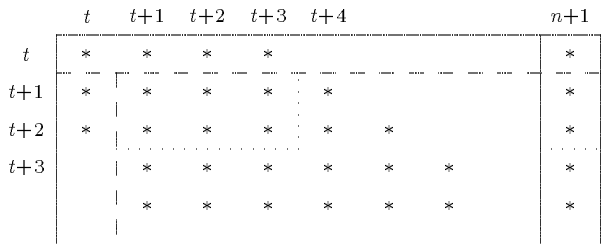



Fig. 2.1: Bandstruktur für $m_1 = 2,\ m_2 = 3$.

*Beweis.* Ist $A_t$ für $1 \le t \le n-1$ eine Bandmatrix vom Bandtyp $(m_1, m_2)$, dann wird

$$\begin{aligned} l_{jt} &= \frac{a_{jt}^t}{a_{tt}^t} = 0, \quad t < j - m_1; \quad l_{jt} = 0, \quad j < t; \\ u_{tk} &= a_{tk}^t = 0, \quad t + m_2 < k; \quad u_{tk} = 0, \quad k < t; \end{aligned} \tag{2}$$

und folglich

$$a_{jk}^{t+1} = a_{jk}^t, \quad t + m_1 < j \quad \text{oder} \quad t + m_2 < k.$$

Der $t$–te Eliminationsschritt kann also nur die Elemente in der linken oberen Ecke

$$t + 1 \le j \le t + m_1, \quad t + 1 \le k \le t + m_2 \qquad (j, k \le n)$$

des Bandes und in den ersten Komponenten $f_j^{t+1}$ für $t + 1 \le j \le t + m_1$ $(j \le n)$ der rechten Seite des reduzierten Gleichungssystems verändern (s. Fig. 2.1). Daraus ergibt sich unmittelbar, daß für jedes $t = 1, \ldots, n-1$ mit $A_t$ auch $A_{t+1}$ Bandgestalt hat und der Bandtyp unverändert bleibt. Aus der Beziehung (2) für $t = 1, \ldots, n$ folgt unmittelbar die behauptete Bandgestalt der Dreiecksmatrizen $L, U$. □

3. Für die praktische Durchführung des Eliminationsverfahrens ohne Zeilenvertauschungen genügt also ein Zahlenfeld mit $m_1 + m_2 + 1$ Spalten und $n$ Zeilen, in dem zu Beginn die Elemente von $A$ innerhalb des Bandes und die rechte Seite gespeichert werden.

Figur 2.2 veranschaulicht ein derartiges Zahlenfeld für $m_1 = 2$, $m_2 = 3$. Das Feld ist so organisiert, daß in der $j$–ten Zeile die Koeffizienten $a_{jk}$, $f_k$ der $j$–ten Gleichung des Gleichungssystems stehen. Die Beziehung zwischen den Elementen $c_{j'k'}$ des Zahlenfelds und den Koeffizienten $a_{jk}$, $f_k$ wird dann durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} c_{j'k'} &= a_{jk}, \quad j' = j, \quad k' = k - j + h; \\ c_{j'l} &= f_j, \quad j' = j; \end{aligned} \tag{3}$$

hergestellt, wobei $h = m_1 + 1$, $l = h + m_2 + 1$ zu setzen sind.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | · | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $f_1$ |
| 2 | | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $f_2$ |
| 3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $a_{36}$ | $f_3$ |
| 4 | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ | $a_{45}$ | $a_{46}$ | $a_{47}$ | $f_4$ |
| 5 | | · | · | · | · | | |

Fig. 2.2: Zahlenfeld für eine Bandmatrix vom Typ $(2,3)$.

Für symmetrische oder hermitesche Bandmatrizen genügt es, mit der Diagonalen die Elemente unter– bzw. oberhalb der Diagonalen zu speichern. In der $LDL^*$–Zerlegung positiv definiter Bandmatrizen werden die Spalten $m+2,\ldots,2m+1$ für $m = m_1 = m_2$ nicht benötigt. Für das Cholesky–Verfahren kann man die ersten $m$ Spalten des Zahlenfeldes in Fig. 2.2 weglassen und $h = 1$ setzen. In beiden Fällen ist $l = m+2$, man kommt also mit einem Feld von $m+2$ Spalten und $n$ Zeilen aus.

## Kapitel 3

# Elliptische Differentialgleichungen. Hilbertraummethoden

Im Rahmen der mathematischen Physik erhält man Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungen als Eulersche Gleichungen von Variationsproblemen, die durch Minimierung von Energieintegralen entstehen. Auf diesem Wege ergibt sich eine weitere Methode für die Behandlung von Differenzenapproximationen partieller Differentialgleichungen, die sich wesentlich vom Maximum-Prinzip unterscheidet. Auch die Methode der finiten Elemente arbeitet mit Variationsgleichungen und Hilbertraummethoden. Wir können diese Methode hier nur kurz an einem Modellbeispiel erläutern.

## 3.1 Der diskrete Laplace-Operator

1. In diesem Abschnitt soll die einfachste Differenzenapproximation des Laplaceoperators und der halbhomogenen ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad G, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G, \tag{1}$$

für ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ mit Hilbertraummethoden behandelt werden. Wir führen wieder ein äquidistantes, achsenparalleles Gitter $\mathbb{R}_h^n$ der Schrittweite $h$ im $\mathbb{R}^n$ ein. Sei $G_h$ die Menge aller Gitterpunkte $x$ aus $G \cap \mathbb{R}_h^n$, für die die abgeschlossenen Intervalle

$$[x - he_j, x + he_j], \quad j = 1, \ldots, n,$$

in $\overline{G}$ liegen. Als typisches Beispiel bertrachten wir etwa wieder ein $L$–förmiges Gebiet im $\mathbb{R}^2$ wie in Fig. 1.2.

Die Differenzenapproximation des Laplaceoperators $\Delta$ sei wie bisher durch

$$\Delta_h v(x) = \frac{1}{h^2} \left\{ \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} v(x + he_j) - 2nv(x) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}_h^n,$$

definiert. Dann ist

$$\Delta u(x) = \Delta_h u(x) + T_h(x), \quad x \in G_h, \tag{2}$$

mit einem Abschneidefehler $T_h(x) = O(h^2)$ für viermal stetig differenzierbare Funktionen $u$ in $\overline{G}$. Die zugehörige Differenzenapproximation der Randwertaufgabe (1) lautet dann wie in Kapitel 2

$$-\Delta_h u_h = f_h \text{ in } G_h, \quad u_h = 0 \text{ auf } \partial G_h. \tag{3}$$

Die weitere mathematische Behandlung dieser Aufgabenstellung erfolgt jetzt mit Hilbertraummethoden, also in einem durch diese Aufgabe definierten Vektorraum mit zugehörigem Skalarprodukt.

2. Sei $H(\mathbb{R}_h^n)$ der Vektorraum aller auf dem Gitter $\mathbb{R}_h^n$ definierten Funktionen, die an höchstens endlich vielen Gitterpunkten von Null verschieden sind und sei

$$H(G_h) = \{v \in H(\mathbb{R}_h^n) \mid v(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}_h^n - G_h\},$$

d. h. $H(G_h)$ ist der Teilraum aller Funktionen auf dem Gitter, die außerhalb von $G_h$ verschwinden. Auf diesen Räumen ist das Skalarprodukt

$$(v, w)_0 = h^n \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} v(x) w(x), \quad v, w \in H(G_h),$$

erklärt.

**Hilfssatz 1** *Seien $D_j, D_{-j}$ die vorwärts- und rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten*

$$D_j v(x) = \frac{1}{h}(v(x + he_j) - v(x)), \quad D_{-j} v(x) = \frac{1}{h}(v(x) - v(x - he_j))$$

*für $j = 1, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R}_h^n$. Dann wird durch*

$$(v, w)_1 = h^n \sum_{j=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} (D_j v)(x)(D_j w)(x), \quad v, w \in H(G_h),$$

*ein weiteres Skalarprodukt für $H(G_h)$ definiert.*

*Beweis.* Offenbar ist nämlich $(.,.)_1$ bilinear, symmetrisch und

$$(v, v)_1 = h^n \sum_{j=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} |D_j v(x)|^2 = 0 \Longleftrightarrow D_j v(x) = 0,\ j = 1, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R}_h^n,$$

gleichbedeutend damit, daß

$$v(x) = v(x + he_j), \quad j = 1, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}_h^n,$$

also $v$ konstant auf $\mathbb{R}_h^n$ ist. Da $v \in H(G_h)$ in $\mathbb{R}_h^n - G_h$ verschwindet, ergibt sich $v = 0$ auf $\mathbb{R}_h^n$. □

3. Die Differenzenquotienten $D_j, D_{-j}$ definieren lineare Abbildungen des Raumes $H(\mathbb{R}_h^n)$ in sich. Wie man leicht sieht gilt die Beziehung

$$(D_j v, w)_0 = -(v, D_{-j} w)_0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

für alle $v, w \in H(\mathbb{R}_h^n)$, für die $v$ oder $w$ nur an endlich vielen Gitterpunkten ungleich Null ist. Die zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung $\delta_j^2$ und die Differenzenquotienten $D_j, D_{-j}$ genügen offenbar der Beziehung

$$D_{-j}(D_j v)(x) = \frac{1}{h}(D_j v(x) - D_j v(x - he_j)) =$$
$$\frac{1}{h^2}\left(v(x + he_j) - 2v(x) + v(x - he_j)\right) = \delta_j^2 v(x),\ x \in \mathbb{R}_h^n,$$

oder kurz

$$D_{-j} D_j = \delta_j^2, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Der Differenzenoperator $-\Delta_h$ definiert eine Abbildung $L_h$ des Vektorraums $H(G_h)$ in sich durch die Vorschrift

$$L_h v(x) = -\Delta_h v(x),\ x \in G_h, \quad L_h v(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}_h^n - G_h,$$

für alle $v \in H(G_h)$. Offenbar ist

$$(L_h v, w)_0 = -(\Delta_h v, w)_0, \quad v, w \in H(G_h). \tag{6}$$

**Hilfssatz 2** *Die Abbildung $L_h$ hat die Eigenschaften*

$$\begin{aligned} (L_h v, w)_0 &= (v, L_h w)_0 = (v, w)_1, \\ (L_h v, v)_0 &= \|v\|_1^2, \quad \textit{für alle } v, w \in H(G_h). \end{aligned}$$

*Damit ist insbesondere $L_h$ eine positive definite Abbildung des Raumes $H(G_h)$ in sich.*

*Beweis.* Mit Hilfe von (4), (5) gilt offenbar die Beziehung

$$(L_h v, w)_0 = -\sum_{j=1}^{n} (D_{-j} D_j v, w)_0 = \sum_{j=1}^{n} (D_j v, D_j w)_0 = (v, w)_1 \tag{7a}$$

und entsprechend

$$(v, L_h w)_0 = -\sum_{j=1}^{n} (v, D_{-j} D_j w)_0 = \sum_{j=1}^{n} (D_j v, D_j w)_0 = (v, w)_1. \tag{7b}$$

Daher ist $L_h$ symmetrisch oder selbstadjungiert in $H(G_h)$. Schließlich gilt

$$(L_h v, v)_0 = \|v\|_1^2 > 0, \quad 0 \neq v \in H(G_h), \tag{8}$$

womit $L_h$ positiv definit ist. □

4. Weiter benötigt man das folgende Resultat, das auch als *diskrete Friedrichssche Ungleichung* bezeichnet wird.

**Hilfssatz 3** *Sei $d$ der größte Durchmesser des Gebiets $G$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\|v\|_0 \leq \frac{d+h}{\sqrt{n}}\|v\|_1, \quad v \in H(G_h),$$

*gleichmäßig für alle $h > 0$.*

*Beweis.* Sei $d$ der größte Durchmesser des Gebiets $G$. Für jede positive Zahl $h$ ist die Gitterpunktmenge $G_h \subset G$, so daß auch $G_h$ höchstens den größten Durchmesser $d$ hat. Zu jedem $h > 0$, jedem $j = 1, \ldots, n$ und jedem $x \in G_h$ gibt es folglich eine natürliche Zahl $N$ mit $d \leq Nh < d + h$ derart, daß der Punkt $x + Nhe_j$ nicht mehr in $G_h$ liegt. Für jedes $v \in H(G_h)$ ist dann

$$\begin{aligned} v(x) &= v(x) - v(x + Nhe_j) \\ &= v(x) - v(x + he_j) + \ldots + v(x + (N-1)he_j) - v(x + Nhe_j) \\ &= -h \sum_{k=0}^{N-1} (D_j v)(x + khe_j). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung folgt hieraus die Abschätzung

$$|v(x)|^2 \leq h^2 N \sum_{k=0}^{N-1} |D_j v(x + khe_j)|^2.$$

Diese Ungleichung gilt trivialerweise auch für $x \in \mathbb{R}_h^n - G_h$ und somit für alle $x \in \mathbb{R}_h^n$. Summiert man daher beide Seiten dieser Ungleichung über alle $x \in \mathbb{R}_h^N$, so folgt mit $hN \leq d + h$ die Beziehung

$$\|v\|_0^2 = h^n \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} |v(x)|^2 \leq (d+h)^2 h^n \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} |D_j v(x)|^2$$

oder

$$\|v\|_0^2 \leq (d+h)^2 \|D_j v\|_0^2, \quad v \in H(G_h).$$

Summation über $j$ von 1 bis $n$ liefert schließlich die behauptete Ungleichung. □

Aus den obigen Hilfssätzen ergibt sich unmittelbar die folgende apriori-Abschätzung für den Differenzenoperator.

**Satz 4** *Es gelten die Ungleichungen*

$$\|v\|_0 \leq \gamma \|v\|_1 \leq \gamma^2 \|L_h v\|_0, \quad v \in H(G_h),$$

*mit der Konstanten $\gamma = 2d\sqrt{n}$ gleichmäßig für alle $0 < h \leq d$.*

*Beweis.* Die erste Ungleichung ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz 3. Auf Grund von (8) und mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung wird

$$\|v\|_1^2 = (v, L_h v)_0 \leq \|v\|_0 \|L_h v\|_0 \leq \gamma \|v\|_1 \|L_h v\|_0,$$

womit auch die zweite Ungleichung bewiesen ist. □

5. Nachdem die obigen Hilfsmittel bereitgestellt sind, können wir jetzt die grundlegenden Eigenschaften der diskreten Randwertaufgabe (3) in diesem Rahmen herleiten. Aus (7a),(7b) folgt zuerst, daß die Lösungen $u_h$ der diskreten Randwertaufgabe auch Lösungen der *Variationsgleichung*

$$(\varphi_h, u_h)_1 = (\varphi_h, f_h)_0, \quad \varphi_h \in H(G_h), \tag{9}$$

sind. Wählt man hier Testfunktionen $\varphi_h$, die an genau einem Gitterpunkt $x \in G_h$ von Null verschieden und für alle $x' \neq x, x' \in \mathbb{R}_h^n$ verschwinden, so ergibt sich umgekehrt wieder die Randwertaufgabe (3) für $u_h$. Die beiden Formulierungen (3),(9) der diskreten Randwertaufgaben sind also äquivalent.

Die Einschränkung $u^h$ der exakten Lösung $u$ der Randwertaufgabe (1) auf das Gitter ergibt gemäß (2) eine Lösung $u^h \in H(G_h)$ der diskreten Randwertaufgabe

$$-\Delta_h u^h = f + T_h \text{ in } G_h, \quad u^h = 0 \text{ auf } \partial G_h. \tag{10}$$

Der Fehler $v_h = u_h - u^h$ ist dann ebenfalls aus $H(G_h)$ und genügt der Aufgabe

$$-\Delta_h v_h = f_h - f - T_h \text{ in } G_h, \quad v^h = 0 \text{ auf } \partial G_h. \tag{11}$$

Nach Satz (4) hat man dann für den Fehler die *Diskretisierungsfehlerabschätzung*

$$\|u_h - u^h\|_0 \leq \gamma \|u_h - u^h\|_1 \leq \gamma^2 \|f_h - f - T_h\|_0$$

für alle $0 < h < d$. Hiermit ergibt sich sofort der folgende *Konvergenzsatz*

**Satz 5** *Sei $u$ eine viermal stetig differenzierbare Lösung der Randwertaufgabe (1) mit gleichmäßig beschränkten partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung in $G$. Wählt man in (3) die rechten Seiten $f_h(x) = f(x), x \in G_h$, dann konvergiert die Lösung $u_h$ von (3) gegen $u$ gemäß*

$$\left( h^n \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} |u_h(x) - u(x)|^2 \right)^{1/2} + \left( h^n \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} \sum_{j=1} |D_j(u_h - u)(x)|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \mathrm{O}(h^2) \longrightarrow 0$$

## 3.2 Numerische Lösung der approximierenden Gleichungssysteme

1. Die diskrete Randwertaufgabe

$$L_h u_h = f_h \text{ in } G_h, \quad u_h = 0 \text{ auf } \partial G_h \tag{1}$$

ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, aus dem die gesuchten Funktionswerte der Lösung $u_h$ an Gitterpunkten berechnet werden können. Zu diesem Zweck werden die Gitterpunkte in $G_h$ numeriert, so daß

$$G_h = \{x_1, \ldots, x_N\} \tag{2}$$

ist. Zur Abkürzung sei

$$u_j = u_h(x_j),\ f_j = f_h(x_j), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Der Differenzenoperator $L_h$ hat die Gestalt

$$L_h v(x) = \sum_{y \in G_h} a_h(x, y) v(y), \quad x \in G_h.$$

Setzt man daher

$$a_{jk} = a_h(x_j, x_k), \quad j, k = 1, \ldots, N,$$

dann nimmt die diskrete Randwertaufgabe die Form

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk} u_k = f_j, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

an. Die Matrix $A = (a_{jk})$ ist eine Matrixdarstellung des Differenzenoperators $L_h$. Es gilt der Satz

**Satz 1** *Wenn der Differenzenoperator $L_h$ in $H(G_h)$ positiv definit ist, dann ist für jede Numerierung der Gitterpunkte in $G_h$ die zugehörige Matrix $A = (a_{jk})$ positiv definit bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}$.*

*Beweis.* Für jedes Paar von Vektoren $v, w \in H(G_h)$ ist

$$(L_h v, w)_0 = h^n \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk} v_k w_j = h^n (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_2$$

mit $v_j = v(x_j), w_k = w(x_k),\ j, k = 1, \ldots, N$ und

$$\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n),\ \boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^N$$

sowie dem euklidischen Skalarprodukt $(.,.)_2$ auf $\mathbb{R}^N$. Wenn $L_h$ in $H(G_h)$ symmetrisch ist, genügt die zugehörige Matrix $A$ der Bedingung

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_2 = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w})_2, \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^N,$$

so daß $A$ symmetrisch ist. Für einen positiv definiten Differenzenoperator ergibt sich weiter

$$0 < (L_h v, v)_0 = h^n (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_2, \quad 0 \neq v \in H(G_h).$$

Folglich ist dann die Matrix $A$ positiv definit. □

Es gilt der folgende Satz (s. Stummel/Hainer, Abschnitt 6).

**Satz 2** *Sei $A$ eine symmetrische Matrix. Wenn $A$ positiv definit ist, dann und nur dann ist das Gaußsche Eliminationsverfahren ohne Pivotisierung durchführbar und sind alle Elemente $a_{tt}^t > 0$, $t = 1, \ldots, N$.*

2. Darüber hinaus kann man im Gaußschen Eliminationsverfahren von der Symmetrie der Koeffizientenmatrix Gebrauch machen. Ausgehend von der Koeffizientenmatrix $A_1 = (A, y)$ berechnet man beim Gaußschen Eliminationsverfahren

$$a_{jk}^{t+1} = a_{jk}^t - \frac{a_{jt}^t a_{tk}^t}{a_{tt}^t}, \quad \begin{matrix} j = t+1, \ldots, N \\ k = t+1, \ldots, N+1 \end{matrix}, \quad t = 1, \ldots, N-1. \tag{4}$$

Ist die Matrix $A = A_1$ symmetrisch, so ergibt sich aus dieser Beziehung sofort, daß dann auch die reduzierten Matrizen $(a_{jk}^t)_{\substack{j=1,\ldots,N \\ k=i,\ldots,N}}$ symmetrisch sind. Allgemein folgt aus (4) daher

$$a_{kj}^t = a_{jk}^t, \quad j, k = t, \ldots, N, \; t = 2, \ldots, N.$$

Man braucht also nur alle Elemente $a_{jk}^{t+1}$ z.B. für $j \leq k$ zu berechnen.

Da für positiv definite Matrizen stets $a_{tt}^t > 0$ sein muß, kann man

$$r_{tt} = \sqrt{a_{tt}^t}, \quad r_{tk} = \frac{a_{tt}^t}{r_{tt}}, \quad k = t+1, \ldots, N+1, \tag{5}$$

setzen. Damit nimmt (4) für $j \leq h$ die symmetrische Form

$$a_{jk}^{t+1} = a_{jk}^t - r_{tj} r_{tk}, \quad \begin{matrix} j = t+1, \ldots, N \\ k = j, \ldots, N+1 \end{matrix}, \quad t = 1, \ldots, N-1 \tag{6}$$

an. Das Gaußsche Eliminationsverfahren in dieser Gestalt bezeichnet man als *Cholesky-Verfahren*. Durch die Vorwärtselimination (5),(6) wird das gegebene Gleichungssystem auf ein gestaffeltes System der Form

$$\sum_{k=j}^{n} r_{jk} x_j = g_j, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

und $g_i = r_{j,N+1}$ reduziert, aus dem sich die Unbekannten $x_N, \ldots, x_1$ in der üblichen Weise durch Rückwärtseinsetzen berechnen lassen.

3. In den hier betrachteten Anwendungen besitzt in der Regel die Matrix $A$ *Bandgestalt*. Für eine positiv definite Bandmatrix vom Typ $(m, m)$ genügt es auf Grund der Symmetrie, die Diagonale, die $m$ Nebendiagonalen oberhalb der Hauptdiagonalen und die rechte Seite zu speichern. Das erforderliche Zahlenfeld hat daher die in Fig. 3.2 veranschaulichte Gestalt. Die Numerierung der Spalten dieses Feldes kann man bei $m_1 = 0$ oder $m_1 = 1$ beginnen lassen. Insgesamt werden also nur $n \times (m+2)$ Speicherplätze für dieses Feld benötigt. Bei Anwendung des Cholesky-Verfahrens überspeichert man in jedem Schritt $t$ die Elemente in der $t$–ten Zeile mit $r_{tt}, \ldots, r_{t,t+m+1}$ $r_{t,N+1}$ und dann die Elemente der folgenden $m$ Zeilen mit den neu berechneten $a_{jk}^{t+1}$. Nach Abschluß der Vorwärtselimination stehen die Elemente $r_{tk}$ im Zahlenfeld für das Rückwärtseinsetzen bereit.

| $j \backslash k'$ | $m_1$ | $m_1+1$ | $m_1+m$ | $m_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{1,m+1}$ | $f_1$ |
| 2 | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{2,m+1}$ | $f_2$ |
| | $\vdots$ | | | |
| $j$ | $a_{jj}$ | $a_{jj+1}$ | $a_{j,m+j+1}$ | $f_j$ |

Fig. 3.1: Zahlenfeld für das Cholesky-Verfahren bei einer Bandmatrix.

## 3.3 Eigenwertaufgaben

### 3.3.1 Schwingende Saite

1. Die Eigenwerte $\lambda$ und die Eigenfunktionen $w$ der an beiden Enden fest eingespannten schwingenden Saite sind Lösungen der Zwei-Punkt-Randwertaufgabe

$$-w'' = \lambda w \quad \text{in } (0,1), \quad w(0) = w(1) = 0\,. \tag{1}$$

Die vorliegende Differentialgleichung ist linear und hat konstante Koeffizienten. Lösungen erhält man durch den *Ansatz* $w(x) = e^{\mu x}$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich in der Tat eine Lösung, wenn die Bedingung

$$\mu^2 + \lambda = 0$$

erfüllt ist. Dies ist die zugehörige *charakteristische Gleichung* der homogenen DGL. Mit Hilfe der beiden Wurzeln

$$\mu_1 = i\sqrt{\lambda}, \quad \mu_2 = -i\sqrt{\lambda}\,,$$

und durch Linearkombination gewinnt man die Lösung

$$w(x) = \gamma_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \gamma_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}.$$

Jetzt sollen die beiden Randbedingungen erfüllt werden. Zuerst muß gelten

$$0 = w(0) = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \text{d.h. } \gamma_1 = -\gamma_2\,,$$

also

$$w(x) = \gamma_1 \left(e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x}\right) = \gamma \sin\sqrt{\lambda}x$$

mit der Konstanten $\gamma = 2i\gamma_1$. Die Randbedingung bei $x = 1$ verlangt dann

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0, \quad \text{d.h. } \sqrt{\lambda} = k\pi, \quad k \text{ ganz}.$$

Für $k = 0$ wird $w(x) = 0$, also keine Eigenfunktion für $k < 0$ ist $\sin k\pi x = -\sin |k|\pi x$. Daher erhält man aus der obigen Überlegung das System der Eigenfunktionen $w$ und zugehörigen Eigenwerte $\lambda$.

$$w_k(x) = \gamma_k \sin k\pi x, \quad \lambda_k = k^2\pi^2, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

2. Dieses System von Eigenfunktionen bildet ein *vollständiges Orthogonalsystem* im Raum $L^2(0,1)$ der quadratisch integrierbaren Funktionen auf $(0,1)$ mit dem Skalarprodukt

$$(v, w) = \int_0^1 v(x)\overline{w}(x)\,\mathrm{d}x, \quad v, \overline{w} \in L^2(0,1).$$

Das heißt, jede Funktion $f \in L^2(0,1)$ läßt sich in eine zugehörige Fourier-Sinus-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \sin k\pi x, \quad 0 < x < 1,$$

entwickeln mit den Fourierkoffizienten

$$c_k(f) = 2\int_0^1 f(x) \sin k\pi x\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Es gilt die *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_0^1 \sin j\pi x \sin k\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \ldots .$$

Für *erzwungene Schwingungen* einer Saite wird man auf eine inhomogene Differentialgleichung der Form

$$-u'' - \mu u = f \ \text{ in } \ (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{2}$$

geführt. Kennt man die obige Fourier-Sinus-Reihe von $f$, so kann man damit die Lösung bestimmen. Dazu multipliziert man beide Seiten der Differentialgleichung mit $\sin k\pi x$ und integriert von 0 bis 1. Durch partielle Integration des Terms mit $u''$ entsteht dann

$$(\lambda_k - \mu)c_k(u) = c_k(f), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

mit $\lambda_k = k^2\pi^2$. Also wird die Lösung $u$ von (2) dann zu

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)}{\lambda_k - \mu} \sin k\pi x, \quad 0 < x < 1,$$

vorausgesetzt $\mu$ ist kein Eigenwert.

### 3.3.2 Diskrete schwingende Saite

1. Nach dem Vorbild der obigen Behandlung der schwingenden Saite betrachten wir jetzt die Differenzenapproximation dieser Aufgabe. Das Intervall $G = (0,1)$ wird dazu äquidistant unterteilt mit der Schrittweite $h$ durch die Gitterpunkte

$$x_j = jh, \quad j = 0, \ldots, n+1, \quad h = \frac{1}{n+1},$$

für natürliche Zahlen $n$. Damit ist

$$G_h = \{x_j | \, j = 1, \ldots, n\}, \quad \partial G_h = \{x_0, x_{n+1}\},$$

wobei $x_0 = 0, \; x_{n+1} = 1$ sind.

Mit Hilfe der zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung $\delta^2$ wird dann die Differenzenapproximation der Aufgabe (1) zu

$$-\delta^2 w_h = \lambda_h w_h \;\text{ in }\; G_h, \quad w_h = 0 \;\text{ auf }\; \partial G_h. \tag{3}$$

Setzt man

$$w_j = w_h(x_j), \quad j = 0, \ldots, n+1,$$

dann ist (3) gleichbedeutend mit

$$-w_{j-1} + 2w_j - w_{j+1} = h^2 \lambda_h w_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

mit den Randbedingungen

$$w_0 = w_{n+1} = 0.$$

Dies ist ein lineares algebraisches Eigenwertproblem der Form $Aw = \lambda w$ mit der $n \times n$ Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

und dem zugehörigen Eigenvektor $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Die Matrix ist symmetrisch, eine $M$–Matrix und damit positiv definit.

2. Die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses diskreten Problems lassen sich sehr einfach mit Hilfe der Eigenfunktionen des Differentialgleichungssystems bestimmen. Sei

$$w_{h,k}(x) = \sin k\pi x, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dann ist offenbar

$$w_{h,k}(0) = w_{h,k}(1) = 0,$$

so daß $w_{h,k}$ den Randbedingungen genügt. Weiter rechnet man leicht nach, daß

$$-\delta^2 w_{h,k}(x) = \lambda_{h,k} w_{h,k}(x), \quad k = 1, \ldots, n,$$

ist mit

$$\lambda_{h,k} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}.$$

Der kleinste Eigenwert $\lambda_{h,1}$ läßt sich durch Potenzreihenentwicklung darstellen durch

$$\lambda_{h,1} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} = \pi^2 + \mathrm{O}(h^2).$$

Der größte Eigenwert wird mit $h = 1/(n+1)$ zu

$$\lambda_{h,n} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi}{2} h = \frac{4}{h^2} \left(1 + \mathrm{O}(h^2)\right),$$

weil

$$\frac{n}{n+1} = 1 - h, \quad \sin \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1} = \sin \frac{\pi}{2}(1-h) = \cos \frac{\pi}{2} h$$

ist. In der obigen Form sind die Eigenwerte der Größe nach aufsteigend numeriert und beschränkt gemäß

$$0 < \lambda_{h,1} < \lambda_{h,2} < \ldots < \lambda_{h,n} < \frac{4}{h^2}.$$

Die zugehörige *Spektralkonditionszahl* der Matrix $A$ wird daher zu

$$\|A\| \, \|A^{-1}\| = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{4}{\pi^2 h^2}(1 + \mathrm{O}(h^2)).$$

Die zugehörigen Eigenvektoren

$$w_j^{(k)} = w_k(x_j), \quad k = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

der obigen symmetrischen Matrix $A$ gehören zu paarweise verschiedenen reellen Eigenwerten. Daher bildet $w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}$ ein vollständiges Orthogonalsystem des $n$–dimensionalen Zahlenraums $\mathbb{K}^n$ mit dem euklidischen bzw. unitären Skalarprodukt

$$(v, w) = \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w}_j, \quad \|v\| = \left( \sum_{j=1}^{n} |v_j|^2 \right)^{1/2}.$$

### 3.3.3 Schwingende Membran

1. Die Eigenwerte $\lambda$ und Eigenfunktionen $w$ der am Rande fest eingespannten schwingenden Membran sind Lösungen des Randwertproblems

$$-\Delta w = \lambda w \ \text{ in } \ G, \quad w = 0 \ \text{ auf } \ \partial G, \tag{4}$$

für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten hier das zweidimensionale Einheitsintervall

$$G = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Das Skalarprodukt für die quadratisch integrierbaren Funktionen auf $G$ lautet

$$(v,w) = \int_G v(x)\overline{w(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Mit Hilfe der Lösungen des Eigenwertproblems der schwingenden Saite kann man hier sehr einfach die Eigenlösungen und zugehörigen Eigenvektoren bestimmen. Offenbar wird nämlich durch

$$w_k(x) = \sin(\pi k_1 x_1)\sin(\pi k_2 x_2), \quad h = (h_1,h_2), \quad x = (x_1,x_2),$$

für $k_1, k_2 = 1,2,\ldots$, ein Orthogonalsystem erklärt. Es ist

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k, \quad \lambda_k = (k_1^2 + k_2^2)\pi^2.$$

Dieses System von Eigenfunktionen ist vollständig im Raum $L^2(G)$.

2. Die *erzwungenen Schwingungen* einer Membran führen jetzt auf die inhomogene Randwertaufgabe

$$-\Delta u - \mu u = f \ \text{ in } \ G, \quad u = 0 \ \text{ auf } \ \partial G. \tag{5}$$

Hat $f$ die Fourier-Sinus-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} c_k(f)\sin k_1\pi x_1 \sin k_2\pi x_2, \quad x = (x_1,x_2),$$

so wird die Lösung $u$ zu

$$u(x) = \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty} \frac{c_k(f)}{\lambda_k - \mu}\sin k_1\pi x_1 \sin k_2\pi x_2.$$

Die Fourier-Koeffizienten von $f$ haben die Darstellung

$$c_k(f) = 4\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2\, f(x_1,x_2)\sin k_1\pi x_1 \sin k_2\pi x_2.$$

Ist z.B. $f(x_1,x_2) = 1$ auf $G$, dann folgt also

$$c_k(f) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi^2}\dfrac{1}{k_1 k_2}, & k_1, k_2 \text{ ungerade}, \\ 0, & k_1 \text{ oder } k_2 \text{ gerade}. \end{cases}$$

### 3.3.4 Diskrete schwingende Membran

1. Die Differenzenapproximation der Eigenwertaufgabe (3) für die schwingende Membran lautet

$$-\Delta_h w_h = \lambda_h w_h \ \text{ in } \ G_h, \quad w_h = 0 \ \text{ auf } \ \partial G_h \tag{6}$$

mit

$$G_h = \{x \,|\, x = (j_1 h, j_2 h),\ j_1, j_2 = 1, \ldots, n\}$$

für

$$h = \frac{1}{n+1}\,.$$

Ein vollständiges Orthogonalsystem im Raum $\mathbb{K}^{n^2}$ erhält man mit Hilfe der Eigenvektoren der diskreten Saite durch

$$w_{h,k}(x) = \sin k_1 \pi x_1 \sin k_2 \pi x_2, \quad k_1, k_2 = 1, \ldots, n.$$

für $x = (x_1, x_2)$. Jetzt ist

$$\begin{aligned} -\Delta_h w_{h,k}(x) &= \left(\delta_1^2 \sin k_1 \pi x_1\right) \sin k_2 \pi x_2 - \sin k_2 \pi x_2 \left(\delta_2^2 \sin k_2 \pi x_2\right) = \\ &= \lambda_{h,k} w_{h,k}(x) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_{h,k} = \lambda_{h,k_1} + \lambda_{h,k_2} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2}\right).$$

Dabei ist dann $\lambda_{h,(1,1)}$ der kleinste und $\lambda_{h,(n,n)}$ der größte Eigenwert.

**Beispiel 1.** Für $n = 3$ ist $h = 1/4$, d.h.

$$\lambda_{h,k} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2 \frac{\pi}{8} k_1 + \sin^2 \frac{\pi}{8} k_2\right), \quad k_1, k_2 = 1, 2, 3.$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right), \\ \sin^2 \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} = \frac{1}{4} 2, \\ \sin^2 \frac{3\pi}{8} &= \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} h^2\lambda_{h,(1,1)} &= 2(2 - \sqrt{2}) &&= 1.171572875, \\ h^2\lambda_{h,(1,2)} &= h^2\lambda_{h,(2,1)} = 4 - \sqrt{2} &&= 2.585786438, \\ h^2\lambda_{h,(1,3)} &= h^2\lambda_{h,(2,2)} = h^2\lambda_{h,(1,1)} &&= 4, \\ h^2\lambda_{h,(2,3)} &= h^2\lambda_{h,(3,2)} = 4 + \sqrt{2} &&= 5.414213562, \\ h^2\lambda_{h,(3,3)} &= 2(2 + \sqrt{2}) &&= 6.828427124. \end{aligned}$$

Der Eigenwert $\lambda_h = 4$ hat also die Vielfachheit 3, zwei weitere Eigenwerte haben die Vielfachheit 2. □

# Kapitel 4

# Approximation parabolischer Anfangs-Randwertprobleme

## 4.1 Einfachste Approximationen der Wärmeleitungsgleichung

1. Wir betrachten ein Wärmeleitungs- oder Diffusionsproblem in einem räumlichen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^\nu$ und einem Zeitintervall $[0,T]$, das durch die parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad \text{in } G \times (0,T) \tag{1}$$

für Funktionen $u$ der Veränderlichen $x \in G$, $t \in (0,T)$ mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in G\,, \tag{2}$$

und der Randbedingung

$$u(x,t) = r(x,t)\,, \quad x \in \partial G\,, t \in (0,T)\,, \tag{3}$$

beschrieben wird. Zur Approximation dieser Aufgabe wird das Gebiet $G$ durch ein Gitter $G_h$ approximiert, wie wir dies bei Approximationen elliptischer Differentialgleichungen bereits kennengelernt haben. Wir beschränken die Betrachtung im folgenden auf achsenparallele Gitter $G_h$. Das Zeitintervall $[0,T]$ zerlegt man in äquidistante Teilintervalle mit der Schrittweite $\Delta t$ (d. h. $T = N\Delta t$) und den Teilpunkten

$$t_n = n\Delta t\,, \quad n = 0, \ldots, N\,. \tag{4}$$

Den Laplace-Operator approximieren wir in diesem Rahmen durch den zugehörigen Differenzenoperator $\Delta_h$, der bereits in Kapitel 1 eingeführt und eingehend untersucht wurde. Die einfachsten Approximationen der partiellen Ableitungen nach der Zeit erhält man durch die vorwärts bzw. rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} D_t v(x,t) &= \frac{1}{\Delta t}(v(x,t+\Delta t) - v(x,t))\,, \\ \overline{D}_t v(x,t) &= \frac{1}{\Delta t}(v(x,t) - v(x,t-\Delta t)), \end{aligned} \tag{5}$$

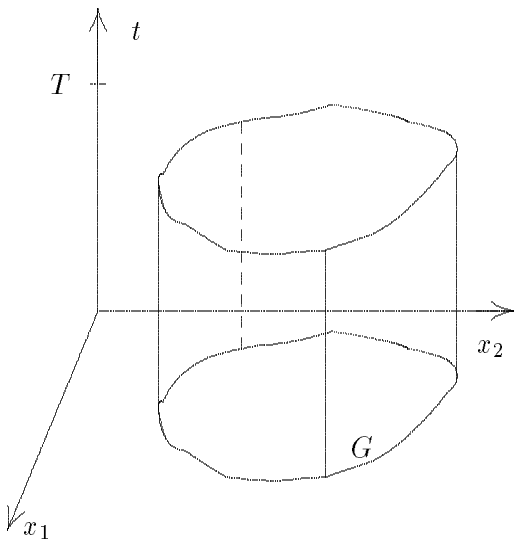



Fig. 4.1: Gebiet $G$ und Zeitintervall $[0,T]$.

an Gitterpunkten $x \in G_h\,,\, t = t_n$. Auf diese Weise ergeben sich für die parabolische Differentialgleichung (1) sofort die beiden Differenzenapproximationen

$$D_t u_h(x,t) = \Delta_h u_h(x,t) + f_h(x,t)\,, \quad x \in G_h\,,\, t = t_n\,,\, n = 0,\ldots,N-1\,, \tag{6}$$

und

$$\overline{D}_t u_h(x,t) = \Delta_h u_h(x,t) + f_h(x,t)\,, \quad x \in G_h\,,\, t = t_n\,,\, n = 1,\ldots,N\,, \tag{7}$$

für Funktionen $u_h$, die auf dem Gitter $\overline{G}_h \times [0,T]_{\Delta t}$ erklärt sind. Hierbei bezeichnet $[0,T]_{\Delta t} = \{t = n\Delta t \mid n = 0,\ldots,N\}$; analog $[0,T)_{\Delta t}$, $(0,T]_{\Delta t}$. Approximationen der parabolischen Anfangs-Randwertaufgabe entstehen, wenn die Funktion $u_h$ zusätzlich die Anfangsbedingung

$$u_h(x,0) = g_h(x)\,, \quad x \in \overline{G}_h\,, \tag{8}$$

und die Randbedingung

$$u_h(x,t) = r_h(x,t)\,, \quad x \in \partial G_h\,,\, t = t_n\,,\, n = 1,\ldots,N\,, \tag{9}$$

erfüllt.

2. In Kapitel 1 wurden die Restglieder der Approximationen von ersten und zweiten partiellen Ableitungen durch zugehörige Differenzenquotienten hergeleitet. Bei äquidistanten Schrittweiten $h = h_j = \Delta x\ \forall j$ bekommt man damit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x,t) = \delta_j^2 u(x,t) - \frac{(\Delta x)^2}{12}\,\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}(\xi_j,t)$$

mit Zwischenstellen $\xi_j \in (x - he_j\,,\, x + he_j)$ für $j = 1, \ldots, \nu$.

Für die partiellen Ableitungen nach der Zeit gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D_t u(x,t) - \frac{\Delta t}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\xi_t) \quad \xi_t \in (t, t+\Delta t)\,,$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \overline{D}_t u(x,t) - \frac{\Delta t}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\overline{\xi}_t)\,, \quad \overline{\xi}_t \in (t-\Delta t, t)\,.$$

Der parabolische Differentialoperator

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

wird durch den Differenzenoperator

$$L_h = D_t - \Delta_h \quad \text{bzw.} \quad L_h = \overline{D}_t - \Delta_h$$

approximiert. Der zugehörige Abschneidefehler $T_h$ ist das Restglied der Darstellung

$$Lu = L_h u + T_h$$

und läßt sich somit in der Form

$$T_h(x,t) = -\frac{\Delta t}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\xi_t) + \frac{(\Delta x)^2}{12}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}(\xi_j,t)$$

bzw. der entsprechenden Form mit $\overline{\xi}_t$ anstelle von $\xi_t$ schreiben. Für hinreichend oft differenzierbare Funktionen $u$ mit beschränkten partiellen Ableitungen in $G \times (0,T)$ konvergiert der Abschneidefehler also gegen Null wie

$$T_h(x,t) = \mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2) \to 0$$

für $\Delta t\,,\, \Delta x \to 0$.

3. Betrachtet man speziell die homogene eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, setzt also $f = 0$ und $\nu = 1$ in (1), so genügt die Lösung $u$ der Beziehung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

Der Abschneidefehler $T_h$ der ersten Approximation z. B. lautet dann

$$T_h(x,t) = -\frac{\Delta t}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\xi_t) + \frac{(\Delta x)^2}{12}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)\,.$$

Wählt man daher die Zeitschrittweite

$$\Delta t = \frac{1}{6}(\Delta x)^2\,,$$

so folgt

$$T_h(x,t) = \frac{(\Delta x)^2}{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\xi_t)\right) = \mathrm{O}(\,(\Delta x)^3)\,,$$

weil $|\xi - x| \le \Delta x$ , $|\xi_t - t| \le \Delta t = \frac{1}{6}(\Delta x)^2$ ist. Durch diese Wahl der Schrittweite gewinnt man folglich ein Verfahren der Genauigkeitsordnung $(\Delta x)^3$. Die obige Kopplung zwischen Orts- und Zeitschrittweite besagt aber, daß z. B. für eine Schrittweite $\Delta x = 10^{-1}$ die Zeitschrittweite $\Delta t = \frac{1}{6}10^{-2}$, also eine sehr kleine Schrittweite in der Zeit gewählt werden muß.

## 4.2 Struktur und Lösung der approximierenden Gleichungssysteme

1. Als einfachstes Beispiel betrachtet man das eindimensionale Einheitsintervall $G = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Das Gitter hat dann die in Figur 4.2 veranschaulichte Gestalt. Die Gitterpunkte in $G$ werden von $0,\ldots,M+1$ durchnumeriert, so daß

$$\Delta x = \frac{1}{M+1}\,, \quad x_j = j\Delta x\,, \quad j = 0,\ldots,M+1\,, \tag{1}$$

wird. Die Aufgabe 4.1.(6) bzw. 4.1.(7) und 4.1.(8) , 4.1.(9) definiert ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionswerte $u_h$ an Gitterpunkten, die man zur Vereinfachung der Schreibweise mit

$$u_j^n = u_h(x_j,t_n)\,, \quad j = 0,..,M+1\,,\, n = 0,\ldots,N\,,$$

bezeichnet. Entsprechend sei

$$f_j^n = f_h(x_j,t_n)\,, \quad r_j^n = r_h(x_j,t_n)\,, \quad g_j = g_h(x_j)\,.$$

Die diskrete Anfangs-Randwertaufgabe 4.1.(6) , 4.1.(8) , 4.1.(9) ist dann gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) &= \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right) + f_j^n\,,\ j = 1,\ldots,M\,, \\ u_j^0 &= g_j\,, \quad j = 0,\ldots,M+1\,, \\ u_0^n &= r_0^n\,, \quad u_{M+1}^n = r_{M+1}^n\,, \quad n = 1,\ldots,N\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Der zugehörige Differenzenstern für diese Aufgabe ist in Figur 4.3(a) dargestellt. Die Differenzengleichung (2) läßt sich explizit nach $u_j^{n+1}$ auflösen in der Form

$$u_j^{n+1} = q(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + (1-2q)u_j^n + \Delta t f_j^n$$

mit $q = \Delta t/(\Delta x)^2$.

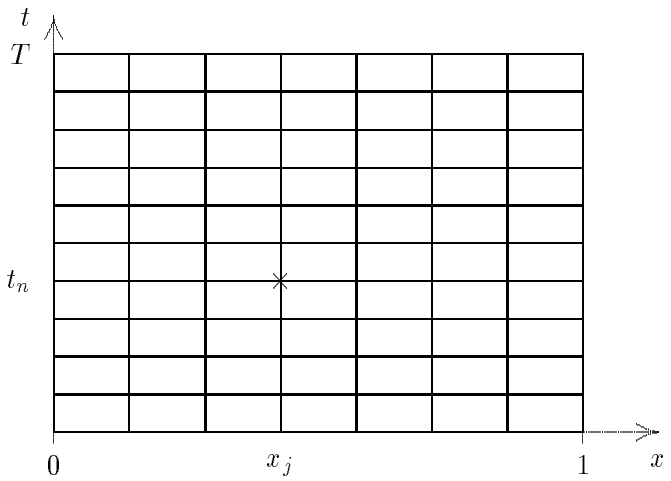



Fig. 4.2: Gitter zum Gebiet $G \times [0, T]$.

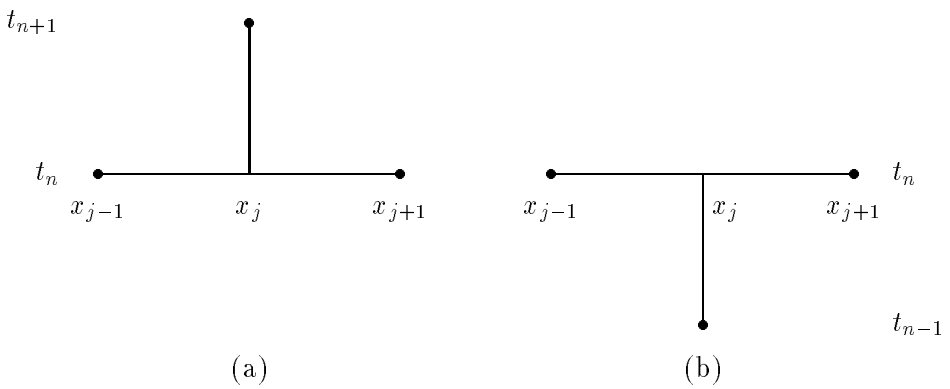



Fig. 4.3:

2. Die mit Hilfe des rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten in Zeitrichtung definierte Approximation der Anfangs-Randwertaufgabe führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^n - u_j^{n-1}\right) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right) + f_j^n\,, \qquad j = 1,\ldots,M\,,\ n = 1,\ldots,N\,, \tag{3}$$

mit den entsprechenden Anfangs- und Randwerten wie oben. Diese Gleichungen lassen sich auch als

$$-qu_{j-1}^n + (1+2q)u_j^n - qu_{j+1}^n = u_j^{n-1} + \Delta t f_j^n\,, \quad j = 1,\ldots,M\,,$$

mit $u_0^n = r_0^n$, $u_{M+1}^n = r_{M+1}^n$ schreiben. Der zugehörige Differenzenstern ist in Figur 4.3(b) veranschaulicht.

Für $n = 1$ ist $u_j^0$ durch die Anfangsbedingung $g_j$ bestimmt und damit die rechte Seite bekannt. Zur Berechnung von $u_j^1$ muß dann ein tridiagonales lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Matrix dieses Gleichungssystems hat die Form

$$\begin{pmatrix} 1+2q & -q & & 0 \\ -q & 1+2q & -q & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -q & 1+2q & -q \\ & & -q & 1+2q \end{pmatrix},$$

ist daher strikt diagonal dominant und somit invertierbar wie wir weiter unten noch zeigen werden. Darüber hinaus ist diese Matrix eine $M$–Matrix, symmetrisch und folglich positiv definit. Das Gleichungssystem ist daher stets eindeutig lösbar. Ist $u_j^1$ berechnet, so läßt sich anschließend die rechte Seite für $n = 2$ und dann $u_j^2$ als Lösung des Gleichungssystems (3) berechnen usw. In jedem Zeitschritt ist also $u_j^n$ bei dieser Approximation implizit durch (3) definiert. Dementsprechend heißt diese Approximation auch ein implizites Differenzenverfahren im Unterschied zum obigen expliziten Differenzenverfahren.

3. Tridiagonale lineare Gleichungssysteme bilden eine besonders einfache Klasse von Gleichungssystemen, die wir in der Form

$$\begin{aligned} a_1u_1 + b_1u_2 &= y_1 \\ &\cdots \\ c_{j-1}u_{j-1} + a_ju_j + b_ju_{j+1} &= y_j\,, \quad j = 2,\ldots,M-1 \\ &\cdots \\ c_{M-1}u_{M-1} + a_Mu_M &= y_M \end{aligned}$$

schreiben können. Wenn die Koeffizientenmatrix die obengenannten Eigenschaften hat, ist das Gaußsche Eliminationsverfahren ohne Zeilenvertauschungen durchführbar. Vorwärtselimination führt dann auf das gestaffelte Gleichungssystem

$$d_ju_j + b_ju_{j+1} = z_j\,, \quad j = 1,\ldots,M-1\,, \quad d_Mu_M = z_M\,,$$

mit den Koeffizienten

$$d_1 = a_1\,, \quad d_j = a_j + p_j b_{j-1}\,, \quad p_j = -\frac{c_{j-1}}{d_{j-1}}$$
$$z_1 = y_1\,, \quad z_j = y_j + p_j z_{j-1}\,, \quad j = 2, \ldots, M\,,$$

wobei alle $d_j \neq 0$ sind. Die Koeffizienten $p_j$ sind die negativen Zeilenmultiplikatoren $-m_{j,j-1}$. Die Lösungen des gestaffelten Gleichungssystems erhält man sehr einfach durch Rückwärtseinsetzen in der Form

$$u_M = \frac{1}{d_M} z_M\,, \quad u_j = \frac{1}{d_j}\left\{-b_j u_{j+1} + z_j\right\}\,, \quad j = M-1, \ldots, 1\,.$$

4. Analoge Verhältnisse ergeben sich bei zwei oder dreidimensionalen Gebieten $G \subset \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 2, 3$. Der Laplace-Operator wird dann approximiert durch

$$\Delta_h v(x) = \frac{1}{h^2}\left\{\sum_{\substack{k=-\nu \\ k\neq 0}}^{+\nu} v(x + he_k) - 2\nu v(x)\right\}\,, \quad x \in G_h\,.$$

Numeriert man die Gitterpunkte in $G_h$, $\partial G_h$ in der Form

$$G_h = \{x_1, \ldots, x_M\}\,, \quad \partial G_h = \{x_{M+1}, \ldots, x_{M+R}\}\,,$$

so ergibt sich die Darstellung

$$\Delta_h v(x_j) = \frac{1}{h^2}\left\{\sum_{k=1}^{M+R} d_{jk} v(x_k) - 2\nu v(x_j)\right\}\,, \quad j = 1, \ldots, M\,,$$

wobei $d_{jk} = 1$ ist, wenn $x_k$ Nachbarpunkt von $x_j$ ist; sonst ist $d_{jk} = 0$. Die explizite Differenzenapproximation der Anfangs-Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung läßt sich dann in der folgenden Gestalt schreiben

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= q\sum_{k=1}^{M+R} d_{jk} u_k^n + (1-2\nu q) u_j^n + \Delta t f_j^n\,, \quad j = 1, \ldots, M\,; \\ u_j^0 &= g_j\,, \qquad\qquad j = 1, \ldots, M+R\,; \\ u_j^n &= r_j^n\,, \qquad\qquad j = M+1, \ldots, M+R\,, \quad n = 1, \ldots, N\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Für die implizite Differenzenapproximation ergibt sich

$$(1+2\nu q) u_j^n - q\sum_{k=1}^{M+R} d_{jk} u_k^n = u_j^{n-1} + \Delta t f_j^n\,, \quad j = 1, \ldots, M\,,$$

mit den entsprechenden Anfangs-Randbedingungen wie oben. Aus diesen Gleichungen kann man mit Hilfe der Randbedingungen die Randwerte $u_k^n$, $k = M+1, \ldots, M+R$, sofort eliminieren. Damit verbleibt das Gleichungssystem

$$(1+2\nu q) u_j^n - q\sum_{k=1}^{M} d_{jk} u_k^n = u_j^{n-1} + q\sum_{k=M+1}^{M+R} d_{jk} r_k^n + \Delta t f_j^n\,, \quad j = 1, \ldots, M, \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_j^0 = g_j\,, \quad j = 1, \ldots, M(+R)\,.$$

Für jedes $n$ wird (5) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit $M$ Gleichungen für die $M$ Unbekannten $u_j^n\,, j = 1, \ldots, M$. Die Matrix $A = (a_{jk})$ dieses Gleichungssystems hat die Elemente

$$a_{jj} = 1 + 2\nu q\,, \quad a_{jk} = -q d_{jk}\,, \quad k \neq j\,, j,k = 1, \ldots, M\,.$$

Da $d_{jk}$ für höchstens $2\nu$ Indizes $k \neq j$ gleich 1 und sonst Null ist, ist die Matrix des Gleichungssystems strikt diagonal dominant, das heißt,

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M} |a_{jk}| < a_{jj}\,, \quad j = 1, \ldots, M\,.$$

5. Sei $B = (b_{jk})$ die Matrix mit den Elementen

$$b_{jj} = 0\,, \quad b_{jk} = \frac{q}{1 + 2\nu q} d_{jk}\,, \quad j \neq k\,, j,k = 1, \cdots, M\,,$$

dann wird

$$A = (1 + 2\nu q)(E - B)\,. \tag{6}$$

Die Matrix $B$ genügt dem starken Zeilensummenkriterium

$$\sum_{k=1}^{M} |b_{jk}| < 1 \quad j = 1, \cdots, M\,.$$

Daher ist $E - B$ invertierbar und $(E - B)^{-1}$ läßt sich in die Neumannsche Reihe

$$(E - B)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} B^l$$

entwickeln. Da $B \geq 0$ ist, wird auch $B^l \geq 0$ für alle $l$ und folglich $(E - B)^{-1} \geq 0$. Aus der obigen Darstellung (6) ergibt sich, daß dann auch $A$ invertierbar und $A^{-1} \geq 0$ wird. Da schließlich $a_{jk} \leq 0\,, j \neq k$ ist, ist die Koeffizientenmatrix $A$ des inhomogenen Gleichungssystems der impliziten Differenzenapproximation eine $M$-Matrix. Darüber hinaus hat $A$ Bandgestalt vom gleichen Typ wie die zugehörige Differenzenapproximation $\Delta_h$ des Laplaceoperators. Somit kann das Gleichungssystem durch das Gaußsche Eliminationsverfahren ohne Pivotisierung gelöst werden.

## 4.3 Anfangs-Randwertaufgaben unter Störungen der Anfangswerte

1. Als ersten Schritt zur Stabilitäts- und Konvergenzuntersuchung der Differenzenapproximationen parabolischer Differentialgleichungen wollen wir uns mit dem Verhalten der

Anfangs-Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung bei Störungen der Anfangsbedingung beschäftigen. Der Einfachheit halber beschäftigen wir uns hier mit dem Fall eines eindimensionalen Einheitsintervalls $G = (0,1)$ als räumlichem Gebiet. Wir betrachten die Aufgabe

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + f \quad \text{in } (0,1)\times(0,T)\,, \\ &u^i(x,t) = r(x,t)\,, \quad x \in \{0,1\}\,,\ t \in (0,T)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

mit den beiden Anfangsbedingungen

$$u^i(x,0) = g^i(x)\,, \quad x \in (0,1) \tag{2}$$

für $i = 0,1$. Die Anfangsbedingung $g^1$ kann etwa als eine gestörte Form der Anfangsbedingung $g^0$ aufgefaßt werden. Die Differenz $u = u^1 - u^0$ genügt dann der halbhomogenen Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad \text{in } (0,1)\times(0,T)\,, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad t \in (0,T)\,, \\ &u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in (0,1)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

mit $g = g^1 - g^0$.

2. Wie verhält sich diese Differenz $u = u^1 - u^0$ der beiden Lösungen $u^0, u^1$, wenn $g^1$ nahe bei $g^0$ liegt, also die Störung $g$ klein ist? Dazu können wir uns auf den Fall beschränken, daß $g$ die Form

$$g(x) = \varepsilon \sin l\pi x \tag{4}$$

für natürliche Zahlen $l$ und beliebige Konstanten $\varepsilon > 0$ hat. Eine allgemeine Störung läßt sich in eine Fourier-Sinus-Reihe entwickeln und ist daher stets eine Linearkombination von Störungen dieser Art. Die Lösung der obigen Aufgabe (3) mit der Anfangsbedingung (4) läßt sich sofort angeben; es ist

$$u(x,t) = \varepsilon e^{-l^2\pi^2 t} \sin l\pi x\,,$$

wie man leicht verifiziert. Diese Lösung $u$ strebt für jedes $l$ und festes $x$ als Funktion der Zeit sehr schnell gegen Null. Es gilt stets

$$|u(x,t)| \le \varepsilon \quad x \in [0,1]\,,\ t \ge 0\,,\ \forall\, l\,.$$

Im Falle $l = 1$ hat man eine positive Anfangsverteilung $g$ in $(0,1)$, die Lösung $u$ ist dann ebenfalls positiv für alle $(x,t)$ in $(0,1)\times[0,T]$.

3. Bestimmen wir jetzt die Lösung der zugehörigen expliziten Differenzenapproximation dieser Aufgabe,

$$D_t u_h = \delta^2 u_h \quad \text{in } G_h \times [0,T)_{\Delta t} \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_h(x,0) = \varepsilon \sin l\pi x\,, \quad x \in G_h\,, \tag{6}$$

und der Randbedingung

$$u_h(0,t) = u_h(1,t) = 0\,, \quad t = t_n\,,\ n = 1,\ldots,N\,. \tag{7}$$

Wie man leicht nachprüft, lautet diese Lösung

$$u_h(x,t) = \varepsilon\left(1 - 4q\sin^2\frac{l\pi h}{2}\right)^n \sin l\pi x$$

für $x = x_j$ , $t = t_n$ , $j = 0,\ldots,M+1$ , $n = 0,1,\ldots,N$. Solange $q \le \frac{1}{2}$ bleibt, ist

$$\left|1 - 4q\sin^2\frac{l\pi h}{2}\right| \le 1$$

also

$$|u_h(x,t)| \le \varepsilon\,, \quad x \in \overline{G}_h\,,\ t \in [0,T]_{\Delta t}\,,$$

für alle $l$ , $h = \Delta x$ und $\Delta t$. Eine kleine Störung $g(x) = \varepsilon \sin l\pi x$ der Anfangsbedingung bewirkt also auch nur eine kleine Störung der Lösung der diskreten Anfangs-Randwertaufgabe, gleichmäßig für alle $\Delta x$ , $\Delta t$, solange $q = \Delta t/(\Delta x)^2 \le \frac{1}{2}$ bleibt.

4. Wir wollen jetzt zeigen, daß im Falle $q > \frac{1}{2}$ ein grundsätzlich anderes Stabilitätsverhalten vorliegt. Dazu wird der Parameter $l = M$ gewählt. In diesem Falle hat die Störung der Anfangsbedingung die Form

$$g(x) = \varepsilon \sin M\pi x = (-1)^{j+1}\varepsilon \sin \pi x\,, \quad x = jh\,,$$

da

$$\begin{aligned}\varepsilon \sin M\pi x &= \varepsilon \sin \pi Mjh = \varepsilon \sin \pi j(1-h) = \varepsilon \sin(\pi j - \pi jh)\\ &= \varepsilon\left(\underbrace{\sin \pi j}_{=0}\cos \pi jh - \underbrace{\cos \pi j}_{=(-1)^j}\sin\underbrace{\pi jh}_{=x}\right) = (-1)^{j+1}\varepsilon \sin \pi x\end{aligned}$$

für $j = 0,\ldots,M+1$ ist, wobei $Mh = 1 - h$ ist. Weiter wird in diesem Falle

$$\sin\frac{M\pi h}{2} = \cos\frac{\pi}{2}h\,.$$

Für $q > \frac{1}{2}$ ist $|1 - 4q| > 1$ und für alle hinreichend kleinen Schrittweiten auch

$$|1 - 4q\cos^2\frac{\pi}{2}h| > 1\,.$$

Die Lösung der diskreten Anfangsrandwertaufgabe strebt daher für jedes $x \in G_h$ wie

$$|u_h(x,t)| = \varepsilon|1 - 4q\cos^2\frac{\pi}{2}h|^n \sin \pi x \to \infty$$

für $n = \frac{t}{\Delta t} \to \infty$. In diesem Falle können also kleine Störungen der Anfangsbedingung, wie sie z. B. bei der numerischen Berechnung der Anfangswerte $g_h$ in der Regel unvermeidlich

sind, große Störungen der Lösung der diskreten Anfangs-Randwertaufgabe bewirken. Die Differenzenapproximation ist daher im Falle $q > \frac{1}{2}$ instabil.

Die Stabilitätsbedingung

$$q \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2}(\Delta x)^2$$

erfordert z. B. bei der Ortsschrittweite $\Delta t = 10^{-1}$ sehr kleine Zeitschrittweiten $\Delta t \leq 5 \cdot 10^{-3}$. Dieses ist ein gewichtiger Nachteil der expliziten Differenzenapproximation im Vergleich zur impliziten Differenzenapproximation, die ohne jede Einschränkung stabil ist, wie wir jetzt zeigen wollen.

