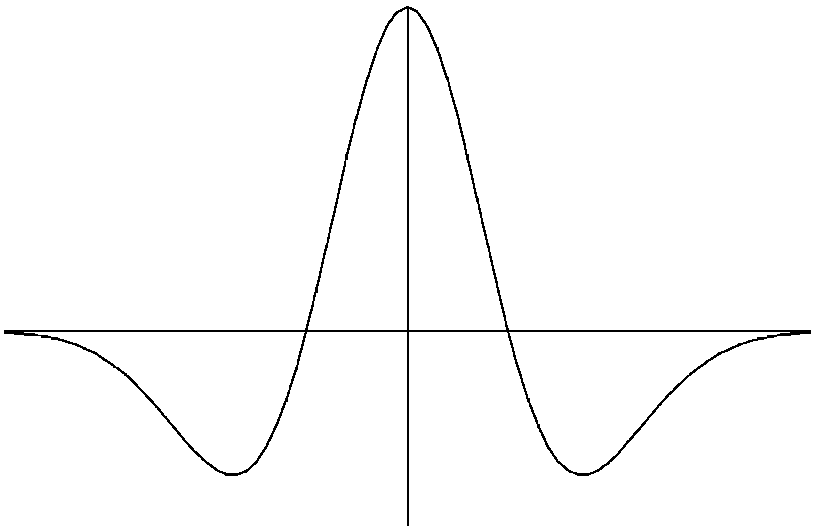
Splines und Wavelets

Karl Scherer



Universität Bonn
Institut für Angewandte Mathematik
Abteilung für Funktionalanalysis und
Numerische Mathematik

Gesetzt mit LaTeX
von Josef Schugt

Vorabversion vom 12. März 1997

Vorwort

Dieses Skript basiert auf einer zweisemestrigen Vorlesung, die ich im Wintersemester 1995/96 und im Sommersemester 1996 an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität gehalten habe.

Was Sie hier lesen ist eine Version die möglicherweise noch ergänzt wird. Die jeweils aktuellste Version finden Sie im Internet unter `http://iam.uni-bonn.de/~scherer`

. Wenn sie Bemerkungen über das Skript machen wollen, dann senden Sie sie bitte als E-Mail an Karl Scherer, und zwar an eine der folgenden E-Mail-Adressen:

- `scherer@iam.uni-bonn.de`,
- `unm11c@iuni-bonn.de`,

Bei vermeintlichen Rechtschreibefehlern möge der Leser zunächst ein Wörterbuch mit der neuen Rechtschreibung konsultieren, z. B. [SSWD96] oder [HG96].

Dieser Text wurde zum größten Teil unter Verwendung von 4TEX geschrieben. 4TEXist die TEX-Distribution der $\mathcal{NTG}$ (der Nederlandstalige TEX Gebruikersgroep).

Es wurden ferner Makros des $\mathcal{AMS}$-LATEX-Pakets und (zu einem sehr kleinen Teil) auch Makros des Springer-Verlags verwendet.

Danksagungen

Zunächst sei denen gedankt, die zum Inhalt dieses Skripts beigetragen haben:

- den Hörern der Vorlesung für die vielen Bemerkungen , durch die Verständnisschwierigkeiten ausgeräumt und manche Probleme bei Beweisen aufgedeckt wurden,
- insbesondere Herrn stud. phys. Josef Schugt ,der nicht nur mit viel Sachverstand die TEXnische Seite dieses Skripts übernommen und durchgeführt hat, sondern auch wertvolle Informationen zu Wavelets aus dem Internet beigesteuert hat.

Ferner seien alle jene dankend erwähnt, die durch die Entwicklung von Programmen, Makropaketen und ähnlichem die Erstellung dieses Skripts in der vorliegenden Form erst möglich gemacht haben.

- An erster Stelle ist hier Donald Knuth zu nennen,der TEX entwickelt und für alle frei verfügbar gemacht hat.
- Dann ist Leslie Lamport für die Programmierung von LATEXzu erwähnen. Sein Makro-Paket hat die Benutzung von TEX weiter vereinfacht.
- Die American Mathematical Society hat nach der Entwicklung von $\mathcal{AMS}$-TEX noch $\mathcal{AMS}$-LATEX herausgebracht und damit die einfache Textformatierung von LATEX und den einfachen Formelsatz von $\mathcal{AMS}$-TEX vereinigt .

- Kristoffer H. Rose hat durch sein Paket XY-picdas Zeichnen einer Reihe von Diagrammen wesentlich vereinfacht.
- Mit dem Programm von Thomas Williams und Colin Kelley für `Gnuplot` wurden alle Zeichnungen hergestellt.
- Piet van Oostrum lieferte `fancyhdr`, ein Paket zum verändern von Kopf- und Fußzeilen und den Artikel "Page layout in LaTeX".
- Die Artikel von Kees van der Laan in den Minutes and Appendices der $\mathcal{NTG}$ waren sehr hilfreich.
- Philip Taylor löste durch `path` das Problem , URLs im Text zu verwenden ohne den Zeilenumbruch von Hand durchführen zu müssen.
- Das Paket `setspace` von George D. Greenwade ersparte die Einstellung der Zeilenabstände von Hand .

Zur Rechtschreibung

Bekanntlich tritt am 1. August 1998 die neue Rechtschreibung in Kraft. Im aktuellen Duden [SSWD96] sind bereits die neuen Schreibweisen angegeben. Daher versuchen wir uns bereits an die neue Regelung zu halten. Wenn gelegentlich ein Wort nicht in der neuen Auflage des Dudens zu finden war haben wir zum einen die amtlichen Regeln und zum anderen das Wörterbuch von Bertelsmann [HG96] konsultiert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

1.1 Eine kurze Geschichte der Wavelets 7
1.1.1 Die Zeit vor 1930 7
1.1.2 Die Zeit von 1960 bis 1980 8
1.1.3 Die Zeit nach 1980 9
1.2 Literatur 9
1.3 Quellen für Informationen über Wavelets 9
1.3.1 Software zu Wavelets 9
1.3.2 Bücher mit Programmcode 10
1.3.3 Einige WWW-Seiten 10
1.3.4 Den Wavelet Digest abonnieren 11
1.4 Einige Grundlagen. 11
1.4.1 Algorithmus 11
1.4.2 Mathematische Grundlagen 11

2 Fourieranalysis und Approximation **15**

2.1 Approximation in Sobolevräume 15
2.1.1 Approximation mit Faltungsintegralen 15
2.1.2 Fehlerordnung der Approximation 17
2.1.3 Charakterisierung von Sobolev-Räumen 20
2.2 Grundlagen der Fourieranalysis 23
2.2.1 Fouriertransformation in L_1 23
2.2.2 Fouriertransformation in L_2 29
2.2.3 Poisson-Summationsformel 32
2.3 Approximation mit bandbegrenzten Funktionen 35
2.3.1 Grundlagen 35
2.3.2 Eigenschaften von bandbegrenzten Funktionen 38
2.3.3 Abtasttheorem für bandbegrenzte Funktionen 42
2.3.4 Approximation von nicht bandbegrenzten Funktionen 46
2.4 Fourieranalysis und Distributionen 52
2.4.1 Zur Distributionstheorie 52
2.4.2 Sobolev-Räume und Fouriertransformation 58
2.4.3 Besselpotentialräume 60
2.5 Anhang 63
2.5.1 Satz von Paley-Wiener 63
2.5.2 Approximationsgüte bandbegrenzter und trigonometrischer Funktionen 66

3 Translationsinvariante Räume **73**
3.1 Allgemeine Theorie 73
3.1.1 Charakterisierung 73
3.1.2 Basen 76
3.1.3 Beste und Kardinale Approximation 83
3.2 Approximation mit Splines 89
3.2.1 Univariate Splines 89
3.2.2 Kardinale Splines 95
3.2.3 Euler-Frobenius-Polynome und Anwendungen 100

4 Multi-Resolution-Analysis und Wavelets **107**
4.1 Kontinuierliche Wavelet-Transformationen 107
4.1.1 Gefensterte Fouriertransformation(WFT) 107
4.1.2 Kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT) 110
4.1.3 Mehr zur kontinuierlichen WT 116
4.2 Multi-Resolution-Analysis (MRA) 118
4.2.1 Axiome einer MRA 118
4.2.2 Beziehung zwischen MRA und Wavelets 122
4.2.3 Charakterisierung von Wavelets 126
4.2.4 Existenz von Wavelets 130
4.3 Konstruktion spezieller Wavelets 136
4.3.1 Charakterisierung von Pre-Wavelets 136
4.3.2 Pre-Wavelets auf Spline-Basis 143
4.3.3 Wavelets vom Paley-Littlewood-Typ 147
4.4 Praktische Aspekte einer MRA 149
4.4.1 Zerlegungs- und Rekonstruktions-Algorithmen 149
4.4.2 MRA und diskrete Filterungsverfahren 153
4.4.3 Zum Problem der Ausgangs-Approximation. 155
4.4.4 Unterteilungsalgorithmen 156
4.5 Konstruktion von glatten Wavelets mit kompaktem Träger 161
4.5.1 Bedingungen an das Symbol der Skalierungsgleichung 161
4.5.2 Konstruktion der Daubechies–Wavelets 162
4.5.3 Glattheit und verschwindende Momente 166

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Eine kurze Geschichte der Wavelets

1.1.1 Die Zeit vor 1930

Es gibt in der Geschichte der Mathematik eine ganze Reihe von Ursprüngen der Wavelet-Analysis [Mey93].Ein wichtiger Teil dieser Arbeit ist in den dreißiger Jahren geleistet worden. Zu jener Zeit waren die Ergebnisse dieser Anstrengungen allerdings noch nicht als Teile einer einheitlichen Theorie zu erkennen.

Schon lange vor 1930 wurde der für die Entwicklung der Wavelets wichtigste Zweig der Mathematik durch Joseph Fourier (1807) mit seiner Theorie der Frequenzanalyse – die heute unter dem Namen *Fourieranalysis* bekannt ist – begründet. Er behauptete, dass jede 2π-periodische Funktion f(x) die Summe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

ihrer Fourierreihe ist. Die Koeffizienten a_0, a_k und b_k werden berechnet als

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx.$$

Fouriers Behauptung spielte eine wesentliche Rolle dafür, wie sich die Vorstellungen der Mathematiker über die Funktionen weiter entwickelten. Während des ganzen 19. Jahrhunderts untersuchten sie die Bedeutung von Fourierreihen und ihre Konvergenz erheblich tiefer: Es wurden viele neue orthogonale Systeme entwickelt und der Konvergenzbegriff verallgemeinert und vertieft. In letzterer Hinsicht ist vor allem K. Weierstraß zu nennen, der 1885 seinen berühmten Approximationssatz bewies. Einen Einblick in die damals übliche „Praxis der Reihen“bietet das Buch von [Run04] . In ihm wird die Idee der Spline-Funktionen zur praktischen Berechnung von Fourierreihen bereits vorweggenommen. Ein weiterer bedeutender Beitrag ist die Arbeit [] .In ihr wird von E. T. Whittaker zum ersten Mal der Begriff der “cardinal series”,der kardinalen Reihen verwendet. Diese regten I.J.Schoenberg zu seinen Pionierarbeiten auf dem Gebiet der Splinetheorie an ,die später zur Theorie der translationsinvarianten Räume führten .In [] bewies Whittaker auch den später nach Shannon benannten Abtastsatz und stellte dabei die Rolle der Sinc-Funktion heraus. Die Translate dieser Funktion bilden ein Orthonormalsystem.Dies ist eine Eigenschaft, die sie bereits zu einem Vorläufer der Wavelets macht.

Ein weiterer Hinweis auf Wavelets erschien in einem Anhang der Dissertation von A. Haar (Göttingen, 1909, erschienen als [Haa10]). Dort wurde zum ersten Mal

das Prinzip der Skalierung zur Konstruktion eines Orthonormalsystems verwendet. Eine weitere charakteristische Eigenschaft des Haar-Wavelets ist, dass es *kompakten Träger* hat, dass es also außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet. Leider sind Haar-Wavelets nicht stetig differenzierbar, was ihre Anwendbarkeit einschränkt.

Durch die Arbeit []von Haar veränderte sich jedoch der Blickwinkel von der Frequenzanalyse hin zur *Skalenanalyse*. Das bedeutet, dass $f(x)$ durch Funktionen untersucht wird, die in ihrer Größe variieren und zwar indem man von einer Funktion ausgeht, diese um einen gewissen Betrag verschiebt und ihre Skala ändert. Die Funktion wird dann zur Approximation des Signals verwendet. Dann wird dieser Vorgang wiederholt. Es wird wieder von der neuen Funktion ausgegangen, sie wird verschoben, skaliert und für eine neue Näherung benutzt. Es stellt sich heraus, dass diese Art der Skalen-Analyse weniger empfindlich gegenüber Rauschen ist, denn es misst die mittleren Fluktuationen des Signals auf verschiedenen Skalen.

Die dreißiger Jahre

Das Verständnis für das Konzept der verschiedenskaligen Basisfunktionen stellt den Schlüssel für die Entwicklung der Wavelets dar.

In den dreißiger Jahren wurde diese Idee der Darstellung von Funktionen durch *verschiedenskalige Basisfunktionen* (englisch: scale-varying basis functions [1]) von mehreren Gruppen unabhängig voneinander wieder aufgegriffen.

Unter Benutzung einer mehrskaligen Basisfunktion – der haarschen Basisfunktion – untersuchte Paul Levy, ein Physiker der dreißiger Jahre die brownsche Bewegung, mathematisch ein zufälliges Signal (vgl. fourierschen Basisfunktionen bei der Untersuchung kleiner, komplizierter Details der brownschen Bewegung überlegen waren.

Eine weitere Forschungsanstrengung, die von Littlewood, Paley und Stein unternommen wurde ,betraf die Berechnung der Energie einer Funktion $f(x)$:

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx$$

Die Berechnung ergab verschiedene Ergebnisse, je nach dem, ob die Energie um einige wenige Punkte verteilt war oder ob sie über ein größeres Intervall verteilt war. Das Resultat verwunderte die Wissenschaftler weil es darauf hinwies, dass die Energie möglicherweise nicht erhalten sein könnte. Die Forscher entdeckten eine Funktion, die in der Größe veriieren kann *und* die Energie (die man aus dem Energiefunktional berechnet) erhält. Ihre Arbeit lieferte David Marr in den frühen achziger Jahren die Grundlage für ein effektives Verfahren in der numerischen Bildverarbeitung.

1.1.2 Die Zeit von 1960 bis 1980

Zwichen 1960 und 1980 untersuchten die Mathematiker Guido Weiss und Ronald R. Coifman die einfachsten Elemente eines Funktionenraums, die sogenannten *Atome,* mit dem Ziel, sie für eine allgemeine Funktion zu finden und die „Bauanleitung" zu finden, die es erlaubt, aus diesen Atomen alle Elemente des Funktionenraums zu (re-)konstruieren. Im Jahr 1980 definierten Grossman und Morlet (ein Physiker und ein Ingenieur) Wavelets im Rahmen der Quantenphysik. Diese beiden Forscher

[1] **Was sind verschiedenskalige Funktionen?** Dies soll nochmals an dem Beispiel eines Signals auf $[0,1]$ erläutert werden .Wir können es dann mit Hilfe der beiden Stufenfunktionen $c_1^0\chi_{[0,1/2]}$ und $c_1^1\chi_{[1/2,1]}$ zerlegen. Dann können wir es mit Hilfe der vier Stufenfunktionen $c_2^0\chi_{[0,1/4]}$, $c_2^1\chi_{[1/4,1/2]}$, $c_2^2\chi_{[1/2,3/4]}$ und $c_2^3\chi_{[3/4,1]}$ zerlegen und so weiter. All diese Zerlegungen (und damit naürlich schon die Koeffizienten) repräsentieren das ursprüngliche Signal mit einer bestimmten Auflösung oder auf einer bestimmten Skala.

fanden eine auf der physikalischen Intuition basierenden Möglichkeit sich Wavelets vorzustellen.

1.1.3 Die Zeit nach 1980

Im Jahr 1985 trieb Stephane Mallat die Untersuchung der Wavelets mit seiner Arbeit über digitale Signalverarbeitung voran. Teilweise durch seine Ergebnisse angeregt konstruierte Yves Meyer die ersten nicht-trivialen Wavelets. Anders als die Haar-Wavelets sind die Meyer-Wavelets stetig differenzierbar, allerdings haben sie keinen kompakten Träger. Ingrid Daubechies benutzte einige Jahre später die Arbeit von Mallat ,um eine Reihe von orthonormalen Wavelet-Basisfunktionen zu konstruieren, die vielleicht die elegantesten sind und heute einen Eckpfeiler der Wavelet-Anwendung bilden.

Ausführlichere Betrachtungen zur Geschichte der Wavelets findet der Leser in [Mey93], dem die obigen Ausführungen im Wesentlichen entnommen sind.

1.2 Literatur

Wavelets. Von den folgenden Büchern sind vor allem [Chu92] und [Daub] zu empfehlen, weil die entsprechenden Teile der Vorlesung über Wavelets im Wesentlichen darauf aufbauen : [Chu92], [Dau92], [LMR94], [Mey90], [Mey93], [Kai94], [Wic96]. Ferner sei [JS94] als Übersichtsartikel empfohlen. Als Buch über das verwandte Gebiet der „Subdivision“ ist [CDM91] zu erwähnen.

Wavelet-Algorithmen. Wer sich nicht für die Wavelet-Theorie per se interessiert ,sondern in erster Linie Algorithmen für Anwendungen sucht (z.B. im Sinne der Finite-Element Methode), der kann im Wesentlichen nur auf [Wic96] und [AU96] verwiesen werden. Im Internet findet man auch (s. u.) Informationen des Institut de recherche en informatique et systèmes aléatoires (kurz: IRISA).

Splines. Aus der Fülle an Literatur zu Splines seien hier [Boo78], [Boo90], [Sch73] und [Sch81] empfohlen.

Signalverarbeitung. Standardbücher sind [Mar82] ,[Pap77]. Anwendungen der Splines werden in [Ach85], [Kra95] beschrieben.

1.3 Quellen für Informationen über Wavelets

Dieses Skript handelt in erster Linie von der mathematischen Seite der Wavelets. Zur Ergänzung sollen auch Quellen für mehr anwendungsbezogene Informationen über Wavelets angegeben werden. Die folgende Liste ist zwar nicht besonders aktuell, aber wir arbeiten daran.

1.3.1 Software zu Wavelets

In der Folge sind einige Anonymous-FTP-Adressen im Internet angegeben; Artikel finden sich dort üblicherweise in Unterverzeichnissen die `/reports` oder `/papers` heißen.

Stanford University. WaveLab ist eine Wavelet Bibliothek für Matlab und ist bei den Statistikprofessoren David Donoho und Iain Johnstone, den Studenten Jonathan Buckheti und Shaobing Chen (ebenfalls Stanford) sowie Jeffrey Scargle vom NASA-Ames Research Center erhältlich. (Für Matlab-Kenner: Die Software besteht

aus etwa 600 Skripts, M-Dateien, MEX-Dateien, Datensätzen, automatisch ablaufenden Demos und on-line Dokumentationen). Die URL lautet `ftp://playfair.stanford.edu/pub/wavelab` Arma Graps (vgl. [Gra95]) schreibt momentan an einer IDL-Version vieler dieser Prozeduren.

WavBox ist eine weitere Matlab-Wavelet-Toolbox die ebenfalls aus Stanford stammt. Informationen über WavBox kann man ebenfalls via anonymous FTP erhalten. Die URL lautet `ftp://simplicity.stanford.edu/pub/taswell`

IRISA. WaveLib ist eine C-Bibliothek mit Wavelet-Funktionen, die vom IRISA, Campus de Deaulieu, Rennes, France entwickelt wurde. Sie erzeugt Wavelets und Filter, führt Wavelet-Transformationen von ein- und zweidimensionalen Signalen durch, berechnet die Entropie, unterstützt Schwellwertverfahren und so weiter. Weiterhin enthält das Paket ein Interface zu Matlab um die Zerlegung eines Signals in der Zeit-Frequenz-Ebene darzustellen sowie weitere nützliche Wavelet-Darstellungen. WaveLib wird in einem technischen Report beschrieben den man mit anonymous FTP erhalten kann. Die URL hierzu lautet `ftp://ftp.irisa.fr/techreports/1994/PI-864.ps.Z` (Hinweise: zum entpacken (un)compress oder gzip benutzen, der Text ist in Französisch.) Der Titel des Texts lautet „Réalisation d'une Bibliothèke C de fonctions ondelettes"(Realisation einer Wavelet-Bibliothek in C).

Rice University. Das Computational Mathematics Laboratory hat Wavelet-Software zugänglich gemacht, die man per anonymous FTP erhält. Die URL lautet `ftp://cml.rice.edu/pub/software` bzw. `ftp://128.42.62.23/pub/software`

Yale University. Das Mathematics Department der Yale University hat ebenfalls Wavelet-Software über FTP zugänglich gemacht und zwar unter `ftp://pascal.math.yale.edu/pub/wavelets`, alternativ auch `ftp://128.36.23.1/pub/wavelets`

University of Missouri Einiges an Ausbildungssoftware zum Thema Wavelets kann man von der University of Missouri erhalten, die URL lautet `ftp://pandemonium.physics.missouri.edu/pub/wavelets`.

1.3.2 Bücher mit Programmcode

Zum Buch von Wickerhauser [Wic96] gibt ist eine Diskette mit C-Code erhältlich. Das Buch von Crandall [Cra94] enthält C- und Mathematica-Code. Das Tutorial von Vidakovč und Muller [VM94] enthält Mathematica Code. Die allseits bekannten Numerical Recipes in C [PTVF92a] und in FORTRAN [PTVF92b] enthalten jeweils einen kurzen Abschnitt über Wavelets. Achtung, nur die zweite Auflage enthält Wavelets!

1.3.3 Einige WWW-Seiten

Es gibt mittlerweile Unmengen von WWW-Seiten die sich mit Wavelets beschäftigen. Es folgt nur ein kleiner Auszug; empfohlen wird, eine der gängigen Suchmaschinen – also z. B. Altavista (`http://www.altavista.digital.com`), Yahoo (`http://www.yahoo.com` bzw. `http://www.yahoo.de`) oder Lycos (`http://www.lycos.com` bzw. `http://www.lycos.de`) zu verwenden um weitere Seiten zu finden.

`http://www.c3.lanl.gov/~brislan/main.html` Informationen über die Fingerabdrucks-Kompression WSQ, die vom FBI (Federal Bureau of Investigation, dem Bundeskriminalamt der Vereinigten Staaten von Amerika) benutzt wird. (Chris Brislawns)

`http://www.mat.sbg.ac.at/~uhl/wav.html` (Abteilung für Mathematik der Universität Salzburg)

`http://playfair.stanford.edu/~wavelab` Dort gibt es 'WaveLab', ein auf Matlab basierendes Software-Paket

`http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/bobl/wvlt/top.html` von der University of British Columbia, Computer Science Department

`http://www.mathsoft.com/wavelets.html` Dort gibt es Matlab Wavelet Quellen

`http://www.math.scarolina.edu/~wavelet/` Archiv mit älteren Ausgaben des 'Wavelet Digest'

`http://www.best.com/~agraps/current/wavelet.html` Eine Seite über Wavelets (Arma Graps)

1.3.4 Den Wavelet Digest abonnieren

Wenn man den Wavelet Digest abonniert (engl.: to subscribe) dann bekommt man neueste zugängliche Software beschrieben, Konferenzen über Wavelets angekündigt, erfährt von Fehlern in einigen Wavelet-Texten und erhält Antworten auf Fragen, die man sich vielleicht schon selbst gestellt hat und kann Experten fragen, die ihn ebenfalls lesen.

Man abonnieret ihn, indem man eine E-Mail mit dem Betreff [2] `subscribe` an `mailto:wavelet@math.scarolina.edu` schickt. Um das Abonnement zu beenden schickt man an die gleiche Adresse eine E-Mail mit dem Betreff `unsubscribe` gefolgt von seiner E-Mail-Adresse. Um die Adresse zu ändern muss man das Abonnement unter der alten Adresse beenden um dann mit der neuen Adresse ein neues Abonnement zu beginnen.

Preprints, Verzeichnisse und zurückliegende Ausgaben des Wavelet Digest erhält man von einem der Server. Man kann einmal FTP benutzen, die URL ist dann `ftp://ftp.math.scarolina.edu/pub/wavelets`. Zum anderen kann man auch den Gopher-Server mit der URL `gopher://gopher.math.scarolina.edu` benutzen. Schließlich kann man auch die oben angegebene WWW-Addresse des Wavelet Digest nutzen.

1.4 Einige Grundlagen.

1.4.1 Algorithmus

1.4.2 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende mathematische Sätze aufgelistet, einmal um klarzustellen, welche Aussagen als bekannt vorausgesetzt werden, zum anderen um die Bedeutungen der verwendeten Symbole zu definieren.

Mit $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, seien im Folgenden die Räume der auf $\mathbb{R}^m$ zur p-ten Potenz lebesgue-integrierbaren Funktionen bezeichnet. Jeder dieser Räume ist ein Banachraum mit Norm $\|f\|_p$, die wie folgt definiert ist:

für $p < \infty$ durch

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1.1a}$$

und für $p = \infty$ als

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)|. \tag{1.1b}$$

[2] Subject

Zur Erinnerung: Das wesentliche Suprenum ess sup einer Funktion f ist definiert als

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^m} |f(x)| = \inf\{r \in \mathbb{R}_+ | \alpha_f(r) = 0\},$$

wobei α_f die für alle $r \geq 0$ durch

$$\alpha_f := \big|\{x \in \mathbb{R} : f(x) > r\}\big| \geq 0$$

definierte Verteilungsfunktion von f ist. ♢

Gelegentlich werden wir Lebesgue-Räume auch auf Teilgebieten des $\mathbb{R}^m$, z. B. im eindimensionalen Fall ($m = 1$) auf Intervallen, betrachten und dies dann explizit in der Norm kennzeichnen. Das gleiche gilt, wenn wir gelegentlich andere Maße als das übliche Lebesgue-Maß verwenden.

Ferner betrachten wir Räume von stetigen Funktionen auf Gebieten $\Omega \in \mathbb{R}^m$ und bezeichnen sie mit $C(\Omega)$. Die Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit $C_0(\Omega)$ bezeichnet, die Menge aller k-fach differenzierbaren Funktionen mit $C^k(\Omega)$ und die Menge aller Funktionen in $C^k(\Omega)$ mit kompaktem Träger als $C_0^k(\Omega)$, wobei auch $k = \infty$ zugelassen ist. Falls Ω kompakt ist, definieren wir die Norm auf Ω wie üblich als die Suprenumsnorm und bezeichnen sie mit $\|.\|_{\infty,\Omega}$.

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir den Raum $C(\mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\mathbb{R}^m)$ aller gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}^m$ beschränkten Funktionen mit $CB(\mathbb{R}^m)$.

Wichtige Ungleichungen für L_p-Räume sind die *Hölder-Ungleichung*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}, \tag{1.2}$$

wobei an p und p' die Bedingung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

zu stellen ist und die *Minkowski-Ungleichung*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} |F(x,\cdot)|\,dx \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^m} \|F(x,\cdot)\|_p \,dx, \tag{1.3}$$

die im Extremfall in die übliche Dreiecksungleichung für L_p-Normen übergeht. Ein wichtiger Spezialfall der Hölder-Ungleichung ist die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* für $p = p' = 2$. Sie gilt auch allgemeiner für Skalarprodukte im Hilbert-Raum.

Wichtig ist ferner der Begriff der Faltung zweier Funktionen auf dem $\mathbb{R}^m$.

Definition 1.1. *Seien f und g zwei messbare Funktionen. Dann ist ihre Faltung $f * g$ punktweise definiert als*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-u)g(u)\,du. \tag{1.4}$$

Die Existenz dieses Integrals fast überall und der Beweis dafür, dass $f * g \in L_p(\mathbb{R}^m)$ folgt im Fall $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $g \in L_p(\mathbb{R}^m)$ aus der verallgemeinerten Minkowskiungleichung. Ganz allgemein gilt die Young-Ungleichung ([SW71], Seite 178)

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \, \|g\|_r, \tag{1.5}$$

wobei jetzt

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$$

zu fordern ist.

Die Grundlage für den Beweis von (1.3) und (1.5) bildet der

Satz 1.1 (Fubini). *Sei $f(x,y)$ eine messbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^{n+m}$ und wenigstens eines der drei Integrale*

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\,dx\,dy \tag{1.6a}$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\,dx \right) dy \tag{1.6b}$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\,dy \right) dx \tag{1.6c}$$

sei endlich. Dann gelten

1. *$f(\cdot,y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^m$,*
2. *$f(x,\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$,*
3. *$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)\,dx \in L_1(\mathbb{R}^m)$,*
4. *$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot,y)\,dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und*
5. *$I_1 = I_2 = I_3$.*

Schließlich sei noch erinnert an den grundlegenden approximationstheoretischen

Satz 1.2. *Der Raum der einfachen Funktionen in $L_p(\Omega)$ und der Raum $C_0(\Omega)$ sind dicht in allen Räumen $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.*

Eine ausführliche Darstellung der vorangegangenen Ergebnisse enthält [Ada75], der vorangegangene Satz beispielsweise findet sich dort in Theorem 2.13 und Bemerkung 2.14. Bezüglich der klassischen Ungleichungen sei auf [HLP88] hingewiesen.

Da wir im Weiteren Approximation vor allem in Hilbert-Räumen betreiben werden, seien auch einige grundlegende Tatsachen aus diesem Gebiet aufgelistet.

Satz 1.3 (Beste Approximation im Hilbert-Raum).

1. *Sei X ein (komplexer) Hilbert-Raum und M ein Unterraum von X. Existiert zu $f \in X$ eine beste Approximation $g^* \in M$, d. h.*

   $$\|f - g^*\| = \operatorname{dist}(f; M)_X := \inf_{g \in M} \|f - g\|,$$

   so gilt notwendig

   $$f - g^* \perp M, \ \text{d. h.}\ (f - g^*, g) = 0 \qquad \forall g \in M.$$

   Es existiert höchstens ein solches Element $g^* \in M$. Ist M zusätzlich abgeschlossen, so existiert genau eine beste Approximation g^* zu f.

2. *Ist M endlichdimensional mit $M = \operatorname{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ und linear unabhängigen φ_i, so existiert zu jedem $f \in X$ immer genau eine beste Approximation φ^* mit*

$$\varphi^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \varphi_i, \qquad \sum_{i=1}^n \alpha_i^* (\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \qquad 1 \le i \le n.$$

   Sind die $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ orthonormiert, so gilt für den i-ten Fourierkoeffizienten $\alpha_i = (f, \varphi_i)$.

3. *Ist M unendlich-dimensional und $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ ein Orthonormalsystem, so sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

   - *Auf M gilt die Parseval-Identität, d. h.*

$$\sum_{i=1}^\infty |(f, \varphi_i)|^2 = \|f\|^2$$

     für alle $f \in M$.

   - *$\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ ist ein Orthonormalsystem für M, d. h.*

$$f = \sum_{i=1}^\infty (f, \varphi_i)\varphi_i$$

     für jedes $f \in M$.

   - *$\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ ist vollständig bzw. total in M, d. h. aus $(f, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in M$ und $f \in M$ folgt $f = 0$.*

Der für das Folgende interessanteste Punkt ist Punkt 3), worin die Approximation mit unendlich-dimensionalen Unterräumen behandelt wird. Wir werden insbesondere sehen, dass ein solches M ein echter abgeschlossener Unterraum von X sein kann.

Kapitel 2

Fourieranalysis und Approximation

2.1 Approximation in Sobolevräume

2.1.1 Approximation mit Faltungsintegralen

An den Anfang stellen wir ein fundamentales Hilfsmittel der Approximationstheorie, das schon von Weierstraß eingeführt wurde, nämlich die Approximation von Funktionen durch Integraloperatoren mit geeigneten Kernen. Allgemein haben solche Operatoren die Form

$$I(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(u)K(x,u)\,du, \qquad f \in L_p(\mathbb{R}^m),$$

mit geeignetem Kern $K(x,u)$. Hier betrachten wir die speziellere Form der *Dirac-Folgen*. Dazu definieren wir zu gegebenem $\varphi(u) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ die Familie von Kernen

$$\varphi_\varrho(u) := \frac{1}{\varrho^m}\,\varphi\left(\frac{u}{\varrho}\right)$$

und setzen

$$I_\varrho(f;x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-u)\,\frac{1}{\varrho^m}\,\varphi\left(\frac{u}{\varrho}\right)du = (f * \varphi_\varrho)(x). \tag{2.1}$$

Im Fall gerader Kerne φ, d. h. $\varphi(u) = \varphi(-u)$, kann man $f(x-u)$ durch $f(x+u)$ ersetzen.

Satz 2.1. (Konvergenz von Diracfolgen) *Sei $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, $\delta > 0$. Dann definiere*

$$\kappa(t) := \int_{|u|>t} |\varphi(u)|\,du, \tag{2.2a}$$

$$\omega(f;\delta)_p := \sup_{|h|\le\delta} \|f(x+h) - f(x)\|_p\,; \tag{2.2b}$$

$\omega(f;\delta)_p$ heißt Stetigkeitsmodul erster Ordnung.

1. *Es gilt*

$$\left\| I_\varrho(f) - \left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(u)\,du\right) f \right\|_p \le \|\varphi\|_1 \omega(f;\delta)_p + 2\|f\|_p\,\kappa\left(\frac{\delta}{\varrho}\right). \tag{2.3}$$

2. Falls $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(u)\,du = \alpha$, *dann folgt wegen* $\lim_{t\to\infty} \kappa(t) = 0$, *dass*

$$\lim_{\varrho\to 0} \|I_\varrho(f) - \alpha f\|_p = 0. \tag{2.4}$$

Beweis. Zu (1):

$$\begin{aligned} |I_\varrho(f;x) - \alpha f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x - v\varrho)\,dv - \alpha f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(v) \big[f(x - v\varrho) - f(x) \big]\,dv \right|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung, siehe (1.3), ergibt sich

$$\begin{aligned} \|I_\varrho(f) - \alpha f\|_p &\le \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(v)|\, \|f(\cdot - v\varrho) - f(.)\|_p\,dv \\ &\le \int_{|v|\le \delta/\varrho} |\varphi(v)|\, \|f(\cdot - v\varrho) - f(.)\|_p\,dv \\ &+ \int_{|v|>\delta/\varrho} |\varphi(v)|\, \|f(\cdot - v\varrho) - f(.)\|_p\,dv \\ &\le \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(v)|\, \omega(f;\delta)_p\,dv + 2\kappa\left(\frac{\delta}{\varrho}\right)\|f\|_p. \end{aligned}$$

Damit ist (2.4) bewiesen.

Zu (2): Wähle δ so klein, dass $\omega(f;\delta)_p \le \varepsilon$ und anschließend ϱ so klein, dass $\kappa(\delta/\varrho) \le \varepsilon$ folgt. Dazu benötigt man, dass $\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta)_p = 0$. Wäre dies aber nicht der Fall, so gäbe es ein festes $\varepsilon > 0$ und eine Folge von $h_n \in \mathbb{R}^m$ mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, so dass $\|f(\cdot + h_n) - f(\cdot.)\|_p \ge \varepsilon$ für alle n gelten würde. Es gilt aber fast überall $\lim_{h_n\to 0} [f(x + h_n) - f(x)] = 0$ (genauer in jedem Stetigkeitspunkt x von f). Ferner gilt $\|f(\cdot + h_n) - f(\cdot)\|_p \le 2\|f\|_p$, d. h. majorisierte Konvergenz nach Lebesgue ist möglich, so dass $\lim_{n\to\infty} \|f(. + h_n) - f(.)\|_p = 0$ wäre; Widerspruch. □

Bemerkung 2.1. Die Existenz der Stetigkeitspunkte fast überall ist für $1 \le p < \infty$ nicht einfach nachzuweisen. Es sei dazu auf [SW71] verwiesen,wo dies auf Seite 12f gezeigt wird. Für $p = \infty$ hingegen betrachtet man $C(\mathbb{R}^m)$ bzw. $CB(\mathbb{R}^m)$ statt $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ und diese Schwierigkeit entfällt. ♢

Bemerkung 2.2. Ein anderer Beweis für $\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta)_p = 0$ verläuft über die Approximation von f mit stetigen Funktionen f_n mit kompaktem Träger; solche Funktionen existieren nach Satz (1.2). Dann schätzt man ab:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_p &\le 2\|f - f_n\|_p + \|f_n(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p, \\ \omega(f;\delta)_p &\le 2\|f_n - f\|_p + \omega(f_n;\delta) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei man zunächst für $\|f - f_n\|_p < \varepsilon$ sorgt und dann δ (in Abhängigkeit von f_n) klein genug wählt. ♢

Bemerkung 2.3. Die Abschätzungen (2.3) und (2.4) können für die Stetigkeitspunkte von f zu punktweisen Aussagen verschärft werden (siehe oben). Damit ist die gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz der $I_\varrho(f)$ ist für stetige f leicht zu

zeigen. Im Stetigkeitspunkt x mit $|f(x-u)-f(x)| \le \varepsilon$ für $|u| \le \delta$ folgt nämlich

$$\begin{aligned}|I_\varrho(f;x)-\alpha f(x)| &\le \int_{|v|\le\delta/\varrho} |\varphi(v)|\,|f(x-v\varrho)-f(x)|\,dv \\ &\quad + |f(x)| \int_{|v|>\delta/\varrho} |\varphi(v)|\,dv \\ &\quad + \int_{|v|>\delta/\varrho} |\varphi(v)|\,|f(x+v\varrho)|\,dv \\ &\le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(v)|\,dv + |f(x)|\kappa\Big(\frac{\varrho}{\delta}\Big) + \sup_{|v|\ge\delta/\varrho} |\varphi(v)| \int_{\mathbb{R}^m} |f(u)|\,du\end{aligned}$$

Falls nun zusätzlich noch $\lim\limits_{|u|\to\infty} |\varphi(u)| = 0$, dann argumentiere zunächst mit von ε und x abhängigem δ und wähle anschließend $|\varrho|$ so klein, dass

$$|f(v)|\kappa_\varrho(\delta) \le \varepsilon, \qquad\qquad \|f\|_1 \le \varepsilon \sup_{|v|\ge\delta/\varrho} |\varphi(v)|.$$

♢

Korollar 2.1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt*

$$\lim_{\rho\to 0} I_\varrho(f;x) = \alpha f(x)$$

in jedem Stetigkeitspunkt x von f.

2.1.2 Fehlerordnung der Approximation

Man kann nun die Frage stellen , wie gut $I_\varrho(f;x)$ für $\varrho \to 0$ die Funktion $f(x)$ approximiert. Dazu dient folgender Satz, der als grundsätzliche Idee die Einführung von Momenten des Kerns verwendet.

Satz 2.2. (Approximationsordnung) *Sei $\varphi_\varrho(u) = \varrho^{-m}\varphi(u/\varrho)$ und $I_\varrho(f;x)$ wie oben mit $\varphi(u) \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Weiter gelte die Momentenbedingung*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(u)\,du = 1, \qquad\qquad \int_{\mathbb{R}^m} u^\alpha \varphi(u)\,du = 0 \tag{2.6}$$

für alle α mit $0 < |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \le r$. Ferner sei das absolute Moment der Ordnung $r+1$ endlich,d.h.

$$\mu_{r+1} := \int_{\mathbb{R}^m} |u|^{r+1}|\varphi(u)|\,du < \infty. \tag{2.7}$$

Dann gilt für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ (und $\varrho > 0$ klein) die Abschätzung

$$\|I_\varrho(f) - f\|_p \le (\mu_r + \mu_{r+1})\varrho^r \left(\sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!}\omega\Big(f^{(\alpha)};\varrho\Big)\right).$$

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass aus $\mu_{r+1} < \infty$ auch für $1 \le l \le r$

$$\mu_l = \int_{\mathbb{R}^m} |u|^l|\varphi(u)|\,du < \infty$$

folgt, denn es gilt

$$\mu_l \le \int_{|u|\le 1} |\varphi(u)|\,du + \int_{|u|\ge 1} |u|^{r+1}|\varphi(u)|\,du \le \mu_0 + \mu_{r+1}. \tag{2.8}$$

Weiterhin gilt $\int_{\mathbb{R}^m} \varrho^{-m}\varphi(u/\varrho)\,du = 1$ und somit folgt

$$I_\varrho(f;x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\varrho(u)[f(x-u) - f(x)]\,du$$

Wende dann auf $\Phi(t) := f(x-ut) - f(x)$, $0 \le t \le 1$, die Taylorformel an. Mit der Kettenregel erhält man ($r \ge 1$)

$$\begin{aligned}
f(x-u) - f(x) = \Phi(1) - \Phi(0) &= \sum_{l=1}^{r-1} \frac{\Phi^{(l)}(0)}{l!} + \int_0^1 \frac{s^{r-1}}{(r-1)!}\Phi^{(r)}(s)\,ds \\
&= \sum_{0<|\alpha|<r} (-u)^\alpha \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} \\
&+ \sum_{|\alpha|=r} r\frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-1} f^{(\alpha)}(x-u+su)\,ds \\
&= \sum_{0<|\alpha|\le r} (-u)^\alpha \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} \\
&+ r\sum_{|\alpha|=r} \frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-1}\Big[f^{(\alpha)}(x-u+su) - f^{(\alpha)}(x)\Big]\,ds \\
&\equiv P_r(x,u) + R(x,u).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt nun (die Integrale sind wohldefiniert im L_1-Sinn)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\varrho(u)P_r(x,u)\,du = \sum_{0<|\alpha|\le r} \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^m} (-u)^\alpha\,\varphi\Big(\frac{u}{\varrho}\Big)\,\frac{du}{\varrho^m} = 0,$$

so dass

$$I_\varrho(f;x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\varrho(u)R(x,u)\,du.$$

Mit (1.3), der Minkowski-Ungleichung für Normen, folgt

$$\|I_\varrho(f) - f\|_p \le \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi_\varrho(u)|\,\|R(.\,,u)\|_p\,du.$$

Die innere Norm schätzen wir wieder mit der Minkowski-Ungleichung ab, und betrachten u fest, $u^\alpha \le \max|u_i|^{|\alpha|}$:

$$\begin{aligned}
\|R(\cdot,u)\|_p &\le r\sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^r}{\alpha!} \left\| \int_0^1 s^{r-1} \left| f^{(\alpha)}\big(\cdot + (s-1)u\big) - f^{(\alpha)}(\cdot)\right| ds \right\|_p \\
&\le r\sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^r}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-1} \left\| f^{(\alpha)}\big(\cdot + (s-1)u\big) - f^{(\alpha)}(\cdot)\right\|_p ds \\
&\le r\sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^r}{\alpha!}\omega\Big(f^{(\alpha)};|u|\Big) \int_0^1 s^{r-1}\,ds.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|I_\varrho(f) - f\|_p &\le \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi_\varrho(u)| \sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^r}{\alpha!}\,\omega\Big(f^{(\alpha)};u\Big)\,du \\
&= \varrho^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^m} |v|^r\,|\varphi(v)\,|\omega\Big(f^{(\alpha)};|v|\varrho\Big)\,dv
\end{aligned}$$

Nun kann man allgemein

$$\omega(f;\lambda h)_p \le (\lambda+1)\,\omega(f;h)_p, \tag{2.9}$$

zeigen ,denn

$$\begin{aligned}\omega(f;\lambda h)_p &= \sup_{|u|\le\lambda h} \|f(x+u)-f(x)\|_p \le \sup_{|u|\le\lambda} \left\| \sum_{i=1}^{N} f(x+u_i)-f(x+u_0)\right\|_p \\ &\le N \sup_{|v|\le h} \|f(v+h)-f(v)\|,\end{aligned}$$

wobei $u_N \equiv u$, $u_0 = 0$ und die u_i, $i = 1,\dots,N-1$, Punkte mit Abstand h auf der Strecke zwischen x und $x+u$ mit $|u_{N-1}-u_N| \le h$ sind. Dann gilt $(N-1)h \le \lambda h$ und daher (2.9). Dies angewendet (mit $\lambda = |v|\varrho$) ergibt

$$\|I_\varrho(f)-f\|_p \le \varrho^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!}\omega\Big(f^{(\alpha)};h\Big)\int_{\mathbb{R}^m} |v|^r\left(1+\varrho\frac{|v|}{h}\right)|\varphi(v)|\,dv.$$

Wähle dann $h = \varrho$ und es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.4. Im Fall $r = 0$ erhält man mit

$$R(x,u) = -\sum_{i=1}^{m} u_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} f(x-u+su)\,ds,$$

dass

$$\|I_\varrho(f)-f\|_p \le \big(\|\varphi\|_1+\mu_1\big)\omega(f;\varrho)_p.$$

Aus Satz 2.1 hingegen würde man mit

$$\kappa(t) \le \int_{|u|>t} \frac{|u|}{t}|\varphi(u)|\,du \le \frac{\mu_1}{t}$$

nur

$$\|I_\varrho(f)-f\|_p \le \|\varphi\|_1\,\omega(f;\delta)_p + 2\mu_1\|f\|_p\,\frac{\varrho}{\delta}$$

folgern können, und die Ausgeglichenheit der Terme würde man nur für $\delta = \sqrt{\varrho}$ erhalten. ♢

Man kann (mit Taylor-Entwicklung oben für $r = 1$) leicht abschätzen, dass für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}\omega(f;\delta) &= \sup_{|u|\le\delta} \left\| -\int_0^1 \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial}{\partial u_i} f(x-u+su)\,ds\right\|_p \\ &\le \sup_{|u|\le\delta} \sum_{i=1}^{m} |u_i| \int_0^1 \left\|\frac{\partial}{\partial u_i} f(.-u+su)\right\|_p \le \max_{1\le i\le m}\left\|\frac{\partial}{\partial u_i} f\right\|_p \delta\end{aligned} \tag{2.10}$$

Damit ergibt sich wegen

$$(m+1)^k = k!\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}$$

aus obigem Satz der folgende

Korollar 2.2. *Die Fehlerordnung der Approximation durch I_ϱ ist $r+1$, genauer*

$$\|I_\varrho(f)-f\|_p \le \frac{m^r}{r!}\varrho^{r+1}(\mu_r+\mu_{r+1}) \sup_{|\alpha|=r+1}\left\|f^{(\alpha)}\right\|_p.$$

2.1.3 Charakterisierung von Sobolev-Räumen

Die vorangegangenen Fehler- Abschätzungen sind typisch für die Approximationstheorie und werden noch mehrmals auftreten. Es soll nun Satz 2.2 von $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ auf endlich oft differenzierbare Funktionen ausgedehnt werden. Grob gesprochen wollen wir k-fach differenzierbare Funktionen in L_p-Normen betrachten. Wünschenswert ist die Vollständigkeit der so entstehenden Räume. Diese Eigenschaft definiert die sogenannten *Sobolev-Räume*.