5. Das implizite Differenzenverfahren für die halbhomogene Anfangs-Randwertaufgabe lautet

$$\overline{D}_t u_h = \delta^2 u_h \quad \text{in } G_h \times (0,T]_{\Delta t}$$

mit der Anfangs- und Randbedingung wie oben in (5), (6), (7). Auch in diesem Falle läßt sich die Lösung $u_h$ leicht angeben. Es ist

$$u_h(x,t) = \frac{1}{\left(1 + 4q \sin^2 \frac{l\pi h}{2}\right)^n} \varepsilon \sin l\pi x$$

für $x \in G_h$, $t = t_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ und jedes $l = 1, 2, \ldots, M$. Für jedes $q > 0$ ist jetzt der Faktor vor $\varepsilon \sin l\pi x$ kleiner oder gleich 1, also

$$|u_h(x,t)| \leq \varepsilon \quad x \in G_h\,,\ t \in [0,T]_{\Delta t}$$

für alle $l$ und beliebige Schrittweiten $h = \Delta x\,, \Delta t$. Die Lösungen der impliziten diskreten Anfangs-Randwertaufgabe sind also stabil gegenüber Störungen des oben betrachteten Typs.

## 4.4 Verfahren von Crank–Nicolson und von Douglas

1. Die bisher betrachteten einfachsten Differenzenverfahren haben nur einen verhältnismäßig geringen Genauigkeitsgrad. Man ist deshalb an weiteren Verfahren interessiert, mit denen sich genauere Näherungen für die gesuchte Lösung berechnen lassen. Darüber hinaus sollen die Verfahren ohne Schrittweitenbeschränkung arbeiten können, so daß man implizite Verfahren verwenden muß. Wir beschränken uns hier auf die Approximation des Modellproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad \text{in } (0,1) \times (0,T) \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$u(x,t) = r(x,t) \quad x \in (0,1)\,,\ t \in \{0,1\}\,, \tag{2}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in (0,1)\,. \tag{3}$$

2. Es sei wieder ein äquidistantes Gitter in Ort und Zeit zur Approximation von $[0,1]\times[0,T]$ definiert. Zur Herleitung der Differenzenapproximation von Crank–Nicolson [1] integriert man beide Seiten der Differentialgleichung über $t$ von $t_{n-1}$ bis $t_n$ und dividiert durch die Zeitschrittweite $\Delta t$. Dabei geht die linke Seite in $\overline{D}_t u(x,t_n)$ über. Die Integrale auf der rechten Seite werden durch die Sehnentrapezregel approximiert, was bekanntlich mit einem Fehler $\mathrm{O}((\Delta t)^2)$ verbunden ist. Anschließend werden die zweiten partiellen Ableitungen nach $x$ durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung mit einem Fehler $\mathrm{O}((\Delta x)^2)$ approximiert. Auf diese Weise entsteht an der Stelle $x = x_j$ die Differenzenapproximation

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^n - u_j^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta^2 u_j^n + \delta^2 u_j^{n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(f_j^n + f_j^{n-1}\right)$$

für $j = 1,\ldots,M$, $n = 1,\ldots,N-1$.

Schreibt man dieses Verfahren ähnlich wie in Abschnitt 4.1 als

$$\overline{D}_t u_h(x,t) = C_h u_h(x,t) + f_h(x,t)\,, \tag{4}$$

dann haben $C_h$ bzw. $f_h$ hier die Gestalt

$$\begin{aligned} C_h v(x,t_n) &= \frac{1}{2}\left(\delta^2 v(x,t_n) + \delta^2 v(x,t_{n-1})\right)\,, \\ f_h(x_j,t_n) &= \frac{1}{2}\left(f_j^n + f_j^{n-1}\right)\ \left(=: f_j^{n-1/2}\right). \end{aligned}$$

Setzt man noch $L_h = \overline{D}_t - C_h$ und $v^h = v|G_h \times [0,T]_\Delta$, dann ist der *Abschneidefehler* im allgemeinen wie in Abschnitt 4.1 erklärt durch

$$\begin{aligned} T_h(x,t) &= (Lu)^h(x,t) - L_h u^h(x,t) \\ &= f^h(x,t) - \left(\overline{D}_t u^h - C_h u\right)(x,t) \end{aligned} \tag{5}$$

mit der Lösung $u$ des gegebenen Anfangsrandwertproblems. Für das Crank–Nicolson–Verfahren ergibt sich mit Hilfe von Taylor–Entwicklung für hinreichend oft differenzierbares $u$,

$$\begin{aligned} T_h(x,t_n) &= f(x,t_n) - \left\{\overline{D}_t u(x,t_n) - \frac{1}{2}\left(\delta^2 u(x,t_n) + \delta^2 u(x,t_{n-1})\right)\right\} \\ &= f(x,t_n) - f(x,t_{n-1/2}) + \mathrm{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Die bekannte Aussage, daß das Crank–Nicolson–Verfahren einen Abschneidefehler der Größe $\mathrm{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ besitzt, hat die Grundlage in der folgenden Beziehung,

$$(Lu)^h(x,t_{n-1/2}) - L_h u^h(x,t_n) = \mathrm{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)\,.$$

3. Eine weitere Steigerung der Genauigkeit läßt sich erzielen, wenn man die Interpolationsformel von Cowell (s. [SH82], 12.2.4) zur Integration der Differentialgleichung $U'' = F$ heranzieht. In diesem Falle gilt bekanntlich die Darstellung

$$\delta^2 U_j = F_j + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 F_j + \mathrm{O}((\Delta x)^4)\,. \tag{7}$$

[1] Crank, J., Nicolson, P., Proc. Camb. phil. Soc. math. phys. Sci. **43** (1947), S. 50 ff.

Bei Anwendung auf die partielle Differentialgleichung (1) wird mit $F = \frac{\partial u}{\partial t} - f$ dann

$$\delta^2 u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f\right) + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f\right) + \mathrm{O}(\,(\Delta x)^4)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 u\right) = \delta^2 u + f + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f + \mathrm{O}(\,(\Delta x)^4)\,.$$

Integriert man wieder beide Seiten über $t$ von $t_{n-1}$ bis $t_n$, dividiert durch $\Delta t$ und approximiert die Integrale durch die Sehnentrapezformel, so entsteht die *Formel von Douglas*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^n - u_j^{n-1}\right) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t}\right)\delta^2 u_j^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t}\right)\delta^2 u_j^{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^n\right) + \frac{1}{2}\left(f_j^{n-1} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^{n-1}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

In der Form (4) ergibt sich für das Douglas–Verfahren

$$\begin{aligned}C_h v(x,t_n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right)\delta^2 v(x,t_n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right)\delta^2 v(x,t_{n-1})\,, \\ f_h(x_j,t_n) &= \frac{1}{2}\left(f_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^n\right) + \frac{1}{2}\left(f_j^{n-1} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^{n-1}\right)\,.\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 u\right) = \delta^2 u + f + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f + \mathrm{O}(\,(\Delta x)^4)$$

hat man für den Abschneidefehler für eine hinreichend oft differenzierbare Lösung $u$ des Anfangsrandwertproblems die Darstellung

$$\begin{aligned}T_h(x,t_n) = f(x,t_n) - f(x,t_{n-1/2}) &- \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f(x,t_{n-1/2}) \\ &+ \mathrm{O}(\,(\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Im Spezialfall $\delta^2 f = \mathrm{O}(\,(\Delta x)^2)$ hat man die bekannte Größenordnung für den Abschneidefehler des Douglas–Verfahrens,

$$(Lu)^h(x,t_{n-1/2}) - L_h u^h(x,t_n) = \mathrm{O}(\,(\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)\,.$$

4. Die Differenzengleichungen des Crank–Nicolson–Verfahrens kann man in der Form

$$\begin{aligned}&(1+q)u_j^n - \frac{q}{2}\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) = \\ &\qquad (1-q)u_j^{n-1} + \frac{q}{2}\left(u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(f_j^n + f_j^{n-1}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

schreiben. Die Differenzengleichungen des Verfahrens von Douglas lauten entsprechend

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{6}+q\right)u_j^n-\frac{1}{2}\left(q-\frac{1}{6}\right)\left(u_{j-1}^n+u_{j+1}^n\right)=\\ \left(\frac{5}{6}-q\right)u_j^{n-1}+\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{6}\right)\left(u_{j-1}^{n-1}+u_{j+1}^{n-1}\right)\\ +\frac{\Delta t}{2}\left(f_j^n+\frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^n\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(f_j^{n-1}+\frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^{n-1}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

Diese Differenzenapproximationen sind implizite Verfahren. Die Lösungen $u_j^n$, $j = 1,\dots,M$, werden also wieder als Lösungen tridiagonaler Gleichungssysteme gewonnen. Die Koeffizientenmatrix $A$ hat im ersten Verfahren die Elemente

$$a_j = 1+q\,,\quad b_j = c_j = -\frac{q}{2}\,,$$

und im zweiten Verfahren die Elemente

$$a_j = \frac{5}{6}+q\,,\quad b_j = c_j = -\frac{1}{2}\left(q-\frac{1}{6}\right)\,.$$

Diese Matrizen sind strikt diagonal dominant und daher invertierbar. Weiter ist $a_j > 0, b_j, c_j \le 0$, so daß die Matrizen auch $M$–Matrizen sind – für das Douglas–Verfahren gilt dies unter der Einschränkung $q \ge \frac{1}{6}$.

5. Wir betrachten wieder das Stabilitätsverhalten dieser Approximationen bezüglich Störungen $\varepsilon\sin(l\pi x)$ der Anfangsbedingung bei $t = 0$. Dazu wird das Verhalten der Lösungen der Aufgabe (1), (2), (3) mit $f = 0$, der Randbedingung $r = 0$ und der Anfangsbedingung $g(x) = \varepsilon\sin(l\pi x)$ untersucht. Die Lösungen der Differenzengleichungen lassen sich durch Separation der Veränderlichen bestimmen. Die Lösung $u_h$ hat die Form

$$u_h(x,t) = v_h(x)w_h(t)\,,\quad v_h(x) = \varepsilon\sin l\pi x\,.$$

Es ist

$$-\delta^2 v_h = \lambda_h v_h\,,\quad \lambda_h = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{l\pi h}{2}\,.$$

Die Funktion $w_h(t)$ im Crank–Nicolson–Verfahren genügt daher der Gleichung

$$\frac{1}{\Delta t}(w^n - w^{n-1}) = -\frac{\lambda_h}{2}(w^n + w^{n-1})\,,$$

das heißt,

$$w^n = \frac{1-\frac{1}{2}\lambda_h\Delta t}{1+\frac{1}{2}\lambda_h\Delta t}w^{n-1}\,,\quad n = 1,\dots,N\,.$$

Mit $w^0 = 1$ wird dann

$$w_h(t_n) = w^n = \left(\frac{1-\frac{1}{2}\lambda_h\Delta t}{1+\frac{1}{2}\lambda_h\Delta t}\right)^n\,,\quad n = 0,\dots,N\,.$$

**Satz 1** *Das Crank–Nicolson–Verfahren ist gegenüber Störungen dieser Art stabil für alle* $\Delta t, \Delta x > 0$.

*Beweis.* Da $\lambda_h \geq 0$ ist, ergibt sich

$$|w_h(t_n)| \leq 1\,, \quad |u_h(x_j, t_n)| \leq \varepsilon\,.$$

□

6. Analog kann man das Stabilitätsverhalten des Verfahrens von Douglas analysieren. In diesem Falle genügt die zugehörige Funktion $w_h$ der Rekursion (s. (8))

$$\frac{1}{\Delta t}(w^n - w^{n-1}) = -\lambda_h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right) w^n - \lambda_h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right) w^{n-1}$$

oder

$$w^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t}{1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t} w^{n-1}\,, \quad n = 1, \ldots, N\,.$$

Mit $w^0 = 1$ ist jetzt

$$w^n = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t}{1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t}\right)^n\,, \quad n = 0, \ldots, N\,.$$

**Satz 2** *Das Verfahren von Douglas ist ebenfalls stabil gegenüber derartigen Störungen der Anfangsbedingung für beliebige Schrittweiten* $\Delta x\,, \Delta t$.

*Beweis.* Hier ist

$$1 - \frac{1}{12q}\lambda_h \Delta t = 1 - \frac{1}{3}\sin^2 \frac{l\pi h}{2} > 0\,.$$

Daher gelten die Ungleichungen

$$-\left\{\left(1 - \frac{1}{12q}\lambda_h \Delta t\right) - \frac{1}{2}\lambda_h \Delta t\right\} \leq 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t$$

und

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t \leq 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t\,.$$

Folglich wird

$$\left|\frac{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t}{1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right) \lambda_h \Delta t}\right| \leq 1$$

und somit

$$|w_h(t_n)| = |w^n| \leq 1\,, \quad |u_h(x_j, t_n)| \leq \varepsilon\,.$$

□

# Kapitel 5

# Stabilität und Konvergenz bei parabolischen Problemen

## 5.1 Die einfachsten Approximationen

1. Wir orientieren uns wieder am Modellproblem der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f && \text{in } (0,1)\times(0,T)\,, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\,, && t \in (0,T)\,, \\ u(x,0) &= g(x)\,, && x \in (0,1)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir der Einfachheit halber im folgenden annehmen wollen, daß die Randbedingungen homogen sind. Die einfachsten expliziten und impliziten Differenzenapproximationen dieser Aufgabe haben dann die Form

$$\begin{aligned} D_t u_h(x,t) &= \delta^2 u_h(x,t) + f_h(x,t)\,, && x \in G_h\,,\ n = 0,\ldots,N-1\,, \\ \overline{D}_t u_h(x,t) &= \delta^2 u_h(x,t) + f_h(x,t)\,, && x \in G_h\,,\ n = 1,\ldots,N\,, \end{aligned} \tag{2}$$

auf einem äquidistanten Gitter $\overline{G}_h = [0,1]_h$ mit der Randbedingung

$$u_h(0,t_n) = u_h(1,t_n) = 0\,, \quad n = 0,\ldots,N\,,$$

und der Anfangsbedingung

$$u_h(x,0) = g_h(x)\,, \quad x \in G_h\,.$$

2. Den Abschneidefehler $T_h$ dieser beiden Approximationen haben wir bereits untersucht und die Darstellung ($h = \Delta x$)

$$T_h(x,t) = \mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2) \tag{3}$$

hergeleitet. Die exakte Lösung $u$ der Wärmeleitungsgleichung genügt damit den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} D_t u(x,t) &= \delta^2 u(x,t) + f(x,t) - T_h^{ex}(x,t) \\ \overline{D}_t u(x,t) &= \delta^2 u(x,t) + f(x,t) - T_h^{im}(x,t) \end{aligned} \tag{4}$$

für $x \in G_h$, $t = t_n$, $n = 0,\ldots,N-1$ bzw. $n = 1,\ldots,N$.

Subtrahiert man jetzt diese Gleichungen von den entsprechenden Gleichungen (2) für $u_h$, so erhält man für den Diskretisierungsfehler

$$e_h(x,t) = (u_h - u)(x,t)$$

der Lösungen $u_h$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} D_t e_h^{ex}(x,t) &= \delta^2 e_h^{ex}(x,t) + (f_h - f)(x,t) + T_h^{ex}(x,t)\,, \\ \overline{D}_t e_h^{im}(x,t) &= \delta^2 e_h^{im}(x,t) + (f_h - f)(x,t) + T_h^{im}(x,t)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

für $x \in G_h$, $t = t_n$ mit den Randbedingungen

$$e_h(0,t_n) = e_h(1,t_n) = 0\,, \quad n = 0,\ldots,N\,,$$

und den Anfangsbedingungen

$$e_h(x,0) = (g_h - g)(x)\,, \quad x \in G_h\,.$$

3. Der Fehler $e_h$ ist also Lösung einer diskreten Anfangs-Randwertaufgabe vom gleichen Typ wie die Differenzenapproximation der gegebenen Differentialgleichungsaufgabe. Der Unterschied zwischen diesen Aufgaben besteht nur darin, daß die inhomogenen Terme $f_h - f + T_h$ an die Stelle von $f_h$ und die Anfangsbedingung $g_h - g$ an die Stelle von $g_h$ treten. Sind $f_h, g_h$ Approximationen von $f, g$, so sind $f_h - f$, $g_h - g$ klein. Für ein konsistentes Verfahren ist auch der Abschneidefehler $T_h$ klein. Die Differenzenapproximation heißt *stabil*, wenn unter dieser Bedingung folgt, daß auch die Lösung der Aufgabe, also der Fehler $e_h$ klein ist, gleichmäßig für hinreichend kleine $\Delta t$, $\Delta x$. Um die Konvergenz des Verfahrens zu zeigen, benötigt man also nicht nur die stetige Abhängigkeit der Lösungen der Differenzenapproximation von den Anfangswerten sondern auch von den rechten Seiten. Diese Stabilitätseigenschaften wollen wir jetzt für die einfachsten expliziten und impliziten Differenzenapproximationen untersuchen.

4. Zu diesem Zweck seien die Gitterpunkte in $G_h$ wieder von 1 bis $M$ durchnumeriert und damit

$$u_j^n = u_h(x_j,t_n)\,,\ f_j^n = f_h(x_j,t_n)\,,\ g_j = g_h(x_j)$$

für $j = 1,\ldots,M$, $n = 0,\ldots,N$. Weiter führen wir die Vektoren

$$u^n = (u_1^n,\ldots,u_M^n)\ ,\ f^n = (f_1^n,\ldots,f_M^n)\ ,\ g = (g_1,\ldots,g_M) \in \mathbb{R}^M\,,$$

ein. Hiermit lassen sich die beiden Differenzenapproximationen in der Form

$$u^0 = a\,,\ Au^n = Bu^{n-1} + c^n\,, \quad n = 1,\ldots,N\,, \tag{6}$$

mit $M \times M$–Matrizen $A, B$ schreiben. Für die explizite Differenzenapproximation ist

$$a = g\,, \quad c^n = \Delta t f^{n-1}\,, \quad A = E\,, \tag{7}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1-2q & +q & 0 & \dots & 0 \\ +q & 1-2q & +q & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & +q & 1-2q & +q \\ 0 & \dots & 0 & +q & 1-2q \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Die implizite Differenzenapproximation erhält man mit

$$a = g\,, \quad c^n = \Delta t f^n\,, \quad B = E\,,$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1+2q & -q & 0 & \dots & 0 \\ -q & 1+2q & -q & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -q & 1+2q & -q \\ 0 & \dots & 0 & -q & 1+2q \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Wie wir bereits wissen, ist diese Matrix $A$ invertierbar.

5. Unter dieser Bedingung kann man $A^{-1}$ auf beide Seiten der Gleichung (6) anwenden und erhält

$$u^0 = d^0\,, \quad u^n = Cu^{n-1} + d^n\,, \quad n = 1, \dots, N\,, \tag{10}$$

mit den Abkürzungen

$$d^0 = a\,, \quad d^n = A^{-1}c^n\,, \quad C = A^{-1}B\,.$$

Die Vektoren $u^n$ genügen also einer Rekursion eines Typs, wie er bei iterativen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme in ähnlicher Weise auftritt (s. [SH82], § 8). Wie man leicht zeigt, besitzt die Lösung dieser Rekursion die explizite Darstellung

$$u^n = \sum_{j=0}^{n} C^{n-j} d^j\,, \quad n = 0, \dots, N\,. \tag{11}$$

Zur Abschätzung von $u^n$ durch die Daten führt man jetzt geeignete Normen $\|.\|$ auf dem Zahlenraum $\mathbb{R}^M$ ein. Hiermit wird dann

$$\|u^n\| \le \max_{j=0,\dots,n} \|C^j\| \sum_{j=0}^{n} \|d^j\|\,, \tag{12}$$

wobei jede beliebige, mit der Vektornorm auf $\mathbb{R}^M$ verträgliche Norm für die Matrizen $C^j$ gewählt werden darf.

6. Für die explizite Differenzenapproximation gilt

$$\sum_{j=0}^{n} \|d^j\| \le \|g\| + \Delta t \sum_{j=1}^{n} \|f^{j-1}\|\,.$$

Wählt man die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^M$ und für $C = B$ die maximale Zeilensummennorm, so ergibt sich

$$\|C\|_\infty = |1-2q| + 2q = \begin{cases} 1\,, & q \le \frac{1}{2}\,; \\ 4q-1\,, & q > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Unter der Bedingung $q \le \frac{1}{2}$ ist daher

$$\|C^j\|_\infty \le \|C\|_\infty^j \le 1\,, \quad j = 0, \ldots, n\,,$$

und

$$\|u^n\|_\infty \le \|g\|_\infty + \Delta t \sum_{j=1}^{n} \|f^{j-1}\|_\infty\,.$$

Die Summe auf der rechten Seite kann man noch weiter nach oben abschätzen. Mit $t_n = n\Delta t$ wird dann auch

$$\max_{x \in G_h} |u_h(x,t_n)| \quad \le \quad \max_{x \in G_h} |g_h(x)| + t_n \max_{\substack{j=0,\ldots,n-1 \\ x \in G_h}} |f_h(x,t_j)|\,, \quad n = 0, \ldots, N\,.$$

Dieses ist die *Stabilitätsungleichung* für die Lösungen der expliziten Differenzenapproximation. Aus dieser Ungleichung ergibt sich sofort, daß für kleine Anfangsdaten $g_h$ und rechte Seiten $f_h$ auch die Lösung $u_h$ klein ist gleichmäßig für alle $\Delta t$, $\Delta x$ mit $\Delta t/(\Delta x)^2 = q \le \frac{1}{2}$.

7. Die Stabilitätsungleichung gilt für alle Anfangswerte $g_h$ und rechten Seiten $f_h$. Also kann man die Ungleichung auch zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers $e_h = u_h - u$ anwenden, der der diskreten Anfangsrandwertaufgabe mit den in (5) angegebenen Anfangswerten und rechten Seiten genügt. Auf diese Weise ergibt sich die *Diskretisierungsfehlerabschätzung*

$$\max_{x \in G_h} |(u_h - u)(x,t_n)| \le \max_{x \in G_h} |(g_h - g)(x)| + t_n \max_{\substack{j=0,\ldots,n-1 \\ x \in G_h}} |(f_h - f + T_h^{ex})(x,t_j)|$$

für $n = 0, \ldots, N$ und der

**Satz 1 (Konvergenzsatz)** *Die Lösungen $u_h$ der expliziten Differenzenapproximation konvergieren für $q = \Delta t/(\Delta x)^2 \le \frac{1}{2}$ gegen die Lösung der zugehörigen Anfangs-Randwertaufgabe wie*

$$\max_{\substack{n=0,\ldots,N \\ x \in G_h}} |(u_h - u)(x,t_n)| = \mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2) \to 0$$

*für $\Delta t$, $\Delta x \to 0$, vorausgesetzt, daß die Daten der Bedingung*

$$\max_{x \in G_h} |(g_h - g)(x)| + \max_{\substack{n=0,\ldots,N \\ x \in G_h}} |(f_h - f)(x,t_n)| = \mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2) \to 0$$

*für $\Delta t$, $\Delta x \to 0$ genügen.*

8. Für die implizite Differenzenapproximation ist $C = A^{-1}$, so daß jetzt die Potenzen von $A^{-1}$ abgeschätzt werden müssen. Die Matrix $A$ läßt sich schreiben als

$$A = (1+2q)(E-R)\,,$$

wobei die Matrix $R$ die Elemente

$$r_{jk} = \begin{cases} 0 & , \quad j = k \text{ oder } |j-k| \le 2\,, \\ \dfrac{q}{1+2q} & , \quad |j-k| = 1\,, \end{cases}$$

für $j,k = 1,\ldots,M$ hat. Die maximale Zeilensummennorm von $R$ genügt daher der Abschätzung

$$\|R\|_\infty \le \frac{2q}{1+2q}\,.$$

Mit Hilfe der Neumannschen Reihe für $(E-R)^{-1}$ gestattet $A^{-1}$ dann die Entwicklung

$$A^{-1} = \frac{1}{1+2q}(E-R)^{-1} = \frac{1}{1+2q}\sum_{j=0}^{\infty} R^j$$

und somit in der maximalen Zeilensummennorm die Abschätzung

$$\|C\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{1+2q}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2q}{1+2q}\right)^j = 1\,.$$

Folglich genügt die Lösung der impliziten Differenzenapproximation der *Stabilitätsungleichung*

$$\|u^n\|_\infty \le \|g_h\|_\infty + \Delta t\sum_{j=1}^{n}\|f^j\|_\infty$$

oder

$$\max_{x\in G_h}|u_h(x,t_n)| \le \max_{x\in G_h}|g_h(x)| + t_n \max_{\substack{j=1,\ldots,n\\ x\in G_h}}|f_h(x,t_j)|$$

für alle $n = 0,\ldots,N$. Hieraus folgt sofort die Satz 1 entsprechende Diskretisierungsfehlerabschätzung und der

**Satz 2 (Konvergenzsatz)** *Die Lösungen $u_h$ der impliziten Differenzenapproximation konvergieren für jedes Schrittweitenverhältnis gegen die Lösung der Differentialgleichung gemäß*

$$\max_{\substack{n=0,\ldots,N\\ x\in G_h}}|(u_h-u)(x,t_n)| = \mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2) \to 0$$

*für $\Delta t\,,\ \Delta x \to 0$, vorausgesetzt, daß die Daten der Bedingung*

$$\max_{x\in G_h}|(g_h-g)(x)| + \max_{\substack{n=0,\ldots,N\\ x\in G_h}}|(f_h-f)(x,t_n)| = \mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2) \to 0$$

*für $\Delta t,\ \Delta x \to 0$ genügen.*

## 5.2 Stabilitätsbedingung und Spektralradius

1. Die Frage nach der Stabilität einer diskreten Anfangs-Randwertaufgabe mit zeitunabhängigen Koeffizienten ist gleichbedeutend mit der Frage nach der gleichmäßigen Beschränktheit der Potenzen $C^n$ der Matrix $C = A^{-1}B$ des Problems. Wichtiges Hilfsmittel in diesem Rahmen ist die Spektralzerlegung der Matrix. Wir wollen hier den einfachen Fall betrachten, daß im Zahlenraum $\mathbb{K}^M = \mathbb{R}^M$ bzw. $\mathbb{C}^M$ ein Skalarprodukt erklärt und die Matrix $C$ eine symmetrische Abbildung dieses Raumes mit Skalarprodukt ist. Die Abbildung $C$ heißt dann *symmetrisch (oder selbstadjungiert)*, wenn bezüglich des Skalarprodukts die Beziehung

$$(Cx, y) = (x, Cy)\,, \quad x, y \in \mathbb{K}^M\,,$$

gilt. Die symmetrischen Matrizen liefern symmetrische Abbildungen im Zahlenraum $\mathbb{R}^M$ mit dem euklidischen Skalarprodukt.

Symmetrische Abbildungen besitzen stets ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren $w_1, \ldots, w_M$ und es gilt die Spektralzerlegung

$$Cx = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j (x, w_j) w_j\,, \quad x \in \mathbb{K}^M\,.$$

Für die Potenzen der Matrix $C$ ergibt sich daraus die Darstellung

$$\|C^n x\| = \left( \sum_{j=1}^{M} \lambda_j^{2n} |(x, w_j)|^2 \right)^{1/2}\,.$$

Die natürliche Norm von $C^n$ hat daher die Darstellung

$$\|C^n\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{K}^M} \frac{\|C^n x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{j=1,\ldots,M} |\lambda_j|^n = (\text{spr } C)^n$$

für $n = 1, 2, \ldots$, wobei

$$\text{spr } C = \max_{j=1,\ldots,M} |\lambda_j|$$

der sogenannte *Spektralradius* der Matrix $C$ ist. Mit dieser Darstellung besitzt man eine sehr einfache Übersicht über das Wachstumsverhalten der Potenzen $C^n$:

$$\text{spr } C \leq 1 \Longrightarrow \sup_{n=1,2,\ldots} \|C^n\| < \infty\,.$$

2. Im Rahmen der Stabilitätsuntersuchung der Approximationen von Anfangs-Randwertaufgaben läßt sich diese Bedingung noch etwas abschwächen in der Form

$$\text{spr } C \leq 1 + \beta \Delta t$$

mit einer nichtnegativen Konstanten $\beta$. In diesem Falle ist

$$\|C^n\| = (\text{spr } C)^n \leq (1 + \beta \Delta t)^n \leq e^{\beta t_n}\,, \quad t_n = n\Delta t\,,\ n = 1, \ldots, N\,.$$

Die diskreten Zeitpunkte $t_n$ im Intervall $(0,T)$ gestatten die Abschätzung $t_n \le T$; daher gilt auch in diesem Falle

$$\|C^n\| \le e^{\beta T}, \quad n = 0, \ldots, N,$$

für alle Schrittweiten $\Delta t \to 0$.

**Beispiele** (vgl. 5.1.(2) )

*Explizites Verfahren:* $A = E, \quad B = E + \Delta t \delta^2$

*Implizites Verfahren:* $A = E - \Delta t \delta^2, \quad B = E$

wobei

$$-\Delta t \delta^2 = q \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

die Matrix $-\Delta t \delta^2$ ist symmetrisch und positiv definit. Die Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_M$ und Eigenvektoren $w^{(j)}$, $j = 1, \ldots, M$, von $-\delta^2$ ergeben sich als ($h = \Delta x$)

$$\mu_j = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{\pi j}{2(M+1)} \right), \; w_k^{(j)} = \sin \left( \frac{kj\pi}{M+1} \right), \quad k = 1, \ldots, M. \tag{1}$$

Die Eigenwerte $\mu_j^C$ von $C = A^{-1}B$ erhält man aus denen von $-\delta^2$ wie folgt:

$$\begin{aligned} &\mu_j^C = 1 - \Delta t \mu_j && \text{für das explizite Verfahren;} \\ &\mu_j^C = \tfrac{1}{\mu_j^A}, \; \mu_j^A = 1 + \Delta t \mu_j && \text{für das implizite Verfahren.} \end{aligned}$$

Zur Stabilität bzgl. der euklidischen Norm sieht man sofort, daß das implizite Verfahren uneingeschränkt stabil ist. Wegen $\mu_j > 0$ ist nämlich

$$|\mu_j^C| = \frac{1}{|\mu_j^A|} \le 1, \qquad j = 1, \ldots, M.$$

Das explizite Verfahren ist stabil, falls $q \le 1/2$; es ist nicht stabil, falls $q > 1/2$. Die erste Aussage folgt aus den Abschätzungen

$$1 \ge \mu_j^C = 1 - 4q \sin^2 \left( \frac{\pi j}{2(M+1)} \right) \ge -1.$$

Für $q > 1/2$ ist $1 - 4q < 1$ und wegen

$$\mu_M^C = 1 - 4q \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{M}{M+1} \right) \longrightarrow 1 - 4q \; (M \to \infty)$$

gibt es $M_0, \rho_0 > 0$ mit $\left|\mu_M^C\right| \geq 1 + \rho_0$ , $M \geq M_0$. Mit $n \to \infty$ konvergiert auch $M \to 0$ ($q = \Delta t/(\Delta x)^2$ fest), so daß

$$\left|\mu_M^C\right|^n \longrightarrow \infty \ (n \to 0) \ ,$$

was die Stabilität ausschließt. □

## 5.3 Verfahren von Crank–Nicolson

1. Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Stabilität und Konvergenz des Verfahrens von Crank–Nicolson zeigen (vgl. 4.4.(4) und 4.4.(10) ). Zuerst wird dieses Verfahren in die allgemeine Form

$$u^0 = a \ , \quad Au^n = Bu^{n-1} + c^n \ , \quad n = 1, \ldots, N \ , \tag{1}$$

gebracht. Die Matrizen oder Abbildungen $A$, $B$ in $\mathbb{K}^M$ sind durch die Gleichungen

$$(Av)_j = v_j - \frac{\Delta t}{2}\delta^2 v_j \ , \quad (Bv)_j = v_j + \frac{\Delta t}{2}\delta^2 v_j \ , \quad j = 1, \ldots, M \ , \tag{2}$$

erklärt, wobei die auf der rechten Seite auftretenden Komponenten $v_0$ , $v_{M+1}$ des Vektors $v$ gleich Null zu setzen sind. Der Vektor $a$ ist durch die Anfangsbedingung $g$ bestimmt und die Vektoren $c^n$ haben die Gestalt

$$c_j^n = \frac{\Delta t}{2}\left(f_j^n + f_j^{n-1}\right) \ , \quad j = 1, \ldots, M \ . \tag{3}$$

Die Abbildungen $A, B$ lassen sich in symbolischer Form mit Hilfe der Identität $I$ in der Gestalt

$$A = I - \frac{\Delta t}{2}\delta^2 \ , \quad B = I + \frac{\Delta t}{2}\delta^2 \ ,$$

schreiben, wobei die Abbildung $-\frac{\Delta t}{2}\delta^2$ durch die Matrix

$$-\frac{\Delta t}{2}\delta^2 = \frac{q}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Diese Matrix ist offenbar symmetrisch. Wie in Abschnitt 3.3.2 dargestellt, ist $-\delta^2$ eine positiv definite Abbildung des Zahlenraums $\mathbb{K}^M = \mathbb{R}^M$ bzw. $\mathbb{C}^M$ mit dem euklidischen bzw. unitären Skalarprodukt. Also sind alle Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_M$ von $-\delta^2$ positiv und es existiert ein zugehöriges vollständiges Orthonormalsystem $w^{(1)}, \ldots, w^{(M)}$ von Eigenvektoren.

2. Die Matrizen $A, B$ haben dann die gleichen Eigenvektoren und die Eigenwerte

$$\mu_j^A = 1 + \frac{\Delta t}{2}\mu_j\,, \quad \mu_j^B = 1 - \frac{\Delta t}{2}\mu_j\,, \quad j = 1, \ldots, M\,. \tag{4}$$

Weiter ergibt sich für die Matrix $C$ damit

$$C w^{(j)} = A^{-1} B w^{(j)} = \frac{\mu_j^B}{\mu_j^A} w^{(j)}\,; \quad j = 1, \ldots, M\,.$$

Also besitzt auch die Matrix $C$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren und die zugehörigen reellen Eigenwerte

$$\lambda_j = \frac{\mu_j^B}{\mu_j^A} = \frac{1 - \frac{\Delta t}{2}\mu_j}{1 + \frac{\Delta t}{2}\mu_j}\,, \quad j = 1, \ldots, M\,.$$

Da $\mu_j > 0$ ist, sind alle Eigenwerte von $C$ dem Betrage nach kleiner oder gleich eins und somit

$$\max_{j=1,\ldots,M} |\lambda_j| = \text{spr } C \leq 1\,.$$

Da $A, B$ vertauschbar sind, sind auch $A^{-1}, B$ vertauschbar und somit ist $C$ symmetrisch. Die bezüglich der euklidischen Norm gebildete natürliche Norm von $C$, die sogenannte Spektralnorm liefert dann

$$\|C^n\| = \max_{j=1,\ldots,M} |\lambda_j^n| = (\text{spr } C)^n \leq 1\,. \tag{5}$$

Die Eigenwerte der Matrix $A$ genügen der Bedingung $\mu_j^A \geq 1$, so daß auch

$$\|A^{-1}\| = \text{spr } A^{-1} \leq 1 \tag{6}$$

ausfällt.

3. Bei der obigen Herleitung des Stabilitätsresultats wurden nur allgemeine Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren der Abbildungen $A\,, B\,, C$ benötigt. Wir wollen aber noch anmerken, daß diese Eigenwerte und Eigenvektoren für das Modellproblem auch explizit angegeben werden können. In Abschnitt 4.4 haben wir bereits gezeigt, daß der Operator $-\delta^2$ die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren

$$\lambda_l = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{l\pi h}{2}\,, \quad w_j^{(l)} = \sin(l\pi j h)\,, \quad j = 1, \ldots, M\,,$$

für $l = 1, \ldots, M$ hat. Diese Eigenwerte sind paarweise verschieden und daher die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal im Vektorraum $\mathbb{R}^M$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Unsere früheren Stabilitätsuntersuchungen der diskreten Anfangs-Randwertaufgaben bezüglich Störungen der Anfangs- werte sind also mit den Eigenvektoren von $-\delta^2$ und damit der Verstärkungsmatrix $C$ erfolgt.

4. Aus der Bedingung spr $C \leq 1$ ergibt sich, daß das Verfahren von Crank–Nicolson für jedes Schrittweitenverhältnis $q = \Delta t/(\Delta x)^2$ stabil ist bzgl. der euklidischen Norm als Vektorraum auf $\mathbb{R}^M$. Aus der allgemeinen Form (1) ergibt sich die explizite Darstellung

$$u^n = \sum_{j=0}^{n} C^{n-j} d^j$$

mit

$$d_0 = a\,, \quad d^j = A^{-1}c^j\,, \quad C = A^{-1}B\,.$$

In der euklidischen Norm folgt dann aus (5), (6) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u^n\|_2 &\leq \max_{k=0,\ldots,n} \|C^k\| \left( \|a\|_2 + \|A^{-1}\| \sum_{k=1}^{n} \|c^k\|_2 \right) \\ &\leq \|a\|_2 + \sum_{k=1}^{n} \|c^k\|_2\,. \end{aligned}$$

Diese Beziehung ergibt die a priori *Stabilitätsungleichung*

$$\|u^n\|_2 \leq \|g_h\|_2 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^{n} \|f_h^k + f_h^{k-1}\|_2\,, \quad n = 1, \ldots, N\,.$$

Der Norm nach kleine Anfangsbedingungen $g_h$ und rechte Seiten $f_h$ ergeben also auch nur kleine Lösungen $u_h$, gemessen in der euklidischen Norm.

5. Wendet man die Stabilitätsungleichung auf die Differenz zwischen Näherungen $u_h$ und Lösung $u$ der Differentialgleichungsaufgabe auf dem Gitter $G_h$ an, so ergibt sich die *Diskretisierungsfehlerabschätzung*

$$\|u_h^n - u_{G_h}^n\|_2 \leq \|g_h - g_{G_h}\|_2 + \Delta t \sum_{k=1}^{n} \|f_h^k - f(.,t_k)_{G_h} + T_h(.,t_k)\|_2 \tag{7}$$

mit dem Abschneidefehler $T_h$ des Crank–Nicolson–Verfahrens. Für die Terme in der Summe hat man mit dem hier vorliegenden $f_h$ (vgl. 4.4.(4) ) die gleichmäßige Konvergenz (vgl. 4.4.(6) )

$$(f_h - f)(x,t_n) + T_h(x,t_n) = \mathrm{O}(\,(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)\,,$$

vorausgesetzt $f_{tt}$ existiert und ist beschränkt.

Für jede Gitterfunktion $r_h(x,t)$ besteht zwischen der Maximumnorm und euklidischen Norm die Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=0}^{n} \sqrt{h} \|r_h(.,t_k)\|_2 &= \Delta t \sum_{k=0}^{n} \left( h \sum_{j=1}^{M} |r_h(x_j,t_k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq T \max_{\substack{j=1,\ldots,M \\ k=1,\ldots,N}} |r_h(x_j,t_k)|\,, \end{aligned} \tag{8}$$

weil $n\Delta t \leq T$ und $hM \leq 1$ ist. Mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich der folgende

**Satz 1 (Konvergenzsatz)** *Die Lösungen $u_h$ des Differenzenverfahrens von Crank–Nicolson konvergieren für jedes Schrittweitenverhältnis gegen die Lösung $u$ der Randwertaufgabe gemäß*

$$\left( h \sum_{j=1}^{M} |(u_h - u)(x_j, t_n)|^2 \right)^{1/2} = \mathrm{O}\left( (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \right) \longrightarrow 0 \,, \quad n = 0, \ldots, N \,,$$

*für $\Delta t, \Delta x \to 0$, vorausgesetzt, daß die Daten der Bedingung*

$$\begin{aligned} \left( h \sum_{j=1}^{M} |(g_h - g)(x_j)|^2 \right)^{1/2} \quad + \quad & \Delta t \sum_{k=0}^{n} \left( h \sum_{j=1}^{M} |(f_h - f)(x_j, t_h)|^2 \right)^{1/2} \\ = \quad & \mathrm{O}\left( (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \right) \longrightarrow 0 \,, \quad n = 0, \ldots, N \,, \end{aligned}$$

*für $\Delta t, \Delta x \to 0$ genügen.*

6. Aus dieser Konvergenz des Verfahrens im *diskreten Quadratmittel* ergibt sich auch eine Konvergenzaussage in der Maximumnorm. Es gilt nämlich die Normäquivalenz

$$\sqrt{h} \max_{j=1,\ldots,M} |v_j| \le \left( h \sum_{j=1}^{M} |v_j|^2 \right)^{1/2} \le \max_{j=1,\ldots,M} |v_j|$$

für alle $h = \Delta x > 0$. Also ergibt der obige Konvergenzsatz weiter

$$\begin{aligned} \max_{j=1,\ldots,M} |(u_h - u)(x_j, t_n)| \; &\le \; \frac{1}{\sqrt{h}} \left( h \sum_{j=1}^{M} |(u_h - u)(x_j, t_n)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \mathrm{O}\left( (\Delta t)^{7/4} + (\Delta x)^{3/2} \right) \,, \; n = 0, \ldots, N \,, \end{aligned} \tag{9}$$

für $\Delta t \,, h = \Delta x \to 0$ bei festem Schrittweitenverhältnis $q = \Delta t / \Delta x^2$. In der Maximumnorm erhalten wir daher nur noch die Konvergenzordnung $\frac{3}{2}$ in $\Delta x$ bzw. $\frac{7}{4}$ in $\Delta t$.

## 5.4 Verfahren von Douglas

1. Das Douglas–Verfahren hat die allgemeine Form

$$u^0 = a \,, \quad A u^n = B u^{n-1} + c^n \,, \quad n = 1, \ldots, N \,, \tag{1}$$

mit den durch

$$(Av)_j = v_j - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{12q} \right) \Delta t \delta^2 v_j \,, \quad (Bv)_j = v_j + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{12q} \right) \Delta t \delta^2 v_j \,,$$

für $j = 1, \ldots, M$ und $v_0 = v_{M+1} = 0$ definierten Matrizen oder Abbildungen und

$$c_j^n = \frac{1}{2}\left(f_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^n\right) + \frac{1}{2}\left(f_j^{n-1} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^{n-1}\right) .$$

Sind $\mu_1, \ldots, \mu_M$ die Eigenwerte von $-\delta^2$, so haben $A$, $B$ die Eigenwerte

$$\mu_j^A = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right)\Delta t\mu_j , \quad \mu_j^B = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right)\Delta t\mu_j , \quad j = 1, \ldots, M .$$

Da $\mu_j$ Eigenwert von $-\delta^2$ ist, gilt mit den zugehörigen Eigenvektoren $w^{(j)}$ die Gleichung

$$\mu_j w_k^{(j)} = -\delta^2 w_k^{(j)} , \quad k = 1, \ldots, M ,$$

$w_0^{(j)} = w_{M+1}^{(j)} = 0$. Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung wird dann

$$(\Delta x)^2\mu_j \sum_{k=1}^{M} \left|w_k^{(j)}\right|^2 = \sum_{k=1}^{M} w_k^{(j)}\left(2w_k^{(j)} - w_{k-1}^{(j)} - w_{k+1}^{(j)}\right) \le 4\sum_{k=1}^{M}\left|w_k^{(j)}\right|^2 ,$$

das heißt

$$\mu_j \le \frac{4}{(\Delta x)^2} , \quad j = 1, \ldots, M . \tag{2}$$

Daher ist

$$1 - \frac{1}{12q}\mu_j\Delta t = 1 - \frac{\mu_j}{12}(\Delta x)^2 \ge \frac{2}{3} \tag{3}$$

und somit

$$\mu_j^A \ge \frac{2}{3} , \quad j = 1, \ldots, M .$$

Die Matrix $A$ ist folglich invertierbar, positiv definit und $A^{-1}$ genügt in der Spektralnorm der Abschätzung

$$\|A^{-1}\| = \max_{j=1,\ldots,M} \frac{1}{\mu_j^A} \le \frac{3}{2} .$$

2. Hiermit ist auch die Matrix $C = A^{-1}B$ wohl-definiert. Die Matrizen $A, B$ sind wieder vertauschbar. Daher ist $C$ eine symmetrische Matrix und hat die Eigenwerte

$$\lambda_j = \frac{\mu_j^B}{\mu_j^A} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right)\mu_j\Delta t}{1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right)\mu_j\Delta t} .$$

Die Eigenwerte $\mu_j$ sind positiv, ebenso der Nenner für $q \ge \frac{1}{6}$, und es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{1}{12q}\mu_j\Delta t\right) - \frac{1}{2}\mu_j\Delta t &\le 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12q}\right)\mu_j\Delta t \le \\ &\le 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12q}\right)\mu_j\Delta t , \end{aligned}$$

so daß alle Eigenwerte $\lambda_j$ von $C$ dem Betrage nach kleiner oder gleich 1 sind. Folglich ist auch

$$\|C\| = \text{spr } C = \max_{j=1,\ldots,M} |\lambda_j| \leq 1 .$$

3. Das Verfahren von Douglas ist daher für alle Schrittweitenverhältnisse $q \geq \frac{1}{6}$ stabil. Aus der expliziten Darstellung der Lösung von (1) ergibt sich in der euklidischen Norm die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u^n\|_2 &\leq \max_{k=0,\ldots,n} \|C^k\| \left( \|a\|_2 + \|A^{-1}\| \sum_{k=1}^{n} \|c^k\|_2 \right) \\ &\leq \|a\|_2 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \|c^k\|_2 , \quad n = 1, \ldots, N . \end{aligned}$$

Es ist $a = g_h$ und

$$c_j^n = \frac{\Delta t}{24} \left( f_{j-1}^n + 10 f_j^n + f_{j+1}^n \right) + \frac{\Delta t}{24} \left( f_{j-1}^{n-1} + 10 f_j^{n-1} + f_{j+1}^{n-1} \right) .$$

Setzt man anstelle von $u^n$ den Fehler $(u_h - u)(., t_n)$ ein, so erhält man auf der rechten Seite anstelle von $c^n$

$$(f_h - f)(., t_n) + T_h(., t_n) = \mathrm{O}( (\Delta t)^2 + (\Delta x)^4) .$$

Die gleichmäßige Konvergenz sieht man aus der Darstellung 4.4.(9) des Abschneidefehlers in Verbindung mit dem hier vorliegenden $f_h$ und Taylor–Entwicklung. Benutzt man wieder 4.4.(9) , dann folgt auf die gleiche Weise wie im vorangegangenen Abschnitt der

**Satz 1 (Konvergenzsatz)** *Die Lösungen $u_h$ der Differenzenapproximation von Douglas konvergieren für jedes Schrittweitenverhältnis $q \geq \frac{1}{6}$ gegen die Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe der Differentialgleichung gemäß*

$$\left( h \sum_{j=1}^{M} |(u_h - u)(x_j, t_n)|^2 \right)^{1/2} = \mathrm{O}( (\Delta t)^2 + (\Delta x)^4) \longrightarrow 0 , \quad n = 0, \ldots, N ,$$

*für $\Delta t, k = \Delta x \to 0$, vorausgesetzt, daß die Daten der Konvergenzbedingung*

$$\begin{aligned} \left( h \sum_{j=1}^{M} |(g_h - g)(x_j)|^2 \right)^{1/2} &+ \Delta t \sum_{k=0}^{n} \left( h \sum_{j=0}^{M+1} |(f_h - f)(x_j, t_k)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \mathrm{O}( (\Delta t)^2 + (\Delta x^4) ) \longrightarrow 0 , \quad n = 0, \ldots, N , \end{aligned}$$

*für $\Delta t, h = \Delta x \to 0$ genügen.*

Hieraus ergibt sich wieder die Konvergenz in der diskreten Maximumnorm mit der Konvergenzordnung $\mathrm{O}((\Delta t)^{7/4} + (\Delta x)^{3/2})$.

## 5.5 Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten

1. In diesem Abschnitt wollen wir kurz zeigen, daß sich die in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten Methoden auch auf Differenzenapproximationen parabolischer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten anwenden lassen. Wichtiges Hilfsmittel dazu sind die in Kapitel 3 eingeführten Hilbertraummethoden zur Approximation elliptischer Differentialgleichungen.

Wir betrachten parabolische Anfangs-Randwertaufgaben

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= f \qquad \text{in } G \times (0,T)\,, \qquad G \subset \mathbb{R}^\nu\,, \\ u(x,t) &= 0\,, \qquad x \in \partial G\,,\ t \in (0,T)\,, \\ u(x,0) &= g(x)\,, \quad x \in G\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sei $L$ ein elliptischer Differentialoperator in der sogenannten formal selbstadjungierten Form

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu\,.$$

Wir nehmen an, daß die Koeffizienten $a_{jk}, c$ Funktionen von $x \in G$, aber unabhängig von der Zeit $t$ sind. Weiter sei $L_h$ eine zugehörige Differenzenapproximation der Gestalt

$$L_h v = -\sum_{j,k=1}^{\nu} D_{-j}\left(a_{jk}^h D_k v\right) + c_h v\,, \quad v \in H(G_h)\,.$$

Dieser Differenzenoperator ist bezüglich des Skalarprodukts

$$(v,w)_0 = h^\nu \sum_{x \in \mathbb{R}_h^\nu} (vw)(x)\,, \quad v,w \in H(G_h)\,,$$

symmetrisch oder selbstadjungiert. Weiter ist

$$(L_h v, v)_0 = \sum_{j,k=1}^{\nu} \left(a_{jk}^h D_k v, D_j v\right)_0 + (c_h v, v)_0\,, \quad v \in H(G_h)\,.$$

Folglich ist $L_h$ positiv definit, wenn die symmetrischen Koeffizientenmatrizen $(a_{jk}^h)$ mit einer positiven Konstanten $\alpha$ der Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{j,k=1}^{\nu} a_{jk}^h(x)\xi_k\xi_j \geq \alpha \sum_{j=1}^{\nu} \xi_j^2\,, \quad \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_\nu) \in \mathbb{R}^\nu\,,\ x \in G_h\,,$$

genügen und

$$c_h(x) \geq 0\,, \quad x \in G_h\,,$$

ist.

2. Das Crank-Nicolson-Verfahren zur Approximation der obigen Anfangs- Randwertaufgabe hat dann die Form

$$u^0 \;=\; g_h\,,$$

$$\frac{1}{\Delta t}(u^n - u^{n-1}) + \frac{1}{2}\Big(L_h u^n \;+\; L_h u^{n-1}\Big) = \frac{1}{2}(f^n + f^{n-1})\,, \quad n = 1,\ldots,N\,.$$

Also hat dieses Verfahren wieder die allgemeine Form

$$u^0 = a\,, \quad Au^n = Bu^{n-1} + c^n\,, \quad n = 1,\ldots,N\,,$$

mit

$$A = E + \frac{\Delta t}{2}L_h\,, \quad B = E - \frac{\Delta t}{2}L_h\,.$$

Da $L_h$ positiv definit in $H(G_h)$ ist, existiert ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren und zugehörigen positiven Eigenwerten $\mu_1,\ldots,\mu_M$ des Operators $L_h$. Damit haben $A, B$ die gleichen Eigenvektoren und die Eigenwerte

$$\mu_j^A = 1 + \frac{\Delta t}{2}\mu_j\,, \quad \mu_j^B = 1 - \frac{\Delta t}{2}\mu_j\,, \quad j = 1,\ldots,M\,.$$

Folglich ist $\mu_j^A \geq 1$, $A$ invertierbar, $C = A^{-1}B$ existiert und hat die Eigenwerte

$$\lambda_j = \frac{1 - \frac{\Delta t}{2}\mu_j}{1 + \frac{\Delta t}{2}\mu_j}\,, \quad j = 1,\ldots,M\,.$$

Der Operator $C$ ist eine symmetrische Abbildung des Raumes $H(G_h)$ mit dem obigen Skalarprodukt. Wie wir beim Crank–Nicolson–Verfahren für das einfache Modellproblem gezeigt haben, ist dann

$$\|A^{-1}\| \leq 1\,, \quad \text{spr } C \leq 1\,,$$

also das Verfahren auch in diesem allgemeineren Fall stabil. Mit Hilfe der zugehörigen a priori Stabilitätsungleichung und der Konsistenz der Differenzenapproximation mit der Anfangs-Randwertaufgabe erhält man dann auch die Konvergenz des Crank–Nicolson–Verfahrens in diesem allgemeinen Fall.

# Kapitel 6

# Approximation der Wellengleichung

## 6.1 Die homogene Wellengleichung

1. Wir wollen als erstes die homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad -\infty < x < \infty\,, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = g^0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g^1(x)\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \tag{2}$$

betrachten. In diesem Falle kann man sehr einfach spezielle Lösungen dieser Aufgabe angeben. Für jede zweimal differenzierbare Funktion $\varphi$ sind offenbar

$$u_1(x,t) = \varphi(x+t)\,, \quad u_2(x,t) = \varphi(x-t)\,,$$

Lösungen der Wellengleichung, da

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \varphi''(x \pm t)\,, \quad i = 1,2\,,$$

ist. Diese Lösungen haben die Eigenschaft, daß $u_1$ auf den Geraden $x + t =$ konst., bzw. $u_2$ auf $x - t =$ konst., konstant sind. Die beiden Geradenscharen heißen die *Charakteristiken* der Wellengleichung. Für $t = 0$ ist in diesen Fällen

$$u_1(x,0) = \varphi(x) \quad u_2(x,0) = \varphi(x)\,.$$

Die Anfangsverteilung $\varphi$ pflanzt sich also längs der Charakteristiken unverändert fort.

2. Die Lösung der homogenene Wellengleichung (1) mit den Anfangsbedingungen (2) läßt sich leicht angeben. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) ist bekanntlich

$$u(x,t) = P(x+t) + Q(x-t)$$

für beliebige zweimal differenzierbare Funktionen $P, Q$. Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= g^0(x)\,, \\ P'(x) - Q'(x) &= g^1(x)\,. \end{aligned}$$

Integration der zweiten Beziehung liefert

$$P(x) - Q(x) = 2K + \int_0^x g^1(s)\,ds$$

mit $K = (P(0) - Q(0))/2$. Addition bzw. Subtraktion führt zu

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2}g^0(x) + \frac{1}{2}\int_0^x g^1(s)\,ds + K\ , \\ Q(x) &= \frac{1}{2}g^0(x) - \frac{1}{2}\int_0^x g^1(s)\,ds - K\ . \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man für die Lösung (*Formel von d'Alembert*)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g^0(x+t) + g^0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^1(s)\,ds \tag{3}$$

für beliebiges $2\times$ differenzierbares $g^0$ und $1\times$ differenzierbares $g^1$.

Diese Funktion ist aus Funktionen einer Veränderlichen in $x - t$, $x + t$ zusammengesetzt, also Lösung der Wellengleichung, wie wir oben gezeigt haben.

Typisch für das Lösungsverhalten der homogenen Wellengleichung ist, daß $u$ im Punkt $(x,t)$ nur von den Werten der Anfangsbedingung $g^0$ in den Punkten $x - t$, $x + t$ und von $g^1$ im Intervall $[x-t,\, x+t]$ auf der $x$–Achse abhängt. Dies ist das sogenannte *Einflußgebiet*, welches durch die beiden Charakteristiken, die durch den Punkt $(x,t)$ gehen, aus der $x$–Achse ausgeschnitten wird (vgl. Fig. 6.1). Hierdurch wird deutlich, daß sich Wirkungen in den Anfangsbedingungen nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten können, im Unterschied zum Verhalten etwa der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

3. Weiter betrachten wir jetzt die Wellengleichung in einem endlichen Ortsintervall $G = (0,1)$, also z. B. das Problem der freien Schwingungen einer endlichen, an den Enden fest eingespannten Saite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in } (0,1)\times(0,T) \tag{4}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = g^0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g^1(x)\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

und den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad t \in (0,T)\,.$$

Durch einen Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ ergibt sich

$$\frac{w''}{w}(t) = \frac{v''}{v}(x) = -\lambda$$

oder

$$v'' + \lambda v = 0 \quad \text{in } (0,1)\,, \quad v(0) = v(1) = 0 \tag{5}$$

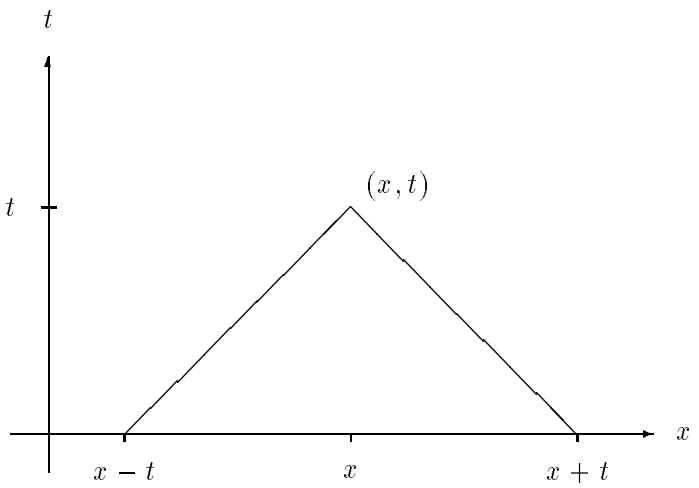



Fig. 6.1: Einflußgebiet der Wellengleichung.

und

$$w'' + \lambda w = 0 \text{ in } (0,T)\,. \tag{6}$$

Das heißt, $v$ ist Eigenlösung, $\lambda$ zugehöriger Eigenwert der Zwei-Punkt-Randwertaufgabe (5) und daher

$$\lambda_k = k^2\pi^2\,, \quad v_k(x) = \sin k\pi x\,, \quad k = 1,2,\ldots\,.$$

Für die zugehörigen Lösungen $w_k$ von (6) folgt dann

$$w_k(t) = \alpha_k \cos k\pi t + \beta_k \sin k\pi t\,.$$

Eine allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung ergibt sich durch Superposition in der Form

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\pi t + \beta_k \sin k\pi t) \sin k\pi x\,.$$

4. Die Konstanten $\alpha_k$, $\beta_k$ müssen noch so gewählt werden, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Dies ergibt die Forderungen

$$\begin{aligned} g^0(x) = u(x,0) &= \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \sin l\pi x\,, \qquad 0 < x < 1\,, \\ g^1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{l=1}^{\infty} l\pi\beta_l \sin l\pi x\,, \qquad 0 < x < 1\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Funktionen $\sin k\pi x$ bilden bekanntlich ein Orthogonalsystem im Raum $L^2(0,1)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v) = \int_0^1 (uv)(x)\,dx\,.$$

Multipliziert man die beiden obigen Gleichungen (7) mit $\sin k\pi x$, integriert man über $(0,1)$ und beachtet

$$\int_0^1 (\sin k\pi x)^2 dx = \frac{1}{2},$$

so ergeben sich für die Koeffizienten $\alpha_k$, $\beta_k$ die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^0(x)\sin k\pi x\, dx &= \frac{1}{2}\alpha_k\,,\\ \int_0^1 g^1(x)\sin k\pi x\, dx &= \frac{1}{2}k\pi\beta_k\,.\end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$c_k(g) = 2\int_0^1 g(x)\sin k\pi x\, dx$$

und bekommen so die Lösung von (4) in der Gestalt

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k(g^0)\cos k\pi t + \frac{1}{k\pi}c_k(g^1)\sin k\pi t\right)\sin k\pi x\,.$$

Aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen folgt

$$\begin{aligned}\sin k\pi x\cos k\pi t &= \frac{1}{2}(\sin k\pi(x-t)+\sin k\pi(x+t))\,,\\ \sin k\pi x\sin k\pi t &= \frac{1}{2}(\cos k\pi(x-t)-\cos k\pi(x+t))\,.\end{aligned}$$

Daher hat die Lösung $u$ auch die Darstellung

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}c_k(g^0)\{\sin k\pi(x-t)+\sin k\pi(x+t)\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(g^1)}{k\pi}\{\cos k\pi(x-t)-\cos k\pi(x+t)\}\,.\end{aligned}\tag{8}$$

Die $c_k(g)$ sind gerade so bestimmt, daß

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}c_k(g)\sin k\pi x\,,\quad 0\le x\le 1\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist offenbar für alle $x\in\mathbb{R}$ erklärt, womit die zuerst nur auf $(0,1)$ definierte Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Diese Fortsetzung $\overline{g}$ ist auch durch

$$-\overline{g}(x) = g(-x)\,,\quad -1\le x\le 0\quad -g(-x)$$

und

$$\overline{g}(x+2m) = \overline{g}(x)\,,\quad -1\le x\le 1\,,\ m \text{ ganz}\,,$$

definiert. Also ist die erste Reihe auf der rechten Seite in (8) auch

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2}(\overline{g}^0(x-t) + \overline{g}^0(x+t))\,.$$

Entsprechend wird die zweite Reihe in (8) zu

$$u^1(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \overline{g}^1(s)ds\,,$$

wobei $\overline{g}^0$, $\overline{g}^1$ wie oben definiert auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt zu denken sind. Auf diese Weise hat also auch in diesem Falle die Lösung wieder die d'Alembertsche Form. Insbesondere ist die Lösung aus Funktionen von $x-t$, $x+t$ zusammengesetzt, was wir im nächsten Abschnitt verwenden werden.

## 6.2 Differenzenapproximation der inhomogenen Wellengleichung

1. Im folgenden wird ein achsenparalleles Gitter der Schrittweiten $\Delta x$, $\Delta t$ in Orts- und Zeitrichtung verwendet. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nach der Orts- und Zeitvariablen werden durch die zentralen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\delta_x^2 v(x,t) &= \frac{1}{(\Delta x)^2}(v(x+\Delta x,t) - 2v(x,t) + v(x-\Delta x,t))\\ \delta_t^2 v(x,t) &= \frac{1}{(\Delta t)^2}(v(x,t+\Delta t) - 2v(x,t) + v(x,t-\Delta t))\end{aligned}$$

approximiert. Für die *inhomogene Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

ergibt sich damit die Differenzenapproximation

$$\begin{aligned}&u_h(x,t+\Delta t) - 2u_h(x,t) + u_h(x,t-\Delta t)\\ &\quad - q^2(u_h(x+\Delta x,t) - 2u_h(x,t) + u_h(x-\Delta x,t)) = (\Delta t)^2 f_h(x,t)\end{aligned}$$

für $q = \Delta t/\Delta x$. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$u_j^n = u_h(x_j,t_n)\,,\quad f_j^n = f_h(x_j,t_n)\,,\quad g_j^0 = g^0(x_j)\,,\quad g_j^1 = g^1(x_j)\,,$$

können die Differenzengleichungen in der Form

$$u_j^{n+1} - 2(1-q^2)u_j^n - q^2(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + u_j^{n-1} = (\Delta t)^2 f_j^n$$

geschrieben werden. Für $q = 1$ nehmen diese Gleichungen die besonders einfache Gestalt

$$u_j^{n+1} - u_{j-1}^n - u_{j+1}^n + u_j^{n-1} = (\Delta t)^2 f_j^n$$

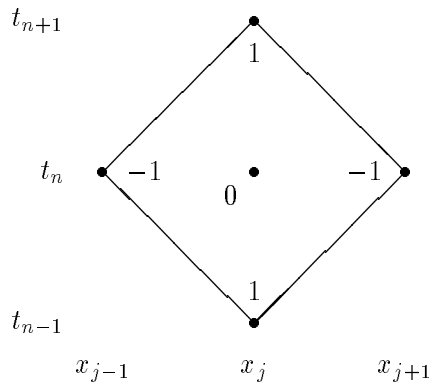



Fig. 6.2: Differenzenstern für $q = 1$.

an. Der zugehörige Differenzenstern für $q = 1$ ist in Figur 6.2 dargestellt. Im Falle $G = (-\infty, \infty)$ durchläuft der Index $j$ alle ganzen Zahlen. Für $G = (0,1)$ gilt die Differenzenapproximation für $j = 1, ..., M$, wobei $h = 1/(M+1)$ ist und die homogenen Randbedingungen

$$u_0^n = u_{M+1}^n = 0\,, \quad n = 1, \ldots, N\,,$$

gefordert werden.

2. Die erste Anfangsbedingung wird einfach durch

$$u_h(x,0) = g_h^0(x)\,, \quad x \in G_h\,,$$

oder

$$u_j^0 = g_j^0$$

approximiert. Für die zweite Anfangsbedingung gibt es Approximationen von unterschiedlichem Genauigkeitsgrad. Die einfachste Approximation lautet

$$\frac{1}{\Delta t}(u_h(x,\Delta t) - u_h(x,0)) = g_h^1(x)\,, \quad x \in G_h\,,$$

oder

$$u_j^1 = g_j^0 + \Delta t g_j^1\,.$$

Mit Hilfe der Taylor-Formel ist

$$u(x,\Delta t) = u(x,0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) + \mathrm{O}(\,(\Delta t)^3)\,.$$

Für eine Lösung der Wellengleichung wird $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$. Hiermit gewinnt man die Approximation

$$\begin{aligned} u(x,\Delta t) \;&=\; g^0(x) + \Delta t g^1(x) + \frac{1}{2}q^2(g^0(x+\Delta x) - 2g^0(x) + g^0(x-\Delta x)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 f(x,0) + \mathrm{O}((\Delta t)^3 + \Delta t^2 \Delta x^2) \end{aligned}$$

der Lösung $u$ an den Stellen $(x,\,\Delta t)$ für $x \in G_h$ mit der Genauigkeit $\mathrm{O}((\Delta t)^3 + \Delta t^2 \Delta x^2)$. Für $h = \Delta t = \Delta x$ heißt das,

$$\begin{aligned} u_j^1 &= g_j^0 + h g_j^1 + \frac{1}{2}(g_{j+1}^0 - 2g_j^0 + g_{j-1}^0) + \frac{h^2}{2} f_j^0 \\ &= \frac{1}{2}(g_{j-1}^0 + g_{j+1}^0) + h g_j^1 + \frac{h^2}{2} f_j^0 \,. \end{aligned}$$

3. Im vorangegangenen Paragraphen haben wir festgestellt, daß die Lösungen der Anfangs- und der Anfangs-Randwertaufgabe der homogenen Wellengleichung sich aus Funktionen von $x - t$ und $x + t$ zusammensetzen. Ist $v(x,t) = \varphi(x - t)$, so wird im Falle $h = \Delta t = \Delta x$ offenbar

$$v(x, t+h) = v(x-h, t)\,, \quad v(x, t-h) = v(x+h, t)\,,$$

also $v$ Lösung der homogenen Differenzengleichung für $q = 1$. Für $v(x,t) = \varphi(x + t)$ wird entsprechend

$$v(x, t+h) = v(x+h, t)\,, \quad v(x, t-h) = v(x-h, t)\,,$$

also auch diese Funktion Lösung der homogenen Differenzenapproximation der Wellengleichung im Falle $q = 1$. Das heißt, die exakte Lösung der homogenen Wellengleichung ist auch exakte Lösung der obigen homogenen Differenzengleichung für $q = 1$ oder $\Delta t = \Delta x$. Der zugehörige Abschneidefehler verschwindet also in diesem Falle,

$$q = 1 \Longrightarrow \quad T_h(x,t) = 0\,, \quad x \in G_h\,,\, t = t_n\,,\, n = 1, 2, \ldots\,.$$

4. Um die Stabilität der Differenzenapproximation der Anfangs-Randwertaufgabe im Gebiet $(0,1) \times (0,T)$ gegenüber kleinen Störungen der Anfangswerte zu zeigen, betrachten wir die homogene diskrete Wellengleichung

$$\delta_t^2 u_h = \delta_x^2 u_h$$

mit den Randbedingungen $u_h(0, t_n) = u_h(1, t_n) = 0$ und den Anfangsbedingungen

$$u_h(x, 0) = 0\,, \quad u_h(x, \Delta t) = \varepsilon \sin l\pi x\,, \quad x \in G_h\,.$$

Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich durch Separation der Veränderlichen bestimmen. Es ist

$$u_h(x,t) = v_h(x) w_h(t)$$

mit

$$v_h(x) = \varepsilon \sin l\pi x\,, \quad -\delta_x^2 v_h(x) = \lambda_h v_h(x)\,, \quad x \in G_h\,,$$

und

$$\lambda_h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{l\pi h}{2}\,, \quad l = 1, \ldots, M\,.$$

Der zeitabhängige Anteil genügt den Differenzengleichungen

$$\delta_t^2 w_h(t) = -\lambda_h w_h(t)\,, \quad t = t_n\,,\, n = 1, 2, \ldots,\,.$$

mit den Anfangsbedingungen

$$w_h(0) = 0\,, \quad w_h(\Delta t) = 1\,.$$

5. In anderen Bezeichnungen lautet diese Aufgabe:

$$w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} = -(\Delta t)^2 \lambda_h w^n$$
$$w^0 = 0\,, \quad w^1 = 1\,.$$

Das charakteristische Polynom dieser dreigliedrigen homogenen Rekursion lautet

$$\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0$$

mit

$$p = 1 - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \lambda_h = 1 - 2q^2 \sin^2 \frac{l\pi h}{2}\,.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind

$$\mu_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1}\,.$$

Wenn $q \leq 1$ d. h. $\Delta t \leq \Delta x$ ist, wird $|p| \leq 1$ also

$$\mu_{1,2} = p \pm i\sqrt{1 - p^2} \quad |\mu_{1,2}| = 1\,,$$

und die Lösung hat die Darstellung

$$w^n = \frac{1}{2i\sqrt{1-p^2}}(\mu_1^n - \mu_2^n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

6. Die Lösung läßt sich daher wie folgt abschätzen,

$$|w^n| = \frac{1}{2\sqrt{1-p^2}}\,|\mu_1^n - \mu_2^n| \leq \frac{1}{2\sqrt{1-p^2}}\,(|\mu_1|^n + |\mu_2|^n) \leq \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\,.$$

Für $q < 1$ bleibt $\sqrt{1-p^2}$ von Null weg (nach unten) beschränkt und die Lösung $w^n$ gleichmäßig beschränkt (in $n$). Für $q = 1, l = 1$ und hinreichend kleines $h$ ist $\sin y \leq h$, $0 \leq y \leq h$, so daß sich der Nenner in der am weitesten rechts stehenden Abschätzung wie $\mathrm{O}(h)$ verhält; in diesem Fall läßt sich die gleichmäßige Beschränktheit der $w^n$ so nicht zeigen. Interessanterweise ist dieses Verfahren in der Tat nicht stabil – wie in Abschnitt 8.3 gezeigt wird – aber es konvergiert, falls die Lösung der Wellengleichung hinreichend oft differenzierbar ist (vgl. Abschnitt 6.3).

Für $q > 1$ und $l = M$ ist

$$\sin \frac{l\pi h}{2} = \cos \frac{\pi}{2} h\,, \quad p = 1 - 2q^2 \cos^2 \frac{\pi h}{2} < -1$$

für hinreichend kleines $h = \Delta x$. Die Lösungen $w^n$ der obigen Anfangswertaufgabe wachsen dann dem Betrage nach mit $n$ gegen unendlich. Für Schrittweitenverhältnisse $q = \Delta t/\Delta x > 1$ liegt also ein instabiles Verhalten der Differenzenapproximation der Wellengleichung vor.

Diese Störungen sind auch im Falle anwendbar, daß $G = (-\infty, \infty)$ ist, also die Wellengleichung in der ganzen oberen Halbebene der $(x,t)$–Ebene betrachtet wird. Auch in diesem Fall ist dann die Differenzenapproximation der Wellengleichung instabil für $\Delta t > \Delta x$ gegenüber Störungen der Anfangswerte durch $\varepsilon \sin l\pi x$.

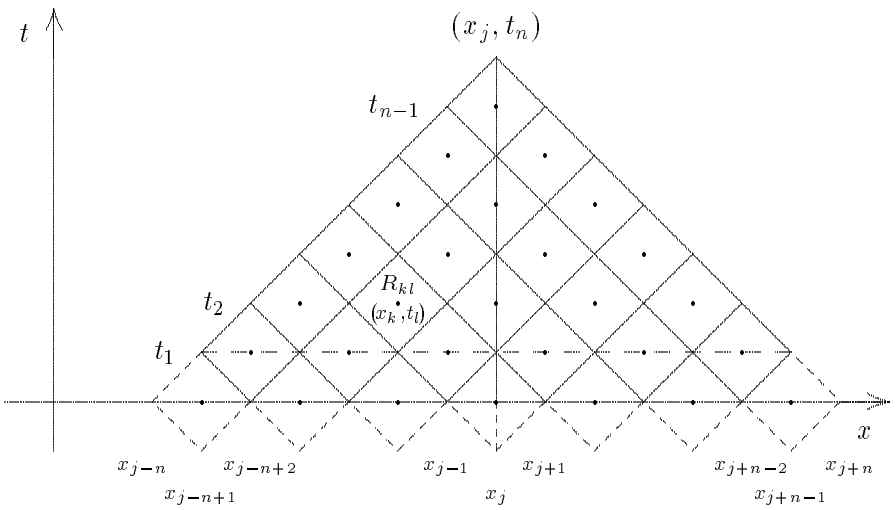



Fig. 6.3: Einflußgebiet des Punktes $(x_j, t_n)$, ausgefüllt mit quadratischen Rhomben.

## 6.3 Konvergenz der Approximation

1. Wir wollen jetzt die Konvergenz der Differenzenapproximation der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{in} \qquad -\infty < x < \infty\,,\, t > 0\,, \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = g^0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g^1(x)\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \tag{2}$$

zeigen. Für ein quadratisches Gitter mit der Maschenweite $h = \Delta x = \Delta t$ hat die Differenzenapproximation dieser Aufgabe die Form

$$u_j^{n+1} - u_{j-1}^n - u_{j+1}^n + u_j^{n-1} = h^2 f_j^n\,, \quad j \text{ ganz}, n = 1, 2, \ldots\,. \tag{3}$$

Zu jedem Punkt $(x_j,\, t_n)$ der oberen Halbebene betrachten wir das in der Figur 6.3 angegebene kegelförmige Einflußgebiet $K_{jn}$ und die quadratischen Rhomben $R_{kl}$.

Zu jedem Rhombenmittelpunkt $(x_k,\, t_l)$ gilt die Differenzenapproximation (3) der Wellengleichung. Diese Gleichungen werden jetzt über diejenigen Indexpaare $(k, l)$ summiert, für die die zugehörigen Rhomben $R_{kl}$ ganz im Einflußkegel $K_{jn}$ enthalten sind. An allen Gitterpunkten, an denen vier Rhombeneckpunkte zusammentreffen, treten die Funktionswerte $u_l^k$ mit dem Gesamtgewicht $1 - 1 + 1 - 1 = 0$ auf, heben sich in der Summe also gegenseitig weg. An Gitterpunkten $(x_k,\, t_l)$ auf dem Kegelrand, an denen je zwei Rhombeneckpunkte zusammenstoßen, ist das Gesamtgewicht $1 - 1 = 0$, so daß sich auch dort die Funktionswerte $u_k^l$ gegenseitig wegheben. Die Funktionswerte $u_k^0$ auf der $x$–Achse erhalten das

Gewicht $+1$, die Funktionswerte $u_k^1$ für $k = j-n+1, j+n-1$ das Gewicht $-1$ und für $k = j-n+3, \ldots, j+n-3$ durch Überlagerung von drei Rhomben das Gesamtgewicht $-1+1-1 = -1$. Die Summation der Differenzengleichungen (3) über alle eben beschriebenen Gitterpunkte des Einflußgebiets $K_{jn}$ liefert folglich das Ergebnis

$$u_j^n + \sum_{k=1}^{n-1} u_{j-n+2k}^0 - \sum_{k=1}^{n} u_{j-n+2k-1}^1 = h^2 \sum_{k,l:R_{kl}\subset K_{jn}} f_k^l \,. \tag{4}$$

2. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir mit Hilfe der Anfangsbedingungen (2) die Approximationen

$$u_j^0 = g_j^0 \,, \quad u_j^1 = \frac{1}{2}\left(g_{j-1}^0 + g_{j+1}^0\right) + h g_j^1 + \frac{h^2}{2} f_j^0 \tag{5}$$

für $u_j^0$, $u_j^1$ hergeleitet. Setzt man diese in (4) ein, so ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} u_j^n \;=\; & \tfrac{1}{2}(g_{j-n}^0 + g_{j+n}^0) + h \sum_{k=1}^{n} g_{j-n+2k-1}^1 + \\ & \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n} f_{j-n+2k-1}^0 + h^2 \sum_{R_{kl}\subset K_{jn}} f_k^l \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Dies ist offensichtlich das diskrete Analogon der expliziten Darstellung der Lösung der inhomogenen Wellengleichung, die die Form hat

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g^0(x-t) + g^0(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^1(x)\,ds + \frac{1}{2}\iint_{K_{x,t}} f(\xi,\tau) d\xi d\tau \,.$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (6) ist nichts anderes als

$$\frac{1}{2}(g^0(x-t) + g^0(x+t)) \,, \quad x = x_j \,,\, t = t_n \,.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist die summierte Tangententrapezapproximation des Integrals

$$\frac{1}{2}\int_{x_{j-n}}^{x_{j+n}} g^1(s)\,ds \,.$$

Wie wir wissen, hat diese Näherung den Fehler $\mathrm{O}(h^2)$. Der dritte und vierte Term entsteht durch eine entsprechende zweidimensionale summierte Quadraturformel für das Integral

$$\iint_{K_{x,t}} f(\xi,\tau) d\xi d\tau = \sum_{k,l} \iint_{R_{kl}\cap K_{x,t}} f(\xi,\tau) d\xi d\tau \,.$$

Das Restglied dieser Quadraturformel hat ebenfalls den Fehler $\mathrm{O}(h^2)$. Damit haben wir das folgende Ergebnis gewonnen.

**Satz 1** *Die Lösungen der Differenzenapproximation (3) mit den Anfangsbedingungen (5) konvergieren gegen die Lösung der Anfangswertaufgabe der inhomogenen Wellengleichung. Dabei gilt*

$$u_h(x,t) = u(x,t) + \mathrm{O}(h^2)$$

*für alle $x = x_j$, $t = t_n$, $j$ ganz, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

# Kapitel 7

# Hyperbolische Differentialgleichungen erster Ordnung

## 7.1 Einfachste Approximation des Modellproblems

1. Das Anfangswertproblem (oder Cauchy–Problem) für die Wellengleichung ($n = 1$) lautet:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \quad (c > 0) \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(x,0) &= g^0(x)\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \\ u_t(x,0) &= g^1(x)\,, \quad -\infty < x < \infty\,. \end{cases} \tag{2}$$

Im folgenden schreiben wir das Cauchy–Problem in ein System 1. Ordnung um. Das Cauchy Problem ist äquivalent zu folgendem Anfangswertproblem für ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{cases} u_t - c v_x = 0, \\ v_t - c u_x = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ v(x,0) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^x g(s)\,ds + C, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, \tag{4}$$

wobei $C$ eine beliebige Konstante bezeichnet. Mit $\underline{u} = (u, v)$ und der Matrix $A = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ läßt sich (3) als

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{u} = A \frac{\partial}{\partial x}\underline{u}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{5}$$

schreiben. Durch Addition und Subtraktion der zwei Gleichungen in (3) erhält man noch das folgende äquivalente Gleichungssystem für $\underline{w} = (w_1, w_2)$, $w_1 = u + v$, $w_2 = u - v$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{w} = D \frac{\partial}{\partial x}\underline{w}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \tag{6}$$

wobei $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Man bezeichnet das System (6) auch als *charakteristische Form der Wellengleichung* und $u \pm v$ als *charakteristische Variablen*. Beim Übergang von (5) nach

(6) hat man nichts anderes gemacht, als die Matrix $A$ mit Hilfe einer orthogonalen Matrix (bestehend aus den Eigenvektoren von $A$) diagonalisiert. Es ist hier nämlich $D = PAP^{-1}$ mit

$$P^{-1} = P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das System (5) oder (6) ist der Ausgangspunkt zur Herleitung von zahlreichen Differenzenapproximationen.

2. Als Modellproblem für die Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten wir die Anfangswertaufgabe für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f \quad \text{in } -\infty < x < \infty\,,\ t > 0\,, \tag{7}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{in } -\infty < x < \infty\,. \tag{8}$$

Hier ist $c \neq 0$ eine Konstante, die bei physikalischen Anwendungen die Dimension einer Geschwindigkeit hat.

Wie man sofort sieht, bekommt man Lösungen der homogenen Differentialgleichung (7) in der Form

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) \tag{9}$$

für beliebige zweimal differenzierbare Funktionen $\varphi$ einer reellen Veränderlichen. Die Anfangsbedingung (8) wird dann durch die Wahl $\varphi = g$ erfüllt. Die Lösungen $u$ der homogenen Gleichungen sind also konstant auf den Charakteristiken $x - ct =$ konst. Auch die Lösungen der Anfangswertaufgabe für die inhomogene Gleichung lassen sich einfach angeben in der Form

$$u(x,t) = g(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t-s),\, s)\, ds\,. \tag{10}$$

Wenn $g$ differenzierbar und $f$ partiell nach $x$ differenzierbar ist, wird nämlich (vgl. [Heu93, Abschnitt 81. und 128.])

$$\begin{aligned} c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= cg'(x-ct) + c\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x - c(t-s), s)\, ds\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -cg'(x-ct) - c\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x - c(t-s), s)\, ds + f(x,t)\,, \end{aligned}$$

so daß (7) erfüllt ist. Diese Lösung $u$ genügt offenbar der Anfangsbedingung (8). Die Lösung $u$ an der Stelle $(x,t)$ hängt nur vom Wert der Anfangsbedingung im Punkt $x - ct$ und von den Werten von $f$ auf der Charakteristik $x - ct =$ konst. zwischen den Punkten $(x - ct, 0)$ und $(x,t)$ ab. (s. Figur 7.1)

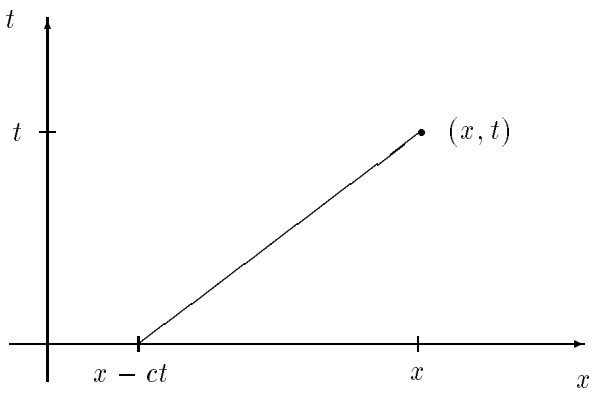



Fig. 7.1: Eine Charakteristik von $u$.

3. Für die Differenzenapproximation der obigen Aufgabe wird die $(x,t)$–Ebene wie üblich durch ein achsenparalleles Gitter mit den Schrittweiten $\Delta x$, $\Delta t$ und den Gitterpunkten $(x_j, t_n)$,

$$x_j = j\Delta x\,, \quad t_n = n\Delta t\,, \quad j \text{ ganz }, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

approximiert. Die partiellen Ableitungen nach der Zeit werden durch den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten

$$D_t u_h(x,t) = \frac{1}{\Delta t}(u_h(x, t+\Delta t) - u_h(x,t))$$

und die partiellen Ableitungen nach $x$ durch den vorwärts- oder den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} D_x u_h(x,t) &= \frac{1}{\Delta x}(u_h(x+\Delta x, t) - u_h(x,t))\,, \\ \overline{D}_x u_h(x,t) &= \frac{1}{\Delta x}(u_h(x,t) - u_h(x-\Delta x, t))\,, \end{aligned}$$

approximiert. Damit ergeben sich die beiden folgenden einfachsten Differenzenapproximationen der obigen Aufgabe (7), (8):

$$D_t u_h + c D_x u_h = f_h\,, \tag{11i}$$

$$D_t u_h + c \overline{D}_x u_h = f_h\,, \tag{11ii}$$

in $G_h \times (0,\infty)_{\Delta t}$, mit der Anfangsbedingung

$$u_h(x,0) = g_h(x)\,, \quad x \in G_h\,.$$

Die beiden Gleichungen lassen sich auch in der Form

$$u_j^{n+1} = (1+qc)u_j^n - qcu_{j+1}^n + \Delta t f_j^n$$

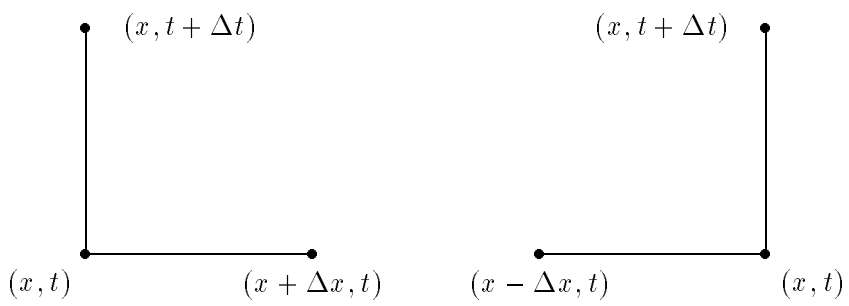



Fig. 7.2: Differenzensterne für vorwärts– bzw. rückwärtsgenommene Differenzenquotienten.

und

$$u_j^{n+1} = (1 - qc)u_j^n + qcu_{j-1}^n + \Delta t f_j^n$$

für $j$ ganz, $n = 0, 1, 2, \ldots$, mit der Anfangsbedingung

$$u_j^0 = g_j\,, \quad j \text{ ganz},$$

schreiben. Die Konstante $q$ bezeichnet wieder das Schrittweitenverhältnis

$$q = \frac{\Delta t}{\Delta x}\,.$$

Offensichtlich handelt es sich hier um explizite Differenzenapproximationen, die die Lösung $u_j^n$ eindeutig bestimmen. Der jeweilige Differenzenstern dieser beiden Approximationen ist in Figur 7.2 dargestellt. Die obigen Approximationen haben den Abschneidefehler

$$T_h(x,t) = (f - L_h u)(x,t) = \mathrm{O}(\Delta x + \Delta t)$$

für $(x,t)$ aus dem Gitter und $\Delta x,\, \Delta t \to 0$.

4. Die Stabilität der Differenzenapproximationen gegenüber Störungen der Anfangsbedingung wird mit Hilfe der speziellen Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \cos \mu x \text{ und } u(x,0) = \sin \mu x$$

für beliebige reelle $\mu$ getestet. Es ist zweckmäßig, im folgenden mit komplexwertigen Funktionen zu arbeiten. Man kann dann diese beiden Anfangsbedingungen durch die eine Bedingung

$$u(x,0) = e^{i\mu x}\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \tag{12}$$

ersetzen und durch Bildung des Real- und Imaginärteils von $u$ die beiden obigen Fälle wiedergewinnen. Die homogene Differentialgleichung hat bei dieser Anfangsbedingung die Lösung

$$u(x,t) = e^{i\mu x}\, e^{-\mu c t}\,.$$

Für reelle Parameter $\mu$ ist dann

$$|u(x,0)| = |u(x,t)| = 1\,, \quad -\infty < x < \infty\,,$$

für alle $t$. Die Lösungen der Anfangswertaufgabe bleiben also beschränkt für alle Zeiten $t$.

5. Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Lösungen der zugehörigen Differenzenapproximationen (11i), (11ii) der homogenen Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen (12). Die Lösung $u_h$ der Differenzengleichung läßt sich durch einen Separationsansatz

$$u_h(x,t) = v_h(x)w_h(t)$$

bestimmen. Setzt man dies in die homogenen Differenzengleichungen (11i) bzw. (11ii) ein, so ergibt sich

$$\frac{D_t w_h}{c\, w_h}(t) = -\frac{D_x v_h}{v_h} = \lambda$$

bzw.

$$\frac{D_t w_h}{c\, w_h}(t) = -\frac{\overline{D}_x v_h}{v_h} = \lambda\,.$$

Das heißt,

$$\frac{1}{c\Delta t}(w_h(t+\Delta t) - w_h(t)) = \lambda w_h(t)\,, \quad t = t_n\,,\ n = 0,1,2,\ldots\,.$$

und

$$\frac{1}{\Delta x}(v_h(x+\Delta x) - v_h(x)) = -\lambda v_h(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}_h^1\,,$$

bzw.

$$\frac{1}{\Delta x}(v_h(x) - v_h(x-\Delta x)) = -\lambda v_h(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}_h^1\,.$$

Die Anfangsbedingung wird erfüllt, wenn

$$v_h(x) = g_h(x)\,, \quad w_h(0) = 1$$

gesetzt wird. Für den zeitabhängigen Teil ergibt sich damit

$$w^0 = 1\,, \quad w^{n+1} = (1 + \lambda c\Delta t)w^n\,,$$

also die Lösung

$$w_h(t_n) = w^n = (1 + \lambda c\Delta t)^n\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

6. Die erste Gleichung für den ortsabhängigen Anteil läßt sich in der Form

$$v_{j+1} = (1 - \lambda\Delta x)v_j\,, \quad j \text{ ganz},$$

schreiben. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v_j = (1 - \lambda\Delta x)^j v_0\,, \quad j \text{ ganz}.$$

Die Anfangsbedingung verlangt, daß

$$v_h(x_j) = v_j = e^{i\mu x_j} = e^{i\mu j\Delta x}$$

ist. Also muß $v_0 = 1$ und

$$1 - \lambda\Delta x = e^{i\mu\Delta x}$$

oder

$$\lambda = \frac{1 - e^{i\mu\Delta x}}{\Delta x}$$

sein. Die Lösung der diskreten Anfangswertaufgabe für die erste Approximation (11i) lautet somit

$$u_h(x, t_n) = e^{i\mu x}(1 + \lambda c\Delta t)^n .$$

**Satz 1** *Die Differenzenapproximation (11i) mit den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten in Ortsrichtung ist genau dann stabil bezüglich allen Störungen $e^{i\mu x}$ der Anfangsbedingung, wenn gilt*

$$c < 0 , \quad |c|\Delta t \le \Delta x .$$

*Beweis.* Die Lösung ist genau dann beschränkt für alle $t = t_n$, wenn

$$|1 + \lambda c\Delta t| = |1 + cq(1 - e^{i\mu\Delta x})| \le 1$$

ausfällt. Jetzt ist

$$|1 + \lambda c\Delta t|^2 = (1 + cq(1 - \cos\mu\Delta x))^2 + c^2q^2\sin^2\mu\Delta x .$$

Bekanntlich gilt

$$1 - \cos\mu\Delta x = 2\sin^2\alpha , \quad \sin\mu\Delta x = 2\sin\alpha\cos\alpha , \quad \alpha = \frac{1}{2}\mu\Delta x .$$

Daher wird

$$\begin{aligned} |1 + \lambda c\Delta t|^2 &= 1 + 4cq\sin^2\alpha + 4c^2q^2\sin^4\alpha + 4q^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &= 1 + 4qc\,(1 + qc)\sin^2\alpha . \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist genau dann kleiner oder gleich eins für alle $\mu$ bzw. $\alpha$, wenn $cq(1+qc) \le 0$, also

$$-1 \le cq \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \le \frac{c\Delta t}{\Delta x} \le 0$$

ausfällt. Für positive Schrittweiten $\Delta t$, $\Delta x$ ergibt dies das behauptete Stabilitätsresultat. □

7. Offensichtlich erhält man den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten aus dem vorwärtsgenommenen, wenn $\Delta x$ durch $-\Delta x$ ersetzt wird. Dementsprechend ergibt sich in diesem Falle

$$\lambda = \frac{e^{-i\mu\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

und damit die Lösung der homogenen Differenzengleichung in der Form

$$u_h(x, t_n) = e^{i\mu x}(1 + \lambda c\triangle t)^n .$$

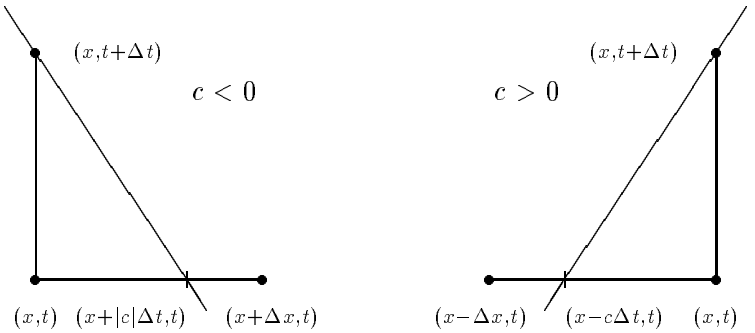



Fig. 7.3: Veranschaulichung der Stabilitätsbedingungen für $c > 0$ und $c < 0$.

**Satz 2** *Die Differenzenapproximation (11ii) mit den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten in Ortsrichtung ist genau dann stabil gegenüber allen Störungen $e^{i\mu x}$ der Anfangsbedingungen, wenn die Bedingung*

$$c > 0\,, \quad c\Delta t \le \Delta x\,,$$

*erfüllt ist.*

*Beweis.* In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} |1+\lambda c\Delta t|^2 &= |1+cq(e^{-i\mu\Delta x}-1)|^2 = \\ &= (1-cq(1-\cos\mu\Delta x))^2 + c^2q^2\sin^2\mu\Delta x \\ &= 1-4qc(1-qc)\sin^2\alpha\,. \end{aligned}$$

Jetzt ist $|1+\lambda c\Delta t| \le 1$ für alle $\mu$ bzw. $\alpha$, wenn $qc(1-qc) \ge 0$, d. h.

$$0 \le cq \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le c\Delta t \le \Delta x\,.$$

□

Die obigen Stabilitätsbedingungen sind in Figur 7.3 veranschaulicht. Im Falle $c > 0$ muß das Schrittweitenverhältnis so gewählt werden, daß die Charakteristik $x - ct =$ konst., die durch den Punkt $(x,\, t+\Delta t)$ hindurchgeht, das Intervall mit den Endpunkten $(x-\Delta x, t)$, $(x,t)$ schneidet. Entsprechend muß die Charakteristik im Falle $c < 0$ die Strecke $(x,t)$, $(x+\Delta x,\, t)$ schneiden.

8. Die größtmögliche Zeitschrittweite im Stabilitätsintervall wird im Fall $c > 0$ durch

$$\Delta t = \frac{1}{c}\Delta x$$

gegeben. In diesem Falle ist $q = 1/c$ und die Differenzenapproximation (11ii) nimmt die einfache Gestalt

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \Delta t f_j^n\,, \quad j \text{ ganz},\ n = 0,1,2,\ldots\,,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_j^0 = g_j\,, \quad j \text{ ganz}\,,$$

an. Die Lösung dieser Aufgabe lautet

$$u_j^n = g_{j-n} + \Delta t \sum_{l=1}^{n} f_{j+1-l}^{n-l}\,. \tag{13}$$

Falls dies nämlich richtig bis $n-1$ ist, erhält man für $n$

$$u_j^n = \underbrace{g_{(j-1)-(n-1)} + \Delta t \sum_{l=1}^{n-1} f_{j-l}^{(n-1)-l}}_{u_{j-1}^{n-1}} + \Delta t f_j^{n-1} = g_{j-n} + \Delta t \sum_{l=1}^{n} f_{j+1-l}^{n-l}\,;$$

für $n = 0$ ist (13) offenbar richtig.

Der erste Term auf der rechten Seite von (13) ist wie bei der Lösung $u$ der Differentialgleichungsaufgabe $g(x-ct)$ mit $x = x_j$, $t = t_n$. Der zweite Term auf der rechten Seite ist eine einfache summierte Quadraturformel für das Integral in der Darstellung (10) der Lösung $u$ der Differentialgleichung, die einen Fehler $\mathrm{O}(\Delta t)$ aufweist. Für die summierte Sehnentrapezformel hat man nämlich

$$\int_0^t f(x-c(t-s),s)\,ds = \Delta t \left( \frac{1}{2} f_{j-n}^0 + \frac{1}{2} f_j^n + \sum_{\nu=1}^{n-1} f_{j-n+\nu}^{\nu} \right) + \mathrm{O}(\Delta t^2)\,;$$

ersetzt man darin $f_{j-n+\nu}^{\nu} = f_{j-n+\nu}^{\nu-1} + \mathrm{O}(\Delta t)$, $\frac{\Delta t}{2} f_j^0 = \mathrm{O}(\Delta t)$,

$$\frac{\Delta t}{2} f_j^n = \Delta t f_j^{n-1} - \frac{1}{2} \Delta t f_j^n = \Delta t f_j^{n-1} + \mathrm{O}(\Delta t)\,,$$

und substituiert $\nu = n - l + 1$, dann folgt wie behauptet

$$\int_0^t f(x-c(t-s),s)\,ds = \Delta t \sum_{l=1}^{n} f_{j-l+1}^{n-l} + \mathrm{O}(\Delta t)\,.$$

Damit ist gezeigt, daß für $c\Delta t = \Delta x$ die Lösung $u_h$ der Differenzenapproximation gegen $u$ konvergiert und

$$u_h(x,t) = u(x,t) + \mathrm{O}(\Delta x)$$

für alle Gitterpunkte $x = x_j$, $t = t_n$, $j$ ganz, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist.

## 7.2 Das Lax-Wendroff- und das Friedrichs-Schema

1. In diesem Abschnitt wollen wir zwei weitere explizite Approximationen der hyperbolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad \text{in} \quad -\infty < x < \infty\,,\ t > 0\,, \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{in} \quad -\infty < x < \infty\,, \tag{2}$$

kennenlernen, die einen höheren Genauigkeitsgrad aufweisen als die im vorangegangenen Abschnitt hergeleitete einfachste Approximation. Mit Hilfe der Taylor-Formel läßt sich die Lösung $u$ der Differentialgleichung in der Form

$$u(x,t_{n+1}) = u(x,t_n) + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t_n) + \mathrm{O}((\Delta t)^3) \tag{3}$$

entwickeln. In dieser Darstellung kann man die zweite partielle Ableitung von $u$ nach der Zeit mit Hilfe der Differentialgleichung eliminieren. Durch Differenzieren von (1) nach $t$ und $x$ entstehen nämlich die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Eliminiert man die gemischte zweite Ableitung, so wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Mit Hilfe der zentralen Differenzenquotienten für $\partial^2 u/\partial x^2$ gilt dann die Darstellung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t_n) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,t_n) + \frac{c^2}{(\Delta x)^2}(u(x-\Delta x,t_n) \\ &\quad - 2u(x,t_n) + (u(x+\Delta x,t_n)) + \mathrm{O}(\Delta x^2)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

2. Aus (3) und (4) gewinnt man die folgende Approximation der ersten partiellen Ableitung nach der Zeit ($q = \Delta t/\Delta x$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_n) &= \frac{1}{\Delta t}(u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)) - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,t_n) \\ &\quad - \frac{c^2 q^2}{2\Delta t}(u(x-\Delta x,t_n) - 2u(x,t_n) + u(x+\Delta x,t_n)) \\ &\quad + \mathrm{O}((\Delta t)^2 + \Delta t(\Delta x)^2)\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Wird jetzt noch die erste partielle Ableitung $\partial u/\partial x$ durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{1}{2\Delta x}(u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \mathrm{O}((\Delta x)^2) \tag{6}$$

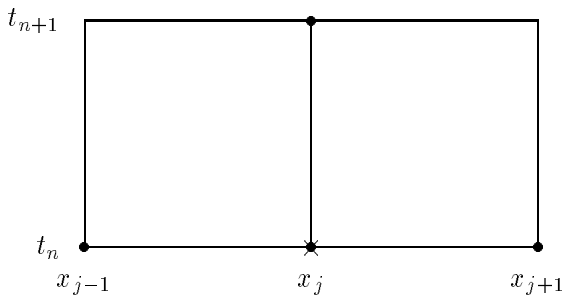



Fig. 7.4: Differenzenstern des Lax-Wendroff-Schemas.

approximiert, so bekommt man durch Approximation der Differentialgleichung (1) mit Hilfe von (5) und (6) das sogenannte *Lax–Wendroff–Schema*

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{c^2q^2}{2\Delta t}\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right) + \frac{c}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = f_j^n + \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n \tag{7}$$

mit dem Abschneidefehler

$$T_h(x,t) = \mathrm{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)\,.$$

Multipliziert man die obige Gleichung mit $\Delta t$ und faßt geeignete Terme zusammen, so ergibt sich

$$u_j^{n+1} - (1 - c^2q^2)u_j^n + \frac{cq}{2}(1 - cq)u_{j+1}^n - \frac{cq}{2}(1 + cq)u_{j-1}^n = \Delta t\left(f_j^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n\right)$$

für $j$ ganz und $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit der Anfangsbedingung

$$u_j^0 = g_j\,, \quad j \text{ ganz}\,.$$

Der Differenzenstern dieses Schemas ist in Figur 7.4 veranschaulicht.

3. Für die Untersuchung der Stabilität dieser Approximation gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen betrachten wir wieder die zugehörigen homogenen Differenzengleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$u_h(x_j, 0) = e^{i\mu x_j}\,, \quad x_j = j\Delta x\,,\ j \text{ ganz}\,,$$

für beliebige reelle Parameter $\mu$. Die Lösung dieser Aufgabe ist wieder durch einen Separationsansatz $u_h(x,t) = v(x)w(t)$ möglich. Die Anfangsbedingung ist erfüllt, wenn

$$v_j = v(x_j) = e^{i\mu x_j}\,, \quad w_0 = w(0) = 1\,,$$

gesetzt wird. Aus der Differenzengleichung ergibt sich für den zeitabhängigen Anteil dann die Bedingung

$$w^0 = 1\,, \quad \frac{w^{n+1} - w^n}{w^n} = \lambda\,, \quad \lambda = \frac{c^2q^2}{2}(e^{i\mu h} + e^{-i\mu h} - 2) - \frac{cq}{2}(e^{i\mu h} - e^{-i\mu h})\,.$$

Also ist

$$w^n = (1+\lambda)^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

mit der Konstanten

$$\lambda = -2c^2q^2 \sin^2 \frac{\mu h}{2} - icq \sin \mu h\,.$$

**Satz 1** *Das Differenzenschema von Lax-Wendroff ist genau dann stabil gegenüber allen Störungen $e^{i\mu x}$ der Anfangsbedingungen, wenn die Schrittweiten der Voraussetzung*

$$0 < |c|\Delta t \leq \Delta x$$

*genügen.*

*Beweis.* Die Lösung $u_h$ ist genau dann beschränkt, wenn $w_n$ beschränkt ist, das heißt $|1+\lambda| \leq 1$ ist oder

$$\begin{aligned} 1 \quad &\geq \quad (1 - 2c^2q^2 \sin^2 \alpha)^2 + 4c^2q^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - 4c^2q^2(1 - c^2q^2) \sin^2 \alpha\,, \quad \alpha = \tfrac{\mu h}{2}\,, \end{aligned}$$

ausfällt. Diese Bedingung ist offenbar genau dann für alle $\mu \in \mathbb{R}$ erfüllt, wenn

$$|cq| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |c|\Delta t \leq \Delta x$$

wird. Damit haben ist der Satz bewiesen. □

4. Die Konvergenz dieses Verfahrens wollen wir wieder nur für

$$c > 0\,, \quad c\Delta t = \Delta x\,, \quad \text{d. h. } cq = 1$$

zeigen. In diesem Fall wird das Lax-Wendroff-Schema zu

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \Delta t \left( f_j^n + \frac{1}{2}\Delta t \left( \frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j^n \right)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

oder

$$u_j^n = u_{j-1}^{n-1} + \Delta t \left( f_j^{n-1} + \frac{1}{2}\Delta t \left( \frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j^{n-1} \right)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_j^0 = g_j\,, \quad j \text{ ganz}\,.$$

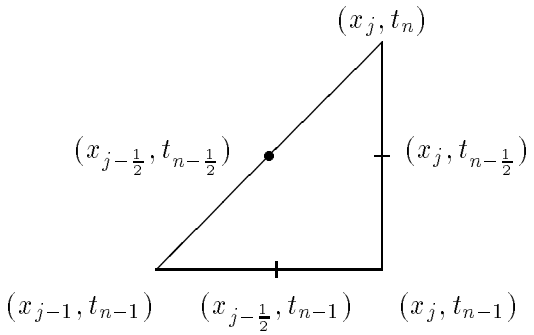



Fig. 7.5:

Die Lösung dieser Gleichung lautet (vgl. 7.1.(13) )

$$u_j^n = g_{j-n} + \Delta t \sum_{l=1}^{n} \left( f_{j+1-l}^{n-l} + \frac{1}{2}\Delta t \left( \frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{j+1-l}^{n-l} \right) . \tag{8}$$

Der erste Term auf der rechten Seite stimmt mit dem ersten Term $g(x_j - ct_n)$ in der Darstellung 7.1.(10) der Lösung des Differentialgleichungsproblems überein. Der zweite Term bildet eine Approximation des Integrals über die rechte Seite $f$ in der Darstellung 7.1.(10) der Lösung.

Mit Hilfe der Taylor-Formel ist

$$\begin{aligned} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= f(x_{j-\frac{1}{2}},\ t_{n-\frac{1}{2}}) = \\ &= f_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^{n-1} + \mathrm{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) . \end{aligned}$$

Da $\Delta x = c\Delta t$ ist, wird

$$f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = f_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^{n-1} + \mathrm{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) .$$

Diese Beziehung zeigt, daß die Summe auf der rechten Seite der obigen Darstellung von $u_j^n$ gleich

$$\Delta t \sum_{l=1}^{n} f_{j+\frac{1}{2}-l}^{n+\frac{1}{2}-l} + \mathrm{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

ist, also bis auf Terme von zweiter Ordnung eine summierte Tangententrapezregel für das Integral in der Darstellung 7.1.(10) der Lösung $u$ ist. Für die summierte Tangententrapezformel hat man nämlich

$$\int_0^t f(x - c(t-s), s)\, ds = \Delta t \sum_{\nu=1}^{n} f_{j-n+\nu-\frac{1}{2}}^{\nu-\frac{1}{2}} + \mathrm{O}(\Delta t^2) ;$$

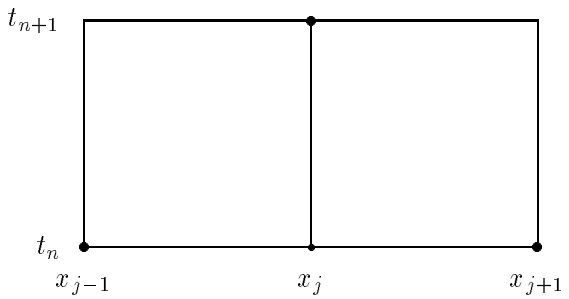



Fig. 7.6:

setzt man darin $l = n - \nu + 1$, dann erhält man die behauptete Darstellung. Hieraus folgt, daß $u_j^n$ die Approximationseigenschaft

$$u(x_j, t_n) = u_j^n + \mathrm{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$$

besitzt für $j$ ganz, $n = 1, 2, \ldots$

5. Eine weitere Differenzenapproximation gewinnt man dadurch, daß man in der Differentialgleichung (1) zunächst die Ableitung nach $t$ durch den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten und die Ableitung nach $x$ durch den zentralen Differenzenquotienten ersetzt,

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{c}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) = f_j^n\,, \quad j \text{ ganz},\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Bekanntlich führt diese Vorgehensweise auf einen Abschneidefehler der Ordnung $\mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$. Darüber hinaus hat man so ein klassisches Beispiel eines instabilen Verfahrens konstruiert.

Durch Ersetzen von $u_j^n$ durch den Mittelwert von $u_{j+1}^n$ und $u_{j-1}^n$ erhält man das *Friedrichs–Verfahren*, was gegenüber (9) offenbar den Vorteil hat, daß die Anzahl der Gitterpunkte reduziert wird,

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right)\right) + \frac{c}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) = f_j^n\,, \tag{10}$$

für $j$ ganz, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Man erhält so wieder ein explizites Verfahren,

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + cq)u_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - cq)u_{j+1}^n + \Delta t\, f_j^n\,,$$

mit dem Differenzenstern aus Fig. 7.6.

6. Der Übergang von (9) zu (10) verbessert den Abschneidefehler nicht, d. h. für das Friedrichs-Verfahren hat man

$$T_h(x, t) = \mathrm{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)\,.$$

Wir bemerken hier ohne Beweis, daß dieses Verfahren durch die bereits mehrfach angewandte Schrittweitenbeschränkung ebenfalls stabil wird.

7. Wie wir im einleitenden Kapitel dargestellt haben, läßt sich die homogene Wellengleichung äquivalent als ein System von zwei Gleichungen der Form (1) schreiben,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,$$

oder äquivalent (in Matrixschreibweise)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0\,, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

mit $\mathbf{u} = (u, v)$, $A = c\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren für die Wellengleichung – jetzt als System von 2 Gleichungen erster Ordnung geschrieben – haben dann die folgende Form:

**Lax–Wendroff–Verfahren**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n) &= \frac{1}{2\Delta t} q^2 A^2 \left(\mathbf{u}_{j-1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j+1}^n\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta x} A \left(\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n\right) \end{aligned} \tag{11}$$

das heißt,

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{1}{2}c^2q^2\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right) + \frac{cq}{2}\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right)\,, \\ v_j^{n+1} &= v_j^n + \frac{1}{2}c^2q^2\left(v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n\right) + \frac{cq}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)\,. \end{aligned}$$

**Friedrichs–Verfahren**

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{u}_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n\right)\right) = \frac{1}{2\Delta x} A \left(\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n\right)\,, \tag{12}$$

das heißt,

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + \frac{cq}{2}\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right)\,, \\ v_j^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n\right) + \frac{cq}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)\,. \end{aligned}$$

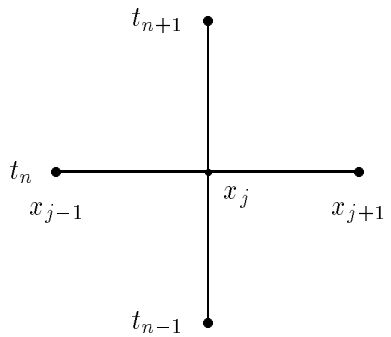



Fig. 7.7: Differenzenstern des Bocksprung-Schemas.

## 7.3 Das Bocksprung–Schema[1)]

1. Wir wollen nur kurz noch ein weiteres einfaches explizites Schema erwähnen, das durch Approximation der ersten partiellen Ableitungen durch die zentralen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t}(u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\mathrm{O}((\Delta t)^2)\,, \\ \frac{1}{2\Delta x}(u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\mathrm{O}((\Delta x)^2)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

entsteht. Auf diese Weise wird der hyperbolischen Differentialgleichung die Differenzenapproximation

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(u_j^{n+1}-u_j^{n-1}\right)+\frac{c}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)=f_j^n \tag{2}$$

oder

$$u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+cq\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)=2\Delta t f_j^n$$

für $n=1,2,\ldots,$ $j$ ganz zugeordnet. Dieses ist das sogenannte Bocksprung–Schema[1], dessen Differenzenstern die in Figur 7.7 angegebene Form hat.

2. Dieses Differenzenschema ist dreistufig. Neben der Anfangsbedingung

$$u_j^0=g_j\,,\quad j \text{ ganz}\,,$$

wird jetzt noch eine Approximation von $u_j^1=u(x_j,\Delta t)$ benötigt, die man zum Beispiel mit Hilfe des Lax-Wendroff-Schemas durch

$$\begin{aligned} u_j^1 &= (1-c^2q^2)g_j-\frac{cq}{2}(1-cq)g_{j+1}+\frac{cq}{2}(1+cq)g_{j-1} \\ &\quad +\Delta t\left(f_j^0+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-c\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^0\right)\,,\quad j \text{ ganz}\,, \end{aligned}$$

[1)] (Englisch: Leap-frog Scheme)

bestimmen kann. Die so definierte Differenzenapproximation der hyperbolischen Anfangswertaufgabe hat dann einen Abschneidefehler zweiter Ordnung in $\Delta x$, $\Delta t$,

$$T_h(x,t) = \mathrm{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)\,.$$

Man kann zeigen, daß dieses Schema für

$$|cq| \le 1\,, \quad \Longleftrightarrow \quad |c|\Delta t \le \Delta x$$

stabil ist gegenüber allen Störungen $e^{i\mu x}$ der Anfangsbedingung bei $t = 0$, was wir aber der Kürze halber hier nicht ausführen wollen.

## 7.4 Implizite Approximationen

1. Wird die hyperbolische Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f \quad \text{in } -\infty < x < \infty,\ t > 0\,, \tag{1}$$

mit Hilfe der rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten in Zeitrichtung

$$\overline{D}_t u(x,t) = \frac{1}{\Delta t}(u(x,t) - u(x,t-\Delta t)) \tag{2}$$

und der vorwärts- bzw. rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten $D_x$, $\overline{D}_x$ in Ortsrichtung approximiert, so ergeben sich die Differenzenapproximationen

$$\overline{D}_t u_h + cD_x u_h = f_h\,, \tag{3i}$$

und

$$\overline{D}_t u_h + c\overline{D}_x u_h = f_h\,, \quad \text{in } \mathbb{R}_h \times (0,\infty)_{\Delta t}\,. \tag{3ii}$$

Diese Differenzenapproximationen haben den Abschneidefehler

$$T_h(x,t) = \mathrm{O}(\Delta t + \Delta x)\,.$$

In anderer Schreibweise lauten die Differenzengleichungen

$$u_j^n - u_j^{n-1} + cq(u_{j+1}^n - u_j^n) = \Delta t\, f_j^n \tag{4i}$$

und

$$u_j^n - u_j^{n-1} + cq(u_j^n - u_{j-1}^n) = \Delta t\, f_j^n\,. \tag{4ii}$$

Für die zugehörige Anfangswertaufgabe wird noch die Anfangsbedingung

$$u_j^0 = g_j\,, \quad j \text{ ganz}$$

gefordert. Die Differenzensterne dieser Approximationen sind in Figur 7.8 abgebildet.

2. Bei den obigen Differenzenapproximationen handelt es sich um implizite Gleichungen zur Bestimmung der Näherungen $u_j^n$ aus den Näherungen zur Zeit $t_{n-1}$ und den rechten Seiten $f_j^n$. Als erstes beweisen wir den folgenden

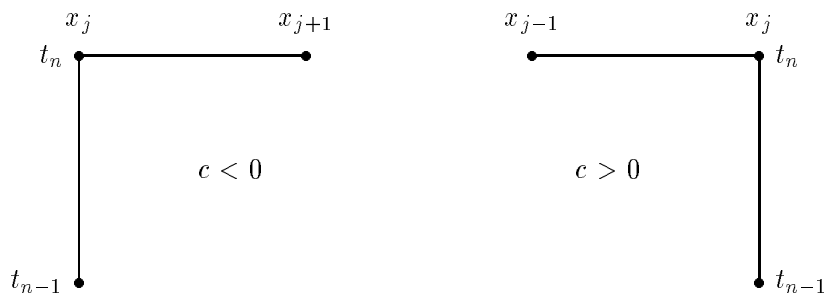



Fig. 7.8: Differenzensterne der impliziten Approximationen.

**Satz 1 (Eindeutigkeit)** *In $x$–Richtung beschränkte Lösungen der ersten Differenzenapproximation (3i) sind für $c < 0$ und der zweiten Approximation (3ii) für $c > 0$ eindeutig durch die Anfangsbedingungen $g_j$ und rechten Seiten $f_j^n$ bestimmt.*

*Beweis.* (i) Ist $u_j^n$ Lösung der zugehörigen homogenen Gleichungen

$$u_j^0 = 0\,, \quad u_j^n - u_j^{n-1} + cq(u_{j+1}^n - u_j^n) = 0\,, \quad n =, 1, 2, \ldots\,,$$

$j$ ganz, dann wird für $n = 1$

$$(1 - cq)u_j^1 + cqu_{j+1}^1 = 0$$

also

$$u_j^1 = \frac{cq-1}{cq} u_{j-1}^1 = \left(\frac{cq-1}{cq}\right)^j u_0^1\,, \quad j \text{ ganz}\,.$$

Für $c < 0$ ist $|cq - 1|/|cq| > 1$, also $u_j^1$ für $j \to \infty$ nur dann beschränkt, wenn $u_0^1 = 0$ und damit $u_j^1 = 0$, $j$ ganz, ist. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich $u_j^n = 0$, $j$ ganz, für alle $n = 1, 2, \ldots$ Hieraus folgt die Eindeutigkeit.
(ii) Für die zweite Differenzenapproximation lauten die zugehörigen homogenen Gleichungen

$$u_j^0 = 0\,, \quad u_j^n - u_j^{n-1} + cq(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,.$$

Daher wird

$$u_j^1 = \frac{cq}{1+cq} u_{j-1}^1 = \left(\frac{cq}{1+cq}\right)^j u_0^1\,, \quad j \text{ ganz}\,.$$

Für $c > 0$ ist $cq/(1 + cq) < 1$ und $u_j^1$ für $j \to -\infty$ nur dann beschränkt, wenn $u_0^1 = 0$ und folglich $u_j^1 = 0$, $j$ ganz, ist. Durch schrittweise Anwendung dieser Überlegung für $n = 1, 2, \ldots$ ergibt sich also auch hier wieder $u_j^n = 0$, $j$ ganz, $n = 1, 2, \ldots$, und damit die Eindeutigkeit von Lösungen der zweiten Approximation. □

3. Für die Stabilitätsuntersuchung betrachten wir wiederum die homogenen Differenzengleichungen mit der Anfangsbedingung

$$u_j^0 = e^{i\mu x_j}\,, \quad x_j = jh,\ j \text{ ganz}\,.$$

Durch den Separationsansatz $u_j^n = v_j w^n$ ergibt sich

$$v_j = e^{i\mu x_j}\,, \quad w^0 = 1\,,$$

und für $w^n$ im Falle der ersten Approximation die Bedingung

$$w^0 = 1\,, \quad (1-cq)w^n + cqe^{i\mu h}w^n = w^{n-1}\,,$$

das heißt,

$$w^n = (1-cq(1-e^{i\mu h}))^{-1}w^{n-1} = (1-cq(1-e^{i\mu h}))^{-n}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

**Satz 2 (Stabilität)** *Für beliebige positive Schrittweiten $\Delta t$, $\Delta x$, ist die implizite Differenzenapproximation mit dem vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten (3i) in $x$–Richtung stabil für $c < 0$ und die mit dem rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten (3ii) in $x$–Richtung für $c > 0$.*

*Beweis.* (i) Die zugehörige Lösung ist genau dann beschränkt, wenn

$$1 \le |1 - cq(1-\cos\mu h) + icq\sin\mu h|$$

oder

$$1 \le (1-2cq\sin^2\alpha)^2 + 4c^2q^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 4cq(1-cq)\sin^2\alpha$$

ist für $\alpha = \mu h/2$. Diese Bedingung ist offenbar für alle reellen $\mu$ erfüllt, wenn $cq \le 0$, d. h. $c < 0$ ausfällt.
(ii) Für die zweite Approximation muß der zeitabhängige Anteil der Bedingung

$$w^0 = 1\,, \quad (1+cq)w^n - cqe^{-i\mu h}w^n = w^{n-1}$$

oder

$$w^n = (1+cq(1-e^{-i\mu h}))^{-n}\,, \quad n = 0, 1, 2\ldots,$$

genügen. Die Stabilitätsbedingung erfordert jetzt

$$1 \le (1+2cq\sin^2\alpha)^2 + c^2q^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 + 4cq(1+cq)\sin^2\alpha\,,$$

die für alle $q \ge 0$ oder $c > 0$ erfüllt ist. Damit haben wir den Stabilitätssatz bewiesen. □

## 7.5 Das Kastenschema

1. Eine weitere implizite Formel erhält man durch Approximation der partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_{j-\frac{1}{2}}, t_{n-\frac{1}{2}})$ mit Hilfe der Funktionswerte an den vier Stellen

$$(x_j, t_n)\,, \quad (x_{j-1}, t_n)\,, \quad (x_{j-1}, t_{n-1})\,, \quad (x_j, t_{n-1})\,.$$

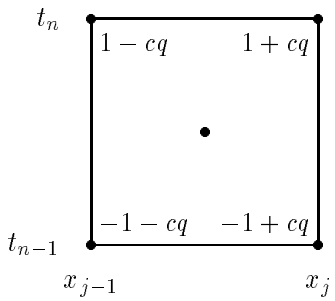



Fig. 7.9:

Wie man leicht zeigt, gelten die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-\frac{1}{2}}, t_{j-\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) \\
&\quad + \frac{1}{2\Delta x}(u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) + \mathrm{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x_{j-\frac{1}{2}}, t_{j-\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2\Delta t}(u_j^n - u_j^{n-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2\Delta t}(u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}) + \mathrm{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Approximiert man in der hyperbolischen Differentialgleichung erster Ordnung die partiellen Ableitungen in dieser Form, so entsteht das sogenannte *Kastenschema*

$$u_j^n - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1} + cq(u_j^n - u_{j-1}^n + u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) = 2\Delta t f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$$

oder

$$(1+cq)u_j^n + (1-cq)u_{j-1}^n - (1-cq)u_j^{n-1} - (1+cq)u_{j-1}^{n-1} = 2\Delta t f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

für $j$ ganz, $n = 1, 2, \ldots$, mit den Anfangsbedingungen

$$u_j^0 = g_j\,, \quad j \text{ ganz}\,.$$

Dies ist wieder eine implizite Approximation. Der Abschneidefehler ist jetzt von zweiter Ordnung in $\Delta x$, $\Delta t$,

$$T_h(x,t) = \mathrm{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)\,.$$

Figur 7.9 zeigt den Differenzenstern dieses Verfahrens.

**Satz 1 (Eindeutigkeit)** *Für jedes $c \neq 0$ sind in $x$–Richtung beschränkte Lösungen der diskreten Anfangswertaufgabe (2) eindeutig durch die Anfangswerte und die rechte Seite bestimmt.*

*Beweis.* Sei also $g_j = 0$ und $f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = 0$ für alle $j$ ganz, $n = 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$(1+cq)u_j^1 + (1-cq)u_{j-1}^1 = 0\,, \quad j \text{ ganz}\,.$$

Wenn $cq = \pm 1$ ist, ergibt diese Gleichung $u_j^1 = 0$ für alle $j$. Für $cq \neq \pm 1$ wird

$$u_j^1 = \frac{1-cq}{1+cq}\,u_{j-1}^1 = \left(\frac{1-cq}{1+cq}\right)^j u_0^1\,, \quad j > 0\,.$$

Jetzt ist

$$\left|\frac{1-cq}{1+cq}\right| \neq 1\,, \quad cq \neq 0\,.$$

Die Lösung $u_j^1$ kann also nur dann für alle ganzen Zahlen $j$ beschränkt sein, wenn $u_j^1 = 0$ ist. Entsprechend folgt dann $u_j^2, \ldots, u_j^n = 0$ für alle $j, n$ und damit die Eindeutigkeit. □

2. Für die Stabilitätsuntersuchung wird wieder $f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = 0$ und $g_j = e^{i\mu x_j}$ gesetzt. Der zeitabhängige Anteil $w^n$ einer Lösung $u_j^n = v_j w^n$ muß dann der Bedingung

$$w^0 = 1\,, \quad (1+cq+(1-cq)e^{-i\mu h})w^n = (1-cq+(1+cq)e^{-i\mu h})w^{n-1}\,,$$

genügen oder

$$w^n = \left(\frac{1-cq+(1+cq)e^{-i\mu h}}{1+cq+(1-cq)e^{-i\mu h}}\right)^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Man verifiziert leicht, daß

$$u_j^n = e^{i\mu x_j} w^n$$

mit dem obigen $w^n$ eine Lösung der homogenen Differenzengleichungen ist, die der Anfangsbedingung genügt.

**Satz 2 (Stabilität)** *Das Kastenschema ist stabil gegenüber Störungen $e^{i\mu x}$ der Anfangsbedingungen für alle Schrittweitenverhältnisse $q = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ und alle $c \neq 0$.*

*Beweis.* Diese Lösung ist beschränkt in $x$–Richtung,

$$|u_j^n| = |w^n|\,, \quad j \text{ ganz},\ n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

also die eindeutig bestimmte Lösung dieser Aufgabe mit dieser Eigenschaft. Es ist

$$\frac{1-cq+(1+cq)e^{-i\mu h}}{1+cq+(1-cq)e^{-i\mu h}} = \frac{\overline{z}}{z}$$

mit

$$z = (1+cq)e^{i\alpha} + (1-cq)e^{-i\alpha}\,, \quad \overline{z} = (1-cq)e^{i\alpha} + (1+cq)e^{-i\alpha}\,, \quad \alpha = \frac{\mu h}{2}\,.$$

Da $|z| = |\overline{z}|$ ist, wird für beliebige reelle $cq$ stets

$$|u_j^n| = |w^n| = \left|\frac{\overline{z}}{z}\right|^n = 1\,, \quad j \text{ ganz},\ n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

□

3. Im Falle $cq = \pm 1$ läßt sich die Konvergenz dieses Verfahrens sehr einfach zeigen. Sei zum Beispiel $cq = 1$, das heißt, $c\Delta t = \Delta x$. Dann nimmt die Differenzenapproximation die einfache Form

$$u_j^0 = g_j\,, \quad u_j^n - u_{j-1}^{n-1} = \Delta t f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\,, \quad j \text{ ganz},\ n = 1, 2, \ldots,$$

an. Das Verfahren ist dann explizit und die Lösung $u_j^n$ hat die explizite Darstellung

$$u_j^n = g_{j-n} + \Delta t \sum_{l=1}^{n} f_{j+\frac{1}{2}-l}^{n+\frac{1}{2}-l}\,.$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist $g(x_j - ct_n)$. Der Entwicklungspunkt $(x_{j+\frac{1}{2}-l},\, t_{n+\frac{1}{2}-l})$ ist jetzt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der beiden Punkte

$$(x_{j+1-l},\, t_{j+1-l})\,, \quad (x_{j-l},\, t_{j-l})\,.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist daher die summierte Tangententrapezapproximation des Integrals in der Darstellung der Lösung der Differentialgleichungsaufgabe. Daher ist in diesem Falle

$$u(x_j, t_n) = u_j^n + \mathrm{O}((\Delta t)^2)\,, \quad j \text{ ganz},\ 1, 2, \ldots,$$

womit die Konvergenz des Kastenschemas für $cq = 1$ gezeigt ist. Ganz analog erhält man ein entsprechendes Resultat für den Fall $cq = -1$.