Definition 2.1. (Sobolev-Räume) *Die* Sobolev-Räume $W^{r,p} \equiv W^{r,p}(\mathbb{R}^m)$ *sind (für $r = 1, 2, \ldots$ und $1 \le p < \infty$) definiert als Vervollständigung von $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ im Sinne der Norm*

$$\|f\|_{p,r} := \sum_{0 \le |\alpha| \le r} \left\| f^{(\alpha)} \right\|_p ,$$

d. h. $W^{r,p}$ ist die Menge aller Funktionen f aus L_p, zu denen es eine Folge f_ε in $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ und zu jedem $|\alpha| \le r$ eine Funktion $D^\alpha f$ in L_p gibt, so dass sowohl $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f_\varepsilon\|_p = 0$ als auch $\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| D^\alpha f - f_\varepsilon^{(\alpha)} \right\|_p = 0$ gilt. In Formeln bedeutet dies

$$W^{r,p} = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}) \,\Big|\, \big(\exists \text{ Folge } f_\varepsilon \text{ in } C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \wedge \forall |\alpha| \le r \exists\, D^\alpha f \in L_p\big) : \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f_\varepsilon\|_p = 0 \wedge \lim_{\varepsilon \to 0} \|D^\alpha f - f_\varepsilon\|_p = 0 \right) \Big\}$$

Falls $p = \infty$, so setzen wir

$$W^{r,\infty} := \left\{ f \in C^r(\mathbb{R}^m) : \sum_{0 \le |\alpha| \le r} \left\| f^{(\alpha)} \right\|_\infty < \infty \right\}$$

Bemerkung 2.5. Den Funktionen $D^\alpha f$, deren Existenz in dieser Definition gefordert wird, kann eine anschauliche Deutung als sogenannte *schwache partielle Ableitungen α-ter Ordnung* von f gegeben werden. Dazu führen wir diesen Ableitungsbegriff, der von fundamentaler Bedeutung für die Analysis ist, jetzt ein. ♢

Definition 2.2. (Schwache Ableitung) *Sei $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$. Eine Funktion $f_\alpha \in L_p(\mathbb{R}^m)$ heißt* schwache (partielle) Ableitung *von f, geschrieben $f_\alpha = D^\alpha f$, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$*

$$\int_{\mathbb{R}^m} (D^\alpha f(x))\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi^{(\alpha)}(x)\,dx. \tag{2.11}$$

Die Funktionen $D^\alpha f$ existieren also nur in einem *schwachen Sinne,* nämlich mit Hilfe von glättenden Integralen. Existiert eine partielle Ableitung $f^{(\alpha)}$ im üblichen Sinne, d. h. ist $f^{(\alpha)}$ stetig, so ist (2.11) natürlich erfüllt; $f^{(\alpha)}$ ist dann auch eine Ableitung im schwachen Sinne. In diesem Zusammenhang ist von entscheidender Bedeutung

Lemma 2.1. *Existiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$ als Funktion in $L_p(\mathbb{R}^m)$,so ist sie eindeutig bestimmt (in $L_p(\mathbb{R}^m)$).*

Wir beweisen dieses Lemma nicht, sondern bemerken nur, dass diese Aussage offenbar gleichbedeutend damit ist, dass $0 = \int_{\mathbb{R}^m} g\varphi$ für $g \in L_p(\mathbb{R}^m)$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ impliziert, dass $g = 0$ fast überall gilt. Dafür wird ein Beweis im allgemeineren Rahmen der Distributionentheorie gegeben (siehe Lemma 2.17).

Die Funktionen $D^\alpha f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, deren Existenz in der Definition des Sobolev-Raumes gefordert wird, sind notwendigerweise schwache Ableitungen, denn für sie folgt mit partieller Integration

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^m} f\varphi^{(\alpha)} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^m} f_\varepsilon\varphi^{(\alpha)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} f_\varepsilon^{(\alpha)}\varphi = \int_{\mathbb{R}^m}(D^\alpha f)\varphi,$$

d. h. (2.11) ist erfüllt.Es gilt aber mehr:

die Sobolev-Räume $W^{r,p}$ bestehen genau aus den Funktionen bestehen, die schwache Ableitungen bis zur Ordnung r besitzen,d. h. die Sobolev-Räume sind dadurch charakterisiert. Bevor wir dies beweisen, zeigen wir, dass die angestrebte Ergänzung von Satz 2.2 auf L_p-Normen mittels der Sobolev-R2aume gelingt.

Korollar 2.3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 an den Kern φ gilt für $f \in W^{r,p}$*

$$\|I_\varrho(f) - f\|_p \le (\mu_r + \mu_{r+1})\varrho^r \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}\,\omega(D^\alpha f;\varrho)_p,$$

wobei die $D^\alpha f$ schwache Ableitungen von f sind.

Beweis. Mit der Folge $\{f_\varepsilon\}$ aus der vorigen Definition gilt nach (2.8)

$$\begin{aligned}
\|I_\varrho(f) - f\|_p &\le \|I_\varrho(f - f_\varepsilon)\|_p + \|I_\varrho(f_\varepsilon) - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f\|_p\\
&\le \|\varphi_\varrho\|_1\|f - f_\varepsilon\|_p + \|I_\varrho(f_\varepsilon) - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f\|_p\\
&\le \big(1 + \|\varphi\|_1\big)\|f - f_\varepsilon\|_p + \|I_\varrho(f_\varepsilon) - f_\varepsilon\|_p\\
&\le \big(1 + \|\varphi\|_1\big)\|f - f_\varepsilon\|_p\\
&\quad + (\mu_r + \mu_{r+1})\sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}\,\omega\Big(f_\varepsilon^{(\alpha)} - D^\alpha f + D^\alpha f;\varrho\Big)_p\\
&\le (\mu_r + \mu_{r+1})\sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}\,\omega(D^\alpha f;\varrho)_p\\
&\quad + 2(\mu_r + \mu_{r+1})\sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}\|f_\varepsilon^{(\alpha)} - D^\alpha f\|_p + \big(1 + \|\varphi\|_1\big)\|f - f_\varepsilon\|_p.
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme streben für $\varepsilon \to 0$ gegen 0 und damit folgt die Behauptung. □

Der Vorbereitung für den Charakterisierungssatz für Sobolev-Räumen dient auch noch folgendes

Lemma 2.2. *Sei $\varphi(x)$ wie in Satz 2.2, aber zusätzlich gelte $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $\varphi^{(\beta)} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ für $|\beta| \le r$. Dann ist $I_\varrho(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und*

$$\lim_{\varrho\to 0}\Big\|I_\varrho(f)^{(\beta)} - D^\beta f\Big\|_p = 0$$

für alle $|\beta| \le r$, falls $f \in W^{r,p}$.

Beweis. Differentiation von $I_\varrho(f;x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m}\varphi_\varrho(x-u)f(u)\,du$ zeigt $I_\varrho(f;x) \in C^\infty(\Omega)$, weil $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Nun betrachtet man die Folge f_ε aus der Definition der Sobolev-Räume. Analog zum vorherigen Korollar führt man für $|\beta| \le r$ die

Abschätzung

$$\begin{aligned}\left\| I_\varrho(f)^{(\beta)} - D^\beta f \right\|_p &\le \left\| I_\varrho(f)^{(\beta)} - I_\varrho(f_\varepsilon)^{(\beta)} \right\|_p \\ &\quad + \left\| I_\varrho(f_\varepsilon)^{(\beta)} - f_\varepsilon^{(\beta)} \right\|_p \\ &\quad + \left\| f_\varepsilon^{(\beta)} - D^\beta f \right\|_p ,\end{aligned} \tag{2.12}$$

durch, wobei man $I_\varrho(f_\varepsilon)^{(\beta)} = I_\varrho\left(f_\varepsilon^{(\beta)}\right)$, d. h. Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral beachtet. Der erste Term wird weiter abgeschätzt durch

$$\left\| I_\varrho(f)^{(\beta)} - I_\varrho(f_\varepsilon)^{(\beta)} \right\|_p = \left\| I_\varrho(f - f_\varepsilon)^{(\beta)} \right\| \le \left\| \varphi_\varrho^{(\beta)} \right\|_p \| f_\varepsilon - f \|_p$$

und

$$\left\| \varphi_\varrho^{(\beta)} \right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^m} \varrho^{|\beta|} \varrho^m \left| \varphi^{(\beta)}(\varrho u) \right| du = \varrho^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^m} \left| \varphi^{(\beta)}(v) \right| dv = \varrho^{|\beta|} \left\| \varphi^{(\beta)} \right\|_1 .$$

Zur Abschätzung des mittleren Terms in 2.12 benutzen wir die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^{(\beta)}(x-u) - f_\varepsilon^{(\beta)}(x) &= \sum_{0<|\alpha|<r-|\beta|} \frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} f_\varepsilon^{(\alpha+\beta)}(x) \\ &\quad + (r - |\beta|) \sum_{|\alpha|=r-|\beta|} \frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-|\beta|-1} f_\varepsilon^{(\alpha+\beta)}(x-u+s)\, ds. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.2 folgt dann

$$\left\| I_\varrho\left(f_\varepsilon^{(\beta)} - f_\varepsilon^{(\beta)}\right) \right\|_p \le \left(\mu_{r-|\beta|} + \mu_{r-|\beta|+1}\right) \sum_{|\alpha|=r-|\beta|} \frac{1}{\alpha!}\, \omega_1\left(f_\varepsilon^{(\alpha+\beta)}, \frac{1}{\varrho}\right)$$

Aus dieser Fehlerabschätzung folgt speziell der zweite Teil der Aussage. □

Damit kann folgende Charakterisierung der Sobolev-Räume gegeben werden:

Satz 2.3. *Für $1 \le p < \infty$ besteht der Sobolev-Raum $W^{r,p}$ aus der Menge aller Funktionen $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, für die für alle $|\beta| \le r$ die schwachen Ableitungen $D^\beta f$ in $L_p(\mathbb{R}^m)$ existieren.*

Beweis. Wie schon bemerkt sind die D^β aus Definition 2.1 die schwachen Ableitungen aus Definition 2.2. Wenn umgekehrt letztere $D^\beta f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, $|\beta| \le r$ existieren, so bilde man

$$(f_\varrho)^{(\beta)} := [I_\varrho(f;x)]^{(\beta)} = \left[\frac{1}{\varrho^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\left(\frac{x-u}{\varrho} f(u)\, du \right) \right]^{(\beta)}$$

und setze voraus, dass $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \le 1\}$. Wegen

$$\begin{aligned} I_\varrho(f;x) &= \left| \int \varphi(v) f(x - v\varrho)\, dv \right| \\ &\le C_\varphi \int_{|v|\le 1} |f(x - v\varrho)|\, dv = C_\varphi \int_{|u-x|\le\varrho} |f(u)|\, du \end{aligned}$$

folgt $\lim_{|x|\to\infty} I_\varrho(f;x) = 0$ für festes ϱ, d. h. $f_\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Wir zeigen, dass die Folge $\{f_\varrho\}$ den Forderungen aus der Definition der Sobolev-Räume genügt. Dazu beachte

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} I_\varrho(f)^{(\beta)}\varphi &= (-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^m} I_\varrho(f)\varphi^{(\beta)} \\
&= (-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^m}\left[\int_{\mathbb{R}^m}\varphi_\varrho(v)f(x-v)\,dv\right]\varphi^{(\beta)}(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m}\varphi_\varrho(v)(-1)^{|\beta|}\left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x-v)\varphi^{(\beta)}(x)\,dx\right]dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^m}\varphi_\varrho(v)\int_{\mathbb{R}^m}\left[D^\beta f(x-v)\varphi(x)\,dx\right]dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\left[\int_{\mathbb{R}^m}\varphi_\varrho(x-u)\left(D^\beta f\right)(u)\,du\right]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)I_\varrho\left(D^\beta f;x\right)dx,
\end{aligned}$$

so dass wegen der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung $D^\beta(I_\varrho(f)) = I_\varrho\left(D^\beta f\right) = I_\varrho(f)^{(\beta)}$ gilt. Damit erfüllt die Folge $\{f_\varrho\}$ also die Voraussetzungen aus der Definition des Sobolev-Raumes in Bezug auf f, d. h. $f \in W^{r,p}$, was zu zeigen war. □

2.2 Grundlagen der Fourieranalysis

2.2.1 Fouriertransformation in L_1

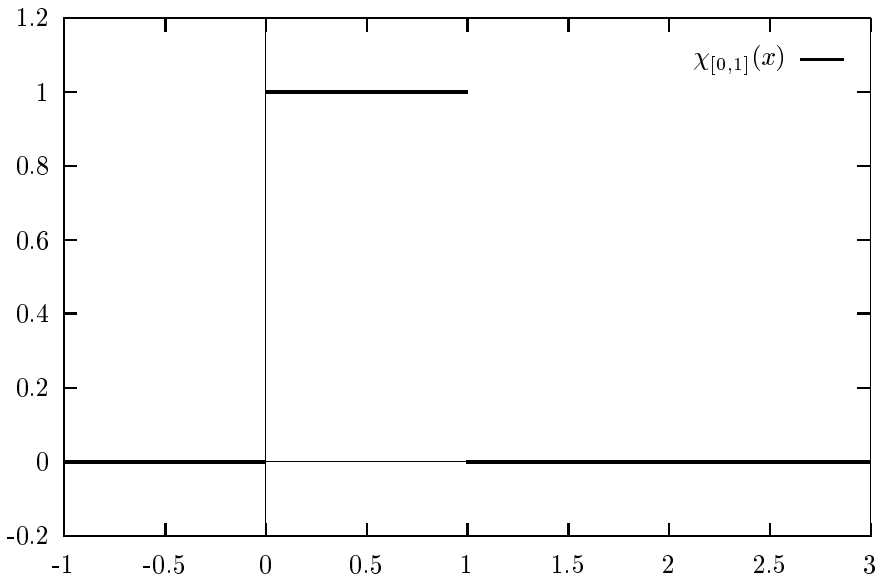
Die Fouriertransformation und die durch sie bereitgestellten Hilfsmittel sind von grundlegender Bedeutung für diese Vorlesung. Wir stellen deshalb zuerst die grundlegenden Resultate vor und beschreiten dabei den Weg, der in [SW71] eingeschlagen wird, d. h. wir betrachten zuerst die L_1-Theorie.

Definition 2.3. (Fouriertransformierte) *Gegeben $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so ist die* Fourier-Transformierte *von f gegeben durch*

$$\mathcal{F}[f](v) \equiv [f]^\wedge(v) := \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-ix\cdot v} f(x)\,dx, \tag{2.13}$$

wobei $x \cdot v$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^m$ meint.

Als erstes soll die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion eines Intervalls berechnet werden,die im Folgenden eine wichtige Rolle spielen wird.

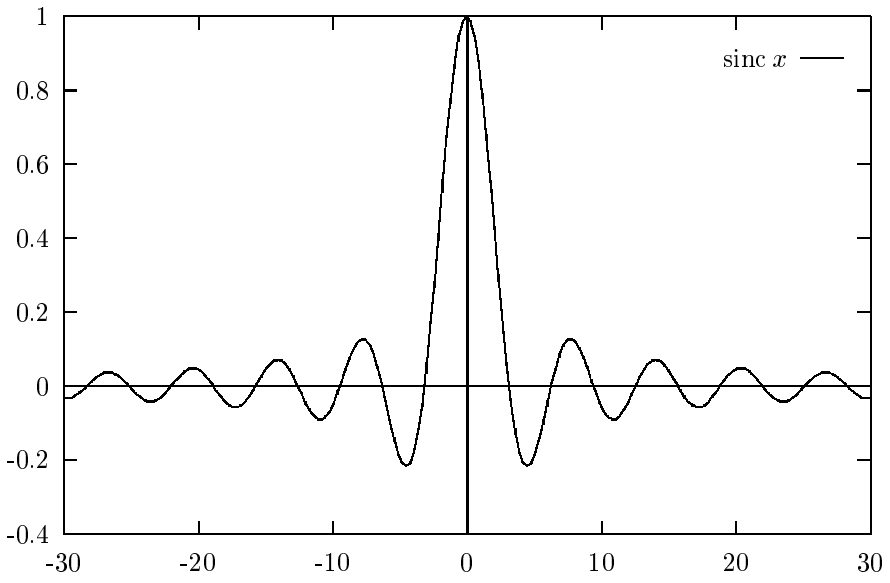


Charakteristische Funktion des Intervalls $[0, 1]$

Definition 2.4. (Sinc-Funktion) *Die Sinc-Funktion ist punktweise definiert als*

$$\operatorname{sinc} x := \frac{\sin x}{x}.$$

Dies ist so zu lesen, dass der Wert an der Stelle $x = 0$ der Grenzwert dieses Bruches ist, d. h. $\operatorname{sinc} 0 = 1$.



Sinc-Funktion

Damit kann jetzt die Fouriertransformation für charakteristische Funktionen $\chi_I(x)$

von Quadern $I = [-a_1, a_1] \times \cdots \times [-a_m, a_m]$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\left[\chi_I\right]^\wedge(v) &= \int_{-a_1}^{a_1} \mathrm{e}^{-iv_1x_1}\,dx_1 \cdots \int_{-a_m}^{a_m} \mathrm{e}^{-iv_mx_m}\,dx_m \\
&= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ix_1v_1}}{iv_1}\right]_{x_1=-a_1}^{a_1} \cdots \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ix_mv_m}}{iv_m}\right]_{x_m=-a_m}^{a_m} \\
&= 2a_1\left(\frac{\mathrm{e}^{ia_1v_1} - \mathrm{e}^{-ia_1v_1}}{2iv_1a_1}\right) \cdots 2a_m\left(\frac{\mathrm{e}^{ia_mv_m} - \mathrm{e}^{-ia_mv_m}}{2ia_mv_m}\right) \\
&= 2^m \prod_{l=1}^{m} a_l \operatorname{sinc}(a_lv_l).
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.6. Offensichtlich hat $\chi_{[0,1]}(x)$ einen kompakten Träger – was bei der Sinc-Funktion nicht der Fall ist. Das ist ein Beispiel für die später noch genauer beschriebene Tatsache, dass eine Funktion und ihre Fouriertransformierte *nicht gleichzeitig* kompakten Träger haben können. Weitergehende und auch genauere Aussagen über dieses Phänomen werden in Abschnitt 4.1.1 vorgestellt, unter Anderem der Zusammenhang mit der heisenbergschen Unschärferelation. ♢

Lemma 2.3. (Riemann-Lebesgue) *Die Fouriertransformation ist eine lineare beschränkte Abbildung von $L_1(\mathbb{R}^m)$ in $CB(\mathbb{R}^m)$, d. h. es gilt*

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \le \|f\|_1 ; \tag{2.14}$$

mehr noch, $\hat{f}$ liegt sogar in $C_0(\mathbb{R}^m)$.

Beweis. Die Stetigkeit von $\hat{f}$ folgt aus

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}(v) - \hat{f}(v+h)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathrm{e}^{-iv\cdot x}\left(1 - \mathrm{e}^{-ih\cdot x}\right)dx\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\left|1 - \mathrm{e}^{-ih\cdot x}\right|\,dx \xrightarrow{h\to 0} 0
\end{aligned}$$

nach dem Satz über majorisierte Konvergenz.

Für den zweiten Teil beachte zunächst, dass nach dem vorangegangenen Beispiel für $f = \chi_I$ mit beliebigem I offenkundig $\left|\hat{f}(v)\right| \xrightarrow{v\to\infty} 0$ gilt. Dann folgt die Aussage durch Approximation eines beliebigen f im L_1-Mittel durch *einfache Funktionen* (d. h. Stufenfunktionen die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen), indem man in der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}(v)\right| &\le \left|\hat{f}(v) - \sum_{k=1}^{N} c_k \left[\chi_{I_k}\right]^\wedge(v)\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} c_k \left[\chi_{I_k}\right]^\wedge(v)\right| \\
&\le \left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\chi_{I_k}\right\|_1 + \left|\sum_{k=1}^{N} c_k \left[\chi_{I_k}\right]^\wedge(v)\right|
\end{aligned}$$

zunächst N und dann $|v|$ genügend groß werden läßt. □

Wir listen nun einige grundlegende Eigenschaften der Fouriertransformation für L_1-Funktionen auf, die im Folgenden immer wieder gebraucht werden.

Definition 2.5. (Differentialoperator-Polynom) *Ist $P(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ ein Polynom auf $\mathbb{R}^m$ mit Monom $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, dann ist der zugehörige* Differentialoperator *$P(D)$ definiert als $P(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ mit*

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}.$$

Lemma 2.4. (Elementare Eigenschaften der Fouriertransformation) *Sei f eine Funktion aus $L_1(\mathbb{R}^m)$.*

1. *Für $\alpha > 0$ gilt*
$$[f(\alpha\cdot)]^\wedge(v) = \frac{1}{\alpha^m}\hat{f}\left(\frac{v}{\alpha}\right).$$
2. *Für den Translations-Operator $(\tau_h f)(x) := f(x+h)$, $h \in \mathbb{R}^m$, gilt*
$$[\tau_h f]^\wedge(v) = \mathrm{e}^{iv\cdot h}\hat{f}(v).$$
3. *Existieren die in $P(D)$ auftretenden partiellen Ableitungen D^α und alle Ableitungen D^β mit $\beta \le \alpha$ (d. h. $\beta_i \le \alpha_i$) im starken Sinn, d. h. im Sinne von$L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt*
$$[P(D)f]^\wedge(v) = P(-iv)\hat{f}(v),$$
d. h. die Differentiation geht über in eine Multiplikation.
4. *Gehört außer f auch $P(-ix)f(x)$ zu $L_1(\mathbb{R}^m)$, dann gilt*
$$P(-iD)\hat{f}(v) = [P(ix)f(x)]^\wedge(v).$$
5. *Sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so existiert die Faltung $f * g$ und es gilt*
$$[f*g]^\wedge(v) = \hat{f}(v)\hat{g}(v).$$
6. *Sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\hat{f}, \hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt*
$$[fg]^\wedge(v) = \frac{1}{(2\pi)^m}\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(v).$$

Zum Beweis sei bemerkt, dass (1) und (2) direkt durch Nachrechnen zu verifizieren sind. Für (3) betrachten wir nur den Fall einer partiellen Ableitung $\partial/\partial x_j$ erster Ordnung. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{f(x+he_j)-f(x)}{h} - g(x)\right\|_1 = 0$$

mit einer Funktion $g = \partial f/\partial x_j \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Bildet man die Fouriertransformierte des Ausdrucks in der Norm, so gilt mit (2) und (2.14)

$$\left\|\frac{\mathrm{e}^{-iv\cdot h}-1}{h}\hat{f}(v) - \hat{g}(v)\right\|_\infty \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Daraus folgt direkt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}f\right]^\wedge(v) = \hat{g}(v) = -iv\hat{f}(v)$$

fast überall. Der Beweis von (4) folgt z. B. für $P(x) = x_1$ durch Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz auf

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\left[\mathrm{e}^{-ix(v+e_1h)} - \mathrm{e}^{-ixv}\right]dx\\ &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)(-ix_1)\mathrm{e}^{-ixv}\left[\frac{\mathrm{e}^{-ix_1h}-1}{-ix_1h}\right]dx\end{aligned}$$

Der wesentliche Punkt bei (5) ist die Existenz der Faltung $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, die schon in (1.4) allgemein betrachtet wurde. Wendet man nun den Satz von Fubini auf den Integranden $f(x-u)\exp[-iv\cdot(x-u)]g(u)\exp(-iv\cdot u)$ an, so folgt nach Vertauschung der Integrationen die Behauptung. Teil (6) ergibt sich dann aus (5), falls wir die Umkehrung der Fouriertransformation benutzen, die wir nun näher betrachten.

Bemerkung 2.7. Man kann im Allgemeinen nicht zeigen, dass $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Ein Gegenbeispiel (im Fall $m = 1$) ist die schon anfangs betrachtete Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion eines Intervalls $[-a, a]$, $a > 0$:

$$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x) \quad \Longrightarrow \quad \hat{f}(v) = 2a \operatorname{sinc} av.$$

Diese Funktion ist zwar analytisch, liegt aber nicht in L_1.

Die Definition einer Umkehrtransformation ist also (wenn man den Raum L_1 nicht verlassen will) problematisch; es sind zunächst einige Vorbereitungen nötig, die beschrieben werden in ♢

Satz 2.4 (Inverse Fouriertransformation in L_1).

1. *Sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt die Parseval-Relation*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\hat{g}(x)\, dx.$$

2. *Gilt für eine Dirac-Folge mit Kern $\varphi_\varrho(u) := \rho^{-d}\varphi(u/\varrho)$, $\varrho > 0$, zusätzlich $\varphi(u) = \varphi(-u)$, und $\varphi(u) = \hat{\Phi}(u)$ mit einem $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap C(\mathbb{R}^m)$, so besitzt $I_\varrho(f; x)$ aus (2.1) die Darstellung*

$$I_\varrho(f; x) = \frac{1}{\varrho^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\left(\frac{u}{\varrho}\right) f(x+u)\, du = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(\varrho v)\hat{f}(v) \mathrm{e}^{ix\cdot v}\, dv. \tag{2.15}$$

3. *Gilt in Teil (2) zusätzlich $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\, dx = 1$, so ist $I_\varrho(f; x)$ ein Summationsprozess für das formale Integral $\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\exp(ix\cdot v)\, dv$ mit Grenzwert $f(x)$ im L_1-Sinn. Insbesondere folgt aus $\hat{f}(v) = \hat{g}(v)$ für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, dass $f = g$ fast überall gelten muss, d. h. die Injektivität der Fouriertransformation. Ist $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt*

$$f(x) = \Phi(0) \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v) \mathrm{e}^{ix\cdot v}\, dv \tag{2.16}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$, d. h. diese Operation beschreibt die inverse Fouriertransformation (auch Fourier-Umkehrtransformation genannt).

Beweis. Zu (1): Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x) g(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(u) \mathrm{e}^{-iu\cdot x}\, du \right) g(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x) \mathrm{e}^{-iu\cdot x}\, dx \right) f(u)\, du = \int_{\mathbb{R}^m} f(u)\hat{g}(u)\, du\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini ist anwendbar, da z. B. $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\|\hat{g}\|_\infty \le \|g\|_1$ nach Lemma 2.4 eine lebesgue-integrierbare Funktion $f(x)\hat{g}(x)$ ergeben. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Zu (2): Nach (1) sowie Teil (1) und (2) aus Lemma 2.4 gilt

$$\begin{aligned} I_\varrho(f;x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\varrho^m}\,\varphi\left(\frac{u}{\varrho}\right) f(x+u)\,du = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\varrho^m}\,\hat{\Phi}\left(\frac{u}{\varrho}\right)(\tau_x f)(u)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(\varrho v)\hat{f}(v)\mathrm{e}^{iv\cdot x}\,dv \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Teilaussage bewiesen.

Zu (3): Wir haben in Satz 2.1 gezeigt, dass mit der angegebenen Normierung von φ $\lim\limits_{\varrho\to+0} I_\varrho(f;x) = f(x)$ im Sinne von $L_1(\mathbb{R}^m)$ gilt. Wegen $\lim\limits_{\varrho\to+0} \Phi(\varrho v) = \Phi(0)$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ bedeutet dies, dass der Grenzwert des zweiten Integrals in (2) formal als das Integral aus (2.16) geschrieben werden kann. Man nennt dies einen Summationsprozess für das Integral. Im Falle $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ existiert der Grenzwert im strengen Sinne nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, denn $\left|\hat{f}(v)\right| \|\Phi\|_\infty$ ist eine von ϱ unabhängige Majorante in $L_1(\mathbb{R}^m)$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Bemerkung 2.8. Um die Voraussetzungen von Teil 3 des Satzes zu erfüllen müssen wir eine Funktion $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ finden, deren Fouriertransformierte wieder in $L_1(\mathbb{R}^m)$ liegt. Außerdem müssen wir $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\Phi}(u)\,du = 1$ erreichen, was zu dem richtigen Faktor in der Umkehrformel (2.16) führen wird. Dieser ist ja – wie aus dem Beweis hervorgeht – unabhängig von der Funktion f. Dazu bestimmen wir die Fouriertransformierte des Gauß-Weierstraß-Kerns. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-\pi\alpha|x|^2}\mathrm{e}^{-ix\cdot v}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}^m}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-|u|^2 - iuv/\sqrt{\pi\alpha}}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}^m}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-\left|u+iv/2\sqrt{\pi\alpha}\right|^2}\,\mathrm{e}^{-|v|^2/4\pi\alpha}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}^m}\,\mathrm{e}^{-|v|^2/4\pi\alpha}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-|u|^2}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}^m}\,\mathrm{e}^{-|v|^2/4\pi\alpha} \end{aligned}$$

Setzt man nun $\alpha = 1/2\pi$ an, so erhält man die gaußsche Glockenkurve – also $W(x) = \exp(-|x|^2/2)$ – und

$$\hat{W}(v) = \sqrt{2\pi}^m W\left(\frac{v}{2}\right).$$

Mit der Schreibweise $\Phi(x) = \alpha W(x)$ folgt dann die Bedingung

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\,dx = \alpha\int_{\mathbb{R}^m} \hat{W}(v)\,dv \\ &= \sqrt{2\pi}^m \alpha\int_{\mathbb{R}^m} W(v)\,dv = \sqrt{2\pi}^m \alpha\hat{W}(0) = (2\pi)^m\alpha, \end{aligned}$$

Also muss $\alpha = (2\pi)^{-m}$ gelten und man erhält – falls $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ – die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\mathrm{e}^{ix\cdot v}\,dv := \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}\right](v). \tag{2.17}$$

Damit ist die L_1-Theorie der Fouriertransformation im Wesentlichen vorgestellt. Als Nachtrag sei bemerkt, dass im Falle $\hat{f}, \hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ aus (5)

$$(fg)(v), = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}\right](v)\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](v) = \frac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f} * \hat{g}\right](v)$$

folgt, d. h. (6). ♢

2.2.2 Fouriertransformation in L_2

Um eine L_2-Theorie der Fouriertransformation aufzubauen, benötigen wir den folgenden

Satz 2.5. (Isometrie der Fouriertransformation) *Ist* $f \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, *so gilt* $\frac{1}{(2\pi)^m} \left\|\hat{f}\right\|_2^2 = \|f\|_2^2$.

Beweis. Wir zeigen die Gleichheit der beiden Ausdrücke, indem wir den linken durch den rechten zuerst nach oben und dann nach unten abschätzen. Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, $g(x) := \overline{f(-x)}$. Dann gilt

$$\hat{g}(v) = \overline{\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\pi i v \cdot x} f(-x)\, dx} = \overline{\hat{f}(v)}.$$

Bildet man die Faltung $h \equiv f * g$, so ist $h \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und nach (2.4) folgt damit $\hat{h} = \hat{f}\,\overline{\hat{f}} = \left|\hat{f}\right|^2$.

Nun betrachten wir eine Dirac-Folge zu h wie in (2.4), Teil (2). Speziell nehmen wir den Gauß-Kern $\varphi(u) = \hat{\Phi}(u)$ mit $\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} W(x)$ wegen der richtigen Normierung, d. h.

$$I_\varrho(h; x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} W(\varrho v) \mathrm{e}^{ix \cdot v} \hat{h}(v)\, dv. \tag{2.18}$$

Dann beachtet man, dass h gleichmäßig stetig ist, denn mit der hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |h(x+\delta) - h(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} [f(x+\delta-u) - f(x-u)] g(u)\, du \right| \\ &\le \|f(x+\delta-.) - f(x-.)\|_2 \, \|g\|_2 \\ &\le \omega_1(f; \delta)_{L_2(\mathbb{R}^m)} \, \|f\|_2 \xrightarrow{\delta \to 0} 0 \end{aligned}$$

nach Satz (2.1) (der Gauß-Kern φ erfüllt seine Voraussetzungen). Also folgt nach der punktweisen Abschätzung (siehe Bemerkung 2 zu Satz 2.1) speziell für $x = 0$:

$$h(0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{\varrho \to +0} \int_{\mathbb{R}^m} W(\varrho v) \hat{h}(v)\, dv \ge \liminf_{\varrho \to +0} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\varrho v) \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv.$$

Wegen

$$\liminf_{\varrho \to +0} \Phi(\varrho v) \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv = \left|\hat{f}(v)\right|^2 \in L_1(\mathbb{R}^m)$$

folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv \le h(0) = \int_{\mathbb{R}^m} f(0-x)\overline{f(-x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2\, dx,$$

d. h. die Abschätzung nach oben. Für den Gauß-Kern gilt außerdem (s. o.) $W(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2} \le 1$, so dass nach (2.18) auch

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2\, dx = h(0) \lim_{\varrho \to 0} I_\varrho(h, x) \le \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{h}(v)\, dv = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv,$$

d. h. die Abschätzung nach unten folgt. Damit ist Satz 2.5 bewiesen. □

Dieser fundamentale Satz erlaubt es, die Fouriertransformation im L_2 in einfacher Weise zu definieren, wobei $L_2(\mathbb{R}^m)$ jetzt als Raum *komplexwertiger* Funktionen zu verstehen ist.

Definition 2.6. (L_2-Fouriertransformation) *Für $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ definieren wir*

$$\mathcal{F}[f](v) \equiv \hat{f}(v) := \lim_{N\to\infty} \int_{|x|\le N} f(x) \mathrm{e}^{ix\cdot v}\, dx.$$

Zur Wohldefiniertheit benutzen wir folgenden, einfach zu verifizierenden und aus der Funktionalanalysis wohlbekannten

Satz. *Ist T ein linearer und beschränkter Operator auf einer dichten Teilmenge $\mathcal{D}$ eines linearen normierten Raumes X, so besitzt T eine eindeutig definierte stetige Fortsetzung auf ganz X.*

Wir wenden diesen Satz auf $\mathcal{D} = L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ als dichter Teilmenge von $X = L_2(\mathbb{R}^m)$ an. Natürlich gilt dann

$$\mathcal{F}[f](v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}[f_n](v)$$

für jede Folge $f_n \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, die im L_2-Sinne gegen f konvergiert.

Satz 2.6. (Plancherel) *Die inverse Fouriertransformation im L_2-Sinne, die wir mit $\mathcal{F}^{-1}$ bezeichnen werden, erhalten wir durch $\mathcal{F}^{-1}[f](v) = \mathcal{F}[f](-v)$, $\mathcal{F}$ wie in Definition (2.3). $\mathcal{F}^{-1}$ ist auf ganz $L_2(\mathbb{R}^m)$ definiert, insbesondere ist $\mathcal{F}$ ein bis auf einen Faktor $1/\sqrt{2\pi}^m$* unitärer Operator auf $L_2(\mathbb{R}^m)$. *Es gilt für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ die parsevalsche Formel*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^m} f \hat{g}, \qquad (\mathcal{F}f, g) = (f, \mathcal{F}^{-1} g);$$

dabei bedeutet $(.,.)$ das Skalarprodukt im L_2-Sinn.

Beweis. $\mathcal{F}$ ist nach dem vorigen Satz bis auf einen Faktor $1/\sqrt{2\pi}^m$ isometrisch, denn gegeben $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0 \qquad \forall f_n \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$$

folgt

$$\left| \|\mathcal{F}[f]\|_2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \|f_n\|_2 \right| = \left| \|\mathcal{F}[f]\|_2 - \|\mathcal{F}[f_n]\|_2 \right| \le \|\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[f_n]\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Die Bildung der inversen Fouriertransformierten führen wir ebenfalls auf den Fall $f_n \in L_1(\mathbb{R}^m)$ zurück. Wegen $\|\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[f_n]\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt nach dem Vorstehenden

$$\begin{aligned} \left\| f(v) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \mathcal{F}\left[\hat{f}\right](-v) \right\|_2 &= \lim_{n\to\infty} \left\| f(v) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \mathcal{F}\left[\hat{f}_n\right](-v) \right\|_2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \|f(v) - f_n(v)\|_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

d. h. die Bildung $g \in L_2(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{F}[g](-v)$ liefert die Linksinverse der Fouriertransformation; ferner folgt $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{R}^m)) = L_2(\mathbb{R}^m)$. Auf die gleiche Weise folgt auch

$$\|f(v) - \mathcal{F}[\mathcal{F}[f](-.)](v)\|_2 = 0,$$

so dass $\mathcal{F}^{-1}[g](v) := \mathcal{F}[f](-v)$ auf $L_2(\mathbb{R}^m)$ gilt.

Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts in der L_2-Norm sieht man, dass die parsevalsche Formel sich durch den selben Grenzübergang wie vorher aus Satz (2.4), Teil (1) ergibt. Schreibt man für das Skalarprodukt $\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x)\overline{g(x)}\,dx = \left(\hat{f}, g\right)$, so verifiziert man damit

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) &= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\overline{\hat{g}(v)}\,dv = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\mathcal{F}\left[\overline{\hat{g}}\right](v)\,dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\overline{\mathcal{F}[\hat{g}](-v)}\,dv = \frac{1}{(2\pi)^m}\left(\hat{f}, g\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Ohne Beweis bemerken wir, dass sich alle Eigenschaften aus (2.4) auch auf die Fouriertransformation im $L_2(\mathbb{R}^m)$ übertragen; dies geschieht mit den gleichen Methoden wie oben.

In einem späteren Abschnitt taucht das Problem auf, die Faltung von zwei Funktionen $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ sowie deren Fouriertransformierte zu bilden bzw. die Konvergenz der entsprechenden Integrale zu klären. Dazu dient

Lemma 2.5. (Faltung von L_2-Funktionen) *Es seien $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Dann ist die Faltung $(f*g)(x)$ für jedes x definiert und stetig. Ferner gilt $\hat{f}(v)\hat{g}(v) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x_i|\le N} (f*g)(x)\mathrm{e}^{-ivx}\,dx = \hat{f}(v)\hat{g}(v) \tag{2.20}$$

in jedem Stetigkeitspunkt von $\hat{f}(v)\hat{g}(v)$.

Beweis. Man arbeitet zunächst mit Folgen $f_n, g_n \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, die in L_2 gegen f bzw. g konvergieren. Dann ist die Faltung $f_n * g_n$ wie im L_1-Fall definiert und $[f_n * g_n]^\wedge = \hat{f}_n\hat{g}_n$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt $\left\|\hat{f}\hat{g}\right\|_1 \le \left\|\hat{f}\right\|_2 \|\hat{g}\|_2 = (2\pi)^m \|f\|_2 \|g\|_2$ und weiter

$$\left\|\hat{f}_n\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}\right\|_1 \le \left\|\left(\hat{f}_n - \hat{f}\right)\hat{g}_n\right\|_1 + \left\|\hat{f}(\hat{g}_n - \hat{g})\right\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Auf $\hat{f}\hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ ist die Fourier-Umkehrformel anwendbar. Sei also

$$\psi(x) := (2\pi)^{-m}\mathcal{F}\left[\hat{f}\hat{g}\right](-x).$$

Dann folgt

$$\|\psi - f_n * g_n\|_\infty = \left\|\frac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}\left[\hat{f}\hat{g} - \hat{f}_n\hat{g}_n\right]\right\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^m}\left\|\hat{f}\hat{g} - \hat{f}_n\hat{g}_n\right\|_1 \to \infty$$

Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass auch

$$\|f*g - f_n*g_n\|_\infty \to 0$$

gilt, so dass $f*g$ eine stetige Funktion ist. Wir könnten dann auf $f*g$ die Fouriertransformation im distributionellen Sinne anwenden und damit $\hat{f}(v)\hat{g}(v)$ im Sinne der Distributionen als Fouriertransformierte von $f*g$ erklären. Anschaulicher ist Formel (2.20), die man durch folgende Betrachtung gewinnt:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_{|x_i|\le N}(f*g)(x)\mathrm{e}^{-ivx}\,dx &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m}\chi_N(x)\mathcal{F}\left[\hat{f}\hat{g}\right](-x)\mathrm{e}^{-ivx}\,dx \\ &= \lim_{N\to\infty} N^m \int_{\mathbb{R}^m}\left(\prod_{l=1}^m \operatorname{sinc} N(v_l - u_l)\right)\hat{f}(u)\hat{g}(u)\,du,\end{aligned}$$

wobei $\chi_N(u) = \prod_{l=1}^{m} \chi_{[-N,N]}(u)$ und die Isometrieformel der Fouriertransformation angewendt wurde. Mit der Variablensubstitution $x := N(u-v)$ folgt weiter

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x_i|\le N} (f*g)(x)\mathrm{e}^{-ivx}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{l=1}^{m} \operatorname{sinc} x_l\right) \hat{f}\Big(v - \frac{x}{N}\Big)\hat{g}\Big(v - \frac{x}{N}\Big)\,dx.$$

Die Funktionenfolge im Integranden hat hier offensichtlich eine Majorante in $L_1(\mathbb{R}^m)$, so dass mit dem lebesgueschen Majorantenkriterium schließlich

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x_i|\le N} (f*g)(x)\mathrm{e}^{-ivx}\,dx = \hat{f}(v)\hat{g}(v)\operatorname{sinc} 0 = \hat{f}(v)\hat{g}(v)$$

– wie in (2.20) angegeben – folgt. □

2.2.3 Poisson-Summationsformel

Sei $\mathbb{T}^m$ der m-dimensionale Torus $[0, 2\pi]^m$. Für $1 \le p < \infty$ sei $X(\mathbb{T}^m)$ die Klasse der in jeder Variablen 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}^m$, die in $L_p(\mathbb{T}^m)$ liegen. Für $p = \infty$ sei $X(\mathbb{T}^m)$ die entsprechende Klasse von Funktionen die in $C(\mathbb{T}^m)$ liegen. Man kann dann die *formale* Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \hat{f}[k]\mathrm{e}^{ik\cdot x}, \qquad \hat{f}[k] = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(x)\mathrm{e}^{-ik\cdot x}, \tag{2.21}$$

bilden. $\mathbb{Z}^m$ bezeichnet die Menge der ganzzahligen Gitterpunkte des $\mathbb{R}^m$. Die Theorie der univariaten Fourierreihen wird nun hierauf verallgemeinert. Grundlegende Tatsachen sind in den folgenden Sätzen zusammengefasst:

Satz 2.7 (Weierstraß). *Die trigonometrischen Polynome auf $\mathbb{R}^m$, d.h. diejenigen Funktionen, die in jeder Variablen trigonometrische Polynome sind, liegen dicht in (der Norm von) $X(\mathbb{T}^m)$.*

Beweis. Wir zeigen dies nur für den Fall $p = \infty$ und bilden dazu den fejerschen Summationsprozess von σ,

$$L_N(\sigma; v) := (F_{m,N} * \cdots F_{1,N} * \sigma)(v),$$

wobei jede Faltung eine univariate Faltung in der jeweiligen Komponente v_j sein soll, d. h.

$$(F_{j,N} * g)(v) := \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u_j)g(v-u_j)\,du_j \tag{2.22}$$

mit

$$F_N(x) := \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{k=0}^{N} D_k(x).$$

Dabei ist g eine 2π-periodische Funktion in $L_1(\mathbb{R}^m)$ und $D_N(x)$ der sogenannte *Dirichlet-Kern,* d. h.

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(x/2)}. \tag{2.23}$$

Man kann ferner die Identität

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(x/2)} \right)^2 \tag{2.24}$$

zeigen, so dass der sogenannte *Fejer-Kern* $F_N(x)$ nichtnegativ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|F_{m,N} * g\|_\infty &= \left\| \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v_m) g(\cdot - v_m)\, dv_m \right\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(v_m)|\, dv_m \\ &= \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v_m)\, dv_m = \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Wiederholte Anwendung dieser Ungleichung zeigt

$$\|L_N(\sigma; v)\|_\infty \leq \|\sigma(v)\|_\infty$$

Mit Hilfe der Abschätzung

$$\sum_{\delta \leq x \leq \pi} |F_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{1}{\sin^2 \delta/2}, \qquad \delta > 0,$$

kann man analog zum Korollar zu Satz 2.1 zeigen, dass in jedem Stetigkeitspunkt von $\sigma(v)$ – also fast überall – gilt

$$\lim_{N \to \infty} L_N(\sigma; v) = \sigma(v). \tag{2.25}$$

□

Die beiden folgenden Sätze wollen wir nicht mehr beweisen, sondern bemerken nur , dass sie nach klassischem Muster aus dem Satz von Weierstraß folgen.

Satz 2.8 (Eindeutigkeitssatz). *Sei $f \in X(\mathbb{T}^m)$. Falls $\hat{f}[k] = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^m$, so ist $f = 0$ fast überall.*

Satz 2.9 (Riesz-Fischer). *Für $f \in L_2(\mathbb{T}^m)$ konvergiert die (2.21) in $L_2(\mathbb{R}^m)$ und es gilt*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \left| \hat{f}[k] \right|^2 = \left(\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^m)} \right)^2$$

Beachte: $\hat{f}[k]$ ist die Schreibweise für die *Fourier-Koeffizienten.*

Wir arbeiten nun auf die *Poisson-Summationsformel* hin, die einen fundamentalen Zusammenhang zwischen den Fourierreihen und der Fouriertransformation herstellt.

Definition 2.7. (Periodisierung) *Gegeben sei eine Funktion f auf $\mathbb{R}^m$. Dann heißt*

$$f^*(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} f(x + 2\pi l) \tag{2.26}$$

die (formale) Periodisierung *der Funktion f auf $\mathbb{R}^m$ falls die rechte Seite von (2.26) fast überall definiert ist.*

Es ist klar, dass die Funktion f^* in jeder Variablen periodisch mit Periode 1 ist, denn der Übergang $x \mapsto x + l$, $l \in \mathbb{Z}^m$, bedeutet lediglich eine Umordnung der Terme in (2.26). Man sieht daran, dass es sinnvoll ist, die absolute Konvergenz von (2.26) zu fordern.

Wir wollen nun zeigen, dass man die Fourierreihe von f^* mittels der Fouriertransformierten von f berechnen kann. Dies führt auf die Poisson-Summationsformel.

Lemma 2.6. *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Dann konvergiert (2.26) absolut im Sinne der Norm von $L_1(\mathbb{R}^m)$ gegen $f^* \in L_1(\mathbb{T}^m)$. Es gilt*

$$[f^*]^\wedge[k] = (2\pi)^{-m}\hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^m. \tag{2.27}$$

Beweis. f^* ist meßbar und

$$\begin{aligned}\|f^*\|_{L_1(\mathbb{T}^m)} &= \int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(x)|\,dx_1\dots dx_m \\ &\le \sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(x-2\pi l)|\,dx_1\dots dx_m = \int_{\mathbb{R}^m}|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

Das Zeichen "$\le$" bedeutet speziell, dass die Konvergenz von (2.26) absolut und im Sinne von $L_1(\mathbb{T}^m)$ stattfindet. Speziell hat jede Umordnung der Reihe den gleichen Limes in $L_1(\mathbf{T}^m)$, so dass f^* 2π-periodisch in jeder Variablen ist.