## Kapitel 8

# Verfahren mit Positivitätseigenschaften und die von-Neumann-Bedingung

Wir behandeln in einem etwas allgemeineren Rahmen zwei Möglichkeiten zur Untersuchung der Stabilität eines numerischen Verfahrens für zeitabhängige Probleme, die in spezieller Form schon in Kapitel 5.1 und 5.2 benutzt wurden.

## 8.1 Allgemeine Darstellung von Differenzenverfahren und Stabilität

1. Die betrachteten Verfahren zur Approximation parabolischer Probleme, aber auch die für hyperbolische Probleme – wie wir unten sehen werden – lassen sich alle in der folgenden Form schreiben,

$$u_h^0 = u_h(t_0)\,, \quad C_h^{(0)}(t_n)u_h^n = C_h^{(1)}(t_n)u_h^{n-1} + \Delta t\, w_h^n\,, \quad n = 1,\dots,N\,, \tag{1}$$

wobei $C_h^{(l)}(t)\,,\ l = 0,1\,,\ t \in [0,T]'_{\Delta t} := \{t = n\Delta t \mid n = 1,\dots,N\}$, lineare Abbildungen zwischen Räumen von Gitterfunktionen bezeichnen. Speziell haben wir bisher nur Abbildungen der folgenden Art betrachtet,

$$\left(C_h^{(l)}(t)v\right)(x) = \sum_{|\mu|\le N_l} B_\mu^{(l)}(x,t)v(x+\mu h)\,, \tag{2}$$

wobei $B_\mu^{(l)}(x,t)$ $r\times r$–Matrizen, $x = (x_1,\dots,x_\nu)\,,\ h = (h_1,\dots,h_\nu)\,,\ \mu$ einen Multiindex $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_\nu)$ der Länge $|\mu| = |\mu_1| + \cdots + |\mu_\nu|$, $\mu_j$ ganz, und $v$ eine Gitterfunktion auf $\mathbb{R}_h^\nu$ mit Werten in $\mathbb{K}^r\,,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bezeichnen. Randbedingungen können in die Räume der Gitterfunktionen integriert sein oder fallen weg bei reinen Anfangswertproblemen; weiter ist $N\Delta t = T$.

2. Im folgenden ordnen wir die bisher betrachteten Beispiele in diesen allgemeinen Rahmen ein:

**Wärmeleitungsgleichung** $u_t = u_{xx} + f \quad (q = \Delta t/(\Delta x)^2)$

*Explizites Verfahren* 4.2.(2) : $\nu = 1, r = 1, N_0 = 0, N_1 = 1$ ,

$$u_j^{n+1} = q(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + (1-2q)u_j^n + \Delta t f_j^n \ ,$$

$$B_0^{(0)} = 1\,, \quad B_{\pm 1}^{(1)} = q\,, \quad B_0^{(1)} = 1-2q\,, \quad w_j^n = f_j^{n-1} \ ;$$

*Implizites Verfahren* 4.2.(3) : $\nu = 1, r = 1, N_0 = 1, N_1 = 0$ ,

$$B_{\pm 1}^{(0)} = -q\,, \quad B_0^{(0)} = 1+2q\,, \quad B_0^{(1)} = 1\,, \quad w_j^n = f_j^n \ ;$$

*Crank–Nicolson–Verfahren:* $\nu = 1, r = 1, N_0 = N_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned}(1+q)u_j^n \ - \ & \tfrac{q}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) = \\ & = (1-q)u_j^{n-1} + \tfrac{q}{2}\left(u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}\right) + \tfrac{\Delta t}{2}\left(f_j^n + f_j^{n-1}\right) \ ,\end{aligned}$$

$$B_{\pm 1}^{(0)} = -\tfrac{q}{2}\,, \quad B_0^{(0)} = 1+q\,, \quad B_{\pm 1}^{(1)} = \tfrac{q}{2}\,, \quad B_0^{(1)} = 1-q\,,$$

$$w_j^n = \tfrac{1}{2}\left(f_j^n + f_j^{n-1}\right) \ .$$

3. Im Fall variabler Koeffizienten in der Differentialgleichung sieht man, daß die Matrizen bzw. Koeffizienten $B_\mu^{(l)}$ in der Tat auch von $x$ und $t$ abhängen können.
*Explizites Verfahren* für $u_t = a(x,t)u_{xx}$:

$$B_0^{(0)} = 1\,, \quad B_0^{(1)}(x,t) = 1 - 2qa(x,t)\,, \quad B_{\pm 1}^{(1)}(x,t) = qa(x,t)\,.$$

4. *Implizites Verfahren* für die 2–dim. Wärmeleitungsgleichung
$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f$ (s. Übg. 14 für $\Theta = 1$):

$$\nu = 2, r = 1, N_0 = 1, N_0 = 0 \ ,$$

$$B_{0,0}^{(0)} = 1 + 2(q_x + q_y)\,, \quad B_{-1,0}^{(0)} = B_{1,0}^{(0)} = -q_x\,, \quad B_{0,-1}^{(0)} = B_{0,1}^{(0)} = -q_y \ ,$$

$$B_{0,0}^{(1)} = 1\,, \quad w_{i,j}^n = f_{i,j}^n \quad (q_x = \Delta t/(\Delta x)^2\,,\, q_y = \Delta t/(\Delta y)^2)\,;$$

*Verfahren* aus Übg. 13 ( für $u_t = u_{xx}$): $\nu = 1, r = 2, N_0 = 0, N_1 = 1$ ,

$$u_j^n = 2\Delta t \delta_x^2 u_j^{n-1} + u_j^{n-2} = 2q\left(u_{j-1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}\right) + v_j^{n-1}$$

$$v_j^n = u_j^{n-1} \quad (u_h^n(x_j) = (u_j^n, v_j^n))$$

$$B_0^{(0)} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad B_{\pm 1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad B_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -4q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

5. Die in Kapitel 6 entwickelten Verfahren sind meist dreistufige Verfahren, die sich durch die im letzten Beispiel verwendete Vorgehensweise in ein System von zwei Gleichungen eines zweistufigen Verfahrens der Form (1) umschreiben lassen.

**Wellengleichung** $u_{tt} - u_{xx} = f \quad (q = \Delta t/\Delta x)$

*Explizites Differenzenverfahren* (vgl. Abschnitt 6.2):

$$\nu = 1,\ r = 2,\ N_0 = 0,\ N_1 = 1\ ,$$

$$u_j^n = 2(1-q^2)u_j^{n-1} + q^2\left(u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}\right) - v_j^{n-1} + (\Delta t)^2 f_j^{n-1}$$

$$v_j^n = u_j^{n-1}$$

$$B_0^{(0)} = E\ , \quad B_{\pm 1}^{(1)} = \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

$$B_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 2(1-q^2) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad w_j^n = \left(\Delta t\, f_j^{n-1},\, 0\right)\ ,$$

$$u_h^0(x_j) = \left(u_j^1,\, u_j^0\right)\ ;$$

*Lax–Wendroff–Verfahren* 7.2.(11): $\nu = 1,\ r = 2,\ N_0 = 0,\ N_1 = 1\ ,$

$$B_0^{(0)} = E\ ,\ B_0^{(1)} = E - q^2A^2\ ,\ B_{\pm 1}^{(1)} = \pm\frac{q}{2}A(E \pm qA)\ ,\ A = c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ;$$

*Friedrichs–Verfahren* 7.2.(12): $\nu = 1,\ r = 2,\ N_0 = 0,\ N_1 = 1\ ,$

$$B_0^{(0)} = E\ ,\ B_0^{(1)} = 0\ ,\ B_{\pm 1}^{(1)} = \frac{1}{2}(E \pm qA)\,;$$

*Verfahren* Aufg. 16: $\nu = 1,\ r = 2,\ N_0 = N_1 = 1\ ,$

$$B_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 + 2q^2\Theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad B_{\pm 1}^{(0)} = \begin{pmatrix} -q^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

$$B_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 - 2(1-2\Theta)q^2 & -(1+2\Theta q^2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad B_{\pm 1}^{(1)} = \begin{pmatrix} (1-2\Theta)q^2 & \Theta q^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;$$

*Bocksprung–Schema* für $u_t + cu_x = f$: $\nu = 1,\ r = 2,\ N_0 = 0,\ N_1 = 1\ ,$

$$\frac{1}{2\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \frac{c}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = f_j^n$$

$$\iff \quad u_j^n = -q(u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) + v_j^{n-1} + 2\Delta t\, f_j^n$$

$$v_j^n = u_j^{n-1}$$

$$B_0^{(0)} = E\,, \quad B_{\pm 1}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mp q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad B_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Dieses Verfahren benötigt eine Anlaufrechnung für $n = 1$, z. B. mit dem Lax–Wendroff–Verfahren.

6. Wir beschränken uns im folgenden auf Verfahren mit *konstanten Koeffizienten*, d. h. die Abbildungen $C_h^{(l)}(t)$ in (1) hängen nicht von $t$ ab – die Matrizen $B_\mu^{(l)}$ können aber von $x$ abhängen. Im Falle der (Auf-)Lösbarkeit der Gleichung (1) kann man deren Lösung explizit angeben durch (vgl. auch 5.1.(11) )

$$u_h^n = C_h^n u_h^0 + \Delta t \sum_{j=1}^{n} C_h^{n-j} C_h^{(0)-1} w_h^j\,, \tag{3}$$

wobei $C_h = C_h^{(0)-1} C_h^{(1)}$.

7. Man nennt ein Verfahren *stabil*, falls für beliebige $u_h^0$, $w_h^n$ und die zugehörige Lösung $u_h^n$ von (1) eine Abschätzung der folgenden Form gilt (vgl. 5.1.(12) ),

$$\max_{0\le n\le N} \|u_h^n\| \le C \left( \|u_h^0\| + \Delta t \sum_{k=1}^{N} \|w_h^k\| \right)\,, \tag{4}$$

wobei $h$ bzw. $N$ hinreichend klein bzw. groß sein können und $C$ eine von $h$ und $N$ unabhängige Konstante $C \ge 0$ bezeichnet. Bei festem Schrittweitenverhältnis bedingt ein kleines $h$ ein großes $N$ bzw. ein kleines $\Delta t$. Die Normen in (4) sind geeignet zu wählen; die Eigenschaft der Stabilität eines numerischen Verfahrens hängt also auch immer von den zugrundegelegten Normen ab.

Wegen $N\Delta t = T$ folgt aus (4) offensichtlich die Abschätzung

$$max_n \|u_h^n\| \le C \left( \|u_h^0\| + T \max_{k=1,\ldots,N} \|w_h^k\| \right)\,, \quad N \ge N_0\,,$$

was gelegentlich auch als Stabilität bezeichnet wird.

Mit Hilfe der Darstellung (3) sieht man, daß die Stabilitätsungleichung (4) offensichtlich äquivalent zur folgenden Bedingung an die Abbildungen $C_h^{(l)}$, $l = 0, 1$, ist,

$$\|C_h^{(0)-1}\| \le \gamma\,, \quad \|C_h^n\| \le \gamma\,, \quad n = 0, \ldots, N\,,\ N \ge N_0\,. \tag{5}$$

Hierbei ist die durch die Vektorraumnorm induzierte Norm der linearen Abbildungen gemeint. Zum Nachweis der Stabilität eines Verfahrens muß man also insbesondere die gleichmäßige Beschränktheit der Potenzen der Abbildungen $C_h$ beweisen.

8. Setzt man in die Stabilitätsungleichung anstelle von $u_h$ den Fehler ein, dann hat man sofort die bekannte Aussage, daß aus der Konvergenz des Abschneidefehlers gegen Null und der Konvergenz der Anfangsapproximation und der rechten Seite auch die Konvergenz der Lösungen folgt.

Kürzt man nämlich die gegebene Differentialgleichung einfach mit

$$Lu = w$$

ab – z. B. ist $Lu = u_t - u_{xx}$ für die Wärmeleitungsgleichung oder $Lu = u_t - Au_x$ für die Wellengleichung als System von zwei Gleichungen erster Ordnung geschrieben – dann erfüllt der Fehler $u_h - u^h$ die folgende *Fehlergleichung*

$$L_h(u_h - u^h) = w_h - w^h + T_h \,,$$

wobei

$$\begin{aligned} (L_h v_h)(.,t_n) &= \frac{1}{\Delta t}\left(C_h^{(0)}(t_n)v_h(.,t_n) - C_h^{(1)}(t_n)v_h(.,t_{n-1})\right) \\ T_h = (Lu)^h - L_h u^h \quad &= \quad \text{Abschneidefehler} \,, \end{aligned} \quad .$$

und $v^h$ die Restriktion einer Funktion auf das Gitter in $\mathbb{R}_h^\nu$ bezeichnet.

Gilt (4), dann folgt sofort die folgende *Diskretisierungsfehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} \max_{0\le n\le N} \|(u_h - u^h)(.,t_n)\| \le C \Big( &\|u_h^0 - u^h(.,t_0)\| + \\ &+ \Delta t \sum_{k=1}^{N} \|(w_h - w^h + T_h)(.,t_k)\| \Big) \,, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $u_h^0$ eine Approximation der Anfangsfunktion darstellt.

## 8.2 Lineare positive Verfahren

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Stabilität bzgl. der Supremum–Norm für lineare Verfahren des Typs 8.1.(1) , 8.1.(2) , die alle vorgestellten speziellen Verfahren für parabolische und hyperbolische Probleme enthalten. Eine hinreichende Bedingung für die Stabilität 8.1.(4) bzgl. der Sup–Norm ist in Forsythe–Wasow [FW60], 14., für explizite Verfahren mit der Eigenschaft „positiver Typ“ angegeben worden. Eine mögliche Verallgemeinerung dieses Begriffs auf implizite Verfahren ist in Meis–Markowitz [MM78], § 8, vorgeschlagen worden, in dem jedoch nicht das einfachste explizite Verfahren für die Gleichung $u_t = \sigma u_{xx} + \tau u$ enthalten ist. Wir stellen hier eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffs positiver Verfahren vor und zeigen, daß diese Verfahren notwendig stabil bzgl. der Sup–Norm sind. Für einige Beispiele prüfen wir schließlich die Positivitätsbedingung nach.

Wir betrachten lineare Verfahren der Form (vgl. 8.1.(1) )

$$\sum_{|\nu|\le N_0} B_{h,\nu}^{(0)}(.,t)T^\nu u_h(t) = \sum_{|\nu|\le N_1} B_{h,\nu}^{(1)}(.,t)T^\nu u_h(t-k) + k w_h(t) \,, \quad t \in [0,T]_h' \,, \tag{1}$$

wobei $B_{h,\nu}^{(s)}(x,t)$ $r\times r$–Matrizen sind, $T^\nu$ den Verschiebungsoperator $T^\nu v(x) = v(x+\nu h)$ mit der äquidistanten Schrittweite $h$ des Gitters $G_h$ in $\mathbb{R}$ bezeichnet, $k = \Delta t$, $[0,T]_h' = \{t_n =$

$nk \mid n = 1, \ldots, N_h\}$ und $N_h k = T$. In Forsythe–Wasow [FW60], 14.3, heißt ein explizites Verfahren (für $r = 1$) der Form

$$u_h(x,t) = \sum_{|\nu| \le N_1} b^{(1)}_{h,\nu}(x,t) u_h(x + \nu h, t - k)\,, \quad (x,t) \in G_h \times [0,T]'_h\,, \tag{2}$$

von *positivem Typ,* wenn $b^{(1)}_{h,\nu}(x,t) \ge 0$ für alle $|\nu| \le N_1$, $(x,t) \in G_h \times [0,T]'_h$.

Eine entsprechende Begriffsbildung läßt sich auf implizite Systeme der Form (1) verallgemeinern. Dazu setzen wir voraus, daß die Matrizen $B^{(s)}_{h,\nu}$ *gleichmäßig diagonalisierbar* sind, d. h. es existieren reguläre Matrizen $M_h$, so daß

$$D^{(s)}_{h,\nu}(x,t) = M_h^{-1} B^{(s)}_{h,\nu}(x,t) M_h\,, \quad (x,t) \in G_h \times [0,T]'_h\,,\ s = 0,1\,,\ 0 < h \le h_0\,,$$

Diagonalmatrizen sind und mit einer Zahl $K_1 > 0$ gilt

$$\|M_h\|_\infty \le K_1\,, \quad \|M_h^{-1}\|_\infty \le K_1 \quad 0 < h \le h_0\,. \tag{3}$$

Hierbei bezeichnet $\|.\|_\infty$ die maximale Zeilensumme. Das Verfahren (1) ist dann äquivalent zu

$$\sum_{|\nu| \le N_0} D^{(0)}_{h,\nu}(.,t) T^\nu v_h(t) = \sum_{|\nu| \le N_1} D^{(1)}_{h,\nu}(.,t) T^\nu v_h(t-k) + k M_h^{-1} w_h(t)\,, \quad t \in [0,T]'_h\,, \tag{4}$$

wobei $v_h(t) = M_h^{-1} u_h(t)$. Die Elemente der Diagonalmatrizen seien mit $D^{(s)}_{h,\nu}(x,t) = \operatorname{diag}\left(d^{(s)}_{h,\nu,j}(x,t)\right)_{j=1,\ldots,r}$ bezeichnet. Wir setzen weiter voraus, daß die Matrizen $B^{(0)}_{h,\nu}(x,t)$ gleichmäßig beschränkt sind, d. h.

$$\left\| B^{(0)}_{h,\nu}(x,t) \right\|_\infty \le K_2, \quad (x,t) \in G_h \times [0,T]'_h\,,\ 0 < h \le h_0\,. \tag{5}$$

Dann sind auch die Diagonalmatrizen $D^{(0)}_{h,\nu}(x,t)$ gleichmäßig beschränkt.

Wir nennen nun ein gleichmäßig diagonalisierbares Verfahren (1) *positiv,* falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$d^{(1)}_{h,\nu,j}(x,t) \ge 0\,, \quad |\nu| \le N_1\,, \quad j = 1,\ldots,r\,,\ (x,t) \in G_h \times [0,T]'_h\,,\ 0 < h \le h_0\,, \tag{6}$$

$$d^{(0)}_{\nu,0,j}(x,t) - \sum_{0 \ne |\nu| \le N_0} \left| d^{(0)}_{h,\nu,j}(x,t) \right| \ge \rho_0 > 0\,, \quad j = 1,\ldots,r, (x,t) \in G_h \times [0,T]'_h\,,\ 0 < h \le h_0\,. \tag{7}$$

Zu dieser Definition sei folgendes bemerkt. Ist $d^{(0)}_{h,\nu,j} \le 0$, $j = 1,\ldots,r$, $\nu \ne 0$, wie in Forsythe–Wasow [FW60], (15.5), dann bedeutet (7)

$$\sum_{|\nu| \le N_0} d^{(0)}_{h,\nu,j}(x,t) \ge \rho_0 > 0\,, \quad j = 1,\ldots,r\,,\ (x,t) \in G_h \times [0,T]'_h\,,\ 0 < h \le h_0\,.$$

Falls das Verfahren explizit und $r = 1$ ist, dann sind die Bedingungen (6), (7) äquivalent zur Definition „positiver Typ“ in [FW60], 14.3 (mit $d^{(0)}_{h,0} \geq \rho_0$ und $b^{(1)}_{h,\nu} = d^{(1)}_{h,\nu}/d^{(0)}_{h,0}$ in (2)). Die *Sup–Norm* in $C(G_h)$ ist durch

$$|g|_\infty = \max_{1\leq j\leq r} \sup_{x\in G_h} |g_j(x)| \,, \quad g = (g_1, \ldots, g_r) \in C(G_h) \,,$$

definiert. Die Eigenschaft „positiv“ reicht alleine noch nicht aus, um die inverse Stabilität bzgl. der Sup–Norm zu sichern. Zusätzlich zu (5) und (6), (7) fordern wir noch, daß

$$\frac{\sum_{|\nu|\leq N_1} d^{(1)}_{h,\nu,j}(x,t)}{d^{(0)}_{h,0,j}(x,t) - \sum_{0\neq|\nu|\leq N_0} \left|d^{(0)}_{h,\nu,j}(x,t)\right|} = 1 + O(k)(h \to 0) \,. \tag{8}$$

Der Nenner ist wegen (7) positiv. Diese Bedingung ist notwendigerweise erfüllt, falls das Verfahren mit einer allgemeinen parabolischen Differentialgleichung konsistent ist (vgl. Forsythe–Wasow [FW60], 14.1, Törnig [Tö79], 16.).

Wir setzen immer stillschweigend voraus, daß auch $k = \Delta t \to 0$, wenn $h \to 0$ strebt — dies ist z. B. bei festen Schrittweitenverhältnissen $q = k/h^2$ bzw. $q = k/h$ erfüllt.

**Satz 1** *Das Verfahren (1) sei gleichmäßig diagonalisierbar, positiv und erfülle die Voraussetzungen (5) und (8). Dann sind die $C^{(0)}_h(t)$, $t \in [0,T]'_h$, $0 < h \leq h_0$, bijektiv und stetig invertierbar, und die Stabilitätsungleichung 8.1.(4) bzw. 8.1.(5) ist für die Sup–Norm $|.|_\infty$ erfüllt.*

*Beweis.* Siehe [Rei85, Satz 12.1]. □

Im Buch von Meis–Markowitz [MM78], § 8, werden Verfahren der Form (nach Diagonalisierung)

$$\begin{aligned}
\left(\hat{C}^{(0)}_h g\right)_j(x) &= \left[\sum_{\nu=-k}^{k} \alpha_{h,\nu,j}(x) + \sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\neq 0}}^{k} \beta_{h,\nu,j}(x)\right] g_j(x) \\
&\quad - \sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\neq 0}}^{k} \beta_{h,\nu,j}(x) g_j(x+\nu h) \,, \qquad (9) \\
\left(\hat{C}^{(1)}_h g\right)_j(x) &= \sum_{\nu=-k}^{k} \alpha_{h,\nu,j}(x) g_j(x+\nu h) \,, \quad j = 1,\ldots,r \,,\ g \in C(G_h) \,, h \in \mathbb{N} \,,
\end{aligned}$$

mit nichtnegativen, gleichmäßig beschränkten $\alpha_{h,\nu,j}$, $\beta_{h,\nu,j}$ und $\sum_\nu \alpha_{h,\nu,j} \geq 1$ betrachtet. Für Verfahren dieser Form erhält man als Korollar von Satz 1 das folgende Ergebnis.

**Satz 2** *Gleichmäßig diagonalisierbare Verfahren der Form (9) mit gleichmäßig beschränkten, nichtnegativen $\alpha_{h,\nu,j}$, $\beta_{h,\nu,j}$, $j = 1,\ldots,r$, $|\nu| \leq k$, $0 < h \leq h_0$, und $\sum_\nu \alpha_{h,\nu,j} \geq 1$ sind positiv, erfüllen die Bedingungen (5), (8) und sind daher stabil. Bedingung (8) gilt sogar mit der Schranke 1 anstelle von $1 + O(k)$.*

*Beweis.* In [Rei85, Satz 12.2] □

Am Ende dieses Abschnitts geben wir für verschiedene *Beispiele* Bedingungen an, wann die Positivität (6), (7) und die weiteren Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Die der Form (1) entsprechende Darstellung dieser Beispiele findet sich in Abschnitt 8.1. Die Bedingung (5) ist bei allen Beispielen trivialerweise erfüllt, da die Koeffizienten konstant und von $h$ unabhängig sind.

*Crank–Nicolson–Verfahren* (mit allgemeinem $\Theta$ in $0 \le \Theta \le 1$) :

$$B^{(1)}_{h,-1} = B^{(1)}_{h,1} = q(1-\Theta) \ge 0 \ , \quad B^{(1)}_{h,0} = \Big(1 - 2q(1-\Theta)\Big) \ge 0 \ , \quad \text{falls } q \le \frac{1}{2(1-\Theta)} \ .$$

$$B^{(0)}_{h,0} - \sum_{0 \ne |\nu| \le 1} \left| B^{(0)}_{h,\nu} \right| = \sum_{|\nu| \le 1} B^{(0)}_{h,\nu} = 1 \ ,$$

$$\sum_{|\nu| \le 1} B^{(1)}_{h,\nu} / \sum_{|\nu| \le 1} B^{(0)}_{h,\nu} = 1 \ .$$

Das Verfahren ist positiv und erfüllt Bedingung (8), falls das Schrittweitenverhältnis $q = k/h^2$ die Ungleichung $q \le 1/(2(1-\Theta))$ erfüllt. Für $\Theta = 1$ braucht keine Einschränkung des Schrittweitenverhältnisses gefordert zu werden. □

*Crank–Nicolson–Galerkin–Verfahren:* (s. 9.3.(14) )

$$B^{(1)}_{h,-1} = B^{(1)}_{h,1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q \ge 0 \ , \quad B^{(1)}_{h,0} = \frac{2}{3} - q \ge 0 \ , \quad \text{falls } q \le \frac{2}{3} \ .$$

$$B^{(0)}_{h,\nu} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q \le 0 \ , \quad \nu = -1, 1 \ , \quad \text{falls } q \ge 1/3 \ .$$

$$B^{(0)}_{h,\nu} - \sum_{0 \ne |\nu| \le 1} \left| B^{(0)}_{h,\nu} \right| = \sum_{|\nu| \le 1} B^{(0)}_{h,\nu} = 1 \ , \quad \text{falls } q \ge 1/3 \ .$$

$$\sum_{|\nu| \le 1} B^{(1)}_{h,\nu} \Big/ \left( B^{(0)}_{h,0} - \sum_{0 \ne |\nu| \le 1} \left| B^{(0)}_{h,\nu} \right| \right) = 1 \ , \quad \text{falls } q \ge 1/3 \ .$$

Das Verfahren ist positiv; falls $q \le 2/3$; es erfüllt Bedingung (8), falls $1/3 \le q$. □

*Friedrichs–Verfahren:* $r = 2$, $N_0 = 0$, $N_1 = 1$,

$$A = c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; PAP^{-1} = D = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; M_h = P^{-1},$$

$$D_{h,0}^{(0)} = I, \; D_{h,-1}^{(1)} = \frac{1}{2}(I - qD), \; D_{h,0}^{(1)} = 0, \; D_{h,1}^{(1)} = \frac{1}{2}(I + qD).$$

$$d_{h,\nu,j}^{(1)} \geq 0, \; |\nu| \leq 1, \; j = 1,2, \quad \text{falls } 1 - qc \geq 0, \text{ d. h. } q \leq 1/c.$$

$$\sum_{|\nu| \leq 1} d_{h,\nu,j}^{(1)} / d_{h,0,j}^{(0)} = 1, \; j = 1,2.$$

Das Friedrichs–Verfahren ist positiv und erfüllt Bedingung (8), falls das Schrittweitenverhältnis $q = k/h$ der Bedingung $q \leq 1/c$ genügt. Die Einschränkung $q \leq 1/c$ heißt auch die *Courant–Friedrichs–Lewy–Bedingung.* □

*Lax–Wendroff–Verfahren:* $r = 2$, $N_0 = 0$, $N_1 = 1$

Wegen $D^2 = c^2 I$ ist $D_{h,0}^{(0)} = I$, $D_{h,0}^{(1)} = I - q^2 D^2 = (1 - q^2 c^2) I$,

$$D_{h,-1}^{(1)} = -\frac{1}{2} qD(I - qD) = \frac{1}{2} qc \begin{pmatrix} qc - 1 & 0 \\ 0 & qc + 1 \end{pmatrix},$$

$$D_{h,1}^{(1)} = \frac{1}{2} qD(I + qD) = \frac{1}{2} qc \begin{pmatrix} qc + 1 & 0 \\ 0 & qc - 1 \end{pmatrix}.$$

$$d_{h,\nu,j}^{(1)} \geq 0, \; \nu = -1, 1, \; j = 1,2, \text{ falls } q \geq 1/c;$$

$$d_{h,0,j}^{(1)} \geq 0, \; j = 1,2, \text{ falls } q \leq 1/c.$$

$$\sum_{|\nu| \leq 1} d_{h,\nu,j}^{(1)} / d_{h,0,j}^{(0)} = 1, \; j = 1,2.$$

Das Lax–Wendroff–Verfahren ist positiv und erfüllt Bedingung (8), falls $q = 1/c$. □

Bei allen Beispielen mußte eine Beschränkung für das Schrittweitenverhältnis gefordert werden, um die Voraussetzungen (6), (7), (8) zu sichern — bei zwei Verfahren sogar zusätzlich eine Beschränkung nach unten. Verfahren, die nur für ein eingeschränktes Schrittweitenverhältnis stabil sind, nennt man *bedingt stabil.* Andernfalls sind sie *unbedingt stabil.* Diese Eigenschaft hängt natürlich von den zugrundegelegten Normen ab (in diesem Abschnitt: $|.|_\infty$).

## 8.3 Die von Neumann–Bedingungen

1. Als Vektorräume legen wir jetzt – wie schon in Kapitel 3 – die Räume $H(\mathbb{R}_h^\nu)$ aller auf äquidistanten Gittern $\mathbb{R}_h^\nu$ definierten Funktionen zugrunde, die an höchstens endlich vielen

Gitterpunkten von Null verschieden sind, mit dem Skalarprodukt

$$(v,\varphi)_0 = h^\nu \sum_{x\in\mathbb{R}_h^\nu} (v(x),\varphi(x))\,, \quad v,\,\varphi \in H(\mathbb{R}_h^\nu)\,. \tag{1}$$

Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall $\nu = 1$ — für $\nu > 1$ sei z. B. auf Meis-Markowitz [MM78], Kap. 10, verwiesen. Die Funktionen aus $H(\mathbb{R}_h)$ können vektorwertig sein, $v(x) \in \mathbb{K}^r$, $r \geq 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. In (1) bedeutet $(.,.)$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{K}^r$, $\|.\|$ bezeichnet die Euklidische Norm, und

$$\|v\|_0 = (v,v)_0^{1/2}$$

die zu (1) gehörige Norm.

2. Weiter betrachten wir periodische Gitterfunktionen mit Periode $2\pi$ und Gitterpunkten in $G_h = [0,2\pi)_h = \{x_j = 2\pi jh,\, j = 0,\ldots,M\}$, $h = 2\pi/(M+1)$. Man weiß, daß verschiedene Arten von Randbedingungen in Räume periodischer Funktionen integriert werden können (vgl. Meis-Markowitz [MM78], Kap. 8), womit eine große Klasse von Anfangswertproblemen erfaßt ist. Den Raum aller $2\pi$–periodischen Gitterfunktionen aus $H(\mathbb{R}_h)$ bezeichnen wir im folgenden mit $E_h$.

Mit Hilfe der Exponentialfunktionen $v^{(m)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(imx)$, $m = 0,\ldots,M$, kann bekanntlich jede Funktion $v_h \in E_h$ in der Form

$$v_h(x_j) = \sum_{m=0}^{M} A_m v^{(m)}(x_j)\,, \quad j = 0,\ldots,M\,, \tag{2}$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten

$$A_m = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{M} v_h(x_\nu)\exp(-imx_\nu)\,, \quad m = 0,\ldots,M\,, \tag{3}$$

als *diskrete Fourierkoeffizienten* bezeichnet werden. Die Norm von $v_h$ läßt sich mit Hilfe der Euklidischen Normen der diskreten Fourier-Koeffizienten ausdrücken, was man auch als *Parseval–Beziehung* für Gitterfunktionen bezeichnet,

$$\|v_h\|_0^2 = \sum_{m=0}^{M} \|A_m\|_2^2\,, \quad v_h \in E_h\,. \tag{4}$$

3. Die Bedeutung der folgenden sogenannten *charakteristischen Matrizen*

$$S_h^{(l)}(y) = \sum_{|\mu|\leq N_l} \exp(i\mu y) B_\mu^{(l)}\,, \quad y \in \mathbb{R},\, l = 0,1\,, \tag{5}$$

wird im folgenden Lemma klar.

**Lemma 1** *Die diskreten Fourierkoeffizienten von $C_h^{(l)} v_h$ sind gegeben durch*

$$S_h^{(l)}(mh) A_m \,, \quad m = 0, \ldots, M,\ l = 0, 1 \,, \tag{6}$$

*wobei $A_m \in \mathbb{K}^r$ die diskreten Fourierkoeffizienten von $v_h$ sind. Die Abbildung $C_h^{(0)}$ ist stetig invertierbar genau dann, wenn die Matrizen $S_h^{(0)}(mh)$, $m = 0, \ldots, M$, nichtsingulär sind.*

*Beweis.* Der Beweis von (6) folgt leicht durch Einsetzen von $v_h$ aus (2) in der Darstellung 8.1.(2) der $C_h^{(l)}$. Die Lösbarkeit der Gleichungen $C_h^{(0)} v_h = \varphi_h$ ist äquivalent zur Lösbarkeit von

$$\sum_{m=0}^{M} \left( S_h^{(0)}(mh) A_m - \tilde{A}_m \right) v^{(m)}(x) = 0 \,, \quad x \in G_h \,,$$

wobei $A_m$ bzw. $\tilde{A}_m$ die diskreten Fourierkoeffizienten von $v_h$ bzw. $\varphi_h$ bezeichnen. Da die $v^{(m)}$, $m = 0, \ldots, M$, linear unabhängig sind, folgt die zweite Behauptung. □

4. Wir nehmen im folgenden immer an, daß die $C_h^{(0)}$, $0 < h \le h_0$, in 8.1.(1) invertierbar sind – oder äquivalent, daß die $S_h^{(0)}(mh_n)$ nichtsingulär sind.

Zur Bestimmung der Lösung $u_h$ der homogenen Gleichung 8.1.(1) , d. h. $w_h^n = 0$ (vgl. 8.1.(3) ), für jede (diskrete) Zeitstufe genügt es also, die zugehörigen diskreten Fourierkoeffizienten $A_m^{(n)}$ von $u_h(t_n)$ aus der Gleichung

$$S_h^{(0)}(mh) A_m^{(n)} = S_h^{(1)}(mh) A_m^{(n-1)} \,, \quad m = 0, \ldots, M \,, \tag{7}$$

mit Hilfe der diskreten Fourierkoeffizienten $A_m^{(n-1)}$ von $u_h(t_{n-1})$ zu berechnen. Die Lösung von (7) ergibt sich als

$$A_m^{(n)} = S_{m,h} A_m^{(n-1)} \,, \quad m = 0, \ldots, M \,,$$

wobei die dabei auftretenden Matrizen

$$S_{m,h} = S_h^{(0)}(mh)^{-1} S_h^{(1)}(mh) \,, \quad m = 0, \ldots, M \,, \tag{8}$$

als *Verstärkungsmatrizen* bezeichnet werden. Induktiv sieht man, daß die zu den Potenzen von $C_h$ gehörigen Verstärkungsmatrizen gleich den entsprechenden Potenzen von $S_{m,h}$ sind. Für die Lösung $u_h^n$ von 8.1.(1) hat man daher die folgende, angestrebte Darstellung mit Hilfe der diskreten Fourierkoeffizienten der Anfangsfunktion.

**Lemma 2** *Seien $A_m^{(0)}$, $m = 0, \ldots, M$, die diskreten Fourierkoeffizienten von $u_h^0 \in E_h$. Dann ergeben sich für die Lösung $u_h(x, t_n) (= u_h^n)$ von 8.1.(1) mit $w_h^n = 0$ die Darstellungen*

$$\begin{aligned} u_h(x, t_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{M} \exp(imx) S_{m,h}^n A_m^{(0)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{M} G_h(x, t_n, x_\nu) u_h^0(x_\nu) \,, \quad n = 0, \ldots, N,\ x \in [0, 2\pi)_h \,, \end{aligned}$$

*wobei*

$$G_h(x,t_n,y) = \frac{h}{2\pi}\sum_{m=0}^{M} \exp(im(x-y))S_{m,h}^n\,, \quad x,y \in G_h,\, n=0,\ldots,N\,.$$

5. Für Gitterfunktionen mit Werten in $\mathbb{K}^1$ (i. e. $r=1$) nennt man $S_h^{(m)}(y)$ auch die *charakteristischen Funktionen* und $S_{m,h}$ die *Verstärkungsfaktoren,* die sich dann auch als

$$S_{m,h} = \frac{\sum_{|\mu|\le N_1} B_\mu^{(1)} \exp(i\mu m h)}{\sum_{|\mu|\le N_0} B_\mu^{(0)} \exp(i\mu m h)}\,, \quad m=0,\ldots,M\,,$$

schreiben lassen.

Wir geben gleich die Verstärkungsmatrizen bzw. -faktoren für die auch in Abschnitt 8.1 aufgeführten Differenzenverfahren an.

**Wärmeleitungsgleichung:**

*Crank–Nicolson–Verfahren* (mit $\Theta = 1/2$):

$$\begin{aligned} S_h^{(0)}(y) &= 1 + 2q\Theta(1-\cos(y)) \\ &= 1 + 4q\Theta\sin^2(y/2)\,, \\ S_h^{(1)}(y) &= 1 - 2q(1-\Theta)(1-\cos(y)) \\ &= 1 - 4q(1-\Theta)\sin^2(y/2)\,, \\ S_{m,h} &= \frac{1-4q(1-\Theta)\sin^2(mh/2)}{1+4q\Theta\sin^2(mh/2)}\,, \quad m=0,\ldots,M\,. \end{aligned}$$

Für $\Theta = 0$ bzw. $\Theta = 1$ erhält man die entsprechenden Größen des expliziten Verfahrens 4.2.(2) bzw. des impliziten Verfahrens 4.2.(3) .

*Verfahren Aufg. 13:*

$$S_h^{(0)} = E,\; S_h^{(1)}(y) = \begin{pmatrix} -2q(1+2\sin^2(y/2)) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

**Wellengleichung:**

*Lax–Wendroff–Verfahren* 7.2.(11) : $\quad S_h^{(0)} = E,$

$$S_h^{(1)}(y) = E + iq\sin(y)A + q^2(\cos(y)-1)A^2\,;$$

*Friedrichs–Verfahren* 7.2.(12) : $\quad S_h^{(0)} = E,$

$$\begin{aligned} S_h^{(1)}(y) &= \frac{1}{2}\exp(-iy)(E-qA) + \frac{1}{2}\exp(iy)(E+qA) \\ &= \cos(y)E + iq\sin(y)A\,; \end{aligned}$$

*Explizites Verfahren für die Wellengleichung:*

$$S_h^{(0)} = E\,, \quad S_h^{(1)}(y) = \begin{pmatrix} 2 - 4q^2 \sin^2(y/2) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

*Bocksprung–Verfahren:*

$$S_h^{(0)} = E\,, \quad S_h^{(1)} = \begin{pmatrix} 2qi \sin y & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

*Verfahren Aufg. 16:*

$$\begin{aligned} S_h^{(0)}(y) &= \begin{pmatrix} 1 + 2q^2\Theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q^2\Theta 2\cos y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 4q^2 \sin^2(y/2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ S_h^{(0)}(y)^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+4q^2 \sin^2(y/2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ S_h^{(1)}(y) &= \begin{pmatrix} 2\{1 - 2(1-2\Theta)q^2 \sin^2(y/2)\} & -(1 - 4\Theta q^2 \sin^2(y/2)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S_h(y) &= S_h^{(0)}(y)^{-1} S_h^{(1)}(y) = \\ &= \begin{pmatrix} 2\frac{1-2(1-2\Theta)q^2 \sin^2(y/2)}{1+4q^2\Theta \sin^2(y/2)} & -\frac{1-4\Theta q^2 \sin^2(y/2)}{1+4q^2\Theta \sin^2(y/2)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

6. Nach diesen Vorbereitungen, insbesondere mit Hilfe der expliziten Darstellung der Lösungen in Lemma 2 des vorherigen Abschnitts, sind wir nun in der Lage, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilitätsungleichung 8.1.(4) bzw. 8.1.(5) (im Raum der periodischen Gitterfunktionen und bzgl. der diskreten Normen $\|.\|_0$) mit Hilfe von Eigenschaften der Verstärkungsmatrizen anzugeben. Dazu benötigen wir noch ein Ergebnis, das die Normen der $C_h$ durch die Normen der zugehörigen Verstärkungsmatrizen ausdrückt. Es bezeichne

$$\|A\|_S = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

die *Spektralnorm* einer Matrix $A$, wobei $\rho(.)$ den *Spektralradius* (i. e. der Betrag des betragsgrößten Eigenwerts) und $A^* = \overline{A}^T$ die zugehörige *konjugierte Transponierte* darstellen. Es gilt dann die Beziehung

$$\|C_h\| := \sup_{0 \neq v \in E_h} \frac{\|C_h v\|_0}{\|v\|_0} = \max_{0 \le m \le M} \|S_{m,h}\|_S\,. \tag{9}$$

Damit können wir den folgenden Satz beweisen.

**Satz 3** *Sei $\|S_h^{(0)}(mh)^{-1}\|_S$ für alle $m = 0,\dots,M$, $0 < h \le h_0$ gleichmäßig beschränkt. Dann ist die Stabilitätsungleichung 8.1.(5) bzgl. der diskreten Norm $\|.\|_0$, i. e.*

$$\|C_h^n v_h\|_0 \le \gamma \|v_h\|_0\,, \quad v_h \in E_h,\ n = 0,\dots,N,\ N \ge N_0\,, \tag{10}$$

*äquivalent zu*

$$\max_{0\le m\le M} \|S_{m,h}^n\|_S \le \gamma\,, \quad n = 0,\dots,N,\ n \ge N_0\,. \tag{11}$$

*Hinreichend für (10) und (11) ist*

$$\max_{0\le m\le M} \|S_{m,h}\|_S \le 1 + \mathrm{O}(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0)\,. \tag{12}$$

*Notwendig für (10) und (11) ist die „von–Neumann–Bedingung"*

$$\max_{0\le m\le M} \rho(S_{m,h}) \le 1 + \mathrm{O}(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0)\,. \tag{13}$$

*Beweis.* Die diskreten Fourierkoeffizienten von $\varphi_h = C_h^{(0)-1} v_h$ sind durch $S_h^{(0)}(mh)^{-1}\tilde{A}_m$ gegeben, wobei $\tilde{A}_m$ die diskreten Fourierkoeffizienten von $\varphi_h \in E_h$ bezeichnen. Die gleichmäßige Beschränktheit der $C_h^{(0)-1}$ bzgl. der Normen $\|.\|_0$ ist wegen der Parseval-Beziehung 8.3.(4) äquivalent zur gleichmäßigen Beschränktheit von $\|S_h^{(0)}(mh)^{-1}\|_S$, $m = 0,\dots,M$ (vgl. auch (9)), die wir in diesem Satz vorausgesetzt haben. Es genügt daher für die inverse Stabilitätsungleichung 8.1.(5) die gleichmäßige Beschränktheit der $C_h^n$, $0 \le n \le N$, zu charakterisieren. Zur Äquivalenz von (5) mit (10) ist noch zu beachten, daß für jedes $h > 0$ wegen der endlichen Dimension von $E_h$ die Abbildung $C_h$ trivialerweise stetig ist.

(10) $\Leftrightarrow$ (11). Da $S_{m,h}^n$, $m = 0,\dots,M$, die zu $C_h^n$ gehörigen Verstärkungsmatrizen darstellen, folgt nach (9)

$$\|C_h^n\| = \max_{0\le m\le M} \|S_{m,h}^n\|_S\,, \quad n = 0,\dots,N\,.$$

Mit (10) hat man deshalb sofort (11). Umgekehrt folgt aus (11), daß

$$\|C_h^n v_h\|_0 \le \max_{0\le m\le M} \|S_{m,h}^n\|_S \|v_h\|_0 \le \gamma\|v_h\|_0\,, \quad v_h \in E_h,\ n = 0,\dots,N,\ N \ge N_0\,.$$

(12) $\Rightarrow$ (11). Mit gewissen $C \ge 0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ folgt aus (12), daß,

$$\|S_{m,h}^n\|_S \le \|S_{m,h}\|_S^n \le (1 + C\Delta t)^n \le \exp(Cn\Delta t) \le \exp(CT)$$
$$m = 0,\dots,M,\ n = 0,\dots,N,\ N \ge N_0\,,$$

wobei die dritte Ungleichung eine unmittelbare Folgerung aus der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion ist.

(11) $\Rightarrow$ (13). O. B. d. A. sei $\gamma \ge 1$ in (11). Eine Kurvendiskussion zeigt, daß $\gamma^x \le 1 + \gamma x$ für $0 \le x \le 1$. Es ist bekanntlich $\rho(S_{m,h})^n = \rho(S_{m,h}^n)$, so daß aus (11) und $\rho(A) \le \|A\|_S$ folgt

$$\max_{0\le m\le M} \rho(S_{m,h}) \le \gamma^{1/n}\,, \quad 0 \le n \le N(= T/\Delta t)\,.$$

Für $n = N$ erhält man die von-Neumann-Bedingung, denn

$$\max_{0\le m\le M} \rho(S_{M,h}) \le \gamma^{\Delta t/T} \le 1 + \gamma \frac{\Delta t}{T}, \quad N \ge N_0 .$$

□

7. Von großem Interesse sind Aussagen, die in Spezialfällen auch die Hinlänglichkeit der von-Neumann-Bedingung für die inverse Stabilitätsungleichung (10) sichern. Der folgende Satz liefert eine solche Aussage.

**Satz 4** *Die von-Neumann-Bedingung (13) ist äquivalent zu (10) und (11), falls die Verstärkungsmatrizen $S_{m,h}$, $m = 0, \ldots, M$, normal sind, d. h. $S_{m,h}S_{m,h}^* = S_{m,h}^* S_{m,h}$. Sind die Koeffizienten $B_0^{(0)}$, $B_\mu^{(1)}, |\mu| \le N_1$ eines expliziten Verfahrens von $h, \Delta t$ unabhängig, die Verstärkungsmatrizen normal und konvergieren $\Delta t \to 0$, $h \to 0$, dann ist die von-Neumann-Bedingung äquivalent zu*

$$\|S(y)\|_S \le 1, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

*wobei $S(y) \equiv \sum_{|\mu|\le N_1} \exp(i\mu y) B_0^{(0)-1} B_\mu^{(1)}$.*

*Beweis.* Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß für normale Matrizen gilt (vgl. Varga [Var62], Sec. 1.3)

$$\|S_{m,h}\|_S = \rho(S_{m,h}), \quad m = 0, \ldots, M .$$

Aus (13) folgt deshalb (12), und somit auch (11). Vorbereitend zum Nachweis der Äquivalenz von (13) und (14) stellt man fest, daß es zu jedem $y \in [0, 2\pi]$, $h > 0$, ein $m \in \{0, \ldots, M\}$ gibt mit

$$|y - mh| \le h .$$

Im vorliegenden Fall eines expliziten Verfahrens ist $S_{m,h} = S(mh)$, so daß wegen der Stetigkeit von $S(.)$ und $h \to 0$ folgt

$$\lim_{h\to 0} \|S_{m,h}\|_S = \lim_{h\to 0} \|S(mh)\|_S = \|S(y)\|_S .$$

Setzt man nun die von-Neumann-Bedingung (13) voraus, dann folgt für normale Verstärkungsmatrizen

$$\|S(y)\|_S = \lim_{h\to 0} \|S_{m,h}\|_S = \lim_{h\to 0} \rho(S_{m,h}) \le \lim_{h\to 0} (1 + C\Delta t) = 1, \quad y \in [0, 2\pi] .$$

Beachtet man noch, daß $S(.)$ eine periodische Funktion ist, dann ist (14) gezeigt. Umgekehrt folgt aus (14) über $S_{m,h} = S(mh)$, $m = 0, \ldots, M$, sofort die von-Neumann-Bedingung (13).
□

8. Als Konsequenz des letzten Satzes ist offensichtlich, daß man im skalaren Fall (i. e. $r = 1$) die Bedingungen (10) bis (13) immer äquivalent sind. Die von-Neumann-Bedingung läßt sich dann mit den Verstärkungsfaktoren schreiben als

$$\max_{0\le m\le M} |S_{m,h}| \le 1 + \mathrm{O}(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0) .$$

Falls die Verstärkungsmatrizen durch Ähnlichkeitstransformationen in normale Matrizen $\Lambda_{m,h} = M_{m,h}^{-1} S_{m,h} M_{m,h}$ überführt werden können und die $M_{m,h}$ zusammen mit ihren Inversen gleichmäßig beschränkt sind, dann ist die von-Neumann-Bedingung (13) auch äquivalent zu (10) und (11). Dieses Resultat ist eine naheliegende Verallgemeinerung der ersten Aussage von Satz 4; sein Beweis ist klar, da Ähnlichkeitstransformationen den Spektralradius unverändert lassen.

Im Hinblick auf die zu analysierenden Beispiele geben wir noch ein weiteres Ergebnis an, das die Hinlänglichkeit der von-Neumann-Bedingung für die Stabilität sichert. Sein Beweis findet sich in Richtmyer & Morton [RM67], Sec. 4.11, wo auch noch weitere derartige Aussagen bewiesen worden sind.

**Satz 5** *Die Koeffizienten der Verstärkungsmatrizen $S_{m,h}$ seien gleichmäßig in $m, h$ beschränkt, und für die Eigenwerte $\lambda_s$ von $S_{m,h}$ gelte, mit der möglichen Ausnahme von $\lambda_1$, daß*

$$|\lambda_s| \leq \gamma < 1\,, \quad s = 2, \ldots, r,\ m = 0, \ldots, M\,.$$

*Dann ist die von-Neumann-Bedingung sowohl hinreichend als auch notwendig für die Stabilitätsungleichung (10).*

9. Für die verschiedenen Verfahren, für die wir im Anschluß an Lemma 2 in 8.3 schon die Verstärkungsmatrizen bzw. -faktoren berechnet haben, überprüfen wir nun deren Stabilitätseigenschaften bzgl. der diskreten Normen $\|.\|_0$.

Wir möchten darauf hinweisen, daß man zum Nachweis der bedingten Stabilität immer auch zeigen muß, daß für gewisse Schrittweitenverhältnisse die inverse Stabilität nicht vorliegt. Ein Verfahren heißt *bedingt stabil*, wenn es nur für ein eingeschränktes Schrittweitenverhältnis stabil ist; ein Verfahren heißt *unbedingt stabil*, wenn es für jedes Schrittweitenverhältnis stabil ist. Wir setzen bei den Beispielen immer voraus, daß $\Delta t \to 0$. Bei festen Schrittweitenverhältnissen $q = \Delta t/h^2$ oder $q = \Delta t/h$ konvergiert dann auch $h \to 0 (n \to \infty)$.

**Satz 6** *Das Crank–Nicolson–Verfahren (mit allgem. $\Theta$ in $0 \leq \Theta \leq 1$) ist für $\Theta$ in $1/2 \leq \Theta \leq 1$ unbedingt stabil, d. h. jede der äquivalenten Bedingungen (10) – (13) ist für alle $q > 0$ erfüllt; für $\Theta$ in $0 \leq \Theta < 1/2$ ist es d. u. n. d. stabil, wenn*

$$q \leq \frac{1}{2(1-2\Theta)}\,.$$

*Beweis.* Offenbar ist $S_h^{(0)}(y)^{-1} \leq 1$, so daß die Voraussetzung des Stabilitätssatzes 3 erfüllt ist, und die $C_h^{(0)-1}$ existieren und gleichmäßig beschränkt sind. Es ist

$$S_h(y) = S_h^{(1)}(y)/S_h^{(0)}(y) \leq 1\,, \quad y \in \mathbb{R},\ h > 0\,.$$

Zur Herleitung einer Abschätzung nach unten setzen wir $\alpha \equiv 4q \sin^2(y/2)$ und stellen fest, daß

$$S_h(y) = \frac{1-(1-\Theta)\alpha}{1+\Theta\alpha} \overset{\leq}{\geq} -1\,, \quad \text{falls } \alpha(1-2\Theta) \overset{\geq}{\leq} 2\,.$$

Für $\Theta$ in $1/2 \le \Theta \le 1$ ist $-1 \le 1 - 2\Theta \le 0$, und

$$\alpha(1 - 2\Theta) \le 0 < 2\,,$$

so daß $-1 \le S_h(y) \le 1$ für alle $h > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Falls $0 \le \Theta < 1/2$, dann ist $1 - 2\Theta > 0$, und unter der Voraussetzung $q \le 1/[2(1 - 2\Theta)]$ folgt

$$\alpha(1 - 2\Theta) = 4q(1 - 2\Theta)\sin^2(y/2) \le 2\sin^2(y/2) \le 2\,.$$

Damit hat man auch in diesem Fall $|S_h(y)| \le 1$.

Sei nun $q > 1/[2(1-2\Theta)]$. Wir bemerken zuerst, daß für jede Folge $m_n \in \{0, \ldots, M\}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $m_n h \to \pi\,(n \in I)$ gilt

$$S_{m_n,h} = S_h(m_n h) \longrightarrow \frac{1 - 4q(1 - \Theta)}{1 + 4q\Theta} \quad (n \to \infty)\,.$$

Wie oben gezeigt, hat man

$$\frac{1 - 4q(1 - \Theta)}{1 + 4q\Theta} < -1\,, \quad \text{falls} \quad 4q(1 - 2\Theta) > 2\,.$$

Für ein solches $q$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\rho_0 > 0$, so daß

$$|S_{m_n,h}| \ge 1 + \rho_0\,, \quad n \ge n_0\,.$$

Mit $m_n \to \infty$ konvergiert dann auch $|S_{m_n,h}|^{m_n} \to \infty\,(n \to \infty)$, so daß die inverse Stabilität bzgl. der diskreten Normen $\|.\|_0$ nicht erfüllt ist. □

Die Aussage des letzten Satzes besagt insbesondere, daß das Crank–Nicolson–Verfahren und das implizite Verfahren (mit $\Theta = 1$) unbedingt stabil bzgl. der diskreten Normen $\|.\|_0$ ist.

10. Für das Friedrichs- und das Lax–Wendroff–Verfahren zur numerischen Lösung hyperbolischer Systeme erster Ordnung mit einer konstanten, reell-diagonalisierbaren Matrix $A$ geben wir die entsprechenden Aussagen zur Stabilität nur an und verweisen im übrigen auf die Standardliteratur.

**Satz 7** *Für eine konstante, reell-diagonalisierbare Matrix $A$ ist das Friedrichs–Verfahren (vgl. 7.2.(12) ) und das Lax–Wendroff–Verfahren (vgl. 7.2.(11) ) d. u. n. d. stabil bzgl. der diskreten Normen $\|.\|_0$, wenn $q\rho(A) \le 1$ ist.*

Man hat also für beide Verfahren die gleiche Einschränkung des Schrittweitenverhältnisses $q$ als hinreichende und auch notwendige Bedingung für die Stabilität. Für die Wellengleichung ergibt sich so gerade die bekannte Courant–Friedrichs–Lewy-Bedingung $q \le 1/c$.

11. Wir untersuchen in diesem Zusammenhang nun noch die Stabilitätseigenschaften des einfachsten expliziten Verfahrens zur numerischen Lösung der Wellengleichung (vgl. Abschnitt 6.2). Dies ist deshalb interessant, weil damit ein Verfahren vorliegt, das die von-Neumann-Bedingung erfüllt, aber nicht invers stabil bzgl. der diskreten Normen $\|.\|_0$ ist. Damit wird der Charakter der von-Neumann-Bedingung als einer im allgemeinen nur notwendigen Stabilitätseigenschaft unterstrichen.

**Satz 8** *Das explizite Verfahren aus Abschnitt 6.2 erfüllt für $q \leq 1$ die von-Neumann-Bedingung. Für $q = 1$ ist es jedoch nicht stabil bzgl. der diskreten Normen $\|.\|_0$.*

*Beweis.* (a) Setzen wir

$$\Lambda(y) \equiv 1 - 2q^2 \sin^2(y/2)\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

dann ist

$$S_h(y) = S_h^{(0)}(y)^{-1} S_h^{(1)}(y) = \begin{pmatrix} 2\Lambda(y) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $S_h(y)$ erhält man aus

$$\mu^2 - 2\Lambda(y)\mu + 1 = 0\,,$$

d. h. $\mu_{1,2} = \Lambda(y) \pm \sqrt{\Lambda^2(y) - 1}$, $y \in \mathbb{R}$. Wegen $\Lambda(y) \leq 1$ schreibt man besser

$$\mu_{1,2} = \Lambda(y) \pm i\sqrt{1 - \Lambda(y)^2}\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

und die von-Neumann-Bedingung ist erfüllt, denn

$$|\mu_{1,2}| = \Lambda(y)^2 + 1 - \Lambda(y)^2 = 1\,.$$

(b) Wir zeigen, daß für $q = 1$ eine Folge $m_n \in \{0, \ldots, M\}$, $n \in \mathbb{N}$, existiert, so daß für jede Folge $\nu_n \to \infty\,(n \to \infty)$ gilt

$$\|S_{m_n,h}^{\nu_n}\|_S \longrightarrow \infty\,(n \to \infty)\,.$$

Wir wählen $m_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, dann strebt $m_n h \to 0\,(n \to \infty)$ und $\lambda_n := \Lambda(m_n h) \to 1 (n \to \infty)$, wobei immer $\lambda_n \leq 1$ bleibt. Mit Hilfe der Ableitung

$$\Lambda'(y) = 2\sin(y/2)\cos(y/2)$$

und $\sin(y/2) \leq y/2$ für $0 \leq y \leq h$, $h$ hinreichend klein, folgt unter Ausnutzung des Mittelwertsatzes, daß

$$|\Lambda(0) - \Lambda(h)| = 1 - \lambda_n \leq h \sup_{0 \leq y \leq h} |\Lambda'(y)| \leq h^2\,.$$

Für

$$M_n := S_{1,h} = \begin{pmatrix} 2\lambda_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt daher die Beziehung $M_n = M(1 + \mathrm{O}(h^2))$ und induktiv sieht man, daß

$$M^\nu = -(\nu - 1)I + \nu M\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Daraus folgt, daß die Spektralnormen von $M^\nu$ gegen Unendlich streben. Nach Definition der Spektralnorm und der obigen Darstellung für $M^\nu$ erhält man nämlich für den Vektor $\hat{x} = (1, 0)^T$ daß

$$\begin{aligned} \|M^\nu\|_S &= \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^2} \frac{(M^\nu x, M^\nu x)^{1/2}}{(x, x)^{1/2}} \geq \frac{(M^\nu \hat{x}, M^\nu \hat{x})^{1/2}}{(\hat{x}, \hat{x})^{1/2}} \\ &= \left\{(\nu - 1)^2(\hat{x}, \hat{x}) - 2\nu(\nu - 1)(M\hat{x}, \hat{x}) + \nu^2(M\hat{x}, M\hat{x})\right\}^{1/2} \\ &= \{2\nu^2 + 2\nu + 1\} \longrightarrow \infty \quad \nu \to \infty)\,. \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte einer Matrix stetig von deren Koeffizienten abhängen, konvergiert auch

$$\|M_n^{\nu_n}\|_S^2 \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty)$$

für jede Folge $\nu_n \to \infty\,(n \to \infty)$. □

## Kapitel 9

# Differenzenverfahren aus Variationsmethoden

In Kapitel 3 haben wir schon gesehen, daß der diskrete Laplace–Operator eine diskrete Variationsgleichung erfüllt, und auf diesem Weg konnten Stabilitäts- und Diskretisierungsfehlerabschätzungen bzgl. diskreter $L^2$–Normen nachgewiesen werden. Wir werden in diesem Kapitel den umgekehrten Weg einschlagen und zeigen, daß elliptische, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen selbst gewisse Variationsgleichungen erfüllen, die ihrerseits Ausgangspunkt für die Entwicklung von Näherungsmethoden sind. Dieser Zugang ist der der Methode der Finiten Elemente, der in einfachen Fällen auf Differenzenverfahren führt, die sich von denen der vorigen Kapitel unterscheiden, und für die über den variationellen Zugang in Verbindung mit Interpolationsabschätzungen Fehlerabschätzungen gezeigt werden können. Wir wollen hier nur die Idee an Modellproblemen erläutern; hinsichtlich der Interpolations- und Fehlerabschätzungen sei auf die Literatur zur Methode der Finiten Elemente verwiesen (s. z. B. [Rei85], [Rei96] und die darin angegebene Literatur).

## 9.1 Elliptische Differentialgleichungen (1-dim.)

Die 2–Punkt–Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

stellt ein Modellproblem dar, das die Verbiegung eines elastischen Stabes oder eine stationäre Wärmeverteilung in einem Stab beschreibt.

Bezeichnet man mit

$$(v,w) = \int_0^1 v(x)w(x)\,dx$$

das $L^2$–Skalarprodukt für reellwertige Funktionen, und

$$\begin{aligned} V &:= \Big\{ v \mid v \text{ stetig in } [0,1]\,,\ v' \text{ stückweise stetig und} \\ &\qquad \text{beschränkt, } v(0) = v(1) = 0 \Big\} \\ F(v) &:= \frac{1}{2}(v',v') - (f,v)\,, \quad v \in V\,, \end{aligned}$$

dann erfüllt eine Lösung von (1) auch das folgende *Minimierungsproblem:*

$$\textit{Gesucht} \quad u \in V \quad \textit{mit} \quad F(u) \;\leq\; F(v) \quad \forall v \in V \; . \tag{2}$$

Bildet man die Ableitung von $g(\varepsilon) := F(u + \varepsilon v)$ als Funktion von $\varepsilon$, dann ist das Nullsetzen von $g'$ notwendig (und in diesem Fall auch hinreichend) für den Erhalt eines Minimums. Dies führt auf die sogenannte *Variationsgleichung,*

$$(u', v') = (f, v) \; , \quad v \in V \; . \tag{3}$$

Die Lösung von (3) ist eindeutig bestimmt — falls sie existiert — und falls $u''$ existiert und stetig ist, löst sie auch die Randwertaufgabe (1).

Die Variationsgleichung (3) ist nun der Ausgangspunkt für die Herleitung von Näherungsverfahren, von denen wir uns auf den einfachen Fall von stetigen, stückweisen linearen Näherungsfunktionen beschränken wollen. Dazu bezeichne

$$\Delta : 0 = x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

eine *Unterteilung* von $[0, 1]$ in Teilintervalle $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ der Länge $h_j = x_j - x_{j-1}$ , $j = 1, \ldots, n$; weiter sei $h = \max_{1 \leq j \leq n} h_j$. Der Parameter $h$ gibt also an, wie fein das Intervall unterteilt ist. Wie angekündigt, sei

$$V_h := \{ v \in C[0,1] \,|\, v|I_j = \text{ linear}, \quad v(0) = v(1) = 0 \} \; .$$

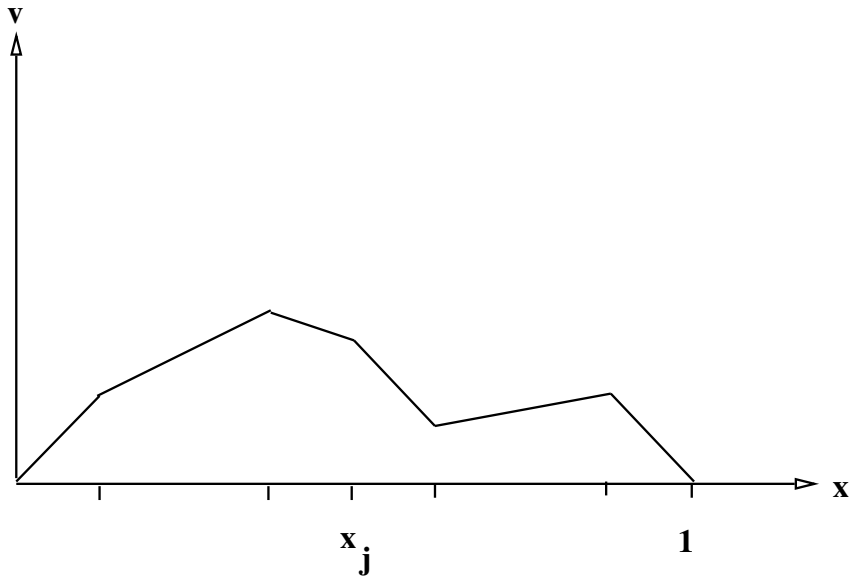



Fig. 9.1: Beispiel einer Funktion $v \in V_h$

Man erhält so also einen Teilraum $V_h \subset V$ der Dimension $n-1$; Funktionen aus $V_h$ sind eindeutig bestimmt durch deren Werte $\eta_j = v(x_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$, an den *Gitterpunkten* $x_j$. Basisfunktionen in $V_h$ erhält man durch die sogenannten „Dachfunktionen“ (engl. 'roof functions'), die durch die Eigenschaften

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 \quad , & i = j \\ 0 \quad , & i \neq j \, , \qquad j = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

charakterisiert sind. Diese ergeben sich als

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \, , \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} & , \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \, , \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \, , \\ 0 & , \quad x_{i+1} \leq x \leq 1 \, , \qquad i = 1, \ldots, n-1 \, . \end{cases}$$

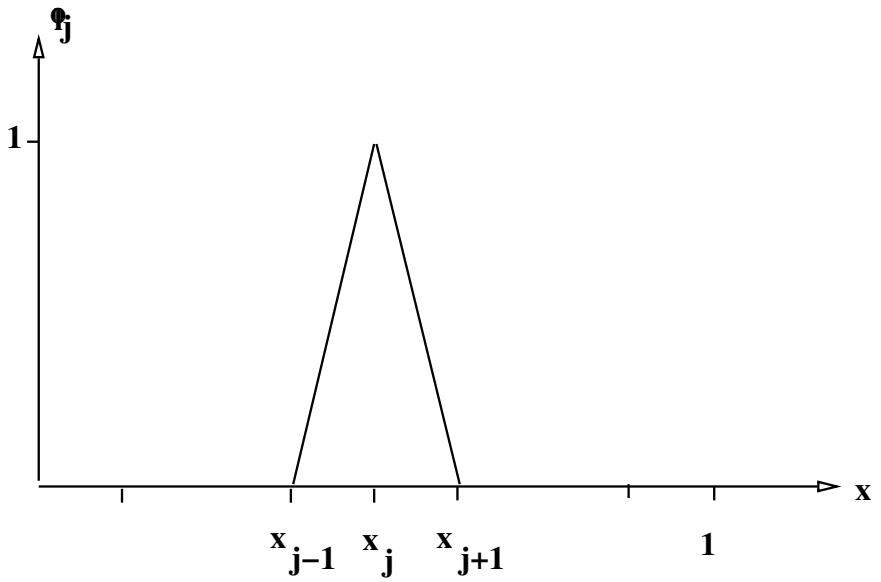



Fig. 9.2: Die Basisfunktionen $\varphi_j$

Jede Funktion $v \in V_h$ läßt sich offenbar durch

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \varphi_i(x) \, , \qquad x \in [0,1] \, ,$$

darstellen mit $\eta_i = v(x_i)$.

Die *Methode der Finiten Elemente* (Abk.: FEM) für das Randwertproblem (1) und den ausgewählten endlichdimensionalen Raum $V_h$ besteht nun darin, die folgende Aufgabe zu lösen:

$$\textit{Gesucht} \quad u_h \in V_h \quad \textit{mit} \quad F(u_h) \;\leq\; F(v) \quad \forall v \in V_h \; . \tag{4}$$

Man macht man sich leicht klar, daß diese Aufgabenstellung äquivalent dazu ist, das folgende *endlichdimensionale Variationsproblem* zu lösen:

$$\textit{Gesucht} \quad u_h \in V_h \quad \textit{mit} \quad (u_h', v') \;=\; (f, v) \quad \forall v \in V_h \; . \tag{5}$$

Das Problem (5) heißt üblicherweise auch *Galerkin Methode* ; das Minimierungsproblem wird auch *Ritz Methode* genannt. Setzt man

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x) \, , \qquad \xi_i = u_h(x_i) \, ,$$

und in (5) nacheinander $v = \varphi_j$ , $j = 1, \ldots, n-1$, dann ist die Galerkin Methode (5) äquivalent zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i (\varphi_i', \varphi_j') = (f, \varphi_j) \, , \qquad j = 1, \ldots, n-1 \, , \tag{6}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten $\xi_i$ der *Galerkin Approximation* $u_h$. Die zugehörige Matrix $A = (a_{j,i})$ mit den Koeffizienten $a_{j,i} = (\varphi_i', \varphi_j')$ bezeichnet man auch als *(Gesamt-) Steifigkeitsmatrix* ; der Vektor der rechten Seiten $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})^\top$, mit $b_j = (f, \varphi_j)$, heißt auch *Lastvektor*. Diese Bezeichnungen stammen aus der ursprünglichen Entwicklung und Anwendung der FEM in der Strukturmechanik.

Im vorliegenden Beispiel der Dachfunktionen können die Koeffizienten der sogenannten Steifigkeitsmatrix $A$ leicht berechnet werden. Zunächst beobachtet man, daß $(\varphi_i', \varphi_j') = 0$ ist, falls $|i-j| > 1$. Dies zeichnet eine *lokale Basis* aus, bei der im vorliegenden eindimensionalen Fall nur benachbarte Basisfunktionen einen gemeinsamen *Träger* [1] haben. Dadurch wird $A$ tridiagonal, und man rechnet aus, daß

$$\begin{aligned}
(\varphi_j', \varphi_j') &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} \, dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h_{j+1}^2} \, dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \, , \; j = 1, \ldots, n-1 \, , \\
(\varphi_j', \varphi_{j-1}') &= (\varphi_{j-1}', \varphi_j') = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} \, dx = -\frac{1}{h_j} \, , \qquad j = 2, \ldots, n-1 \, , \\
(\varphi_j', \varphi_{j+1}') &= (\varphi_{j+1}', \varphi_j') = -\frac{1}{h_{j+1}}, \quad j = 1, \ldots, n-2.
\end{aligned}$$

[1] Bezeichnung und Definition: $\operatorname{supp} \varphi := \{x | \varphi(x) \neq 0\}$

Offenbar ist $A$ symmetrisch und auch positiv definit, denn für einen Vektor $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})^\top \in \mathbb{R}^n$ hat man mit $v = \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j \varphi_j(x)$, daß

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \eta_i (\varphi_i', \varphi_j') \eta_j = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \varphi_i', \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j \varphi_j' \right) = (v', v') \geq 0 \ .$$

In der letzten Ungleichung gilt Gleichheit nur, wenn $v' \equiv 0$ ist, was in Verbindung mit $v(0) = 0$ nur für $v \equiv 0$ — oder $\eta_j = 0$ , $j = 1, \ldots, n-1$ — richtig ist.

Für eine positiv definite Matrix ist bekanntlich das zugehörige Gleichungssystem für jede rechte Seite eindeutig lösbar, und man kann hier das Gaußsche Eliminationsverfahren für tridiagonale Matrizen — ohne Zeilenvertauschung — als ein direktes Verfahren zur Berechnung der Lösung einsetzen (vgl. [SH82, § 6]).

Im Spezialfall einer gleichförmigen Unterteilung, i. e. $h_j = h = \frac{1}{n}$, hat das Gleichungssystem (6) die Form

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2} (\xi_{j-1} - 2\xi_j + \xi_{j+1}) &= \frac{1}{h}(f, \varphi_j) \ , \qquad j = 1, \ldots, n-1 \ , \\ \xi_0 &= \xi_n = 0 \ . \end{aligned}$$

Dies ist auf der linken Seite offenbar genau die Approximation der zweiten Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung . Im Gegensatz zu einem entsprechenden Differenzenverfahren hat man bei der Galerkin Methode rechts eine Art Mittelung von $f$ über das Interval $(x_{j-1}, x_{j+1})$ zu nehmen; eine Approximation z. B. durch die Simpson–Formel in $I_j$ und $I_{j+1}$ hat die Gestalt

$$\frac{1}{h}(f, \varphi_j) \approx \frac{1}{3}(f(x_{j-1/2}) + f(x_j) + f(x_{j+1/2}) ) \ ,$$

wobei $x_{j\pm 1/2} := \frac{1}{2}(x_j + x_{j\pm 1})$.

Fehlerabschätzungen für die Differenz der Lösung $u$ von (1) bzw. $u_h$ von (5) beruhen auf der folgenden *Fehlergleichung*

$$( (u - u_h)', v') = 0 \qquad \forall v \in V_h \ , \tag{7}$$

die durch Subtraktion der Gleichung in (3) und (5) unter Beachtung von $V_h \subset V$ folgt.

Für die folgenden Abschätzungen benötigen wir die $L^2$–Norm

$$\|w\| = (\|w\|_0 =)(w, w)^{1/2} = \left( \int_0^1 w^2 \, dx \right)^{1/2} \ ,$$

für die bekannntlich die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|(v, w)| \leq \|v\| \, \|w\|$$

gilt.

Der folgende Satz zeigt, daß $u_h$ in gewissem Sinne die beste Approximation von $u$ in Teilraum $V_h$ darstellt; die zugrundeliegende Norm ist dabei

$$|v|_1 = \|v'\| , \qquad v \in V .$$

Man weiß aus der Ungleichung von Poincaré–Friedrichs, daß die so definierte Halbnorm in $V$ — wegen der Nullrandbedingungen — sogar eine Norm darstellt.

**Satz 1** *Für die Lösungen $u$ von (3) bzw. $u_h$ von (5) und jedes $v \in V_h$ gilt die Ungleichung*

$$|u - u_h|_1 \leq |u - v|_1 . \tag{8}$$

*Beweis.* Siehe [Rei96, Satz 1.7] □

## 9.2 Die Poisson–Gleichung (2–dim.)

Als einfachsten Modellfall einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung betrachten wir das sog. *erste Randwertproblem der Potentialtheorie:*

*Gesucht* $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$ *mit*

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial G , \\ -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad G . \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sind $G$ ein offenes, beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^2$, hier der Einfachheit halber das Einheitsquadrat $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x, y < 1\}$, mit dem Rand $\partial G$ und $\Delta = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$ der *Laplace–Operator*. Das Problem (1) ist das mathematische Modell einer über $G$ eingespannten elastischen Membran mit Massedichte $\rho = 1$, welche durch eine äußere Kraft mit Kraftdichte $-f(x,y)$ eine Auslenkung $u(x,y)$ erfährt. Die Randbedingung $u|_{\partial G} = 0$ entspricht der Forderung, daß die Membran am Rand eingespannt ist. Die physikalische Grundannahme für die elastische Membran ist die Proportionalität ihrer *elastischen Energie* $F_E$ zur Flächenänderung (o.B.d.A. Proportionalitätsfaktor $\mu = 1$; $u_x = \partial u/\partial x$ , $u_y = \partial u/\partial y$)

$$F_E(u) := \int_G \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy - \int_G dx\, dy .$$

Da wir nur kleine Auslenkungen $u, u_x, u_y$ betrachten wollen, entnehmen wir der Taylorentwicklung um $(u_x, u_y) = (0,0)$

$$\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \mathrm{O}\left((u_x^2 + u_y^2)^2\right)$$

die Näherungsformel für die elastische Energie

$$F_E(u) \sim \frac{1}{2} \int_G \left( u_x^2 + u_y^2 \right) \, dx \, dy \; .$$

Der äußeren Kraft entspricht ferner die *potentielle Energie*

$$F_A(u) := - \int_G f u \, dx \, dy \; .$$

Die stabile Gleichgewichtslage $u(x, y)$ des physikalischen Systems wird nun dadurch charakterisiert (Hamiltonsches Prinzip) , daß sie der gesamten Energie

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_G \left\{ u_x^2 + u_y^2 \right\} \, dx \, dy - \int_G f u \, dx \, dy$$

ein Minimum erteilt, d. h. es ist das folgende *Minimierungsproblem* zu lösen,

$$\min_{v \in V} F(v) = F(u) \; . \tag{2}$$

Dabei sind als Vergleichsfunktionen $v \in V$ alle stetigen auf $\partial G$ verschwindende Funktionen mit stückweise stetigen beschränkten ersten Ableitungen zugelassen. Folglich ist für jedes in diesem Sinne zulässige $v$

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(u + \varepsilon v) \Big|_{\varepsilon = 0} = 0 \; .$$

Wir werten dies aus und gelangen zu

$$\int_G \{ u_x v_x + u_y v_y \} \, dx \, dy - \int_G f v \, dx \, dy = 0$$

bzw. abgekürzt geschrieben

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy = \int_G f v \, dx \, dy \quad \forall v \in V \; . \tag{3}$$

Dies ist das zugehörige *Variationsproblem* bzw. die *Variationsgleichung*. Ist die stabile Gleichgewichtslage $u$ sogar aus $C^2(G)$, so ergibt die Anwendung der Greenschen Formel

$$- \int_G (\Delta u) v \, dx \, dy = \int_G f v \, dx \, dy$$

für alle zulässigen Funktionen $v$. Hieraus folgt dann notwendig das Bestehen der Beziehung (1) in $G$. Man nennt (1) die *Eulersche Differentialgleichung* zum Variationsproblem (3).

Wir werden nun an Hand des Modellproblems (1) die Vorgehensweise der *Methode der finiten Elemente* beschreiben. Im Gegensatz zu den Differenzenverfahren, die direkt an der Differentialgleichung (1) ansetzen, geht die Methode der finiten Elemente als Spezialfall des allgemeinen *Ritzschen Projektionsverfahrens* von der ursprünglichen variationellen Formulierung (2) des Problems aus:

$$\textit{Minimiere} \quad F(v) = \int_G \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - fv \right) dx\, dy \quad \textit{für} \quad v \in V \ ,$$

$$\textit{mit} \quad V = \{ v \in C(\overline{G}) \quad \textit{mit stückweise stetigen (beschränkten) ersten Ableitungen und } v|_{\partial G} = 0 \}$$

Es ist naheliegend, das Problem dadurch zu approximieren, daß lediglich über endlichdimensionale Teilräume $V_h \subset V$ minimiert wird:

$$\textit{Minimiere} \quad F(v_h) \quad \textit{für} \quad v_h \in V_h \ . \tag{4}$$

Dabei beschreibt der Parameter $h$ die „Feinheit“ von $V_h$, d. h. $\dim(V_h)$ ist eine Funktion von $h$. Läßt man $h \to 0$ gehen, so besteht die Hoffnung, daß auch der Approximationsfehler $u - u_h \to 0$ konvergiert (in einem geeigneten Sinne).

Offensichtlich ist eine sehr vielfältige Wahl der Räume $V_h \subset V$ möglich, z. B.:

1. Eigenfunktionen des kontinuierlichen Problems $(D)$,
2. Polynomräume (Legendre, Tchebycheff usw.),
3. trigonometrische Polynome,
4. rationale Funktionen,
5. Wavelets, usw.

Ist $N_h = \dim(V_h)$ und $\{ w_h^i \ , \ i = 1, \ldots, N_h \}$ eine Basis von $V_h$, so gestattet jedes $v_h \in V_h$ eine Darstellung

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} a^i w_h^i \ .$$

Da $V_h$ endlichdimensionaler Vektorraum ist, erhält man durch Nullsetzen der 1. Variation von $F(.)$ bei $u_h \in V_h$ das zu (4) äquivalente Problem

$$\int_G \nabla u_h \nabla v_h dx\, dy = \int_G f v_h dx\, dy \ , \qquad \forall v_h \in V_h \ , \tag{5}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{N_h} a^i \int_G \nabla w_h^i \nabla w_h^j dx\, dy = \int_G f w_h^j dx\, dy \ , \qquad j = 1, \ldots, N_h \ .$$

Dies ist ein Matrix–Problem im $\mathbb{R}^{N_h}$,

$$Aa = b \tag{6}$$

mit

$$A := \left( \int_G \nabla w_h^i \nabla w_h^j \, dx \, dy \right)_{j,i=1}^{N_h} , \qquad a := \left( a^1, \ldots, a^{N_h} \right)$$

und

$$b := \left( \int_G f w_h^j dx \, dy \right)_{j=1}^{N_h} .$$

Das Problem (5) ist eindeutig lösbar, da $A$ Gramsche Matrix der Basis $\{w_h^i \, , \; i = 1, \ldots, N_h\}$ bzgl. des Skalarproduktes $\int_G \nabla v \nabla w \, dx \, dy$ ist. Insbesondere ist $A$ symmetrisch und positiv definit. Durch Subtraktion der Gleichungen (3) und (5) erhalten wir die *Fehlergleichung*

$$\int_G \nabla(u - u_h) \nabla v_h \, dx \, dy = 0 \, , \qquad \forall v_h \in V_h \, .$$

Dies ergibt dann wie im 1-dimensionalen Fall die erste Fehlerabschätzung

$$\int_G |\nabla(u - u_h)|^2 dx \, dy \leq \inf_{v_h \in V_h} \int_G |\nabla(u - v_h)|^2 dx \, dy \, . \tag{7}$$

Hieran schließen sich nun vom numerischen Standpunkt die folgenden *drei zentralen Forderungen* an die Teilräume $V_h \subset V$ an:

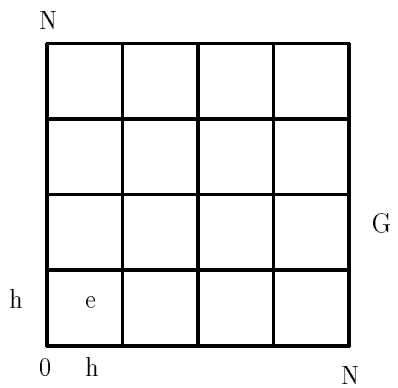
1. Die Lösung $u$ von (1) soll für $h \to 0$ gut durch Funktionen aus $V_h$ approximierbar sein:
$$\inf_{v_h \in V_h} \int_G |\nabla(u - v_h)|^2 dx \, dy \to 0 \qquad (h \to 0) \, .$$

2. Die Elemente $\int_G \nabla w_h^i \nabla w_h^j \, dx \, dy$ der Matrix $A$ sollen einfach berechenbar sein.

3. Die Matrix $A$ darf für $h \to 0$ nicht zu schlecht konditioniert werden.

Es hat sich gezeigt, daß unter allen möglichen Klassen von Teilräumen $V_h \subset V$ die sog. Finite–Elemente–Räume diesen drei Anforderungen besonders gut genügen. Zu ihrer Definition zerlegen wir das Gebiet $G$ in Quadrate $e$ der Seitenlänge $h = \frac{1}{N}$.

(Später werden wir auch Zerlegungen in Dreiecke betrachten.)
Die Teilräume $V_h \subset V$ sind dann definiert durch




$V_h := \{v_h \in C(\overline{G}) |\, v_h$ auf jedem Quadrat $e$ Polynom vom Grade $\leq m$; $v_h = 0 \quad$ auf $\quad \partial G\}$.

Wir betrachten jetzt den einfachsten Fall für $m = 1$, bei dem die Funktionen $v_h \in V_h$ auf jedem Quadrat $e$ *bilinear* sind:

$$v_h|_e(x, y) = \alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta \ .$$

Diese Setzung ist sinnvoll, denn durch Vorgabe der Funktionswerte von $v_h$ in den Eckpunkten aller Quadrate $e$ ist $v_h$ offenbar eindeutig bestimmt und stetig.

Eine Basis von $V_h$ erhalten wir, wenn wir alle Eckpunkte der Quadrate durchnumerieren zu $P_{i,j} = (x_i, y_j)$, $x_i = ih$, $y_j = jh$, $i, j = 1, \ldots, N-1$, und dann setzen:

$$w_h^{ij} \in V_h \vdots\ w_h^{ij}(P_{l,k}) = \delta_{il}\delta_{jk} \ , \quad \begin{matrix} i,j = 1,\ldots,N-1 \ , \\ l,k = 1,\ldots,N-1 \ . \end{matrix}$$

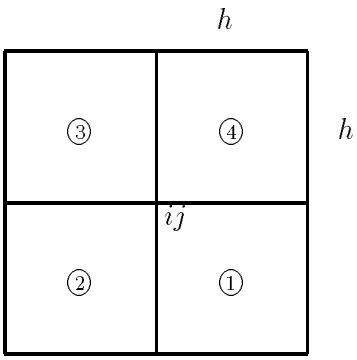
Jede Funktion $v_h \in V_h$ besitzt dann offenbar die Darstellung

$$v_h = \sum_{i,j=1}^{N_h} v_h(P_{i,j}) w_h^{ij} \ .$$

Die Elemente der Matrix $A$ ergeben sich wie folgt:

$$\int_G \nabla w_h^{ij} \nabla w_h^{lk} dx\, dy = \begin{cases} 0 \quad , & 2 \le \max\{|i-l| \ , \ |j-k|\} \ , \\ 8/3 \quad , & 0 = \max\{|i-l| \ , \ |j-k|\} \ , \\ -1/3 \quad , & 0 < \max\{|i-l| \ , \ |j-k|\} \le 1 \ . \end{cases}$$

Dazu rechnet man aus:




$$a_{ij}^{kl} = \iint_G \nabla w_h^{ij} \nabla w_h^{lk} dx\, dy =$$

$$\begin{cases} = \underset{①}{\iint} + \underset{②}{\iint} + \underset{③}{\iint} + \underset{④}{\iint} \\ \quad \text{für } \ |i-k| \le 1 \ , \ |j-l| \le 1 \\ = 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

$$w_h^{ij}(x, y) = X_i(x) Y_j(y) \ : \qquad w_h^{ij}(x_l, y_k) = \delta_{il}\delta_{jk}$$

$$X_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{i-1}) & , \quad x_{i-1} \le x \le x_i \ , \\ \frac{1}{h}(x_{i+1} - x) & , \quad x_i \le x \le x_{i+1} \ , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \ , \end{cases}$$

$$Y_j(y) = \begin{cases} \frac{1}{h}(y - y_{j-1}) & , \quad y_{j-1} \le y \le y_j \ , \\ \frac{1}{h}(y_{j+1} - y) & , \quad y_j \le y \le y_{j+1} \ , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \ . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^{lk} &= \iint_G \left( \frac{\partial w_h^{ij}}{\partial x} \frac{\partial w_h^{lk}}{\partial x} + \frac{\partial w_h^{ij}}{\partial y} \frac{\partial w_h^{lk}}{\partial y} \right) dx\, dy \\ &= \iint_G \left( Y_j Y_k \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_l}{dx} + X_i X_l \frac{dY_j}{\partial y} \frac{dY_k}{dy} \right) dx\, dy \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{dX_i}{dx} = \pm\frac{1}{h} \ , \quad \frac{dY_j}{dy} = \pm\frac{1}{h} \quad \text{auf} \quad ① — ④$$

$i = l$ , $j = k$ :

$$① \qquad \frac{dX_i}{dx} = -\frac{1}{h} \ , \quad \frac{dY_j}{dy} = \frac{1}{h} \ ,$$

$$\begin{aligned} \iint_{①} &= \frac{1}{h^2} h \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{1}{h^2}(y - y_{j-1})^2 dy + \frac{1}{h^2} h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}(x_{i+1} - x)^2 dx \\ &= \frac{1}{h^3} \int_0^h z^2 dz + \frac{-1}{h^3} \int_h^0 z^2 dz = \frac{2}{3} \ , \end{aligned}$$

analog für ②, ③, ④. Insgesamt: $a_{ij}^{ij} = \frac{8}{3}$ („Assemblierung“ ) .
$l = i + 1$ , $k = j$:

$$① \qquad \frac{dX_{i+1}}{dx} = \frac{1}{h} \ , \quad \frac{dX_i}{dx} = -\frac{1}{h} \ ,$$

$$\iint_{①} = \frac{-1}{h^2} h \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{1}{h^2}(y - y_{j-1})^2 dy + \frac{1}{h^2} h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}(x_{i+1} - x)(x - x_i)\, dx$$

$$= \frac{-1}{h^3} \int_0^h z^2 dz + \frac{1}{h^3} \underbrace{\int_0^h z(h - z)\, dz}_{+\frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{3}h^3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$④ \qquad \frac{dX_{i+1}}{dx} = \frac{1}{h}\ ,$$

$$\iint_{④} = \frac{-1}{h^2} h \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{1}{h^2}(y_{j+1} - y)^2 dy + \frac{1}{h^2} h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}(x_{i+1} - x)(x - x_i)\, dx$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \Rightarrow a_{ij}^{i+1,j} = -\frac{1}{3}\ .$$

Die Gleichung (5) bekommt somit die Gestalt $(a = (u_h(P_{1,1}), \ldots, u_h(P_{N,N}))$

$$\begin{aligned}(Aa)_{i,j} &= h^{-2} \Big\{ \frac{8}{3} u_h(P_{i,j}) - \frac{1}{3} u_h(P_{i+1,j}) - \frac{1}{3} u_h(P_{i-1,j}) - \frac{1}{3} u_h(P_{i,j+1}) \\ &\quad - \frac{1}{3} u_h(P_{i,j-1}) - \frac{1}{3} u_h(P_{i+1,j+1}) - \frac{1}{3} u_h(P_{i+1,j-1}) \\ &\quad - \frac{1}{3} u_h(P_{i-1,j+1}) - \frac{1}{3} u_h(P_{i-1,j-1}) \Big\} \\ &= h^{-2} \int_G f w_h^{ij}\, dx\, dy\ , \qquad i,j = 1, \ldots, N-1\ .\end{aligned}$$

Offenbar ist dies gerade das Gleichungssystem, welches bei Anwendung eines Differenzenverfahrens mit einem 9–Punkte–Mittelwertoperator $\Delta_h$ mit dem zugehörigen Punkteschema

$$\begin{array}{ccc} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1/3 & -8/3 & 1/3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

entsteht. In diesem einfachen Spezialfall entspricht die Methode der finiten Elemente also einem Differenzenverfahren. Bei allgemeineren Räumen $V_h$ (insbesondere bei Dreieckzerlegungen von $G$) ist eine solche Zuordnung jedoch nicht mehr möglich.

Es sei hier bemerkt, daß bei einer gleichförmigen Zerlegung in Dreiecke (anstatt in Rechtecke) — man spricht dann von einer *gleichförmigen Triangulierung* — wieder eine besonders einfache Gestalt der Gesamtsteifigkeitsmatrix $A$ entsteht:

$$\begin{pmatrix}
4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & & \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 & & & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{pmatrix}$$

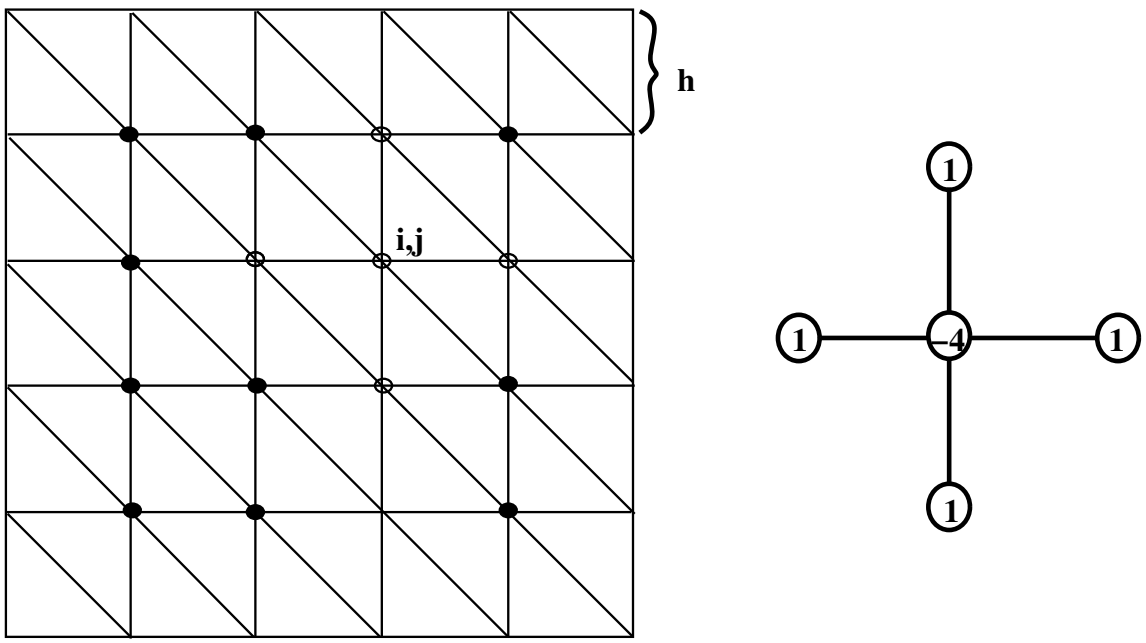



Fig. 9.3: Gleichförmige Triangulierung

Der zugehörige Differenzenstern ist gerade der der einfachsten 5–Punkt–Differenzenapproximation des Laplace–Operators, den wir schon oben im Zusammenhang mit den

Differenzenapproximationen analysiert haben. Die rechte Seite des entstehenden Gleichungssystems unterscheidet sich allerdings von dem des Differenzenverfahrens, da dort für jeden Gitterpunkt $P_{i,j}$ Mittelungen (nach Division durch $h^2$)

$$\frac{1}{h^2}\int_G f w_h^{ij}\,dx\,dy$$

stehen, wobei die Integration nur über die höchstens 6 Dreiecke erfolgt, die den Eckpunkt $P_{i,j}$ gemeinsam haben.

Die Forderung 2 nach der einfachen Berechenbarkeit der Matrixelemente von $A$ ist bei Verwendung stückweise polynomialer Funktionen meist erfüllt. Es gilt die Approximationsbeziehung

$$\inf_{v_h \in V_h}\int_G |\nabla(u - v_h)|^2\,dx\,dy = \mathrm{O}(h^2)\ ,$$

so daß auch die erste Forderung erfüllt ist.

Die dritte Forderung zielt auf eine gute Auflösbarkeit der linearen Gleichungssysteme (6). Die *Kondition* $\kappa$ der Matrix $A$ kann definiert werden als Quotient von größtem und kleinstem Eigenwert von $A$:

$$\kappa := \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\ .$$

## 9.3 Parabolische Probleme

Wir betrachten als Modellbeispiel für parabolische Probleme die (im Ort eindimensionale) Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t) + F(x,t), \quad x \in (0,1),\ t \in (0,T] \tag{1}$$

mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in (0,1) \tag{3}$$

Hierbei sei $a$ der Einfachheit halber eine positive Konstante, $a > 0$.

Eine Lösung $u$ von (1) erfüllt (nach partieller Integration) offenbar auch die Gleichungen

$$(u_t,\phi) + a(u',\phi') = (F,\phi), \quad \phi \in V,\ t \in (0,T], \tag{4}$$

$$(u,\phi)_{t=0} = (g,\phi) \quad \forall \phi \in V, \tag{5}$$

wobei $(.,.)$ das $L^2$–Skalarprodukt und $V = H_0^1(0,1)$ bezeichnet. Man nennt Gleichung (4) in Anlehnung an entsprechende Begriffsbildungen bei elliptischen Gleichungen auch die

„variationelle Formulierung“ der Wärmeleitungsgleichung. Der Strich bezeichnet die verallgemeinerte Ableitung nach $x$. Eine Lösung von (4), (5) heißt auch *schwache Lösung* der Wärmeleitungsgleichung . Zur Approximation durch ein Finite–Elemente–Verfahren zerlegt man wie beim Ritz–Galerkin–Verfahren in Abschnitt 9.1 das Intervall $[0,1]$ in nicht notwendig äquidistante Teilintervalle $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, J$,

$$\Delta : \ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_J = 1.$$

Der Einfachheit halber suchen wir eine Näherungslösung wieder im Raum $S_h^1$ der stetigen, stückweise linearen Funktionen mit verschwindenden Randwerten. Beim *halbdiskreten Galerkin–Verfahren* wird eine stetig differenzierbare Funktion $v : [0,T] \to S_h^1$ gesucht, die

$$(v_t, \phi) + a(v', \phi') = (F, \phi), \quad \phi \in S_h^1, \ t \in (0,T], \tag{6}$$

erfüllt. Für $v(0)$ wählt man die $L_2$–Projektion von $g$ in $S_h^1$,

$$(v, \phi)_{t=0} = (g, \phi), \quad \phi \in S_h^1, \tag{7}$$

oder eine andere Näherung von $g$. Mit den Dachfunktionen $\phi_j$, $j = 1, \ldots, J-1$, als Basis von $S_h^1$ läßt sich $v$ als

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{J-1} c_i(t)\phi_i(x), \quad 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le T,$$

mit stetig differenzierbaren Koeffizientenfunktionen $c_j$ schreiben. Setzt man diese Darstellung von $v$ in (6), (7) ein, so ergibt sich $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_{J-1}(t))$ als Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\sum_{i=1}^{J-1} c_i'(t)(\phi_i, \phi_j) + a \sum_{i=1}^{J-1} c_i(t)(\phi_i', \phi_j') = (F(t), \phi_j) \ , \tag{8}$$
$$0 < t \le T, \ j = 1, \ldots, J-1 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{J-1} c_i(0)(\phi_i, \phi_j) = (g, \phi_j), \quad j = 1, \ldots, J-1 \ . \tag{9}$$

Da man zunächst nur in $x$-Richtung diskretisiert hat und $t$ noch kontinuierlich durchläuft, nennt man die durch (8), (9) beschriebene Vorgehensweise auch die *Linienmethode*.

Bei Diskretisierung auch in $t$–Richtung durch eine äquidistante Schrittweite $k = T/N$, $t_n = nk$, $n = 1, \ldots, N$, ist eine geeignete Approximation der Ableitung nach $t$ zu wählen. Das *Crank–Nicolson–Galerkin–Verfahren* (Abk.: CNG–Verfahren) wählt entsprechend dem Crank–Nicolson–Verfahren (vgl. Abschnitt 4.4) das arithmetische Mittel des vorwärts- und rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten erster Ordnung. Gesucht sind dabei also Funktionen $u_n \in S_h^1$, $n = 0, \ldots, N$, die

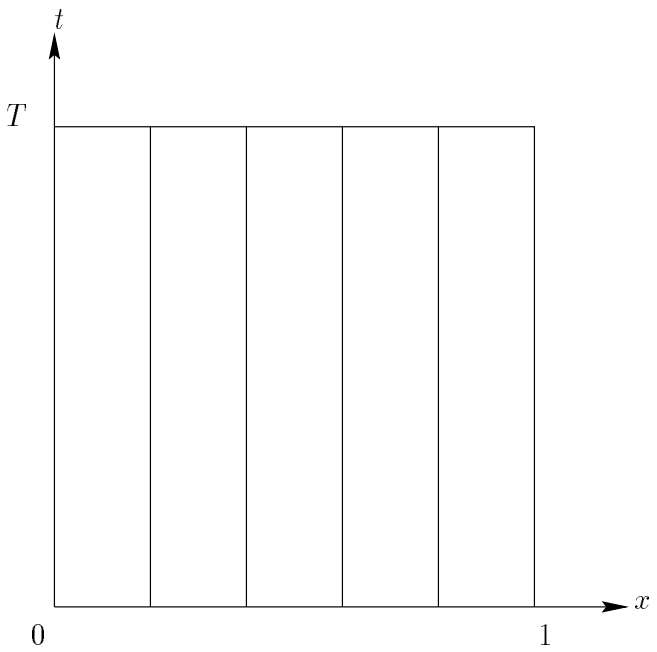



Fig. 9.4: Linienmethode

$$\begin{aligned}&\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{k},\phi\right)+a\left(\frac{1}{2}(u'_{n+1}+u'_n),\phi'\right)\\ &=\quad\left(\frac{1}{2}(F_{n+1}+F_n),\phi\right),\quad \phi\in S_h^1,\ n=0,\ldots,N-1,\end{aligned}\tag{10}$$

$$(u_0,\phi)=(g,\phi),\quad \phi\in S_h^1,\tag{11}$$

erfüllen. Hierbei bezeichnet $F_n = F(.,t_n)$. Mit Hilfe der Basisfunktionen $\phi_i,\ i=1,\ldots,J-1$, läßt sich jedes $u_n$ als

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{J-1}u_n(x_i)\phi_i(x),\quad 0\le x\le 1,$$

darstellen. Das Gleichungssystem (10), (11) läßt sich daher auch in der Form

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{J-1}(u_i^{n+1}-u_i^n)(\phi_i,\phi_j)+a\sum_{i=1}^{J-1}u_i^{n+1/2}(\phi_i',\phi_j')\\ &=\quad(F_{n+\frac{1}{2}},\phi_j),\quad j=1,\ldots,J-1,\ n=0,1,\ldots,N-1,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{J-1}v_{i,0}(\phi_i,\phi_j)=(g,\phi_j),\quad j=1,\ldots,J-1,\tag{13}$$

schreiben, wobei $u_i^\nu = u_\nu(x_i)$, $\nu = n, n+\frac{1}{2}$, und $u_{n+\frac{1}{2}} = (u_n + u_{n+1})/2$. Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems sind bereits in Abschnitt 9.1 berechnet worden. Wir beschränken uns im folgenden auf äquidistante Schrittweiten $h_i = h$, $i = 1, \ldots, J$.

$$(\phi_i, \phi_j) = \begin{cases} h/6 & , i = j-1, j+1, \\ 2h/3 & , i = j, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad (\phi_i', \phi_j') = \begin{cases} -1/h & , i = j-1, j+1, \\ 2/h & , i = j, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Nach Multiplikation mit $k/h$ hat (12), (13) dann die Form

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{3} + aq\right) u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}aq\right)(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \\ &= \left(\frac{2}{3} - aq\right) u_j^n + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}aq\right)(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \frac{k}{h}(F_{n+\frac{1}{2}}, \phi_j), \\ &\quad j = 1, \ldots, J-1, \; n = 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{1}{6}(u_{j-1}^0 + 4u_j^0 + u_{j+1}^0) = \frac{1}{h}(g, \phi_j), \quad j = 1, \ldots, J-1. \tag{15}$$

Hier ist $q = \frac{k}{h^2}$ das für parabolische Probleme typische Schrittweitenverhältnis.

Die Skalarprodukte auf den rechten Seiten kann man wie beim Ritzschen Verfahren durch Quadraturformeln, z.B. die Simpson–Formel, auswerten. Für das Gleichungssystem ist das starke Zeilensummenkriterium erfüllt, und es läßt sich iterativ oder mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens für Tridiagonalmatrizen lösen.

Die Lösbarkeit des Crank–Nicolson–Galerkin–Verfahrens (10), (11) läßt sich auch allgemein für beliebige Basisfunktionen $w_1, \ldots, w_m$ eines endlichdimensionalen Teilraums $M \subset V$ zeigen. Mit der Bilinearform

$$b(u, v) := (u, v) + \frac{1}{2}ak(u', v'), \quad u, v \in V,$$

und

$$\ell_n(v) := (u_n, v) - \frac{1}{2}ak(u_n', v') + k(F_{n+\frac{1}{2}}, v), \quad v \in V,$$

ist das Crank–Nicolson–Galerkin–Verfahren äquivalent zu

$$b(u_{n+1}, \phi) = \ell_n(\phi), \quad \phi \in M, \tag{16}$$

oder, mit $u_n = \sum_{i=1}^m c_i^{(n)} w_i$,

$$\sum_{i=1}^m c_i^{(n+1)} b(w_i, w_j) = \ell_n(w_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Die symmetrische, beschränkte Bilinearform $b(.,.)$ erfüllt

$$b(u,u) = |u|_0^2 + \frac{1}{2}ak|u'|_0^2 \geq \min\left(1, \frac{ak}{2}\right) \|u\|_1^2.$$

Daraus folgt die positive Definitheit der Matrix $(b(w_i, w_j))$, was auch die eindeutige Lösbarkeit von (16) sichert.

**Satz 1** *Die Lösungen des CNG–Verfahrens (10), (11) erfüllen die folgende Stabilitätsabschätzung*

$$\max_{0\leq n\leq N} |u_n|_1 \leq \gamma \left\{ |u_0|_1 + \left( k \sum_{\nu=0}^{N-1} |F_{\nu+\frac{1}{2}}|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{18}$$

*wobei* $\gamma = \max(1, \frac{1}{2a})$, $F_{\nu+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_\nu + F_{\nu+1})$.

*Beweis.* (s. [Rei85, Thm. 12.14]) □

Wählt man $U_n$ als Ritz–Galerkin–Approximation von $u(.,t_n)$ d. h. $(aU_n', v') = \left(a\frac{\partial}{\partial x}u(.,t_n), v'\right)$, $v \in V_h$, und setzt den Fehler $U_n - u_n$ in (18) ein, dann lassen sich die auf der rechten Seite auftretenden Terme analysieren und abschätzen, und man kann für den Gesamtfehler zeigen, daß (s. [Rei85, Thm. 13.11])

$$\max_{0\leq n\leq N} |u(.,t_n) - u_n|_1 = \mathrm{O}(k^2 + h) \tag{19}$$

Der Anteil $\mathrm{O}(h)$ stammt von dem Interpolationsfehler in der Ortsvariablen. Nimmt man noch — wie üblich bei parabolischen Problemen — an, daß $k/h^2$ konstant bleibt, dann überwiegt der Ortsanteil in (19). Um eine Ausgewogenheit zwischen Orts- und Zeitanteil des Fehlers zu erreichen, müßten im Ort Polynome höheren Grades gewählt werden.

Man kann das CNG–Verfahren aber auch analog der Vorgehensweise von Abschnitt 5.1 analysieren, um Stabilitätsabschätzungen bzgl. der Maximumsnorm zu gewinnen. Schreibt man das CNG–Verfahren als $\left(u^n = \left(u_1^n, \ldots, u_{J-1}^n\right)^\top\right)$

$$u^0 = d^0 (= g_h)\,, \quad Au^n = Bu^{n-1} + d^n\,, \quad n = 1, \ldots, N\,.$$

mit den tridiagonalen $(J-1)\times(J-1)$–Matrizen

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}aq \,\middle|\, \frac{2}{3} + aq \,\middle|\, \frac{1}{6} - \frac{1}{2}aq\right) \\ B &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}aq \,\middle|\, \frac{2}{3} - aq \,\middle|\, \frac{1}{6} + \frac{1}{2}aq\right)\,, \end{aligned}$$

und $d^\nu = (d_1^\nu, \ldots, d_{J-1}^\nu)$, $d_j^\nu = \frac{k}{h}(F_{\nu+1/2}, \phi_j)$, dann ist

$$\begin{aligned} A &= \left(aq + \frac{2}{3}\right)(E - R) \quad \text{mit} \quad R = \left(\frac{\beta}{2}|0|\frac{\beta}{2}\right) , \\ \beta &= 2\frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}aq}{\frac{2}{3} + aq} , \quad \|R\|_\infty \le \beta . \end{aligned}$$

Im Fall $q \ge \frac{1}{3a}$ ist $\beta < 1$ und (Neumannsche Reihe)

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(\frac{2}{3} + aq\right)^{-1}(E - R)^{-1} = \left(\frac{2}{3} + aq\right)\sum_{j=0}^{\infty} R^j \\ \|A^{-1}\|_\infty &\le \left(\frac{2}{3} + aq\right)^{-1}\sum \beta^j = 1 . \end{aligned}$$

Falls noch $q \le \frac{2}{3a}$, dann ist

$$\|B\|_\infty \le \frac{2}{3} - aq + 2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}aq\right) = 1 .$$

Für $C = A^{-1}B$ hat man dann $\|C\|_\infty \le 1$. Insgesamt folgt also aus $\frac{1}{3a} \le q \le \frac{2}{3a}$ die Stabilitätsabschätzung

$$\|u^n\|_\infty \le \sum_{\nu=0}^{n} \|d^\nu\|_\infty . \tag{20}$$

Abschließend untersuchen wir die Stabilität des CNG–Verfahrens bzgl. der diskreten $L^2$–Norm $\|.\|_0$. Im vorliegenden skalaren Fall ist die von–Neumann–Bedingung notwendig und hinreichend für die Stabilität.

Für die Verstärkungsfaktoren erhält man

$$S_{m,h} = \frac{1 + 2\left(ar + \frac{1}{3}\right)\sin^2(mh/2)}{1 + 2\left(ar - \frac{1}{3}\right)\sin^2(mh/2)} .$$

Damit erfüllt das CNG–Verfahren die von–Neumann–Bedingung für alle $k, h$ und ist unbedingt stabil bzgl. $\|.\|_0$.

*Beweis.* Für den Nenner erhält man

$$S_h^{(0)}(y) = 1 + 2\left(ar - \frac{1}{3}\right)\sin^2(y/2) \ge \begin{cases} 1 & , \text{ falls } ar - \frac{1}{3} \ge 0 , \\ \frac{1}{3} & , \text{ falls } ar - \frac{1}{3} \le 0 . \end{cases}$$

Insgesamt (mit $\alpha = 2\sin^2(y/2)$) gilt für

$$S_h(y) := \frac{S_h^{(1)}(y)}{S_h^{(0)}(y)} = \frac{1 - \alpha/3 - a\alpha r}{1 - \alpha/3 + a\alpha r} = 1 - \frac{2a\alpha r}{1 - \alpha/3 + a\alpha r} ,$$

daß $-1 \le S_h(y) \le 1$. □

## 9.4 Hyperbolische Probleme

Die Wellengleichung ist das Modellbeispiel für hyperbolische Differentialgleichungen . Zu deren numerischer Lösung gibt es wieder zahlreiche Möglichkeiten der Approximation durch Differenzenverfahren (vgl. z. B. [MM81, Rei85]) sowie durch Finite–Element–Verfahren. Die Konstruktion von letzteren werden wir hier an einem Beispiel darstellen.

Am Beispiel der *inhomogenen verallgemeinerten Wellengleichung*

$$u_{tt} - (au_x)_x = f(x,t), \quad x \in (0,1),\ t \in (0,T], \tag{1}$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = g^0(x), \quad u_t(x,0) = g^1(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

und homogenen Dirichletschen Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T], \tag{3}$$

wollen wir ein Finite–Element–Verfahren konstruieren. Hierbei sei die Funktion $a = a(x)$ nur von der Ortsvariablen abhängig und genüge $0 < \alpha_0 \le a(x) \le \alpha_1,\ x \in (0,1)$. Wir nehmen an, daß die Lösung von (1)–(3) existiert und bzgl. $t$ und $x$ (mindestens) zweimal stetig differenzierbar ist.

Nach partieller Integration sieht man, daß jede Lösung von (1) und (3) die folgende *variationelle Formulierung* der verallgemeinerten Wellengleichung erfüllt:

$$(u_{tt}, \phi) + (au', \phi') = (f, \phi), \quad \phi \in V. \tag{4}$$

Die Bezeichnungen seien wie beim Crank–Nicolson–Galerkin–Verfahren gewählt. Beim zugehörigen *halbdiskreten Galerkin–Verfahren* wird eine zweimal (bzgl. $t$) stetig differenzierbare Funktion $v : [0,T] \to V_h = S_h^1$ gesucht, die

$$(v_{tt}, \phi) + (av', \phi') = (f, \phi), \quad \phi \in V_h,\ t \in (0,T], \tag{5}$$

erfüllt. Als zeitdiskrete Finite–Elemente–Approximation sucht man entsprechend Dupont[2)] Funktionen $u_0, u_1, \ldots, u_J \in V_h$, so daß

$$(D_t^2 u_n, \phi) + \frac{1}{2}(a(u'_{n+\frac{1}{2}} + u'_{n-\frac{1}{2}}), \phi') = \frac{1}{2}(f_{n+\frac{1}{2}} + f_{n-\frac{1}{2}}, \phi), \quad \phi \in V_h. \tag{6}$$

Hierbei bezeichnet $D_t^2$ den zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung in $t$-Richtung. Definiert man noch

$$v_{n,\Theta} = \Theta v_{n+1} + (1 - 2\Theta)v_n + \Theta v_{n-1}, \quad 0 \le \Theta \le 1,$$

[2)] DUPONT, J., $L^2$–estimates for Galerkin methods for second order hyperbolic equations. SIAM J. Numer. Anal. 10(1973), 880–889

dann ist

$$\frac{1}{2}(v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}}) = v_{n,\frac{1}{4}}.$$

Mit den Dachfunktionen $\phi_j$, $j = 1, \ldots, J-1$, als Basis in $V_h$ ist (6) äquivalent zu

$$(D_t^2 u_n, \phi_j) + (a u'_{n,\frac{1}{4}}, \phi'_j) = (f_{n,\frac{1}{4}}, \phi_j), \quad j = 1, \ldots, J-1. \tag{7}$$

Benutzt man wieder die Darstellung $u_n = \sum_{j=1}^{J-1} u_n(x_j)\phi_j$, dann erhält man als Gleichungssystem für $u_j^n = u_n(x_j)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{J-1}(u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1})(\phi_i, \phi_j) + \sum_{i=1}^{J-1} u_i^{(n,\frac{1}{4})}(a\phi'_i, \phi'_j) \\ &\quad = \quad (f_{n,\frac{1}{4}}, \phi_j), \quad j = 1, \ldots, J-1. \end{aligned} \tag{8}$$

Für die Wellengleichung mit $a(x) = c^2 > 0$ und $f \equiv 0$ ergibt sich nach Einsetzen der Koeffizienten und Multiplikation mit $k^2/h$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}(u_{j-1}^{n+1} + 4u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) - \frac{1}{3}(u_{j-1}^n + 4u_j^n + u_{j+1}^n) \\ &\quad + \frac{1}{6}(u_{j-1}^{n-1} + 4u_j^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}) \\ &\quad - q^2c^2(u_{j-1}^{(n,\frac{1}{4})} - 2u_j^{(n,\frac{1}{4})} + u_{j+1}^{(n,\frac{1}{4})}) \;=\; 0, \quad j = 1, \ldots, J-1. \end{aligned} \tag{9}$$

Hierbei bezeichnet $q = \frac{k}{h}$ das zugehörige *Schrittweitenverhältnis*.

Wir bringen alle Terme der $n$-ten und $(n-1)$-ten Stufe auf die rechte Seite und erhalten

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}q^2c^2\right) u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}q^2c^2\right)(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) \\ &= \left(\frac{4}{3} - q^2c^2\right) u_j^n + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}q^2c^2\right)(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}q^2c^2\right) u_j^{n-1} \\ &\quad - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}q^2c^2\right)(u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}), \quad j = 1, \ldots, J-1. \end{aligned} \tag{10}$$

Für Stabilitätsabschätzungen ist es günstig, das vorliegende *3–Stufen–Verfahren*, d. h. es werden Werte von 3 $t$-Stufen benötigt, als 2–Stufen–Verfahren zu schreiben. Das geschieht trivialerweise durch die Setzung $w_j^n = u_j^{n-1}$. Damit ist (10) äquivalent zu folgendem System von 2 Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}q^2c^2\right) u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}q^2c^2\right)(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) \\ &\quad = \left(\frac{4}{3} - q^2c^2\right) u_j^n + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}q^2c^2\right)(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) \\ &\qquad - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}q^2c^2\right) w_j^n - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}q^2c^2\right)(w_{j-1}^n + w_{j+1}^n), \\ &\quad w_j^{n+1} \;=\; u_j^n, \quad j = 1, \ldots, J-1. \end{aligned} \tag{11}$$

Die zugehörige Matrix erfüllt wieder das starke Zeilensummenkriterium. Für jedes $n = 1, 2, \ldots, N-1$ kann daher das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren für Tridiagonalmatrizen oder iterativ gelöst werden. Die Anfangsnäherungen $u_0$ und $u_1$ müssen später durch geeignete Approximationen der Anfangsbedingungen (2) festgelegt werden.

Mit dem vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten erster Ordnung in Zeitrichtung $D_t^+$ und der $L_2$–Projektion $F_n$ von $f(., t_n)$ läßt sich für das obige Verfahren die folgende Stabilitätsabschätzung beweisen (s. [Rei85, Thm. 12.15]),

$$\begin{aligned} &\max_{0 \le n \le N-1} \left( \left| D_t^+ u_n \right|_0^2 + \left| u_{n+\frac{1}{2}} \right|_1^2 \right) \\ &\quad \le \quad \gamma^2 \left( \left| D_t^+ u_0 \right|_0^2 + \left| u_{\frac{1}{2}} \right|_1^2 + k \sum_{\nu=1}^{N-1} \left| F_{\nu,\frac{1}{4}} \right|_0^2 \right), \; n \ge n_0 \; , \end{aligned} \tag{12}$$

mit $\gamma^2 = 2e^{4T} \max(1, \alpha_1) / \min(1, \alpha_0)$. Hieraus kann man wieder durch Einsetzen eines geeigneten Fehlerterms die Konvergenz des Finite–Element–Verfahrens mit einer gewissen Konvergenzordnung zeigen, wobei wieder Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Lösung $u$ gestellt werden müssen (s. [Rei85, Chapt. 13.2]).

Abschließend analysieren wir noch das Stabilitätsverhalten des Verfahrens von Dupont bzgl. der diskreten $L^2$–Norm. Die charakteristischen Matrizen berechnen sich wie folgt,

$$S_h^{(0)}(y) = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{2}{3} - q^2c^2\right) \sin^2(y/2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_h^{(1)}(y) = \begin{pmatrix} 2\left[1 - \left(\frac{2}{3} + q^2c^2\right) \sin^2(y/2)\right] & -\left[1 - \left(\frac{2}{3} - q^2c^2\right) \sin^2(y/2)\right] \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $S_h^{(0)}$ erhält man

$$1 - \left(\frac{2}{3} - q^2c^2\right) \sin^2(y/2) \;\ge\; 1 - \left(\frac{2}{3} - q^2c^2\right) \;=\; \frac{1}{3} + q^2c^2 \;\ge\; \frac{1}{3} \text{ falls } \frac{2}{3} \ge q^2c^2$$

$$1 - \left(\frac{2}{3} - q^2c^2\right) \sin^2(y/2) \;=\; 1 + \underbrace{\left(q^2c^2 - \frac{2}{3}\right)}_{\ge 0} \sin^2(y/2) \;\ge\; 1 \; , \text{ falls } \frac{2}{3} \le q^2c^2 \; .$$

Damit ist in $\Lambda(y) := \frac{1 - \left(\frac{2}{3} + q^2c^2\right) \sin^2(y/2)}{1 - \left(\frac{2}{3} - q^2c^2\right) \sin^2(y/2)}$ der Nenner immer positiv, also $S_h^{(0)}(y)$ invertierbar und $S_h^{(0)}(y)^{-1}$ gleichmäßig beschränkt, $\left\| S_h^{(0)}(y)^{-1} \right\|_S = \frac{1}{\max |\lambda|} = \min\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \le 3 \;\; \forall h.$

Für $S_h(y) = S_h^{(0)}(y)^{-1} S_h^{(1)}(y) = \begin{pmatrix} 2\Lambda(y) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man die Eigenwerte durch:

$$\begin{aligned} \mu^2 - 2\Lambda(y)\mu + 1 &= 0 \\ \Longrightarrow \qquad \mu_{1,2} &= \Lambda(y) \pm \sqrt{\Lambda^2(y) - 1} \qquad \text{wobei } \Lambda(y) \leq 1 \\ &= \Lambda(y) \pm i\sqrt{1 - \Lambda^2(y)} \\ \Longrightarrow \quad |\mu_{1,2}|^2 = \Lambda(y)^2 + 1 - \Lambda(y)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist die von–Neumann–Bedingung erfüllt.

Wie beim expliziten Verfahren aus Abschnitt 6.2 kann man für $q = 1/c$ zeigen (s. [Rei85, Prop. 12.12]), daß für $S_h(h) = S_{1,h}$ und eine beliebige Folge $\nu_n \to \infty$ gilt

$$\left\| S_{1,h}^{\nu_n} \right\|_S \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty) \, .$$

Damit ist das Verfahren in diesem Fall nicht stabil (bzgl. $\|.\|_0$).

## Anhang A

# Übungen zur Vorlesung „Differenzenapproximationen partieller Differentialgleichungen“

1. (theor.)

   a) Man klassifiziere die Gleichung der Gasdynamik

   $$(c_0^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c_0^2 - u_y^2)u_{yy} = 0 \ ,$$

   wobei $c_0$ die Schallgeschwindigkeit des Gases ist, mit Hilfe der Mach'schen Zahl

   $$M = \left[\frac{1}{c_0^2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)\right]^{1/2} \ .$$

   b) Man bestimme, in welchem Teil der Ebene die Gleichung

   $$u_{xx} + 2xu_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} = 0$$

   hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist.

2. (theor.) Man bestimme die exakten Lösungen von zwei der folgenden Randwertaufgaben
   ($G = (0,1) \times (0,1)$):

   a) $u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2 - x - y \qquad$ in $G$ ,
   $u = 0 \qquad$ auf $\partial G$ ;

   b) $u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad$ in $G$ ,
   $u(x,0) = 4x(1-x) \ , \quad u(0,y) = u(1,y) = u(x,1) = 0$ ;

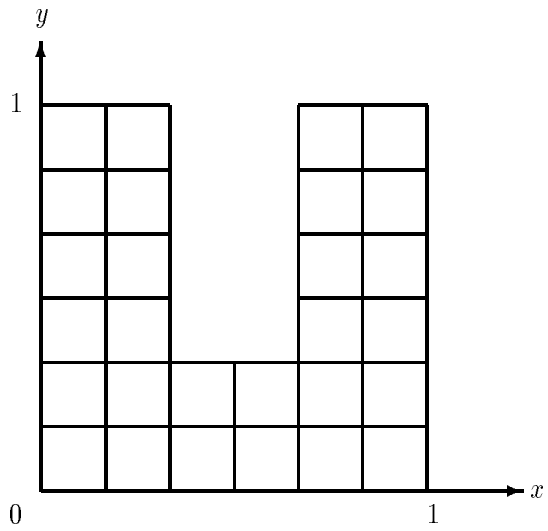
   c) $u_{xx} = u_{yy} \qquad$ in $G$ ,
   $u(x,0) = 4x(1-x) \ , \quad u_y(x,0) = 0 \ , \quad 0 \le x \le 1$ ,
   $u(0,y) = u(1,y) = 0 \ , \quad 0 \le y \le 1$ .

3. (theor.) Wir betrachten das Dirichlet–Problem für die Laplace–Gleichung

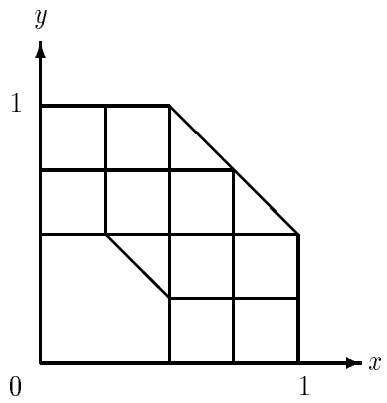
$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \qquad , \quad (x,y) \in G \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad , \quad (x,y) \in \partial G \ . \end{aligned}$$

Man diskretisiere sie und stelle das zugehörige lineare Gleichungssystem auf, wobei die Reihenfolge der Gleichungen so zu wählen ist, daß die Koeffizientenmatrix günstigste Gestalt hat, d. h. minimale Bandbreite besitzt. Für die Gitterpunktmenge $G_h \cup \partial G_h$ wähle man nacheinander

a) $h = k = \frac{1}{6}$




b) $h = k = \frac{1}{4}$




4. (theor.) Man zeige, daß die 9–Punkte–Approximation

$$\begin{aligned} &4(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}) + U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} \\ &\quad + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1} - 20U_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

der Laplace–Gleichung $\Delta u(x,y) = 0$ , $(x,y) \in G = (0,1) \times (0,1)$, für ein äquidistantes quadratisches Gitter konsistent ist von der Ordnung $O(h^6)$.

5. (theor.) Wir betrachten die Poisson–Gleichung in einem rechteckigen Gebiet $G = (a,b) \times (c,d)$:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad , \qquad (x,y) \in G \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad , \qquad (x,y) \in \partial G \; . \end{aligned} \tag{A1}$$

Das diskretisierte Problem auf der Gitterpunktmenge $G_h = \{(x_i, y_j) | x_i = a + ih \, , \; i = 1, \ldots, I-1 \, , \; y_j = c + jk \, , \; j = 1, \ldots, J-1\}$ lautet

$$\begin{aligned} -\Delta_h U(x,y) &= f(x,y) \quad , \qquad (x,y) \in G_h \\ U(x,y) &= g(x,y) \quad , \qquad (x,y) \in \partial G_h \; . \end{aligned} \tag{A2}$$

Es soll eine a–priori–Fehlerabschätzung für die Näherungslösung $U$ unabhängig vom Maximumprinzip hergeleitet werden.