Man kann nun dasselbe Vorgehen auf den Integranden $f^*(x)\exp(-ik\cdot x)$ anwenden und erhält

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} f^*(x)\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\,dx &= \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\int_{\mathbf{T}^m} f^*(x+2\pi l)\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\int_{\mathbf{T}^m} f^*(x+2\pi l)\mathrm{e}^{-ik\cdot(x+2\pi l)}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{(2\pi)^m}f(x)\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\hat{f}(k).\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Summe und Integral war hier erlaubt und somit ist (2.27) gezeigt. □

Man kann nun den Zusammenhang aus (2.6) ausnutzen in folgendem

Satz 2.10 (Poisson-Summationsformel). *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^m)$ (nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue) und $\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\hat{f}[k]$ sei absolut konvergent. Dann läßt sich die in (2.26) definierte Funktion f^* auf einer Nullmenge des $\mathbb{R}^m$ dergestalt abändern, dass*

$$f^*(x) \equiv \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} f(x+2\pi l) = \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\mathcal{F}[f](k)\mathrm{e}^{ik\cdot x} \tag{2.28}$$

für alle x. Sind f und f^* zusätzlich stetig, so braucht man f^* überhaupt nicht abzuändern damit (2.28) gilt; speziell gilt dann

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} f(2\pi l) = \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\mathcal{F}[f](k). \tag{2.29}$$

Beweis. Die Reihe

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\mathcal{F}[f](k)\mathrm{e}^{ik\cdot x}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig in $x \in \mathbf{T}^m$. Das Ergebnis g ist dann eine stetige Funktion auf $\mathbb{T}^m$, deren Fourierkoeffizienten nach dem vorigen Lemma gleich denen von $f^* \in L_1(T_m)$ sind. Nach Satz 2.8 müssen dann g und f^* fast überall gleich sein. Damit ist (2.28) bewiesen – der Rest folgt daraus. □

Bemerkung 2.9. Eine hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (2.28) ist, dass $\hat{f}$ das Aklingverhalten $\left|\hat{f}(v)\right| \leq A(1+|v|)^{-m-\delta}$ mit $A > 0$ und $\delta > 0$ hat. ♢

Wendet man Satz 2.10 auf Funktionen $f = \hat{g}$ an, so erhält man als Variante der Poisson-Summationsformel

Korollar 2.4. *Seien g und $\hat{g}$ aus $L_1(\mathbb{R}^m)$ (womit g nach Lemma 2.3 in $C_0(\mathbb{R}^m)$ liegt) und $\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} g(k)$ sei absolut konvergent. Dann gilt*

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \hat{g}(x+2\pi l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} g(k)\mathrm{e}^{-ikx}$$

2.3 Approximation mit bandbegrenzten Funktionen

2.3.1 Grundlagen

Die Klasse der bandbegrenzte Funktionen *(band-limited functions)* spielt für die Approximations-Theorie im Rahmen der Fourieranalysis eine zentrale Rolle.

Definition 2.8. (Bandbegrenzte Funktionen in $L_2(\mathbb{R}^m)$) *Eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ heißt* bandbegrenzt, *falls es ein beschränktes Gebiet $W \subset \mathbb{R}^m$ gibt, so dass* $\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq W$.

Dieser Name rührt von der (mathematischen) Physik her, nach der das Spektrum eines Signals (z. B. einer elektromagnetischen Schwingung) durch seine Fouriertransformierte gegeben ist. Am Ende dieses Abschnitts werden wir kurz die Grundprinzipien der Signalverarbeitung erläutern, die eine schöne Veranschaulichung dieser Funktionen bieten. Zunächst folgt aus obiger Definition

Lemma 2.7. *Eine bandbegrenzte Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ hat eine analytische Fortsetzung $F(z)$ auf den Raum $\mathbb{C}^m$ der m-Tupel von komplexen Zahlen, d. h. $F(z)$ ist eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^m$. Im Spezialfall $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v| \leq \sigma\}$ mit $\sigma > 0$ gilt außerdem*

$$|F(z)| \leq C \left\|\hat{f}\right\|_2 \mathrm{e}^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \tag{2.30}$$

wobei ω_m das Volumen der m-dimensionalen Einheitskugel bedeutet und C die Konstante $\max(1, \sqrt{\omega_m \sigma^m})$ ist. Analog gilt für $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v_i| \leq \sigma_i\}$ mit $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ und $\sigma_i > 0$

$$|F(z)| \leq C\|\hat{f}\|_2 \exp\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i |\operatorname{Im} z_i|\right). \tag{2.31}$$

Beweis. Wir betrachten für die angegebenen f die Fouriertransformierte

$$F(z) = \int_W \hat{f}(v)\mathrm{e}^{iv\cdot z}\,dv, \qquad z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}^m$$

Im Falle $z = x$ gilt nach den Umkehrsätzen des vorigen Abschnitts $F(x) = f(x)$. Nun kann man aber $F(z)$ komplex differenzieren, da (mit $z = (z_1, \ldots, z_n)$)

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \int_W \hat{f}(v)\frac{\partial}{\partial z_j}\mathrm{e}^{i\sum_l v_l \cdot y}\,dv = \int_W iv_j\hat{f}(v)\mathrm{e}^{iv\cdot z}\,dv$$

und die Vertauschung von Integration und Differentiation – unter Verwendung der gleichen Regeln wie im reellen Fall – erlaubt ist, vgl. (2.4). Wiederholte Anwendung

dieser Operation zeigt, dass F eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^m$ ist. Weiter gilt im Fall $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v| \le \sigma\}$ für $p = 1$ nach (2.3)

$$|F(z)| \le \int_{|v|\le\sigma} \left|\hat{f}(v)\right| \, \mathrm{e}^{-v\cdot \mathrm{Im}\, z}\, dv \le \|f\|_1 \sup_{|v|\le\sigma} \mathrm{e}^{-v\cdot \mathrm{Im}\, z} \le \|f\|_1 \, \mathrm{e}^{\sigma |\,\mathrm{Im}\, z|}$$

Im Fall $p = 2$ verwendet man die schwarzsche Ungleichung

$$|F(z)| \le \left\|\hat{f}\right\|_2 \sqrt{\int_{|v|\le\sigma} \mathrm{e}^{-v\cdot \mathrm{Im}\, z}\, dv} \le \left\|\hat{f}\right\|_2 \, \mathrm{e}^{\sigma|\,\mathrm{Im}\, z|/2} \sqrt{\int_{|v|\le\sigma} dv}.$$

Damit ist (2.30) gezeigt, der Beweis von (2.31) verläuft analog. □

Eine interessante Folgerung aus diesem Lemma, die Bemerkung 2.6 ergänzt, ist

Korollar 2.5. *Eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ kann nicht gleichzeitig einen kompakten Träger und eine Fouriertransformierte mit kompaktem Träger haben.*

Bandbegrenzte Funktionen lassen sich allgemeiner in allen L_p-Räumen definieren. In Verallgemeinerung von Definition 2.8 machen wir die

Definition 2.9. (Bandbegrenzte Funktionen in L_p) *Sei $\mathcal{S}$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren, schnell abfallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^m$ (vergleiche Definition 2.13 in Abschnitt 2.4.1), W sei eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und sei $1 \le p \le \infty$. Dann heißt*

$$B_p(W) := \left\{ g \in L_p(\mathbb{R}^m) \,\middle|\, \forall \varphi \in \mathcal{S}, \mathrm{supp}\,\varphi \cap W = \emptyset : \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\hat{\varphi}(x)\, dx = 0 \right\}$$

Menge der bandbegrenzten Funktionen mit Band W. ,

Bemerkung 2.10. Diese Definition ist äquivalent dazu, dass die Fouriertransformierte von g im Sinne der Distributionstheorie einen Träger in W besitzt (vergl.Definition 2.15 in Abschnitt 2.4). ♢

Zur Illustration der Bedingung $g \in B_p(W)$ betrachten wir den Fall $p = 1$. Anwendung der Parsevalrelation ergibt dann

$$B_1(W) := \left\{ g \in L_1(\mathbb{R}^m) \,\middle|\, \forall \varphi \in \mathcal{S}, \mathrm{supp}\,\varphi \cap W = \emptyset : \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(x)\varphi(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Dann setze $W_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathrm{dist}(x, W) \le \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ und definiere für $\varrho > 0$

$$\psi_{\varepsilon,\varrho}(x) = \int_{W_\varepsilon} \varphi\left(\frac{x-u}{\varrho}\right) du$$

mit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\mathrm{supp}\,\varphi = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \le 1\}$ und $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(u)\, du = 1$. Man verifiziert leicht, dass $\psi_\varepsilon(x) = \psi_{\varepsilon,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\mathrm{supp}\,\psi_\varepsilon \subseteq W_{2\varepsilon}$ und $\psi_\varepsilon(x) = 1$ für $x \in W$. Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ ist dann $(1 - \psi_\varepsilon)\varphi$ wieder in $\mathcal{S}$ und verschwindet auf W. Also gilt nach dem Vorstehenden, dass für $g \in L_1(\mathbb{R}^m)$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}: \quad 0 = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(v)\varphi(v)\big(1 - \psi_\varepsilon(v)\big)\, dv.$$

Da $\mathcal{S}$ nach Lemma 2.15 dicht in $L_1(\mathbb{R}^m)$ ist, folgt $\hat{g}(v)\big(1 - \psi_\varepsilon(v)\big) = 0$ fast überall und somit $\hat{g}(v) = 0$ fast überall für $x \notin W_{2\varepsilon}$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, folgt somit – in Konsistenz zu Definition 2.8 –

$$B_1(W) = \{g \in L_1(\mathbb{R}^m) \,|\, \mathrm{supp}\,\hat{g} \subseteq W\}. \tag{2.32}$$

Dies Charakterisierung läßt sich in gleicher Weise für alle $p \in [1,2]$ durchführen, wo sich die Fouriertransformierte in $L_p(\mathbb{R}^m)$ erklären läßt.Ferner kann man die Aussage von Lemma 2.7 auf den allgemeinen L_p-Fall von Definition 2.9 erweitern.

Dazu beachtet man, dass für $g \in B_p(W)$ und alle $\varphi \in \mathcal{S}$ deren Restriktion $\varphi|_W$ auf W verschwindet

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{g(x)}{(1+|x|^2)^m})(1+|x|^2)^m \hat{\varphi}(x)$$

Im Abschnitt 2.4.1 über die Distributionentheorie werden wir zeigen, dass $\hat{\varphi}$ in $\mathcal{S}$ liegt und somit $(1+|x|^2)^m \hat{\varphi}(x) \equiv \hat{\psi}(x) \in \mathcal{S}$ und ψ durchläuft ganz $\mathcal{S}$. Setzt man nun $h(x) := (1+|x|^2)^{-m} g(x)$, so ist $h \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\mathbb{R}^m)$ sowie $\psi(x) = (I-\Delta)^m \varphi(x)$ mit $\Delta := \sum_{i=1}^m \partial_{x_i}^2$ nach Lemma 2.4[1]. Wie für $p=1$ gilt dann

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{h}(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{h}(x)(I-\Delta)^m \varphi(x)\,dx$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in W$; es folgt also $\operatorname{supp} \hat{h} \subseteq W$. Damit ist Lemma 2.7 anwendbar und h holomorph, also auch g. Für h gilt (2.30), was dann für g eine etwas schwächere Abschätzung liefert. Trotzdem kann man (vgl. [Rud91], Kapitel 7) folgende – schärfere – Abschätzung beweisen:

Lemma 2.8. *Die Aussage von Lemma 2.7 bleibt – mit einer anderen Konstante – für Elemente $f \in B_p(W)$, $1 \le p \le \infty$ weiter gültig.*

Lemma 2.7 und 2.8 führen zu folgenden Klassen von Funktionen

Definition 2.10. (Ganze Funktionen von exponentiellem Typ) *Die Klasse $B_{\boldsymbol{\sigma}}^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ der* ganzen Funktionen auf $\mathbb{C}^m$ vom exponentiellen Typ $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ mit $\sigma_j > 0$, $1 \le j \le m$, in $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, *ist definiert als die Menge aller Funktionen f der Form*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m{}_+} a_k z^k, \qquad z^k = z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m},$$

wobei die Potenzreihenentwicklung auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{C}^m$ gleichmäßig konvergiert, die Restriktion auf $\mathbb{R}^m$ eine Funktion in $L_p(\mathbb{R}^m)$ ist und ferner

$$|f(z)| \le C \exp\left(\sum_{j=1}^m \sigma_j |\operatorname{Im} z_j|\right) \tag{2.33}$$

mit von z unabhängigem C. Analog definieren wir die Klasse $B_{\boldsymbol{\sigma}}^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ für $\boldsymbol{\sigma} > 0$, indem wir (2.33) durch

$$|f(z)| \le C \exp(\sigma |\operatorname{Im} z|)$$

ersetzen.

Es sei bemerkt, dass ein echtes Wachstum (wenigstens in $\operatorname{Im} z$) vorliegen muss, da ein solches f andernfalls – nach dem Satz von Liouville – konstant wäre. Es ist klar, dass bandbegrenzte Funktionen $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$ der Bandbreite $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, d. h. $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v_j| \le \sigma_j\}$, nach Lemma 2.7 und Lemma 2.8 zur Klasse $B_{\boldsymbol{\sigma}}^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ gehören. Man kann dieses Ergebnis auch für den Fall beweisen, dass W die Einheitskugel ist, vergleiche hierzu [Rud91], Kapitel 7.

Es ist nun sehr bemerkenswert, dass die Umkehrung von Lemma 2.7 und 2.8 gültig ist. Dies ist der Inhalt des *Satzes von Paley-Wiener*, den wir hier nur für $p = 2$ formulieren wollen.

[1] Δ ist natürlich der Laplace-Operator

Satz 2.11 (Paley-Wiener). *Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^m$ wie in Definition 2.10, deren Restriktion auf $\mathbb{R}^m$ eine Funktion in $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist und die Abschätzung*

$$|f(z)| \le C(1+|\alpha|)^\alpha \exp\left(\sum_{j=1}^m \sigma_j |\operatorname{Im} z_j|\right)$$

mit von z unabhängigen positiven Konstanten C, α und σ_j erfüllt. Dann ist f die Fouriertransformierte einer Funktion in $L_2(\mathbb{R}^m)$ mit Träger in $W = \{x \in \mathbb{R}^m : |x_j| \le \sigma_j\}$.

Für den Beweis sei auf Anhang 2.5.1 verwiesen, wo auch die Verallgemeinerung auf $1 \le p \le \infty$ durchgeführt wird. Bezüglich des Falls der Einheitskugel sei wieder auf [Rud91] verwiesen. Aussagen für den Fall $p = 2$ und allgemeinere Gebiete W findet man in [SW71], Kapitel 3. Anwendungen der Paley-Wiener-Sätze findet man z. B. in [RS72], Band 1 .

2.3.2 Eigenschaften von bandbegrenzten Funktionen

Viele Resultate über Räume von Funktionen vom exponentiellem Typ findet man in [Ach53], [Nik75] und [Tim63]; in diesen Büchern wird die Wichtigkeit dieser Funktionen für die Approximations-Theorie betont. Im Hinblick auf den Satz von Paley-Wiener wollen wir einige Aussagen in dieser Richtung für bandbegrenzte Funktionen zeigen. Zunächst untersuchen wir die beste Approximation und betrachten nur den $p = 2$ Fall des Hilbert-Raums näher (für Aussagen über $L_p(\mathbb{R}^m)$, $p \ne 2$ sei auf den Anhang verwiesen).

Satz 2.12. *Die beste Approximation $g^* \in B_2(W)$ zu $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ ist*

$$g^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(u) W(x+u)\, du, \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{2.34}$$

wobei $W(x)$ die durch

$$W(x) := \int_W \mathrm{e}^{ix\cdot v}\, dv = \mathcal{F}\left[\chi_W\right](-v) \tag{2.35}$$

definierte Transferfunktion *des Gebietes W ist. Ferner gilt die Fehlerformel*

$$\|f - g^*\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^m \setminus W} \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv \tag{2.36}$$

Beweis. Nach dem in der Einleitung erwähnten Satz der Theorie der Hilbert-Räume gilt für die beste Approximation g^* aus $B_2(W)$ zu $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ – falls sie existiert – notwendigerweise

$$\int_{\mathbb{R}^m} [f(x) - g^*(x)]\overline{h(x)}\, dx = 0 \qquad \forall h \in B_2(W) \tag{2.37}$$

Nach dem Satz von Plancherel folgt daraus (ausgedrückt mit Hilfe des Skalarprodukts)

$$\left(\hat{f} - [g^*]^\wedge, \hat{h}\right)_2 = 0 \qquad \forall h \in B_2(W).$$

Nun ist $\hat{h} = \hat{h}\chi_W$, wobei χ_W die charakteristische Funktion des Gebietes W ist. Damit folgt

$$0 = \left(\chi_W(\hat{f} - [g^*]^\wedge, \hat{h}\right)_2 = \left(\chi_W \hat{f} - [g^*]^\wedge, \hat{h}\right)_2 \quad \forall h \in B_2(W)$$

Setzt man speziell $\hat{h} = \chi_W \hat{f} - [g^*]^\wedge$ ein, so folgt $[g^*]^\wedge = \chi_W \hat{f}$ fast überall. Nach (2.34) gilt nun $W = \mathcal{F}[\chi_W]$ oder $\chi_W = \mathcal{F}[W]/(2\pi)^m$, so dass mit Lemma 2.4 (5) folgt, dass

$$[g^*]^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^m} \hat{W} \hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^m} [W * f]^\wedge$$

dies ergibt aber mit der inversen Fouriertransformation genau (2.12). □

Man braucht die Existenz von g^* nicht anzunehmen, sondern kann von (2.37) ausgehend direkt zeigen, dass die angegebene Funktion g^* die beste Approximation ist. Denn laut Konstruktion erfüllt g^* (2.37) und daraus folgt für ein beliebiges $h \in B_2(W)$

$$\begin{aligned} \|f-h\|_2^2 &= \|f-g^*+g^*-h\|_2^2 \\ &= \|f-g^*\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(f-g^*, g^*-h) + \|g^*-h\|_2^2 \\ &= \|f-g^*\|_2^2 + \|g^*-h\|_2^2 \\ &\geq \|f-g^*\|_2^2. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.11. Im Spezialfall $f \in B_2(W)$ folgt aus (2.33)

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(u) W(x+u)\, du, \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{2.38}$$

Man bezeichnet deshalb $W(x-u)$ als den *reproduzierenden Kern* auf $B_2(W)$. Allgemein heißt $K(x,y)$ *reproduzierender Kern* auf dem Teilraum $B \subseteq L_2(\mathbb{R}^m)$ falls $f(x) = \big(K(x,.), f(x)\big)_2$ für alle $f \in B$ gilt. ♢

Als weitere Eigenschaft bandbegrenzter Funktionen beweisen wir

Lemma 2.9. (Bernstein-Ungleichung) *Es sei $f \in B_2(W)$ mit $\sigma_j := \max\limits_{v \in W} < \infty$. Dann gilt*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_2 \leq \sigma_j \|f\|_2 \tag{2.39}$$

Beweis. Nach den vorangegangenen Überlegungen ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Für $\varphi \in S$ hat man dann mit der Parseval-Formel und Lemma 2.4

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_j} f(t)\varphi(t)\, dt \right| &= \frac{1}{(2\pi)^m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(v) \mathcal{F}[\varphi](-v)\, dv \right] \right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \left| \int_W \hat{f}(v) i v_j \hat{\varphi}(-v)\, dv \right| \\ &\leq \frac{\sigma_j}{(2\pi)^m} \int_W |\hat{f}(v)\hat{\varphi}(-v)|\, dv \leq \frac{\sigma_j}{(2\pi)^m} \|\hat{f}\|_2 \|\hat{\varphi}\|_2 \\ &\leq \sigma_j \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \end{aligned}$$

Nun nimmt man zunächst $f \in S$ und $\varphi = \partial f'/\partial x_j$ an. Dann folgt sofort nach Division durch $\|\varphi\|$ sofort (2.39). Für allgemeine $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ folgt die Ungleichung durch Grenzübergang, da S dicht in $L_2(\mathbb{R}^m)$ (siehe Lemma 2.13 in Abschnitt 2.4.1). □

Man kann die Bernstein-Ungleichung auch auf beliebige partielle Ableitungen verallgemeinern. Dies auszuführen sei dem Leser überlassen.Eine Erweiterung dieses einfachen Beweises auf den Fall $f \in B_p(W)$ wäre wünschenswert.

Eine andere Frage ist die, welche periodischen Funktionen in der Klasse der bandbegrenzten Funktionen enthalten sind.

Lemma 2.10. (Periodische bandbegrenzte Funktionen) *Die Menge der in jeder Variablen $2L$-periodischen Funktionen, $L > 0$, die in $B_p(W)$ liegen, besteht nur aus Linearkombinationen von Exponentialfunktionen* $\exp(2\pi ikx/2L)$ *mit Frequenzen $k\pi/L \in W$.*

Beweis. Sei g eine solche Funktion aus $B_p(W)$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ beliebig. Dann liegt auch $\hat{\varphi}$ in $\mathcal{S}$ und

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m} \int_{[-L,L]^m} g(x)\hat{\varphi}(x+2Lk)\,dx \\ &= \int_{[-L,L]^m} g(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m} \hat{\varphi}(x+2Lk)\,dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

□

Die Funktion $\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m} \hat{\varphi}(x+2Lk)$ ist die Periodisierung von $\hat{\varphi}(x)$ mit Periode $2L$. Analog wie beim Beweis der Poisson-Summationsformel folgt

$$\begin{aligned} A_l &:= \frac{1}{(2L)^m} \int_{[-L,L]^m} \psi(x)\mathrm{e}^{-\pi ilx/L}\,dx \\ &= \frac{1}{(2L)^m} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m} \int_{[-L,L]^m} \hat{\varphi}(x+2Lk)\mathrm{e}^{-\pi ilx/L}\,dx \\ &= \frac{1}{(2L)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(x)\mathrm{e}^{-\pi ilx/L}\,dx = \left(\frac{2\pi}{2L}\right)^m \varphi\left(\frac{-l\pi}{L}\right) \end{aligned}$$

Nun beachten wir, dass die skalierte Funktion $\tilde{\psi}(x) = \psi(xL/\pi)$ 2π-periodisch ist und so nach dem Satz 2.9 (Satz von Riesz-Fischer)

$$\psi\left(\frac{xL}{\pi}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m} \tilde{\psi}[j]\mathrm{e}^{ikx}$$

mit

$$\tilde{\psi}[k] = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi,\pi]^m} \psi\left(\frac{xL}{\pi}\right)\mathrm{e}^{-ikx}\,dx = A_k$$

gilt, also mit dem vorhergehenden

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m} \left(\frac{\pi}{d}\right)^m \varphi\left(\frac{-k\pi}{L}\right)\mathrm{e}^{-\pi ikx/L}.$$

Dies setzen wir nun in (2.40) ein und erhalten nach Definition von ψ, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{[-L,L]^m} g(x)\psi(x)\,dx \\ &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^m \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} \varphi\left(\frac{-k\pi}{L}\right) \int_{[-L,L]^m} g(x)\mathrm{e}^{\pi ikx/L}\,dx = 2\pi^m \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m} \varphi\left(\frac{-j\pi}{L}\right)\hat{\tilde{g}}[j] \end{aligned}$$

mit $\tilde{g}(u) := g(uL/\pi)$ analog zu $\tilde{\psi}(x)$. Die Funktion $\tilde{g}$ hat Periode 2π und obige Summe muss für jedes φ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq W$ verschwinden. Daher müssen die Fourierkoeffizienten $\hat{\tilde{g}}[j]$ für $k\pi x/L$ verschwinden, $\hat{\tilde{g}}[j] = 0$. Da W aber eine beschränkte

Menge ist, folgt hieraus

$$\tilde{g}(x) = \sum_{k\pi/L \in W} \tilde{g}[k] \mathrm{e}^{ik\cdot x}$$

und

$$g(x) = \sum_{k\pi/L \in W} \tilde{g}[k] \mathrm{e}^{\pi ik\cdot x/L},$$

d. h. die obige Aussage.

Wir wollen nun Spezialfälle dieser Aussage betrachten und formulieren

Korollar 2.6. *Folgende Aussagen ergeben sich unmittelbar aus dem Satz über die beste Approximation:*

1. *Falls $0 \notin W$ kann $B_\infty(W)$ nicht die (mit jeder Periode) periodische, konstante Funktion $f \equiv 1$ enthalten.*
2. *Wenn $W = \{u \in \mathbb{R}^m : u_i \leq \omega_i\}$ dann enthält $B_\infty(W)$ keine Funktionen $\exp(\pi ikx/L)$ mit Frequenzen $k\pi/L$ größer als das Maximum aller ω_i. Speziell im Fall einer Variablen gilt:*
3. *Ist $W = (-\omega, \omega)$, so enthält $B_\infty(-\omega, \omega)$ genau die Sinus- und Cosinusfunktionen, deren Frequenzen kleiner als ω sind.*

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei auf den Zusammenhang mit der Signalverarbeitung, d. h. der Analyse von zeitabhängigen Funktionen $f(t)$ (die nicht unbedingt periodisch sein müssen) eingegangen. Hier sind Signale mit beschränkten Frequenzspektrum von besonderem Interesse. Nicht nur, dass jedes Meßgerät nur einen beschränkten Frequenzbereich messen kann, sogar einfache Leitungen wirken bandbegrenzend. Ganz allgemein spricht man von einem Filterungsprozess, wenn während dieses Prozesses das Signal so verändert wird, dass sich seine Fouriertransformierte ändert, $\hat{f}(v) \mapsto m(v)\hat{f}(V) = \hat{g}(v)$. Mathematisch entsteht das Signal also durch Faltung von $\mathcal{F}^{-1}[m]$ mit f aus f, also $g = \mathcal{F}^{-1}[m] * f$. (Physikalisch gesehen findet die Operation tatsächlich im Frequenzbereich statt.) In der (digitalen) Signalverarbeitung konstruiert man nun Filter bzw. Multiplikatoren $m(v)$ oder auch Faltungskerne $\mathcal{F}^{-1}[m]$ für die verschiedensten Zwecke und in den verschiedensten Formen. Bezüglich der Wirkungsweise unterscheidet man drei Grundtypen von Filtern:

- **Tiefpass filter (low-pass filter)** Dies sind Filter, die niedrige Frequenzen praktisch unverändert lassen, hohe Frequenzen hingegen praktisch ausblenden. Beispiel:

  $$m(v) = \chi_{[-\omega,\omega]}$$

- **Hochpassfilter (high-pass filter)** Dies sind Filter, die niedrige Frequenzen praktisch ausblenden, hohe Frequenzen hingegen praktisch unverändert lassen. Beispiel:

  $$m(v) = 1 - \chi_{[-\omega,\omega]}$$

- **Bandpassfilter (band-pass filter)** Dies sind Filter, die sowohl niedrige als auch hohe Frequenzen praktisch ausblenden, mittlere hingegen praktisch unverändert lassen. Beispiel:

  $$m(v) = \chi_{[-\omega_2,\omega_2]-[-\omega_1,\omega_1]}$$

  mit $\omega_1 < \omega_2$.

Das signifikanteste und einfachste Beispiel eines Tiefpassfilters liefert der Satz über die beste Approximation über den Operator $L_2 \ni f \to W(f) = f * (2\pi^{-m}W)$ bzw. $[W(f)]^\wedge = \hat{g}^* = \chi_W \hat{f}$, d. h. die Frequenzen aus W werden durchgelassen (alle anderen werden herausgefiltert). Dies führt automatisch zu Klassen $B_p(W)$, unterstreicht also deren Bedeutung.

2.3.3 Abtasttheorem für bandbegrenzte Funktionen

Zunächst wollen wir zeigen, dass bandbegrenzte Funktionen eine bemerkenswerte Interpolationseigenschaft besitzen, sie können mit Hilfe von abzählbar vielen Funktionswerten (Abtastwerten oder 'samples') exakt dargestellt werden. Ein solches Ergebnis wurde zuerst vom Mathematiker E. T. Whittaker 1915 und 1949 von Shannon (mit Vorläufer Kotelnikov 1933) für die Nachrichtentechnik entdeckt. Wir wollen hier eine allgemeine Version angeben und benötigen dazu

Definition 2.11. *Eine beschränkte Teilmenge W des $\mathbb{R}^m$ heißt* Fundamentalgebiet des $\mathbb{R}^m$ *(bezüglich der Translation 1), falls die Mengen $k + W$, $k \in \mathbb{Z}^m$, paarweise disjunkt sind, d. h. wenn $\forall j \neq k : (j + W) \cap (k + W) = \emptyset$ und falls die Vereinigung $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^m} (k + W)$ ganz $\mathbb{R}^m$ überdeckt.*

Der folgende Satz wurde ursprünglich (für $m = 1$) von Whittaker gezeigt, von Shannon auf die Signalverarbeitung angewendet und von Kotelnikov verallgemeinert.

Satz 2.13 (Abtasttheorem). *Es sei $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ bandbegrenzt mit Spektrum $\omega \cdot W$ sei ein Fundamentalgebiet des $\mathbb{R}^m$. Dann gilt, falls die Folge $\{f(2\pi k/\omega\}$ der Abtastwerte in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ liegt, im Sinne der $L_2(\mathbb{R}^m)$-Norm*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) \tag{2.41}$$

wobei $W(x)$ durch (2.12) definiert Transferfunktion von W ist. Für die Fouriertransformierte von f gilt im Sinne der L_2-Norm

$$\hat{f}(v) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \chi_W(v/\omega) \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) \mathrm{e}^{-2\pi i k v/\omega} \tag{2.42}$$

Beweis. Wegen $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und $\operatorname{supp}\hat{f} \subset \omega W$ ist f nach Lemma 2.7 eine ganze Funktion, also insbesondere stetig. Wir führen dann $\psi(u) := \hat{f}(u\omega/2\pi)$ ein. Nach dem Satz von Plancherel ist $\psi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und mit der Fourier-Umkehrtransformation folgt

$$\mathcal{F}[\psi](x) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \mathcal{F}\left[\hat{f}\right]\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = (2\pi)^m f\left(\frac{-2\pi x}{\omega}\right)\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m. \tag{2.43}$$

Dann betrachten wir die Periodisierung $\psi^*(u) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} \psi(u - 2\pi j)$. Es ist $\operatorname{supp}\psi = 2\pi W$ und $\operatorname{supp}\psi(x+2\pi j) \cap \operatorname{supp}\psi(x+2\pi l) = \emptyset \quad \forall j \neq k$ nach Voraussetzung. Also gilt

$$\chi_{2\pi W}(u)\psi^*(u) = \psi(u), \qquad \psi^*(u + 2\pi k) = \psi^*(u) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^m,$$

wobei $\chi_{2\pi W}$ die charakteristische Funktion von $2\pi W$ ist. Es ist $\psi^*(u) \in L_1(\mathbb{T}^m)$

wegen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^m} |\psi^*(u)|\,du &\le \int_{\mathbb{T}^m} \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} |\psi(u+2\pi j)|\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |\psi(u)|\,du = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \int_{\mathbb{R}^m} \left|\hat{f}(v)\right|\,dv \\ &\le \sqrt{\operatorname{meas} W}\,\frac{2\pi}{\sqrt{\omega}}\left\|\hat{f}\right\|_2 < \infty\end{aligned}$$

Daher können wir die Fourierkoeffizienten bilden und erhalten mit Lemma 2.6

$$[\psi^*]^\wedge[k] = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} \psi^*(u)\mathrm{e}^{-iku}\,du = \frac{1}{(2\pi)^m}\hat{\psi}(v) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m f\left(\frac{-2\pi}{\omega}\right).$$

Nach Voraussetzung ist die Folge $\{[\psi^*]^\wedge[k]\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$ der Abtastwerte daher in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ und mit dem Satz von Riesz-Fischer folgt (k durch $-k$ ersetzen)

$$\psi^*(u) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)\mathrm{e}^{-iku} \tag{2.44}$$

im L_2-Sinn, da zunächst die rechte Seite im L_2-Sinn definiert ist und wegen der Eindeutigkeit der Fourierreihe in $L_1(\mathbb{T}^m)$ mit $\psi^*(u)$ übereinstimmen muss. Es folgt

$$\hat{f}\left(\frac{u\omega}{2\pi}\right) = \psi(u) = \chi_{2\pi W}(u)\psi^*(u) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \chi_{2\pi W}(u)\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)\mathrm{e}^{-iku}$$

Hieraus folgt (2.42) mit $v = u\omega/2\pi$ wegen $\chi_{\alpha W}(u) = \chi_W(u/\alpha)$. Da dies im L_2-Sinn gilt, können wir auf beide Seiten die Fouriertransformation im L_2-Sinn anwenden und es folgt mit Lemma 2.4, Teil 1 und 2

$$\begin{aligned}f(-x) &= \frac{1}{\omega^m}\mathcal{F}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)\chi_W\left(\frac{v}{\omega}\right)\mathrm{e}^{-2\pi ikv/\omega}\right](x) \\ &= \frac{1}{\omega^m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)\omega^m W\left(-\omega(x+2\pi k/\omega)\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)W(-\omega x - 2\pi k)\end{aligned}$$

nach Definition von $W(x)$ in (2.34). □

Korollar 2.7. *Für bandbegrenzte Funktionen mit Spektrum ωW gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathrm{e}^{-ivx}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)\mathrm{e}^{2\pi ikv/\omega},$$

d. h. die Diskretisierung des Fourierintegrals mittels der Trapezregel liefert die exakte Formel, falls die Gitterweite $2\pi/\omega =: \Omega$ beträgt.

Das einfachste Beispiel eines Fundamentalgebietes im $\mathbb{R}^m$ ist der (symmetrisch liegende) Würfel $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^m$, für den man sofort die definierenden Eigenschaften zeigen kann. Die entsprechende Filterfunktion lautet

$$W(x) = \prod_{l=1}^m \operatorname{sinc}\frac{x_l}{2}, \qquad x = (x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m \tag{2.45}$$

Im Falle $m = 1$ liefert (2.41) dann die klassische 'cardinal series' von E. T. Whittaker (ω ersetzt durch $\Omega := \omega/2\pi$)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}\big(\pi(\Omega t - k\big), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.46}$$

mit der Sincfunction $\operatorname{sinc} x \equiv (\sin x)/x$. In der Sprechweise der Nachrichtentechnik bedeutet dies, dass das *Signal* $f(t)$ mit der *Bandbreite* $\Omega/2$, d. h. mit der Frequenzdarstellung

$$f(t) = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{f}(v) \mathrm{e}^{2\pi i t v}\, dv,$$

exakt dargestellt werden kann mittels der Abtastwerte $\{f(k/\Omega)\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Man sagt, es wird abgetastet *mit der Frequenz* Ω (bzw. *in Zeitintervallen der Größe* $1/\Omega$ oder auch *mit der Abtastrate* $1/\Omega$.*)*

Eine andere Anwendung des obigen Satzes ergibt sich z. B. durch die Wahl

$$W = \Big((-1, -1/2] \cup (1/2, 1]\Big)^m \tag{2.47}$$

wo man ebenfalls die in der Definition geforderten Eigenschaften leicht nachprüfen kann. Wegen der Bedeutung des Abtasttheorems geben wir noch eine andere Herleitung mittels Methoden aus der Theorie der Hilbert-Räume an.

Definition 2.12. *Eine beschränkte, meßbare Menge $W \subseteq \mathbb{R}^m$ nennen wir* Whittaker-Menge, *falls die Funktionenfolge $\big\{\exp(2\pi i k x)\big\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$ ein vollständiges orthonormiertes System für den Hilbert-Raum $L_2(W)$ bildet.*

Bemerkung 2.12. Mit der durch (2.34) definierten Transferfunktion $W(x)$ gilt: W ist eine Whittaker-Menge genau dann, wenn

$$W(2\pi j) = \int_W \mathrm{e}^{-2\pi i j x}\, dx = \delta_{,0} j$$

gilt. Ein Beispiel für eine Whittaker-Menge ist das eben betrachtete Fundamentalgebiet $[-1/2, 1/2]^m$. ♢

Wir können nun folgende Variante des Abtastsatzes beweisen:

Satz 2.14. *Es sei W eine Whittaker-Menge und $W(x)$ sei ihre durch (2.12) erklärte Transferfunktion. Dann folgt mit $\Omega = \omega/2\pi$*

1. *Die Funktionen $\Big\{\omega^{m/2} W(\omega x/2\pi k)\Big\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$ bilden eine ONB (Orthonormalbasis) von $L_2(\mathbb{R}^m)$.*
2. *Für jedes $g \in B_2(\omega W)$ gilt im Sinne der $L_2(\mathbb{R}^m)$-Norm*

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} g\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x/2\pi k). \tag{2.48}$$

Beweis. Es gilt

$$W(\omega v - 2\pi j) = \int_W \mathrm{e}^{-i(tv\omega - 2\pi j t)}\, dt = \mathcal{F}\left[\chi_W(t) \mathrm{e}^{-2\pi i j t}\right](\omega v)$$

Weil wir W als Whittaker-Menge vorausgesetzt haben ergibt sich mit dem Isometriesatz 2.5, dass

$$\omega^m \big(W(\cdot\omega - 2\pi j), W(\cdot\omega - 2\pi k)\big) = \\ = \int_W \mathrm{e}^{2\pi i(j-k)t}\, dt = \delta_{j,k} \quad (2.49)$$

womit schon Teil 1 gezeigt ist. Zum Beweis von Teil 2 beachten wir zunächst, dass für jedes $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ nach der zweiten Darstellung von $W(v\omega - 2\pi j)$

$$\big(g, W(\cdot\omega - 2\pi j)\big) = \int_{\mathbb{R}^m} g(v)\mathcal{F}\left[\chi_W(t)\mathrm{e}^{-2\pi itj}\right](\omega v)\, dv \\ = \frac{1}{\omega^m}\int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(t)\chi_W\left(\frac{t}{\omega}\right)\mathrm{e}^{2\pi jtj/\omega}\, dt = \int_W \hat{g}(\omega t)\mathrm{e}^{\pi itj}\, dt.$$

gilt . Hieraus schließen wir, dass das System $\big\{W(x\omega - 2\pi k)\big\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$ vollständig bezüglich des abgeschlossenen Unterraums $B_2(\omega W)$ von $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, denn mit obiger Formel folgt aus $\big(g, W(\cdot\omega - j)\big) = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}^m$ (nach Voraussetzung an W), dass $\hat{g}(\omega t) = 0$ fast überall für $t \in W$ ist. Zusammen mit $g \in B_2(\omega W)$ ergibt dies $\hat{g}(v) = 0$ fast überall und somit $g \equiv 0$. Aus der allgemeinen Theorie (Satz 1.3) schließen wir dann

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \omega^m \big(g, W(\cdot\omega - 2\pi k)\big) W(x\omega - 2\pi k), \quad g \in B_\omega^{(2)}(W).$$

Spezialisieren wir obige Formel für das Skalarprodukt auf $\operatorname{supp}\hat{g} \subseteq \omega W$, so folgt

$$\omega^m \big(g, W(\cdot\omega - 2\pi k)\big) = \omega^m \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(\omega t)\mathrm{e}^{2\pi ikt}\, dt = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}]\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) = g\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) \quad (2.50)$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 2.13. Vergleicht man die Voraussetzungen von Satz 2.13 und Satz 2.14 fällt auf, dass letzterer scheinbar schwächere Voraussetzungen hat, er fordert nämlich nicht $\big\{f(2\pi k/\omega)\big\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$. Diese Eigenschaft folgt aber aus (2.50). Für $f \in B_2(\omega W)$ gilt nämlich

$$\|f\|_2^2 = \omega^m \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \Big|\big(f, W(\cdot\omega - 2\pi k)\big)\Big|^2 = \sum_{k\mathbb{Z}^m} \omega^m \left|f\left(\frac{2\pi k}{\Omega}\right)\right|^2 \quad (2.51)$$

weil $\omega^{m/2}\big\{W(.\,\omega - 2\pi k)\big\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$ nach Teil 1 eine ONB in $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, die bezüglich $B_2(\omega W)$ vollständig ist. Schließlich beachte Teil 3 von Satz 1.3. ♢

Bemerkung 2.14. Die durch die Translate von $W(x)$ erzeugten Räume sind spezielle translationsinvarianten Räume. Letztere werden wir später noch allgemein untersuchen. Satz 2.14 wird dann als Speziallfall eines allgemeineren Kriteriums erscheinen, das sowohl notwendig als auch hinreichend ist. In diesem Rahmen ist dann auch eine Erweiterung durch eine allgemeinere Wahl der Transferfunktion möglich: etwa $W(x) = \int_W K(x,t)\, dt$ mit geeignetem Kern $K(x,t)$ um z. B. eine bessere Lokalisierung von $W(x)$ zu erreichen. ♢

Wir zeigen noch, dass die Voraussetzungen von Satz 2.14 nicht nur hinreichend sondern auch notwendig sind.

Korollar 2.8. *Für ein beschränktes Gebiet W sei die Transferfunktion $W(x)$ wie in Satz 2.14 definiert. Dann gelten die Aussagen 1 und 2 von Satz 2.14 genau dann, wenn das Gebiet W eine Whittaker-Menge ist.*

Beweis. In Formel (2.49) wurde benutzt, dass

$$\omega^m \Big(W\left(\cdot\omega - 2\pi j\right), W\left(\cdot\omega - 2\pi k\right) \Big) = \int_W \mathrm{e}^{2\pi i(j-k)t}\, dt$$

gilt. Bilden die $\left\{W(\cdot\omega - 2\pi k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$ also nach Aussage 1 ein orthonormales System, so muss dies entsprechend für die $\left\{\exp(2\pi i j x)\right\}_{j\in\mathbb{Z}^m}$ auf W gelten. Gilt weiter Aussage 2, so ist zu zeigen, dass für $f \in L_2\left(\mathbb{R}^m\right)$ aus

$$\int_W f(x)\mathrm{e}^{2\pi i j x}\, dx = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}^m \tag{2.52}$$

$f \equiv 0$ in W folgt. Dazu setze man

$$g(t) := \begin{cases} f(t/\omega), & t \in \omega W \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $G(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[g\right](x)$. Dann gilt offenbar $G(x) \in B_2(\omega W)$ und aus (2.50) und (2.52) folgt

$$0 = \int_{\omega W} f\left(\frac{t}{\omega}\right)\mathrm{e}^{2\pi i j t/\omega}\, dt = \int_{\mathbb{R}^m} g(t)\mathrm{e}^{2\pi i j t/\omega}\, dt = (2\pi)^m G\left(\frac{j}{\Omega}\right)$$

für alle $j \in \mathbb{Z}^m$. Aus (2.48) folgt dann aber $G(x) = 0$ und somit $g(t) = 0$, d. h. $f(x) = 0$ fast überall in W. □

2.3.4 Approximation von nicht bandbegrenzten Funktionen

Es soll nun der Fall beliebiger Funktionen in $L_1\left(\mathbb{R}^m\right)$ oder $L_2\left(\mathbb{R}^m\right)$ betrachtet werden. Dann ist zunächst zu untersuchen, welcher Fehler entsteht, wenn man mit bandbegrenzten Funktionen approximiert. Die erste Frage ist dann die nach der besten Approximation mit solchen Funktionen. Zur Frage der besten Approximation durch bandbegrenzte Funktionen in der L_p-Norm sei auf Anhang 2.5 verwiesen.

Im Fall der L_2-Approximation ist diese Frage leicht zu beantworten und durch Satz 2.12 gegeben.

Wie bereits zu Satz 2.12 bemerkt, stellt $\hat{g}^* = \chi_W \hat{f}$ die einfachste Form eines Tiefpassfilters dar: nur die Frequenzen aus W treten in g^* auf. Die Formel (2.12) für g^* als Faltung ist jedoch für eine praktische Berechnung zu kompliziert. Daher möchte man eher die Reihe (2.41) zur Approximation verwenden und muss dann einen zusätzlichen Fehler in Kauf nehmen. Außerdem noch eine Reihe durch eine endliche Teilsumme ersetzt werden. Läßt man diesen Abschneidefehler außer Acht, so bedeutet dies zu untersuchen, welcher zusätzliche Fehler in Satz 2.12 durch die idealisierte Annahme der Bandbegrenztheit von f entsteht.

Satz 2.15 (Abtasttheorem für nicht bandbegrenzte Funktionen). *Es seien $f, \hat{f} \in L_1\left(\mathbb{R}^m\right)$. Ferner sei W ein Fundamentalgebiet des $\mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$f(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \left[1 - \mathrm{e}^{ixl\omega}\right] \int_{\omega W + l\omega} \hat{f}(u)\mathrm{e}^{ixu}\, du \tag{2.53}$$

Beweis. Gegenüber dem Beweis von Satz 2.13, der durch seinen Aufbau die *Kardinalreihe* ('cardinal series') (2.41) motivierte, gehen wir diesmal direkt von dieser Reihe aus. Für festes $x \in \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$g_x(u) := f\Big(\frac{u}{\omega}\Big) W(\omega x - u),$$

so dass

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} g_x(2\pi k). \tag{2.54}$$

Wegen $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ ist f selbst stetig (dies gilt nach Lemma 2.3 und Satz 2.4 über die inverse L_1-Fouriertransformation) und so auch $g_x(u)$ für festes x. Ferner ist $g_x(u) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ weil $W(\omega x - u)$ nach Lemma 2.3 gleichmäßig beschränkt ist. Wir können also versuchen, die Poisson-Summationsformel (2.29) auf obige Summe anzuwenden. Dazu berechnen wir für $l \in \mathbb{Z}^m$

$$\hat{g}_x(l) = \int_{\mathbb{R}^m} g_x(u) \mathrm{e}^{-ilu}\, du = \int_{\mathbb{R}^m} f\Big(\frac{u}{\omega}\Big) W(\omega x - u) \mathrm{e}^{-ilu}\, du.$$

Nun liegen sowohl $f(u/\omega)\exp(-ilu)$ als auch $\chi_W(v)$ in $L_1(\mathbb{R}^m)$, so dass wir die L_1-Parsevalformel von Satz 2.4, Teil 1, anwenden können. Dies ergibt mit Lemma 2.4, Teil 1

$$\begin{aligned}
\hat{g}_x(l) &= \int_{\mathbb{R}^m} f\Big(\frac{u}{\omega}\Big) \mathrm{e}^{-il\omega(u/\omega)} \left[\chi_W(v)\mathrm{e}^{i\omega x v}\right]^\wedge(u)\, du \\
&= \omega^m \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\left[f(u)\mathrm{e}^{-il\omega u}\right](\omega v)\chi_W(v)\mathrm{e}^{iv\omega x}\, dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\left[f(u)\mathrm{e}^{-il\omega u}\right](v)\chi_W\Big(\frac{v}{\omega}\Big)\mathrm{e}^{ixv}\, dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v + l\omega)\chi_W\Big(\frac{v}{\omega}\Big)\mathrm{e}^{ixv}\, dv = \int_{\omega W} \hat{f}(v + l\omega)\mathrm{e}^{ixv}\, dv
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} |\hat{g}_x(l)| \le \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \int_{\omega W} \left|\hat{f}(v + l\omega)\right| dv = \int_{\mathbb{R}^m} \left|\hat{f}(v)\, dv\right| < \infty,$$

da laut Voraussetzung

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^m} (\omega W + l\omega) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^m} (W + l) = \mathbb{R}^m.$$

Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Poisson-Summationsformel aus Korollar 2.4 auf (2.54) erfüllt. Es folgt für festes x

$$(2\pi)^m \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \hat{g}_x(l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \int_{\omega W + l\omega} \hat{f}(u)\mathrm{e}^{ix(u - l\omega)}\, du.$$

Auf der anderen Seite kann man $f(x)$ über die inverse L_1-Fouriertransformation darstellen,

$$(2\pi)^m f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(u)\mathrm{e}^{iux}\, du = \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \int_{\omega W + l\omega} \hat{f}(u)\mathrm{e}^{iux}\, du$$

Subtraktion beider Seiten ergibt die Restgliedformel (2.53). □

Aus diesem Satz läßt sich eine einfachere Fehlerabschätzung gewinnen.

Korollar 2.9. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.15 gilt*

$$\left| f(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) \right| \le 2 \int_{\mathbb{R}^m \setminus \omega W} \left|\hat{f}(u)\right| du. \tag{2.55}$$

Speziell gilt

$$f(x) = \lim_{\omega\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k)$$

gleichmäßig in x, falls W absorbierend in $\mathbb{R}^m$ ist, d. h. es zu jeder Kugel $K \subset \mathbb{R}^m$ ein $\omega > 0$ gibt, so dass $K \subset \omega W$ gilt.

Beweis. Für $l = 0$ gilt $|1 - \exp(ixl\omega)| = 0$ und für $l \neq 0$ gilt $|1 - \exp(ixl\omega)| \le 2$. Hieraus folgt sofort die obige Abschätzung und wegen $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ ergibt folgt auch sofort die Konvergenzaussage. □

Mit diesem Korollar ist auch das Abtasttheorem 2.13 nochmals unter anderen Voraussetzungen bewiesen worden. Es bedeutet anschaulich, dass man ein Signal f mit umso höherer Frequenz abtasten muss, je größer seine Bandbreite ist, und dass dieser Prozess für allgemeine Signale konvergent ist.

Besonders instruktiv ist der Fall $m = 1$, wenn $f(t)$ die Amplitude eines zeitabhängigen Signals bedeutet und $W = [-1/2, 1/2]$. Dann folgt mit (2.45) die Abschätzung

$$\left| f(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}\big((\Omega t - k)\pi\big) \right| \le 2 \int_{|u|\ge\pi\Omega} \left|\hat{f}(u)\right| du, \Omega := \frac{\omega}{2\pi}.$$

In den Fehler gehen also die Frequenzen größer als $\pi\Omega$ ein, wenn die Zeit, die zwischen zwei Messungen von $f(t)$ vergeht gleich $1/\Omega$ ist. In der Signalanalysis heißt Ω die Nyquist-Rate. Was passiert nun, wenn ein Signal $f \in B_{2\pi\Omega}(W)$ mit $\Omega' \le \Omega$ abgetastet wird, also beim sogenannten 'Undersampling'? Es gilt dann $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-2\pi\Omega', 2\pi\Omega']$ und die obige Formel liefert (für Ω' anstelle von Ω)

$$\left| f(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\Omega'}\right) \operatorname{sinc}\big((\Omega' t - k)\pi\big) \right| \le 2 \int_{\Omega'\le|u/2\pi|\le\Omega} \left|\hat{f}(u)\right| du,$$

Dies kann so interpretiert werden, dass die in $B_{2\pi\Omega}$ vorhandenen Frequenzen größer als $2\pi\Omega'$ stören. Man nennt diesen Effekt 'Aliasing', siehe etwa [Babo] oder [Papou].

Man kann natürlich auch mit 'Oversampling' arbeiten. Dies ist bei akustischen Signalen auch tatsächlich üblich. Im Idealfall kann das Ohr Frequenzen bis 20 kHz wahrnehmen. Nach dem shannonschen Abtasttheorem sollte also ein akustisches Signal mit mindestens 40 kHz abgetastet werden. Bei den üblichen CD-Spielern beläuft sich die Abtastrate normalerweise auf 44 kHz. Der Grund dafür ist, dass Oversampling einen stabilisierenden Effekt hat. Um dies einzusehen ersetzen wir $f(x)$ durch $F(x) := f(\lambda x)$ und tasten f mit Werten $f\big(2\pi k\lambda/\omega)\big)$,$\lambda \in (0,1)$,d. h. F mit Werten $2\pi k/\omega$ wie bisher ab.Dann gilt für $\hat{F}$ die Entwicklung (2.41).Weil aber $\hat{f}$ seinen Träger in $\lambda\omega \cdot W$ hat, kann man in dieser Entwicklung $\chi_W(v/\omega)$ durch $\hat{g}_\lambda(x/\omega)$ ersetzen, wobei $g_\lambda \in L_2(\mathbb{R}^m)$ so sein soll, dass seine Fouriertransformierte gleich

$$\hat{g}_\lambda(v) = \begin{cases} 1, & |v| \le \frac{\lambda}{2} \\ 1 - \frac{|v|-\lambda/2}{(1-\lambda)/2}, & \frac{\lambda}{2} \le |v| \le \frac{1}{2} \\ 0, & |\xi| \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

ist.Bildet man dann die inverse Fouriertransformation, so erhält man die Entwicklung (2.40) mit der Transferfunktion $g_\lambda(x)$,die schneller abfällt als $W(x) = \operatorname{sinc}(x/2)$,weil $\hat{g}_\lambda(v)$ glatter als $\chi_W(v)$ ist.

Diese Idee lässt sich natürlich noch ausbauen, so dass eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ noch durch andere Reihen mit Translaten von verallgemeinerten Sincfunktionen approximiert werden kann. Eine weitere Möglichkeit bilden duch Summationsprozesse der Reihe (2.41). Eine kanonische Form ergibt sich durch die beste Approximation in L_2.

Lemma 2.11. *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und W sei eine Whittaker-Menge. Dann ist die beste Approximation $g^* \in B_2(\omega W)$ zu f gegeben durch*

$$g^*(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \omega^m \Big(f, W(\cdot\omega - 2\pi k)\Big) W\big(2\pi(\Omega x - k)\big). \tag{2.56}$$

wobei $\Omega = \omega/2\pi$. Im Falle $f \in B_2(\omega W)$ gilt $g^* = f$ und $\Big(f, W\big(2\pi(\cdot\Omega - k)\big)\Big) = \Omega^m f(k/\Omega)$. Der Fehler der Reihe in (2.56) ist durch Formel (2.35) mit ωW statt W gegeben.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass die obige Darstellung jene aus Satz 2.12 ergänzt und daraus ergibt sich auch die Aussage über den Fehler.

Durch Anwendung von Satz 1.3 auf die nach Satz 2.14 vorliegende ONB

$$\Big\{\omega^{m/2} W(\cdot\omega 2\pi - k)\Big\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$$

für $g^* \in B_2(\omega W)$ ergibt sich dann (2.56) zunächst für g^* statt f in den Skalarprodukten. Da aber $f - g^*$ orthogonal zu allen $W\big(2\pi(.\,\Omega - k)\big)$ ist, kann g^* durch f ersetzt werden. Dann wende man (2.50) an. □

Vergleicht man nun den Fehler in (2.55), der durch die Samplingreihe (2.41) entsteht, mit dem Fehler der besten Approximation in (2.55), so sieht man mit (2.35), dass er gegenüber diesem nur um einen Faktor 2 schlechter ist.

Wir wollen nun auch den zusätzlichen Fehler untersuchen, der entsteht, wenn man die Reihen (2.41) und (2.56) durch endliche Teilsummen ersetzt.

Satz 2.16 (Abschneidefehler).

1. *Für die abgebrochene Reihe in (2.41) gilt die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned}\left\| f(x) - \sum_{|k|\le N} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) W\big(2\pi(\Omega x - k)\big) \right\|_2 \le{}& \sqrt{\Omega^m \sum_{|k|<N} \left| f\left(\frac{k}{\Omega}\right)\right|^2} \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^m\setminus\omega W} \left|\hat{f}(u)\right| du\end{aligned} \tag{2.57}$$

2. *Die abgebrochene Reihe*

$$g_N^*(x) := \sum_{|k|\le N} \Omega^m \Big(f, W\big(2\pi(.\,\Omega - k)\big)\Big)_2 W\big(2\pi(\Omega x - k)\big)$$

ist die beste Approximation aus

$$S_N \equiv S_{N,\omega} := \operatorname{span}\Big\{ W\big(2\pi(\Omega x - k)\big)\Big\}_{|k|\le N}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\|f-g_N^*\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^m}\operatorname{dist}\big(f;B_2(\omega W)\big)^2_{L_2(\mathbb{R}^m)}\\ &\quad+\Omega^m\operatorname{dist}\left(\hat g^*;\Pi_N^*\right)^2_{L_2(W)},\end{aligned}\tag{2.58}$$

wobei nach Lemma 2.11 $\hat g^* = \hat f\cdot\chi_W$ zu beachten ist und Π_N^* die Menge der trigonometrischen Polynome vom totalen Grad kleiner als N bezeichnet.

Beweis. Zu (1): Dies folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\left\|f-\sum_N\right\|_2 \le \left\|f-\sum_\infty\right\|_2+\left\|\sum_\infty-\sum_N\right\|_2,$$

dabei steht $\sum_\infty$ für die vollständige Reihe (2.41) und $\sum_N$ für die abgebrochene Reihe. Ferner benutzt man die Abschätzung (2.55) und die *Parsevalidentität*

$$\left\|\sum_{|k|>N} f\left(\frac{k}{\Omega}\right)W\big(2\pi(\Omega x+k)\big)\right\|_2 = \sqrt{\Omega^m\sum_{|k|>N}\left|f\left(\frac{k}{\Omega}\right)\right|^2},$$

die analog zu (2.51) gilt.

Zu (2): Benutzt man wie im Beweis von Satz 2.14 die Identität

$$\mathcal{F}\left[W\big(2\pi(\Omega x-k)\big)\right](v) = \frac{1}{\Omega^m}\chi_{\omega W}(v)\mathrm{e}^{2\pi ikv/\omega},\tag{2.59}$$

so erhält man die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}\|f-g_N^*\| = \inf_{g\in S_N}\|f-g\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^m}\inf_{g\in S_N}\left\|\hat f-\hat g\right\|_2^2\\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\inf_{a_k\in\mathbb{R}}\left\|\hat f(v)-\chi_{\omega W}(v)\sum_{|k|\le N}a_k\mathrm{e}^{-2\pi ikv/\omega}\right\|_2^2\\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\left[\int_{\mathbb{R}^m\setminus\omega W}\left|\hat f(v)\right|^2dv+\left\|\chi_{\omega W}(v)\left[\hat f(v)-\sum_{|k|\le N}a_k\mathrm{e}^{-2\pi ikv/\omega}\right]\right\|_2^2\right]\end{aligned}$$

Mit der Substitution $v = u\omega$ und der Fehlerformel (2.35) folgt dann die Aussage von Teil 2. □

Zur Abrundung wollen wir noch Abschätzungen für die im vorangegangenen Lemma auftretenden Fehler mittels Sobolevnormen angeben, so dass die Fehlerordnungen bezüglich ω sichtbar werden.

Lemma 2.12.

1. *Es sei W ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^m$ und $\varrho>0$ der Radius der größten ganz in W liegenden Kugel des $\mathbb{R}^m$. Dann gilt für f aus dem Sobolevraum $W^{r,2}(\mathbb{R}^m)$, $r=1,2,\ldots$, (siehe Definition 2.1) die Abschätzung*

$$\operatorname{dist}\big(f;B_2(\omega W)\big)_{L_2(\mathbb{R}^m)} \le \frac{C}{(\omega\varrho)^r}\sum_{|\beta|=r}\left\|D^\beta f\right\|_2\tag{2.60}$$

wobei $C>0$ eine nur von r und m abhängige Konstante ist.

2. *Es sei* $W = [-1/2, 1/2]^m$ *und* $g \in W^{r,2}(2\pi W)$ *sei* 2π*-periodisch. Dann gilt für* $r = 1, 2, \ldots$ *die Abschätzung*

$$\operatorname{dist}\left(g; \Pi_N^*(\mathbb{R}^m)\right)_{L_2(2\pi W)} \leq \frac{C}{N^r} \sum_{|s|=r} \|D^s g\|_{r,2;2\pi W} \tag{2.61}$$

Beweis. Zu (1): Nach Formel (2.55)haben wir abzuschätzen

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus \omega W} \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv \leq \int_{|v| \geq \omega \varrho} \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv \leq \frac{1}{(\omega \varrho)^{2r}} \int_{\mathbb{R}^m} \left(1 + |v|^2\right)^r \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv.$$

Nach Korollar 2.10 in Abschnitt 2.3.4 kann das letzte Integral durch die Sobolev-Halbnorm in (2.60) bis auf eine Konstante $C > 0$ abgeschätzt werden.

Zu (2): Zunächst gilt

$$\operatorname{dist}\left(g; \Pi_N^*(\mathbb{R}^m)\right)^2_{L_2(2\pi W)} = \sum_{|k|>N} |\hat{g}[k]|^2 \leq \frac{1}{N^{2r}} \sum_{|k|<N} |k|^{2r} |\hat{g}(k)|^2$$

Dann weist man mittels partieller Integration nach ,dass

$$\begin{aligned} k^s \hat{g}[k] = \hat{g}[k] \prod_{j=1}^m k_j^{s_j} &\equiv \frac{1}{(2\pi)^m} i^s \int_{2\pi W} \prod_{j=1}^m (-ik_j)^{s_j} \mathrm{e}^{-iku} g(u)\, du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} (-i)^s \int_{2\pi W} \mathrm{e}^{-iku} D^s g(u)\, du = (-i)^s \left[D^s g\right]^\wedge [k] \end{aligned}$$

für jede schwache partielle Ableitung D^s, $s = (s_1, \ldots, s_m)$, mit $|s| \leq r$ gilt. Hierbei ist wesentlich, dass g als Funktion in $W^{r,2}(2\pi W)$ 2π-periodisch ist, da nur dann die Randterme verschwinden ($g \in L_2(2\pi W)$ genügt dazu nicht). Ferner gilt

$$|k|^{2r} |\hat{g}(k)|^2 = \left(\sum_{i=1}^m k_i^2\right)^r |\hat{g}[k]|^2 \leq C' \left(\sum_{|s|=r} |k^s \hat{g}[k]|\right)^2$$

mit einer Konstanten $C' > 0$. Mit dem Vorigen und dem Satz von Riesz-Fischer folgt daraus die Behauptung wegen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^{2r} |\hat{g}[k]|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \sum_{|s|=r} \left|\left[D^s g\right]^\wedge [k]\right|^2 = C \sum_{|s|=r} \|D^s g\|^2_{r;2;2\pi W}$$

mit einer Konstanten C . □

Zur Anwendung der Fehlerabschätzung (2.61) auf den Fall von Satz 2.16, Teil 2 sei noch bemerkt, dass sie nur bedingt anwendbar ist, denn für $g(u) = \hat{g}^*(u) = \hat{f}(u\Omega)\chi_{2\pi W}(u)$ ist diese Funktion nur mäßig glatt, wenn sie periodisch fortgesetzt wird. Dies ist aber notwendig, um (2.61) anwenden zu können und zeigt, dass der wesentliche Fehler dadurch entsteht, dass die im Allgemeinen nicht periodische Funktion $\hat{f}(u\Omega)\chi_{2\pi W}(u)$ durch periodische Funktionen approximiert wird.

Bemerkung 2.15. Die beiden Abschätzung in Lemma 2.12 wurden angegeben, um die Analogie zwischem dem periodischen und dem Fall des $\mathbb{R}^m$ herauszustellen. Solche Fehlerabschätzungen für die (beste) Approximation von Funktionen aus Sobolevräumen durch bandbegrenzte Funktionen od er trigonometrische Polynome bilden ein zentrales Thema der klassischen Approximations-Theorie und sind auch für die späteren Betrachtungen von Bedeutung. Es gibt allgemeinere Abschätzungen vom Typ des obigen Lemmas für $W^{r,p}$-Räume mit beliebigem p, $1 \leq p \leq \infty$. Man kann sie durch Spezialisierung von Satze 2.2 über Dirac-Folgen gewinnen, vergleiche Anhang 2.5. ♢

2.4 Fourieranalysis und Distributionen

2.4.1 Zur Distributionstheorie

Die Grundidee der Distributionstheorie ist das Prinzip der Dualität, d. h. die zu betrachtenden Operationen wie Multiplikation, Translation, Dilatation, Differentiation, Faltung und so weiter werden zuerst auf Klassen von "sehr guten Funktionen", den sogenannten Testräumen untersucht, und dann durch "Hinüberwälzen" auf die Dualräume auch für "schlechte Funktionen" bzw. Distributionen. Durch geeignete Darstellungs- bzw. Regularitätssätze können die gemachten Aussagen dann wieder für gewöhnliche Funktionen (z. B. in Sobolev-Räumen) zurückgewonnen werden.

Der einfachste Testraum auf $\mathbb{R}^m$ ist der sogenannte schwarzsche Raum $\mathcal{D} := C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Für ihn gilt

Lemma 2.13. *$\mathcal{D}$ liegt dicht in $L_p(\mathbb{R}^m)$ für $1 \le p < \infty$ und in $C_0(\mathbb{R}^m)$, d. h. der Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^m$, die für $|x| \to \infty$ verschwinden.*

Speziell für die Verwendung der Fouriertransformation sind folgende Testräume sehr wichtig:

Definition 2.13. (Schnell abfallende Funktionen) *Der Raum $\mathcal{S}$ der* beliebig oft differenzierbaren, schnell abfallenden Funktionen *ist definiert als die Menge aller $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$, für die jede Seminorm*

$$P_{j,j'}(\varphi) := \sum_{x \in \mathbb{R}^m} \left| x^j \left(D^{j'} \varphi \right)(x) \right| \qquad j, j' \in \mathbb{Z}^m$$

endlich ist.

Lemma 2.14. *Für Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ sei $\{d_k(\varphi,\psi)\}_{k=1}^{\infty}$ eine Anordnung der abzählbar vielen Seminormen $p_{j,j'}(\varphi - \psi)$. Dann bildet $\mathcal{S}$ mit der Metrik*

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(\varphi,\psi)}{1 + d_k(\varphi,\psi)}$$

einen lokal konvexen Raum (genauer einen Fréchet-Raum, d. h. $\mathcal{S}$ ist vollständig).

Lemma 2.15. *$\mathcal{S}$ liegt dicht in $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, sowie in $C_0(\mathbb{R}^m)$. Darüber hinaus liegt der Testraum $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{S}$ bezüglich dessen Topologie.*

Auf $\mathcal{S}$ läßt sich natürlich die Fouriertransformation, mit $\mathcal{F}$ bezeichnet, bilden. Es gelten dann alle in Lemma 2.4 bereits für $L_1(\mathbb{R}^m)$ formulierten Eigenschaften bezüglich der Fouriertransformation auf der einen und Translation, Dilatation, Differentiation und Faltung auf der anderen Seite. Sie lassen sich leichter als dort direkt verifizieren. Diese grundlegenden Eigenschaften von $\mathcal{S}$ werden formuliert in

Satz 2.17. *Die Fouriertransformation ist eine stetige, lineare und eineindeutige Abbildung von $\mathcal{S}$* auf *$\mathcal{S}$ (in der Topologie von $\mathcal{S}$).*

Beweis. Für $f \in \mathcal{S}$ ist klar, dass

$$\frac{\partial \hat{f}(v)}{\partial v_1} = \frac{1}{\sqrt{1\pi}^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \mathrm{e}^{-ix\cdot v}(-ix_1)\, dx$$

und allgemein gilt

$$(\hat{f})^{(\alpha)}(v) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)(-ix)^{\alpha} \mathrm{e}^{-ix\cdot v}\, dx$$

bzw.

$$\big(P(D)\big)\hat{f}(v) = [P(-ix)f(x)]^{\wedge}(v). \tag{2.62}$$

Ferner folgt mittels partieller Integration

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right](v) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}^m}\int_{\mathbb{R}^m}\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{e}^{-ix\cdot v}\,dx = (-iv_1)\mathcal{F}[f](v)$$

und allgemein

$$\mathcal{F}[P(D)f](v) = P(-iv)\mathcal{F}[f](v). \tag{2.63}$$

Somit gilt für alle P und alle α

$$P(-iv)\Big[\hat{f}(v)\Big]^{(\alpha)} = \big[P(D)\big((-ix)^{\alpha}f(x)\big)\big]^{\wedge}(v).$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned}\left\|P(-iv)\Big(\hat{f}(v)\Big)^{(\alpha)}\right\|_{\infty} &\le \big\|P(D)\big((-ix)^{\alpha}f(x)\big)\big\|_1\\ &\le C\sum_{\beta\le|\alpha|}\sum_{\gamma\le\deg P}\left\|\Big(1+|x|^{\beta}\Big)f^{(\gamma)}(x)\right\|_1 < \infty\end{aligned}$$

d. h. $\hat{f}(v)\in\mathcal{S}$; gleichzeitig folgt daraus die Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, $f\mapsto\hat{f}$. Ferner gilt die Inversionsformel aus (2.4), Teil (3), da $\hat{f}(v)\in\mathcal{S}\subseteq L_1(\mathbb{R}^m)$ ist, also

$$\mathcal{F}\left[\hat{f}\right](x) = f(-x) \text{ oder } \hat{\hat{f}} = \check{f},$$

wobei $\check{f}(x) := f(-x)$. Ebenso gilt $\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\hat{f}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m}\hat{g}(x)f(x)\,dx$ für $f,g\in\mathcal{S}$, weil dies schon in $L_1(\mathbb{R}^m)$ bewiesen wurde. Mit $\hat{f}(x) = \overline{h(x)}$ folgt

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\overline{h}\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m}\mathcal{F}\left[\overline{h}\right](-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m}\overline{\mathcal{F}[h](x)}$$

und daher

$$(g,h) := \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\overline{h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m}\hat{g}(x)\overline{\hat{h}(x)}\,dx = \left(\hat{g},\hat{h}\right)$$

für $g,h\in\mathcal{S}$, d. h. $\mathcal{F}$ ist ein bis auf eine multiplikative Konstante unitärer Operator auf $\mathcal{S}$ und daher auf $L_2(\mathbb{R}^m)$ als Fortsetzung. Diese Fortsetzung ist eindeutig,denn

$$\mathcal{F}[f] := \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}[f_n] \text{ für } \|f-f_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

und

$$\mathcal{F}[f] := \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}[g_n] \text{ für } \|f-g_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

impliziert

$$\|\mathcal{F}[g_n]-\mathcal{F}[f_n]\| = \|g_n-f_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für $f_n, g_n\in\mathcal{S}$. □

Nun geht man wie anfangs bemerkt zu den Dualräumen über.

Definition 2.14. (Temperierte Distributionen) *Die Menge der stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}$ heißt Menge der* temperierten Distributionen *und wird mit $\mathcal{S}'$ bezeichnet.*

Beispiele für Elemente aus $\mathcal{S}'$ sind im Folgenden zusammengestellt:

1. Sei f meßbar auf dem $\mathbb{R}^m$ und ferner gelte

$$f(x)\left(1+|x|^2\right)^{-k} \in L_p(\mathbb{R}^m) \tag{2.64}$$

   für ein festes $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$, d. h. $f \in \mathcal{L}$. Die Klasse $\mathcal{L}$ heißt *Klasse der langsam wachsende Funktionen.* Dann ist

$$L_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

   (dx bezeichnet das Lebesgue-Maß) eine temperierte Distribution. Dies gilt auch für $k = 0$ also $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$. Speziell ist jedes *Polynom* eine langsam wachsende Funktion.

2. μ sei ein temperiertes Borel-Maß, d. h. es gelte

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(1+|x|^2\right)^{-k} d\mu(x) < \infty$$

   für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$L_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\,d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

   ein Element von $\mathcal{S}'$. Das gleiche gilt auch für $k = 0$ wenn μ eine endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}^m$.

3. Punktfunktionale liefern temperierte Distributionen über die Darstellung ($y \in \mathbb{R}^m$ fest)

$$L(\varphi) := \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(y) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

   Im Spezialfall $k = 0$ sind sie als Dirac-Maße oder diracsche δ-Funktionen bekannt.

Weitere temperierte Distributionen gewinnt man durch folgende Operationen auf $\mathcal{S}'$:

1. Ist g eine langsam wachsende Funktion in $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $u \in \mathcal{S}'$, so definiert man das Produkt gu durch

$$(gu)(\varphi) := u(g\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

2. Differentiation mit einem Operator D^α, $\alpha \in \mathbb{Z}^m$, wird erklärt durch

$$(D^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}\, u(D^\alpha \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

   Dies ist konsistent mit der schwachen Ableitung, falls $u \in L_p(\mathbb{R}^m)$ wie in (1) ist.

3. Die Translation τ_h und die Dilatation d_a mit Faktor $\alpha > 0$ werden definiert über

$$\begin{aligned}(\tau_h u)(\varphi) &:= u(\tau_{-h}\varphi) && \forall \varphi \in \mathcal{S}',\\ (d_a u) &:= a^{-m} u(d_{1/a}\varphi) && \forall \varphi \in \mathcal{S}'.\end{aligned}$$

Lemma 2.16. *Die Operationen (1) bis (3) sind wohldefiniert und stetig von $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.*

Beweis. Dazu beachte einfach, dass

- im Fall (1) gilt $g\varphi \in \mathcal{S}$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$,
- im Fall (2) $D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ und
- im Fall (3) $\tau_h \varphi \in \mathcal{S}$ und $\delta_{1/h} \in \mathcal{S}$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$.

Die Identifizierung im Spezialfall $u \in \mathcal{L}$ (also für langsam wachsende Funktionen) zeigt, dass $gu \in$ e im üblichen Sinne der punktweisen Multiplikation gilt.

Das gleiche gilt für (3) und für (2 ergibt sich: Falls die übliche partielle Ableitung $f^{(\alpha)}$ existiert und in $\mathcal{L}$ liegt, dann gilt für $f \in \mathcal{L}$

$$(D^\alpha f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f D^\alpha \varphi = \int_{\mathbb{R}^m} f^{(\alpha)} \varphi,$$

womit auch dieses Lemma gezeigt ist. □

Mit Hilfe von Testfunktionen der Form $\psi\varphi$ ($\psi \in \mathcal{D}$ fest, $\varphi \in \mathcal{S}$ beliebig) kann man zeigen

Lemma 2.17. *Im Fall $f \in \mathcal{L}$ ist die Zuordnung $f \mapsto L_f \in \mathcal{S}'$ eineindeutig, d. h. für Funktionen f wie in (2.64) gilt*

$$L_f(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ fast überall}$$

mit anderen Worten: Für f und g aus $\mathcal{L}$ folgt aus $L_f = L_g$, dass $f = g$ fast überall gilt.

Vor dem Beweis von (2.17) sei noch auf den Zusammenhang mit dem Begriff der schwachen Ableitung eingegangen:

Bemerkung 2.16. Bei der Ableitung im distributionellen Sinne wird (2.11) in Definition 2.2 nur für Funktionen φ aus dem Testraum $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ gefordert. Aus der Existenz der schwachen Ableitung in $L_p(\mathbb{R}^m)$ folgt daher auch die Existenz der Ableitung im distributionellen Sinne. Das gleiche gilt auch für die Ableitungen von temperierten Distributionen. Lemma 2.17 zeigt also, dass alle drei Typen von Ableitungen für langsam wachsende Funktionen aus $\mathcal{L}$ zusammenfallen, wenn die Ableitungen ebenfalls in $\mathcal{L}$ liegen. ♢

Beweis. Wähle $R > 0$ groß genug und setze

$$f_R(x) := \begin{cases} g(x), & |x| \le R; \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Setze $V_{R,\varepsilon} := \{x : R \le |x| \le R + \varepsilon\}$ und wähle Funktionen $\varphi_{R,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ die

- für $|x| < R$ gleich 1 sind,
- für $|x| > R + \varepsilon$ verschwinden und

- auf $V_{R,\varepsilon}$ Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

(Man kann für beliebiges kleines $\varepsilon > 0$ solche Funktionen finden.)
Dann ist für beliebiges $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ das Produkt $\psi\varphi_{R,\varepsilon}$ in $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{S}$ und

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} g\psi\varphi_{R,\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^m} g_R\psi + \int_{V_{R,\varepsilon}} g\varphi_{R,\varepsilon} \equiv \int_{\mathbb{R}^m} g_R\psi + \delta_{R,\varepsilon}$$

Falls $g \in L_p(\mathbb{R}^m)$ so gilt

- im Fall $1 \le p < \infty$

$$|\delta_{R,\varepsilon}| \le \int_{V_{R,\varepsilon}} |g| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

so dass für alle $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} g_R\psi = \int_{\mathbb{R}^m} |g_R|^2 + \int_{\mathbb{R}^m} g_R(\psi - g_R)$$

wähle nun eine Folge von Approximationen ψ_ϱ mit

$$\|\psi_\varrho - g_R\|^2 \xrightarrow{\varrho\to 0} 0$$

und $\psi_\varrho \in C^\infty\mathbb{R}^m$, was nach (2.2) und dem zugehörigen Korollar möglich ist. Dann folgt

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} g_R(\psi_\varrho - g_R)\right| \le \|g_R\|_2\|\psi_\varrho - g_R\|_2 \xrightarrow{\varrho\to 0} 0$$

und so $g_R(x) = 0$ fast überall.

- Im Fall $p = \infty$ schätzt man ab:

$$|\delta_{R,\varepsilon}| \le \|g\|_\infty \int_{V_{R,\varepsilon}} 1 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

□

Die Frage nach den allgemeinsten temperierten Distributionen kann auch beantwortet werden:

Satz 2.18. *Zu jedem $u \in \mathcal{S}'$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass es für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ mit $|\alpha| \le n$ Zahlen a_α sowie langsam wachsende stetige Funktionen f_α gibt, mit deren Hilfe sich u als*

$$u = \sum_{|\alpha|\le n} a_\alpha D^\alpha(Lf_\alpha),$$

darstellen läßt. Dabei sind L_{f_α} und D^α wie in (2) definiert.

Ein Beweis findet sich z. B.in [Con74], Abschnitt 7.3. Die parsevalsche Formel (2.5) motiviert nun

Definition 2.15. (Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$) *Die* Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$, *bezeichnet durch $\mathcal{F}$ oder $\hat{\cdot}$, ist definiert durch*

$$(\mathcal{F}u)(\varphi) := u(\mathcal{F}\varphi) \quad bzw. \quad \hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi}), \qquad u \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Dann läßt sich zeigen:

Satz 2.19. *Die Fouriertransformation ist eine wohldefiniert, lineare, in der schwachen Topologie von $\mathcal{S}'$ stetig Abbildung von $\mathcal{S}'$ auf ganz $\mathcal{S}'$. Sie ist mit der Fouriertransformation auf $L_1(\mathbb{R}^m)$ wie auch mit der auf $L_2(\mathbb{R}^m)$ konsistent. Weiterhin ist sie eine eineindeutige Abbildung, wobei die inverse Fouriertransformation durch $[\check{u}]^\wedge$, gegeben ist. Die Spiegelung $\check{u}$ einer Distribution $u \in \mathcal{S}'$ ist dabei erklärt durch*

$$\check{u}(\varphi) := u(\check{\varphi}) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

wobei $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$.

Ein Beweis findet sich in[Rud91], Theorem 7.15. Betrachten wir die Wirkung von $\mathcal{F}$ auf die obigen Operationen, so erhalten wir

Lemma 2.18. *Sei P ein Polynom mit zugehörigem Differentialoperator $P(D)$ und $\tilde{P}(v) := P(iv)$. Dann gilt*

$$[P(D)u]^\wedge = \tilde{P}\hat{u}, \qquad \left[\tilde{P}u\right]^\wedge = P(-D)\hat{u} \qquad \forall u \in \mathcal{S}'.$$

Speziell für das Dirac-Maß aus δ (das durch $L_\varphi = \varphi(0)$ erklärt ist) gilt

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m}, \qquad \hat{1} = \sqrt{2\pi}^m \delta \tag{2.65}$$

bzw. allgemeiner

$$[P(D)\delta]^\wedge = \tilde{P}, \qquad \left[\tilde{P}\right]^\wedge = \sqrt{2\pi}^m P(-D)\delta. \tag{2.66}$$

Ferner gilt

$$[\tau_h u]^\wedge = \mathrm{e}^{ih\cdot}\hat{u} \tag{2.67}$$

und

$$[d_a u]^\wedge = \frac{1}{a^m} d_{1/a}\hat{u}. \tag{2.68}$$

Beweis. Die Beweise von (2.67) und (2.68) sind einfach, z. B. gilt

$$[d_a u]^\wedge(\varphi) = (d_a u)(\hat{\varphi}) = \frac{1}{a^m} u\big(d_{1/a}\hat{\varphi}\big) = u([d_a\varphi]^\wedge) = \hat{u}(d_a\varphi) = \frac{1}{a^m} d_{1/a}\hat{u}$$

Die Fouriertransformierte der Delta-Distribution bestimmt man durch :

$$[2\pi\delta]^\wedge(\varphi) := \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\delta} = 1 \in \mathcal{L};$$

$$[1]^\wedge(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(u)\,du\sqrt{2\pi}^m\varphi(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{1} = \sqrt{2\pi}\,m^m.$$

Mit $P_\alpha(x) = x^\alpha$, $\tilde{P}_\alpha(x) = (ix)^\alpha$ gilt

$$[D^\alpha\delta]^\wedge(\varphi) = (D^\alpha\delta)(\hat{\varphi}) := (-1)^{|\alpha|}\,\delta(D^\alpha\hat{\varphi}) = \left[\tilde{P}_\alpha\varphi\right]^\wedge$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_\alpha(x)\varphi(x)\,dx,$$

so dass

$$[D^\alpha \delta]^\wedge = \frac{1}{\sqrt{1\pi}^m} \tilde{P}_\alpha \in \mathcal{L}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\left[\tilde{P}_\alpha\right]^\wedge(\varphi) &:= \tilde{P}_\alpha(\hat{\varphi}) := \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_\alpha(v)\hat{\varphi}(v)\,dv \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^m} [D^\alpha\varphi]^\wedge(v)\,dv = (-1)^{|\alpha|}\sqrt{2\pi}^m (D^\alpha\varphi)(0) \\ &= \sqrt{2\pi}^m P_\alpha(-D)\delta\end{aligned}$$

□

Durch Linearkombinationen von Monomen erhält man dann die allgemeineren Formeln (2.68).

2.4.2 Sobolev-Räume und Fouriertransformation

Zunächst zeigen wir den grundlegenden

Satz 2.20 (Sobolev-Räume und Fouriertransformation). *Folgende Aussagen sind äquivalent für $k = 1, 2, 3, \ldots$:*

1. *$f \in W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$, d. h. alle schwachen Ableitungen $D^s f$ existieren für $|s| \le k$,*
2. *$\hat{f}(v)$ und $P(iv)\hat{f}(v)$ liegen in $L_2(\mathbb{R}^m)$ für jedes Polynom vom totalen Grad $\deg P \le k$*
3. *alle starken partiellen Ableitungen, d. h. in der L_2-Norm, existieren bis zur Ordnung s, $|s| \le k$,*
4. *$\hat{f}(v)$ und $\sqrt{1+|v|^2}^k \hat{f}(v)$ liegen in $L_2(\mathbb{R}^m)$.*

Darüber hinaus bildet der Operator $\mathcal{G}_k$, definiert durch

$$[\mathcal{G}_k f]^\wedge(v) := \frac{1}{\sqrt{1+|2\pi v|^2}^k}\hat{f}(v) \tag{2.69}$$

einen stetigen Isomorphismus von $L_2(\mathbb{R}^m) \equiv W^{0,2}(\mathbb{R}^m)$ auf $W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$.

Beweis. Den Beweis führen wir nach dem Schema

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \to & 1 & & \\ & \nwarrow & \downarrow & & \\ & & 2 & \leftrightarrow & 4 \end{array}$$

(3) ⇒ (1): Die partielle Ableitung $\partial f/\partial x_j = g_j$ existiere in der L_2-Norm. Dann gilt für jedes $\varphi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} g_j(c)\varphi(x)\,dx &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{f(x-he_j)}{h} - f(x)\right)\varphi(x)\,dx \\ &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(x-he_j)}{h}\right)dx = -\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\,dx\end{aligned}$$

d. h.g_j ist gleich der schwachen partiellen Ableitung $\partial f/\partial x_j$. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Argumentation sieht man, dass die Existenz der starken Ableitung die Existenz der entsprechenden schwachen Ableitung beinhaltet.

(1) $\Rightarrow$ (2): Nach Voraussetzung existiert $D^s f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ für $|s| \le k$, so dass nach Satz 2.3 $[D^s f]^\wedge \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Für $\varphi \in \mathcal{D} \equiv C_{00}^\infty(\mathbb{R}^m)$ gilt aufgrund der parsevalschen Formel 2.6, der Definition der schwachen Ableitung und wegen Eigenschaft 4 aus Lemma 2.4

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} [D^s f]^\wedge(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^m} (D^s f)\hat{\varphi} = (-1)^{|s|}\int_{\mathbb{R}^m} f\partial^s\hat{\varphi}\\ &= (-1)^{|s|}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,[(-iv)^s\varphi(v)]^\wedge(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)(-iv)^s\varphi(v)\,dv\end{aligned}$$

Dabei benutzten wir die bereits in Satz 2.17 angegebene Eigenschaft, dass $\varphi = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}]$ wegen $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ ist der Raum der beliebig oft differenzierbaren, schnell abfallenden Funktionen) wieder zu $\mathcal{S}$ gehört und ebenso $(iv)^s\varphi(v) \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Ferner zeigt Lemma 2.15, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ dicht in $\mathcal{S}$ liegt, so dass nach Grenzübergang in diesem Sinne die obige Identität für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt. Nun ist aber $[D^s f]^\wedge \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und $(iv)^s\hat{f}(v)$ eine langsam wachsende Funktion. Lemma 2.17 zeigt dann $(iv)^s\hat{f}(v) = [D^s f]^\wedge(v)$ fast überall, woraus Aussage 2 folgt.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wir zeigen zunächst die Existenz der ersten partiellen Ableitung im Sinne der L_2-Norm. Dazu sei $g(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[iv_j\hat{f}(v)\right](x)$, das nach Voraussetzung und dem vorigen Satz in $L_2(\mathbb{R}^m)$ liegt. Dann bilde den Differenzenquotienten in e_j-Richtung in der L_2-Norm:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(x+he_j)-f(x)}{h} - g\right\|_2 &= \left\|\hat{f}(v)\frac{\exp(iv_jh)-1}{h} - iv\hat{f}(v)\right\|_2\\ &= \left\|\hat{f}(v)\left(\frac{2i\sin(v_jh/2)}{h} - iv\mathrm{e}^{-iv_jh/2}\right)\right\|_2\end{aligned}$$

Hier wurde der Integrand mit $\exp(-iv_jh/2)$ multipliziert. Man sieht leicht, dass der neue Integrand die Majorante $\left|\hat{f}(v)\right|\left(|v_j| + i|v_j|\right)$ hat und daher für $h \to 0$ fast überall gegen 0 strebt. Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz zeigt dann, dass g die partielle Ableitung von f in Richtung e_j ist.

Im nächsten Schritt bilde man dann die Differenzenquotienten dieser ersten partiellen Ableitungen. Mit dem gleichen Argument folgt dann die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen im starken Sinne usw.

(2) $\Rightarrow$ (4): Für gerade k folgt dies direkt aus

$$\sqrt{1+|v|^2}^{\,k} \le C \sum_{\sigma_1+\cdots+\sigma_m} |v_1|^{2\sigma_1}\cdots|v_m|^{2\sigma_m}.$$

Für ungerade k benutzt man zusätzlich die Abschätzung

$$\sqrt{1+|v|^2} \le 1 + \sum_{j=1}^m |v_j|.$$

(4) $\Rightarrow$ (2): Diese Richtung folgt aus der Abschätzung ($|s| \leq k$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \left|v^s \hat{f}(v)\right|^2 dv &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{|v_j|^2}{1+|v|^2}\right)^{s_j} \left(1+|v|^2\right)^k \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^m} \left(1+|v|^2\right)^k \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv\end{aligned}$$

Schließlich überlegt man sich, dass wegen der Isometrie der Fouriertransformation in $L_2(\mathbb{R}^m)$

$$\sum_{|s|\leq k} \left\|v^s \hat{f}(v)\right\|_2 = \sqrt{2\pi}^m \sum_{|s|\leq k} \|D^s f\|_2 \tag{2.70}$$

folgt. Aus dem Beweis der Äquivalenz von (2) und (4) folgt ferner, dass $\left\|\sqrt{1+|v|^2}^k \hat{f}(v)\right\|_2$ eine dazu äquivalente Norm ist. Daher ist $\mathcal{G}_k f \in W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$ falls $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Umgekehrt folgt aus $g \in W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$, dass $f = \mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{1+|v|^2}^k \hat{g}(v)\right] \in L_2(\mathbb{R}^m)$ die Gleichung $\mathcal{G}_k f = g$ erfüllt. Ebenso folgt die Injektivität von $\mathcal{G}_k$ aus der Eineindeutigkeit der Fouriertransformation. □

Bemerkung 2.17. Die Richtung (3) $\Rightarrow$ (2) liefert Eigenschaft 3 aus Lemma 2.4 für den Raum $L_2(\mathbb{R}^m)$ und die Richtung (2) $\Rightarrow$ (3) liefert über den den Satz von Plancherel die Eigenschaft 4. ♢

Die Äquivalenz von (1) und (4) kann man zum Anlass nehmen, die Sobolev-Räume für $p = 2$ zu verallgemeinern. Man erhält dann die sogenannten *Besselpotentialräume.* denen der folgende Abschnitt gewidmet ist.

2.4.3 Besselpotentialräume

Definition 2.16. (Besselpotential-Räume) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere den Besselpotentialraum $L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ als die Vervollständigung von*

$$\left\{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) | \exists g \in L_2(\mathbb{R}^m) : \left(1+|v|^2\right)^{\alpha/2} \hat{f}(v) = \hat{g}(v)\right\} \tag{2.71}$$

bezüglich der Norm

$$\|f\|_{\alpha,2} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^m} (1+|v|^2)^\alpha \left|\hat{f}(v)\right|^2 dv}$$

Per Definition sind dies Räume Banachräume. Für $\alpha \geq 0$ führt die Vervollständigung zu Teilräumen von $L_2(\mathbb{R}^m)$, da die Norm $\|f\|_{\alpha,2}$ dann stärker ist als die L_2-Norm. Speziell für $\alpha = k$ erhält man zu Satz 2.20 das

Korollar 2.10. *Es gilt*

$$W^{k,2}(\mathbb{R}^m) = L^{k,2}(\mathbb{R}^m)$$

mit Äquivalenz der Normen (2.71) und (2.69).

Für $\alpha < 0$ erhält man Teilräume von $\mathcal{S}'$, also der Menge der temperierten Distributionen.
Zur näheren Erläuterung definiere für $\alpha < 0$ eine Funktion $\mathcal{G}_\alpha$ durch ihre Fouriertransformation, $[\mathcal{G}_\alpha]^\wedge := \left(1+|v|^2\right)^{-\alpha/2}$. Falls eine solche Funktion in L_1 existiert, so ist die wegen der Eindeutigkeit der Fouriertransformation wohldefiniert. Genauer gilt

Lemma 2.19. *Sei $\alpha > 0$ und sei $\mathcal{G}_\alpha$ wie gerade angegeben definiert. Dann hat diese Funktion die Darstellung*

$$\mathcal{G}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}^m \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-|x|^2/4}\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{(\alpha-m)/2}\, \frac{dt}{t}$$

Speziell gilt $\mathcal{G}_\alpha(x) < 0$ und $|\mathcal{G}_\alpha(x)| = \mathcal{O}(\exp(-c_\alpha|x|))$ für $|x| \to \infty$ mit einer gewissen Konstanten c_α.

Beweis. Die zweite Aussage folgt durch Aufspaltung des Integrals $\int_0^\infty$ in $\int_0^{|x|}$ und $\int_{|x|}^\infty$ und zeigt speziell, dass $\mathcal{G}_\alpha \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Nun benutzt man die schon (in Anschluss an Satz 2.4) bewiesene Beziehung

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\right](v) = \underbrace{\sqrt{2t}^m\, \mathrm{e}^{-t|v|^2}}_{I_\alpha}$$

Multipliziert man und integriert I_α, so folgt

$$[I_\alpha]^\wedge(v) = \frac{1}{\sqrt{2}^m \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-|v|^2 t}\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{\alpha/2}\, \frac{dt}{t}.$$

Nun benutzt man die leicht nachzurechnende Identität

$$u^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ut}\, t^a\, \frac{dt}{t}$$

für $a = \alpha/2$ und $u = 1 + |v|^2$ und erhält $[I_\alpha]^\wedge(v) = \left(1+|v|^2\right)^{-\alpha/2} \equiv [\mathcal{G}_\alpha]^\wedge(v)$. □

Als Folgerung erhält man

Korollar 2.11. *Für $\alpha > 0$ ist der auf $L_p(\mathbb{R}^m)$ definierte Faltungsoperator*

$$\mathcal{G}_\alpha(f;x) := (\mathcal{G}_\alpha * f)(x)$$

stetig und beschränkt. Er ist ein Isomorphismus von $L^{\beta,2}(\mathbb{R}^m)$ auf $L^{\beta+\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ für $\beta \geq 0$, d. h. es gilt speziell $L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m) \subset L^{\beta,2}(\mathbb{R}^m)$ für $\alpha > \beta \geq 0$. Es ist $\mathcal{G}_2$ der Umkehroperator zu $I - \Delta$ und $g = \mathcal{G}_2(f)$ löst die Gleichung $(I-\Delta)g = f$, ist also eine Potentialfunktion.