Dazu schreibe man (A2) in Matrixdarstellung

$$A\underline{U} = \theta^2 \underline{F} \; , \tag{A3}$$

wobei $A$ die Koeffizientenmatrix, $\theta^2 = h^2 k^2 / 2(h^2 + k^2)$ und $\theta^2 \underline{F}$ die zusammengefaßte rechte Seite bedeutet. Weiter ist $\underline{U} = (U_1, \ldots, U_{J-1})^\top$, $U_j = (U_{1j}, \ldots, U_{I-1,j})^\top, j = 1, \ldots, J-1$, $U_{ij} = U(x_i, y_j)$ . Multiplizieren wir die Gleichung für den Abschneidefehler mit $\theta^2$, so erhalten wir

$$A(\underline{U} - \underline{u}) = \theta^2 \underline{\tau} \; , \tag{A4}$$

$\tau(x,y) = f(x,y) + \Delta_h u(x,y)$, $\underline{\tau}$=Vektor der $\tau(x_i, y_j)$. Wenn $A$ nicht–singulär ist, so lautet die Fehlerabschätzung in der Euklidischen Norm

$$\|\underline{U} - \underline{u}\|_2 \leq \theta^2 \|A^{-1}\|_2 \, \|\underline{\tau}\|_2 \tag{A5}$$

wobei $\|A^{-1}\|_2 = \max_{1 \leq \nu \leq (I-1)(J-1)} (1/|\lambda_\nu|) = 1/\min_{1 \leq \nu \leq (I-1)(J-1)} |\lambda_\nu|$, ($\lambda_\nu$ sind die Eigenwerte von $A$).

a) Man zeige, daß $A$ positiv definit ist und bestimme $\|A^{-1}\|_2$.

(Hinweis: Schreibe das Eigenwertproblem $A\underline{W} = \lambda \underline{W}$ äquivalent um in ein endliches Differenzen–Eigenwertproblem der Form $\Delta_h W(x,y) = -\frac{\lambda}{\theta^2} W(x,y)$ für $(x,y) \in G_h$ und $W(x,y) = 0$ , $(x,y) \in \partial G_h$, und bestimme die Eigenwerte durch Separation der Variablen! Sie können benutzen, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen der diskreten schwingenden Saite

$$-\delta^2 w_h = \lambda_h w_h \quad \text{in} \quad (a,b)_h \; , \quad w_h(a) = w_h(b) = 0 \; ,$$

gegeben sind durch

$$\lambda_h^{(k)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}, \; w_h^{(k)}(x_j) = \sin k\pi x_j, \; j = 1, \ldots, I \; (Ih = b - a).)$$

b) Man gebe die a–priori–Fehlerabschätzung für $\|\underline{U} - \underline{u}\|_2$ an!

6. (theor.) Wir betrachten das Neumann–Problem

$$\Delta u(x,y) = 0\,, \quad (x,y) \in G = (0,1) \times (0,1)$$

mit der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = g(x,y)\,, \quad \begin{array}{l} x = 0,1\,;\ y \in [0,1] \\ y = 0,1\,;\ x \in [0,1]\,, \end{array}$$

wobei $\int_{\partial G} g\, ds = 0$ . $n$ bezeichne die äußere Normale bzgl. $\partial G$.

(a) Stellen Sie das Differenzenverfahren für $h = k$ in Form einer Matrizengleichung auf.

(b) Zeigen Sie für $h = \frac{1}{2}$, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems singulär ist.

(c) Wie muß das Integral über die Randwerte diskretisiert werden, damit das Gleichungssystem überhaupt lösbar ist?

7. (theor.) Für ein äquidistantes, achsenparalleles Gitter $\mathbb{R}_h^n$ im $\mathbb{R}^n$ und ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ seien

$$\begin{aligned} G_h &= \left\{ x \in G \cap \mathbb{R}_h^n \;\middle|\; [x - he_j,\, x + he_j] \subset \overline{G}\,,\ j = 1, \ldots, n \right\}, \\ H(G_h) &= \left\{ v \in H(\mathbb{R}_h^n) \;\middle|\; v(x) = 0\,,\ x \in \mathbb{R}_h^n - G_h \right\}, \\ (v,w)_0 &= h^n \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} v(x) w(x)\,,\ v, w \in H(G_h)\,, \\ (v,w)_1 &= h^n \sum_{j=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} (D_j v)(x)(D_j w)(x)\,,\ v, w \in H(G_h)\,. \end{aligned}$$

Durch $(.,.)_0$, $(.,.)_1$ werden Skalarprodukte auf $H(G_h)$ erklärt. Durch die Differenzenapproximation des Laplaceoperators $\Delta$,

$$\Delta_h v(x) = \frac{1}{h^2} \left\{ \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{n} v(x + he_j) - 2n\, v(x) \right\}\,, \quad x \in \mathbb{R}_h^n\,,$$

wird eine lineare Abbildung $L_h : H(G_h) \longrightarrow H(G_h)$ erklärt,

$$L_h v(x) = -\Delta_h v(x)\,,\ \ x \in G_h\ ,\quad L_h v(x) = 0\,,\ \ x \in \mathbb{R}_h^n - G_h\ .$$

Zeigen Sie:

(a) $(L_h v, w)_0 = (v, L_h w)_0 = (v, w)_1$ ,
(b) $(L_h v, v)_0 = \|v\|_1^2 \quad \forall v, w \in H(G_h)$ ,

wobei $\|.\|_1$ die zu $(.,.)_1$ gehörige Norm bezeichnet.

8. (prakt.) Sei $G$ das Gebiet

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\right\}\ .$$

Gesucht ist jeweils eine Näherungslösung $u_h$ auf $G_h$ der Aufgaben

$$\begin{array}{rrcll} 1. & u_{xx} + u_{yy} & = & x^2 + y^2 - x - y & \text{in } G\ , \\ & u & = & 0 & \text{auf } \partial G\ , \end{array}$$

(exakte Lsg.: $u(x,y) = \frac{1}{2}x(x-1)y(y-1)$),

sowie

$$\begin{array}{rrcl} 2. & u_{xx} + u_{yy} & = & 2\exp(x+y)\cdot(\sin(\pi y)\sin(\pi x)(1-\pi^2) + \pi\sin(\pi(x+y))) \text{ in } G, \\ & u & = & 0 \qquad\qquad \text{auf } \partial G\ , \end{array}$$

(exakte Lsg.: $\exp(x+y)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$),

die mit Hilfe eines zur Verfügung gestellten Programms ermittelt werden soll. Dieses Programm bedient sich einer Routine, die die klassische 5–Punkt–Differenzenapproximation der Poisson–Gleichung realisiert.

Jeder Teilnehmer erhält einen Zugang zu den Rechnern:

descartes.numerik.math.uni-siegen.de (IP:141.99.112.4)

bzw. abel.numerik.math.uni-siegen.de (IP:141.99.112.1)

Diese Rechner können vom CIP-Pool aus unter Windows–NT wie folgt erreicht werden:

„telnet < Rechneradresse >“ .

Anschließend ist die Userkennung sowie das persönliche Passwort einzugeben (Änderung des Passworts ist mit „yppasswd“ möglich).

Im „Home–Verzeichnis“ (in dem man sich nach jedem login befindet) muß nun ein Datenfile mit Namen „input.dat“ bereitgestellt werden, das von folgendem Format ist:

1. Zeile: Anzahl der Intervalle in x–Richtung
2. Zeile: Anzahl der Intervalle in y–Richtung

(Als Editor steht „joe“ zur Verfügung; die Datei kann aber auch mit jedem anderen Editor auf einem PC erstellt und per ftp exportiert werden).

Nach Aufruf des Programms „Laplace1“ (bzw. „Laplace2“ für die zweite Aufgabe), das die aktuellen Parameter der Datei „input.dat“ entnimmt, befinden sich im Home–Verzeichnis zwei Dateien:

(a) „func.dat“ enthält die Lösung (fertig aufbereitet zur Ausgabe mit GNUPLOT bzw. MAPLE, d. h. eine Zeile pro Gitterpunkt; jede Zeile enthält die drei durch Leerzeichen getrennten Einträge $x, y, u_h(x,y)$ ).

(b) „err.dat“ enthält in der ersten Zeile den Fehler in der Max.–Norm und in der zweiten Zeile den rel. maximalen Fehler $E_h := \max_{x\in G_h}|(u-u_h)(x)|/\max_{x\in G_h}|u_h(x)|$ .

Nach Dateitransfer (ftp) können sie im CIP-Pool weiter verarbeitet werden.

Aufgabe: Seien $\Delta x = h$ , $\Delta y = k$.

(a) Lösen Sie für die folgenden Werte von $h, k$ die gegebenen Aufgaben

1.) $h = k = \dfrac{1}{10}$

2.) $h = k = \dfrac{1}{20}$

3.) $h = k = \dfrac{1}{40}$

4.) $h = k = \dfrac{1}{100}$

5.) $h = \dfrac{1}{20}$ , $k = \dfrac{1}{100}$

(b) Stellen Sie jeweils die numerische Lösung zu $h = k = \frac{1}{40}$ sowie die exakte Lösung mit Hilfe von GNUPLOT, MAPLE o. ä. graphisch dar.

(c) Geben Sie für beide Funktionen ein Schaubild der in 1.) – 4.) ermittelten $E_h$ in Abhängigkeit von $h$ aus ($x$–Achse: $h$, $y$–Achse: $\log_{10} E_h$)

(d) Vergleichen Sie für die zweite Funktion den relativen Fehler zu 5.) mit dem zu 2.) und 4.)! Was läßt sich schlußfolgern?

Geben Sie keine Ausdrucke ab, sondern zeigen Sie am Abgabetermin auf den Rechnern des CIP–Pools Ihre Ergebnisse. Wegen des Zugangs zum CIP–Pool wenden Sie sich bitte an Ihren Betreuer.

9. (theor.) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ und die Anfangsbedingung $u(x,0) = \sin \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Hinweis: Separation der Variablen)

10. (theor.)

(a) In dem linearen System von $I-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dt} = Au \ ,$$

habe die Matrix $A \quad (I-1)$ Eigenwerte $\lambda_i$ und linear unabhängige Eigenvektoren $v_i$, $i = 1, \ldots, I-1$.
Man zeige:
$u(0) = \sum \alpha_i v_i \quad \Longrightarrow \quad u(t) = \sum \alpha_i v_i \exp(\lambda_i t)$ .

(b) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Die Ortsableitung werde durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert, es sei $h = \frac{1}{I}$.
Man zeige, daß dies ein System wie in a) ergibt, und bestimme die Eigenwerte von $A$.

(c) Für das in Teil b) definierte System zeige man $\frac{d(\|u\|_2^2)}{dt} \leq 0$ und deshalb $\|u(t)\|_2 \leq \|u(0)\|_2$.

(d) Wendet man auf das in b) definierte System das Crank–Nicolson–Verfahren an, so zeige man $\|u^{n+1}\|_2^2 \leq \|u^n\|_2^2$.

11. (prakt.) Für die folgenden zwei linearen parabolischen Anfangsrandwertprobleme bestimme man zunächst die exakten Lösungen und schreibe dann ein Programm zu deren numerischer Lösung mit den jeweils zwei unten angegebenen Verfahren. Für die Lösung der entstehenden tridiagonalen Gleichungssysteme verwende man das Gaußsche Eliminationsverfahren. Als Programmiersprache verwende man PASCAL, C oder

FORTRAN. Als Rechner stehen die PC's des CIP–Pools oder die SUNs der Arbeitsgruppe Angewandte und Numerische Mathematik zur Verfügung. Der Zugang zu den SUNs erfolgt über „telnet“ (siehe Übungsblatt (4)).

Erstellen Sie neben den unten angegebenen Tabellen der Werte der Lösungen bzw. Fehler noch eine Grafik der numerischen Lösung auf dem $10 \times 50$ Gitter; verwenden Sie für die Grafik GNUPLOT oder MAPLE.

*Parabolische Anfangsrandwertprobleme:*

(a) $u_t = u_{xx}\,,\ 0 < x < 1\,,\ 0 < t < 1\,,$
$u(x,0) = \sin(\pi x)\,,\ 0 \le x \le 1\,,$
$u(0,t) = u(1,t) = 0\,,\ 0 < t < 1\,;$

(b) $u_t = u_{xx} - x(t-1)e^{-t}\,, \quad 0 < x < 1\,,\ 0 < t < 1\,,$
$u(x,0) = 0\,, \quad 0 \le x \le 1\,,$
$u(0,t) = 0\,, \quad u(1,t) = te^{-t}\,, \quad 0 < t < 1\,,$

*Verfahren:*

Rechennummer

| mit gerader Endziffer | mit ungerader Endziffer |
|---|---|
| (1) implizites Differenzenverf. (vgl. 4.2.(3) der Vorl. ) | (1) Crank–Nicolson–Verfahren (vgl. Kap. 4.4 der Vorl. ) |
| (2) Verfahren von Douglas | (2) Verfahren von Douglas |

Das *Verfahren von Douglas* ist implizit und hat die Form

$$\left(\frac{5}{6} + q\right) u_j^n - \frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{6}\right)\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) =$$
$$\left(\frac{5}{6} - q\right) u_j^{n-1} + \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{6}\right)\left(u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}\right) +$$
$$\frac{\Delta t}{2}\left(f_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{12}\delta^2 f_j^n\right) +$$
$$\frac{\Delta t}{2}\left(f_j^{n-1} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\,\delta^2 f_j^{n-1}\right)\,, \quad n = 1, \ldots, N\,,\ j = 1, \ldots, M\,.$$

Man wähle $\triangle x = 1/10$, $\triangle t = 1/N$ für $N = 100,\ 50,\ 25$ und drucke in Zeitschritten von $1/25$ jeweils

$$u(x_5,t_n) \quad |e_h(x_5,t_n)| \quad |\varepsilon_h(x_5,t_n)| \quad \frac{|e_h(x_5,t_n)|}{|u(x_5,t_n)|} \quad \frac{|\varepsilon_h(x_5,t_n)|}{|u(x_5,t_n)|} \quad \max_j |e_h(x_j,t_n)| \quad \max_j |\varepsilon_h(x_j,t_n)|$$

wobei $e_h = u - u_h^{(1)}$, $\varepsilon_h = u - u_h^{(2)}$ (der obere Index kennzeichnet das jeweilige Verfahren).

12. (theor.) Lösen Sie 10.(d).

13. (theor.) Es werden in der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

sowohl die Zeitableitung als auch die Ortsableitung durch zentrale Differenzenquotienten approximiert.

Man zeige, daß das entsprechende Differenzenverfahren für alle Werte von $q = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ bei Störungen der Anfangswerte instabil ist.

*Hinweis:* Bei der expliziten Lösung der Differenzengleichung mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen, $u_h(x,t) = v_h(x)w_h(t)$, ist für den Zeitanteil $w^n = w_h(t_n)$ eine dreigliedrige Rekursion der Form

$$w^{n+1} - 2pw^n - w^{n-1} = 0$$

zu lösen. Die allgemeine Lösung erhält man mit Hilfe der Wurzeln $\mu_{1,2}$ des zugehörigen charakteristischen Polynoms $\mu^2 - 2p\mu - 1$ in der Form $w^n = \alpha\mu_1^n + \beta\mu_2^n$.

14. (prakt.) Für die folgenden 2–dim. instationären Wärmeleitungsprobleme ($G = (0,1)\times(0,1)$)

(a) $u_t = u_{xx} + u_{yy}\ , \quad (x,y) \in G\ ,\ 0 < t < 1\ ,$
$u(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\ , \quad (x,y) \in G,$
$u(x,y,t) = 0\ , \quad (x,y) \in \partial G\ ,\ 0 < t < 1;$

(b) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + F(x,y,t) \quad (x,y) \in G\ ,\ 0 < t < 1,$
$u(x,y,0) = \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}y\right) v(x,0)$ als Anfangsbedingung,
Dirichlet–Randbedingungen und rechte Seite $F$ so gewählt, daß die Lösung
$u(x,y,t) = \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) v(x,t)$, mit
$v(x,t) = t - x + \frac{1}{2}x^2$;

berechne man Näherungslösungen $u_h$ auf einem äquidistanten Gitter $G_h$, $\Delta x = \Delta y = 1/10$. Differenzenapproximationen erhält man durch

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}\right) \quad = \quad \left\{\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1,j}^{n,\ominus} - 2u_{i,j}^{n,\ominus} + u_{i-1,j}^{n,\ominus}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{(\Delta y)^2}\left(u_{i,j+1}^{n,\ominus}-2u_{i,j}^{n,\ominus}+u_{i,j-1}^{n,\ominus}\right)\Big\}$$
$$+F_{i,j}^{n,\ominus}\ , \qquad (x_i,y_j)\in G_h\ ,\ n=1,\ldots,N\ ;$$

hierbei bezeichnet $v_{i,j}^{n,\ominus}=\ominus v_{i,j}^{n}+(1-\ominus)v_{i,j}^{n-1}$ für $0\le\ominus\le 1$.

Für die Lösung der entstehenden Bandmatrizen (in Blockform) bei zeilen- oder spaltenweiser Numerierung der Gitterpunkte verwende man das Gaußsche Eliminationsverfahren für Bandmatrizen (vgl. z. B. Stummel–Hainer ('82), § 6). Als Programmiersprache verwende man PASCAL, C oder FORTRAN. Als Rechner stehen die PC's des CIP–Pools oder die SUNs der Arbeitsgruppe Angewandte und Numerische Mathematik zur Verfügung. Der Zugang zu den SUNs erfolgt über „telnet" (siehe Übungsblatt (4)).

Erstellen Sie neben den unten angegebenen Tabellen der Werte der Lösungen bzw. Fehler noch eine Grafik der numerischen Lösung auf dem $10\times 10$ Gitter für die Zeitpunkte $t=0.4,\ 1.0$; verwenden Sie für die Grafik GNUPLOT oder MAPLE.

Man benutze

Rechennummer

| mit gerader Endziffer | mit ungerader Endziffer |
|---|---|
| Crank–Nicolson–Verfahren | implizites Verfahren |
| mit $\ominus=1/2$ | mit $\ominus=1$ |

und wähle $\Delta t=0.04$ und $\Delta t=0.02$; für jeden Zeitschritt drucke man

$$t\ , \qquad \max_{i,j}|u_h(x_i,y_j,t_n)|\ , \qquad \max_{i,j}|(u-u_h)(x_i,y_j,t_n)|\ .$$

15. (theor.) Schreiben Sie das Differenzenschema aus Aufg. 13 als

$$Au^n=Bu^{n-1}+c^n\ , \quad u^0=a\ ,$$

dessen Lösung sich bekanntlich in der Form

$$u^n=\sum_{j=0}^{n}C^{n-j}d^j\ , \quad n=0,\ldots,N\ ,$$

mit $C=A^{-1}B$, $d^0=a$, $d^n=A^{-1}c^n$, $n=1,2,\ldots$, schreiben läßt.

Zeigen Sie, daß der Spektralradius von $C$ für jedes Schrittweitenverhältnis $q=\Delta t/h^2$ und alle hinreichend kleinen $h$ die Abschätzung erfüllt,

$$\text{spr}\,(C)\ge 1+\rho_0$$

mit $\rho_0 > 0$. (Damit gilt die Aussage von Aufgabe 13 auch bezgl. der Eukl. Norm.)

*Hinweis:* Die Eigenwerte von $C$ genügen einer gewissen quadratischen Gleichung, worin die Eigenwerte von $-\delta^2$ auftreten. Letztere sind bekanntlich durch $(4/h^2)\sin^2(j\pi h/2)$ gegeben.

16. (theor.) Berechnen Sie den lokalen Abschneidefehler für das folgende implizite Differenzenverfahren zur Approximation der homogenen Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$,

$$\delta_t^2 u_j^n = \Theta\delta_x^2 u_j^{n+1} + (1-2\Theta)\delta_x^2 u_j^n + \Theta\delta_x^2 u_j^{n-1} \ .$$

Hierbei ist $\Theta = \frac{1}{2}$ oder $\Theta = 1$.

17. (theor.) Man approximiere $u_x - u_t = f$ durch die Differenzengleichung

$$\frac{1}{\Delta x}\left[u_{j+1}^n - u_j^n\right] - \frac{1}{2\Delta t}\left[u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right] = f_j^n$$

und reduziere darin die Anzahl der Gitterpunkte, indem man $u_j^n$ durch den Mittelwert von $u_j^{n+1}$ und $u_j^{n-1}$ ersetzt, d. h.

$$\frac{1}{\Delta x}\left[u_{j+1}^n - \frac{1}{2}\left(u_j^{n+1} + u_j^{n-1}\right)\right] - \frac{1}{2\Delta t}\left[u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right] = f_j^n \ .$$

Sodann untersuche man den lokalen Abschneidefehler für $\Delta x, \Delta t \to 0$.

18. (theor.) Die Wellengleichung $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = g^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $u_t(x,0) = g^1(x)$, $x \in \mathbb{R}$ werde durch das explizite endliche Differenzenverfahren

$$U_i^{n+1} = U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - U_i^{n-1}$$

approximiert. Die Anfangsbedingungen lauten ($h = \Delta x = \Delta t$)

$$\begin{aligned} U_i^0 &= g^0(x_i) \ , \quad i \in \mathbb{Z} \ , \\ U_i^1 &= U_i^0 + h \cdot g^1(x_i) \ , \quad i \in \mathbb{Z} \ . \end{aligned}$$

Man zeige:

a) $|w_i^1| \le \frac{1}{2}h^2 M_2$ ,
wobei $w_i^n = U_i^n - u(x_i, t_n)$ und $M_2 := \sup\{|u_{tt}(x,t)| : x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$.

b) $w_i^{n+1} = w_{i+1}^n + w_{i-1}^n - w_i^{n-1} + \frac{1}{6}h^4\gamma M_4$,
wobei $M_4 := \sup\left\{\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)\right| , \left|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\right| : x \in \mathbb{R} , t > 0\right\}$ und $|\gamma| \le 1$ ist.

c) $|w_i^n| \le \frac{1}{2}nh^2 M_2 + \frac{1}{12}n(n-1)h^4 M_4$ ,
und beweise, daß $U$ gegen $u$ konvergiert, sobald $h$ gegen Null strebt.

19. (prakt.) Für die folgenden hyperbolischen Anfangsrandwertprobleme bestimme man – soweit möglich – zunächst die exakte Lösung,

$$
\begin{aligned}
\text{(a)}\quad & u_{tt} = u_{xx} , && 0 < x < 1 ,\ 0 < t \le 1 ,\\
& u(0,t) = \sin(\pi t) , && u(1,t) = \sin(\pi(1+t))\\
& u(x,0) = \sin(\pi x) , && u_t(x,0) = \pi\cos(\pi x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\quad & u_{tt} - u_{xx} = \frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\sin(\pi x)\exp(-t) , \quad 0 < x < 1 , \quad 0 < t \le 1 ,\\
& u(0,t) = u(1,t) = 0\\
& u(x,0) = \sin(\pi x)/(\pi^2-1) = -u_t(x,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(c)}\quad & u_{tt} = u_{xx} , && -2 < x < 2 ,\ 0 < t \le 8\\
& u(-2,t) = u(2,t) = 0 , \ t > 0\\
& u(x,0) = \begin{cases} 2\cos(2\pi x) , & |x| \le 0.25\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\\
& u_t(x,0) = 0
\end{aligned}
$$

Man berechne Näherungslösungen mit dem Differenzenverfahren

$$
u_j^{n+1} - 2(1-q^2)u_j^n - q^2\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) + u_j^{n-1} = k^2 f_j^n ,
$$

$$
j = 1, \ldots, M,\ n = 1, \ldots, N-1 ,
$$

wobei $h = \Delta x$ , $k = \Delta t$ , $q = k/h$ .

Als Anfangsapproximation für $t_1 = k$ verwende man die folgenden Alternativen:

$$\text{(A)} \qquad u_j^1 \;=\; g_j^0 + k\, g_j^1 \;, \qquad j = 1, \ldots, M \;,$$

$$\text{(B)} \qquad u_j^1 \;=\; g_j^0 + k\, g_j^1 + \tfrac{1}{2} q^2 \left( g_{j+1}^0 - 2 g_j^0 + g_{j-1}^0 \right) + \tfrac{1}{2} k^2 f_j^0 \;, \quad j = 1, \ldots, M \;.$$

Man verwende äquidistante Schrittweiten $h = 0.1$ und $h = 0.05$ sowie geeignete Zeitschrittweiten $k (\leq h)$. Für eine Auswahl von Gitterpunkten und Zeitstufen drucke man $u_h(x_j\,,\; t_n)$ sowie den Fehler – soweit bekannt.

(Vorschlag für Beispiel (c): Ausdruck für $x_i = 0.1i$ , $t_k = 0.25k$)

20. (theor.) Zur Approximation der homogenen Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ betrachte man die Verfahren

(a)

$$\delta_t^2 u_j^n = \delta_x^2 u_j^n$$

(vgl. Übg. 19);

(b)

$$\delta_t^2 u_j^n = \frac{1}{2} \left( \delta_x^2 u_j^{n+1} + \delta_x^2 u_j^{n-1} \right)$$

(vgl. Übg. 16 für $\Theta = 1/2$).

Zeigen Sie: Die Verfahren (a) und (b) erfüllen die von Neumann-Bedingung für alle $q = \Delta t / \Delta x$.

21. (theor.) Zur Approximation der hyperbolischen Differentialgleichung erster Ordnung, $u_t + c u_x = f$, betrachte man:

(a) das Friedrichs–Verfahren;

(b) das Verfahren aus Übg. 17,
$\frac{1}{2}(1 - cq) u_j^{n+1} + cq\, u_{j+1}^n - \frac{1}{2}(1 + cq) u_j^{n-1} = \Delta t f_j^n$ .

Überprüfen Sie für beide Verfahren die von Neumann–Bedingung.

*Hinweis:* Das 3–Stufen–Verfahren in (b) muß zunächst als 2–Stufen–Verfahren für ein System von 2 Gleichungen umgeschrieben werden.

## Anhang B

# Musterlösungen der praktischen Übungsaufgaben

Die Aufgabentexte zu den Aufgaben, deren Lösungen im folgenden aufgeführt sind, befinden sich im Anhang A entsprechend den angegebenen Nummern.

8. **Lösung:**

   Elliptische Randwertaufgaben:

   1. $u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2 - x - y \quad \text{in} \quad G\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G\,,$

   2. $u_{xx} + u_{yy} = 2\exp(x+y)\Big(\sin(\pi y)\sin(\pi x)(1-\pi^2) + \pi\sin(\pi(x+y))\Big) \text{ in } G\,,$

      $u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G\,.$

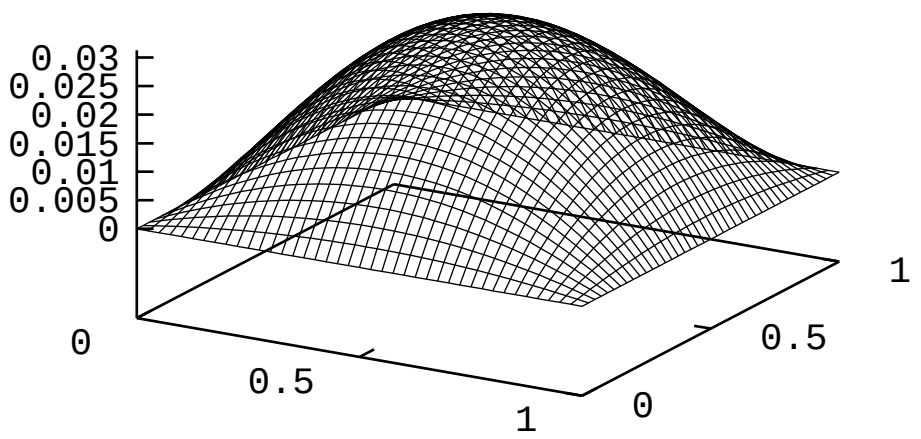



Fig. B.1: Näherungslösung zu 1. ($\Delta x = \Delta y = \frac{1}{40}$)

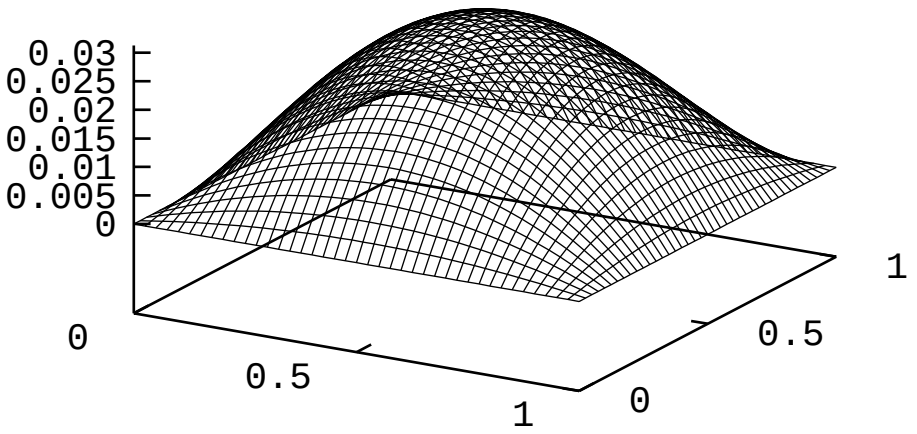



Fig. B.2: Exakte Lösung zu 1.

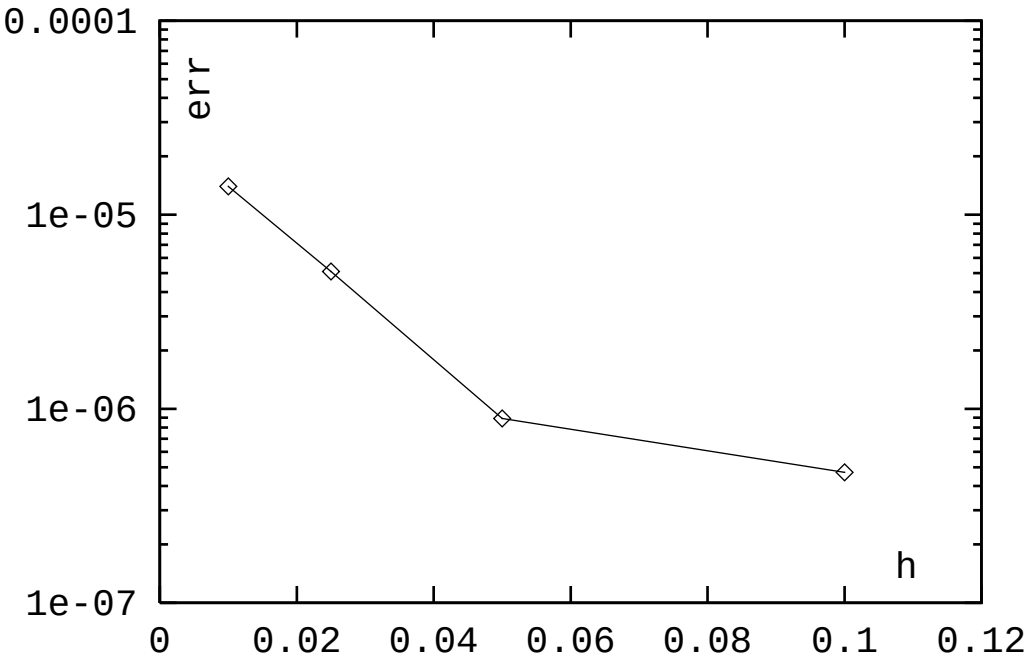



Fig. B.3: Relative maximale Fehler zu 1.

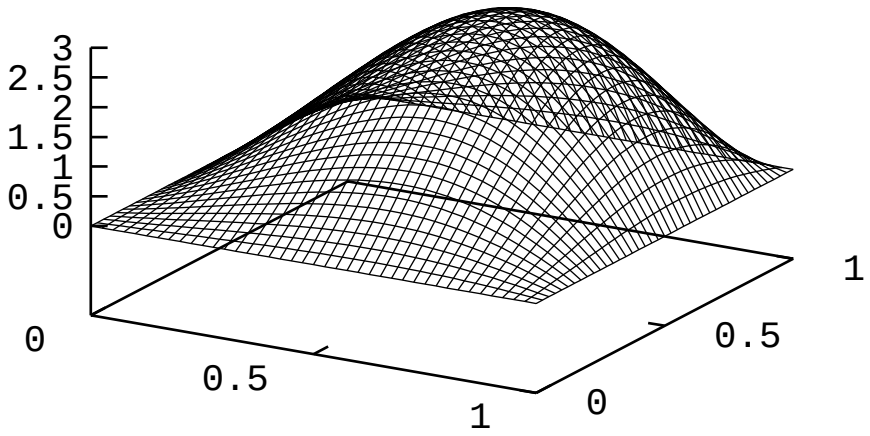



Fig. B.4: Näherungslösung zu 2. ($\Delta x = \Delta y = \frac{1}{40}$)

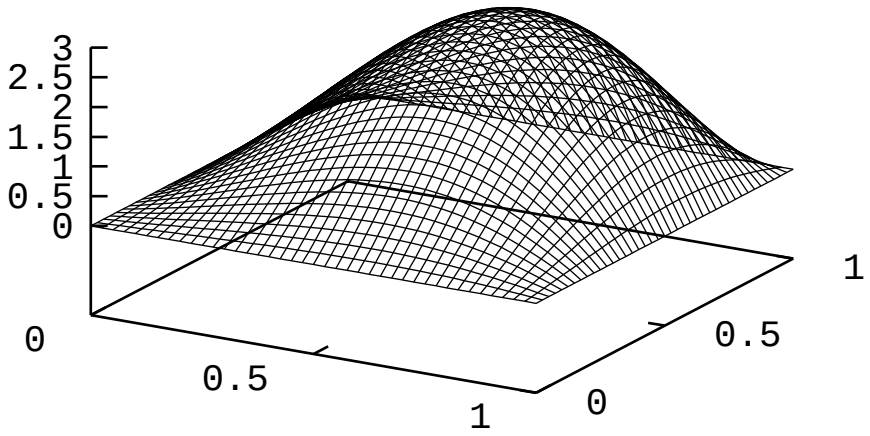



Fig. B.5: Exakte Lösung zu 2.

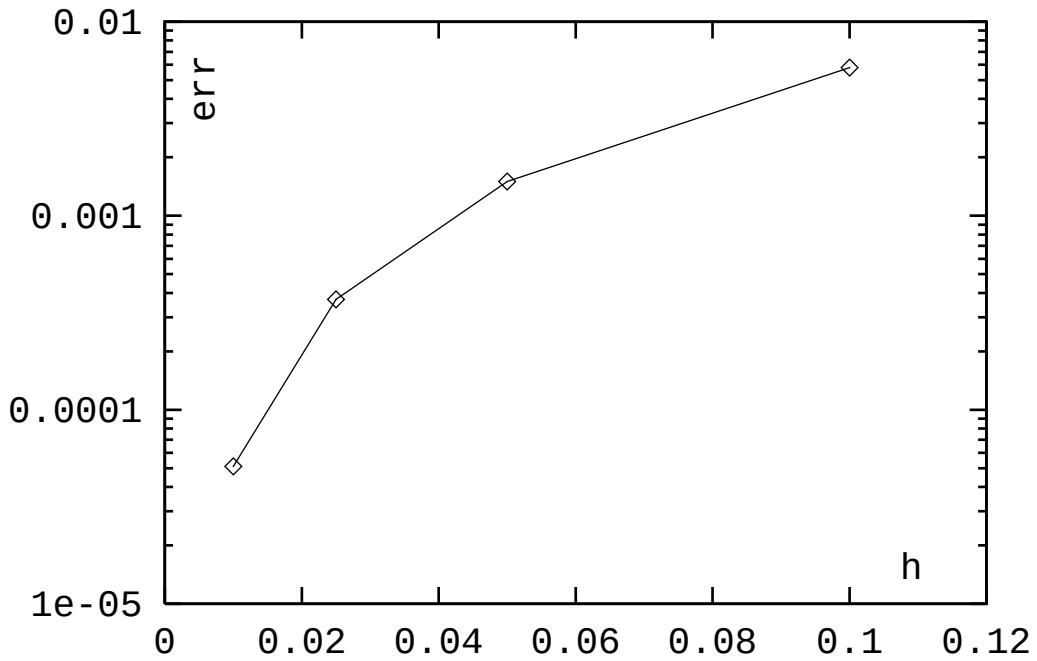



Fig. B.6: Relative maximale Fehler zu 2.

11. **Lösung:**

Parabolische Anfangsrandwertaufgaben:

(a) $u_t = u_{xx}\ ,\ \ 0 < x < 1\ ,\ \ 0 < t < 1\ ,$

$u(x,0) = \sin(\pi x)\ ,\ \ 0 \le x \le 1$

$u(0,t) = u(1,t) = 0\ ,\ \ 0 < t < 1\ ;$

(b) $u_t = u_{xx} - x(t-1)e^{-t}\ ,\ \ 0 < x < 1\ ,\ \ 0 < t < 1\ ,$

$u(x,0) = 0\ ,\ \ 0 \le x \le 1$

$u(0,t) = 0\ ,\ \ u(1,t) = te^{-t}\ ,\ \ 0 < t < 1\ .$

a) (theoretischer Teil) Die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems lautet nach Aufgabe 9 der theoretischen Übungsaufgaben

$$u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}\ .$$

Wegen $u(0,t) = 0$ und $u(1,t) = \sin(\pi)e^{-\pi^2 t} = 0 \iff \sin\pi = 0$ sind auch die Randbedingungen erfüllt.

b) (theoretischer Teil) Betrachte die Funktion

$$v(x,t) = u(x,t) - h(x,t) \ ,$$

wobei

$$h(x,t) = (1-x)\underbrace{u(0,t)}_{=0} + x \cdot \underbrace{u(1,t)}_{te^{-t}} = x \cdot t \cdot e^{-t} \ .$$

$v$ besitzt homogene Randbedingungen:

$$v(0,t) = u(0,t) - h(0,t) = u(0,t) - u(0,t) = 0 \ ,$$

$$v(1,t) = u(1,t) - h(1,t) = u(1,t) - u(1,t) = 0 \ .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= u_t(x,t) - h_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - x(t-1)e^{-t} - x(1-t)e^{-t} \\ &= u_{xx}(x,t) \end{aligned}$$

und

$$v_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t) - h_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t) = v_t(x,t) \ .$$

Anfangsbedingung: $v(x,0) = u(x,0) - h(x,0) = 0$

Nach der theoretischen Übungsaufgabe 9 ($\lambda = 0$), erhält man $v \equiv 0$ und somit

$$u(x,t) = h(x,t) = x \cdot t \cdot e^{-t} \ .$$

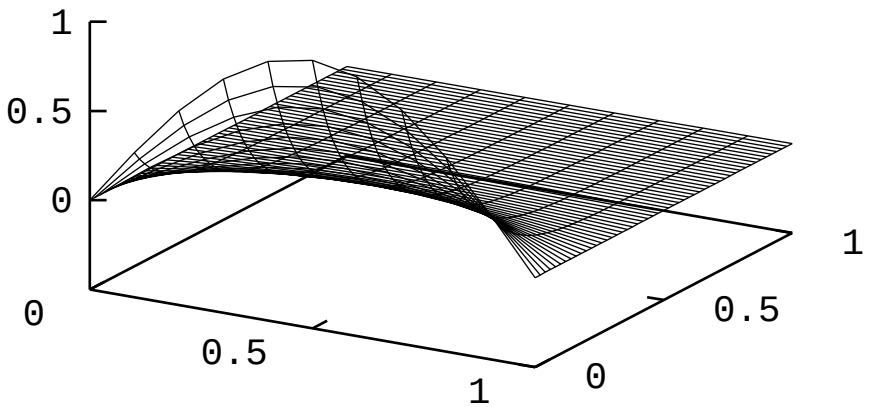



Fig. B.7: Impl. Differenzenverf. zu (a) für $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{50}$

| t | u(0.5) | Implf | Crankf | Dougf | ImplRf | CrankRf | DougRf | ImplMf | CrankMf | DougMf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.04 | 6.7e-01 | 1.4e-02 | 2.0e-03 | 2.1e-04 | 2.1e-02 | 2.9e-03 | 3.0e-04 | 1.4e-02 | 2.0e-03 | 2.1e-04 |
| 0.08 | 4.5e-01 | 2.0e-02 | 2.7e-03 | 2.8e-04 | 4.3e-02 | 5.9e-03 | 6.1e-04 | 2.0e-02 | 2.7e-03 | 2.8e-04 |
| 0.12 | 3.1e-01 | 2.0e-02 | 2.7e-03 | 2.8e-04 | 6.6e-02 | 8.8e-03 | 9.1e-04 | 2.0e-02 | 2.7e-03 | 2.8e-04 |
| 0.16 | 2.1e-01 | 1.8e-02 | 2.4e-03 | 2.5e-04 | 8.9e-02 | 1.2e-02 | 1.2e-03 | 1.8e-02 | 2.4e-03 | 2.5e-04 |
| 0.20 | 1.4e-01 | 1.6e-02 | 2.0e-03 | 2.1e-04 | 1.1e-01 | 1.5e-02 | 1.5e-03 | 1.6e-02 | 2.0e-03 | 2.1e-04 |
| 0.24 | 9.4e-02 | 1.3e-02 | 1.7e-03 | 1.7e-04 | 1.4e-01 | 1.8e-02 | 1.8e-03 | 1.3e-02 | 1.7e-03 | 1.7e-04 |
| 0.28 | 6.3e-02 | 1.0e-02 | 1.3e-03 | 1.3e-04 | 1.6e-01 | 2.1e-02 | 2.1e-03 | 1.0e-02 | 1.3e-03 | 1.3e-04 |
| 0.32 | 4.2e-02 | 7.9e-03 | 1.0e-03 | 1.0e-04 | 1.9e-01 | 2.4e-02 | 2.4e-03 | 7.9e-03 | 1.0e-03 | 1.0e-04 |
| 0.36 | 2.9e-02 | 6.0e-03 | 7.6e-04 | 7.8e-05 | 2.1e-01 | 2.7e-02 | 2.7e-03 | 6.0e-03 | 7.6e-04 | 7.8e-05 |
| 0.40 | 1.9e-02 | 4.6e-03 | 5.7e-04 | 5.9e-05 | 2.4e-01 | 3.0e-02 | 3.0e-03 | 4.6e-03 | 5.7e-04 | 5.9e-05 |
| 0.44 | 1.3e-02 | 3.4e-03 | 4.2e-04 | 4.4e-05 | 2.6e-01 | 3.3e-02 | 3.3e-03 | 3.4e-03 | 4.2e-04 | 4.4e-05 |
| 0.48 | 8.8e-03 | 2.5e-03 | 3.1e-04 | 3.2e-05 | 2.9e-01 | 3.6e-02 | 3.6e-03 | 2.5e-03 | 3.1e-04 | 3.2e-05 |
| 0.52 | 5.9e-03 | 1.9e-03 | 2.3e-04 | 2.3e-05 | 3.2e-01 | 3.9e-02 | 4.0e-03 | 1.9e-03 | 2.3e-04 | 2.3e-05 |
| 0.56 | 4.0e-03 | 1.4e-03 | 1.7e-04 | 1.7e-05 | 3.5e-01 | 4.2e-02 | 4.3e-03 | 1.4e-03 | 1.7e-04 | 1.7e-05 |
| 0.60 | 2.7e-03 | 1.0e-03 | 1.2e-04 | 1.2e-05 | 3.8e-01 | 4.5e-02 | 4.6e-03 | 1.0e-03 | 1.2e-04 | 1.2e-05 |
| 0.64 | 1.8e-03 | 7.3e-04 | 8.6e-05 | 8.8e-06 | 4.0e-01 | 4.8e-02 | 4.9e-03 | 7.3e-04 | 8.6e-05 | 8.8e-06 |
| 0.68 | 1.2e-03 | 5.3e-04 | 6.2e-05 | 6.3e-06 | 4.3e-01 | 5.1e-02 | 5.2e-03 | 5.3e-04 | 6.2e-05 | 6.3e-06 |
| 0.72 | 8.2e-04 | 3.8e-04 | 4.4e-05 | 4.5e-06 | 4.7e-01 | 5.4e-02 | 5.5e-03 | 3.8e-04 | 4.4e-05 | 4.5e-06 |
| 0.76 | 5.5e-04 | 2.7e-04 | 3.2e-05 | 3.2e-06 | 5.0e-01 | 5.7e-02 | 5.8e-03 | 2.7e-04 | 3.2e-05 | 3.2e-06 |
| 0.80 | 3.7e-04 | 2.0e-04 | 2.2e-05 | 2.3e-06 | 5.3e-01 | 6.0e-02 | 6.1e-03 | 2.0e-04 | 2.2e-05 | 2.3e-06 |
| 0.84 | 2.5e-04 | 1.4e-04 | 1.6e-05 | 1.6e-06 | 5.6e-01 | 6.3e-02 | 6.4e-03 | 1.4e-04 | 1.6e-05 | 1.6e-06 |
| 0.88 | 1.7e-04 | 1.0e-04 | 1.1e-05 | 1.1e-06 | 6.0e-01 | 6.6e-02 | 6.7e-03 | 1.0e-04 | 1.1e-05 | 1.1e-06 |
| 0.92 | 1.1e-04 | 7.2e-05 | 7.9e-06 | 8.0e-07 | 6.3e-01 | 7.0e-02 | 7.0e-03 | 7.2e-05 | 7.9e-06 | 8.0e-07 |
| 0.96 | 7.7e-05 | 5.1e-05 | 5.6e-06 | 5.6e-07 | 6.6e-01 | 7.3e-02 | 7.3e-03 | 5.1e-05 | 5.6e-06 | 5.6e-07 |
| 1.00 | 5.2e-05 | 3.6e-05 | 3.9e-06 | 3.9e-07 | 7.0e-01 | 7.6e-02 | 7.6e-03 | 3.6e-05 | 3.9e-06 | 3.9e-07 |

Tab. 1: ARWP (a) für $N = 100$ — Für die einzelnen Verf. sind aufgeführt: Fehler (f) und rel. Fehler (Rf) jeweils absolut bei $x = \frac{1}{2}$, außerdem absolute maximale Fehler (Mf)

Tab. 2: ARWP (a) für $N = 50$ — Für die einzelnen Verf. sind aufgeführt: Fehler (f) und rel. Fehler (Rf) jeweils absolut bei $x = \frac{1}{2}$, außerdem absolute maximale Fehler (Mf)

| t | u(0.5) | Implf | Crankf | Dougf | ImplRf | CrankRf | DougRf | ImplMf | CrankMf | DougMf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.04 | 6.7e-01 | 2.6e-02 | 1.3e-03 | 8.6e-04 | 3.8e-02 | 2.0e-03 | 1.3e-03 | 2.6e-02 | 1.3e-03 | 8.6e-04 |
| 0.08 | 4.5e-01 | 3.5e-02 | 1.8e-03 | 1.2e-03 | 7.7e-02 | 4.0e-03 | 2.5e-03 | 3.5e-02 | 1.8e-03 | 1.2e-03 |
| 0.12 | 3.1e-01 | 3.6e-02 | 1.8e-03 | 1.2e-03 | 1.2e-01 | 6.0e-03 | 3.8e-03 | 3.6e-02 | 1.8e-03 | 1.2e-03 |
| 0.16 | 2.1e-01 | 3.3e-02 | 1.6e-03 | 1.0e-03 | 1.6e-01 | 7.9e-03 | 5.1e-03 | 3.3e-02 | 1.6e-03 | 1.0e-03 |
| 0.20 | 1.4e-01 | 2.8e-02 | 1.4e-03 | 8.8e-04 | 2.0e-01 | 9.9e-03 | 6.3e-03 | 2.8e-02 | 1.4e-03 | 8.8e-04 |
| 0.24 | 9.4e-02 | 2.3e-02 | 1.1e-03 | 7.1e-04 | 2.5e-01 | 1.2e-02 | 7.6e-03 | 2.3e-02 | 1.1e-03 | 7.1e-04 |
| 0.28 | 6.3e-02 | 1.9e-02 | 8.8e-04 | 5.6e-04 | 3.0e-01 | 1.4e-02 | 8.9e-03 | 1.9e-02 | 8.8e-04 | 5.6e-04 |
| 0.32 | 4.2e-02 | 1.5e-02 | 6.8e-04 | 4.3e-04 | 3.5e-01 | 1.6e-02 | 1.0e-02 | 1.5e-02 | 6.8e-04 | 4.3e-04 |
| 0.36 | 2.9e-02 | 1.1e-02 | 5.1e-04 | 3.3e-04 | 4.0e-01 | 1.8e-02 | 1.1e-02 | 1.1e-02 | 5.1e-04 | 3.3e-04 |
| 0.40 | 1.9e-02 | 8.7e-03 | 3.9e-04 | 2.4e-04 | 4.5e-01 | 2.0e-02 | 1.3e-02 | 8.7e-03 | 3.9e-04 | 2.4e-04 |
| 0.44 | 1.3e-02 | 6.6e-03 | 2.9e-04 | 1.8e-04 | 5.1e-01 | 2.2e-02 | 1.4e-02 | 6.6e-03 | 2.9e-04 | 1.8e-04 |
| 0.48 | 8.8e-03 | 4.9e-03 | 2.1e-04 | 1.3e-04 | 5.6e-01 | 2.4e-02 | 1.5e-02 | 4.9e-03 | 2.1e-04 | 1.3e-04 |
| 0.52 | 5.9e-03 | 3.7e-03 | 1.5e-04 | 9.7e-05 | 6.2e-01 | 2.6e-02 | 1.6e-02 | 3.7e-03 | 1.5e-04 | 9.7e-05 |
| 0.56 | 4.0e-03 | 2.7e-03 | 1.1e-04 | 7.0e-05 | 6.8e-01 | 2.8e-02 | 1.8e-02 | 2.7e-03 | 1.1e-04 | 7.0e-05 |
| 0.60 | 2.7e-03 | 2.0e-03 | 8.1e-05 | 5.1e-05 | 7.5e-01 | 3.0e-02 | 1.9e-02 | 2.0e-03 | 8.1e-05 | 5.1e-05 |
| 0.64 | 1.8e-03 | 1.5e-03 | 5.8e-05 | 3.6e-05 | 8.1e-01 | 3.2e-02 | 2.0e-02 | 1.5e-03 | 5.8e-05 | 3.6e-05 |
| 0.68 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 4.2e-05 | 2.6e-05 | 8.8e-01 | 3.4e-02 | 2.1e-02 | 1.1e-03 | 4.2e-05 | 2.6e-05 |
| 0.72 | 8.2e-04 | 7.8e-04 | 3.0e-05 | 1.9e-05 | 9.5e-01 | 3.6e-02 | 2.3e-02 | 7.8e-04 | 3.0e-05 | 1.9e-05 |
| 0.76 | 5.5e-04 | 5.7e-04 | 2.1e-05 | 1.3e-05 | 1.0e+00 | 3.8e-02 | 2.4e-02 | 5.7e-04 | 2.1e-05 | 1.3e-05 |
| 0.80 | 3.7e-04 | 4.1e-04 | 1.5e-05 | 9.4e-06 | 1.1e+00 | 4.0e-02 | 2.5e-02 | 4.1e-04 | 1.5e-05 | 9.4e-06 |
| 0.84 | 2.5e-04 | 3.0e-04 | 1.1e-05 | 6.6e-06 | 1.2e+00 | 4.2e-02 | 2.6e-02 | 3.0e-04 | 1.1e-05 | 6.6e-06 |
| 0.88 | 1.7e-04 | 2.1e-04 | 7.5e-06 | 4.7e-06 | 1.3e+00 | 4.4e-02 | 2.8e-02 | 2.1e-04 | 7.5e-06 | 4.7e-06 |
| 0.92 | 1.1e-04 | 1.5e-04 | 5.3e-06 | 3.3e-06 | 1.4e+00 | 4.7e-02 | 2.9e-02 | 1.5e-04 | 5.3e-06 | 3.3e-06 |
| 0.96 | 7.7e-05 | 1.1e-04 | 3.7e-06 | 2.3e-06 | 1.4e+00 | 4.9e-02 | 3.0e-02 | 1.1e-04 | 3.7e-06 | 2.3e-06 |
| 1.00 | 5.2e-05 | 7.9e-05 | 2.6e-06 | 1.6e-06 | 1.5e+00 | 5.1e-02 | 3.1e-02 | 7.9e-05 | 2.6e-06 | 1.6e-06 |

| t | u(0.5) | Implf | Crankf | Dougf | ImplRf | CrankRf | DougRf | ImplMf | CrankMf | DougMf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.04 | 6.7e-01 | 4.5e-02 | 1.3e-03 | 3.5e-03 | 6.6e-02 | 1.9e-03 | 5.2e-03 | 4.5e-02 | 1.3e-03 | 3.5e-03 |
| 0.08 | 4.5e-01 | 6.2e-02 | 1.7e-03 | 4.7e-03 | 1.4e-01 | 3.8e-03 | 1.0e-02 | 6.2e-02 | 1.7e-03 | 4.7e-03 |
| 0.12 | 3.1e-01 | 6.5e-02 | 1.7e-03 | 4.8e-03 | 2.1e-01 | 5.6e-03 | 1.6e-02 | 6.5e-02 | 1.7e-03 | 4.8e-03 |
| 0.16 | 2.1e-01 | 6.1e-02 | 1.5e-03 | 4.3e-03 | 2.9e-01 | 7.5e-03 | 2.1e-02 | 6.1e-02 | 1.5e-03 | 4.3e-03 |
| 0.20 | 1.4e-01 | 5.3e-02 | 1.3e-03 | 3.6e-03 | 3.8e-01 | 9.4e-03 | 2.6e-02 | 5.3e-02 | 1.3e-03 | 3.6e-03 |
| 0.24 | 9.4e-02 | 4.4e-02 | 1.1e-03 | 2.9e-03 | 4.7e-01 | 1.1e-02 | 3.1e-02 | 4.4e-02 | 1.1e-03 | 2.9e-03 |
| 0.28 | 6.3e-02 | 3.6e-02 | 8.3e-04 | 2.3e-03 | 5.7e-01 | 1.3e-02 | 3.6e-02 | 3.6e-02 | 8.3e-04 | 2.3e-03 |
| 0.32 | 4.2e-02 | 2.9e-02 | 6.4e-04 | 1.7e-03 | 6.7e-01 | 1.5e-02 | 4.1e-02 | 2.9e-02 | 6.4e-04 | 1.7e-03 |
| 0.36 | 2.9e-02 | 2.2e-02 | 4.8e-04 | 1.3e-03 | 7.8e-01 | 1.7e-02 | 4.6e-02 | 2.2e-02 | 4.8e-04 | 1.3e-03 |
| 0.40 | 1.9e-02 | 1.7e-02 | 3.6e-04 | 9.8e-04 | 9.0e-01 | 1.9e-02 | 5.1e-02 | 1.7e-02 | 3.6e-04 | 9.8e-04 |
| 0.44 | 1.3e-02 | 1.3e-02 | 2.7e-04 | 7.3e-04 | 1.0e+00 | 2.1e-02 | 5.6e-02 | 1.3e-02 | 2.7e-04 | 7.3e-04 |
| 0.48 | 8.8e-03 | 1.0e-02 | 2.0e-04 | 5.3e-04 | 1.2e+00 | 2.2e-02 | 6.1e-02 | 1.0e-02 | 2.0e-04 | 5.3e-04 |
| 0.52 | 5.9e-03 | 7.7e-03 | 1.4e-04 | 3.9e-04 | 1.3e+00 | 2.4e-02 | 6.6e-02 | 7.7e-03 | 1.4e-04 | 3.9e-04 |
| 0.56 | 4.0e-03 | 5.8e-03 | 1.0e-04 | 2.8e-04 | 1.5e+00 | 2.6e-02 | 7.1e-02 | 5.8e-03 | 1.0e-04 | 2.8e-04 |
| 0.60 | 2.7e-03 | 4.4e-03 | 7.5e-05 | 2.0e-04 | 1.6e+00 | 2.8e-02 | 7.6e-02 | 4.4e-03 | 7.5e-05 | 2.0e-04 |
| 0.64 | 1.8e-03 | 3.3e-03 | 5.4e-05 | 1.5e-04 | 1.8e+00 | 3.0e-02 | 8.0e-02 | 3.3e-03 | 5.4e-05 | 1.5e-04 |
| 0.68 | 1.2e-03 | 2.4e-03 | 3.8e-05 | 1.0e-04 | 2.0e+00 | 3.2e-02 | 8.5e-02 | 2.4e-03 | 3.8e-05 | 1.0e-04 |
| 0.72 | 8.2e-04 | 1.8e-03 | 2.7e-05 | 7.4e-05 | 2.2e+00 | 3.3e-02 | 9.0e-02 | 1.8e-03 | 2.7e-05 | 7.4e-05 |
| 0.76 | 5.5e-04 | 1.3e-03 | 1.9e-05 | 5.2e-05 | 2.4e+00 | 3.5e-02 | 9.5e-02 | 1.3e-03 | 1.9e-05 | 5.2e-05 |
| 0.80 | 3.7e-04 | 9.8e-04 | 1.4e-05 | 3.7e-05 | 2.6e+00 | 3.7e-02 | 9.9e-02 | 9.8e-04 | 1.4e-05 | 3.7e-05 |
| 0.84 | 2.5e-04 | 7.2e-04 | 9.7e-06 | 2.6e-05 | 2.9e+00 | 3.9e-02 | 1.0e-01 | 7.2e-04 | 9.7e-06 | 2.6e-05 |
| 0.88 | 1.7e-04 | 5.3e-04 | 6.9e-06 | 1.8e-05 | 3.1e+00 | 4.1e-02 | 1.1e-01 | 5.3e-04 | 6.9e-06 | 1.8e-05 |
| 0.92 | 1.1e-04 | 3.9e-04 | 4.8e-06 | 1.3e-05 | 3.4e+00 | 4.2e-02 | 1.1e-01 | 3.9e-04 | 4.8e-06 | 1.3e-05 |
| 0.96 | 7.7e-05 | 2.8e-04 | 3.4e-06 | 9.1e-06 | 3.7e+00 | 4.4e-02 | 1.2e-01 | 2.8e-04 | 3.4e-06 | 9.1e-06 |
| 1.00 | 5.2e-05 | 2.1e-04 | 2.4e-06 | 6.3e-06 | 4.0e+00 | 4.6e-02 | 1.2e-01 | 2.1e-04 | 2.4e-06 | 6.3e-06 |

Tab. 3: ARWP (a) für $N = 25$ — Für die einzelnen Verf. sind aufgeführt: Fehler (f) und rel. Fehler (Rf) jeweils absolut bei $x = \frac{1}{2}$, außerdem absolute maximale Fehler (Mf)

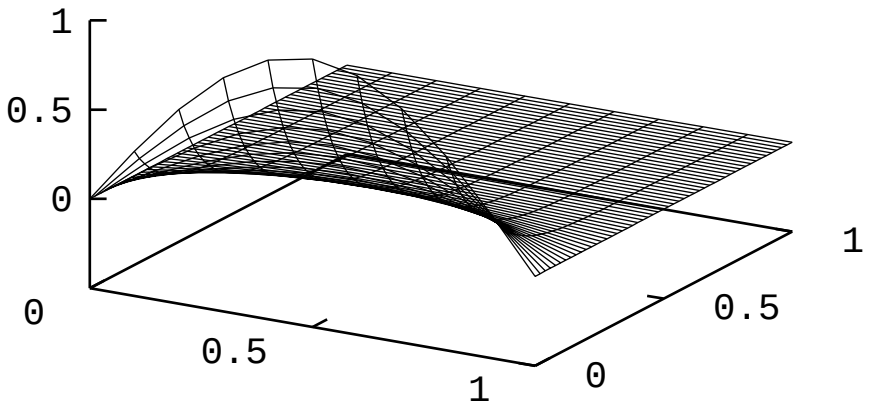



Fig. B.8: Crank-Nicolson-Verfahren zu (a) für $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{50}$