Schreibt man formal für $\alpha \geq 0$ die Definition $\mathcal{G}_\alpha * f := (I-\Delta)^{-\alpha/2} f$, so gilt folgendes

Lemma 2.20. *Auf $L^{\alpha,2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, gelten folgende Aussagen:*

1. *Für $k \in \mathbb{N}$ und $\beta \geq 0$ ist $(I-\Delta)^k$ ein Isomorphismus von $L^{\beta+2k,2}$ auf $L^{\beta,2}$.*
2. *Genau dann gilt $f \in L^{\beta+r,2}$ mit $r \in \mathbb{N}$, wenn jede schwache Ableitung $D^\gamma f$ mit $|\gamma| = r$ in $L^{\beta,2}$ liegt.*

Wir benötigen dieses Ergebnis im Folgenden nicht und überlassen es dem Leser, den Beweis nötigenfalls (z. B. in [Don96]) nachzulesen. Von Bedeutung sind aber folgende Aussagen über die glättende Wirkung der Faltung:

Lemma 2.21. *Es sei $\psi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\left|\hat{\psi}(v)\right| \leq C|v|^{-\beta}$ für $\beta > 0$ und $|v| \geq 1$. Dann bildet der Operator $\Lambda_\psi f := \psi * f$ den $W^{s,2}$ stetig auf $L^{s+\beta,2}$ ab.*

Beweis. Per Definition gilt (wegen $\psi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ liegt $\psi * f$ ja in $L_2(\mathbb{R}^m)$)

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\psi f\|_{s+\beta,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(1+|v|^2\right)^{s+\beta} \left|[\psi * f]^\wedge(v)\right| \, dv \\
&\le \int_{|v|\le 1} \left(1+|v|^2\right)^s 2^\beta \left|[\psi * f]^\wedge(v)\right|^2 \, dv \\
&\quad + 2\pi \int_{|v|\ge 1} \left(1+|v|^2\right)^s 2^\beta |v|^{2\beta} \left|\hat\psi(v)\hat f(v)\right|^2 (2\pi)^m \, dv \\
&\le 2^\beta \|\Lambda_\psi f\|_{s,2}^2 + 2^\beta (2\pi)^m C^2 \int_{|v|\ge 1} \left(1+|v|^2\right)^s \left|\hat f(v)\right|^2 \, dv
\end{aligned}$$

Nun beachte, dass nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\psi f\|_{s,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(1+|v|^2\right)^s \left|\hat\psi(v)\right|^2 \left|\hat f(v)\right|^2 \, dv \\
&\le \|\psi\|_1^2 \int_{\mathbb{R}^m} \left(1+|v|^2\right)^s \left|\hat f(v)\right|^2 \, dv.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen folgt

$$\|\Lambda_\psi f\|_{s+\beta,2}^2 \le 2^\beta \left(\|\psi\|_1 + (2\pi)^m C^2\right) \|f\|_{s,2}^2$$

□

Für spätere Zwecke beweisen wir für $m = 1$ eine etwas schärfere Variante.

Lemma 2.22. *Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ gelte*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat f(v)\right| (1+|v|)^\alpha \, dv < \infty.$$

Dann gilt $f \in C^n(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha > n$. Weiterhin gilt

$$\left|f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)\right| \le C|x-y|^{\alpha-n}$$

gleichmäßig in x, $y \in \mathbb{R}$ wenn $n < \alpha < n+1$. (Mit anderen Worten muss dann n der zur nächsten ganzen Zahl abgerundete Wert von α sein; α selbst darf dabei nicht ganz sein.)

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\hat f(v)(iv)^n$ eine L_1-Funktion. Mit Lemma **??**, Teil **??** folgt daher

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ivx} \hat f(v)\, dv\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ivx} (iv)^n \hat f(v)\, dv.$$

Damit ist der erste Teil des Lemmas bereits bewiesen. Mit $y - h = x$ folgt dann weiter

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} (iv)^n \hat f(v)\left(\mathrm{e}^{ivh} - 1\right)\mathrm{e}^{ivx}\, dv\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{ivh}-1}{(vh)^{\alpha-n}}\right| |h|^{\alpha-n} |v|^\alpha \left|\hat f(v)\right| \, dv
\end{aligned}$$

Der Fektor $(vh)^{-\alpha-n}\left|\exp(ivh) - 1\right|$ ist offensichtlich gleichmäßig durch vh beschränkt. Daraus ergibt sich sofort der zweite Teil des Lemmas. □

2.5 Anhang

2.5.1 Satz von Paley-Wiener

Zu gegebener Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ bzw. $f \in L_2(\mathbb{R})$ definiere Funktionen $G_\pm$ durch

$$G_\pm(v) := \begin{cases} f(v)\exp(-vx), & v \gtrless 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z > 0.$$

Die Funktionen $G_\pm$ liegen für $x > 0$ beide in $L_1(\mathbb{R})$ (bzw. $L_2(\mathbb{R})$) und man stellt fest, dass

$$[G_+]^\wedge(y) = \int_0^\infty f(v)\mathrm{e}^{-v(x+iy)}\,dv, \qquad [G_-]^\wedge(y) = \int_{-\infty}^0 f(v)\mathrm{e}^{+v(x-iy)}\,dv.$$

Für diese Funktionen beweisen wir zunächst

Lemma 2.23. *Es sei $f(z)$ ferner eine ganze Funktion der Form $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}a_k z^k$ auf $\mathbb{C}$ von exponentiellem Typ $\sigma > 0$, d. h. $|f(z)| \le C\exp(\sigma|\operatorname{Im} z|)$ wobei $C \equiv C(z) > 0$ höchstens exponentiell in $|z|$ wächst. Dann ist die zugeordnete Funktion*

$$g(z) = \sum_{l=0}^\infty a_l z^{-l-1}$$

analytisch für $|z| > \sigma$ und für $z = x + iy$ mit $x > 0$ gelten die Identitäten

$$g(x+iy) = [G_+]^\wedge(y), \tag{2.72a}$$

$$g(-x-iy) = -[G_-]^\wedge(-y). \tag{2.72b}$$

Beweis. Nach dem Satz von Cauchy gilt mit einem Kreis $\mathcal{C}$ vom Radius r um 0

$$a_k = f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz.$$

Es gelte nun $|C(z)| \le C\big(1+|z|\big)^n$ für ein festes n. Hieraus folgt mit der stirlingschen Formel

$$k! \approx \sqrt{2\pi k}e^{-k}k^k$$

sowie der Wahl $r = r_k = k/\sigma$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\mathrm{e}^{r\sigma}k!(1+\sigma)^n}{r^{k+1}}} \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{k+1/2}\mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^k k^{-k-1}\sigma^{k+1}} = \sigma.$$

Damit existiert zu jedem $\delta > 0$ eine Konstante $C_\delta > 0$ mit $|a_k| \le C_\delta(\sigma+\delta)^k$ und

$$\left|\sum_{l=0}^\infty \frac{a_l}{z^{l+1}}\right| < \frac{C_\delta}{|z|}\sum_{l=0}^\infty \frac{(\sigma+\delta)^l}{|z|^{-l}}, \quad \text{falls} \quad |z| > \sigma+\delta.$$

Die oben definierte Funktion $g(z)$ ist also analytisch für $|z| > \sigma$.
Es sei nun $x = \operatorname{Re} z > \sigma + 2\delta$. Dann gilt für alle $v < 0$

$$\begin{aligned} |f(v)\mathrm{e}^{-v(x+iy)}| &\le \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}|a_k|v^k\mathrm{e}^{-vx} \le C_\delta\mathrm{e}^{-vx}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(\sigma+\delta)^k v^k \\ &= C_\delta\mathrm{e}^{(\sigma+\delta-x)v} \le C_\delta\mathrm{e}^{-\delta v}. \end{aligned}$$

Damit ist (unabhängig davon ob $f \in L_p(\mathbb{R})$ für ein p mit $1 \le p \le \infty$) das Integral in (2.72a) absolut konvergent und im Folgenden die Vertauschung von Summe und Integral erlaubt. Dies liefert

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{e}^{-v(x+iy)}\,dv = \sum_{k=0}^\infty a_k \int_0^\infty \frac{1}{k!} v^k \mathrm{e}^{-vz}\,dv. \tag{2.73}$$

Wegen $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z > 0$, konvergiert jedes einzelne Integral der Summe. Man kann also die Regeln der komplexen Integration wie im Reellen anwenden (speziell ist die Substitution erlaubt), so dass

$$\int_0^\infty v^k \mathrm{e}^{-vz}\,dv = \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^\infty (zv)^k \mathrm{e}^{-vz}\,d(vz) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^{Rz} e^{-u}u^k\,du.$$

Nun betrachte das Integral über $\exp(-u)u^k$ längs der Geraden $(0, Rz)$, dann auf dem Kreisbogen mit Radius $|Rz|$ und schließlich zurück auf der Geraden $(\operatorname{Re} Rz, 0)$; dieses Integral verschwindet gemäß dem cauchyschen Integralsatz. Da der Anteil auf dem Kreisbogen für $R \to \infty$ verschwindet, folgt schließlich

$$\int_0^\infty v^k \mathrm{e}^{-vz} = \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^k\,dt = \frac{k!}{z^{k+1}}.$$

Aus (2.73) folgt dann (2.72a). Ähnlich ergibt sich (2.72b):

$$\begin{aligned} -\left[G_-\right]^\wedge(-y) &= -\int_{-\infty}^0 f(v)\mathrm{e}^{v(x+iy)}\,dv = -\sum_{k=0}^\infty a_k \int_{-\infty}^0 \frac{1}{k!} v^k \mathrm{e}^{vz}\,dz \\ &= -\sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k! z^{k+1}} \int_{-\infty}^0 t^k \mathrm{e}^t\,dt = -\sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!(-z)^{k+1}} \int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-t}\,dt = g(-z) \end{aligned}$$

□

Satz 2.21 (Paley-Wiener, 1934). *Sei $f \in B_\sigma^{(1)}(\mathbb{R})$ (bzw. $f \in B_\sigma^{(2)}(\mathbb{R})$) und sei $\sigma > 0$. Ist $f(z)$ eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ vom exponentiellen Typ σ und liegt die Restriktion auf $\mathbb{R}$ in $L_1(\mathbb{R})$ (bzw. $L_2(\mathbb{R})$), so ist f bandbegrenzt, genauer gilt für die Fouriertransformierte $\hat{f}$*

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq \left[-\frac{\sigma}{2\pi}, \frac{\sigma}{2\pi}\right].$$

Beweis. Für $f \in B_\sigma^{(p)}(\mathbb{R})$ setzen wir

$$f_\pm(t) := \begin{cases} f(t), & t \gtrless 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $p = 2$ schätzen wir nun ab, dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \left|\left[G_+\right]^\wedge(y) - \left[f_+\right]^\wedge(y)\right|^2 &= \int_{-\infty}^\infty |G_+(v) - f_+(v)^2\,dv \\ &= \int_0^\infty \left|1 - \mathrm{e}^{-vx}\right|^2 |f(v)|^2\,dv \xrightarrow{x\to 0} 0. \end{aligned}$$

Hierbei wurde der Satz von Plancherel benutzt ($G_+(v)$ liegt in $L_2(-\infty, \infty)$). Für $p = 1$ macht man die Abschätzung

$$\left|\left[G_+\right]^\wedge(y) - \left[f_+\right]^\wedge(y)\right| \le \int_0^\infty \left|1 - \mathrm{e}^{-vx}\right| |f(v)|\,dv \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

wobei wieder die majorisierte Konvergenz nach Lebesgue ausgenutzt wird. Analog gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(-x+iy) + [f_-]^\wedge(y)\right|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left|[f_-]^\wedge(y) - [G_-]^\wedge(y)\right|^2 dy$$
$$= \int_{-\infty}^{0} |1-\mathrm{e}^{vx}|^2 \, |f(v)|^2 \, dv \xrightarrow{x\to 0} 0$$

und

$$\left|[-G_-]^\wedge(-y) - [f_-]^\wedge(y)\right| \le \int_{-\infty}^{0} |\mathrm{e}^{vx}| \, |f(v)| \, dv \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Hieraus schließt man weiter (im Sinne von $L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$), dass für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(y) = [f_+]^\wedge(y) + [f_-]^\wedge(y) = \lim_{x\to 0+} \left[[G_+]^\wedge(y) + [G_-]^\wedge(y)\right]. \tag{2.74}$$

Nun sind die Funktionen $\pm[G_\pm]^\wedge(y)$ auf den rechten Seiten von (2.72a) und (2.72b) wegen der Vorausetzung $f \in L_1(\mathbb{R})$ bzw. $f \in L_2(\mathbb{R})$ auch analytisch für $x = \mathrm{Re}\, z > 0$ wie man durch Differentiation nach z feststellt. Daher sind sie nach dem vorigen Lemma Fortsetzungen der für $|z| > \sigma$ analytischen Funktion $g(z)$. Daher geht der Grenzwert (2.74) für $|y| > \sigma$ über in

$$\hat{f}(y) \lim_{x\to 0+} \left[[G_+]^\wedge(y) + [G_-]^\wedge(y)\right] = \lim_{x\to 0+} \left[g(x+iy) - g(-x+iy)\right] = 0,$$

denn liegt x beliebig nahe bei 0, so gilt auch $|\pm x + iy| > \sigma$. □

Wir wollen dieses Ergebnis auf die Klassen $B_{\boldsymbol{\sigma}}^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ vom exponentiellen Typ aus Definition 2.10 verallgemeinern.

Satz 2.22 (Laurent Schwartz). *Ist $f \in B_{\boldsymbol{\sigma}}^{(p)}(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le 2$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, so gilt für die Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f, dass* $\mathrm{supp}\, \hat{f} \subseteq K_{\boldsymbol{\sigma}} \equiv [-\sigma_1, \sigma_1] \times \cdots \times [-\sigma_m, \sigma_m]$. *Allgemeiner gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\hat{\varphi}(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \textit{mit} \quad \varphi(x) = 0, x \in K_{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{2.75}$$

Beweis. Im Falle $p = 1$ schreiben wir $f(x) = f(x_j, x')$ wobei x' alle Komponenten von x außer der j-ten bezeichnet, $x' \equiv (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$; dann definieren wir die Funktion $g_j(x_j) := f(x_j, x')$, die für fast alle $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$ (nach dem Satz von Fubini) aus $L_1(\mathbb{R})$ ist. Ferner ist g_j eine ganze Funktion vom exponentiellen Typ σ_j in x_j wie unmittelbar aus Definition 2.10 folgt. Die Anwendung des vorigen Satzes liefert dann für fast alle $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-iv_j x_j}\, dx_j \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g_j(x_j)\mathrm{e}^{-iv_j x_j}\, dx_j = 0, \qquad |v_j| > \sigma_j.$$

Multiplikation mit $\exp(-ix', v')$ (v' analog zu x' definiert) und Integration über x' (was wegen $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ erlaubt ist) zeigt dann $\hat{f}(v) = 0$ für v mit $|v_j| > \sigma_j$. Dies beweist den Fall $p = 1$, da j beliebig war, $1 \le j \le m$.

Wir beweisen nun (2.75). Dazu sei $\psi_\varrho(x) = \varrho^{-m}\Phi(x/\varrho)$ eine Dirac-Folge, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $\mathrm{supp}\, \Phi \subseteq [-1,1]^m$. Es ist dann $\psi_\varrho \in \mathcal{S}$ und so $\hat{\psi}_\varrho(v) = \hat{\Phi}(\varrho v) \in \mathcal{S}$ für $\varrho > 0$. Man kann leicht verifizieren, dass $f(v)\hat{\Phi}(\varrho v) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ ist und $\mathcal{F}\left[f(.)\hat{\Phi}(\varrho .)\right](v) \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Es ist nun $f(v)\hat{\Phi}(\varrho v) \in B_{\boldsymbol{\sigma}+\rho}^{(1)}(\mathbb{R}^m)$, $\rho = (\varrho, \dots, \varrho)$, denn $\hat{\Phi}(\varrho v)$ ist wegen

$$|\hat{\Phi}(\varrho v)| = \left|\int_{[-1,1]^m} \mathrm{e}^{-i\varrho v x}\Phi(x)\, dx\right| \le \mathrm{e}^{\rho\, \mathrm{Im}\, v}\|\Phi\|_1$$

vom exponentiellen Typ ρ. Nach dem bereits Bewiesenen folgt daher

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\left[f(.)\hat{\Phi}(\varrho .)\right](v)\varphi(v)\,dv = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(v) = 0$ für $|v_j| \leq \sigma_j + \varrho$. Mit der parsevalschen Formel folgt für solche φ weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(v)\hat{\Phi}(\varrho v)\hat{\varphi}(v)\,dv = 0.$$

Wegen $f(v)\varphi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\lim_{\varrho\to 0} \hat{\Phi}(\varrho v) = \hat{\Phi}(0) = 1$ punktweise kann man den lebesgueschen Satz über majorisierte Konvergenz anwenden und erhält $\int f(v)\hat{g}(v)\,dv = 0$ für alle $g \in \mathcal{S}$ mit $g(v) = 0$ für v mit $|v_j| \leq \sigma_j + \varrho$, $1 \leq j \leq m$. Ist nun $\varphi \in \mathcal{S}$ beliebig gegeben mit $\varphi(x) = 0$, $|x_j| \leq \sigma_j$ für $1 \leq j \leq m$, so liegt

$$g_\varrho := \varphi\left(\frac{\sigma_1 x_1}{\sigma_1 + \varrho}, \ldots, \frac{\sigma_m x_m}{\sigma_m + \varrho}\right)$$

wieder in $\mathcal{S}$ und g_ϱ hat einen Träger in $|v_j| > \sigma_j$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} f(v)\hat{g}_\varrho(v)\,dv$$

und der Grenzübergang $\varrho \to 0$ liefert (2.75).

Ist nun zusätzlich $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$, so gilt die parsevalsche Formel und es gilt sogar

$$\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\varphi(v)\,dv = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^m$. Weil $\mathcal{S}$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, bedeutet dies $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq K_{\boldsymbol{\sigma}}$. Analog folgt der allgemeinere Fall $1 \leq p \leq 2$, wobei $\hat{f}(v) \in L_{p'}(\mathbb{R}^m)$ zu beachten ist, $1/p + 1/p' = 1$. □

Noch allgemeinere Versionen des Paley-Wiener-Satzes findet man in [SW71] und in [RS72]. Im Buch von Reed und Simon sind auch Anwendungen solcher Sätze auf (schwache) Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zu finden.

2.5.2 Approximationsgüte bandbegrenzter und trigonometrischer Funktionen

Als vorbereitendes Ergebnis benötigen wir

Lemma 2.24. *Es bezeichne X einen der Räume $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ mit Norm $\|\cdot\|$. Dann gelten:*

1. *Ist g ein Element von $B_p(\omega W)$, dann ist $g(\alpha x)$ für $\alpha > 0$ ein Element von $B_p(\alpha\omega W)$.*

2. *Ist ein Kern $K(u)$ aus $L_1(\mathbb{R}^m)$ gegeben mit $\hat{K}(u) = 0$ für $u \notin W$, d. h. $K \in B_1(W)$, so ist $f * K \in B_p(W)$ für f aus $L_p(\mathbb{R}^m)$.*

3. *Ist unter den Voraussetzungen aus Teil 2 an $K(u)$ außerdem f ein Element von $X^* = L_p(\mathbb{T}^m)$,d. h. f ist 2π-periodisch, so gilt dies auch für $f * K$. Es ist $t \equiv f * K$ ein trigonometrisches Polynom dessen Fourier-Koeffizienten $\hat{t}[j]$ für $j \notin W$ verschwinden.*

Beweis. Zu 1: Aus $g \in B_p(\omega W)$ folgt für alle $\varphi \in S$ mit $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \omega W$, dass

$$0 = \int g(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \alpha^m \int g(\alpha x)\hat{\varphi}(\alpha x)\,dx = \int g(\alpha x)\,[\varphi(\cdot/\alpha)]^\wedge(x)\,dx$$

Die Menge aller $\Psi = \varphi(\cdot/\alpha)$ mit $\varphi \in S$, $\varphi(x) = 0$ für $x \in \omega W$k, ist identisch mit der Menge aller $\Psi \in S$ mit $\Psi(t) = 0$ für alle $t \in \alpha\omega W$. Daraus folgt $g(\alpha x) \in B^{(p)}_{\alpha\omega}(W)$.

Zu 2: Wie bereits im einleitenden Kapitel dargestellt ist $f * K$ für $f \in X$ ein Element von X. Man wähle nun eine Folge $\{f_n\} \in X \cap L_1(\mathbb{R}^m)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \|f_n * K - f * K\| = 0$: Für $g_n \equiv f_n * K$ gilt $[g_n]^\wedge(v) = [f_n]^\wedge(v)\hat{K}(v)$ nach Lemma 2.4, Teil 6, so dass $\operatorname{supp}\hat{g}_n \subseteq \operatorname{supp}\hat{K} \subseteq W$. Dann folgt für $\varphi \in S$ mit $W \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}_n(v)\varphi(v)\,dv = \int_W \hat{g}_n\varphi = 0,$$

d. h. $g_n \in B_p(W)$. Es folgt mit der Hölderungleichung 1.2 für solche φ weiter

$$\left|\int (f * K)\varphi\right| = \left|\int (f * K - f_n * K)\hat{\varphi}\right| \le \|f * K - g_n\|_p \,\|\hat{\varphi}\|_q \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

so dass $f * K \in B_p(W)$ wie gewünscht.

Zu 3: Ist f 2π-periodisch, dann gilt

$$\begin{aligned}(f * K)(x + 2\pi j) &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x + 2\pi j - u)K(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - u)K(u)\,du \\ &= (f * K)(x).\end{aligned}$$

für Vektoren $j \in \mathbb{Z}^m$. Der Rest des Beweises folgt aus Lemma 2.10. □

Wir wollen nun die Fourieranalysis benutzen, um die Momentenbedingung aus Satz 2.2 alternativ zu beschreiben. Daraus werden wir eine Methode zu ihrer Realisierung herleiten, die ein Analogon zur – später zu behandelnden – Strang-Fix-Theorie bildet.

Satz 2.23. *Gegegeben sei ein Kern $K(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ mit*

$$\mu_{r+1} \equiv \int_{\mathbb{R}^m} |u|^{r+1}|K(u)|\,du < \infty$$

Dann existiert $D^{\boldsymbol{\alpha}}\hat{K}$ (mit einem Multiindex $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^m_+$) punktweise, ist stetig und erfüllt

1. $$(-i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}}K(u)\,du = \left(D^{\boldsymbol{\alpha}}\hat{K}\right)(0), \qquad \hat{K}(v) := \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-ivx}K(x)\,dx$$

2. *Ist $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^m_+$ eine Menge von Multiindices mit $0 \in \Gamma$ und $|\boldsymbol{\alpha}| \le r$ für alle $\alpha \in \Gamma$, so gilt für alle $\alpha \in \Gamma$*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}}K(u)\,du = \delta_{0,\boldsymbol{\alpha}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(D^{\alpha}\hat{K}\right)(0) = \delta_{0,\boldsymbol{\alpha}}$$

3. *Ist $\Psi(x) \in L_1(\mathbb{R})$ gegeben mit $\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\,dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{r+1}\Psi(x)\,dx < \infty$, so erfüllt*

$$\Psi_r(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[1 - \left(1 - \hat{\Psi}(v)\right)^{r+1}\right](x)$$

die Bedingung in Teil 1 für $m = 1$ und $\Gamma = \{1, 2, \ldots, r\}$.

4. Sei Ψ wie in Teil 3 gegeben, so erfüllt die für $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ durch

$$\Psi_{\mathbf{r}}(x) := \prod_{j=1}^{m} \Psi_{r_j}(x_j),$$

definierte Funktion die Aussage von Teil 2 mit $\Gamma = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^m : \alpha_j \le r_j, 1 \le j \le m\}$.

5. Für die Dirac-Folge mit Kern

$$K(x) \equiv \prod_{j=1}^{m} \Psi_r(x_j)$$

sind die Bedingungen von Satz 2.2 erfüllt und es gilt wie in Korollar 2.2

$$\|I_\varrho(f) - f\|_p \le (\mu_r + \mu_{r+1}) \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \omega_1\left(D^\alpha f; \frac{1}{\varrho}_p\right) \tag{2.76}$$

Beweis. Zu 1: Dies folgt direkt aus Lemma 2.4, Teil 4, soll jedoch hier noch einmal wiedergegeben:

$$\frac{1}{t}\left(\hat{K}(v + e_j t) - \hat{K}(v)\right) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{xe_j t} - 1\right)\mathrm{e}^{-ixv} K(x)\, dx.$$

Für $t \to 0$ strebt der erste Faktor gegen $-i(xe_j)$. Außerdem ist er gleichmäßig beschränkt, so dass nach dem lebsegueschem Theorem Grenzwertbildung und Integration vertauschbar sind. Dies ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\hat{K}(v) = \mathcal{F}\left[-i(xe_j)K(x)\right](v).$$

Die Stetigkeit folgt wie in Lemma 2.3. Wiederholte Anwendung ergibt

$$P(D)\hat{K}(v) = \left[P(-ix)f(x)\right]^\wedge(v)$$

und mit $v = 0$ die Behauptung.

Zu 2: Dies folgt direkt aus Teil 1.

Zu 3: Die angegebene Definition für Ψ_r ist (zunächst) nur eine Schreibweise für

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{r}}(v) = 1 - \left(1 - \hat{\Psi}(v)\right)^{r+1} = \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} \left(\hat{\Psi}(v)\right)^\nu$$

Nach Lemma 2.4, Teil 5 ist $\left(\hat{\Psi}(v)\right)^\nu = \left[\Psi * \Psi * \cdots * \Psi\right]^\wedge(v)$ (also Fouriertransformierte der ν-fachen Faltung von Ψ mit sich selbst) ein Element von $L_1(\mathbb{R}^m)$. Also liegt die oben definierte Funktion $\Psi_r(x)$ in $L_1(\mathbb{R}^m)$. Aus der Darstellung folgt auch, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{r+1} |\Psi_r(x)|\, dx < \infty$ ist, denn man kann per Induktion zeigen, dass für $1 \le l, j \le r+1$ alle Momente $\mu_{l,j}$ von Ψ_j beschränkt sind; z. B. gilt

$$\begin{aligned}\mu_{2,r+1} &:= \int |x|^{r+1} |(\Psi * \Psi)(x)|\, dx \le \int |x|^{r+1} \left(\int |\Psi(u)||\Psi(x-u)|\, du\right) dx \\ &\le \int |\Psi(u)|\, du \int |u+v|^r |\Psi(v)|\, dv \le \sum_{j=1}^{r+1} \binom{\nu+1}{j} \mu_{j,1}\mu_{r-j,1} < \infty,\end{aligned}$$

Damit ist Teil 2 anwendbar und gibt die Behauptung wegen $\hat{\Psi}_r(0) = 1-(-1)^{r+1} = 0$ und

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^l \hat{\Psi}_r\right)(0) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^l \left(1-\hat{\Psi}(v)\right)^{r+1}\right)(0) = 0, \qquad 1 \le l \le r.$$

Letzteres gilt, weil $\left(1-\hat{\Psi}(v)\right)^{r+1}$ nach Voraussetzung und Teil 1 eine $(r+1)$-fache Nullstelle bei $v=0$ hat.

Zu 4: Wir beachten, dass die Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^m$ von $\Psi_{\mathbf{r}}(x)$ in univariate Fourier-Transformationen zerlegbar ist:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi_{\mathbf{r}}(x)\mathrm{e}^{-ivx}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m \left(\Psi_{r_j}(x_j)\right)\mathrm{e}^{-iv_jx_j}\,dx = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} \Psi_{r_j}(x_j)\mathrm{e}^{-iv_jx_j}\,dx_j$$

Aus Teil 3 folgt dann für $\boldsymbol{\alpha}$ mit $\alpha \le r_j$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}}\Psi_{\mathbf{r}}(u)\,du = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} u_j^{\alpha_j}\Psi_{r_j}(u_j)\,du_j = \prod_{j=1}^m \delta_{0,\alpha_j} = \delta_{0,\boldsymbol{\alpha}}.$$

Zu 5: Dies folgt mit Teil 4 direkt aus Satz Satz1:5 und zugehörigem Korollar. □

Bemerkung 2.18. Die Kerne in Teil 5 des vorstehenden Satzes sind zu speziell, um die Momentenbedingung von Satz 2.2 zu erfüllen. Es gilt nämlich $\int u^{\boldsymbol{\alpha}}K(u)\,du = 0$ sogar für alle $\boldsymbol{\alpha}$ mit $\alpha_j \le r$ (statt $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m \le r$). Man kann daher die Fehlerabschätzung (2.75) für Funktionen mit entsprechender Koordinatenabhängiger Glattheit beweisen, z. B. statt $f \in W_p^r(\mathbb{R}^m)$ die „anisotropen“ Sobolev-Räume $W_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^m)$ betrachten, dessen elemente schwache Ableitungen D^α für $\boldsymbol{\alpha}$ mit $\alpha_j \le r_j$ besitzen. ♢

Andererseits kann man in der Fehlerabschätzung (2.75) die Halbnorm auf der rechten Seite beibehalten und nach dazu passenden Kernen suchen. Zu diesem Zweck dient folgende Variante des Satzes:

Satz 2.24. *Sei $K(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ mit $\int_{\mathbb{R}^m} K(u)\,du = 1$ sowie endlichem $(r+1)$-sten Moment wie in Satz 2.23 gegeben . Dann genügt*

$$\Psi_{r+1,\varrho}(t) := -\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu \binom{r+1}{\varrho} K_{\varrho/\nu}(t), \qquad K_\alpha(t) := \alpha^m K(\alpha t),$$

den Bedingungen $\int_{\mathbb{R}^m} u^{\boldsymbol{\alpha}}\Psi_{r+1,\varrho}(u)\,du = 0$ für $1 \le |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i \le r$ für jedes $\varrho < 0$. Weiter gilt für $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$

$$\|\Psi_{r+1,\varrho} * f - f\|_p \le \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\varrho}\right)_p \sum_{l=0}^{r+1}\binom{r+1}{l}\mu_l \tag{2.77}$$

wobei in Verallgemeinerung von (2.2b) die Stetigkeitsmoduln höherer Ordnung definiert seien durch

$$\omega_r(f;\varrho)_p := \sup_{0\le h\le\varrho} \|\Delta_h^r f\|_p$$

für $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ und

$$(\Delta_h^r f)(x) := \sum_{\nu=0}^r (-1)^\nu \binom{r}{\nu} f(x+\nu h).$$

Beweis. Man kann leicht zeigen, dass der Kern $\Psi_{r+1,\varrho}$ die angegebenen Bedingungen erfüllt und dann wieder Satz 2.23 anwenden um (2.75) zu erhalten. Die allgemeinere Abschätzung (2.77) erhält man aber leichter mit Hilfe der Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{r+1,\varrho} * f - f\|_p &= \left\| -\sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} \int_{\mathbb{R}^m} K_{\varrho/\nu}(x-u) f(u)\, du - f(x) \right\|_p \\
&= \left\| \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} \int_{\mathbb{R}^m} K(v) f\left(x - \frac{\nu v}{\varrho}\right) dv + \int_{\mathbb{R}^m} K(v) f(x)\, dv \right\|_p \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^m} K(v) \Delta_{v/\varrho}^{r+1} f(x) \right\|_p \le \int_{\mathbb{R}^m} |K(v)| \omega_{r+1}\left(f; \frac{|v|}{\varrho}\right)_p dv \\
&\le \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\varrho}\right)_p \int_{\mathbb{R}^m} \big(1+|v|\big)^{r+1} |K(v)|\, dv
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichung

$$\omega_{r+1}(f; \lambda h)_p \le (1+\lambda)^{r+1} \omega(f; h)_p \tag{2.78}$$

verwendet wurde. Diese Ungleichung verallgemeinert (2.9) auf den Stetigkeitmodul $\omega(f;\delta)_p \equiv \omega_1(f;\delta)_p$. Bezüglich eines Beweises sei auf Schumaker [Sch81] verwiesen. □

Bemerkung 2.19. Ungleichung (2.78) ist wegen

$$\omega_{j1}(f;\delta)_p \le \delta \sum_{i=1}^m \omega_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}; \delta\right)_p . \tag{2.79}$$

stärker als diejenige von Satz 2.23. Diese Ungleichung folgt aus der für $f \in C_0^\infty$ geltenden Beziehung

$$\Delta_h^{j+1} f(x) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt, \qquad \varphi(t) := \Big(\Delta_h^j f\Big)(x+th).$$

Daraus schließt man

$$\begin{aligned}
\Big\|\Delta_h^{j+1} f(x)\Big\|_p &\le \int 0^1 \Big\| h \cdot \operatorname{grad} \Delta_h^j f(\cdot) \Big\|_p\, dt \\
&\le \|h\| \sum_{i=1}^m \left\| \Delta_h^j \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right\|_p
\end{aligned}$$

woraus (2.78) für $f \in C_0^\infty$ folgt; durch Grenzübergang analog zu Korollar 2.2 verallgemeinert man die Aussage auf $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^m)$. ♢

Wir erhalten als Anwendung der Sätze die Herleitung von Jackson-Ungleichungen für die Approximation mit bandbegrenzten Funktionen und trigonometrischen Funktionen im $\mathbb{R}^m$. Für ein festes Gebiet W mit $\operatorname{meas} W > 0$ im $\mathbb{R}^m$ geben diese das Verhalten von $\operatorname{dist}\left(f; B_\varrho^{(p)}(W)\right)_{X(\mathbb{R}^m)}$ für $f \in X(\mathbb{R}^m)$ wenn ϱ gegen ∞ geht und entsprechend Lemma 2.12 auch $\operatorname{dist}\left(f; \Pi_n^*(W)_{X(\mathbb{T}^m)}\right)$ für $f \in X(\mathbb{T}^m)$ wenn n gegen ∞ geht. Dabei ist $\Pi_n^*(W)$ die Menge aller trigonometrischen Polynome t auf dem $\mathbb{R}^m$ deren Fourier-Koeffizienten $\hat{t}[j]$ für alle $j \in \mathbb{Z}_+^m$, die nicht in nW liegen, verschwinden.

Wir betrachten folgende Möglichkeiten für W:

- Ist W ein Quader $[-r_1, r_1] \times \cdots \times [-r_m, r_m]$ mit Kantenlängen $2r_i > 0$, so ist $\Pi_n^*(W)$ die Menge aller trigonometischen Polynome mit einem Grad kleiner als nr_i in der i-ten Variable.

- Ist $W = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : |x_1 + \cdots + x_m| \le r\}$, so ist $\Pi_n^*(W)$ die Menge aller trigonometrischen Polynome mit totalen Grad kleiner oder gleich nr.

Weniger anschaulich und gebräuchlich sind

- die Kugel $W = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \le r\}$

- und der hyperbolische Fall $W \cap \mathbb{Z}^2 = \{x = (x_1, x_2) : 1 \le |x_1 x_2| \le r\} \cup \{0\}$.

Wir wenden nun die Sätze auf Kerne $K(x)$ mit $K(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\operatorname{supp} \hat{K} \subseteq W$ an. Nach Lemma 2.24 liefert wegen $\operatorname{supp} \hat{K}_\varrho(v) = \operatorname{supp} \hat{K}(v/\varrho) \subseteq \varrho W$ die Dirac-Folge Abbildungen I_ϱ von $X(\mathbb{R}^m)$ in $B_p(W)$, wobei $1 \le p \le \infty$ entsprechend Vereinbarung mit $X(\mathbb{R}^m)$ gekoppelt ist.

Betrachtet man dann in Satz 2.24 die Kerne $\chi_{r+1,\varrho}$ die Linearkombinationen der Kerne $K_{\varrho/\nu}$, $1 \le \nu \le r+1$, sind, so gilt bei obiger Wahl von K wieder $\operatorname{supp} \hat{\chi}_{r+1,\varrho} \subseteq \varrho W$. Damit kommen wir zu

Satz 2.25.

1. *Die Familie $\chi_{r+1,\varrho} * f$ für $f \in X$ und $\varrho \to \infty$ liefert einen linearen Approximationsprozess auf $X(\mathbb{R}^m)$ in die Räume $B_p(\varrho W)$. Es gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\big(f; B_p(\varrho W)\big) &\le \Big\| \chi_{r+1,\varrho} * f - f \Big\|_{X(\mathbb{R}^m)} \\ &\le \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\varrho}\right)_{X(\mathbb{R}^m)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l\end{aligned}$$

   und falls $f \in X^{(r+1)}(\mathbb{R}^m)$ weiter

$$\operatorname{dist}\big(f; B_p(\varrho W)\big) \le \varrho^{-(r+1)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l \sum_{|\alpha|=r+1} \|D^\alpha f\|_{X(\mathbb{R}^m)},$$

   wobei die μ_l die absoluten Momente von K sind.

2. *Ist f zusätzlich periodisch und $f \in X(\mathbb{T}^m)$, so liefert $\chi_{r+1,n} * f$ einen linearen Approximations-Prozess auf $X(T)$ in die Räume $\Pi_n^*(W)$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\big(f; \Pi_n^*(W)\big)_{X(\mathbb{R}^m)} &\le \Big\| \chi_{r+1,n} * f - f \Big\|_{X(\mathbb{T}^m)} \\ &\le \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\varrho}\right)_{X(\mathbb{T}^m)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l\end{aligned}$$

   und falls $f \in \chi^{(r+1)}(T)$ weiter

$$\operatorname{dist}\big(f; \Pi_n^*(W)\big)_{X(\mathbb{R}^m)} \le n^{-(r+1)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l \sum_{|\alpha|=r+1} \|D^\alpha f\|_{X(\mathbb{T}^m)}$$

Beweis. Zu 1: Die erste Aussage folgt nach Satz 2.24 und sukzessiver Abschätzung der Stetigkeitsmoduln für $X^{(r+1)}(\mathbb{R}^m)$ nach (2.78) und (2.10)

Zu 2: Die Argumentation für die Räume $X(\mathbb{T}^m)$ ist genau die gleiche wie für die Räume $X(\mathbb{R}^m)$, man ersetzt einfach sämtliche $X(\mathbb{R}^m)$-Normen durch die entsprechenden $X(\mathbb{T}^m)$-Normen. □

Bemerkung 2.20. Die Fehlerabschätzungen in diesem Satz sind alle vom gleichen Typ und im Wesentlichen unabhängig von der Grundmenge W (und damit vom gewählten Approximationsraum). Verantwortlich für die Approximationsgüte ist stets nur ein einziger Parameter - und zwar entweder ϱ oder n (wobei jeder dieser Parameter gegen ∞ geht). Man kann also anschaulich von Approximationsgüte im „radialen Sinne“ sprechen. Die Mengen W werden mit wachsendem Parameter immer größer. Für $r_1 \leq r_2$ gilt $B_p(\varrho_1 W) \subseteq B_p(\varrho_2 W)$, für $n_1 \leq n_2$ gilt die entsprechende Inklusion $\Pi_{n_1}(W) \subseteq \Pi_{n_1}(W)$; in beiden Fällen sind die Räume zu verschiedenen Parametern ineinander geschachtelt. Insofern fügen sie sich in die in den nächsten Kapitel zu behandelnden Theorien der translationsinvarianten Räume und der Multiresolution-Analysis ein. ♢

Kapitel 3

Translationsinvariante Räume

3.1 Allgemeine Theorie

3.1.1 Charakterisierung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit (den Grundlagen) der Theorie der translationsinvarianten Räume. Die hier erhaltenen allgemeinen Ergebnisse werden dann im folgenden Abschnitt – vor allem auf Splineräume – spezialisiert. Als Grundlage der folgenden beiden Abschnitte dienten [JM91] und [BDR94]. Zuerst seien einige Notationen eingeführt.

Definition 3.1. (Translationsinvarianter Raum) *Ein Raum S von Funktionen auf $\mathbb{R}^m$ heißt translationsinvariant, falls aus $f \in S$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ auch $f(\cdot + \alpha) \in S$ folgt.*

Ein spezieller translationsinvarianter Raum ist der durch alle *endlichen* Linearkombinationen von Translaten $\varphi(\cdot + \alpha)$ einer Ausgangsfunktion φ erzeugte Raum $S_0(\varphi)$. Wir machen dann die

Definition 3.2. *Der mit $S(\varphi)$ bezeichnete Abschluss von $S_0(\varphi)$ in $L_2(\mathbb{R}^m)$ heißt* der von φ erzeugte translationsinvariante Raum in $L_2(\mathbb{R}^m)$ *oder auch* Raum der Translate von φ *und φ heißt* Erzeuger *von $S(\varphi)$.*

Beispiele sind Translate von Sinc-Funktionen und B-Splines. Im ersten Fall wählen wir φ mit Hilfe der Transferfunktion des Gebietes W nach (2.35) und setzen

$$\varphi(x) := \int_W \mathrm{e}^{2\pi i x v}\, dv = W(2\pi x) \tag{3.1}$$

sowie

$$S(\omega W) := \overline{\operatorname{span}\{W(2\pi(\Omega x - \alpha))\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m}} \tag{3.2}$$

wobei der Abschluss in $L_2(\mathbb{R}^m)$ gemeint ist. Satz 2.14 zeigt dann, dass $S(\omega W)$ gleich dem Raum $B_2(\omega W)$ von bandgrenzten Funktionen ist. Weitere Standard-Beispiele sind die weiter unten betrachteten Räume von "cardinal splines".

Bemerkung 3.1. Man kann auch von mehreren Funktionen φ_i erzeugte translationsinvariante Räume betrachten. Sie treten speziell dort auf wo wir es mit mehreren Variablen zu tun haben. Wir werden später Beispiele für solche Räume betrachten. ♢

Bemerkung 3.2. Im Spezialfall, dass φ einen kompakten Träger hat, können wir auch den Raum $S_*(\varphi)$ *aller* (also auch unendlicher) Linearkombinationen von Translaten von φ betrachten. Es treten bei den Summen dann keine Konvergenzprobleme auf, denn für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^m$ verschwinden nur endlich viele Terme dieser Summen nicht. Man kann dann zeigen, dass $\overline{S_*(\varphi) \cap L_2(\mathbb{R}^m)}$ im L_2-Sinn mit $S(\varphi)$ übereinstimmt. ♢

Bemerkung 3.3. Für die Zwecke der Approximation definiert man für eine Gitterweite $h > 0$ skalierte, translationsinvariante Räume S^h durch

$$S^h = S^h(\varphi) = \left\{ s\Big(\frac{x}{h}\Big) : s \in S(\varphi) \right\} \tag{3.3}$$

Eine wichtige Frage ist dann, welche Approximationsgüte diese Räume für $h \to 0$ besitzen. ♢

Man kann $S(\varphi)$ auch mit Hilfe der semi-diskreten Faltung von φ mit dem Folgenraum $l_2(\mathbb{R}^m)$ einführen. Dazu macht man die

Definition 3.3. (Semidiskrete Faltung) *Sei φ eine Funktion auf $\mathbb{R}^m$, und sei $a = \{a(\alpha)\}$ eine Folge auf dem ganzzahligen Gitter $\mathbb{Z}^m$. Dann ist die* semi-diskrete Faltung *von φ und a für alle $x \in \mathbb{R}^m$ definiert durch*

$$(\varphi *' a)(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha)\varphi(x - \alpha). \tag{3.4}$$

Entsprechend bezeichnen wir die Abbildung $a \mapsto \varphi *' a$ mit $\varphi *'$.

Bezeichnen wir mit l_0 die Menge aller Folgen mit kompaktem Träger, d. h. aller Folgen bei denen nur endlich viele Glieder nicht verschwinden, so ist der oben definierte Raum $S_0(\varphi)$ das Bild von l_0 unter der Abbildung $\varphi *'$ für $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Entsprechend macht man die

Definition 3.4. *Gegeben eine Funktion φ auf $\mathbb{R}^m$, so bezeichnet $S_p(\varphi)$ das Bild des Folgenraumes $l_p(\mathbb{Z}^m)$ unter der Abbildung $\varphi *'$*

Das folgende Lemma gibt ein Kriterium für φ an, damit $S_p(\varphi)$ sinnvolle Räume liefert.