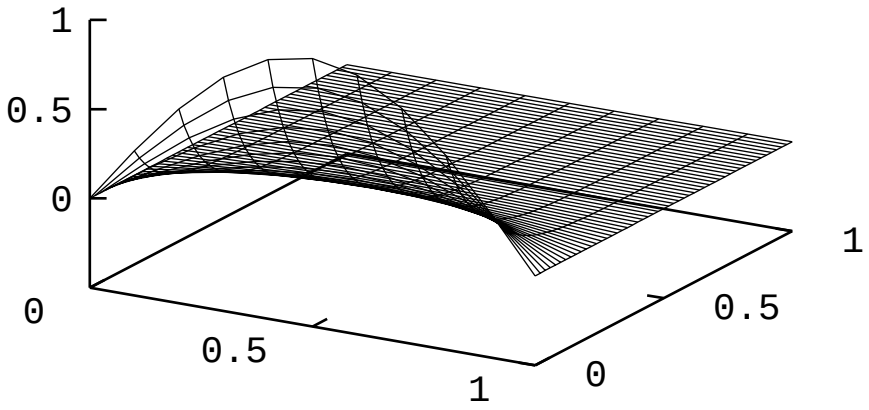



Fig. B.9: Douglas-Verfahren zu (a) für $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{50}$

| t | u(0.5) | Implf | Crankf | Dougf | ImplRf | CrankRf | DougRf | ImplMf | CrankMf | DougMf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.04 | 1.9e-02 | 1.8e-04 | 4.6e-07 | 4.7e-07 | 9.2e-03 | 2.4e-05 | 2.4e-05 | 2.1e-04 | 5.5e-07 | 5.5e-07 |
| 0.08 | 3.7e-02 | 3.0e-04 | 7.7e-07 | 7.9e-07 | 8.1e-03 | 2.1e-05 | 2.1e-05 | 3.2e-04 | 8.3e-07 | 8.4e-07 |
| 0.12 | 5.3e-02 | 3.7e-04 | 9.5e-07 | 9.8e-07 | 7.0e-03 | 1.8e-05 | 1.8e-05 | 3.9e-04 | 1.0e-06 | 1.0e-06 |
| 0.16 | 6.8e-02 | 4.1e-04 | 1.0e-06 | 1.1e-06 | 6.1e-03 | 1.5e-05 | 1.6e-05 | 4.3e-04 | 1.1e-06 | 1.1e-06 |
| 0.20 | 8.2e-02 | 4.3e-04 | 1.1e-06 | 1.1e-06 | 5.3e-03 | 1.3e-05 | 1.4e-05 | 4.5e-04 | 1.1e-06 | 1.2e-06 |
| 0.24 | 9.4e-02 | 4.4e-04 | 1.1e-06 | 1.1e-06 | 4.6e-03 | 1.2e-05 | 1.2e-05 | 4.5e-04 | 1.1e-06 | 1.2e-06 |
| 0.28 | 1.1e-01 | 4.3e-04 | 1.1e-06 | 1.1e-06 | 4.1e-03 | 1.0e-05 | 1.1e-05 | 4.4e-04 | 1.1e-06 | 1.1e-06 |
| 0.32 | 1.2e-01 | 4.2e-04 | 1.0e-06 | 1.1e-06 | 3.6e-03 | 8.8e-06 | 9.5e-06 | 4.3e-04 | 1.0e-06 | 1.1e-06 |
| 0.36 | 1.3e-01 | 4.0e-04 | 1.0e-06 | 1.1e-06 | 3.2e-03 | 8.0e-06 | 8.4e-06 | 4.1e-04 | 1.0e-06 | 1.1e-06 |
| 0.40 | 1.3e-01 | 3.9e-04 | 9.5e-07 | 1.0e-06 | 2.9e-03 | 7.1e-06 | 7.7e-06 | 3.9e-04 | 9.8e-07 | 1.0e-06 |
| 0.44 | 1.4e-01 | 3.7e-04 | 9.1e-07 | 9.7e-07 | 2.6e-03 | 6.4e-06 | 6.8e-06 | 3.7e-04 | 9.2e-07 | 9.8e-07 |
| 0.48 | 1.5e-01 | 3.5e-04 | 8.3e-07 | 9.4e-07 | 2.3e-03 | 5.6e-06 | 6.3e-06 | 3.5e-04 | 8.5e-07 | 9.4e-07 |
| 0.52 | 1.5e-01 | 3.3e-04 | 8.0e-07 | 8.9e-07 | 2.1e-03 | 5.2e-06 | 5.8e-06 | 3.3e-04 | 8.0e-07 | 8.9e-07 |
| 0.56 | 1.6e-01 | 3.1e-04 | 7.5e-07 | 8.2e-07 | 1.9e-03 | 4.7e-06 | 5.1e-06 | 3.1e-04 | 7.5e-07 | 8.2e-07 |
| 0.60 | 1.6e-01 | 2.9e-04 | 7.0e-07 | 8.0e-07 | 1.8e-03 | 4.3e-06 | 4.9e-06 | 2.9e-04 | 7.2e-07 | 8.0e-07 |
| 0.64 | 1.7e-01 | 2.7e-04 | 6.4e-07 | 7.6e-07 | 1.6e-03 | 3.8e-06 | 4.5e-06 | 2.8e-04 | 6.4e-07 | 7.6e-07 |
| 0.68 | 1.7e-01 | 2.5e-04 | 6.0e-07 | 7.2e-07 | 1.5e-03 | 3.5e-06 | 4.2e-06 | 2.6e-04 | 6.1e-07 | 7.2e-07 |
| 0.72 | 1.8e-01 | 2.4e-04 | 5.7e-07 | 6.7e-07 | 1.4e-03 | 3.2e-06 | 3.8e-06 | 2.4e-04 | 5.7e-07 | 6.7e-07 |
| 0.76 | 1.8e-01 | 2.2e-04 | 5.2e-07 | 6.3e-07 | 1.3e-03 | 2.9e-06 | 3.5e-06 | 2.3e-04 | 5.4e-07 | 6.3e-07 |
| 0.80 | 1.8e-01 | 2.1e-04 | 5.1e-07 | 6.1e-07 | 1.2e-03 | 2.8e-06 | 3.4e-06 | 2.1e-04 | 5.1e-07 | 6.1e-07 |
| 0.84 | 1.8e-01 | 1.9e-04 | 4.5e-07 | 5.5e-07 | 1.1e-03 | 2.5e-06 | 3.0e-06 | 2.0e-04 | 4.5e-07 | 5.5e-07 |
| 0.88 | 1.8e-01 | 1.8e-04 | 4.3e-07 | 5.2e-07 | 9.9e-04 | 2.4e-06 | 2.9e-06 | 1.8e-04 | 4.3e-07 | 5.2e-07 |
| 0.92 | 1.8e-01 | 1.7e-04 | 3.9e-07 | 4.8e-07 | 9.2e-04 | 2.1e-06 | 2.6e-06 | 1.7e-04 | 3.9e-07 | 4.8e-07 |
| 0.96 | 1.8e-01 | 1.6e-04 | 3.7e-07 | 4.8e-07 | 8.5e-04 | 2.0e-06 | 2.6e-06 | 1.6e-04 | 3.7e-07 | 4.8e-07 |
| 1.00 | 1.8e-01 | 1.4e-04 | 3.3e-07 | 4.3e-07 | 7.9e-04 | 1.8e-06 | 2.3e-06 | 1.5e-04 | 3.4e-07 | 4.3e-07 |

Tab. 4: ARWP (b) für $N = 100$ — Für die einzelnen Verf. sind aufgeführt: Fehler (f) und rel. Fehler (Rf) jeweils absolut bei $x = \frac{1}{2}$, außerdem absolute maximale Fehler (Mf)

| t | u(0.5) | Implf | Crankf | Dougf | ImplRf | CrankRf | DougRf | ImplMf | CrankMf | DougMf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.04 | 1.9e-02 | 3.4e-04 | 1.8e-06 | 1.9e-06 | 1.8e-02 | 9.6e-05 | 9.7e-05 | 4.0e-04 | 2.2e-06 | 2.2e-06 |
| 0.08 | 3.7e-02 | 5.8e-04 | 3.1e-06 | 3.1e-06 | 1.6e-02 | 8.4e-05 | 8.5e-05 | 6.2e-04 | 3.4e-06 | 3.4e-06 |
| 0.12 | 5.3e-02 | 7.3e-04 | 3.9e-06 | 3.9e-06 | 1.4e-02 | 7.3e-05 | 7.3e-05 | 7.7e-04 | 4.1e-06 | 4.1e-06 |
| 0.16 | 6.8e-02 | 8.1e-04 | 4.3e-06 | 4.3e-06 | 1.2e-02 | 6.3e-05 | 6.3e-05 | 8.5e-04 | 4.4e-06 | 4.5e-06 |
| 0.20 | 8.2e-02 | 8.5e-04 | 4.4e-06 | 4.5e-06 | 1.0e-02 | 5.4e-05 | 5.5e-05 | 8.8e-04 | 4.6e-06 | 4.7e-06 |
| 0.24 | 9.4e-02 | 8.6e-04 | 4.5e-06 | 4.6e-06 | 9.2e-03 | 4.8e-05 | 4.8e-05 | 8.9e-04 | 4.6e-06 | 4.7e-06 |
| 0.28 | 1.1e-01 | 8.6e-04 | 4.4e-06 | 4.5e-06 | 8.1e-03 | 4.2e-05 | 4.3e-05 | 8.8e-04 | 4.5e-06 | 4.6e-06 |
| 0.32 | 1.2e-01 | 8.3e-04 | 4.3e-06 | 4.4e-06 | 7.2e-03 | 3.7e-05 | 3.8e-05 | 8.5e-04 | 4.4e-06 | 4.5e-06 |
| 0.36 | 1.3e-01 | 8.1e-04 | 4.1e-06 | 4.2e-06 | 6.4e-03 | 3.3e-05 | 3.4e-05 | 8.2e-04 | 4.2e-06 | 4.3e-06 |
| 0.40 | 1.3e-01 | 7.7e-04 | 3.9e-06 | 4.1e-06 | 5.8e-03 | 2.9e-05 | 3.0e-05 | 7.9e-04 | 4.0e-06 | 4.1e-06 |
| 0.44 | 1.4e-01 | 7.3e-04 | 3.8e-06 | 3.9e-06 | 5.2e-03 | 2.7e-05 | 2.7e-05 | 7.5e-04 | 3.8e-06 | 3.9e-06 |
| 0.48 | 1.5e-01 | 7.0e-04 | 3.6e-06 | 3.7e-06 | 4.7e-03 | 2.4e-05 | 2.5e-05 | 7.1e-04 | 3.6e-06 | 3.7e-06 |
| 0.52 | 1.5e-01 | 6.6e-04 | 3.4e-06 | 3.5e-06 | 4.3e-03 | 2.2e-05 | 2.3e-05 | 6.7e-04 | 3.5e-06 | 3.6e-06 |
| 0.56 | 1.6e-01 | 6.2e-04 | 3.2e-06 | 3.3e-06 | 3.9e-03 | 2.0e-05 | 2.1e-05 | 6.3e-04 | 3.2e-06 | 3.4e-06 |
| 0.60 | 1.6e-01 | 5.8e-04 | 3.0e-06 | 3.2e-06 | 3.5e-03 | 1.8e-05 | 1.9e-05 | 5.9e-04 | 3.1e-06 | 3.2e-06 |
| 0.64 | 1.7e-01 | 5.5e-04 | 2.8e-06 | 3.0e-06 | 3.2e-03 | 1.7e-05 | 1.8e-05 | 5.5e-04 | 2.9e-06 | 3.0e-06 |
| 0.68 | 1.7e-01 | 5.1e-04 | 2.7e-06 | 2.8e-06 | 3.0e-03 | 1.6e-05 | 1.6e-05 | 5.2e-04 | 2.7e-06 | 2.8e-06 |
| 0.72 | 1.8e-01 | 4.8e-04 | 2.5e-06 | 2.6e-06 | 2.7e-03 | 1.4e-05 | 1.5e-05 | 4.9e-04 | 2.6e-06 | 2.7e-06 |
| 0.76 | 1.8e-01 | 4.5e-04 | 2.4e-06 | 2.5e-06 | 2.5e-03 | 1.3e-05 | 1.4e-05 | 4.5e-04 | 2.4e-06 | 2.5e-06 |
| 0.80 | 1.8e-01 | 4.2e-04 | 2.2e-06 | 2.4e-06 | 2.3e-03 | 1.2e-05 | 1.3e-05 | 4.2e-04 | 2.3e-06 | 2.4e-06 |
| 0.84 | 1.8e-01 | 3.9e-04 | 2.1e-06 | 2.2e-06 | 2.2e-03 | 1.1e-05 | 1.2e-05 | 4.0e-04 | 2.1e-06 | 2.3e-06 |
| 0.88 | 1.8e-01 | 3.6e-04 | 1.9e-06 | 2.1e-06 | 2.0e-03 | 1.0e-05 | 1.2e-05 | 3.7e-04 | 1.9e-06 | 2.1e-06 |
| 0.92 | 1.8e-01 | 3.4e-04 | 1.8e-06 | 2.0e-06 | 1.8e-03 | 9.7e-06 | 1.1e-05 | 3.4e-04 | 1.8e-06 | 2.0e-06 |
| 0.96 | 1.8e-01 | 3.1e-04 | 1.6e-06 | 1.8e-06 | 1.7e-03 | 8.9e-06 | 1.0e-05 | 3.2e-04 | 1.6e-06 | 1.8e-06 |
| 1.00 | 1.8e-01 | 2.9e-04 | 1.5e-06 | 1.7e-06 | 1.6e-03 | 8.3e-06 | 9.3e-06 | 3.0e-04 | 1.6e-06 | 1.8e-06 |

Tab. 5: ARWP (b) für $N = 50$ — Für die einzelnen Verf. sind aufgeführt: Fehler (f) und rel. Fehler (Rf) jeweils absolut bei $x = \frac{1}{2}$, außerdem absolute maximale Fehler (Mf)

| t | u(0.5) | Implf | Crankf | Dougf | ImplRf | CrankRf | DougRf | ImplMf | CrankMf | DougMf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.04 | 1.9e-02 | 6.4e-04 | 7.3e-06 | 7.3e-06 | 3.3e-02 | 3.8e-04 | 3.8e-04 | 7.3e-04 | 9.0e-06 | 9.0e-06 |
| 0.08 | 3.7e-02 | 1.1e-03 | 1.3e-05 | 1.3e-05 | 2.9e-02 | 3.4e-04 | 3.4e-04 | 1.2e-03 | 1.4e-05 | 1.4e-05 |
| 0.12 | 5.3e-02 | 1.4e-03 | 1.6e-05 | 1.6e-05 | 2.6e-02 | 2.9e-04 | 3.0e-04 | 1.5e-03 | 1.6e-05 | 1.7e-05 |
| 0.16 | 6.8e-02 | 1.6e-03 | 1.7e-05 | 1.7e-05 | 2.3e-02 | 2.5e-04 | 2.6e-04 | 1.6e-03 | 1.8e-05 | 1.8e-05 |
| 0.20 | 8.2e-02 | 1.7e-03 | 1.8e-05 | 1.8e-05 | 2.0e-02 | 2.2e-04 | 2.2e-04 | 1.7e-03 | 1.9e-05 | 1.9e-05 |
| 0.24 | 9.4e-02 | 1.7e-03 | 1.8e-05 | 1.8e-05 | 1.8e-02 | 1.9e-04 | 1.9e-04 | 1.7e-03 | 1.9e-05 | 1.9e-05 |
| 0.28 | 1.1e-01 | 1.7e-03 | 1.8e-05 | 1.8e-05 | 1.6e-02 | 1.7e-04 | 1.7e-04 | 1.7e-03 | 1.8e-05 | 1.9e-05 |
| 0.32 | 1.2e-01 | 1.6e-03 | 1.8e-05 | 1.8e-05 | 1.4e-02 | 1.5e-04 | 1.5e-04 | 1.7e-03 | 1.8e-05 | 1.8e-05 |
| 0.36 | 1.3e-01 | 1.6e-03 | 1.7e-05 | 1.7e-05 | 1.3e-02 | 1.4e-04 | 1.4e-04 | 1.6e-03 | 1.7e-05 | 1.7e-05 |
| 0.40 | 1.3e-01 | 1.5e-03 | 1.6e-05 | 1.6e-05 | 1.1e-02 | 1.2e-04 | 1.2e-04 | 1.6e-03 | 1.7e-05 | 1.7e-05 |
| 0.44 | 1.4e-01 | 1.5e-03 | 1.6e-05 | 1.6e-05 | 1.0e-02 | 1.1e-04 | 1.1e-04 | 1.5e-03 | 1.6e-05 | 1.6e-05 |
| 0.48 | 1.5e-01 | 1.4e-03 | 1.5e-05 | 1.5e-05 | 9.4e-03 | 1.0e-04 | 1.0e-04 | 1.4e-03 | 1.5e-05 | 1.5e-05 |
| 0.52 | 1.5e-01 | 1.3e-03 | 1.4e-05 | 1.4e-05 | 8.5e-03 | 9.1e-05 | 9.2e-05 | 1.3e-03 | 1.4e-05 | 1.4e-05 |
| 0.56 | 1.6e-01 | 1.2e-03 | 1.3e-05 | 1.3e-05 | 7.8e-03 | 8.3e-05 | 8.4e-05 | 1.3e-03 | 1.4e-05 | 1.4e-05 |
| 0.60 | 1.6e-01 | 1.2e-03 | 1.3e-05 | 1.3e-05 | 7.1e-03 | 7.7e-05 | 7.8e-05 | 1.2e-03 | 1.3e-05 | 1.3e-05 |
| 0.64 | 1.7e-01 | 1.1e-03 | 1.2e-05 | 1.2e-05 | 6.5e-03 | 7.1e-05 | 7.2e-05 | 1.1e-03 | 1.2e-05 | 1.2e-05 |
| 0.68 | 1.7e-01 | 1.0e-03 | 1.1e-05 | 1.1e-05 | 6.0e-03 | 6.6e-05 | 6.6e-05 | 1.0e-03 | 1.1e-05 | 1.2e-05 |
| 0.72 | 1.8e-01 | 9.7e-04 | 1.1e-05 | 1.1e-05 | 5.5e-03 | 6.1e-05 | 6.2e-05 | 9.8e-04 | 1.1e-05 | 1.1e-05 |
| 0.76 | 1.8e-01 | 9.1e-04 | 1.0e-05 | 1.0e-05 | 5.1e-03 | 5.7e-05 | 5.7e-05 | 9.2e-04 | 1.0e-05 | 1.0e-05 |
| 0.80 | 1.8e-01 | 8.5e-04 | 9.6e-06 | 9.7e-06 | 4.7e-03 | 5.3e-05 | 5.4e-05 | 8.6e-04 | 9.7e-06 | 9.8e-06 |
| 0.84 | 1.8e-01 | 7.9e-04 | 9.0e-06 | 9.1e-06 | 4.4e-03 | 5.0e-05 | 5.0e-05 | 8.0e-04 | 9.1e-06 | 9.3e-06 |
| 0.88 | 1.8e-01 | 7.4e-04 | 8.5e-06 | 8.6e-06 | 4.0e-03 | 4.6e-05 | 4.7e-05 | 7.5e-04 | 8.6e-06 | 8.7e-06 |
| 0.92 | 1.8e-01 | 6.9e-04 | 8.0e-06 | 8.1e-06 | 3.7e-03 | 4.3e-05 | 4.4e-05 | 6.9e-04 | 8.1e-06 | 8.2e-06 |
| 0.96 | 1.8e-01 | 6.4e-04 | 7.5e-06 | 7.6e-06 | 3.5e-03 | 4.1e-05 | 4.2e-05 | 6.5e-04 | 7.6e-06 | 7.7e-06 |
| 1.00 | 1.8e-01 | 5.9e-04 | 7.1e-06 | 7.2e-06 | 3.2e-03 | 3.8e-05 | 3.9e-05 | 6.0e-04 | 7.2e-06 | 7.3e-06 |

Tab. 6: ARWP (b) für $N = 25$ — Für die einzelnen Verf. sind aufgeführt: Fehler (f) und rel. Fehler (Rf) jeweils absolut bei $x = \frac{1}{2}$, außerdem absolute maximale Fehler (Mf)

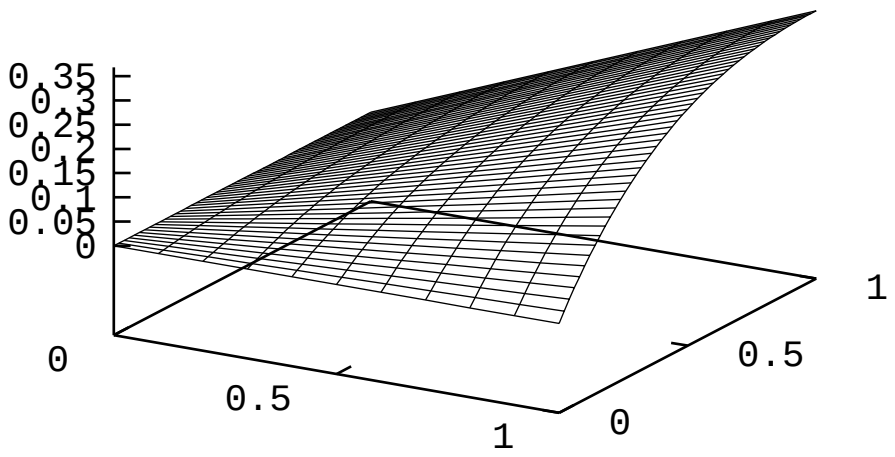



Fig. B.10: Impl. Differenzenverf. zu (b) für $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{50}$

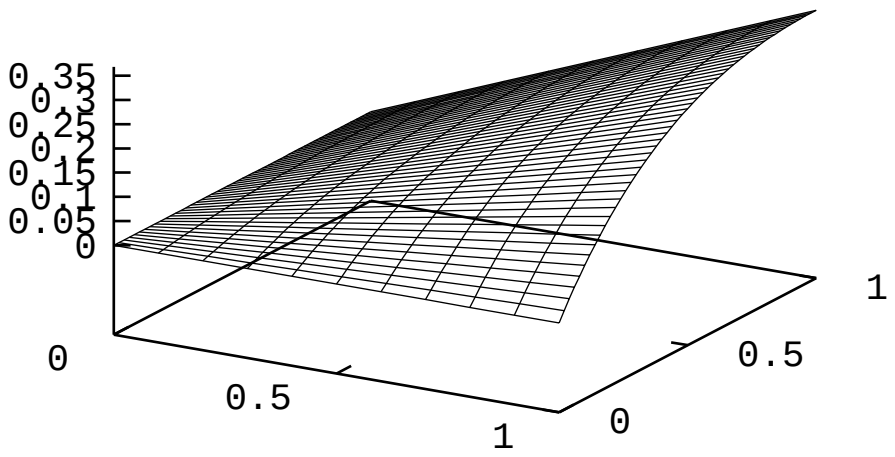



Fig. B.11: Crank-Nicolson-Verfahren zu (b) für $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{50}$

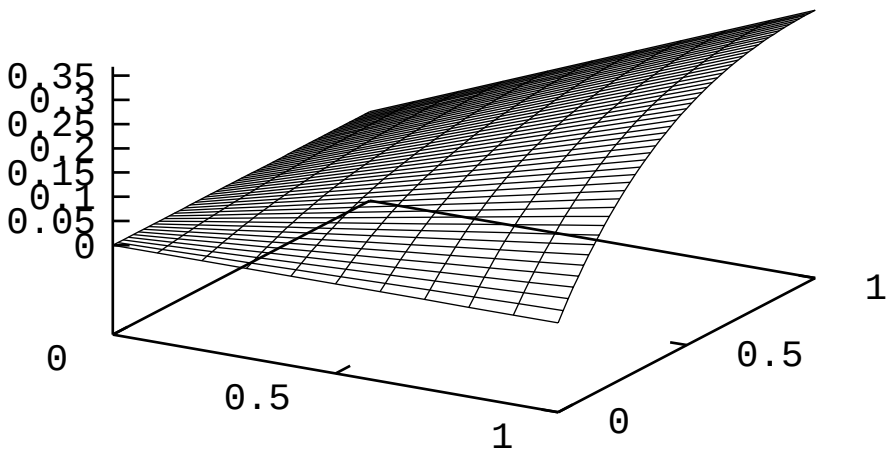



Fig. B.12: Douglas-Verfahren zu (b) für $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{50}$

14. **Lösung:**

Parabolische Anfangsrandwertaufgaben:

(a) $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ , $(x,y) \in G$ , $0 < t < 1$ ,

$u(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ , $(x,y) \in G$ ,

$u(x,y,t) = 0$ , $(x,y) \in \partial G$ , $0 < t < 1$ ;

(b) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + F(x,y,t)$ , $(x,y) \in G$ , $0 < t < 1$ ,

$u(x,y,0) = \frac{\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi}{2}y)v(x,0)$ als Anfangsbedingung,

Dirichlet-Randbedingungen und rechte Seite $F$ so gewählt, daß die Lösung

$u(x,y,t) = \frac{\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi}{2}y)v(x,t)$ , mit

$v(x,t) = t - x + \frac{1}{2}x^2$ ;

a) (theoretischer Teil) Produktansatz: $u(x,y,t) = \varphi(x,t) \cdot \psi(y,t)$

Damit gilt

$$u_t = \varphi\psi_t + \varphi_t\psi \ ,$$

$$u_{xx} = \Big[\varphi\psi_x + \varphi_x\psi\Big]_x = \Big(\varphi_x\psi\Big)_x = \varphi_{xx}\psi$$

und

$$u_{yy} = \varphi\psi_{yy} \ .$$

Die Wärmeleitungsgleichung ergibt sich somit zu

$$\varphi\psi_t + \varphi_t\psi = \varphi_{xx}\psi + \varphi\psi_{yy} \ .$$

Man bekommt also die beiden eindimensionalen Wärmeleitungsprobleme

$$\begin{cases} \varphi_t = \varphi_{xx} \\ \\ \varphi(x,0) = \sin \pi x \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} \psi_t = \psi_{yy} \\ \\ \psi(y,0) = \sin \pi y \ . \end{cases}$$

Nach Aufgabe 9 der theoretischen Übungsaufgaben gilt für diese

$$\varphi(x,t) = \sin \pi x e^{-\pi^2 t} \qquad \text{und} \qquad \psi(y,t) = \sin \pi y e^{-\pi^2 t} \ .$$

Damit erhält man die Lösung

$$u(x,y,t) = \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot e^{-\pi^2 t} \ .$$

b) (theoretischer Teil) Zur Bestimmung von $F$ betrachte

$$u(x,y,t) = \frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \cdot v(x,t)$$

mit

$$v(x,t) = t - x + \frac{1}{2}x^2 \ .$$

Es gilt

$$u_t = \frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \ ,$$

$$u_{xx} = \frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

und

$$u_{yy} = -\frac{\pi^4}{16} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \cdot v(x,t) \ .$$

Damit folgt

$$F(x,y,t) = u_t - u_{xx} - u_{yy} = \frac{\pi^4}{16} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \cdot v(x,t) \ .$$

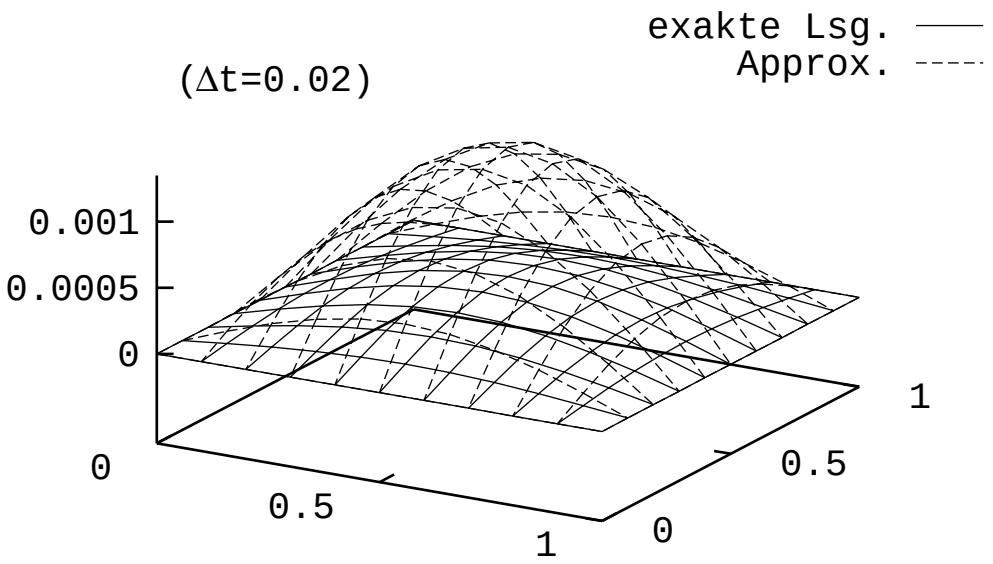



Fig. B.13: Implizites Verfahren zu (a) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 0.4$

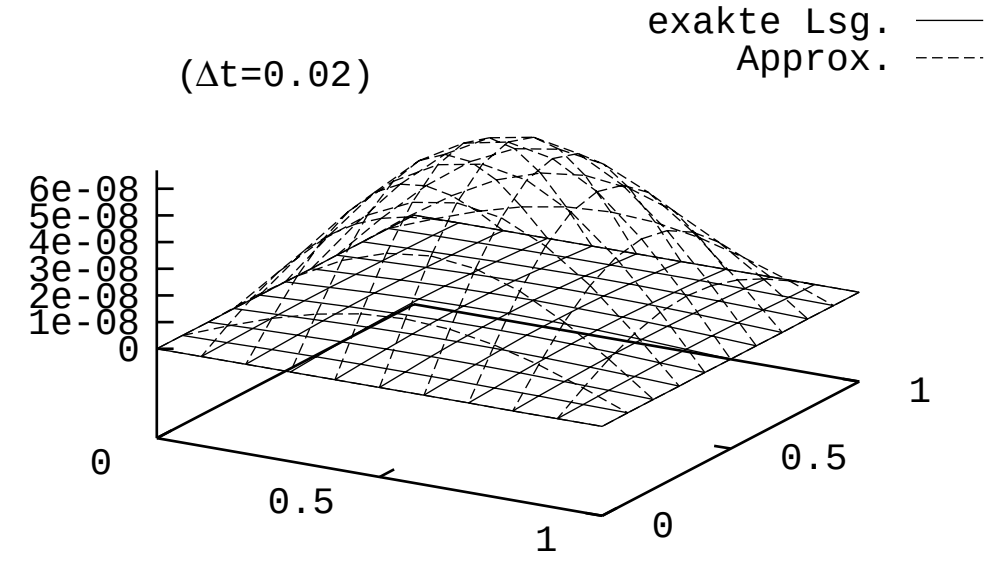



Fig. B.14: Implizites Verfahren zu (a) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 1.0$

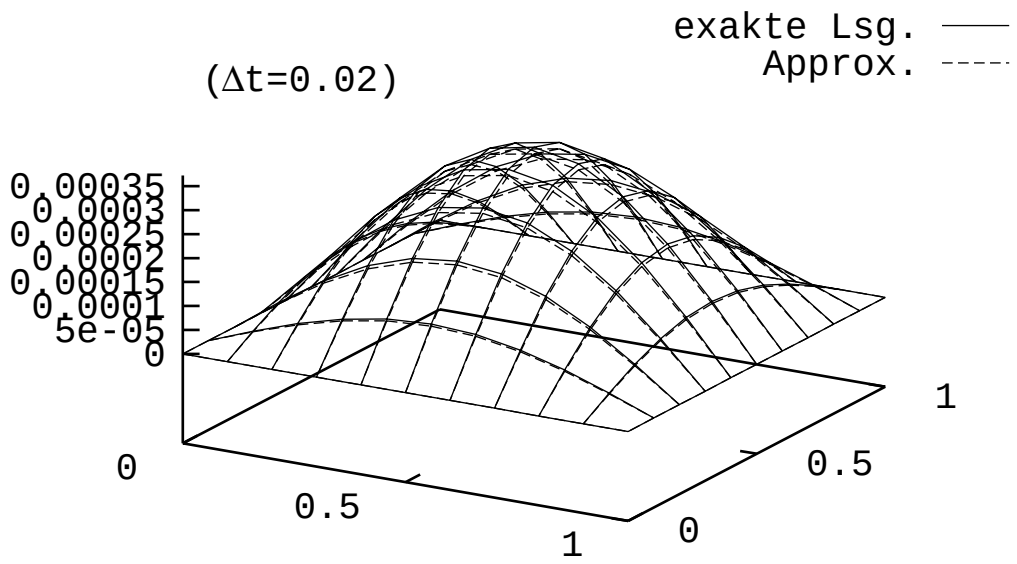



Fig. B.15: Crank-Nicolson-Verfahren zu (a) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 0.4$

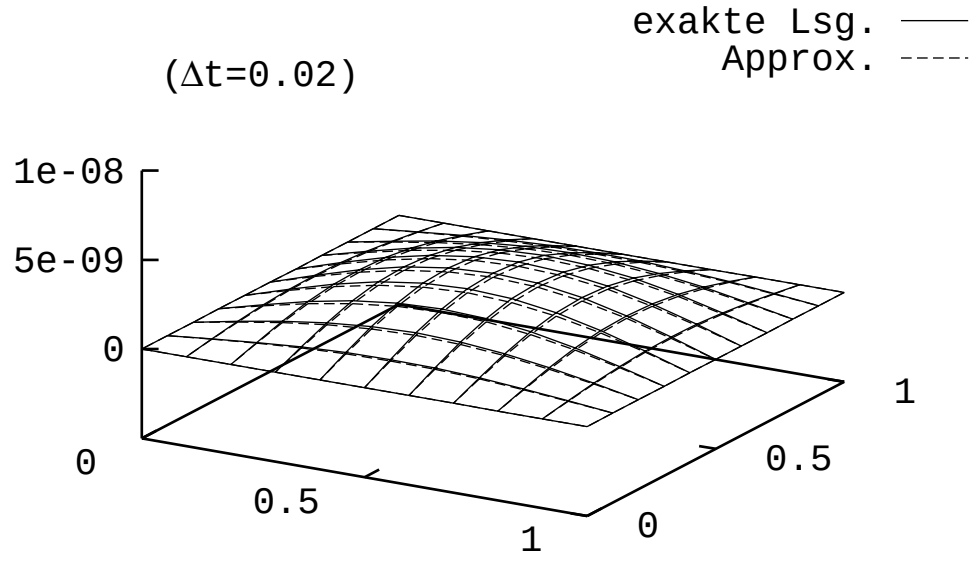



Fig. B.16: Crank-Nicolson-Verfahren zu (a) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 1.0$

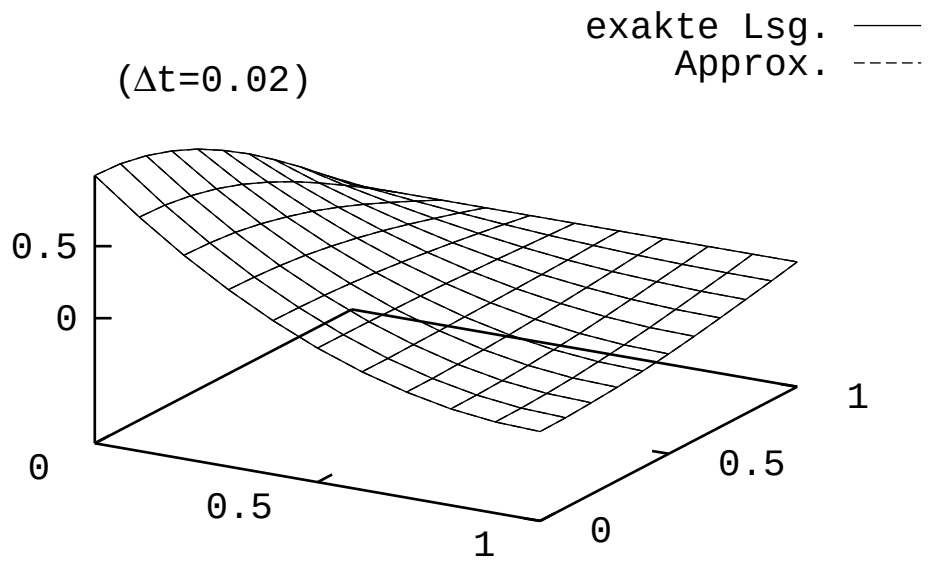



Fig. B.17: Implizites Verfahren zu (b) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 0.4$

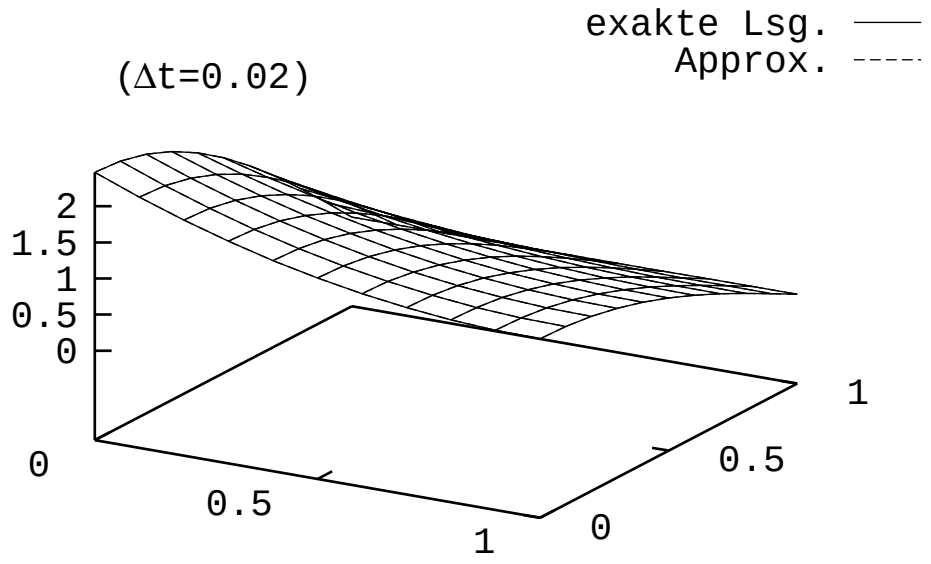



Fig. B.18: Implizites Verfahren zu (b) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 1.0$

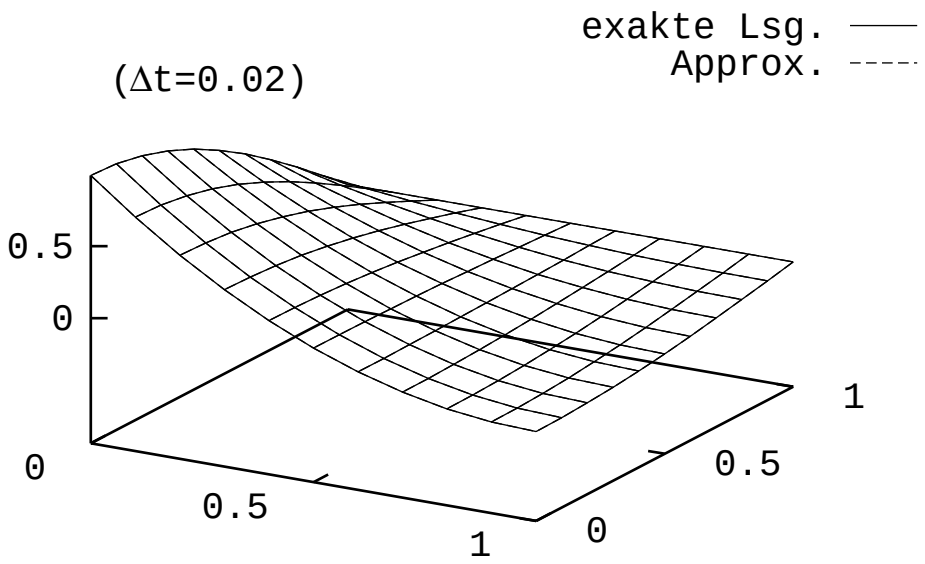



Fig. B.19: Crank-Nicolson-Verfahren zu (b) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 0.4$

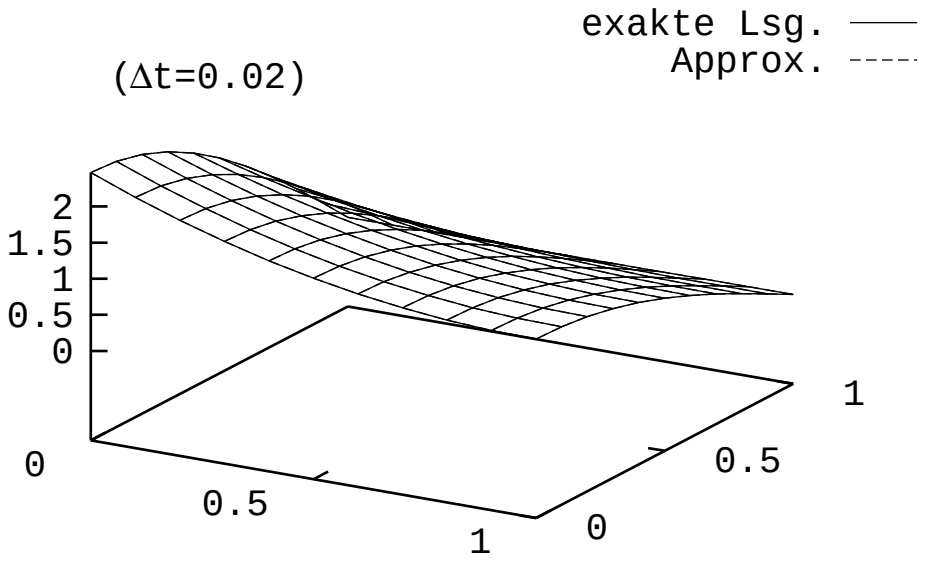



Fig. B.20: Crank-Nicolson-Verfahren zu (b) auf dem $10 \times 10$ Gitter zum Zeitpunkt $t = 1.0$

19. **Lösung:**

Hyperbolische Anfangsrandwertaufgaben:

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad u_{tt} &= u_{xx}\,, \qquad 0<x<1\,,\ 0<t\le 1\,,\\
u(0,t) &= \sin(\pi t)\,,\quad u(1,t)=\sin(\pi(1+t))\,,\\
u(x,0) &= \sin(\pi x)\,,\quad u_t(x,0)=\pi\cos(\pi x)\,;\\
\text{(b)}\quad u_{tt}-u_{xx} &= \frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\sin(\pi x)\exp(-t)\,,\ 0<x<1\,,\ 0<t\le 1\,,\\
u(0,t) &= u(1,t)=0\,,\\
u(x,0) &= \sin(\pi x)/(\pi^2-1)=-u_t(x,0)\,;\\
\text{(c)}\quad u_{tt} &= u_{xx}\,,\quad -2<x<2\,,\ 0<t\le 8\,,\\
u(-2,t) &= u(2,t)=0\,,\ t>0\,,\\
u(x,0) &= \begin{cases} 2\cos(2\pi x)\,, & |x|\le 0.25\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}\\
u_t(x,0) &= 0\,;
\end{aligned}$$

a) (theoretischer Teil) Anhand der Rand- und Anfangsbedingungen erkennt man schnell, daß

$$u(x,t)=\sin(\pi(x+t))\,.$$

b) (theoretischer Teil) Auch hier läßt sich die Lösung

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi^2-1}\sin(\pi x)\exp(-t)$$

mit Hilfe der Anfangsrandwerte ersehen.

c) (theoretischer Teil) Um die Ergebnisse aus Kapitel 6.1 des Vorlesungsskripts benutzen zu können, wird das gegebene Problem durch Argumenttransformationen in ein äquivalentes Problem auf dem endlichen Ortsintervall $(0,1)$ umgeformt: Dazu setze

$$v(x,t):=u(4x-2,4t)\,,\ 0<x<1,\ 0<t\le 2\,.$$

Dann gilt für $v$:

$$v_{tt} = v_{xx} \ , \ \ 0 < x < 1, \, 0 < t \leq 2 \ ,$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0 \ , \ \ t > 0 \ ,$$

$$v(x,0) = \begin{cases} 2\cos(8\pi x) \ , & \dfrac{7}{16} \leq x \leq \dfrac{9}{16} \\ 0 \quad \text{, sonst} \, , & \end{cases}$$

$$v_t(x,0) = 0 \ , \ \ 0 \leq x \leq 1 \ .$$

Nach Kap. 6.1 bekommt man die Lösung

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k(g^0) \cos k\pi t + \frac{1}{k\pi} c_k(g^1) \sin k\pi t \right) \sin k\pi x \ ,$$

wobei

$$c_k(g) = 2 \int_0^1 g(x) \sin k\pi x \, dx \ .$$

Mit

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = \frac{1}{b^2 - a^2} (a \cos ax \cos bx + b \sin ax \sin bx) \ , \ \ a \neq b \ ,$$

gilt für $k \neq 8$:

$$\begin{aligned} c_k(g^0) &= 4 \int_{7/16}^{9/16} \sin k\pi x \cos 8\pi x \, dx \\ &= \frac{4}{(64 - k^2)\pi^2} \Big[ k\pi \cos k\pi x \cos 8\pi x + 8\pi \sin k\pi x \sin 8\pi x \Big]_{7/16}^{9/16} \\ &= \frac{4}{(64 - k^2)\pi^2} \left( 8\pi \sin \frac{9}{16} k\pi + 8\pi \sin \frac{7}{16} k\pi \right) \\ &= \frac{32}{(64 - k^2)\pi} \left( \sin \frac{9}{16} k\pi + \sin \frac{7}{16} k\pi \right) \ . \end{aligned}$$

Weiter führt

$$\int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax$$

im Fall $k = 8$ zu

$$c_8(g^0) = 4 \left[ \frac{1}{16\pi} \sin^2 8\pi x \right]_{7/16}^{9/16} = 0 \ .$$

Ferner gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$c_k(g^1) = 0 \ .$$

Die Lösung $u$ des ursprünglichen Problems ergibt sich nun aus $v$ durch

$$u(x,t) = v\left( \frac{x+2}{4}, \frac{t}{4} \right) \ .$$

Deshalb erhält man

$$u(x,t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 8}}^{\infty} a_k \cos k\pi t \sin k\pi x$$

mit

$$a_k = \frac{32}{(64 - k^2)\pi} \left( \sin \frac{9}{16} k\pi + \sin \frac{7}{16} k\pi \right) \ .$$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 1.6e-01 | 4.6e-01 | 7.1e-01 | 9.0e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 9.0e-01 | 7.2e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 |
| 0.10 | 3.1e-01 | 6.0e-01 | 8.2e-01 | 9.7e-01 | 1.0e+00 | 9.8e-01 | 8.3e-01 | 6.1e-01 | 3.2e-01 | 6.5e-03 | -3.1e-01 |
| 0.15 | 4.5e-01 | 7.2e-01 | 9.1e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 9.3e-01 | 7.4e-01 | 4.8e-01 | 1.8e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 |
| 0.20 | 5.9e-01 | 8.2e-01 | 9.8e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 8.6e-01 | 6.3e-01 | 3.5e-01 | 2.6e-02 | -3.0e-01 | -5.9e-01 |
| 0.25 | 7.1e-01 | 9.1e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 7.6e-01 | 5.1e-01 | 2.0e-01 | -1.3e-01 | -4.4e-01 | -7.1e-01 |
| 0.30 | 8.1e-01 | 9.7e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 8.7e-01 | 6.5e-01 | 3.7e-01 | 5.1e-02 | -2.7e-01 | -5.7e-01 | -8.1e-01 |
| 0.35 | 8.9e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 7.8e-01 | 5.3e-01 | 2.2e-01 | -1.0e-01 | -4.1e-01 | -6.9e-01 | -8.9e-01 |
| 0.40 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 8.7e-01 | 6.6e-01 | 3.9e-01 | 7.3e-02 | -2.5e-01 | -5.4e-01 | -7.9e-01 | -9.5e-01 |
| 0.45 | 9.9e-01 | 1.0e+00 | 9.4e-01 | 7.8e-01 | 5.3e-01 | 2.4e-01 | -8.0e-02 | -3.9e-01 | -6.6e-01 | -8.7e-01 | -9.9e-01 |
| 0.50 | 1.0e+00 | 9.8e-01 | 8.6e-01 | 6.6e-01 | 3.9e-01 | 8.3e-02 | -2.3e-01 | -5.2e-01 | -7.6e-01 | -9.3e-01 | -1.0e+00 |
| 0.55 | 9.9e-01 | 9.2e-01 | 7.6e-01 | 5.2e-01 | 2.4e-01 | -7.4e-02 | -3.8e-01 | -6.4e-01 | -8.4e-01 | -9.6e-01 | -9.9e-01 |
| 0.60 | 9.5e-01 | 8.3e-01 | 6.4e-01 | 3.7e-01 | 7.7e-02 | -2.3e-01 | -5.1e-01 | -7.4e-01 | -9.1e-01 | -9.8e-01 | -9.5e-01 |
| 0.65 | 8.9e-01 | 7.3e-01 | 5.0e-01 | 2.2e-01 | -8.4e-02 | -3.8e-01 | -6.4e-01 | -8.3e-01 | -9.4e-01 | -9.7e-01 | -8.9e-01 |
| 0.70 | 8.1e-01 | 6.1e-01 | 3.5e-01 | 5.7e-02 | -2.4e-01 | -5.2e-01 | -7.4e-01 | -9.0e-01 | -9.6e-01 | -9.3e-01 | -8.1e-01 |
| 0.75 | 7.1e-01 | 4.7e-01 | 1.9e-01 | -1.1e-01 | -4.0e-01 | -6.5e-01 | -8.3e-01 | -9.4e-01 | -9.5e-01 | -8.7e-01 | -7.1e-01 |
| 0.80 | 5.9e-01 | 3.3e-01 | 3.0e-02 | -2.7e-01 | -5.4e-01 | -7.6e-01 | -9.0e-01 | -9.6e-01 | -9.2e-01 | -7.9e-01 | -5.9e-01 |
| 0.85 | 4.5e-01 | 1.7e-01 | -1.3e-01 | -4.2e-01 | -6.7e-01 | -8.5e-01 | -9.5e-01 | -9.6e-01 | -8.7e-01 | -6.9e-01 | -4.5e-01 |
| 0.90 | 3.1e-01 | 8.4e-03 | -2.9e-01 | -5.7e-01 | -7.8e-01 | -9.2e-01 | -9.7e-01 | -9.3e-01 | -7.9e-01 | -5.8e-01 | -3.1e-01 |
| 0.95 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 | -7.0e-01 | -8.8e-01 | -9.7e-01 | -9.7e-01 | -8.8e-01 | -7.0e-01 | -4.5e-01 | -1.6e-01 |
| 1.00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 | -3.1e-01 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 4.4e-03 | 7.8e-03 | 1.0e-02 | 1.2e-02 | 1.2e-02 | 1.2e-02 | 9.6e-03 | 6.7e-03 | 3.2e-03 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 8.6e-03 | 1.5e-02 | 2.1e-02 | 2.4e-02 | 2.4e-02 | 2.3e-02 | 1.9e-02 | 1.3e-02 | 6.5e-03 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 1.2e-02 | 2.3e-02 | 3.0e-02 | 3.5e-02 | 3.6e-02 | 3.4e-02 | 2.8e-02 | 2.0e-02 | 9.9e-03 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 1.6e-02 | 3.0e-02 | 4.0e-02 | 4.6e-02 | 4.7e-02 | 4.4e-02 | 3.7e-02 | 2.6e-02 | 1.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 1.9e-02 | 3.6e-02 | 4.8e-02 | 5.5e-02 | 5.7e-02 | 5.3e-02 | 4.4e-02 | 3.1e-02 | 1.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 2.2e-02 | 4.1e-02 | 5.5e-02 | 6.4e-02 | 6.6e-02 | 6.1e-02 | 5.1e-02 | 3.6e-02 | 1.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 2.4e-02 | 4.5e-02 | 6.1e-02 | 7.1e-02 | 7.3e-02 | 6.8e-02 | 5.7e-02 | 4.1e-02 | 2.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 2.5e-02 | 4.8e-02 | 6.5e-02 | 7.6e-02 | 7.8e-02 | 7.3e-02 | 6.1e-02 | 4.4e-02 | 2.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 2.7e-02 | 5.0e-02 | 6.8e-02 | 7.9e-02 | 8.2e-02 | 7.6e-02 | 6.4e-02 | 4.6e-02 | 2.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 2.7e-02 | 5.1e-02 | 6.9e-02 | 8.0e-02 | 8.3e-02 | 7.8e-02 | 6.6e-02 | 4.7e-02 | 2.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.7e-02 | 5.0e-02 | 6.8e-02 | 8.0e-02 | 8.3e-02 | 7.8e-02 | 6.6e-02 | 4.7e-02 | 2.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 2.6e-02 | 4.9e-02 | 6.6e-02 | 7.7e-02 | 8.0e-02 | 7.6e-02 | 6.4e-02 | 4.6e-02 | 2.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 2.4e-02 | 4.6e-02 | 6.2e-02 | 7.2e-02 | 7.6e-02 | 7.2e-02 | 6.1e-02 | 4.3e-02 | 2.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 2.2e-02 | 4.2e-02 | 5.7e-02 | 6.6e-02 | 6.9e-02 | 6.6e-02 | 5.6e-02 | 4.0e-02 | 2.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 1.9e-02 | 3.6e-02 | 5.0e-02 | 5.8e-02 | 6.1e-02 | 5.8e-02 | 4.9e-02 | 3.5e-02 | 1.8e-02 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 1.6e-02 | 3.0e-02 | 4.2e-02 | 4.9e-02 | 5.1e-02 | 4.8e-02 | 4.1e-02 | 3.0e-02 | 1.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 1.2e-02 | 2.3e-02 | 3.2e-02 | 3.8e-02 | 4.0e-02 | 3.8e-02 | 3.2e-02 | 2.4e-02 | 1.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 8.4e-03 | 1.6e-02 | 2.2e-02 | 2.7e-02 | 2.8e-02 | 2.6e-02 | 2.2e-02 | 1.6e-02 | 8.7e-03 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 4.2e-03 | 8.3e-03 | 1.2e-02 | 1.4e-02 | 1.4e-02 | 1.4e-02 | 1.2e-02 | 8.7e-03 | 4.8e-03 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 3.0e-05 | 3.3e-04 | 7.9e-04 | 7.8e-04 | 8.1e-04 | 7.6e-04 | 5.1e-04 | 6.2e-04 | 5.3e-04 | 0.0e+00 |

Tab. 7: Anfangsrandwertproblem (a) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = 0.1$ und $\Delta t = 0.05$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 1.6e-01 | 4.6e-01 | 7.1e-01 | 9.0e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 9.0e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 |
| 0.10 | 3.1e-01 | 5.9e-01 | 8.2e-01 | 9.6e-01 | 1.0e+00 | 9.6e-01 | 8.2e-01 | 6.0e-01 | 3.2e-01 | 3.5e-03 | -3.1e-01 |
| 0.15 | 4.5e-01 | 7.1e-01 | 9.0e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 9.1e-01 | 7.2e-01 | 4.7e-01 | 1.7e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 |
| 0.20 | 5.9e-01 | 8.2e-01 | 9.7e-01 | 1.0e+00 | 9.7e-01 | 8.3e-01 | 6.1e-01 | 3.3e-01 | 1.3e-02 | -3.0e-01 | -5.9e-01 |
| 0.25 | 7.1e-01 | 9.0e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 9.2e-01 | 7.4e-01 | 4.8e-01 | 1.8e-01 | -1.4e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 |
| 0.30 | 8.1e-01 | 9.6e-01 | 1.0e+00 | 9.8e-01 | 8.4e-01 | 6.2e-01 | 3.4e-01 | 2.6e-02 | -2.9e-01 | -5.8e-01 | -8.1e-01 |
| 0.35 | 8.9e-01 | 1.0e+00 | 1.0e+00 | 9.2e-01 | 7.4e-01 | 4.9e-01 | 1.9e-01 | -1.3e-01 | -4.3e-01 | -7.0e-01 | -8.9e-01 |
| 0.40 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.7e-01 | 8.4e-01 | 6.2e-01 | 3.5e-01 | 3.6e-02 | -2.8e-01 | -5.7e-01 | -8.0e-01 | -9.5e-01 |
| 0.45 | 9.9e-01 | 1.0e+00 | 9.1e-01 | 7.4e-01 | 4.9e-01 | 2.0e-01 | -1.2e-01 | -4.2e-01 | -6.8e-01 | -8.8e-01 | -9.9e-01 |
| 0.50 | 1.0e+00 | 9.6e-01 | 8.3e-01 | 6.2e-01 | 3.5e-01 | 4.0e-02 | -2.7e-01 | -5.6e-01 | -7.9e-01 | -9.4e-01 | -1.0e+00 |
| 0.55 | 9.9e-01 | 9.0e-01 | 7.3e-01 | 4.9e-01 | 1.9e-01 | -1.2e-01 | -4.2e-01 | -6.7e-01 | -8.7e-01 | -9.8e-01 | -9.9e-01 |
| 0.60 | 9.5e-01 | 8.2e-01 | 6.1e-01 | 3.4e-01 | 3.7e-02 | -2.7e-01 | -5.5e-01 | -7.8e-01 | -9.3e-01 | -9.9e-01 | -9.5e-01 |
| 0.65 | 8.9e-01 | 7.2e-01 | 4.8e-01 | 1.9e-01 | -1.2e-01 | -4.2e-01 | -6.7e-01 | -8.6e-01 | -9.7e-01 | -9.8e-01 | -8.9e-01 |
| 0.70 | 8.1e-01 | 6.0e-01 | 3.3e-01 | 2.7e-02 | -2.8e-01 | -5.5e-01 | -7.8e-01 | -9.2e-01 | -9.8e-01 | -9.4e-01 | -8.1e-01 |
| 0.75 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.7e-01 | -1.3e-01 | -4.3e-01 | -6.8e-01 | -8.6e-01 | -9.6e-01 | -9.7e-01 | -8.8e-01 | -7.1e-01 |
| 0.80 | 5.9e-01 | 3.2e-01 | 1.4e-02 | -2.9e-01 | -5.6e-01 | -7.8e-01 | -9.3e-01 | -9.8e-01 | -9.4e-01 | -8.0e-01 | -5.9e-01 |
| 0.85 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.4e-01 | -6.9e-01 | -8.7e-01 | -9.7e-01 | -9.7e-01 | -8.8e-01 | -7.0e-01 | -4.5e-01 |
| 0.90 | 3.1e-01 | 3.9e-03 | -3.0e-01 | -5.8e-01 | -8.0e-01 | -9.4e-01 | -9.9e-01 | -9.4e-01 | -8.0e-01 | -5.8e-01 | -3.1e-01 |
| 0.95 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 | -7.0e-01 | -8.8e-01 | -9.8e-01 | -9.8e-01 | -8.9e-01 | -7.0e-01 | -4.5e-01 | -1.6e-01 |
| 1.00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 | -3.1e-01 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 2.1e-03 | 3.7e-03 | 5.1e-03 | 5.9e-03 | 6.2e-03 | 5.8e-03 | 4.9e-03 | 3.5e-03 | 1.7e-03 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 4.1e-03 | 7.4e-03 | 1.0e-02 | 1.2e-02 | 1.2e-02 | 1.2e-02 | 9.7e-03 | 6.9e-03 | 3.5e-03 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 5.9e-03 | 1.1e-02 | 1.5e-02 | 1.7e-02 | 1.8e-02 | 1.7e-02 | 1.4e-02 | 1.0e-02 | 5.2e-03 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 7.5e-03 | 1.4e-02 | 1.9e-02 | 2.2e-02 | 2.3e-02 | 2.2e-02 | 1.8e-02 | 1.3e-02 | 6.9e-03 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 9.0e-03 | 1.7e-02 | 2.3e-02 | 2.7e-02 | 2.8e-02 | 2.7e-02 | 2.2e-02 | 1.6e-02 | 8.4e-03 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 1.0e-02 | 2.0e-02 | 2.7e-02 | 3.1e-02 | 3.2e-02 | 3.0e-02 | 2.6e-02 | 1.8e-02 | 9.7e-03 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 1.1e-02 | 2.1e-02 | 2.9e-02 | 3.4e-02 | 3.6e-02 | 3.4e-02 | 2.8e-02 | 2.1e-02 | 1.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 1.2e-02 | 2.3e-02 | 3.1e-02 | 3.7e-02 | 3.8e-02 | 3.6e-02 | 3.0e-02 | 2.2e-02 | 1.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 1.3e-02 | 2.4e-02 | 3.3e-02 | 3.8e-02 | 4.0e-02 | 3.8e-02 | 3.2e-02 | 2.3e-02 | 1.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 1.3e-02 | 2.4e-02 | 3.3e-02 | 3.9e-02 | 4.0e-02 | 3.8e-02 | 3.2e-02 | 2.3e-02 | 1.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 1.3e-02 | 2.4e-02 | 3.3e-02 | 3.8e-02 | 4.0e-02 | 3.8e-02 | 3.2e-02 | 2.3e-02 | 1.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 1.2e-02 | 2.3e-02 | 3.2e-02 | 3.7e-02 | 3.9e-02 | 3.7e-02 | 3.1e-02 | 2.2e-02 | 1.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 1.1e-02 | 2.2e-02 | 3.0e-02 | 3.5e-02 | 3.6e-02 | 3.5e-02 | 2.9e-02 | 2.1e-02 | 1.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 1.0e-02 | 2.0e-02 | 2.7e-02 | 3.2e-02 | 3.3e-02 | 3.2e-02 | 2.7e-02 | 1.9e-02 | 1.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 9.1e-03 | 1.7e-02 | 2.4e-02 | 2.8e-02 | 2.9e-02 | 2.8e-02 | 2.4e-02 | 1.7e-02 | 8.9e-03 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 7.6e-03 | 1.4e-02 | 2.0e-02 | 2.3e-02 | 2.4e-02 | 2.3e-02 | 2.0e-02 | 1.4e-02 | 7.5e-03 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 5.8e-03 | 1.1e-02 | 1.5e-02 | 1.8e-02 | 1.9e-02 | 1.8e-02 | 1.5e-02 | 1.1e-02 | 5.8e-03 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 3.9e-03 | 7.5e-03 | 1.1e-02 | 1.2e-02 | 1.3e-02 | 1.2e-02 | 1.0e-02 | 7.6e-03 | 4.1e-03 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 2.0e-03 | 3.9e-03 | 5.4e-03 | 6.3e-03 | 6.6e-03 | 6.2e-03 | 5.3e-03 | 3.9e-03 | 2.1e-03 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 1.5e-05 | 7.9e-05 | 6.8e-05 | 1.1e-04 | 9.8e-05 | 7.9e-05 | 9.0e-05 | 3.7e-05 | 7.6e-05 | 0.0e+00 |