Lemma 3.1. *Es sei Φ eine Funktion auf $\mathbb{R}^m$ und sei $\Phi^0(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |\Phi(x - \alpha)|$ für $x \in [0,1]^m$ und damit definiere die (linearen) Räume $(1 \le p \le \infty)$*

$$\mathbb{L}^p := \{\varphi : \|\varphi^0\|_{p,[0,1]^m} < \infty\}. \tag{3.5}$$

Dann liegt $\Phi *' a$ für $\Phi \in \mathbb{L}^p$, $a \in l_p(\mathbb{Z}^m)$, in $L_p(\mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$\|\Phi *' a\|_{p,\mathbb{R}^m} \le \|a\|_{l_p} \|\Phi^0\|_{p,[0,1]^m} \tag{3.6}$$

Beweis. Im Falle $p = \infty$ folgt (3.6) direkt aus der Definition (3.5). Für $1 \le p < \infty$ schreibe (falls letzteres Integral existiert)

$$\|\Phi *' a\|_{p,\mathbb{R}^m}^p = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \int_{[0,1]^m + \beta} |(\Phi *' a)(x)|^p \, dx = \int_{[0,1]^m} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} |(\varphi *' a)(x + \beta)|^p \, dx.$$

Dann betrachte für festes x mittels der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha)\varphi(x + \beta - \alpha) \right|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} a(\gamma - \beta)\varphi(x + \gamma) \right|^p \right)^{1/p} \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} |\varphi(x + \gamma)| \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} |a(\gamma - \beta)|^p \right)^{1/p} \\
&= \varphi^0(x) \|a\|_{l_p}
\end{aligned}$$

Dies oben eingesetzt ergibt

$$\|\Phi *' a\|_{p,\mathbb{R}^m} \leq \int_{[0,1]^m} |\varphi^0|^p \|a\|_{l_p}^p \, dx.$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite endlich und die Behauptung folgt. □

Nach diesem Lemma liegt $S_p(\varphi)$ in $L_p(\mathbb{R}^m)$ falls $\varphi \in \mathbb{L}^p$ und ist aufgrund der Ungleichung (3.6) abgeschlossen. Im Falle $p = 2$ ist jedoch $S_2(\varphi)$ – wie sich noch zeigen wird – im Allgemeinen nicht mit dem früher definierten Raum $S(\varphi)$ identisch. Dazu wollen wir die Räume $S(\varphi)$ und $S_2(\varphi)$ per Fouriertransformation charakterisieren, was auch für weitere Zwecke sehr nützlich sein wird. Zunächst zeigen wir

Lemma 3.2. *Ist $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und σ eine 2π-periodische Funktion in $L_\infty(\mathbb{T}^m)$, so ist $g = \mathcal{F}^{-1}[\sigma\hat{\varphi}]$ ein Element aus $S(\varphi)$.*

Beweis. Laut Voraussetzung ist $\sigma\hat{\varphi}$ wegen $\hat{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^m)$ eine $L_2(\mathbb{R}^m)$-Funktion, so dass auch $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ gilt. Es habe nun $\sigma(v) \in L_\infty(\mathbb{T}^m)$ die *formale* Darstellung

$$\sigma(v) \approx \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha) \mathrm{e}^{i\alpha v} \text{ bzw. } \hat{\sigma}[\alpha] = a(\alpha). \tag{3.7}$$

Wir bilden den fejerschen Summationsprozess von σ, d. h.

$$K_N(\sigma; v) := (F_{m,N} * \cdots * F_{1,N} * \sigma)(v)$$

und erhalten wie im Beweis zum Satz von Weierstraß

$$\lim_{N\to\infty} K_N(\sigma; v) = \sigma(v).$$

Damit folgt über das lebesguesche Majorantenkriterium

$$\lim_{N\to\infty} \|K_N(\sigma; v)\hat{\varphi}(v) - \sigma(v)\hat{\varphi}(v)\|_2^2 = 0$$

und somit auch

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\mathcal{F}^{-1}[K_N(\sigma)\hat{\varphi}] - g\right\|_2 = 0.$$

Nun ist aber $K_N(\sigma)\hat{\varphi}$ eine endliche Linearkombination von Funktionen des Typs $\exp(i\alpha v)\hat{\varphi}(v)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^m$, und daher $\mathcal{F}^{-1}[K_N(\sigma)\hat{\varphi}] \in S_0(\varphi)$. Daraus folgt $g \in S(\varphi)$. □

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich der Raum $S(\varphi)$ genau charakterisieren:

Satz 3.1. *Ist $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$, so besteht $S\varphi$ genau aus den Funktionen $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$, die die Darstellung $\hat{g} = \tau\hat{\varphi}$ mit einer 2π-periodischen Funktion $\tau(v)$ besitzen.*

Beweis. Es sei $g \in S(\varphi)$. Dann gibt es eine Folge von Funktionen

$$g_N(x) = \sum_{|\alpha|\leq N} a(\alpha)\varphi(x - \alpha), \qquad \hat{g}_N(v) = \tau_n(v)\hat{\varphi}(v),$$

wobei die $\tau_N(v)$ derartige trigonometrische Polynome sind, dass

$$\|g_N - g\|_2 \xrightarrow{N\to\infty} 0, \qquad \|\tau_N\hat{\varphi} - \hat{g}\|_2 \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Es sei nun $\Omega_\varphi := \{v \in \mathbb{R}^m : \hat{\varphi}(v) = 0\}$. Dann folgt daraus $\hat{g}(v) = 0$ für $v \in \Omega\varphi$ und $\lim_{N\to\infty} \tau_N(v) = \hat{g}(v)/\hat{\varphi}(v)$ fast überall für $v \notin \Omega_\varphi$, d. h. $v \in \Omega_\varphi^C$. Die Funktion $\hat{g}(v)/\varphi(v)$ muss auf Ω_φ^C als punktweiser Limes von 2π-periodischen Funktionen ihrerseits 2π-periodisch sein. Man definiere dann

$$\tau(v) := \begin{cases} \hat{g}(v)/\hat{\varphi}(v), & v \in \Omega_\varphi^C \\ 0, & v \in \Omega_\varphi \end{cases}$$

Dann ist $\tau(v)$ auch 2π-periodisch und es gilt $\hat{g} = \tau\hat{\varphi}$.

Zur Umkehrung gelte $\hat{g} = \tau\hat{\varphi}$ mit 2π-periodischem τ. Es sei dann

$$E_N := \{v \in \mathbb{R}^m : |\tau(v)| \le N\}$$

Dann definiere man

$$\tau_N(v) := \begin{cases} \tau(v), & v \in E_N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und weiter $\hat{g}_N = \tau_N\hat{\varphi}$. Dann folgt mit $E_N^* = E_N \cap \Omega_\varphi$

$$\|\hat{g}_N - \hat{g}\|_2^2 = \int_{v\notin E_N^*} |\tau(v)\hat{\varphi}(v)|^2 \, dv \tag{3.8}$$

Andererseits muss

$$\|\hat{g}\|_2^2 \ge \int_{v\notin E_N^*} |\tau(v)\hat{\varphi}(v)|^2 \, dv \ge N^2 \int_{v\notin E_N^*} |\hat{\varphi}(v)|^2 \, dv$$

gelten. Daraus folgt, dass das Maß des Komplements von E_N gegen 0 streben muss und daher in (3.8)

$$\|\hat{g}_N - \hat{g}\|_2^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

gilt. Es folgt dann weiter $\|g_N - g\|_2 \xrightarrow{N\to\infty} 0$. Nach dem vorigen Lemma liegen die g_N wegen $\hat{g}_N = \tau_N\hat{\varphi}$ und $\tau \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ in $S(\varphi)$ - und somit auch g. □

Aus diesem Satz erkennt man, dass der Raum $S(\varphi)$ für $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ im Allgemeinen größer ist als $S_2(\varphi)$. Denn es gilt (zumindest im distributionstheoretischen Sinne)

$$\mathcal{F}\left[\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} a(\alpha)\varphi(x-\alpha)\right] = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} a(\alpha)\mathrm{e}^{iv\alpha}\hat{\varphi}(v) \equiv \tau(v)\hat{\varphi}(v).$$

Nach Satz 3.1 ist aber nur $\tau(v)\hat{\varphi}(v) \in L_2(\mathbb{R}^m)$ nötig, damit $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} a(\alpha)\varphi(x-\alpha)$ in $S(\varphi)$ liegt, d. h. $\{a(\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}$ muss nicht unbedingt in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ liegen, wie das für die Elemente von $S_2(\varphi)$ verlangt wurde.

3.1.2 Basen

Für die praktische Verwendung der Räume $S_p(\varphi)$ ist die Frage nach einer numerische stabilen Basis von zentraler Bedeutung. Für $S_p(\varphi)$ legen wir fest:

Definition 3.5. (L_2-Stabilität) *Gegeben Φ und $S_p(\Phi)$ als Bild von $l_p(\mathbb{Z}^m)$ unter der Abbildung $\Phi*'$, so heißen die Translate von Φ l_p-*stabil *falls für alle $a \in l_p(\mathbb{Z}^m)$*

$$C_p\|a\|_{l_p} \le \|\Phi *' a\|_{p,\mathbb{R}^m} \le D_p\|a\|_{l_p} \tag{3.9}$$

mit Konstanten C_p, $D_p > 0$ gilt. Mit anderen Worten ist die Abbildung $\Phi*'$ ein stetiger Isomorphismus von $l_p(\mathbb{Z}^m)$ auf $S_p(\Phi)$.

Wir werden dazu für den Fall $p = 2$ Kriterien herleiten. Lemma 3.1 gibt bereits ein Kriterium für die exakte Abschätzung nach oben, für beliebige p vergleiche dazu [JM91]. Es sei auch bemerkt, dass (3.9) impliziert, dass die Translate von φ eine *unbedingte Schauder-Basis* für $S_p(\varphi)$ bilden, d. h. jedes Element von $S_p(\varphi)$ ist als eine eindeutig bestimmte Linearkombination von Translaten von φ darstellbar und diese Linearkombination konvergiert unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder.

Im Fall $p = 2$ gibt es noch ein äquivalentes Konzept, nämlich das der sogenannten Riesz-Basis, das sich auch für beliebige Hilbert-Räume formulieren lässt.

Definition 3.6. (Riesz-Basis) *Eine Familie $\{f_j\}_{j\in J}$ von Elementen eines separablen Hilbert-Raums X heißt Riesz-Basis, falls die Elemente $\{f_j\}$ linear unabhängig sind und falls*

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} |(f, f_j)|^2 \le B\|f\|^2 \tag{3.10}$$

mit Konstanten $0 < A, B < \infty$ gilt.

Wir werden zeigen, dass eine Familie $\{f_j\}_{j\in J}$ in X genau dann eine Riesz-Basis bildet, wenn sie als Bild einer Orthonormalbasis unter einen Homöomorphismus A darstellbar ist, der einen anderen Hilbert-Raum Y auf X abbildet. Damit folgt speziell bei Wahl von $Y = l_2(\mathbb{R}^m)$ und $A = \varphi*'$, dass eine l_2-stabile Basis in $S_2(\varphi)$ eine Riesz-Basis ist und umgekehrt. Anschaulich kann man also sagen, dass eine Riesz-Basis die nächst günstigen Eigenschaften zu denen einer Orthonormalbasis besitzt.

Ist nun $\{e_j\}$ eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum Y und A eine stetige injektive Abbildung von Y auf X, so sei $f_j := Ae_j$, $j \in J$, definiert. Dann sind die $\{f_j\}_{j\in J}$ linear unabhängig, denn für $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$ gilt

$$0 = \sum_{j\in J} \alpha_j f_j \quad \Longrightarrow \quad 0 = A^{-1}\left(\sum_{j\in J} a_j f_j\right) = \sum_{j/inJ} \alpha_j e_j \quad \Longrightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \in J$$

Es sei dann A^* der zu A adjungierte Operator; dieser ist definiert als die lineare Abbildung von X nach Y, die die Forderung

$$(f, Ag)_X = (A^* f, g)_Y$$

für alle $f \in X$ und alle $g \in Y$ erfüllt. Man kann zeigen, dass der so definierte Operator wieder linear und stetig ist. Darüber hinaus gelten $\|A^*\| = \|A\|$ sowie $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, und $\left\|(A^*)^{-1}\right\| = \left\|A^{-1}\right\|$, falls A^{-1} stetig ist (siehe dazu [Heu86], S. 327ff.). Dies auf den vorliegenden Fall mit $g = e_j$ angewendet ergibt mit der Parseval-Formel für Orthonormalbasen

$$\sum_{j\in J} \left|(f, f_j)_X\right|^2 = \sum_{j\in J} \left|(A^* f, e_j)_Y\right|^2 = \|A^* f\|_Y^2 .$$

Wegen

$$\left\|(A^*)^{-1}\right\| \|f\|^2 \le \sum_{j\in J} \left|(f, f_j)_X\right|^2 \le \|A^*\|^2 \|f\|^2$$

folgt dann, dass die $\{f_j\}_{j\in J}$ eine Riesz-Basis bilden.

Bilden umgekehrt die $\{f_j\}_{j\in J}$ eine Riesz-Basis, so definiere man die Abbildung S auf dem Folgenraum $l_2(J)$ in X durch

$$\mathbf{c} = \{c_j\} \in L_2(J) \quad \Longrightarrow \quad S\mathbf{c} := \sum_{j\in J} c_j f_j \in X$$

Dann ist S linear und stetig bzw. beschränkt, denn

$$|(S\mathbf{c}, f)| = \left| \sum_{j\in J} c_j \overline{(f_k, f)} \right| \leq \sqrt{\sum_{j\in J} |c_j|} \sqrt{B} \|f\|$$

unter Benutzung von (3.10). Einsetzen von $f = S\mathbf{c} \neq 0$ zeigt dann

$$\|S\mathbf{c}\| \leq \sqrt{B} \sqrt{\sum_{j\in J} |c_j|^2}.$$

Weiterhin bildet S auf ganz X ab, denn mit (3.10) folgt

$$f \perp S\big(l_2(J)\big) \quad \Longrightarrow \quad (f, f_j) = 0 \quad \forall j \in J \quad \Longrightarrow \quad \|f\| = 0.$$

Schließlich ist S noch eine invertierbare Abbildung, denn

$$S\mathbf{c} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j\in J} c_j f_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_j = 0 \quad \forall j \in J,$$

da die $\{f_j\}$ als linear unabhängig vorausgesetzt waren. Also ist S eine stetige, injektive Abbildung vom Hilbert-Raum $l_2(J)$ auf X. Nun gilt der Satz von der beschränkten Inversen: Jede lineare, stetige und injektive Abbildung A eines Banachraumes X auf einen Banachraum Y ist stetig (siehe [Heu86], S. 243ff). Damit folgt direkt, dass S ein stetiger Isomorphismus von $l_2(J)$ auf X ist und damit ist die Umkehrung bewiesen.

Wir werden nun zunächst die Räume $S_2(\varphi)$ weiter (auf die Existenz von orthonormierten oder l_2-stabilen Basen hin) untersuchen. Beide Fragen lösen wir wieder mit Hilfe der Fouriertransformation. Dazu benötigen wir einige Notationen, die im Folgenden immer wieder auftreten werden. Zunächst definieren wir

$$c(f, g)(\alpha) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{g(x-\alpha)}\, dx, \tag{3.11}$$

die gegebenen $l, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ eine Folge zuordnet. Diese Folge liegt offenbar in $L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Zur weiteren Untersuchung ist es zweckmäßig, auch $c(f, g)$ mit Hilfe der Fouriertransformation auszudrücken,

$$\begin{aligned} c(f, g)(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v) \mathcal{F}^{-1}\left[\overline{g}(\cdot - \alpha)\right](v)\, dv = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v) \mathrm{e}^{i\alpha v} \overline{\hat{g}(v)}\, dv \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \mathrm{e}^{iv\alpha} \left(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^m} \hat{f}(v + 2\pi\beta) \overline{\hat{g}(v + 2\pi\beta)} \right) dv \end{aligned}$$

Hier ist zu bemerken, dass nach Voraussetzung $\hat{f}(v)\overline{\hat{g}(v)} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ gilt und somit das letzte Integral im L_1-Sinne konvergiert. Es sind also die $c(f, g)(\alpha)$ die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen L_1-Funktion

$$[\hat{f}, \hat{g}](v) := \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^m} \hat{f}(v + 2\pi\beta) \overline{\hat{g}(v + 2\pi\beta)} \tag{3.12}$$

Mit diesen Notationen formulieren wir

Lemma 3.3. (Orthogonalität von Translaten) *Es sei $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

1. *Eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ steht senkrecht zu allen ganzzahligen Translaten von φ genau dann, wenn*

$$c(v, \varphi)(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^m \qquad \textit{oder} \qquad [\hat{f}, \hat{\varphi}](v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{T}^m \tag{3.13}$$

2. *Die Translate* $\{\varphi(x-\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}$ *bilden ein Orthonormalsystem (ONS) genau dann, wenn*

$$c(\varphi,\varphi)=\delta_{0,\alpha}\quad\forall\alpha\in\mathbb{Z}^m\qquad oder\qquad[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)=1\quad\forall v\in\mathbb{T}^m \tag{3.14}$$

Der Beweis ist einfach und sei dem Leser überlassen..

Statt der Fourierreihe der Koeffizienten $c(f,g)(\alpha)$ kann man allgemeiner ihre *z-Transformation* bilden, d. h.

$$F(f,g)(z):=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}c(f,g)(\alpha)z^\alpha \tag{3.15}$$

Im Falle $z=\exp iv$ geht sie in die Fourierreihe über. Man kann aber für $|z|<1$ bessere bzw. allgemeinere Konvergenz erreichen, was später hilfreich sein wird. Hinreichende Kriterien für die Konvergenz der Fourierreihe in (3.15) sind die Bedingungen $\{c(f,g)(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}\in l_1(\mathbb{Z}^m)$, d. h. absolute Konvergenz oder $\{c(f,g)(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}\in l_2(\mathbb{Z}^m)$ nach dem Satz von Riesz-Fischer. Dazu formulieren wir

Lemma 3.4. *Für* $f,g\in L_2(\mathbb{R}^m)$ *seien die Funktion* $f^0(x)$, g^0 *mit Periode 1 wie in Lemma 3.1 definiert. Dann gelten*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}|c(f,g)(\alpha)|\le\|f^0\|_{2,[0,1]^m}\|g^0\|_{2,[0,1]^m}$$

und

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}|c(f,g)(\alpha)|^2=\left\|\left[\hat{f},\hat{g}\right]\right\|^2_{2,[0,2\pi]^m}$$

sowie

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}|c(f,g)(\alpha)|^2\le\|f^0\|_{2,[0,1]^m}\|g^0\|_{2,[0,1]^m}$$

falls die rechten Seiten jeweils endlich sind.

Bezüglich eines Beweises sei auf [JM91] verwiesen. Damit können wir folgenden Zusammenhang formulieren:

Korollar 3.1. *Unter den hinreichenden Bedingungen von Lemma 3.4 gilt für die Funktionen aus (3.12) und (3.13) die Identität*

$$F(f,g)(\mathrm{e}^{iv})=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}c(f,g)(-\alpha)\mathrm{e}^{i\alpha v}=[\hat{f},\hat{g}](v)$$

In Erweiterung von Lemma 3.3 geben wir nun ein notwendiges wie hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Riesz-Basis an, das ebenfalls die Funktion $[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)$ verwendet.

Satz 3.2. (Y. Meyer) *Die Translate* $\{\Phi(x-k)\}=k\in\mathbb{Z}^m$ *einer* L_2*-Funktion* Φ *bilden eine* l_2*-stabile Basis genau dann, wenn für Konstanten* $0<C<D<\infty$

$$C\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\|\hat{\Phi}(x+2\pi k)\|^2\equiv[\hat{\Phi},\hat{\Phi}](x)\le D\quad\forall x\in\mathbb{T}^m. \tag{3.16}$$

Beweis. Es sei $\{a_k\}$ eine Folge in $l_2(\mathbb{Z}^m)$. Dann konvergiert die Reihe

$$A(\omega)=\lim_{N\to\infty}A_N(\omega):=\sum_{|k|\le N}a_k\mathrm{e}^{-i(k,\omega)},\quad\omega\in\mathbb{T}^m$$

im L_2-Sinn nach dem Satz von Riesz-Fischer. Wie bei der Berechnung der Koeffizienten $c(f,g)(\alpha)$ folgt dann mit Hilfe der parsevalschen Formel (Limes im L_2-Sinn)

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\Big\|\sum_{|k|\le N} a_k\Phi(x-k)\Big\|_2^2 &\le \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{|k|\le N} a_k\Phi(x-k)\overline{\sum_{|j|\le N} a_j\Phi(x-j)}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m} A_N(\omega)\hat\Phi(\omega)\overline{A_N(\omega)\hat\Phi(\omega}\,d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{T}^m}|A_N(\omega)|^2[\hat\Phi,\hat\Phi](\omega)\,d\omega\end{aligned}$$

Nach der Argumentation wie oben für (3.13) ist $[\hat\Phi,\hat\Phi](\omega)$ in $L_1(\mathbf{T}^m)$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer gilt außerdem im L_2-Sinn

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^m}|A_N(\omega)|^2\,d\omega = \sum_{|k|\le N}|a_k|^2, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^m}|A(\omega)|^2\,d\omega = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m}|a_k|^2,$$

so dass die Forderung der l_2-Stabilität äquivalent ist zu

$$C\int_{\mathbb{T}^m}|A(\omega)|^2\,d\omega \le \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{T}^m}|A_N(\omega)|^2[\hat\Phi,\hat\Phi](\omega)\,d\omega \le D\int_{\mathbb{T}^m}|A(\omega)|\,d\omega \qquad (3.17)$$

Aus (3.16) folgt dann nach dem Theorem über majorisierte Konvergenz

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{T}^m}|A_N(\omega)|^2[\hat\Phi,\hat\Phi](\omega)\,d\omega \le D\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{T}^m}|A_N(\omega)|\,d\omega = D\int_{\mathbb{T}^m}|A(\omega)|\,d\omega$$

und ebenso die andere Ungleichung in (3.17), so dass (3.16) hinreichend für die l_2-Stabilität ist.

Zum Beweis der umgekehrten Richtung wähle für festes $\omega^*\in\operatorname{Int}\mathbf{T}^m$ eine Folge $A_N(\omega)$ als

$$A_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2N+1)}^m}\prod_{j=1}^m D_N(\omega_j^*-\omega_j)$$

wobei D_N der univariate Dirichlet-Kern aus (2.23) ist und ω_j^* und ω_j die Komponenten von ω^* und ω bezeichnen. Der Vergleich mit (2.24) zeigt, dass

$$|A_N(\omega)|^2 = \prod_{j=1}^m F_{2N}(\omega_j^*-\omega_j)$$

und daher mit $g(\omega)\equiv[\hat\Phi,\hat\Phi](\omega)$ weiter

$$\int_{\mathbb{T}^m}|A_N(\omega)|^2[\hat\Phi,\hat\Phi](\omega)\,d\omega = (F_{m,2N}*\cdots*F_{1,2N}*g)(\omega)$$

Die l_2-Stabilität liegert dann wegen $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F_{2N}(\omega_j)\,d\omega_j = 1$ für $1\le j\le m$ nach (3.17)

$$C \le (F_{m,2N}*\cdots*F_{1,2N}*g)(\omega^*) \le D.$$

Wegen (2.25) folgt dann für jeden Stetigkeitspunkt ω^* (also fast überall)

$$C \le g(\omega^*)\equiv[\hat\Phi,\hat\Phi](\omega)\le D,$$

d. h. die l_2-Stabilität impliziert die Ungleichungen in (3.16). □

Korollar 3.2. *Ist $\tilde{\varphi}$ ein* beliebiges *Element in $S_2(\varphi)$ mit der Darstellung $\hat{\tilde{\varphi}}(v) = a(v)\hat{\varphi}(v)$ und $a(v) \in L_2(\mathbb{T}^m)$, so bilden die Translate von $\tilde{\varphi}$ eine Riesz-Bassis genau dann, wenn*

$$0 < A \leq a(v) \leq B < \infty, \qquad v \in \mathbb{T}^m$$

mit Konstanten A, B gilt.

Bemerkung 3.4. Bezüglich eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums für die l_p-Stabilität der Translate von $\varphi \in \mathcal{L}^p$ sei auf [JM91] verwiesen. Es ist eine Modifikation des Kriteriums (3.16) und verlangt einen relativ aufwendigen Beweis. ♢

Als Variante von Satz 3.2 sei noch ein Kriterium für die Äquivalenz der Räume $S(\varphi)$ und $S_2(\varphi)$ bewiesen:

Korollar 3.3. *Erfüllt $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ die linke Ungleichung in (3.16), so gilt $S_2(\varphi) = S(\varphi)$.*

Beweis. Nach Definition ist nur $S(\varphi) \subseteq S_2(\varphi)$ zu zeigen. Es sei also $g \in S(\varphi)$. Nach Satz 3.1 gilt dann $\hat{g}(v) = \tau(v)\hat{\varphi}(v)$ mit einer 2π-periodischen Funktion $\tau(v)$ und daher $\hat{g}(v + 2\pi k) = \tau(v)\hat{\varphi}(v + 2\pi k)$ und weiter

$$\begin{aligned}\|\hat{g}\|_2^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} |\hat{g}(v + 2\pi k)|^2 \, dv \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} |\tau(v)\hat{\varphi}(v + 2\pi k)|^2 \, dv \geq \int_{\mathbb{T}^m} \sum_{k\leq N} |\tau(v)\hat{\varphi}(v + 2\pi k)|^2 \, dv.\end{aligned}$$

Lässt man nun N gegen unendlich gehen,so folgt wegen der Stetigkeit der Funktionen $\hat{\varphi}(v + 2\pi k)$ nach (3.16)

$$\sum_{|k|\geq N} |\hat{\varphi}(v + 2\pi k)|^2 \, dv \geq \frac{A}{2}$$

und somit $\tau(v) \in L_2(\mathbb{T}^m)$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer muss dann $\tau(v) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} a_l \exp(ilv)$ mit $\{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$ gelten und somit

$$\hat{g}(v) = \left[\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} a_l \varphi(\cdot + l)\right]^{\wedge}(v),$$

d. h. $g \in S_2(\varphi)$. □

Man kann mit Hilfe der beschriebenen allgemeinen Charakterisierung einer Riesz-Basis in einem Hilbert-Raum auch eine Methode zur Konstruktion einer ONB gewinnen. Dies folgt aus dem Beweis in [Mey92], der allerdings abstrakter Natur ist, da er mit dem Operatorkalküt für positive selbstadjungierte Operatoren arbeitet. Im Spezialfall der Räume $S_2(\varphi)$ gibt jedoch die Fourieranalysis eine einfachere Methode. Wir beschreiben sie in

Lemma 3.5. *Es sei $\varphi \in L_2(\mathbb{T}^m)$ die Erzeugenden von $S_2(\varphi)$ und es sei (3.16) erfüllt. Dann bilden die Translate von $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$, definiert per*

$$\hat{g}(v) = \frac{\hat{\varphi}(v)}{\sqrt{[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)}} \tag{3.18}$$

eine ONB für $S_2(\varphi)$.

Beweis. Wenn solch ein g existiert, muss es nach Satz 3.1 die Form $\hat{g}(v) = \tau(v)\hat{\varphi}(v)$ mit einem 2π-periodischen $\tau(v)$ haben. Nach Lemma 3.3 muss dafür

$$1 = [\hat{g}, \hat{g}](v) = [\tau\hat{\varphi}, \tau\hat{\varphi}](v) = |\tau(v)|^2[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v),$$

d. h.$|\tau(v)| = 1/\sqrt{[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)}$ gelten. Wegen (3.16) ist dieses $|\tau(v)|$ wohldefiniert. Wir können speziell $\tau(v) = |\tau(v)|$ wählen und erhalten (3.18). Hiermit kann man auch umgekehrt $[\hat{g}, \hat{g}](v) = 1$ nachweisen und die Behauptung ist bewiesen. □

Als Anwendung dieser Formel für g bzw. $\hat{g}$ kann man zeigen

Lemma 3.6. *Ist $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ zusätzlich glatt in dem Sinne, dass $\varphi \in L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ (vgl. Definition in Abschnitt 2.4) für $\alpha > 0$, so gilt dies auch für das ONS aus (3.18).*

Beweis. Er folgt unmittelbar aus (3.16) und (3.18), denn $\varphi \in L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ bedeutet, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\varphi}(v)|^2 \left(1 + |v|^2\right)^{\alpha} dv < \infty$$

gilt. □

Im Spezialfall ganzzahliger $\alpha = r < 0$ sind die Räume $L^{r,2}(\mathbb{R}^m)$ mit dem Sobolev-Raum $W^{r,2}(\mathbb{R}^m)$ äquivalent. Mit Hilfe des bereits bewiesenen Spezialfalls der Sobolev-Einbettung (vgl. 2.4) folgt aus obigem Lemma, dass $\varphi \in L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\alpha - m/2 > k$ impliziert, dass die ONB in (3.18) in $C^k(\mathbb{R}^m)$ liegt. Eine weitere wichtige Folgerung ist

Lemma 3.7. *Es sei $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\mathbb{R}^m)$ exponentiell abfallend in x, d. h es gebe ein $g \in (0,1)$ und $C < 0$ unabhängig von x, so dass*

$$|\varphi(x)| \leq Cq^{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Ferner seien die Translate von φ l_2-stabil. Dann sind die Fourier-Koeffizienten $\{b_k\}$ von $1/[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)$ in (3.18) eindeutig bestimmt und fallen exponentiell in k ab. Das durch $\{g(x-j)\}_{j\in\mathbb{Z}^m}$ erzeugte ONS besteht dann ebenfalls aus exponentiell abfallende Funktionen.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Koeffizienten $\overline{c(\varphi,\varphi)(j)}$ in (3.15) exponentiell abfallen. Dazu unterscheidet man zwischen $|x| \geq 2|j|$, wofür man die Abschätzung

$$|\varphi(x-j)\varphi(x)| \leq C^2 q^{|x-j|} q^{|x|} \leq C^2 q^{2|x|-|j|} \leq C^2 q^{|x|} q^{|j|}$$

macht und $|x| \leq 2|j|$, wofür die Abschätzung

$$|\varphi(x-j)\varphi(x)| \leq C^2 q^{|j|-|x|} q^{|x|} \leq C^2 q^{|j|}.$$

gilt. Weiterhin schätzt man dann ab:

$$|c(\varphi,\varphi)(j)| \leq C^2 q^{|j|} \left[\int_{\mathbb{R}^m} q^{|x|}\, dx + \int_{|x|\leq 2|j|} dx \right] \leq \tilde{C}\tilde{q}^{|j|},$$

wobei $\tilde{C} < 0$ und $\tilde{q} \in (0,1)$ wieder Konstanten sind. Dabei kann $\tilde{q}$ (um das lineare Wachstum in $|j|$ des zweiten Terms zu kompensieren) geringfügig größer sein als q.

Damit konvergiert die Laurent-Reihe $T(\varphi,\varphi)(z)$ in (3.15) für $z \in \mathbb{C}^m$ mit $|z| \leq \tilde{q}$. Weil laut Voraussetzung die Translate von φ l_2-stabil sind, folgt nun aus Satz 3.2 und dem Korollar 3.1, dass

$$T(\varphi,\varphi)(\mathrm{e}^v) = [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v) \geq C > 0.$$

Daher ist $1/T(\varphi,\varphi)(z)$ holomorph in einer Umgebung von $\mathbb{T}^m = \{z : |z| = 1\}$ in $\mathbb{C}^m$ und folglich wieder in eine Laurent-Reihe für $1/\varrho < |z| < \varrho$ mit einem gewissen $\varrho = 1+\varepsilon, \varepsilon > 0$, entwickelbar. Die Koeffizienten dieser Reihe sind nach Korollar 3.1 gerade die gesuchten $\{b_k\}$ und müssen exponentiell in $|k|$ abfallen, damit die Reihe konvergiert. Es gilt also $|b_k| \le \overline{C}\varrho^{-|k|}$ mit einer gewissen Konstante $\overline{C} > 0$ und daher für g aus (3.18)

$$|g(x+j)| \le \sum_k |b_k \varphi(x+j-k)| \le \overline{C} \sum_k |b_k| q^{-|j-k|}, \qquad x \in [0,1], \quad j \in \mathbb{Z}^m$$

Durch Unterscheiden der Fälle $|k| \ge 2|j|$ und $|k| \le 2|j|$ analog wie oben erhält man dann das exponentielle Abfallen von $|g(x)|$ in $|x|$. □

Bemerkung 3.5. In Kapitel 4 ,speziell in den Abschnitten 4.2 und 4.3, wird auf dem Wege zur Konstruktion von Wavelets zuerst wie in Lemma 3.5 eine ONB aus Translaten der Erzeugenden φ eines zugrundeliegenden Raums $S_2(\varphi)$ konstruiert.Es stellt sich dann heraus, dass deren Eigenschaften sich auf die Wavelets vererben . Die gerade bewiesenen Lemmata 3.6 und Lemma 3.7 zeigen daher ,dass sich insbesondere Glattheit und exponentieller Abfall von φ auf die entstehenden Wavelets vererben. ♢

3.1.3 Beste und Kardinale Approximation

Eine weitere Anwendung der Fourieranalysis betrifft die Charakterisierung des orthogonalen Projektors P_φ von $L_2(\mathbb{R}^m)$ auf $S(\varphi)$, d. h. wir suchen

$$\begin{aligned} P_\varphi : L_2(\mathbb{R}^m) &\to S(\varphi) \\ f \mapsto P_\varphi f : \quad (f - P_\varphi f, g) &= 0 \qquad \forall g \in S(\varphi) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dieser Operator existiert, ist stetig und liefert (da $S(\varphi)$ per Definition abgeschlossen ist) nach dem allgemeinen Satz 1.3 die bezüglich $S(\varphi)$ beste Approximation im Hilbert-Raum $L_2(\mathbb{R}^m)$. Nach Satz 3.1 wissen wir, dass für seine Fouriertransformierte

$$[P_\varphi f]^\wedge(v) = \tau_f(v)\hat{\varphi}(v) \tag{3.20}$$

mit 2π-periodischem τ_f gelten muss. Die obige Orthogonalitäts-Relation liefert dann mit Lemma 3.3

$$0 = \left[\hat{f} - [P_\varphi f]^\wedge, \hat{\varphi}\right](v) = [\hat{f},\hat{\varphi}](v) - \tau_f(v)[\hat{\varphi},\hat{\varphi}], \quad v \in \mathbb{T}^m. \tag{3.21}$$

Damit folgt

Lemma 3.8. *Für den orthogonalen Projektor P_φ von $L_2(\mathbb{R}^m)$ auf $S(\varphi)$ gilt die Darstellung (3.21) mit*

$$\tau_f(v) := \begin{cases} \left[\hat{f},\hat{\varphi}\right](v)/[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v), & [\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v) \neq 0 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \tag{3.22}$$

für alle $v \in \mathbb{T}^m$. Für den Fehler der Approximation im L_2-Sinn durch $S(\varphi)$ gilt

$$\operatorname{dist}\big(f, S(\varphi)\big)^2_{2,\mathbb{R}^m} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\hat{f}(v)} \left[\hat{f}(v) - \frac{[\hat{f},\hat{\varphi}](v)}{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)}\hat{\varphi}(v)\right] dv \tag{3.23}$$

mit der Konvention, dass $\hat{\varphi}(v)/[\hat{\varphi},\hat{\varphi}] = 0$ für $\hat{\varphi}(v) = 0$ gesetzt wird.

Beweis. Die Wahl (3.22) für $\tau_f(v)$ garantiert, dass (3.21) immer erfüllt ist, denn aus $[\hat\varphi,\hat\varphi](v)=0$ folgt $\hat\varphi(v+2\pi\beta)=0$ für alle $\beta\in\mathbb{Z}^m$ und somit $\left[\hat f,\hat\varphi\right]=0$. Nun gilt nach (3.21) für den Fehler des orthonormalen Projektors P_φ, dass

$$\|f-P_\varphi f\|_2^2=(f-P_\varphi f,f)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m}\overline{\hat f(v)}\Big[\hat f(v)-\mathcal{F}\left[P_\varphi f\right](v)\Big]\,dv,$$

wobei für die letzte Gleichheit die Parseval-Identität verwendet wurde. Setzt man darin $\mathcal{F}\left[P_\varphi f\right](v)=\tau_f(v)\hat\varphi(v)$ mit $\tau_f(v)$ aus (3.22) ein, so folgt (3.23). □

Bemerkung 3.6. Im Falle $\operatorname{supp}\hat f\subseteq I^m+2\pi\alpha$ für ein $\alpha\in\mathbb{Z}^m$ vereinfacht sich (3.23) etwas, denn dann gilt für $v\in\mathbb{T}^m$

$$[\hat f,\hat\varphi](v)=\sum_\beta\hat f(v+2\pi\beta)\overline{\hat\varphi(v+2\pi\beta)}=\hat f(v+2\pi\alpha)\hat\varphi(v+2\pi\alpha)$$

und

$$\begin{aligned}\int\overline{\hat f(v)}\hat\varphi(v)\frac{[\hat f,\hat\varphi](v)}{[\hat\varphi,\hat\varphi](v)}\,dv&=\int_{\mathbb{T}^m}\frac{\sum_\alpha|\hat f(v+2\pi\alpha)\hat\varphi(v+2\pi\alpha)|^2}{[\hat\varphi,\hat\varphi](v)}\,dv\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\frac{|\hat f(v)\hat\varphi(v)|^2}{[\hat\varphi,\hat\varphi](v)}\,dv\end{aligned}$$

und erhalten

$$\operatorname{dist}\big(f;S(f)\big)_{2,\mathbb{R}^m}^2=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m}|\hat f(v)|^2\left[1-\frac{|\hat\varphi(v)|^2}{[\hat\varphi,\hat\varphi](v)}\right]dv\tag{3.24}$$

♢

Bemerkung 3.7. Das Ergebnis von Lemma 3.8 gilt *ohne* die Relation (3.16). Ist sie jedoch erfüllt, so bilden die Translate eine Riesz-Basis und die Menge der v mit $[\varphi,\varphi](v)=0$ hat das Maß 0, so dass sich (3.22) entsprechend vereinfacht. Die explizite Form (3.23) des Fehlers im allgemeinen Fall ist besonders bei der Untersuchung der Güte der Approximation durch Translate von 'radial basis functions' nützlich, da deren Fouriertransformierte speziell am Nullpunkt singulär werden können, obwohl sie sonst stetig sind. Dies ist das zentrale Anliegen in der Arbeit von de Boor, DeVore und Ron ([BDR94]). ♢

Eine andere Methode, die beste Approximation $P_\varphi f$ von $f\in L_2(\mathbb{R}^m)$ aus $S_2(\varphi)$ ergibt sich, wenn man die Orthogonalitätsrelation (3.19) zur Gewinnung eines Gleichungs-Systems für $P_\varphi f$ ausnutzt, das allerdings unendlich ist. Man erhält es durch den Ansatz

$$P_\varphi(f):=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}a_k(f)\varphi_k,\qquad\varphi_k(x):=\varphi(x-k)\tag{3.25}$$

wobei die Koeffizienten $a_k(f)\in\mathbb{R}$ bestimmt werden aus

$$(P_\varphi f,\varphi_j)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}a_k(f)(\varphi_k,\varphi_j)=(f,\varphi_j),\quad j\in\mathbb{Z}^m$$

Ein Spezialfall ist die Bestimmung eines Elements $g\in S_2(\varphi)$ mit

$$g=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}b_k\varphi_k\tag{3.26}$$

und Koeffizienten $\{b_k\}$ derart, dass

$$(g, \varphi_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} b_k (\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} b_k (\varphi, \varphi_{j-k}) = \delta_{0,j} \tag{3.27}$$

gilt. Mit Hilfe der Elemente $g_l(x) := g(x - l)$ ergibt sich dann – wie man leicht nachrechnet – für die beste Approximation die Darstellung

$$P_\varphi(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} (f, \varphi_l) g_l.$$

Gleichung (3.27) löst man (zunächst formal) mit der z-Transformation, d. h. wir multiplizieren beide Seiten mit $z^j = z_1^{j_1} \cdots z_m^{j_m}$ für $z \in \mathbb{C}^m$ und summieren über j. Bei (formaler) Vertauschung der Summation folgt

$$1 = \sum_j \sum_k b_k z^k (\varphi, \varphi_{j-k}) z^{j-k} = \sum_k b_k z^k \sum_l c(\varphi, \varphi)(l) z^l \tag{3.28}$$

bzw. mit (3.11)

$$\sum_k b_k z^k = \frac{1}{\sum_l c(\varphi, \varphi)(l) z^l} \tag{3.29}$$

Aus dieser Formel lassen sich die in (3.27) gesuchten Koeffizienten $\{b_k\}$ z. B. über Potenzreihenentwicklung der rechten Seite ermitteln.

Es gibt mehrere Möglichkeiten dieses Vorgehen streng zu rechtfertigen. Eine davon beruht auf der Vorraussetzung, dass die Translate von φ eine Riesz-Basis bilden. Dann sind nach Satz 3.1 sowohl $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)$ als auch $1/[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)$ Elemente von $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ und nach Lemma 3.2 liegen die Folgen $\{c(\varphi, \varphi)(v)()\}_{l \in \mathbb{Z}^m}$ und $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ aus (3.27) in $l_2(\mathbb{R}^m)$. Die vorher nötige Vertauschung der Summationen führt man zunächst für $|z| < 1$ durch und lässt dann in (3.28) z gegen Eins streben.

Auf analoge Weise lässt sich auch **cardinal interpolation** mit Translaten von φ durch die Fourieranalysis durchführen. Dieses Problem ist wie folgt zu beschreiben:

Gegeben eine Folge $\mathbf{f}$ von Daten $\{f_l\}_{l \in \mathbb{Z}^m}$ finde ein Element $s = s_\mathbf{f} \in S(\varphi)$, so dass

$$s_\mathbf{f}(l) = f_l \quad \forall l \in \mathbb{Z}^m, \tag{3.30}$$

bzw. finde eine Koeffizientenfolge $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$, so dass

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j \varphi(l - j) = f_l \quad \forall l \in \mathbb{Z}^m.$$

Wir betrachten dazu zuerst die spezielle Datenfolge $f_l = \delta_{l,0}$ mit dem Kroneckersymbol $\delta_{l,0}$ und suchen einen Fundamentalinterpolanten $L(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* \varphi^*(x - j)$ mit Koeffizienten a_j^* mit

$$L(l) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* \varphi(l - j) = \delta_{l,0}. \tag{3.31}$$

Multiplikation beider Seiten mit $\exp(ilx)$ und Summation über l ergibt formal

$$1 = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \mathrm{e}^{ilx} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* \varphi(l - j) = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* \mathrm{e}^{ijx} \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \varphi(l) \mathrm{e}^{ilx} \right). \tag{3.32}$$

Wenden wir dann die Poisson-Summationsformel von Korollar 2.4 (zunächst noch formal) auf $g = \varphi$ an, so erhalten wir aus (3.32)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^m} a_j^* \mathrm{e}^{ijx} = \frac{1}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \hat{\varphi}(x+2\pi k)}.$$

Daraus folgt (ebenfalls noch rein formal) für die Fouriertransformierte des Fundamentalinterpolanten

$$\hat{L}(v) = \hat{\varphi}(v) \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} a_j^* \mathrm{e}^{ijv} = \frac{\hat{\varphi}(v)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \hat{\varphi}(x+2\pi k)} \tag{3.33}$$

All diese Rechnungen können unter geeigneten Annahmen über φ streng gerechtfertigt werden. Dies geschieht im folgenden Satz, wobei die Annahmen über φ gegenüber dem vorigen leicht modifiziert sind.

Satz 3.3. *Es sei $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ Erzeugende von $S(\varphi)$ derart, dass $\hat{\varphi}(v) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\{\varphi(l)\}_{l\in\mathbb{Z}^m} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ gilt, sowie*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \hat{\varphi}(x+2\pi k) \geq A > 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^m. \tag{3.34}$$

Dann gibt es genau eine Lösung $L \in S_2(\varphi)$ von (3.31), d. h. $L(l) = \delta_{l,0}$ für $l \in \mathbb{Z}^m$, und diese hat die Form (3.30). Liegt die Datenfolge $\{f_l\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$ in $l_1(\mathbb{Z}^m)$, so hat auch das 'cardinal interpolation problem' (3.30) genau eine Lösung $s_{\mathbf{f}}$ in $S(\varphi)$ mit Darstellung

$$\mathcal{F}[s_{\mathbf{f}}](v) = \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} f_l \mathrm{e}^{ivl}\right) \frac{\hat{\varphi}(v)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \hat{\varphi}(v+2\pi k)}. \tag{3.35}$$

Beweis. Laut Voraussetzung ist die Poisson-Summationsformel von Korollar 2.4 darauf anwendbar, also

$$\sum_l \varphi(l)\mathrm{e}^{-ilx} = \sum_k \hat{\varphi}(x+2\pi k). \tag{3.36}$$

Diese Funktion ist 2π-periodisch und somit nach (3.32) auch ihr Kehrwert. Speziell liegt sie in $L_2(\mathbb{T}^m)$, so dass nach dem Satz von Riesz-Fischer die dadurch definierten $\{a_j^*\}$ in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ liegen. Daher ist die Vertauschung in (3.32) zulässig, so dass diese Relation im $L_2(\mathbb{R}^m)$-Sinn gültig ist. Dann gilt in (3.31), dass diese $\{a_j^*\}$ die einzige Lösung dieser Gleichung in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ sind. Es folgt die Darstellung (3.33) und die $L_k(x) := L(x-k)$ erfüllen $L_k(l) = \delta_{k,l}$. Somit ist $\sum f(x)L_k(x)$ Lösung von (3.30) falls gezeigt wird, dass diese Funktion in $L_2(\mathbb{R}^m)$ liegt. Dies folgt aber aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} f_l \mathrm{e}^{ivl}\right| \frac{|\hat{\varphi}(v)|}{\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \hat{\varphi}(v+2\pi k)\right|} \leq \frac{1}{A}\|f_l\|_{l_1}|\hat{\varphi}(v)|$$

Nach dem Korollar zu Satz 3.1 gilt weiter $S(\varphi) = S_2(\varphi)$. Wäre also obige Lösung nicht eindeutig, so gäbe es eine nichttriviale homogene Lösung zu (3.30) mit Koeffizienten $\{\tilde{a}_l\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$. Dann müsste analog zu (3.32)

$$0 = \left(\sum \tilde{a}_l \mathrm{e}^{ijx}\right)\left(\sum \varphi(l)\mathrm{e}^{ilx}\right)$$

gelten. Wegen (3.34) und (3.36) folgt daraus $\sum_j \tilde{a}_j \exp(ijx) = 0$ fast überall und somit $\tilde{a}_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}^m$, was einen Widerspruch liefert. □

Mit Hilfe des Wiener-Lemmas kann man unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 sogar zeigen, dass die Koeffizientenfolge $\{a_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}^m}$ des Fundamental-Interpolanten ψ in $l_1(\mathbb{Z}^m)$ liegt:

Satz 3.4 (Wiener-Lemma). *Es sei* $f(x) = \sum a_l \mathrm{e}^{ilx}$ *mit* $\{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$. *Dann folgt aus* $f(x) \neq 0$ *für alle* x, *dass*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum b_l \mathrm{e}^{ilx}$$

mit $\{b_l\} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$.

Zum Beweis sei auf [Rud91], Kapitel 11 verwiesen. Kann man dann zeigen, dass die Translate von φ eine l_p-stabile Basis im Sinne der Definition bilden, so kann man (3.19) für Daten $\mathbf{f} = \{f_l\}$ in $l_p(\mathbb{Z}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ eindeutig für $s_{\mathbf{f}} \in L_p(\mathbb{R}^m)$ lösen, denn es folgt dann mit Hilfe der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung

$$\left(\mathbf{f} * \{a_l^*\}\right)_j := \sum_l f_l * a_{j-l}^* \in l_p(\mathbb{Z}^m)$$

und damit für den Interpolanden

$$\sum_l f_l \psi(x-l) = \sum_l f_l \sum_j a_j^* \varphi(x-j-l) = \sum_j \varphi(x-j) \sum_l f_l a_{j-l}^* \in L_p(\mathbb{R}^m).$$

Bemerkung 3.8. Man kann danach fragen, ob die Translate des Fundamental-Interpolanten ψ eine Riesz-Basis bilden bzw. l_2-stabil sind. Das Kriterium (3.16) lautet hierfür mit (3.33)

$$0 < C \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |\hat{\psi}(v+2\pi k)|^2 = \frac{\sum_k |\hat{\varphi}(v+2\pi k)|^2}{\left|\sum_l \hat{\varphi}(v+2\pi l)\right|^2} \leq D < \infty.$$

Die Abschätzung nach unten ist trivial während diejenige nach oben gültig ist, wenn – stärker als in (3.34) gefordert – $\hat{\varphi}(v) > 0$ gilt, da für beliebige Folgen

$$\sqrt{\sum_l |c_l|^2} \leq \sum_l |c_l|$$

erfüllt ist. Insbesondere ist dies bei den univariaten B-Spline-Basen der Fall. ♢

Bemerkung 3.9. Der Interpolant $S_h(f;x)$ kann zur Approximation der FT herangezogen werden. Nach (3.35) und (3.39) gilt

$$[S_h(f)]^\wedge(v) = \hat{\varphi}(vh)\left(\sum_l f(lh)\mathrm{e}^{ivlh}\right) \Big/ \left(\sum_k \hat{\varphi}(vh+2\pi k)\right) \tag{3.37}$$

Diese Formel sollte mit (2.41) für $h = 2\pi/\omega$ verglichen werden, die wir durch Interpolation mit Translaten der Sinc-Funktion erhalten haben. In der Tat ist (2.41) ein Spezialfall von (3.37). Der letzterer Formel auftretende Vorfaktor vor dem Term $h^m \sum_l f(lh)\exp(ivlh)$ kann als Filter bei der Berechnung der Fouriertransformierten betrachtet werden. Da er allgemeiner ist, als der in (2.41) angegebene, eröffnet er zusätzliche Möglichkeiten. ♢

Um eine gute Approximation von stetigen Funktionen f auf $\mathbb{R}^m$ zu erreichen, ist es nötig, die Interpolationsstellen auf einem äquidistanten Gitter mit kleiner Schrittweite $h > 0$ zu wählen. Man betrachte in Verallgemeinerung von (3.30) das

folgende Problem: Finde eine Funktion $C_h(f;x) \in S^h(\varphi)$ (vgl. die Definition in Bemerkung 3.1.1) mit

$$C_h(f;lh) = f(lh); \qquad l \in \mathbb{Z}^m, \quad h > 0. \tag{3.38}$$

Die Elemente von $S^h(\varphi)$ haben nach Definition die Form $\sum_j a_j \varphi(x/h - j)$, so dass dies auf die Gleichungen

$$\sum_j a_j \varphi(l-j) = f(lh) \qquad \forall l \in \mathbb{Z}^m \tag{3.39}$$

führt, also auf die gleiche Matrix wie in (3.31). Fasst man C_h als Operator auf, den man auf f anwendet, und führt den Dilatationsoperator $d_h f$ wie in Abschnitt 2.4) als

$$(d_h f)(x) := f(hx)$$

ein, so kann man dafür auch

$$C_h f = d_{1/h} C_1 d_h f \tag{3.40}$$

schreiben, d. h. man kann C_h durch den Operator C_1 der kardinalen Interpolation ausdrücken. Satz 3.3 und die anschließenden Bemerkungen über Existenz und Eindeutigkeit gelten auch für C_h wenn man die Folge $\{f_l\}$ durch $\{f(lh)\}$ ersetzt.

Eine praktische Methode zur Lösung von (3.31) ist die schon in (3.27) verwendete z-Transformation. Angewendet auf (3.31) ergibt sie

$$\left(\sum_j a_j^* z_j\right) = \left(\sum_l \varphi(l) z^l\right)^{-1}$$

Im eindimensionalen Fall ($m = 1$) und wenn $\varphi(l)$ nur für endlich viele l nicht verschwindet kann die rechte Seite in eine Laurent-Reihe entwickelt werden (deren Koeffizienten sind dann die gesuchten a_j^*). Dies ist z. B. bei Spline-Basen der Fall.

Eine andere Methode ist die Verwendung der diskreten Fouriertransformation (DFT). Dazu diskretisiert man bei der Anwendung der inversen Fouriertransformation auf $\hat{L}(v)$; es wird dabei (3.33) auf einem genügend feinen Gitter ausgewertet; zu dieser Methode sei auf [JS91] verwiesen. Eine dritte Methode benutzt Relation (3.40).

Im nächsten Abschnitt werden wir diese Ergebnisse auf die Splineräume $S(\varphi)$ anwenden. Dann nimmt man als erzeugende Funktion φ eine Splinefunktion mit kompaktem Träger und $\hat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und die entscheidende Bedingung (3.34) kann noch detaillierter untersucht werden.

Hier betrachten wir als erste Anwendung des Vorangegangenen Translate von Sinc-Funktionen. Dann gilt $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{2\pi W}\right](x)$ und somit $\hat{\varphi}(v) = \chi_{2\pi W}(v) = \chi_W(v/2\pi)$. Das Kriterium (3.17) ist dann erfüllt, da jetzt

$$[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \chi_W\Big(\frac{v}{2\pi} + \beta\Big) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \chi_{W+\beta}\Big(\frac{v}{2\pi}\Big) = 1$$

falls W – wie in Definition verlangt – ein Fundamentalgebiet ist. Daher bilden die Translate $W(2\pi(x-j))$ ein ONS in $L_2(\mathbb{R}^m)$. Setzen wir noch $x = v\Omega$ mit Ω wie in Satz 2.14 ein, so ist die dort über die Translate $\{\Omega^{m/2} W(2\pi(v\Omega - k))\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ gemachte Aussage nochmals bewiesen.

Die Berechnung der besten Approximation mit Translaten von $W(2\pi x)$ folgt dann wie im vorigen Abschnitt beschrieben. Durch Spezialisierung der Formel (3.24)

in Bemerkung 3.6 kann man auch leicht die bereits durch (2.35) gegebene Formel für den Fehler der besten Approximation verifizieren.

Ferner kann man versuchen, das Problem der kardinalen Interpolation mit Translaten von $W(2\pi x)$ durch Spezialisierung des Zugangs des vorigen Abschnitts zu lösen. Die strenge Rechtfertigung von Formel (3.31) für den Fundamental-Interpolanten über die Poisson – Summationsformel scheitert jedoch daran, dass die Voraussetzung

$$\{\varphi(l) = W(2\pi l)\}_{l\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$$

nicht erfüllt ist. Man kann allerdings zunächst formal vorgehen und erhält aus (3.33), dass $L(x) = \varphi(x) = W(2\pi x)$ gelten sollte. Die gewünschte Eigenschaft

$$W(2\pi x) = \delta_{0,j}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

ist dann aber bereits durch Bemerkung 2.12 gegeben ,wenn W eine Whittaker-Menge ist.

3.2 Approximation mit Splines

3.2.1 Univariate Splines

Für (polynomialen) Splines ist die einfachste Definition folgende

Definition 3.7. *Gegeben sei ein Gitter, $\{\xi_i\}$, d. h.eine monotone Folge reeller Zahlen. Dieser Folge sei eine Folge ganzer Zahlen $Z = \{z_i\}$, $0 \le z_i \le k-1$, zugeordnet. Dann heißt*

$$S_k(\Delta, Z) = \left\{ f(x) : f|_{(\xi_i,\xi_{i+1})} \in \Pi_{k-1}, f^{(r)}(\xi_i-) = f^{(r)}(\xi_i+), 0 \le r < z_i \right\} \quad (3.41)$$

der Raum aller Splinefunktionen der Ordnung k (vom Grad $k-1$) mit Knoten ξ_i und Glattheits-Ordnung $z_i - 1$ bei ξ_i. *Im Fall $z_i = 0$ ist Unstetigkeit zugelassen und der Wert in ξ_i durch als rechtsseitiger Grenzwert definiert.*

Man kann zeigen (der Beweis sei dem Leser als Übung überlassen):

Lemma 3.9. *Sei $\Delta = \{-\infty, \xi_1, \dots, \xi_n, +\infty\}$ gegeben mit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, $0 \le z_i \le k-1$. Dann hat obiger Spline-Raum die Dimension*

$$d = (n+1)k - \sum_{i=1}^{n} z_i$$

und die Basis

$$\left\{x^j\right\}_{j=0}^{k-1} \cup \left\{(x-\xi_1)_+^{k-l}\right\}_{l=1}^{k-z_1} \cup \cdots \cup \left\{(x-\xi_n)_+^{k-l}\right\}_{l=1}^{k-z_n}$$

Allgemeiner kann man sogenannte *L-Splines* als stückweise im Raum

$$N(L) = \left\{ f(x) : Lf = 0, L = \sum_{j=0}^{n} a_j(x) D^j \right\}$$

liegend defininieren. Dabei ist $D = d/dx$ und die a_j liegen in C^{k-1}. Wir behandeln hier aber nur den Fall $L = D^k$, der in obiger Definition 3.7 vorliegt. Sowohl in praktischer als auch in theoretischer Sicht haben sich B-Splines als Basisfunktionen von polynomialen Splines am besten bewährt. Wir definieren sie hier im *schwachen Sinn* als Kern einer Integralrelation.

Definition 3.8. *Gegeben sei eine monoton wachsende Knotenfolge* $\mathbf{t} := (t_i)$ *mit Indizes* i *aus einer Indexmenge* $I \subseteq \mathbb{Z}$*, d. h. für alle* $i \in I$ *gelte* $t_i \le t_{i+1}$*. Die Indexmenge* I *kann dabei unbeschränkt (z. B.* $\mathbb{Z}$ *selbst), beschränkt (z. B.* $\{1,2,3\}$*), nur nach unten beschränkt (z. B.* $\mathbb{N}$*) oder nur nach unten beschränkt sein (z. B.* $-\mathbb{N}$*). Für ein fest vorgegebenes* $k > 0$ *gelte außerdem* $t_i < t_{i+k}$*. Dann definiere* $M_{i,k}(x) \equiv M(t_i, \dots, t_i + k; x)$ *durch*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k!} M_{i,k}(x) f^{(k)}(x)\, dx := \{t_i, \dots, t_{i+k}\} f \qquad \forall f \in C^k([a,b]) \tag{3.42}$$

Hierbei bezeichnet $\{t_i, \dots, t_{i+k}\}$ *die dividierte Differenz zu den im Argument angegebenen Stützstellen. Sie sind rekursiv definiert durch*

$$[t_i] f := f(t_i) \tag{3.43a}$$

$$\{t_i, \dots, t_{i+k}\} := \frac{1}{t_{i+k} - t_i} \Big(\{t_{i+1}, \dots, t_{i+k}\} - \{t_i, \dots, t_{i+k-1}\} \Big). \tag{3.43b}$$

Bemerkung 3.10. Im Falle mehrfacher Stützstellen greift folgende *Konvention*: Gegeben sei eine beliebige Stützstellenfolge (t_i). Dann definiert man als zugehöriges *Punktfunktional*

$$\lambda_i f := f^{(r)}(t_i), \qquad r = \max\{\nu : t_{j-\nu} = t_j, \nu = 0, 1, \dots\}. \tag{3.44}$$

Speziell definiert man $[t_i, t_i] f = f'(t_i)$, $[t_i, t_i, t_i] f = f''(t_i)$, und so weiter. Diese Konvention stellt aufgrund der Beziehung

$$\{t_i, \dots, t_{i+k}\} f = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\eta), \qquad \eta = \eta(f) \in (t_i, t_{i+k}) \tag{3.45}$$

sicher, dass die $\lambda_i f$ und damit auch die dividierten Differenzen $\{t_i, \dots, t_{i+k}\}$ stetige Funktionale auf $C^k([a,b])$ sind (man beachte, dass wir $t_i < t_{i+k}$ vorausgesetzt haben). ♢

Verwendet man die Taylorformel mit Integral-Restglied,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (t-a)^j f^{(j)}(a) + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b (t-x)_+^{k-1} f^{(k)}(x)\, dx, a \le t \le b,$$

so kann man durch Anwendung der dividierten Differenzen wegen $\{t_i, \dots, t_{i+k}\} p = 0$ für Polynome $p \in \Pi_k$ direkt

$$k \int_a^b \{t_i, \dots, t_{i+k}\} (\cdot - x)_+^{k-1} f^{(k)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} M_{i,k}(x) f^{(k)}(x)\, dx$$

folgern. Hieraus ergibt sich

$$M_{i,k}(x) = k \{t_i, \dots, t_{i+k}\} (\cdot - x)_+^{k-1}. \tag{3.46}$$

Diese Formel kann man als äquivalente Definition der B-Splines ansehen. Mit ihrer Hilfe kann man leicht die folgende Rekursionsformel zur Berechnung ihrer Ableitung zeigen:

$$M'_{i,k} = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} [M_{i+1,k-1}(x) - M_{i,k-1}(x)] \tag{3.47}$$

Üblicherweise verwendet man die folgenden (anders normierte) B-Splines:

$$N_{i,k} := \frac{(t_{i+k} - t_i)}{k} M_{i,k}(x). \tag{3.48}$$

Für diese Funktionen kann man folgern

Lemma 3.10. *Falls stärker $t_i < t_{i+k-1}$ für alle $i \in I$ gilt, dann erfüllen die $N_{i,k} := (t_{i+k} - t_i)M_{i,k}(x)$ die Rekursionsgleichung*

$$N_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x); \tag{3.49}$$

ferner ist $N_{i,1} = \chi_{[t_i, t_{i+1})}(x)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[t_i, t_{i+1})$.

Der Beweis dieser Rekursionsformel sei als Übungsaufgabe gestellt. Er folgt aus der Leibniz-Formel für dividierte Differenzen eines Produkts $f = g \cdot h$:

$$\{t_i, \ldots, t_{i+k}\} f = \sum_{j=0}^{k} \Big[\{t_i, \ldots, t_{i+j}\} g\Big] \Big[\{t_{i+j}, \ldots, t_{i+k}\} k\Big].$$

Als Anwendung ergibt sich auch eine Rekursionsformel zur Berechnung von Linearkombinationen von B-Splines:

Gegeben sei

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i N_{i,k}(x), \qquad t_k \le x < t_{n+1}, \tag{3.50}$$

wobei die B-Splines zu einer Knotenfolge $\{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ mit $t_i \le t_{i+1}$ und $t_i < t_{i+k}$ definiert seien. Dann gilt für $1 \le j \le k$

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n+j-1} c_i^{[j]}(x) N_{i,k-j+1}(x),$$

wobei die $c_i^{[j+1]} \equiv c_i^{[j]}(x)$ mittels folgender Iteration berechnet werden: Setze $c_i^{[1]} := c_i$ und dann

$$c_i^{[j+1]} := \begin{cases} 0, & t_{i+k-j} = t_i, \\ \dfrac{1}{t_{i+k-j} - t_i}\Big((x - t_i)c_i^{[j]} + (t_{i+k-j} - x)c_{i-1}^{[j]}\Big), & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.51}$$

Das bedeutet, daß $s(x)$ als Linearkombination von B-Splines immer niedrigerer Ordnung dargestellt wird. Der Preis dafür besteht darin, dass die Koeffizienten zu Polynomen von immer höherem Grad in x werden.. Im Grenzfall $j = k$ gilt schließlich

$$s(x) = c_l^{[k]}, \qquad t_l \le x < t_{l+1}. \tag{3.52}$$

Weitere Algorithmen dieser Art zur Berechnung von Splines und ihren Ableitungen werden im [Sch81] in Kapitel 5 ausführlich behandelt.

Die bisherigen Ergebnisse zeigen bereits eine Reihe von Eigenschaften auf, die als Motivation für multivariate Definitionen von B-Splines dienen können. Speziell durch Lemma 3.10 wird folgende univariate Definition motiviert, mit der weitere Eigenschaften abgeleitet werden können.

Definition 3.9. *Gegeben sei eine Knotenfolge* $\mathbf{t}$ *wie in Definition 3.8. Dann definiere man*

$$N_{i,k}(x) = \omega_{i,k}(x) N_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) N_{i+1,k-1}(x)$$

wobei

$$\omega_{i,k}(x) := \begin{cases} \dfrac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}, & t_{i+k-1} > t_i, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Zum Start dieser Rekursion setze man

$$N_{i,1}(x) := \chi_{[t_i, t_{i+1}]}(x)$$

Bemerkung 3.11. Es wäre wünschenswert, dies auf Triangulierungen statt Punktfolgen zu verallgemeinern. Man müsste damit „vernünftige“ Splineräume erhalten. Das neuere Konzept des “Blossoming” strebt dies an, ist allerdings zu allgemein, da es auf die gesamte Klasse der simplizialen B-Splines führt. ♢

Obige Definition liefert leicht

Lemma 3.11. *Die in Definition 3.9 eingeführten Funktionen $N_{i,k}(x)$ haben folgende Eigenschaften:*

1. *Sie lassen sich als Linearkombination von charakteristischen Funktionen darstellen,*

$$N_{i,k}(x) = \sum_{j=1}^{i+k-1} b_{j,k}(x) N_{j,1}(x).$$

   Die Koeffizienten $b_j, k(x)$ sind dabei Polynome mit $\deg b_{j,k} < k$.

2. *Die $N_{i,k}(x)$ sind stückweise polynomial, der Polynomialgrad ist auf jedem der Stücke kleiner als k; die möglichen Sprungstellen sind die t_i.*

3. *Die Funktion $N_{i,k}(x)$ hat den Träger $[t_i, t_{i+k}]$ und ist positiv auf (t_i, t_{i+k}).*

4. *Insbsondere ist $N_{i,2}$ stückweise linear und $N_{i,k}(x) = 0$ falls $t_i = t_{i+k}$.*

Genaue Aussagen über die Glattheit kann man nicht sofort erhalten. Wir untersuchen daher zunächst Linearkombinationen dieser Funktionen:

Definition 3.10. *Der Splineraum $S_{k,\mathbf{t}}$ zur Folge $\mathbf{t}$ wie in Definition 3.9 ist definiert als*

$$S_{k,\mathbf{t}} := \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i N_{i,k} : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lemma 3.12. (Zerlegung der Eins) *Es gilt*

$$\sum_{i=j+1-k}^{j} N_{i,k}(x) = 1, \qquad \text{falls } t_j \le x < t_{j+1}. \tag{3.53}$$

Beweis. Es gilt nach Definition 3.9

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j+1-k}^{j} N_{i,k}(x) &= \sum_{i=j+1-k}^{j} \omega_{i,k}(x) N_{i,k-1}(x) + \big(1 + \omega_{i+1,k}(x)\big) N_{i+1,k-1}(x) \\
&= \sum_{i=j+2-k}^{j} \big[\omega_{i,k}(x) + \big(1 - \omega_{i,k}(x)\big)\big] N_{i,k-1}(x) \\
&\quad + \omega_{j+1-k,k}(x) N_{j+1-k,k-1}(x) + \big(1 - \omega_{j+1,k}(x)\big) N_{j+1,k-1}(x).
\end{aligned}$$

Nach Teil 3 aus dem vorigen Lemma (und wegen der rechtsseitigen Stetigkeit) fallen die beiden letzten Terme weg; wir erhalten

$$\sum_{i=j+1-k}^{j} N_{i,k}(x) = \sum_{i=j+1-(k-1)}^{j} N_{i,k-1}(x).$$

Per Induktion über k folgt dann die Behauptung (für $k = 1$ gilt sie offensichtlicherweise). □

Allgemeiner gilt

Satz 3.5. (Marsden-Identität, 1970) *Für $t_j \le x < t_{r+1}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(y-x)^{k-1} = \sum_{i=j+1-k}^{r} \Psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x). \tag{3.54}$$

dabei sind

$$\Psi_{i,1}(y) := 1, \tag{3.55a}$$
$$\Psi_{i,k}(y) := (t-t_{i+1})\cdots(y-t_{i+k-1}), \qquad k \ge 2 \tag{3.55b}$$

Für $p \in \Pi_{k-1}$ gilt speziell

$$p(x) = \sum_{i=j+1-k}^{r} \lambda^*_{i,k}(p) N_{i,k}(x), \qquad t_j \le x < t_{r+1} \tag{3.56}$$

dabei sind die Funktionale $\lambda^*_{i,k}$ definiert als

$$\lambda^*_{i,k}(f) := \sum_{/gn=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(k-1)!} \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)(y)} f^{(\nu)}(y).$$

Beweis. Wie beim vorhergehenden Lemma folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=j+1-k}^{r} \Psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x) \\
&= \sum_{i=j+1-k}^{r} \Big(\omega_{i,k}(x) N_{i,k-1}(x) + (1-\omega_{i+1,k}(x)) N_{i+1,k-1}(x)\Big) \Psi_{i,k}(y) \\
&= \sum_{i=j+2-k}^{r} \Big(\omega_{i,k}(x) \Psi_{i,k}(y) + (1-\omega_{i,k}(x)) \Psi_{i-1,k}(y)\Big) N_{i,k-1}(x)
\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
&\omega_{i,k}(x)\Psi_{i,k}(y) + \Psi_{i-1,k}(y)(1-\omega_{i,k}(x)) \\
&= \frac{(y-t_{i+1})\cdots(y-t_{i+k-2})}{t_{i+k-1}-t_i}\Big((y-t_{i+k-1})(x-t_i) + (y-t_i)(t_{i+k-1}-x)\Big) \\
&= \frac{(y-t_{i+1})\cdots(y-t_{i+k-2})}{t_{i+k-1}-t_i}\Big((y-x)(t_{i+k-1}-t_i)\Big) \\
&= \Psi_{i,k-1}(y)(y-x)
\end{aligned}$$

für $\omega_{i,k}(x) \neq 0$. Ist aber $\omega_{i,k}(x) = 0$, so gilt $t_{i+k-1} = t_i$ und $N_{i,k-1}(x) = 0$. Berücksichtigt man dies, so erhält man

$$\sum_{i=j+1-k}^{r} \Psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x) = (y-x) \sum_{i=j+1-(k-1)}^{r} \Psi_{i,k-1}(y) N_{i,k-1}(x).$$

Mittels Induktion über k und unter Verwendung von Lemma 3.12 folgt somit (3.54). Differenziert man dies Formel nach y, so folgt für $t_j \le x < t_{r+1}$

$$\frac{1}{\nu!}(y-x)^\nu = \sum_{i=j+1-k}^{r} \frac{1}{(k-1)!} \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) N_{i,k}(x).$$

Entwickelt man p um den Punkt y in eine Taylorreihe und setzt ein, so folgt dann

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!}(x-y)^\nu p^{(\nu)}(y) = \sum_{i=j+1-k}^{r} \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(k-1)!} \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) N_{i,k}(x) \right)$$

für beliebige $p \in \Pi_{k-1}$. □

Bemerkung 3.12. Die Funktionale $\lambda_{i,k}^*$ scheinen unabhängig von y zu sein. Schränkt man sie auf Polynome aus Π_{k-1} ein, so stimmt dies auch, denn dann gilt

$$\begin{aligned}(k-1)! \frac{d}{dy}\left[\lambda_{i,k}^*(p)\right] &= \frac{d}{dy}\left(\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) p^{(\nu)}(y) \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) p^{(\nu+1)}(y) + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^\nu \Psi_{i,k}^{(k-\nu)}(y) P^{(\nu)}(y) \\ &= 0\end{aligned}$$

♢

Korollar 3.4. *Die B-Splines $\{N_{i,k}(x)\}$ zu einer Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ sind linear unabhängig. Der in Definition 3.10 eingeführte Raum $S_{k,\mathbf{t}}$ enthält alle Polynome und alle abgebrochenen Potenzen $(x-t_j)_+^{k-\mu}$, $1 \le \mu \le \mu_j$. Die μ_j sind dabei die Vielfachheiten der Stützstellen t_j, d. h. die Anzahl der mit t_j zusammenfallenden Stützstellen t_i.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem angegebenen Rekursionsverfahren zur Berechnung von $s(x)$ in (3.52). Ausgehend von (3.50) schließt man aus $s(x) \equiv 0$ sukzessive mit (3.51), dass alle intermediären $c_i^{[j+1]}$ – und so auch die c_i verschwinden. Dei zweite Aussage folgt direkt aus (3.56). Um die dritte zu beweisen , setze man in der Marsden-Identität $y = t_j$. Für $t_j \le x < t_{r+1}$ gilt dann

$$(x-t_j)^{k-1} = \sum_{i=j+1-k}^{r} (-1)^{k-1} \Psi_{i,k}(t_j) N_{i,k}(x).$$

Wegen $\Psi_{i,k}(t_j) = 0$ für $i = j-k+1, \ldots, j-1$ und im Limes $r \to \infty$ folgt weiter

$$(x-t_j)_+^{k-1} = \sum_{i=j}^{\infty} (-1)^{k-1} \Psi_{i,k}(t_j) N_{i,k}(x), \qquad x \ge t_j.$$

Da die $N_{i,k}(x)$ für $i \ge j$ und $x \le t_j$ verschwinden folgt auch

$$(x-t_j)_+^{k-1} = \sum_{i=j}^{\infty} (-1)^{k-1} \Psi_{i,k}(t_j) N_{i,k}(x).$$

Die gleiche Argumentation kann man auch auf die nach t_j differenzierte Identität anwenden :

$$(x-t_j)^{k-\mu} = \frac{(k-\mu+1)!}{(k-1)!} \sum_{i=j+1-k}^{r} (-1)^{\mu-1} \Psi_{i,k}^{(\mu-1)}(t_j) N_{i,k}(x), \qquad t_j \le x \le t_{r+1}.$$

Hierbei muss allerdings für $j-k+1 \le i \le j-1$ sichergestellt sein, dass $\Psi_{i,k}^{(\mu-1)}(t_j) = 0$ ist. Andernfalls greifen die obigen Argumente nicht. Damit t_j noch eine Nullstelle von $\Psi_{i,k}^{(\mu-1)}$ ist müssen wir daher einschränkend $\mu \le \mu_j$ fordern. □

Man kann auch den Zusammenhang mit den Räumen $S_k(\Delta, Z)$ aus Definition 3.7 untersuchen. Es gilt

Korollar 3.5. *Es sei $\Delta = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ eine endliche Folge von Knoten und $Z = \{z_i\}_{i=1}^n$ der zugehörige Vektor wie in Definition 3.7. Dann gilt für $a < \xi_1 < \xi_n < b$*

$$S_k(\Delta, Z)|_{[a,b]} = S_{k,\mathbf{t}}|_{[a,b]}.$$

Dabei besteht $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=-k+1}^{N+k}$ mit $N := \sum_{i=1}^n (k - z_i)$ aus folgenden Gliedern:

$$t_{k+1} \leq \cdots \leq \overbrace{t_0}^{=a} < \underbrace{\xi_1}_{(k-z_1)\text{-fach}} < \cdots < \underbrace{\xi_n}_{(k-z_m)\text{-fach}} < \overbrace{t_{N+1}}^{=b} \leq \cdots \leq t_{N+k}.$$

Die Basis besteht aus den zu dieser Knotenfolge gebildeten, auf $[a, b]$ eingeschränkten $\{N_{i,k}\}_{i=-k+1}^N$.

Der Beweis sei dem Leser überlassen. Der Standard-Fall von Korollar 3.5 ist der, dass bei vorgegebenen inneren Knoten $t_{-k+1} = \cdots = t_0 = a$ und $t_{N+1} = \cdots = t_{N+k} = b$ gewählt wird und so

$$S_k(\Delta, Z)|_{[a,b]} = \left(\operatorname{span}\{N_{i,k}\}_{i=-k+1}^N\right)\Big|_{[a,b]}$$

gilt.

3.2.2 Kardinale Splines

Kardinale Splines (engl. 'cardinal splines') bilden einen besonders einfachen Spezialfall der Splines,mit dem wir uns im Folgenden näher beschäftigen werden.Als kardinale Splines (mit ganzzahligen Knoten) vom Grad $k-1$ bezeichnet man dabei die Elemente des Raumes

$$S_k := \left\{s(x) \in C^{k-2}(\mathbb{R}) : s(x)|_{(i,i+1)} \in \Pi_{k-1}\right\}$$

Wir betrachten daher den Spezialfall $\mathbf{t} = \{j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ (also $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Anordnung) und untersuchen die Eigenschaften der zugehörigen B-Splines. Die Gleichungen (3.46) und (3.48) vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} N_{j,k}(x) = M_{j,k}(x) &= k\,\{j, \ldots, j+k\}\,(\bullet - x)_+^{k-1} = k\,\{0, \ldots, k\}\,(\bullet - (x-j))_+^{k-1} \\ &= N_{0,k}(x-j). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Mit anderen Worten : die B-Splines gehen durch Verschiebung ineinander über. Dies wird im Folgenden von grundlegender Bedeutung sein, da auf Linearkombinationen von B-Splines nun die bereits beschriebene Theorie der translationsinvarianten Räume angewendet werden kann. Wichtig ist ferner die Einführung der sogenannten zentralisierten B-Splines, die durch

$$N_k(x) := N_{0,k}\left(x + \frac{k}{2}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3.58}$$

definiert werden. Offenbar hat N_k Träger auf $[-k/2, k/2]$ während $N_{0,k}$ seinen Träger auf $(0, k)$ hat. Weitere Eigenschaften, darunter die für die nachfolgenden Betrachtungen wichtige Symmetrie von $N_k(x)$ um 0 ,liefert

Lemma 3.13. *Es gilt:*

$$N_1(x) = \chi_{[-1/2,1/2]}, \tag{3.59a}$$
$$N_k(x) = (N_{k-r} * N_r)(x), \qquad 1 \le r < k, \tag{3.59b}$$
$$N_k(x) = N_k(-x), \tag{3.59c}$$
$$\hat{N}_k(v) = \left(\frac{\sin v/2}{v/2}\right)^k. \tag{3.59d}$$

Beweis. Nach (3.58) und (3.57) folgt

$$N_k(x) = k\,\{0,\dots,k\}\left(\cdot - x - \frac{k}{2}\right)_+^{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}\Delta_1^k\left(-x-\frac{k}{2}\right)_+^{k-1}, \tag{3.60}$$

wobei statt dividierter Differenzen die einfachen (Vorwärts-)Differenzen verwendet werden. Diese werden definiert durch

$$\Delta_h^1 f(x) := f(x+h) - f(x) \tag{3.61a}$$
$$\Delta_h^k f(x) := \Delta_h^{k-1} D_h^1 f(x) = D_h^{k-1}\big(f(x+h) - f(x)\big), \qquad k = 2,3,\dots \tag{3.61b}$$

wobei $h > 0$ sein muss. Damit folgt

$$N_1(x) = \Delta_1^1\left(-x-\frac{1}{2}\right)_+^0 = \left(\frac{1}{2}-x\right)_+^0 - \left(-x-\frac{1}{2}\right)_+^0 = \chi_{(-1/2,1/2)},$$

d. h. (3.59a). Um (3.59b) zu zeigen, genügt es $N_k = N_{k-1} * N_1$ zu beweisen.Weil nämlich die Faltung assoziativ ist, folgt mittels Induktion

$$\begin{aligned} N_k &= N_{k-1} * N_1 = (N_{k-2} * N_1) * N_1 = N_{k-2} * N_1 * N_1 \\ &= \cdots = \underbrace{N_1 * \cdots * N_1}_{k\text{-mal}} = \underbrace{N_1 * \cdots * N_1}_{(k-r)\text{-mal}} * \underbrace{N_1 * \cdots * N_1}_{r\text{-mal}} = N_{k-r} * N_r \end{aligned}$$

Nun ist nach (3.60)

$$\begin{aligned} N_k(x) &= \frac{1}{(k-1)!}\Delta_1^k \int_x^\infty \left(-t-\frac{k}{2}\right)_+^{k-2} dt \\ &= \frac{1}{(k-2)!}\Delta_1^{k-1} \int_x^\infty \left(\left(1-t-\frac{k}{2}\right)_+^{k-2} \left(-t-\frac{k}{2}\right)_+^{k-2}\right) dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} N_{k-1}(t+x)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} N_{k-1}(x-t)\,dt = (N_1 * N_{k-1})(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt auch (3.59c) induktiv, denn mit (3.59b) folgt für $r = 1$ die Symmetrie

$$\begin{aligned} N_k(-x) &= \int_{-\infty}^\infty N_1(t) N_{k-1}(-x-t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty N_1(t) N_{k-1}(x+t)\,dt = \int_{-\infty}^\infty N_1(t) N_{k-1}(x-t)\,dt = N_k(x) \end{aligned}$$

Schließlich beachtet man noch, dass die Faltungsformel

$$[f * g]^\wedge(v) = \hat{f}(v)\hat{g}(v), \qquad f, g \in L_1(\mathbb{R}),$$

gilt. Dann ergibt sich mit (3.59b), dass $\hat{N}_k(v) = \left(\hat{N}_1(v)\right)^k$ ist. Wegen

$$\hat{N}_1(v) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-ivx}\,dx = \frac{\sin v/2}{v/2}$$

ist damit das Lemma bewiesen. □

Als Anwendung können wir die l_2-Stabilität der B-Spline-Basis für kardinale Splines beweisen ,wobei wir allgemeinere kardinale Splines betrachten. Dazu geben wir die Einschränkung auf ganzzahlige Knoten auf und lassen jetzt auch Folgen von Knoten zu, die ein äquidistantes Gittermit einer Schrittweite h bilden. Dieses erhält man offensichtlich durch Skalierung aus dem kardinalen Gitter. Betrachten wir also im Weiteren die B-Splines

$$B_{j,h}(x) := N_k\left(\frac{x}{h}\right) = N_{0,k}\left(\frac{x}{h} - j + \frac{k}{2}\right) \tag{3.62}$$

mit positivem h. Der Träger von $B_{j,h}$ ist $(jh - kh/2, jh + k2/2)$ und die Knoten liegen auf dem Gitter $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, falls k gerade ist und auf $\{jh + 1/2\}_{j\in\mathbb{Z}}$, falls k ungerade ist, d. h. für Splines vom Grad $2, 3, \ldots$.

Mit diesen Splines können wir wieder translationsinvariante Räume erzeugen,

$$S_k^{(h)} = \operatorname{span}\{B_{j,h}\}_{j\in\mathbb{Z}}. \tag{3.63}$$

Genauer verstehen wir darunter die Menge aller Linearkombinationen aus den $B_{j,h}$ unabhängig davon ob diese endlich oder unendlich sind. Es gilt dann

$$S_k^{(h)} = \left\{ s(x) \in C^{k-2}(\mathbb{R}) : s(x)\big|_{(i+k/2,i+1+k/2)} \in \Pi_{k-1} \right\}.$$

Um dies zu sehen beachtet man, dass jedes Element $s(x) \in S_k^{(h)}$ punktweise als

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j B_{j,h}(x), \qquad a_j \in \mathbb{R}, \tag{3.64}$$

darstellbar ist. Dazu benötigt man die Tatsache, das nach dem Ausführungen im vorangehenden Abschnitt die auftretenden B-Splines linear unabhängig sind. Weil ihre Anzahl k ist, treten für festes x in (3.64) auch keine Konvergenzprobleme auf.

Als Spezialfall der Räume von Abschnitt 3.1 betrachten wir nun weiter die Unterräume $S_{k,2}^{(h)}$ von $S_k^{(h)}$, deren Elemente $s(x)$ die Darstellung (3.64) mit folgen $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ aus $l_2(\mathbb{Z})$ besitzen. Dann gilt

Lemma 3.14. *Die B-Splines $\{B_{j,h}(x) = B_{0,h}(x - j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ bilden eine l_2-stabile Basis des Raums $S_{k,2}^{(h)}$.*

Beweis. Wir beachten zunächst, dass – sofern die Summe eine L_2-Funktion ist – nach Definition (3.62)

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j B_{j,h}(x) \right\|_2 = \sqrt{h} \left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j N_k(u - j) \right\|_2$$

gilt. Dies zeigt, dass die l_2-Stabilität für $h = 1$ hinreichend für diejenige bei beliebigem h ist. Betrachten wir also nur den Spezialfall $h = 1$. Wir weisen nach, dass das meyersche Kriterium erfüllt ist, zeigen also, dass

$$\left[\hat{N}_k, \hat{N}_k\right](v) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\hat{N}_k(v + 2\pi l)\right|^2 \tag{3.65}$$

gleichmäßig beschränkt ist. Nach Lemma 3.13 gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{N}_k(v + 2\pi l)\right|^2 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin(v/2 + \pi k)}{v/2 + \pi k}\right|^{2k} \\ &= \left(\operatorname{sinc}\frac{v}{2}\right)^{2k} + \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{2k} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}} \frac{1}{|v/2 + \pi l|^{2k}}\end{aligned}$$

Da letztere Summe nach dem Majorantenkriterium konvergent ist und $|\sin v/2| \leq 1$ folgt die in Satz 3.2 geforderte Abschätzung nach oben sofort. Wegen der 2π-Periodizität genügt es für die Abschätzung nach unten die Werte $|v/2| < \pi/2$ zu betrachten. Für diese gilt aber die bekannte Ungleichung

$$|\sin v/2| \geq \frac{|v|/2}{\pi/2},$$

so dass die in (3.16) Abschätzung nach unten mit einer Konstanten $A \geq (\pi/2)^k$ folgt. □

Eine genauere Beschreibung dieser Stabilitätskonstanten werden wir im nächsten Abschnitt geben.

Im Fall ganzzahliger Knoten ergibt sich aus der Theorie von Abschnitt 3.2.1 eine Reihe weiterer nützlicher Relationen. Aus (3.47) folgt z. B.

$$N'_{k+1}(x) = N_k(x) - N_k(x-1) \tag{3.66}$$

und aus Lemma 3.10 die Rekursionsformel

$$N_{k+1}(x) = \frac{1}{k}\big(xN_k(x) + (k+1-x)N_k(x-1)\big). \tag{3.67}$$

Für die Berechnung des Skalarprodukts zweier B-Splines mit äquidistanten Knoten erhält man aus Lemma 3.10

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} N_k(x)N_k(x+l)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} N_k(x)N_k(-l-x)\,dx = (N_k * N_k)(-l)\\ &= \underbrace{(N_1 * \cdots * N_1)}_{k\text{-mal}} * \underbrace{(N_1 * \cdots * N_1)}_{k\text{-mal}}(-l)\end{aligned}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_k(x)N_k(x+l)\,dx = N_{2k}(l) \tag{3.68}$$

Zur Berechnung von Linearkombinationen von B-Splines kann man die im vorigen Abschnitt angegebene Rekursionsformel auf äquidistante Knoten spezialisieren. Um einen effizienten Algorithmus für diesen Zweck herzuleiten kann man jedoch auch eine ganz andere Methode benutzen. Ihr liegt die Idee zugrunde, dieselbe Spline-Kurve als Funktion auf immer feinerem Gitter (von Knoten) darzustellen. Diese Idee ist auf beliebige (zulässige) Gitter anwendbar, kann aber für den Fall von kardinalen Splines besonders einfach dargestellt werden.

Zunächst betrachten wir den Spezialfall eines B-Splines $N_k(x)$. Unser Ziel ist es, ihn als Linearkombination von B-Splines zur Knotenfolge $\{j/2\}_{j\in\mathbb{Z}}$ darzustellen. Trivialerweise ist jeder Spline mit ganzzahligen Knoten auch ein Spline auf diesem doppelt so feinen Gitter – wir geben ja nur jeden zweiten Knoten vor. Nun haben wir aber im vorigen Abschnitt (in Korollar 3.5) gesehen, dass man sämtliche Splinefunktionen mit Knoten auf dem feineren Gitter als Linearkombination schreiben kann; folglich gilt dies speziell auch für $N_k(x)$ und wir können (zumindest punktweise)

$$N_k(x) = \sum_{j\in\mathbb{R}} h_{j,k} N_k^{(1)}\left(x - \frac{j}{2}\right), \tag{3.69}$$

schreiben, wobei $N_k^{(1)}(x)$ den B-Spline

$$N_k^{(1)}(x) = k\left[0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{k}{2}\right](\cdot - x)_+^{k-1}$$

bezeichnet; durch Translation erhält man hieraus alle anderen B-Splines zum Gitter $\{j/2\}_{j\in\mathbb{Z}^m}$, so dass (3.69) mit gewissen Koeffizienten $h_{j,k}$ gültig ist. Ferner kann man leicht verifizieren, dass

$$N_k^{(1)}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{k}{2^k-1}\left[0,\frac{1}{2},1\ldots,\frac{k}{2}\right](2\cdot -x)_+^{k-1} = N_k(x),$$

so dass (3.69) in

$$N_k(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} h_{j,k} N_k(2x-j).$$

übergeht. Mit diesem Ansatz können nun die Koeffizienten $\{h_{j,k}\}$ explizit berechnet werden.

Lemma 3.15. *Für $\varphi(x) = N_k(x)$ lautet das Symbol der Verfeinerungsgleichung*

$$H_k(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^k.$$

Es gilt die Verfeinerungsgleichung

$$N_k(x) = \sum_{j=0}^{k} h_{j,k} N_k(2x-j) \qquad h_{j,k} := \frac{1}{2^k-1}\binom{k}{j}.$$

Beweis. Zunächst setzen rein formal

$$N_k(x) = \sum_{j=0}^{k} h_{j,k} N_k(2x-j) \qquad \{h_{j,k}\}_{j=-\infty}^{\infty} \in l_2(\mathbb{Z})$$

an, fouriertransformieren sie und erhalten

$$\hat{N}_k(v) = \frac{1}{2}\hat{N}_k\left(\frac{v}{2}\right)\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j,k}\mathrm{e}^{-ijv/2}.$$

Wir setzen nun die Formel für $\hat{N}_k(v)$ ein; es folgt

$$\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j,k}\mathrm{e}^{-ijv/2} = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-i\omega}}{i\omega}\right)^k\left(\frac{i\omega/2}{1-\mathrm{e}^{-i\omega/2}}\right)^k = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\omega/2}}{2}\right)^k$$
$$= \frac{1}{2^{-k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{e}^{-ijv/2}$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleich die Behauptung. □

Eine unmittelbare Anwendung der Verfeinerungsgleichung ist die Berechnung eines kardinalen Splines der Form

$$s(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l N_k\left(2^{j_0}x - l\right) \qquad \{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z}).$$

Genauer gesagt nutzen wir sie für einen Algorithmus ‚der alle Funktionswerte auf einem höheren Diskretisierungsniveau berechnet, d. h. die Werte

$$s\left(\frac{l}{2^{j+j_0}}\right), \quad l\in\mathbb{Z}. \tag{3.70}$$

Dies kann so geschehen, dass man $f(x)$ darstellt als

$$s(x) = \sum_l a_l^{(j)} N_k\left(2^{j+j_0}x - l.\right)$$

Dann berechnet man die $a_l^{(j+1)}$ rekursiv aus

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_l a_l^{(j)} N_k\left(2^{j+j_0}x - l\right) = \sum_l a_l^{(j)} \sum_i h_{i,k} N_k\left(2^{j+1+j_0}x - 2l - i\right) \\ &= \sum_i N_k\left(2^{j+1+j_0}x - i\right) \sum_l a_l^{(j)} h_{i-2l,k}, \end{aligned}$$

also

$$a_i^{(j+1)} = \sum_l h_{i-2l,k} a_l^{(j)} \quad l \in \mathbb{Z} \tag{3.71}$$

mit $a_l^{(0)} := a_l$. Es folgt für die Werte in (3.69)

$$s\left(\frac{l}{2^{j+j_0}}\right) = \sum_i a_i^{(j)} N_k(l-i) = \sum_{\nu=1}^{k-1} a_{l-\nu}^{(j)} N_k(\nu). \tag{3.72}$$

Der Aufwand dieses Algorithmus ist proportional zur Anzahl der zu berechnenden Werte ,da in jedem 'level j' nur halb so viele Koeffizienten $a_l^{(j)}$ wie im 'level $j+1$' berechnet werden. Er ist um so effizienter, je mehr Werte in (3.70) berechnet werden. Ein weiterer Vorteil dieses *interpolatory graphical display algorithm* ist die Tatsache, dass die Koeffizienten im Wesentlichen ganzzahlig sind (man vergleiche hierzu [Chu92], Seite 94ff.). Dieser Algorithmus ist also sehr effizient für die Berechnung der Werte einer Linearkombination aus kardinalen B-Splines. Er stellt eine Variante des Unterteilungs-Algorithmus für B-Spline-Linearkombinationen dar, wo man sich damit begnügt, (3.71) genügend oft auszuführen und den Schritt 3.72) wegzulassen.Dies gründet auf der Beobachtung, dass man die Kurve $s(x)$ durch die diskrete Punktmenge $\left\{a_l^{(j)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ approximieren kann. Dazu dient die Abschätzung

$$\left\| s(x) - a_l^{(j)} \right\| \le \frac{C}{2^{j_0+j}} \|s'\|_\infty \quad \forall x \in \frac{1}{2^{j_0+j}}[l, lk+k],$$

die mit einer – nur von k abhängigen – Konstante gilt. Die Approximation ist dabei umso besser, je größer j ist und für $j \to \infty$ liegt Konvergenz vor. Im CAD[1] wird der Algorithmus auf dieser Basis angewendet. Dabei wird (3.71) allerdings durch eine noch einfachere Variante ersetzt, die als *Lane-Riesenfeld-Algorithmus* bekannt ist und 1980 veröffentlicht wurde. Der Algorithmus hat dann folgende Form:

Gegeben sei $s(x) = \sum_l c_l N_k(2^j x - l)$. Der Algorithmus arbeitet dann wie folgt

Wir werden später noch Gelegenheit haben, in einem allgemeineren Rahmen auf Unterteilungsalgorithmen einzugehen.

3.2.3 Euler-Frobenius-Polynome und Anwendungen

In Abschnitt 3.1.3 haben wir Interpolation und beste Approximation mit Hilfe von Orthonormalbasen in allgemeinen translationsinvarianten Räumen betrachtet. In diesem Abschnit untersuchen wir dieses Problem nun speziell für die Räume

$$S_{k,p} = \overline{\underset{L_p(\mathbb{R})}{\operatorname{span}} \{N_k(\cdot - l)\}_{l\in\mathbb{Z}}}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

[1] Computerunterstütztes Entwerfen, engl. 'computer aided design'

type *Vektor* = **array**$[-\infty..\infty]$ **of** *real* ;

program *LaneRiesenfeld* (**var** c : *Koeffizientenvektor*) ;
var l : *integer* ;

begin
  for $l := -\infty$ **to** ∞
  do begin
    $c_{2l}^{(1)} := c_l$; $c_{2l+1}^{(1)} := c_l$;
  end ;
  for $r := 2$ **to** k
  do begin
    for $l := -\infty$ **to** ∞
    do begin
      $c_l^{(r)} := \frac{1}{2}\left(d_l^{(r-1)} + d_{l-1}^{(r-1)}\right)$
    end
  end ;
  for $l := -\infty$ **to** ∞
  do begin
    $c_l^{(1)} := d_l^{(k)}$
  end
end .