Tab. 8: Anfangsrandwertproblem (a) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = 0.05$ und $\Delta t = 0.025$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 1.6e-01 | 4.5e-01 | 7.1e-01 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 |
| 0.10 | 3.1e-01 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | -9.8e-04 | -3.1e-01 |
| 0.15 | 4.5e-01 | 7.1e-01 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 |
| 0.20 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | -1.3e-03 | -3.1e-01 | -5.9e-01 |
| 0.25 | 7.1e-01 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 |
| 0.30 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.6e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | -2.8e-04 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 |
| 0.35 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 9.0e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 |
| 0.40 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.6e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 2.0e-03 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 |
| 0.45 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 9.0e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 |
| 0.50 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 4.9e-03 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 |
| 0.55 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 | -7.0e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 |
| 0.60 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 5.6e-03 | -3.0e-01 | -5.8e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 |
| 0.65 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 | -7.0e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 | -8.9e-01 |
| 0.70 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 4.9e-03 | -3.0e-01 | -5.8e-01 | -8.0e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 |
| 0.75 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 | -7.0e-01 | -8.9e-01 | -9.8e-01 | -9.9e-01 | -8.9e-01 | -7.1e-01 |
| 0.80 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 2.9e-03 | -3.1e-01 | -5.8e-01 | -8.0e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 |
| 0.85 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.5e-01 | -4.5e-01 | -7.0e-01 | -8.9e-01 | -9.8e-01 | -9.8e-01 | -8.9e-01 | -7.1e-01 | -4.5e-01 |
| 0.90 | 3.1e-01 | 6.8e-04 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 | -3.1e-01 |
| 0.95 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 | -8.9e-01 | -7.1e-01 | -4.5e-01 | -1.6e-01 |
| 1.00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 | -3.1e-01 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 6.4e-04 | 5.7e-04 | 4.4e-04 | 2.7e-04 | 7.6e-05 | 1.3e-04 | 3.2e-04 | 4.8e-04 | 5.9e-04 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 1.2e-03 | 1.2e-03 | 1.0e-03 | 6.9e-04 | 3.0e-04 | 1.2e-04 | 5.2e-04 | 8.7e-04 | 9.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 1.5e-03 | 1.9e-03 | 1.7e-03 | 1.2e-03 | 6.6e-04 | 2.0e-05 | 6.2e-04 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 1.7e-03 | 2.6e-03 | 2.5e-03 | 1.9e-03 | 1.1e-03 | 2.6e-04 | 6.3e-04 | 1.3e-03 | 9.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 1.8e-03 | 3.2e-03 | 3.3e-03 | 2.7e-03 | 1.7e-03 | 5.9e-04 | 5.3e-04 | 1.2e-03 | 7.4e-04 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 1.9e-03 | 3.6e-03 | 4.1e-03 | 3.5e-03 | 2.4e-03 | 9.9e-04 | 2.8e-04 | 8.0e-04 | 4.9e-04 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 2.1e-03 | 3.8e-03 | 4.7e-03 | 4.3e-03 | 3.0e-03 | 1.5e-03 | 1.6e-04 | 2.8e-04 | 2.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 2.4e-03 | 4.1e-03 | 5.2e-03 | 5.0e-03 | 3.7e-03 | 2.0e-03 | 7.8e-04 | 2.8e-04 | 1.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 2.6e-03 | 4.3e-03 | 5.4e-03 | 5.5e-03 | 4.3e-03 | 2.7e-03 | 1.5e-03 | 7.8e-04 | 6.6e-05 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 2.7e-03 | 4.5e-03 | 5.5e-03 | 5.8e-03 | 4.9e-03 | 3.5e-03 | 2.3e-03 | 1.2e-03 | 2.6e-04 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.8e-03 | 4.7e-03 | 5.5e-03 | 5.8e-03 | 5.3e-03 | 4.2e-03 | 3.0e-03 | 1.5e-03 | 4.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 2.7e-03 | 4.7e-03 | 5.4e-03 | 5.6e-03 | 5.5e-03 | 4.9e-03 | 3.5e-03 | 1.8e-03 | 6.9e-04 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 2.6e-03 | 4.5e-03 | 5.3e-03 | 5.4e-03 | 5.6e-03 | 5.3e-03 | 3.8e-03 | 2.2e-03 | 8.6e-04 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 2.4e-03 | 4.1e-03 | 4.9e-03 | 5.2e-03 | 5.5e-03 | 5.3e-03 | 4.0e-03 | 2.4e-03 | 9.9e-04 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 2.1e-03 | 3.5e-03 | 4.5e-03 | 4.9e-03 | 5.2e-03 | 4.9e-03 | 3.9e-03 | 2.6e-03 | 1.1e-03 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 1.7e-03 | 2.9e-03 | 3.8e-03 | 4.6e-03 | 4.6e-03 | 4.2e-03 | 3.6e-03 | 2.5e-03 | 1.1e-03 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 1.2e-03 | 2.2e-03 | 3.1e-03 | 3.9e-03 | 3.8e-03 | 3.3e-03 | 3.0e-03 | 2.3e-03 | 1.1e-03 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 6.8e-04 | 1.4e-03 | 2.3e-03 | 3.0e-03 | 2.7e-03 | 2.3e-03 | 2.2e-03 | 1.8e-03 | 1.0e-03 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 1.8e-04 | 6.8e-04 | 1.3e-03 | 1.6e-03 | 1.5e-03 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 1.1e-03 | 7.4e-04 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 2.7e-04 | 1.2e-04 | 1.8e-04 | 5.6e-05 | 4.7e-05 | 3.3e-05 | 1.0e-04 | 1.7e-04 | 2.9e-04 | 0.0e+00 |

Tab. 9: Anfangsrandwertproblem (a) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = 0.1$ und $\Delta t = 0.05$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 1.6e-01 | 4.5e-01 | 7.1e-01 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 |
| 0.10 | 3.1e-01 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | -2.6e-04 | -3.1e-01 |
| 0.15 | 4.5e-01 | 7.1e-01 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 |
| 0.20 | 5.9e-01 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | -3.4e-04 | -3.1e-01 | -5.9e-01 |
| 0.25 | 7.1e-01 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 |
| 0.30 | 8.1e-01 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | -9.3e-05 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 |
| 0.35 | 8.9e-01 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 |
| 0.40 | 9.5e-01 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 4.8e-04 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 |
| 0.45 | 9.9e-01 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 |
| 0.50 | 1.0e+00 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 1.2e-03 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 |
| 0.55 | 9.9e-01 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 |
| 0.60 | 9.5e-01 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 1.4e-03 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 |
| 0.65 | 8.9e-01 | 7.1e-01 | 4.6e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 | -8.9e-01 |
| 0.70 | 8.1e-01 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 1.2e-03 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 |
| 0.75 | 7.1e-01 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 | -8.9e-01 | -7.1e-01 |
| 0.80 | 5.9e-01 | 3.1e-01 | 6.8e-04 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 |
| 0.85 | 4.5e-01 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 | -8.9e-01 | -7.1e-01 | -4.5e-01 |
| 0.90 | 3.1e-01 | 1.4e-04 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 | -3.1e-01 |
| 0.95 | 1.6e-01 | -1.6e-01 | -4.5e-01 | -7.1e-01 | -8.9e-01 | -9.9e-01 | -9.9e-01 | -8.9e-01 | -7.1e-01 | -4.5e-01 | -1.6e-01 |
| 1.00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -5.9e-01 | -8.1e-01 | -9.5e-01 | -1.0e+00 | -9.5e-01 | -8.1e-01 | -5.9e-01 | -3.1e-01 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 1.6e-04 | 1.4e-04 | 1.1e-04 | 6.8e-05 | 1.9e-05 | 3.2e-05 | 8.0e-05 | 1.2e-04 | 1.5e-04 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 3.1e-04 | 3.1e-04 | 2.5e-04 | 1.7e-04 | 7.5e-05 | 2.9e-05 | 1.3e-04 | 2.2e-04 | 2.6e-04 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 3.8e-04 | 4.9e-04 | 4.2e-04 | 3.1e-04 | 1.6e-04 | 4.6e-06 | 1.6e-04 | 3.0e-04 | 2.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 3.9e-04 | 6.7e-04 | 6.2e-04 | 4.8e-04 | 2.8e-04 | 6.5e-05 | 1.6e-04 | 3.4e-04 | 2.2e-04 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 4.4e-04 | 8.0e-04 | 8.4e-04 | 6.7e-04 | 4.3e-04 | 1.5e-04 | 1.4e-04 | 2.9e-04 | 1.7e-04 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 5.0e-04 | 8.6e-04 | 1.0e-03 | 8.8e-04 | 5.9e-04 | 2.4e-04 | 9.3e-05 | 1.7e-04 | 1.4e-04 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 5.5e-04 | 9.2e-04 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 7.6e-04 | 3.5e-04 | 3.0e-05 | 3.5e-05 | 8.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 6.0e-04 | 1.0e-03 | 1.3e-03 | 1.3e-03 | 9.2e-04 | 4.8e-04 | 2.3e-04 | 6.3e-05 | 2.6e-05 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 6.5e-04 | 1.1e-03 | 1.3e-03 | 1.4e-03 | 1.1e-03 | 6.6e-04 | 4.3e-04 | 1.7e-04 | 2.0e-05 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 6.7e-04 | 1.1e-03 | 1.4e-03 | 1.4e-03 | 1.2e-03 | 9.0e-04 | 5.9e-04 | 2.9e-04 | 7.4e-05 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 6.9e-04 | 1.2e-03 | 1.4e-03 | 1.4e-03 | 1.3e-03 | 1.1e-03 | 7.3e-04 | 3.9e-04 | 1.3e-04 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 6.9e-04 | 1.2e-03 | 1.4e-03 | 1.4e-03 | 1.4e-03 | 1.3e-03 | 8.8e-04 | 4.7e-04 | 1.7e-04 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 6.5e-04 | 1.1e-03 | 1.3e-03 | 1.4e-03 | 1.4e-03 | 1.3e-03 | 9.8e-04 | 5.6e-04 | 2.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 6.0e-04 | 1.0e-03 | 1.2e-03 | 1.3e-03 | 1.4e-03 | 1.3e-03 | 1.0e-03 | 6.2e-04 | 2.5e-04 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 5.1e-04 | 8.6e-04 | 1.1e-03 | 1.3e-03 | 1.3e-03 | 1.2e-03 | 1.0e-03 | 6.5e-04 | 2.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 4.0e-04 | 6.8e-04 | 9.6e-04 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 1.0e-03 | 8.9e-04 | 6.6e-04 | 3.0e-04 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 2.7e-04 | 5.1e-04 | 8.3e-04 | 9.5e-04 | 9.4e-04 | 8.3e-04 | 6.9e-04 | 5.9e-04 | 3.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 1.4e-04 | 3.6e-04 | 6.2e-04 | 6.7e-04 | 6.8e-04 | 6.2e-04 | 4.7e-04 | 4.3e-04 | 2.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 2.6e-05 | 2.1e-04 | 3.2e-04 | 3.7e-04 | 3.6e-04 | 3.2e-04 | 2.6e-04 | 2.1e-04 | 2.0e-04 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 4.4e-05 | 2.3e-05 | 8.6e-06 | 1.7e-05 | 2.9e-06 | 1.1e-05 | 1.3e-05 | 1.9e-05 | 4.6e-05 | 0.0e+00 |

Tab. 10: Anfangsrandwertproblem (a) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = 0.05$ und $\Delta t = 0.025$

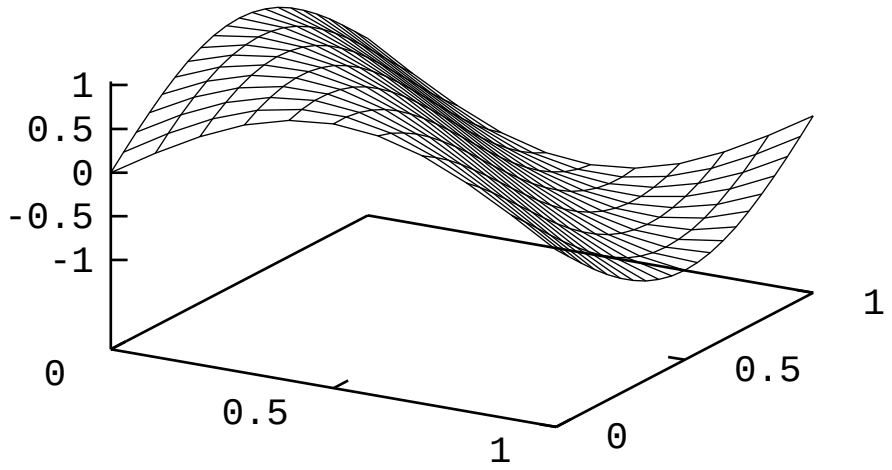



Fig. B.21: Differenzenverfahren zu (a) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = \frac{1}{10}, \Delta t = \frac{1}{20}$

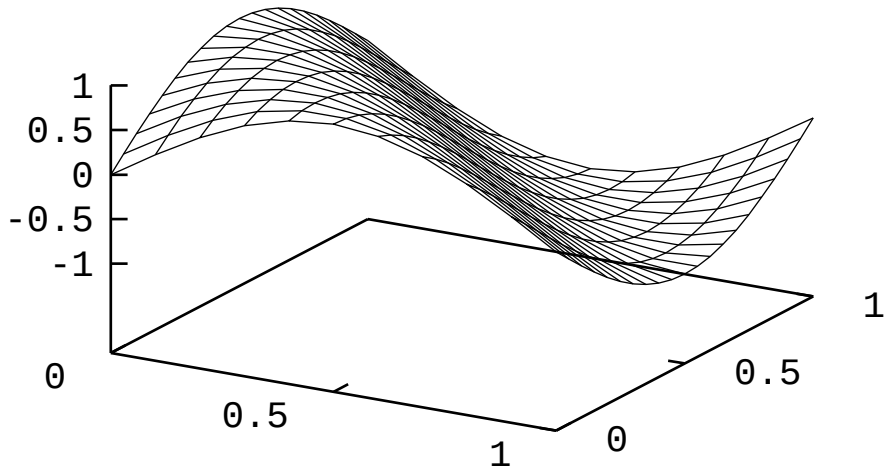



Fig. B.22: Differenzenverfahren zu (a) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = \frac{1}{10}, \Delta t = \frac{1}{20}$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.5e-02 | 6.6e-02 | 9.1e-02 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 9.1e-02 | 6.6e-02 | 3.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 3.3e-02 | 6.3e-02 | 8.7e-02 | 1.0e-01 | 1.1e-01 | 1.0e-01 | 8.7e-02 | 6.3e-02 | 3.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 3.1e-02 | 6.0e-02 | 8.2e-02 | 9.7e-02 | 1.0e-01 | 9.7e-02 | 8.2e-02 | 6.0e-02 | 3.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 3.0e-02 | 5.7e-02 | 7.8e-02 | 9.2e-02 | 9.7e-02 | 9.2e-02 | 7.8e-02 | 5.7e-02 | 3.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 2.8e-02 | 5.4e-02 | 7.4e-02 | 8.7e-02 | 9.2e-02 | 8.7e-02 | 7.4e-02 | 5.4e-02 | 2.8e-02 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 2.7e-02 | 5.1e-02 | 7.1e-02 | 8.3e-02 | 8.7e-02 | 8.3e-02 | 7.1e-02 | 5.1e-02 | 2.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 2.6e-02 | 4.9e-02 | 6.7e-02 | 7.9e-02 | 8.3e-02 | 7.9e-02 | 6.7e-02 | 4.9e-02 | 2.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 2.4e-02 | 4.6e-02 | 6.4e-02 | 7.5e-02 | 7.9e-02 | 7.5e-02 | 6.4e-02 | 4.6e-02 | 2.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 2.3e-02 | 4.4e-02 | 6.1e-02 | 7.2e-02 | 7.5e-02 | 7.2e-02 | 6.1e-02 | 4.4e-02 | 2.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 2.2e-02 | 4.2e-02 | 5.8e-02 | 6.8e-02 | 7.2e-02 | 6.8e-02 | 5.8e-02 | 4.2e-02 | 2.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 2.1e-02 | 4.0e-02 | 5.5e-02 | 6.5e-02 | 6.8e-02 | 6.5e-02 | 5.5e-02 | 4.0e-02 | 2.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.0e-02 | 3.8e-02 | 5.3e-02 | 6.2e-02 | 6.5e-02 | 6.2e-02 | 5.3e-02 | 3.8e-02 | 2.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 1.9e-02 | 3.6e-02 | 5.0e-02 | 5.9e-02 | 6.2e-02 | 5.9e-02 | 5.0e-02 | 3.6e-02 | 1.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 1.8e-02 | 3.5e-02 | 4.8e-02 | 5.6e-02 | 5.9e-02 | 5.6e-02 | 4.8e-02 | 3.5e-02 | 1.8e-02 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 1.7e-02 | 3.3e-02 | 4.6e-02 | 5.4e-02 | 5.6e-02 | 5.4e-02 | 4.6e-02 | 3.3e-02 | 1.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 1.7e-02 | 3.2e-02 | 4.3e-02 | 5.1e-02 | 5.4e-02 | 5.1e-02 | 4.3e-02 | 3.2e-02 | 1.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 1.6e-02 | 3.0e-02 | 4.2e-02 | 4.9e-02 | 5.1e-02 | 4.9e-02 | 4.2e-02 | 3.0e-02 | 1.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 1.5e-02 | 2.9e-02 | 4.0e-02 | 4.7e-02 | 4.9e-02 | 4.7e-02 | 4.0e-02 | 2.9e-02 | 1.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 1.4e-02 | 2.7e-02 | 3.8e-02 | 4.4e-02 | 4.7e-02 | 4.4e-02 | 3.8e-02 | 2.7e-02 | 1.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 1.4e-02 | 2.6e-02 | 3.6e-02 | 4.2e-02 | 4.5e-02 | 4.2e-02 | 3.6e-02 | 2.6e-02 | 1.4e-02 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 1.3e-02 | 2.5e-02 | 3.4e-02 | 4.1e-02 | 4.3e-02 | 4.1e-02 | 3.4e-02 | 2.5e-02 | 1.3e-02 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 4.3e-05 | 8.1e-05 | 1.1e-04 | 1.3e-04 | 1.4e-04 | 1.3e-04 | 1.1e-04 | 8.1e-05 | 4.3e-05 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 7.8e-05 | 1.5e-04 | 2.0e-04 | 2.4e-04 | 2.5e-04 | 2.4e-04 | 2.0e-04 | 1.5e-04 | 7.8e-05 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 1.0e-04 | 2.0e-04 | 2.7e-04 | 3.2e-04 | 3.4e-04 | 3.2e-04 | 2.7e-04 | 2.0e-04 | 1.0e-04 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 1.2e-04 | 2.3e-04 | 3.2e-04 | 3.8e-04 | 4.0e-04 | 3.8e-04 | 3.2e-04 | 2.3e-04 | 1.2e-04 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 1.3e-04 | 2.5e-04 | 3.5e-04 | 4.1e-04 | 4.3e-04 | 4.1e-04 | 3.5e-04 | 2.5e-04 | 1.3e-04 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 1.3e-04 | 2.5e-04 | 3.5e-04 | 4.1e-04 | 4.3e-04 | 4.1e-04 | 3.5e-04 | 2.5e-04 | 1.3e-04 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 1.3e-04 | 2.4e-04 | 3.3e-04 | 3.9e-04 | 4.1e-04 | 3.9e-04 | 3.3e-04 | 2.4e-04 | 1.3e-04 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 1.1e-04 | 2.1e-04 | 2.9e-04 | 3.4e-04 | 3.5e-04 | 3.4e-04 | 2.9e-04 | 2.1e-04 | 1.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 8.7e-05 | 1.6e-04 | 2.3e-04 | 2.7e-04 | 2.8e-04 | 2.7e-04 | 2.3e-04 | 1.6e-04 | 8.7e-05 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 5.7e-05 | 1.1e-04 | 1.5e-04 | 1.7e-04 | 1.8e-04 | 1.7e-04 | 1.5e-04 | 1.1e-04 | 5.7e-05 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.1e-05 | 4.1e-05 | 5.6e-05 | 6.6e-05 | 6.9e-05 | 6.6e-05 | 5.6e-05 | 4.1e-05 | 2.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 1.9e-05 | 3.5e-05 | 4.9e-05 | 5.7e-05 | 6.0e-05 | 5.7e-05 | 4.9e-05 | 3.5e-05 | 1.9e-05 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 6.2e-05 | 1.2e-04 | 1.6e-04 | 1.9e-04 | 2.0e-04 | 1.9e-04 | 1.6e-04 | 1.2e-04 | 6.2e-05 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 1.1e-04 | 2.0e-04 | 2.8e-04 | 3.3e-04 | 3.5e-04 | 3.3e-04 | 2.8e-04 | 2.0e-04 | 1.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 1.5e-04 | 2.9e-04 | 4.0e-04 | 4.7e-04 | 5.0e-04 | 4.7e-04 | 4.0e-04 | 2.9e-04 | 1.5e-04 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 2.0e-04 | 3.8e-04 | 5.2e-04 | 6.2e-04 | 6.5e-04 | 6.2e-04 | 5.2e-04 | 3.8e-04 | 2.0e-04 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 2.4e-04 | 4.6e-04 | 6.4e-04 | 7.5e-04 | 7.9e-04 | 7.5e-04 | 6.4e-04 | 4.6e-04 | 2.4e-04 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 2.9e-04 | 5.4e-04 | 7.5e-04 | 8.8e-04 | 9.2e-04 | 8.8e-04 | 7.5e-04 | 5.4e-04 | 2.9e-04 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 3.2e-04 | 6.1e-04 | 8.4e-04 | 9.9e-04 | 1.0e-03 | 9.9e-04 | 8.4e-04 | 6.1e-04 | 3.2e-04 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 3.5e-04 | 6.7e-04 | 9.3e-04 | 1.1e-03 | 1.1e-03 | 1.1e-03 | 9.3e-04 | 6.7e-04 | 3.5e-04 | 0.0e+00 |

Tab. 11: Anfangsrandwertproblem (b) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = 0.1$ und $\Delta t = 0.05$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.5e-02 | 6.6e-02 | 9.1e-02 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 9.1e-02 | 6.6e-02 | 3.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 3.3e-02 | 6.3e-02 | 8.7e-02 | 1.0e-01 | 1.1e-01 | 1.0e-01 | 8.7e-02 | 6.3e-02 | 3.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 3.1e-02 | 6.0e-02 | 8.2e-02 | 9.7e-02 | 1.0e-01 | 9.7e-02 | 8.2e-02 | 6.0e-02 | 3.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 3.0e-02 | 5.7e-02 | 7.8e-02 | 9.2e-02 | 9.7e-02 | 9.2e-02 | 7.8e-02 | 5.7e-02 | 3.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 2.8e-02 | 5.4e-02 | 7.4e-02 | 8.8e-02 | 9.2e-02 | 8.8e-02 | 7.4e-02 | 5.4e-02 | 2.8e-02 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 2.7e-02 | 5.1e-02 | 7.1e-02 | 8.3e-02 | 8.8e-02 | 8.3e-02 | 7.1e-02 | 5.1e-02 | 2.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 2.6e-02 | 4.9e-02 | 6.7e-02 | 7.9e-02 | 8.3e-02 | 7.9e-02 | 6.7e-02 | 4.9e-02 | 2.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 2.4e-02 | 4.7e-02 | 6.4e-02 | 7.5e-02 | 7.9e-02 | 7.5e-02 | 6.4e-02 | 4.7e-02 | 2.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 2.3e-02 | 4.4e-02 | 6.1e-02 | 7.2e-02 | 7.5e-02 | 7.2e-02 | 6.1e-02 | 4.4e-02 | 2.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 2.2e-02 | 4.2e-02 | 5.8e-02 | 6.8e-02 | 7.2e-02 | 6.8e-02 | 5.8e-02 | 4.2e-02 | 2.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 2.1e-02 | 4.0e-02 | 5.5e-02 | 6.5e-02 | 6.8e-02 | 6.5e-02 | 5.5e-02 | 4.0e-02 | 2.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.0e-02 | 3.8e-02 | 5.2e-02 | 6.2e-02 | 6.5e-02 | 6.2e-02 | 5.2e-02 | 3.8e-02 | 2.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 1.9e-02 | 3.6e-02 | 5.0e-02 | 5.9e-02 | 6.2e-02 | 5.9e-02 | 5.0e-02 | 3.6e-02 | 1.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 1.8e-02 | 3.5e-02 | 4.8e-02 | 5.6e-02 | 5.9e-02 | 5.6e-02 | 4.8e-02 | 3.5e-02 | 1.8e-02 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 1.7e-02 | 3.3e-02 | 4.5e-02 | 5.3e-02 | 5.6e-02 | 5.3e-02 | 4.5e-02 | 3.3e-02 | 1.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 1.6e-02 | 3.1e-02 | 4.3e-02 | 5.1e-02 | 5.3e-02 | 5.1e-02 | 4.3e-02 | 3.1e-02 | 1.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 1.6e-02 | 3.0e-02 | 4.1e-02 | 4.8e-02 | 5.1e-02 | 4.8e-02 | 4.1e-02 | 3.0e-02 | 1.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 1.5e-02 | 2.8e-02 | 3.9e-02 | 4.6e-02 | 4.8e-02 | 4.6e-02 | 3.9e-02 | 2.8e-02 | 1.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 1.4e-02 | 2.7e-02 | 3.7e-02 | 4.4e-02 | 4.6e-02 | 4.4e-02 | 3.7e-02 | 2.7e-02 | 1.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 1.4e-02 | 2.6e-02 | 3.5e-02 | 4.2e-02 | 4.4e-02 | 4.2e-02 | 3.5e-02 | 2.6e-02 | 1.4e-02 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 1.3e-02 | 2.5e-02 | 3.4e-02 | 4.0e-02 | 4.2e-02 | 4.0e-02 | 3.4e-02 | 2.5e-02 | 1.3e-02 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 2.1e-05 | 4.0e-05 | 5.5e-05 | 6.5e-05 | 6.8e-05 | 6.5e-05 | 5.5e-05 | 4.0e-05 | 2.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 4.0e-05 | 7.6e-05 | 1.0e-04 | 1.2e-04 | 1.3e-04 | 1.2e-04 | 1.0e-04 | 7.6e-05 | 4.0e-05 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 5.6e-05 | 1.1e-04 | 1.5e-04 | 1.7e-04 | 1.8e-04 | 1.7e-04 | 1.5e-04 | 1.1e-04 | 5.6e-05 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 7.0e-05 | 1.3e-04 | 1.8e-04 | 2.1e-04 | 2.3e-04 | 2.1e-04 | 1.8e-04 | 1.3e-04 | 7.0e-05 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 8.0e-05 | 1.5e-04 | 2.1e-04 | 2.5e-04 | 2.6e-04 | 2.5e-04 | 2.1e-04 | 1.5e-04 | 8.0e-05 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 8.7e-05 | 1.7e-04 | 2.3e-04 | 2.7e-04 | 2.8e-04 | 2.7e-04 | 2.3e-04 | 1.7e-04 | 8.7e-05 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 9.0e-05 | 1.7e-04 | 2.4e-04 | 2.8e-04 | 2.9e-04 | 2.8e-04 | 2.4e-04 | 1.7e-04 | 9.0e-05 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 9.1e-05 | 1.7e-04 | 2.4e-04 | 2.8e-04 | 2.9e-04 | 2.8e-04 | 2.4e-04 | 1.7e-04 | 9.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 8.7e-05 | 1.7e-04 | 2.3e-04 | 2.7e-04 | 2.8e-04 | 2.7e-04 | 2.3e-04 | 1.7e-04 | 8.7e-05 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 8.1e-05 | 1.5e-04 | 2.1e-04 | 2.5e-04 | 2.6e-04 | 2.5e-04 | 2.1e-04 | 1.5e-04 | 8.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 7.1e-05 | 1.3e-04 | 1.9e-04 | 2.2e-04 | 2.3e-04 | 2.2e-04 | 1.9e-04 | 1.3e-04 | 7.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 5.8e-05 | 1.1e-04 | 1.5e-04 | 1.8e-04 | 1.9e-04 | 1.8e-04 | 1.5e-04 | 1.1e-04 | 5.8e-05 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 4.4e-05 | 8.3e-05 | 1.1e-04 | 1.3e-04 | 1.4e-04 | 1.3e-04 | 1.1e-04 | 8.3e-05 | 4.4e-05 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 2.7e-05 | 5.1e-05 | 7.0e-05 | 8.2e-05 | 8.6e-05 | 8.2e-05 | 7.0e-05 | 5.1e-05 | 2.7e-05 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 8.4e-06 | 1.6e-05 | 2.2e-05 | 2.6e-05 | 2.7e-05 | 2.6e-05 | 2.2e-05 | 1.6e-05 | 8.4e-06 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 1.1e-05 | 2.1e-05 | 2.9e-05 | 3.4e-05 | 3.6e-05 | 3.4e-05 | 2.9e-05 | 2.1e-05 | 1.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 3.1e-05 | 5.9e-05 | 8.1e-05 | 9.5e-05 | 1.0e-04 | 9.5e-05 | 8.1e-05 | 5.9e-05 | 3.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 5.1e-05 | 9.7e-05 | 1.3e-04 | 1.6e-04 | 1.6e-04 | 1.6e-04 | 1.3e-04 | 9.7e-05 | 5.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 7.0e-05 | 1.3e-04 | 1.8e-04 | 2.2e-04 | 2.3e-04 | 2.2e-04 | 1.8e-04 | 1.3e-04 | 7.0e-05 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 8.9e-05 | 1.7e-04 | 2.3e-04 | 2.7e-04 | 2.9e-04 | 2.7e-04 | 2.3e-04 | 1.7e-04 | 8.9e-05 | 0.0e+00 |

Tab. 12: Anfangsrandwertproblem (b) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = 0.05$ und $\Delta t = 0.025$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.5e-02 | 6.6e-02 | 9.1e-02 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 9.1e-02 | 6.6e-02 | 3.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 3.3e-02 | 6.3e-02 | 8.7e-02 | 1.0e-01 | 1.1e-01 | 1.0e-01 | 8.7e-02 | 6.3e-02 | 3.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 3.2e-02 | 6.0e-02 | 8.3e-02 | 9.7e-02 | 1.0e-01 | 9.7e-02 | 8.3e-02 | 6.0e-02 | 3.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 3.0e-02 | 5.7e-02 | 7.9e-02 | 9.2e-02 | 9.7e-02 | 9.2e-02 | 7.9e-02 | 5.7e-02 | 3.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 2.9e-02 | 5.4e-02 | 7.5e-02 | 8.8e-02 | 9.2e-02 | 8.8e-02 | 7.5e-02 | 5.4e-02 | 2.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 2.7e-02 | 5.2e-02 | 7.1e-02 | 8.4e-02 | 8.8e-02 | 8.4e-02 | 7.1e-02 | 5.2e-02 | 2.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 2.6e-02 | 4.9e-02 | 6.8e-02 | 8.0e-02 | 8.4e-02 | 8.0e-02 | 6.8e-02 | 4.9e-02 | 2.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 2.5e-02 | 4.7e-02 | 6.5e-02 | 7.6e-02 | 8.0e-02 | 7.6e-02 | 6.5e-02 | 4.7e-02 | 2.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 2.4e-02 | 4.5e-02 | 6.2e-02 | 7.2e-02 | 7.6e-02 | 7.2e-02 | 6.2e-02 | 4.5e-02 | 2.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 2.2e-02 | 4.3e-02 | 5.9e-02 | 6.9e-02 | 7.3e-02 | 6.9e-02 | 5.9e-02 | 4.3e-02 | 2.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 2.1e-02 | 4.1e-02 | 5.6e-02 | 6.6e-02 | 6.9e-02 | 6.6e-02 | 5.6e-02 | 4.1e-02 | 2.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.0e-02 | 3.9e-02 | 5.3e-02 | 6.3e-02 | 6.6e-02 | 6.3e-02 | 5.3e-02 | 3.9e-02 | 2.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 1.9e-02 | 3.7e-02 | 5.1e-02 | 6.0e-02 | 6.3e-02 | 6.0e-02 | 5.1e-02 | 3.7e-02 | 1.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 1.9e-02 | 3.5e-02 | 4.8e-02 | 5.7e-02 | 6.0e-02 | 5.7e-02 | 4.8e-02 | 3.5e-02 | 1.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 1.8e-02 | 3.4e-02 | 4.6e-02 | 5.4e-02 | 5.7e-02 | 5.4e-02 | 4.6e-02 | 3.4e-02 | 1.8e-02 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 1.7e-02 | 3.2e-02 | 4.4e-02 | 5.2e-02 | 5.4e-02 | 5.2e-02 | 4.4e-02 | 3.2e-02 | 1.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 1.6e-02 | 3.0e-02 | 4.2e-02 | 4.9e-02 | 5.2e-02 | 4.9e-02 | 4.2e-02 | 3.0e-02 | 1.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 1.5e-02 | 2.9e-02 | 4.0e-02 | 4.7e-02 | 4.9e-02 | 4.7e-02 | 4.0e-02 | 2.9e-02 | 1.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 1.5e-02 | 2.8e-02 | 3.8e-02 | 4.5e-02 | 4.7e-02 | 4.5e-02 | 3.8e-02 | 2.8e-02 | 1.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 1.4e-02 | 2.6e-02 | 3.6e-02 | 4.3e-02 | 4.5e-02 | 4.3e-02 | 3.6e-02 | 2.6e-02 | 1.4e-02 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 1.3e-02 | 2.5e-02 | 3.4e-02 | 4.1e-02 | 4.3e-02 | 4.1e-02 | 3.4e-02 | 2.5e-02 | 1.3e-02 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 4.2e-06 | 8.1e-06 | 1.1e-05 | 1.3e-05 | 1.4e-05 | 1.3e-05 | 1.1e-05 | 8.1e-06 | 4.2e-06 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 1.5e-05 | 2.9e-05 | 3.9e-05 | 4.6e-05 | 4.9e-05 | 4.6e-05 | 3.9e-05 | 2.9e-05 | 1.5e-05 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 3.2e-05 | 6.1e-05 | 8.3e-05 | 9.8e-05 | 1.0e-04 | 9.8e-05 | 8.3e-05 | 6.1e-05 | 3.2e-05 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 5.4e-05 | 1.0e-04 | 1.4e-04 | 1.7e-04 | 1.7e-04 | 1.7e-04 | 1.4e-04 | 1.0e-04 | 5.4e-05 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 8.0e-05 | 1.5e-04 | 2.1e-04 | 2.5e-04 | 2.6e-04 | 2.5e-04 | 2.1e-04 | 1.5e-04 | 8.0e-05 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 1.1e-04 | 2.1e-04 | 2.9e-04 | 3.4e-04 | 3.6e-04 | 3.4e-04 | 2.9e-04 | 2.1e-04 | 1.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 1.4e-04 | 2.7e-04 | 3.7e-04 | 4.4e-04 | 4.6e-04 | 4.4e-04 | 3.7e-04 | 2.7e-04 | 1.4e-04 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 1.8e-04 | 3.4e-04 | 4.6e-04 | 5.4e-04 | 5.7e-04 | 5.4e-04 | 4.6e-04 | 3.4e-04 | 1.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 2.1e-04 | 4.0e-04 | 5.5e-04 | 6.5e-04 | 6.8e-04 | 6.5e-04 | 5.5e-04 | 4.0e-04 | 2.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 2.5e-04 | 4.7e-04 | 6.4e-04 | 7.5e-04 | 7.9e-04 | 7.5e-04 | 6.4e-04 | 4.7e-04 | 2.5e-04 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.8e-04 | 5.3e-04 | 7.3e-04 | 8.5e-04 | 9.0e-04 | 8.5e-04 | 7.3e-04 | 5.3e-04 | 2.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 3.1e-04 | 5.8e-04 | 8.0e-04 | 9.4e-04 | 9.9e-04 | 9.4e-04 | 8.0e-04 | 5.8e-04 | 3.1e-04 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 3.3e-04 | 6.3e-04 | 8.7e-04 | 1.0e-03 | 1.1e-03 | 1.0e-03 | 8.7e-04 | 6.3e-04 | 3.3e-04 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 3.5e-04 | 6.7e-04 | 9.2e-04 | 1.1e-03 | 1.1e-03 | 1.1e-03 | 9.2e-04 | 6.7e-04 | 3.5e-04 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 3.7e-04 | 7.0e-04 | 9.7e-04 | 1.1e-03 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 9.7e-04 | 7.0e-04 | 3.7e-04 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 3.8e-04 | 7.2e-04 | 9.9e-04 | 1.2e-03 | 1.2e-03 | 1.2e-03 | 9.9e-04 | 7.2e-04 | 3.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 3.8e-04 | 7.3e-04 | 1.0e-03 | 1.2e-03 | 1.2e-03 | 1.2e-03 | 1.0e-03 | 7.3e-04 | 3.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 3.8e-04 | 7.2e-04 | 1.0e-03 | 1.2e-03 | 1.2e-03 | 1.2e-03 | 1.0e-03 | 7.2e-04 | 3.8e-04 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 3.7e-04 | 7.1e-04 | 9.7e-04 | 1.1e-03 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 9.7e-04 | 7.1e-04 | 3.7e-04 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 3.6e-04 | 6.8e-04 | 9.4e-04 | 1.1e-03 | 1.2e-03 | 1.1e-03 | 9.4e-04 | 6.8e-04 | 3.6e-04 | 0.0e+00 |

Tab. 13: Anfangsrandwertproblem (b) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = 0.1$ und $\Delta t = 0.05$

Naeherungsloesung:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 3.5e-02 | 6.6e-02 | 9.1e-02 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 1.1e-01 | 9.1e-02 | 6.6e-02 | 3.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 3.3e-02 | 6.3e-02 | 8.7e-02 | 1.0e-01 | 1.1e-01 | 1.0e-01 | 8.7e-02 | 6.3e-02 | 3.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 3.2e-02 | 6.0e-02 | 8.3e-02 | 9.7e-02 | 1.0e-01 | 9.7e-02 | 8.3e-02 | 6.0e-02 | 3.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 3.0e-02 | 5.7e-02 | 7.9e-02 | 9.2e-02 | 9.7e-02 | 9.2e-02 | 7.9e-02 | 5.7e-02 | 3.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 2.9e-02 | 5.4e-02 | 7.5e-02 | 8.8e-02 | 9.2e-02 | 8.8e-02 | 7.5e-02 | 5.4e-02 | 2.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 2.7e-02 | 5.2e-02 | 7.1e-02 | 8.4e-02 | 8.8e-02 | 8.4e-02 | 7.1e-02 | 5.2e-02 | 2.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 2.6e-02 | 4.9e-02 | 6.8e-02 | 8.0e-02 | 8.4e-02 | 8.0e-02 | 6.8e-02 | 4.9e-02 | 2.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 2.5e-02 | 4.7e-02 | 6.4e-02 | 7.6e-02 | 8.0e-02 | 7.6e-02 | 6.4e-02 | 4.7e-02 | 2.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 2.3e-02 | 4.5e-02 | 6.1e-02 | 7.2e-02 | 7.6e-02 | 7.2e-02 | 6.1e-02 | 4.5e-02 | 2.3e-02 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 2.2e-02 | 4.2e-02 | 5.8e-02 | 6.9e-02 | 7.2e-02 | 6.9e-02 | 5.8e-02 | 4.2e-02 | 2.2e-02 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 2.1e-02 | 4.0e-02 | 5.5e-02 | 6.5e-02 | 6.9e-02 | 6.5e-02 | 5.5e-02 | 4.0e-02 | 2.1e-02 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 2.0e-02 | 3.8e-02 | 5.3e-02 | 6.2e-02 | 6.5e-02 | 6.2e-02 | 5.3e-02 | 3.8e-02 | 2.0e-02 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 1.9e-02 | 3.7e-02 | 5.0e-02 | 5.9e-02 | 6.2e-02 | 5.9e-02 | 5.0e-02 | 3.7e-02 | 1.9e-02 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 1.8e-02 | 3.5e-02 | 4.8e-02 | 5.6e-02 | 5.9e-02 | 5.6e-02 | 4.8e-02 | 3.5e-02 | 1.8e-02 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 1.7e-02 | 3.3e-02 | 4.6e-02 | 5.4e-02 | 5.6e-02 | 5.4e-02 | 4.6e-02 | 3.3e-02 | 1.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 1.7e-02 | 3.1e-02 | 4.3e-02 | 5.1e-02 | 5.4e-02 | 5.1e-02 | 4.3e-02 | 3.1e-02 | 1.7e-02 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 1.6e-02 | 3.0e-02 | 4.1e-02 | 4.8e-02 | 5.1e-02 | 4.8e-02 | 4.1e-02 | 3.0e-02 | 1.6e-02 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 1.5e-02 | 2.9e-02 | 3.9e-02 | 4.6e-02 | 4.8e-02 | 4.6e-02 | 3.9e-02 | 2.9e-02 | 1.5e-02 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 1.4e-02 | 2.7e-02 | 3.7e-02 | 4.4e-02 | 4.6e-02 | 4.4e-02 | 3.7e-02 | 2.7e-02 | 1.4e-02 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 1.4e-02 | 2.6e-02 | 3.6e-02 | 4.2e-02 | 4.4e-02 | 4.2e-02 | 3.6e-02 | 2.6e-02 | 1.4e-02 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 1.3e-02 | 2.5e-02 | 3.4e-02 | 4.0e-02 | 4.2e-02 | 4.0e-02 | 3.4e-02 | 2.5e-02 | 1.3e-02 | 0.0e+00 |

Fehler:

| t\x | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.05 | 0.0e+00 | 1.0e-06 | 2.0e-06 | 2.7e-06 | 3.2e-06 | 3.4e-06 | 3.2e-06 | 2.7e-06 | 2.0e-06 | 1.0e-06 | 0.0e+00 |
| 0.10 | 0.0e+00 | 3.7e-06 | 7.1e-06 | 9.8e-06 | 1.2e-05 | 1.2e-05 | 1.2e-05 | 9.8e-06 | 7.1e-06 | 3.7e-06 | 0.0e+00 |
| 0.15 | 0.0e+00 | 7.9e-06 | 1.5e-05 | 2.1e-05 | 2.4e-05 | 2.6e-05 | 2.4e-05 | 2.1e-05 | 1.5e-05 | 7.9e-06 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 1.3e-05 | 2.6e-05 | 3.5e-05 | 4.1e-05 | 4.4e-05 | 4.1e-05 | 3.5e-05 | 2.6e-05 | 1.3e-05 | 0.0e+00 |
| 0.25 | 0.0e+00 | 2.0e-05 | 3.8e-05 | 5.3e-05 | 6.2e-05 | 6.5e-05 | 6.2e-05 | 5.3e-05 | 3.8e-05 | 2.0e-05 | 0.0e+00 |
| 0.30 | 0.0e+00 | 2.8e-05 | 5.2e-05 | 7.2e-05 | 8.5e-05 | 8.9e-05 | 8.5e-05 | 7.2e-05 | 5.2e-05 | 2.8e-05 | 0.0e+00 |
| 0.35 | 0.0e+00 | 3.6e-05 | 6.8e-05 | 9.3e-05 | 1.1e-04 | 1.2e-04 | 1.1e-04 | 9.3e-05 | 6.8e-05 | 3.6e-05 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 4.4e-05 | 8.4e-05 | 1.2e-04 | 1.4e-04 | 1.4e-04 | 1.4e-04 | 1.2e-04 | 8.4e-05 | 4.4e-05 | 0.0e+00 |
| 0.45 | 0.0e+00 | 5.3e-05 | 1.0e-04 | 1.4e-04 | 1.6e-04 | 1.7e-04 | 1.6e-04 | 1.4e-04 | 1.0e-04 | 5.3e-05 | 0.0e+00 |
| 0.50 | 0.0e+00 | 6.1e-05 | 1.2e-04 | 1.6e-04 | 1.9e-04 | 2.0e-04 | 1.9e-04 | 1.6e-04 | 1.2e-04 | 6.1e-05 | 0.0e+00 |
| 0.55 | 0.0e+00 | 6.9e-05 | 1.3e-04 | 1.8e-04 | 2.1e-04 | 2.2e-04 | 2.1e-04 | 1.8e-04 | 1.3e-04 | 6.9e-05 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 7.6e-05 | 1.5e-04 | 2.0e-04 | 2.4e-04 | 2.5e-04 | 2.4e-04 | 2.0e-04 | 1.5e-04 | 7.6e-05 | 0.0e+00 |
| 0.65 | 0.0e+00 | 8.3e-05 | 1.6e-04 | 2.2e-04 | 2.5e-04 | 2.7e-04 | 2.5e-04 | 2.2e-04 | 1.6e-04 | 8.3e-05 | 0.0e+00 |
| 0.70 | 0.0e+00 | 8.8e-05 | 1.7e-04 | 2.3e-04 | 2.7e-04 | 2.8e-04 | 2.7e-04 | 2.3e-04 | 1.7e-04 | 8.8e-05 | 0.0e+00 |
| 0.75 | 0.0e+00 | 9.2e-05 | 1.8e-04 | 2.4e-04 | 2.8e-04 | 3.0e-04 | 2.8e-04 | 2.4e-04 | 1.8e-04 | 9.2e-05 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 9.5e-05 | 1.8e-04 | 2.5e-04 | 2.9e-04 | 3.1e-04 | 2.9e-04 | 2.5e-04 | 1.8e-04 | 9.5e-05 | 0.0e+00 |
| 0.85 | 0.0e+00 | 9.6e-05 | 1.8e-04 | 2.5e-04 | 2.9e-04 | 3.1e-04 | 2.9e-04 | 2.5e-04 | 1.8e-04 | 9.6e-05 | 0.0e+00 |
| 0.90 | 0.0e+00 | 9.5e-05 | 1.8e-04 | 2.5e-04 | 2.9e-04 | 3.1e-04 | 2.9e-04 | 2.5e-04 | 1.8e-04 | 9.5e-05 | 0.0e+00 |
| 0.95 | 0.0e+00 | 9.3e-05 | 1.8e-04 | 2.4e-04 | 2.9e-04 | 3.0e-04 | 2.9e-04 | 2.4e-04 | 1.8e-04 | 9.3e-05 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 8.9e-05 | 1.7e-04 | 2.3e-04 | 2.7e-04 | 2.9e-04 | 2.7e-04 | 2.3e-04 | 1.7e-04 | 8.9e-05 | 0.0e+00 |

Tab. 14: Anfangsrandwertproblem (b) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = 0.05$ und $\Delta t = 0.025$

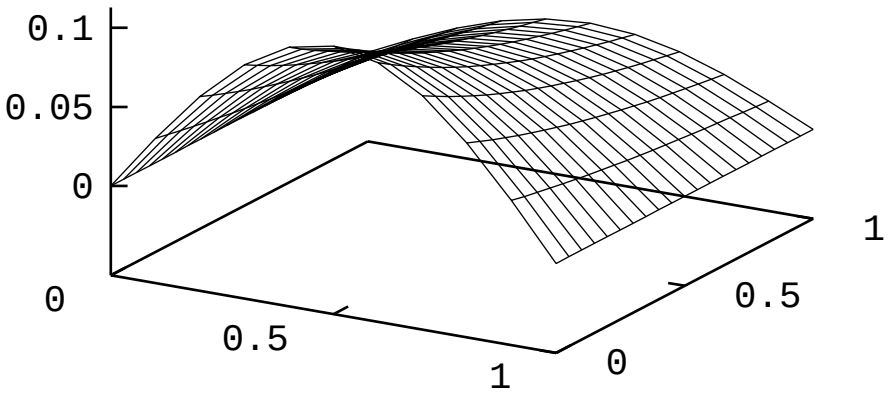



Fig. B.23: Differenzenverfahren zu (b) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = \frac{1}{10}, \Delta t = \frac{1}{20}$

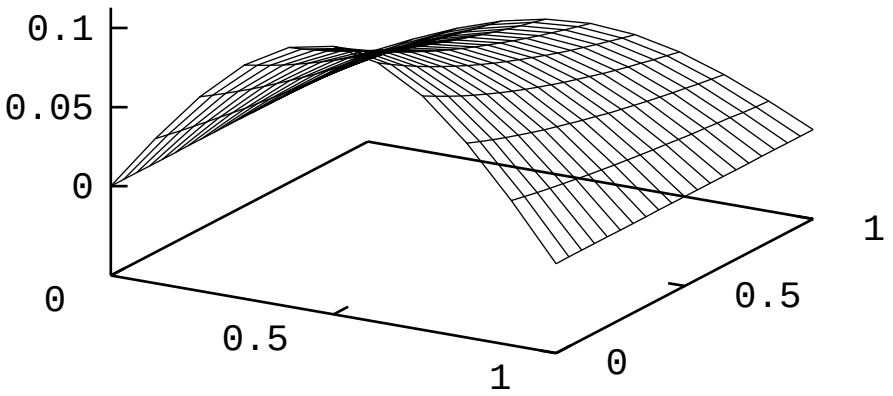



Fig. B.24: Differenzenverfahren zu (b) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = \frac{1}{10}, \Delta t = \frac{1}{20}$

Tab. 15: Anfangsrandwertproblem (c) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = 0.1$ und $\Delta t = 0.05$

Naeherungsloesung:

| t\x | -2.0 | -1.8 | -1.6 | -1.4 | -1.2 | -1.0 | -0.8 | -0.6 | -0.4 | -0.2 | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 2.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 1.2e+00 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.80 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 |
| 2.00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 |
| 2.20 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | 0.0e+00 |
| 2.40 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 |
| 2.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 |
| 2.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -2.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -1.2e+00 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.80 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 |
| 6.20 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.40 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 8.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 2.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |

Naeherungsloesung:

| t\x | -2.0 | -1.8 | -1.6 | -1.4 | -1.2 | -1.0 | -0.8 | -0.6 | -0.4 | -0.2 | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 2.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 0.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 1.60 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 |
| 1.80 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 |
| 2.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 2.20 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 |
| 2.40 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 |
| 2.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 2.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 3.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -6.2e-01 | -2.0e+00 | -6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -6.2e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 4.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 5.60 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 |
| 5.80 | 0.0e+00 | -1.0e+00 | -3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | -3.1e-01 | -1.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.20 | 0.0e+00 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.40 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 6.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.20 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.40 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.60 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 7.80 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 3.1e-01 | 1.0e+00 | 6.2e-01 | 1.0e+00 | 3.1e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |
| 8.00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 6.2e-01 | 2.0e+00 | 6.2e-01 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 | 0.0e+00 |

Tab. 16: Anfangsrandwertproblem (c) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = 0.1$ und $\Delta t = 0.05$

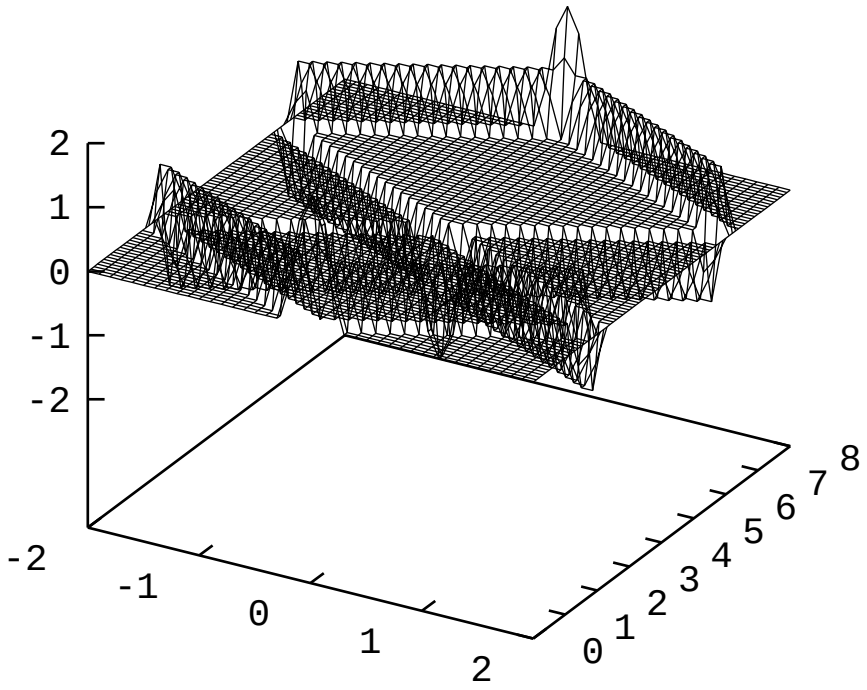



Fig. B.25: Differenzenverfahren zu (c) mit Anfangsappr. (A) für $\Delta x = \Delta t = \frac{1}{10}$

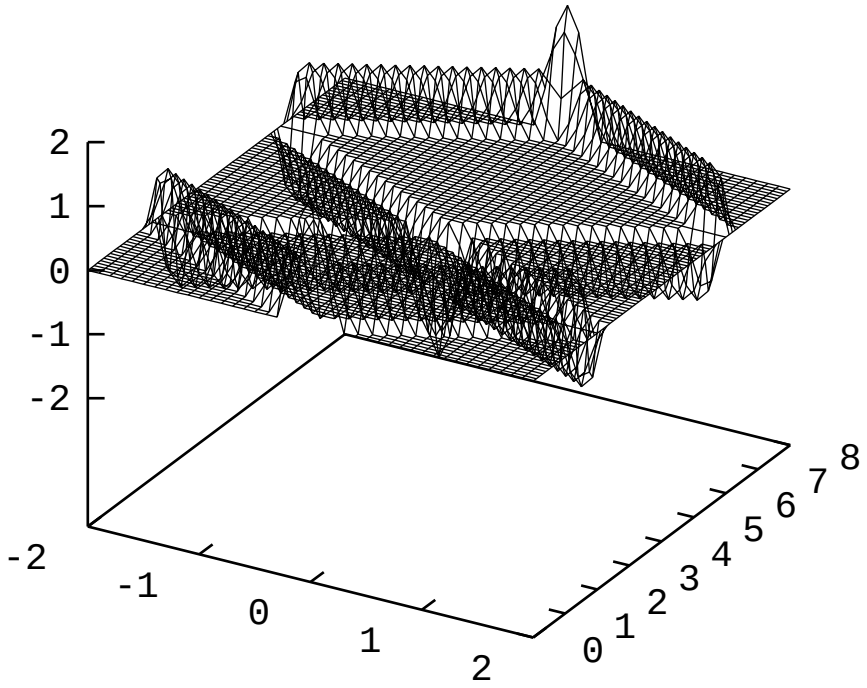



Fig. B.26: Differenzenverfahren zu (c) mit Anfangsappr. (B) für $\Delta x = \Delta t = \frac{1}{10}$

# Literaturverzeichnis


[Agm65] S. Agmon. *Elliptic boundary value problems.* Van Nostrand, New York, 1965.

[BCF90] A. C. Bajpai, I. M. Calus, und J. A. Failey. *Numerical methods for engineers and scientists.* Wiley, Chichester, 1990.

[BDHN85] Becker, Dreyer, Haacke, und Nabert. *Numerische Mathematik für Ingenieure.* Teubner, Stuttgart, 1985.

[BPV66] I. Babuska, M. Prager, und E. Vitasek. *Numerical processes in differential equations.* Interscience, New York, 1966.

[Bra83] M. Braun. *Differential equations and their applications.* Springer, New York, 1983.

[CL90] P. G. Ciarlet und J. L. Lions. *Handbook of Numerical Analysis. Vol. I: Finite Difference Methods (Part 1).* North–Holland, Amsterdam, 1990.

[Col66] L. Collatz. *The numerical treatment of differential equations.* Springer, Berlin, 1966.

[CP76] G. F. Carrier und C. E. Pearson. *Partial differential equations.* Academic Press, New York, 1976.

[FW60] G. E. Forsythe und W. R. Wasov. *Finite-difference methods for partial differential equations.* Wiley, New York, 1960.

[GR87] S. K. Godunov und V. S. Ryabenkii. *Difference schemes. An introduction to the underlying theory.* North–Holland, Amsterdam, 1987.

[GR92] C. Großmann und H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1992.

[GT83] D. Gilbarg und N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, Berlin, 1983.

[GW79] I. Gladwell und R. Wait. *A survey of numerical methods for partial differential equations.* Clarendon Press, Oxford, 1979.

[Hac86] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1986.

[Hel60] G. Hellwig. *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1960.

[Heu93] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1 und 2.* Teubner, Stuttgart, 1993.

[IK66] E. Isaacson und H. B. Keller. *Analysis of numerical methods.* Wiley, New York, 1966.

[Joh82] F. John. *Partial differential equations.* Springer, New York, 1982.

[Mar75] G. I. Marchuk. *Methods of numerical mathematics.* Springer, New York, 1975.

[Mar76] D. Marsal. *Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen in Wissenschaft und Technik.* BI, Mannheim, 1976.

[MM78] T. Meis und U. Markowitz. *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen.* Springer Hochschultext. Springer, Berlin, 1978.

[MM81] T. Meis und U. Marcowitz. *Numerical solution of partial differential equations.* Springer, New York, 1981.

[OV85] J. M. Ortega und R. G. Voigt. *Solution of partial differential equations on vector and parallel computers.* SIAM, Philadelphia, 1985.

[PW67] M. H. Protter und H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[RB84] J. R. Rice und R. F. Boisvert. *Solving elliptic problems using ELLPACK.* Springer, 1984.

[Rei85] H.-J. Reinhardt. *Analysis of approximation methods for differential and integral equations.* Springer, New York, 1985.

[Rei96] H.-J. Reinhardt. Die Methode der Finiten Elemente. Vorlesungsskriptum WS 1995/6. Fachbereich Mathem., Univ.-GH Siegen, 1996.

[Rek82] K. Rektorys. *The method of discretization in time and partial differential equations.* Reidel, Dortrecht, 1982.

[RF60] V. S. Rjabenki und A. F. Filippow. *Über die Stabilität von Differenzengleichungen.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.

[RM67] R. D. Richtmyer und K. W. Morton. *Difference methods for initial–value problems.* Interscience, New York, 1967.

[Sch86] H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik.* Teubner, Stuttgart, 1986.

[Sew88] G. Sewell. *The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations.* Academic Press, New York, 1988.

[SH82] F. Stummel und K. Hainer. *Praktische Mathematik.* Teubner, Stuttgart, 1982.

[Smi78] G. D. Smith. *Numerical solution of partial differential equations. Finite difference methods.* Clarendon Press, Oxford, 1978.

[TGK85] W. Törnig, M. Gipser, und B. Kaspar. *Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik. Differenzenverfahren, Finite Elemente und die Behandlung großer Gleichungssysteme.* Teubner, Stuttgart, 1985.

[Tö79] W. Törnig. *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Band 1 u. 2.* Springer, Berlin, 1979.

[Vai76] G. Vainikko. *Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden.* Teubner–Verlag, Leipzig, 1976.

[Var62] S. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* Englewood Cliffs, 1962.

[Zau83] E. Zauderer. *Partial differential equations of applied mathematics.* Wiley, New York, 1983.

# Index


Differentialgleichung
  hyperbolische
    erster Ordnung, 5

Abbildung
  selbstadjungierte, 84
  symmetrische, 84
Abschneidefehler, 10
Assemblierung, 157

Bocksprung–Schema, 119, 129
Bocksprung–Verfahren, 139

Cauchy–Schwarzsche Ungleichung, 151
Charakteristiken der Wellengleichung, 95
charakteristische Gleichung, 56
charakteristische Matrix, 136
Courant–Friedrichs–Lewy–Bedingung, 135, 143
Crank–Nicolson–Differenzenapproximation, 74
Crank–Nicolson–Galerkin–Verfahren, 134, 161, 163
Crank–Nicolson–Verfahren, 74, 77, 86, 128, 134, 138, 142

Dachfunktionen, 149
Diagonaldominanz, 21
Differentialgleichung
  elliptische, 2
  hyperbolische, 4, 166
  parabolische, 3
Differenzenapproximation des Laplaceoperators, 10, 49
  5–Punkt–, 159
  9–Punkt–, 26
Differenzenoperator
  diagonal dominanter, 35
  nichtnegativen Typs, 35
Differenzenoperator zweiter Ordnung
  zentraler partieller, 18
Differenzenquotient erster Ordnung
  vorwärts- und rückwärtsgenommener, 14
Differenzenquotient zweiter Ordnung
  zentraler, 151
  zentraler partieller, 10, 17
Differenzenstern, 66, 68
Diskretisierungsfehlerabschätzung, 44, 53, 82, 88, 131
Douglas–Verfahren, 75, 77, 89

Einflußgebiet, 96
Elliptizitätsbedingung, 3
Energie
  elastische, 152
  potentielle, 153
erzwungene Schwingung, 57, 60
Eulersche Differentialgleichung, 153

Fehlerabschätzung, 155
Fehlergleichung, 131, 151, 155
FEM, 150
Formel von d'Alembert, 96
Formel von Douglas, 75
Fourierkoeffizienten
  diskrete, 136
Friedrichs–Verfahren, 117, 118, 129, 135, 138, 143
Funktion
  bilineare, 156
  charakteristische, 138
  diskret harmonische, 11, 36
  harmonische, 2
  subharmonische, 36
  superharmonische, 36

Galerkin Approximation, 150
Galerkin Methode, 150
Galerkin–Verfahren
  halbdiskretes, 161, 166
Gaußsches Eliminationsverfahren, 45, 55
Gesamtsteifigkeitsmatrix, 159
Gitter
  zusammenhängendes, 35
Gittermenge
  Innere, 9
  Rand, 9
Gitterpunkt, 149
Gleichungssystem
  tridiagonales lineares, 68
Gramsche Matrix, 155

Hamiltonsches Prinzip, 153

Kastenschema, 123
Konvergenzsatz, 53, 82, 83, 89, 91

Laplace–Gleichung, 2
Laplace–Operator, 152
Laplacescher Differenzenoperator, 10, 18
Lastvektor, 150
Lax–Wendroff–Schema, 114
Lax–Wendroff–Verfahren, 118, 129, 135, 138, 143
Linienmethode, 161
lokale Basis, 150

$M$–Matrix, 39
Matrix
  Bandbreite, 45
  Bandtyp $(m_1, m_2)$, 45
  gleichmäßig diagonalisierbare, 132
  Kondition einer, 160
Membran
  elastische, 152
Methode der Finiten Elemente, 150, 153
Minimierungsproblem, 148, 153
Mittelwerteigenschaft, 19
Mittelwertgleichung, 11
Mittelwertoperator, 36
  9–Punkte–, 158

Neumann–Problem, 26
Neumannsche Reihe, 70, 83

Orthogonalitätsrelation, 57

Parabolische Probleme, 160
Parseval–Beziehung, 136
Partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, 5
  elliptische, 5
  hyperbolische, 5
  parabolische, 5
Plattengleichung, 3
Poisson–Gleichung, 2
Potentialgleichung, 2

Randbedingungen, 2
  Dirichlet–, 2, 6
  Neumann–, 2, 6
  Robbin–, 2
Randwertaufgabe
  2–Punkt–, 147
Randwertproblem
  erstes
    der Potentialtheorie, 152
Ritz Methode, 150
Ritzsches Projektionsverfahren, 153

Schrittweitenverhältnis, 163, 167
Schwaches Maximumprinzip, 37
schwingende Membran, 59
schwingende Saite, 56
Separation der Variablen, 3, 7
Simpson–Formel, 151
Spektralkonditionszahl, 59
Spektralnorm, 139
Spektralradius, 84, 139
stabil, 130
Stabilität, 122, 124, 130
Stabilitätsabschätzung, 164, 168
Stabilitätsbedingung, 73
Stabilitätssatz, 42
Stabilitätsungleichung, 82, 83, 88, 130
Starkes Maximumprinzip, 36
Steifigkeitsmatrix, 150
Superposition, 4

Träger, 150
Triangulierung
  gleichförmige, 159

Ungleichung
  diskrete Friedrichssche, 51
Ungleichung von Poincaré–Friedrichs, 152
Unterteilung, 148
upwind scheme, 21

Variationsgleichung, 53, 148, 153
Variationsproblem, 153
  endlichdimensionales, 150
Verfahren
  bedingt stabiles, 142
  positives, 132
  unbedingt stabiles, 142
  von positivem Typ, 132
Verstärkungsfaktoren, 138
Verstärkungsmatrizen, 137
vollständiges Orthogonalsystem, 57
von–Neumann–Bedingung, 140

Wärmeleitungsgleichung, 3, 79, 127, 138, 160

schwache Lösung, 161
variationelle Formulierung, 161
Wärmeleitungsproblem, 63
Wellengleichung, 4, 105, 129, 138, 166
charakteristische Form, 105
homogene, 95
inhomogene, 99
inhomogene verallgemeinerte, 166
variationelle Formulierung, 166

Zeilensummenkriterium
starkes, 70