Abbildung 3.1: Lane-Riesenfeld-Algorithmus

von kardinalen Splines. Interpolation mit kardinalen Splines ('cardinal spline interpolation') ist dann I. J. Schoenberg zufolge das Problem, zu Daten $\mathbf{f} = \{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z})$ ein Element $s(x) = s(f;x) \in S_{k,p}$ zu finden mit der Eigenschaft, dass

$$s(\mathbf{f}; j) = f_j, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.73}$$

Um dieses Problem zu lösen konstruieren wir den Fundamentalspline $L_k(x) \in L_p(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$L_k(j) = \delta_{0,j}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.74}$$

Dann gilt nämlich

$$s(\mathbf{f}; x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j L_k(x-j) \tag{3.75}$$

(sofern diese Reihe in L_p konvergiert). Die Lösung von (3.74) bestimmen wir mit Hilfe der z-Transformation. Setzen wir

$$L_k(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varrho_l^{(k)} N_k(x-l) \tag{3.76}$$

an, so folgt aus (3.74) die (formale) Identität

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} L_k(j) z^j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} z^l \varrho_l^{(k)} N_k(j-l)] z^{j-l} = \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varrho_l^{(k)} z^l\right) \sum_{j\in\mathbb{Z}} N_k(j) z^j. \tag{3.77}$$

Dies führt zur

Definition 3.11. (Euler-Frobenius-Polynom) *Das Polynom*

$$E_n(z) := n! \sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{n+1}(j)]z^{j+m} = k! \sum_{j=0}^{n-1} N_{0,n+1}(j+1)z^j, \qquad m := [n/2]$$

heißt Euler-Frobenius-Polynom *vom Grad* $n-1$.

Diese Polynome wurden zuerst 1938 in einer Arbeit von Collatz-Quade (vgl. [QC38]) im Zusammenhang mit Spline-Interpolation untersucht. Wirklich eingeführt wurden sie dann 1969 von Schoenberg (vgl. seine Monographie [Sch73]). In der Splineliteratur findet man eine Fülle von Eigenschaften dieser speziellen Polynome auf die wir im Folgendnen eingehen werden. Für unsere Zwecke ist jedoch zunächst wichtig, dass diese Polynome im für die l_2-Stabilität der B-Spline-Basis maßgeblichen Ausdruck (3.65) auftreten. Nach (3.65) und Korollar 3.1 gilt nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ijv} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\hat{N}_k(v+2\pi l)\right|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} N_k(x)N_k(x+j)\,dx = N_{2k}(j),$$

so dass die Fourierreihe von $\left[\hat{N}_k, \hat{N}_k\right]$ endlich ist. Mit $z = \mathrm{e}^{-iv}$ folgt dann die fundamentale Formel

$$\begin{aligned}\left[\hat{N}_k, \hat{N}_k\right] &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{N}_k(v+2\pi l)\right|^2 = \sum_{l=-k+1}^{k-1} N_{2k}(l)z^l \\ &= \sum_{l=0}^{2k-2} N_{0,2k}(l+1)z^l = \frac{z^{1-k}}{(2k-1)!}E_{2k-1}(z).\end{aligned} \tag{3.78}$$

Die Koeffizienten der Euler-Frobenius-Polynome $E_k(z)$ können bequem mit der Rekursionsformel (3.67) aus den Translaten der N_{k-1} berechnet werden. Speziell gilt

$$E_{2k-1}(z) = \sum_{j=0}^{2k-2} a_j z^j, \qquad a_{k-1+l} = N_{2k}(l) = N_{2k}(-l) = a_{k-1-l}.$$

Eine weitere einfache Folgerung aus (3.67) ist

$$a_1 = a_{2k-1} = N_{2k}(1) = (2k-1)!.$$

Mit etwas größerem Aufwand ergibt sich der

Satz 3.6. *Die Polynome $E_n(z)$ erfüllen die Rekursionsformel*

$$\begin{aligned}E_1(z) &= 1 \\ E_n(z) &= \big(1+(n-1)z\big)E_{n-1}(z) + z(1-z)E'_{n-1}(z).\end{aligned}$$

Die Nullstellen eines beliebigen Euler-Frobenius-Polynoms $E_n(z)$ haben folgende Eigenschaften:

1. *sie sind einfach,*
2. *sie sind negativ (also speziell reell) und daher die Polynome in reelle Linearfaktoren zerlegbar,*
3. *ist λ eine Nullstelle von $E_n(z)$, so auch $1/\lambda$.*

Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen, vgl. dazu auch [Chu92] (Abschnitt 6.4) oder [Sch71]. Es sei nur angemerkt, dass die letzte Aussage aus $E_n(1/z) = z^{1-n}E_n(z)$ folgt. Nimmt man 2 und 3 zusammen so erhält man offensichtlich, dass -1 genau dann eine Nullstelle von $E_n(z)$ ist, wenn n gerade ist (man beachte, dass $\deg E_n = n-1$). Ist n hingegen ungerade, sagen wir $n = 2m-1$, so treten die Nullstellen in Paaren $(\lambda_\nu, 1/\lambda_\nu)$, $\nu = 1, \dots, m$ auf. Dabei kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_m > -1$ gilt. Es gilt

Korollar 3.6. *Die Euler-Frobenius-Polynome haben die Darstellung*

$$E_{2m-1}(z) = \prod_{j=1}^{m-1}(z-\lambda_j)\left(z-\frac{1}{\lambda_j}\right) = z^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{\lambda_j}{z}\right)\frac{\lambda_j z-1}{\lambda_j}$$

und folglich gilt

$$1 \geq \sum_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{N}_m(v+2\pi l)\right|^2 \geq \sum_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{N}_m(\pi+2\pi l)\right|^2 = \frac{1}{(2m-1)!}\prod_{j=1}^{m-1}\frac{(1+\lambda_j)^2}{|\lambda_j|} > 0.$$

Beweis. Nach den obigen Ausführungen gilt

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{N}_m(v+2\pi l)\right|^2 = \left|\sum_{j=0}^{2m-2}N_{0,2m}(j+1)\mathrm{e}^{-ijv}\right| = \frac{1}{(2m-1)!}\prod_{j=1}^{m-1}\left|(\mathrm{e}^{-iv}-\lambda_j)\left(\mathrm{e}^{-iv}-\frac{1}{\lambda_j}\right)\right|$$

Die obere Schranke erhält man dann aus

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{2m-2}N_{0,2m}(j+1)\mathrm{e}^{-ijv}\right| &\leq \sum_{j=0}^{2m-2}N_{0,2m}(j+1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}N_{0,2m}(j)\\ &= \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}N_{0,2m}(x+j)\right]_{x=0} = 1.\end{aligned}$$

Die Abschätzung nach unten ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m-1}\left|(\mathrm{e}^{-iv}-\lambda_j)\left(\mathrm{e}^{-iv}-\frac{1}{\lambda_j}\right)\right| &= \prod_{j=1}^{m-1}\left|1-\lambda_j\mathrm{e}^{iv}\right|\frac{\left|\lambda_j\mathrm{e}^{-iv}-1\right|}{|\lambda_j|}\\ &= \prod_{j=1}^{m-1}\frac{(1-2\lambda_j\cos v+\lambda_j)^2}{|\lambda_j|} \geq \prod_{j=1}^{m-1}\frac{(1-|\lambda_j|)^2}{|\lambda_j|}.\end{aligned}$$

□

Als Konsequenz dieses Korollars kann man eine relativ explizite Formel für die aus $\varphi(x) = N_m'(x)$ folgende ONB für den Unterraum

$$S_{m,2} := \left\{s(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l N_m(x-l) : \{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z})\right\}$$

von kardinalen Splines vom Grad m angeben:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(v) &= \frac{\hat{N}_m(v)}{\sqrt{\sum_k\left|\hat{N}_m(v+2\pi k)\right|^2}} = \sqrt{\frac{(2m-1)!}{z^{1-m}E_{2m-1}(z)}}\hat{N}_m(v)\\ &= \sqrt{(2m-1)!}\,\hat{N}_m(v)\prod_{j=1}^{m-1}\frac{1}{(1-\lambda_j/z)(\lambda_j z-1)\lambda_j}\end{aligned}$$

dabei ist $z = \mathrm{e}^{-iv}$. Berechnet man einige der Polynome nach der Rekursionsformel erhält man:

$$\begin{aligned}
E_0(t) &= 1,\\
E_1(t) &= 1,\\
E_2(t) &= t+1,\\
E_3(t) &= t^2+4t+1,\\
E_4(t) &= t^3+11t^2+11t+1,\\
E_5(t) &= t^4+26t^3+66t^2+26t+1.
\end{aligned}$$

Die beiden konstanten Polynome E_0 und E_1 haben offensichtlich keine Nullstelle, ebenso offensichtlich ist 1 die (einzige) Nullstelle von E_2. Bei E_3 ergeben sich die Nullstelle nach der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen zu $-2 \pm \sqrt{3}$. Auch die Nullstellen von E_4 lassen sich leicht berechnen: Wie man durch einsetzen verifiziert ist -1 tatsächlich eine Nullstelle. Nach Polynomdivision durch den Linearfaktor $t+1$ ist dann nur noch $t^2+10t+1=0$ zu lösen und hierfür ergibt die Lösungsformel dann $-5 \pm 2\sqrt{6}$ als Nullstellen. Um die Nullstelle von E_k, $k \geq 5$ zu bestimmen, ist es sinnvoll ein Computeralgebraprogramm wie z. B. Maple oder Mathematica zu benutzen. Für $k = 5$ kann man aber auch die allgemeine Lösungsformel für Polynome vierten Grades anwenden (wie aus der Algebra bekannt sein sollte ist dies allerdings der höchste Polynomgrad für den eine solche Lösungsformel angebbar ist). Man erhält folgende Nullstellen:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(13-\sqrt{105}-\sqrt{270-26\sqrt{105}}\right) &\approx -0{,}4306,\\
-\frac{1}{2}\left(13-\sqrt{105}+\sqrt{270-26\sqrt{105}}\right), &\approx -2{,}3225,\\
-\frac{1}{2}\left(13+\sqrt{105}-\sqrt{270+26\sqrt{105}}\right), &\approx -0{,}0431,\\
-\frac{1}{2}\left(13+\sqrt{105}+\sqrt{270+26\sqrt{105}}\right) &\approx -23{,}2039.
\end{aligned}$$

Hiermit kann man durch Entwicklung von $E_3(z)$ und $E_5(z)$ in eine Laurentreihe die Koeffizienten von $\varphi(x)$ bei Entwicklung nach den Translaten von N_k *explizit* angeben. Auch im allgemeinen Fall können mit Hilfe von Korollar 3.6 weitergehende Aussagen gemacht werden.

Der Faktor von $\hat{N}_m(v)$ kann auf dem Kreisring $\overline{\lambda} < |z| < 1/\overline{\lambda}$,

$$\overline{\lambda} := \max\{|\lambda_j| :\}.$$

in eine (konvergente) Laurent-Reihe entwickelt werden. Um dies streng zu rechtfertigen beachte man, dass die Entwicklungen

$$\frac{1}{1-\lambda_j/z} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_j}{z}\right)^l, \qquad \frac{1}{1-\lambda z} = \sum_{l=0}^{\infty}(\lambda_j z)^l$$

(in geometrische Reihen) für $|z| > \overline{\lambda}$ bzw. $|z| < 1/\overline{\lambda}$ möglich sind. Um die Produkte dieser Potenzreihen zu bilden bedarf es nur endlich vieler Cauchy-Produkte mit jeweils exponentiell abfallenden Koeffizienten und es folgt

$$\frac{(2m-1)!z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\omega_l^{(2m)}z^l, \qquad \overline{\lambda} < |z| < \frac{1}{\overline{\lambda}} \tag{3.79}$$

mit Koeffizienten $\omega_l^{(2m)}$, die in $|l|$ exponentiell abfallen. Genauer gilt

$$\left|\omega_l^{(2m)}\right| \leq C_m \overline{\lambda}^{|l|}$$

mit einer – von m abhängigen – Konstanten C_m. Als Folgerung erhält man auf dem Kreisring $\overline{\lambda} < |z| < \lambda$ die Darstellung

$$\sqrt{\frac{(2m-1)!z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(m)} z^l + \sum_{l=0}^{\infty} a_{-l}^{(m)} z^{-l}.$$

Die $a_l^{(m)}$ fallen genauso wie die $\omega_l^{(2m)}$ exponentiell ab. Des Weiteren gilt

$$\varphi(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^{(m)} N_m(x-l),$$

d. h. φ fällt wie $\overline{\lambda}^{|x|}$ ab.[2]

Wir kehren jetzt wieder zur kardinalen Interpolation zurück und wenden diese Überlegungen darauf an. Dazu müssen wir zunächst die $\varrho_l^{(k)}$ (siehe (3.76) bestimmen; diese sind aber nach (3.77) durch.

$$1 = \left(\sum_l \varrho_l^{(k)} z^l\right)\left(\sum_j N_k(j) z^j\right) = \frac{z}{(k-1)!} E_{k-1}(z) \sum_l \varrho^{(k)} z^l$$

gegeben. Wir betrachten nun den Fall, dass $k = 2m$ gerade ist; der Vergleich mit (3.79) ergibt dann

$$\varrho_l^{(k)} = \omega_l^{(2m)}. \tag{3.80}$$

Nach den vorangegangenen Überlegungen wissen wir nun, dass damit die $\varrho_l^{(2m)}$ eindeutig bestimmt sind und wie $\overline{\lambda}^{|l|}$, $\overline{\lambda} \in (0,1)$ abfallen. Damit ist $L_{2m}(x)$ eindeutig bestimmt und hat das Abklingverhalten

$$|L_{2m}(x)| \leq C_m \overline{\lambda}^{|x|}$$

mit einer Konstanten C_m.

Zum Beweis der Eindeutigkeit müssen wir die Existenz eines Nullsplines im gewünschten Splineraum ausschließen, d. h. zeigen, dass es in diesem Raum keine Funktion $O_{2m}(x) = \sum c_k^{(2m)} N_{2m}(x-k)$ mit

$$O_{2m}(\mathbb{Z}) = \{0\}$$

gibt. Angenommen es gebe eine solche Funktion mit einer nichttrivialen Folge $\left\{c_k^{(2m)}\right\}$, die (sogar) ein exponentielles Wachstum der Form $\left|c_k^{(2m)}\right| = Cq^{|k|}$ mit $q < 1/\overline{\lambda}$ aufweisen könnte. Sei dann $K_r(z_0)$ ein Kreis um z_0 mit Radius r, der ganz im Inneren des Kreisrings $K_{1/q}(0) \setminus K_q(0)$ liegt (mit anderen Worten gelte $|z_0| + r < 1/q$ und $|z_0| - r > q$). Für $z \in K_r(z_0)$ kann man dann wie oben die z-Transformation auf diesem Kreis anwenden und erhält

$$0 = \sum_l Q_{2m}(l) z^l = \frac{E_{2m-1}(z)}{(2m-1)!} \sum_k c_k^{(2m)} z^{k+1}.$$

Da $\sum_k c_k^{(2m)} z^{k+1}$ auf diesem Kreis nicht identisch verschwinden kann , müsste aber eine Nullstelle von $E_{2m-1}(z)$ in diesem Kreis liegen und dies haben wir ausgeschlossen. Wir fassen unsere Erkenntnisse zusammen in

[2] Dies allein liefert jedoch noch keinen praktikablen Algorithmus zur Berechnung von φ.

Satz 3.7. *Das spezielle kardinale Interpolationsproblem (3.74) hat für $k = 2m$ genau eine Lösung $L_{2m}(x)$ der Form (3.76) die erstens im Splineraum $S_{2m,2}$ liegt, zweitens in $|x|$ exponentiell abfällt und deren Koeffizienten $\left\{b_k^{(2m)}\right\}$ drittens in $|k|$ exponentiell abfallen. Das allgemeine kardinale Interpolationsproblem (3.73) hat für Datenfolgen $\mathbf{f} = \{f_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$, die $f_l \le Cq^{|l|}$ mit einer Konstanten C und einem q mit $0 < q < 1/\overline{\lambda}$ erfüllen, genau eine Lösung; diese hat die Form (3.75).*

Der Beweis des letzten Teils der Aussage sei dabei dem Leser überlassen. Es sei noch angemerkt, dass das analoge Interpolationsproblem für ungerades $n = 2m+1$ (statt $n = 2m$) *nicht* eindeutig lösbar ist bzw. es existieren nichttriviale Nullsplines. Der Grund ist der, dass $E_{2m}(z)$ an der Stelle $z = -1$ eine Nullstelle hat. Daher ist auch die obige Argumentation mit Hilfe der Laurentreihe in der angegebenen Form nicht möglich.

Eine genauere Analyse der Nullsplines kann man in der Monographie von Schoenberg [Sch73] finden. Er betrachtet dort Splinefunktionen des Typs

$$\varphi_{m,z}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j N_m(x-j), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Sie erfüllen die Funktionalgleichung $\varphi_{m,z}(x+1) = z\varphi_{m,z}(x)$ und somit

$$\varphi_{m,z}(j) = z^j\varphi_{m,z}(0) = z^j \sum_l z^l N_m(-l) = z^j \sum_l z^l N_m(m+l) = \frac{z^{j-m+1}}{(m-1)!} E_{m-1}(z).$$

Insbesondere gilt für die Nullstellen z des Euler-Frobenius-Polynoms $\varphi_{m,z}(j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Im obigen Fall ist $E_{2m}(-1) = 0$ und daher

$$\varphi_{2m+1,-1}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j N_{2m+1}(x-j)$$

ein Nullspline in $L_\infty(\mathbb{R})$. In [Sch73] wid gezeigt, dass die Menge aller Nullsplines (vom Grad $n-1$) ein linearen Raum der Dimension $n-1$ ist und die $\varphi_{n,\lambda_l}(x)$ eine Basis dieses Raums bilden. Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ die $n-1$ einfachen Nullstellen von $E_n(z)$. Schoenberg zeigt weiter, dass für ungerades $n = 2m+1$ das Interpolationsproblem

$$s\left(\mathbf{f}, l - \frac{1}{2}\right) = f_l \qquad \forall l \in \mathbb{Z}$$

mit $s \in S_{2m+1,\infty}$ unter analogen Voraussetzungen wie in Satz 3.7 eindeutig lösbar ist. Für die speziellen Daten $f_l = \delta_{0,l}$ ergibt sich, dass die Lösung

$$\tilde{L}_{2m+1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{b}_k^{(2m+1)} N_{2m+1}(x-k)$$

ist. Die Koeffizienten $\left\{\tilde{b}_k^{(2m+1)}\right\}$ erfüllen die den obigen Ergebnissen analoge Gleichung

$$1 = z\left(\sum_k z^k \tilde{b}_k^{(2m+1)}\right)\left(\sum_{j=0}^{2m} z^j N_{2m+1}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right) \equiv \frac{\tilde{E}_{2m}(z)}{(2m)!}\sum_k z^{k+1}\tilde{b}_k^{(2m+1)}.$$

Die $\tilde{E}_{2m}(z)$ haben dabei ganz ähnliche Eigenschaften wie die $E_{2m+1}(z)$. Einzelheiten finden sich wie gesagt in [Sch73].

Kapitel 4

Multi-Resolution-Analysis und Wavelets

4.1 Kontinuierliche Wavelet-Transformationen

4.1.1 Gefensterte Fouriertransformation(WFT)

Bei der gefensterten Fouriertransformation (englisch:'Windowed Fourier Transform', WFT) handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation. Bei ihr arbeitet man von vornherein mit mehreren Parametern. Außer dass man in den Frequenzbereich transformiert multipliziert man die zu transformierende Funktion zusätzlich punktweise mit einer sogenannten *Fensterfunktion.* Diese hängt im Wesentlichen von zwei Parametern ab, nämlich zum einen von der „Lage“ des Fensters und zum anderen von der sogenannten *Fensterbreite.* Betrachten wir den univariaten Fall. Dann definiert man für $g \in L_2(\mathbb{R})$

$$f_t(u) := \overline{g(u-t)} f(u)$$

und

$$\tilde{f}(\omega, t) := \hat{f}_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(u) \mathrm{e}^{-i\omega u}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(u-t)} f(u) \mathrm{e}^{-i\omega u}\, du \tag{4.1}$$

Diese Transformation wurde 1946 von D. Gabor eingeführt. Führt man

$$g_{\omega,t}(u) := \mathrm{e}^{i\omega u} g(u-t) \tag{4.2}$$

ein, so kann man die WFT auch als Skalarprodukt

$$\tilde{f}(\omega, t) = (f, g_{\omega,t})_2 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}(\omega, t) \in L_\infty\left(\mathbb{R}^m\right) \tag{4.3}$$

schreiben; in dieser Form lässt sich die Ähnlichkeit zur WT am besten erkennen. Man nennt g wie schon gesagt Fensterfunktion oder kurz *Fenster.* Um zu sehen, wie sie sich im Frequenzbereich darstellt (also wie die zugehörige Filterfunktion aussieht) berechnen wir die Fouriertransformation bezüglich t – also bezüglich der Zeit, wenn wir annehmen, dass $f(t)$ ein Signal ist. Mit der Faltungformel ergibt sich

$$\mathcal{F}\left[\tilde{f}(\omega, \cdot)\right](v) = \mathcal{F}\left[\overline{g(-\cdot)}\right](v) \mathcal{F}\left[f(u)\mathrm{e}^{-i\omega u}\right](v) = \overline{\hat{g}(v)} \hat{f}(v+\omega).$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigt dann, dass $\mathcal{F}\left[\tilde{f}(\omega, \cdot)\right](v)$ in $L_\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$ liegt. Die Fourier-Umkehrformel liefert nun

$$\tilde{f}(\omega, t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(v)} \hat{f}(v+\omega) \mathrm{e}^{ivt}\, dv = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathrm{e}^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(u-\omega)} \hat{f}(u) \mathrm{e}^{iut}\, du. \tag{4.4}$$

Diese Formel kann man folgendermaßen als Konstruktionsformel ansehen: Man geht vom Signal $\hat{f}(u)$ im Frequenzbereich aus, filtere es durch Multiplikation mit dem Fenster, und bilde anschließend die invers Fouriertransformierte. Damit verwendet man nicht genau die ursprüngliche Transformation $\tilde{f}(\omega, t)$, jedoch genügt eine einfache Multiplikation (Modulation) mit der Schwingung um dies zu erreichen. Dies nennt man in der Signaltechnik *De*modulation. (Vom Standpunkt des Ingenieurs hat diese Bezeichnung folgenden Grund: dem Zwischenergebnis ist noch eine unerwünschte Schwingung aufgeprägt, die es zu entfernen gilt.)

Die Transformation $\tilde{f}(\omega, t)$ kann je nach Wahl des „Fensters" eine recht genaue Beschreibung des ursprünglichen Signals $f(t)$ liefern und zwar sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich. Ist nämlich z. B. $\hat{g}(v)$ um den Nullpunkt lokalisiert – $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ wäre ein Beispiel – so zeigt obige Formel, dass

$$\mathcal{F}\left[\hat{f}(\omega, \bullet)\right]^{\wedge}(v) = \hat{f}(v+\omega)\chi_W(v) \approx \hat{f}(\omega)\chi_W(v).$$

Im Extremfall könnte man statt $\chi_W(v)$ die δ-Distribution verwenden, die den Wert $\hat{f}(\omega)$ (also die Amplitude der Frequenz ω des Signals) *unendlich scharf* lokalisiert.Wegen $\mathcal{F}[1] = \delta$ ist dies der Fall, wenn als Fenster $g(x) \equiv 1$ gewählt wird, also wenn $g_{\omega,t}(u) = \mathrm{e}^{i\omega u}$. Das bedeutet aber nichts anderes, als dass man die übliche Fouiertransformation verwendet. Der andere Extremfall liegt vor, wenn $g_{\omega,t}(u) = \delta(\bullet - t_0)$ (also die nach t_0 verschobene Delta-Distribution) gewählt wird; das entspricht dem Limes einer Dirac-Folge. Dann gilt $\tilde{f}(\omega, t_0)$, d. h. der Wert des Signals zum Zeitpunkt t_0 wird unendlich scharf lokalisiert. Eine praktische Variante bilden die Fenster

$$\frac{1}{\varrho}\Phi\left(\frac{u - t_0}{\varrho}\right)$$

mit $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$. mit dem "zooming"-Parameter ϱ. Läßt man ϱ gegen 0 gehen, dann wird das Fenster immer kleiner, d. h. der Zeitpunkt wird immer genauer lokalisiert. Exakte Lokalisierung im Zeit- und auch im Frequenzbereich ist sowohl mathematisch als auch physikalisch nicht realisierbar. Man kann die Frage stellen, welche Fenster gut lokalisiert sind. Um diese Frage quantitativ beantworten zu können müssen wir zunächst einige Größen einführen (vgl. [Chu92], Seite 54).

Definition 4.1. *Es seien $w(t)$ und $tw(t)$ Elemente von $L_2(\mathbb{R})$. Dann heißt*

$$t^* := \frac{1}{\|w\|_2}\int_{-\infty}^{\infty} t|w(t)|^2\,dt$$

das Zentrum *(auch: der* Schwerpunkt*) und*

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(t-t^*)^2|w(t)|^2\,dt}$$

die Breite *(manchmal auch* Standardabweichung*) des Fensters $w(t)$.*

Diese Definitionen für Zentrum und Breite haben einen anschaulichen Sinn – wenn man sie natürlich prinzipell auch anders wählen könnte. Klar ist, dass Δw umso kleiner ist, je schärfer der Träger um t^* lokalisiert ist. Es ist auch klar, dass $\tilde{f}(\omega, t)$ eine sinnvolle Information über das lokale Verhalten von $f(t)$ innerhalb des Zeitfensters $[t^*+t-\Delta g; t^*+t+\Delta g]$ darstellt. Das zu bildende Integral berücksichtigt ja nur Funktionswerte zu Zeiten aus diesem Zeitintervall. Analog liest man an (??) ab, dass $\tilde{f}(\omega, t)$ eine sinnvolle Information über das Verhalten von $\hat{f}(\omega)$ innerhalb des Zeitintervalls $[\omega^* + \omega - \Delta\hat{g}, \omega^* + \omega + \Delta\hat{g}]$ darstellt. Dabei sind ω und $\Delta\hat{g}$ die

Entsprechungen von t^* und Δg die sich ergeben, wenn man obige Definitionen auf $\hat{g}$ statt auf g anwendet.

Interessanterweise kann man nun zeigen, dass

$$\Delta w \Delta \hat{w} \geq \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

gilt.Einen Beweis kann man in Chui [Chu92] auf Seite 56ff. oder in [Wic96] , Seite 22, finden. Man kann auch zeigen, dass das Minimum für Funktionen des Typs

$$w(x) = c\mathrm{e}^{ia\,t} W(\alpha t - b), \qquad , c \neq 0, \quad \alpha < 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

tatsächlich angenommen wird. Dabei bezeichnet $W(x)$ die gaußsche Glockenkurve $W(x) = \exp(-x^2/2)$. Damit haben wir die Aussage präzisiert, dass man kein Fenster finden kann, dessen zugehörige WFT ein Signal gleichzeitig im Zeit- und im Frequenzbereich unendlich scharf lokalisiert. Eine weitere Deutung der Relation (4.5) ist diejenige als heisenbergsche Unschärferelation, d. h. das Produkt aus Orts- und Impuls eines Teilchens hat eine feste, von Null verschiedene untere Grenze. (Genaugenommen ist diese Aussage nur ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Prinzips, dessen Untersuchung allerdings zu weit in die Funktionalanalysis führen würde.

Die durch (4.1) bis (4.3) beschriebene Transformation von $L_2(\mathbb{R})$ nach $L_\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ hat eine Umkehrung die man Rekonstruktions-Formel ('reconstruction formula') nennt. Es gilt

Lemma 4.1. *Unter den obigen Voraussetzungen an g gilt für $f \in L_2(\mathbb{R})$*

$$f(u) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int g_{\omega,t}(u) \tilde{f}(\omega, t)\, d\omega\, dt \tag{4.6}$$

mit $C_g = 2\pi \|g\|_2^2$. Ferner gilt

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \left|\tilde{f}(\omega, t)\right|^2 dt\, d\omega \tag{4.7}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass f und g zusätzlich genügend glatt sind. Weil dann f_t genügend glatt ist folgt wegen $\tilde{f}(\omega, t) = \hat{f}_t(\omega)$ mit Lemma 2.4,Teil3, und Lemma 2.3 , dass $\tilde{f}(\omega, t)$ in ω genügend schnell abfällt. Speziell soll dann $\hat{f}_t(\omega)$ bezüglich ω eine L_1-Funktion sein, so dass sich bezüglich dieser Variablen – bei festgehaltenem t – die inverse Fourier-Transformation anwenden läßt. Dies ergibt

$$\overline{g(u-t)} f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega u} \tilde{f}(\omega, t)\, d\omega.$$

Da die Division durch g ist im Allgemeinen nicht möglich ist, multipliziert man mit $g(u-t)$ und integriert bezüglich t. Dann folgt

$$f(u) \int_{-\infty}^{\infty} |g(u-t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int g(u-t) \mathrm{e}^{i\omega u} \tilde{f}(\omega, t)\, dt\, d\omega.$$

Hieraus folgt nach Definition von C_g

$$C_g f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int g(u-t) \mathrm{e}^{i\omega u} \tilde{f}(\omega, t)\, dt\, d\omega.$$

Damit ist (4.7) für glatte f und g bewiesen. Multiplikation mit $\overline{f(u)}$ und Integration ergibt für solche Funktionen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} C_g\|f\|_2^2 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega,t) \int_{-\infty}^{\infty} g(u-t)\mathrm{e}^{i\omega u}\overline{f(u)}\,du\,dt\,d\omega \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{f}(\omega,t)}\tilde{f}(\omega,t)\,dt\,d\omega \quad , \end{aligned} \tag{4.8}$$

d.h. $\tilde{f}(\omega,t) \in L_2\big(\mathbb{R}^2\big)$ Nun betrachte beliebige Funktionen $f,g \in L_2$ und approximiere sie durch Funktionen $f_n, g_n \in L_2$, die im obigen Sinne glatt sind. Für die Approximationen f_n, g_n gilt (4.7). Die linke Seite strebt dann für $n \to \infty$ gegen $C_g\|f\|_2^2$ während auf der rechten Seite der Integrand (nach (4.3) in L_∞) punktweise gegen $\left|\tilde{f}(\omega,t)\right|^2$ strebt. Mit dem Lemma von Fatou, d. h. mit

$$\int \limsup f_n(x)\,d\mu(x) \le \liminf \int f_n(x)\,d\mu(x),$$

folgt dann $\tilde{f}(\omega,t) \in L_2\big(\mathbb{R}^2\big)$ für allgemeine f,g. Damit ist dann auch (**??**) für allgemeine f,g im L_2-Sinne gültig. □

Lemma (4.1) ist als Analogon zum Satz von Plancherel für die gewöhnliche Fourier-Transformaiton anzusehen. Neben diesem rein mathematischen Aspekt zeigt es, dass man das ursprüngliche Signal aus der Kenntnis von $\tilde{f}(\omega,t)$ als Funktion von ω und t wieder zusammensetzen (synthetisieren) kann. Man nennt $\tilde{f}(\omega,t)$ deshalb eine *Phasenraumlokalisierung* von f wobei der Phasenraum die Menge aller Paare (ω,o) ist, auch diese Bezeichnung stammt aus der Physik.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei noch erwähnt,dass die Diskretisierung der gefensterten Fourier-Tranformation im Sinne der Trapezregel (vergl. Korollar 2.7) zu Basisfunktionen der Form $g(x-n)e^{i2\pi mx}{}_{n,m\in\mathbb{Z}^m}$ führt. Für sie gilt in Verschärfung der Heisenberg-Relation der

Satz 4.1. (Balian-Low) *Sei $g \in L_2(\mathbb{R})$ und die Funktionen $g(x-n)e^{i2\pi mx}{}_{n,m\in\mathbb{Z}^m}$ eine Orthonormalbasis für $L_2(\mathbb{R})$ .Dann muss das Heisenberg-Produkt in (4.5) unendlich sein.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in Daubechies [Dau92],Section 4.1.Als Konsequenz kann die Rekonstruktionsformel von Lemma 4.1 mit diesen g nicht gelten.Andererseits bieten solche Orthonormalbasen als Diskretisierung einer gefensterten Fourier-Transformation viele Vorteile. Deshalb sind in jüngster Zeit durch Modifikation des obigen Ansatzes erfolgreich Orthonormalbasen entwickelt worden,für die das negative Ergebnis des Satzes von Balian-Low keine Gültigkeit hat.Eine Darstellung dieser Zusammenhänge findet man in Daubechies [Dau92],Section 4.2, Algorithmen auf dieser Basis in [Wic96],Kapitel 4.

4.1.2 Kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT)

Die Ideen des vorigen Abschnitts werden durch die kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT) –die 1983 von Grossman-Morlet eingeführt wurde – in einer Weise abgewandelt, dass mit einer Diskretisierung auch die Approximation durch Sinc-Reihen und Splines durch Diskretisierung in diesen Rahmen passen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall einer einzigen Variablen .

Definition 4.2. *Gegeben sei eine Funktion $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$, welche die Bedingung*

$$C_\Psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|} \left\| \hat{\Psi}(\omega) \right\|^2 d\omega < \infty \tag{4.9}$$

erfüllt. Dann definiere für Funktionen $f \in L_1(\mathbb{R})$ die Wavelet-Transformierte von f zum Wavelet Ψ *als*

$$(L_\Psi f)(a,b) := \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\, dt \tag{4.10}$$

Formel (4.9) lässt sich wie (4.1) auch als Skalarprodukt schreiben,

$$(L_\Psi f)(x,b) = \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} (f, \Psi_{a,b}); \tag{4.11}$$

dabei ist $\Psi_{a,b}$ definiert als

$$\Psi_{a,b}(t) := \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Die Funktion Ψ entspricht einem Fenster ,wobei die Parameter mit a, b bezeichnet werden und den bisherigen Parametern ω und t bei der Fourier- Transformation entsprechen.

Wie bereits oben erwähnt kann man $(L_\Psi f)(a,b)$ auch als eine Dirac-Folge mit Parameter $a \to 0$ auffassen (anschaulich wird dabei das „Fenster“ immer schmaler). Der Parameter b dient dazu, das Fenster an die interessierende Stelle zu verschieben und entspricht dem Zeitpunkt t bei der WFT. Der Parameter ω in (4.1) hat keine direkte Entsprechung in (4.10) und dient nur zur Verbindung mit der Fouriertransformation.

Bemerkung 4.1. Der Name *Wavelet* rührt daher, dass aus (4.9) notwendigerweise $\hat{\Psi}(0) = 0$ folgt; das bedeutet, dass

$$0 = \hat{\Psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u)\, du.$$

Da also der Mittelwert verschwindet, muss Ψ mindestens einen Vorzeichenwechsel aufweisen, also „Wellenstruktur“ haben. ♢

Später werden wir das Integral (4.10) diskretisieren und Linearkombinationen von dilatierten Translaten einer Funktion Ψ betrachten (und die Bedingung (4.9) modifizieren). Ein Beispiel bildet die Approximation mit den „verallgemeinerte“Sinc-Funktionen $W(x)$ im vorigen Abschnitt. Ob sie sich als Wavelet (im obigen Sinne) eignen, hängt davon ab, ob sie die Bedingung (4.9) erfüllen. Dies ist äusserst einfach nachzuprüfen, denn es gilt

$$\hat{W}(v) = \mathcal{F}\left[2\pi \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_W(t)\right]\right](v) = 2\pi \chi_W(v).$$

Man sieht, dass die Standardwahl des Gebiets $W = (-1/2, 1/2)$ kein Wavelet liefert, weil dann $\int_W dt/|t|$ divergiert. Dagegen ist bei $W = (-1, 1/2) \cup (1/2, 1)$ (4.9) erfüllt. Das bekannteste (weil einfachste) Wavelet ist das *Haar-Wavelet*:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1/2, \\ -1 & 1/2 \le t \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.12}$$

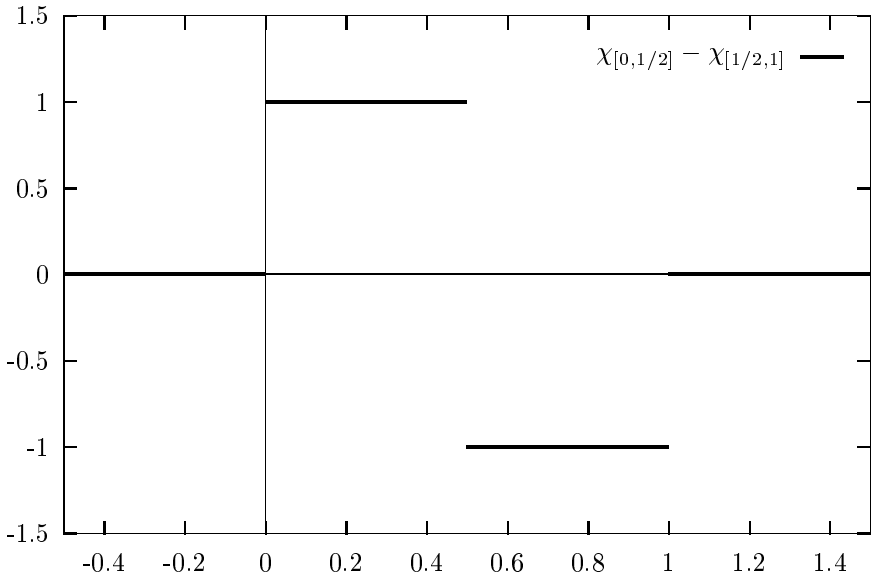


Abbildung 4.1: Haar-Wavelet

Offensichtlich verschwindet das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\,dt$ und wie man leicht nachrechnet gilt $\hat{\Psi}(\omega) = i\exp(-i\omega/2)\sin(\omega/4)\,\mathrm{sinc}(\omega/4)$. Ebenso kann man leicht nachrechnen, dass Bedingung (4.9) erfüllt ist.

Ein weiteres Beispiel ist der sogenannte *mexikanische Hut*, der durch

$$\Psi(x) = -\left(\frac{d}{dx}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2} = (1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

definiert wird. Nach der Formel in Bemerkung 2.8 über die Fourier-Transformierte des Gauß-Kerns gilt $\hat{\Psi}(\omega) = \omega^2\exp(-\omega^2/2)$; offensichtlich ist (4.9) erfüllt. Im Gegensatz zum Haar-Wavelet ist der Mexikanische Hut eine C^∞-Funktion. Allgemeine Kriterien für (4.9) liefert

Lemma 4.2.

1. *Sei φ eine k-fach, $k \geq 1$ differenzierbare Funktion für die $\varphi^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ nicht identisch verschwindet. Dann ist $\Psi(x) = \varphi^{(k)}$ ein Wavelet.*

2. *Sei $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^m)(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\,dx = 0$ und $|\Psi(x)| \leq C/|x|^\beta$ für ein $\beta > 1/2$. Dann ist Ψ ein Wavelet. Speziell ist jede FUnktion $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und Mittelwert $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\,dx = 0$ ein Wavelet.*

Man fragt sich nun, warum Bedingung (4.9) an Ψ gestellt wird, vor allem wenn man einen Vergleich mit der Approximation durch Dirac-Folgen zieht. Dort haben wir

$$I_\varrho(f;x) = \frac{1}{\varrho^m}\int_{\mathbb{R}^m} f(u)\Phi\left(\frac{x-u}{\varrho}\right)du$$

betrachtet und gesehen, dass zur Approximation allein $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ für die Approximation ausreichend war. Eine Erklärung dafür geben wir in den folgenden zwei Sätzen. Sie stellen die Analoga des Plancherel-Satzes für die CWT dar (vgl. Lemma 4.1).

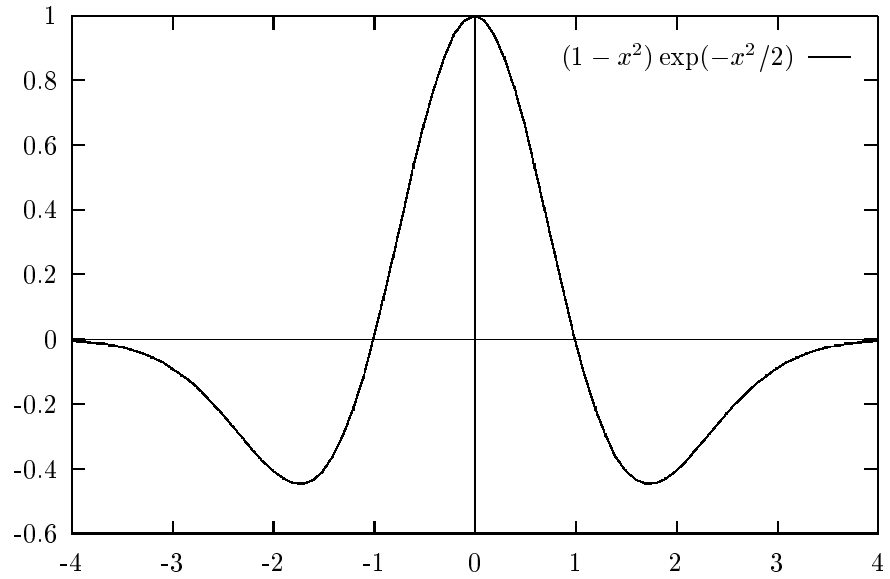


Abbildung 4.2: Mexikanischer Hut

Zuvor müssen wir die Fouriertransformierte von $(L_\Psi f(a,b))$ bezüglich b berechnen. Unter Verwendung der in Lemma 2.5 bewiesenen, punktweise geltenden Formeln für die Fourier-Transformierte einer Faltung von L_2-Funktionen folgt

$$[(L_\Psi f)(a,\cdot)]^\wedge(\omega) = \sqrt{\left|\frac{a}{C_\Psi}\right|}\hat{\Psi}(-a\omega)\hat{f}(\omega) = \sqrt{\left|\frac{a}{C_\Psi}\right|}\overline{\hat{\Psi}(a\omega)}\hat{f}(\omega). \tag{4.13}$$

Dieser Formel entnimmt man auch, dass die WT eine Filterung mit Filter $\hat{\Psi}(a\omega)$ darstellt. Damit werden die hohen Frequenzen von f für große Werte von $|a|$ stark gedämpft. Ist $\hat{\Psi}$ gut um die Frequenz ω^* (also das Zentrum) lokalisiert, so beschreibt $L_\Psi f$ gut die Frequenzen von f, die innerhalb des Fensters

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}\right]. \tag{4.14}$$

Man schließt dies aus der Darstellung

$$(L_\Psi f)(a,b) = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{a}{C_\varphi}\right|}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{ib\omega}\overline{\hat{\Psi}(a\omega)}\,d\omega. \tag{4.15}$$

die sich mit Hilfe der parsevalsche Formel ergibt. Dass $(L_\Psi f)(a,b)$ zeitliche Details der Größe a für kleine $|a|$ gut beschreibt kann man sich folgendermaßen überlegen:

Es sei f von der Form $f = \sum_j \alpha_j \chi_{I_j}$ mit Intervallen $I_j = [x_j - h/2, x_j + h/2]$, so dass $\chi_{I_j}(x) = \chi_{[-h/2,h/2]}(x + x_j)$ und $\left[\chi_{I_j}(x)\right]^\wedge(\omega) = \exp(-ix_j\omega)h/\operatorname{sinc}(h\omega/2)$. Der wesentliche Trägerbereich von $\operatorname{sinc} x$ ist $[-\pi,\pi]$ (das ist der Bereich um Null in dem die Sinc-Funktion positiv ist), so dass im Wesentlichen Frequenzen mit $|h\omega/2| \le \pi$ oder $|\omega| \le 2\pi/h$ die Details der Größe h beschreiben. Die Frequenzen von $L_\Psi f$ hängen aber nach (4.13) bei gut lokalisierten Ψ wesentlich von ω^*/a ab, so dass $L_\Psi f$ Details der Größe $h \approx 2\pi a/\omega^*$ gut beschreibt. Eine andere Begründung dafür bildet die Formel für das Zeit-Fenster:

$$[b + at^* - a\Delta_\Psi, b + at^* + a\Delta_\Psi]. \tag{4.16}$$

Satz 4.2. *Die WT ist eine wohldefinierte und (bis auf einen Skalierungsfaktor) isometrische Abbildung von $L_2(\mathbb{R})$ in $L_2\big(\mathbb{R}^2; da\,db/a^2\big)$; dabei bezeichne $da\,db/a^2$ das mit $1/a^2$ gewichtete Lebesgue-Maß.*

Beweis. Es ist $\Psi\big((t-b)/a\big) \in L_2(\mathbb{R})$, so dass die cauchy-schwarzsche Ungleichung auf (4.10) angewendet zeigt, dass

$$|(L_\Psi f)| \le \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} \|f\|_2 \left\| \Psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \right\|_2 . \tag{4.17}$$

Also ist $L_\Psi f$ eine wohldefinierte Funktion in $L_\infty\big(\mathbb{R}^2\big)$. Wir nehmen zunächst noch zusätzlich an, dass $f, g \in L_1 \cap L_2$. Dann liegen $L_\Psi f, L_\Psi g$ – als Funktionen von b betrachtet– nach dem Faltungssatz in $L_2(\mathbb{R})$. Aus der Parseval-Relation folgt dann über (4.13), dass

$$\int_{\mathbb{R}} (L_\Psi f)(a,b)\overline{(L_\Psi g)(a,b)}\,db = \frac{|a|}{2\pi\,|C_\Psi|} \int_{\mathbb{R}} \left|\hat\Psi(a\omega)\right|^2 \hat f(\omega)\overline{\hat g(\omega)}\,d\omega$$

gilt. Integration über a mit dem Maß da/a^2 ergibt dann

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}} (L_\Psi f)(a,b)\overline{(L_\Psi g)(a,b)}\,db\frac{da}{a^2} &= \frac{1}{2\pi C_\Psi} \iint\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} \left|\hat\Psi(a\omega)\right|^2 \hat f(\omega)\overline{\hat g(\omega)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi C_\Psi} \int_{\mathbb{R}} \hat f(\omega)\overline{\hat g(\omega)}\,d\omega \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a\omega|} \left|\hat\Psi(a\omega)\right|^2 d(a\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi C_\Psi} \Big(\hat f, \hat g\Big) C_\Psi = \frac{1}{2\pi}(f,g).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Anschließend approximieren wir beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ durch Folgen $\{f_n\}, \{g_n\}$ in $L_1 \cap L_2$ im L_2-Sinn. Dann gilt nach dem eben Bewiesenen

$$\|L_\Psi f_n - L_\Psi f_m\|_{L_2(\mathbb{R}^2, da\,db/a^2)} \le \|f_n - f_m\|_2 ,$$

so dass $L_\Psi f_n$ im $L_2\big(\mathbb{R}^2, da\,db/a^2\big)$-Sinn gegen ein Element f^* konvergiert. Andererseits gilt aber nach (4.17) im $L_\infty\big(\mathbb{R}^2\big)$-Sinn

$$\|L_\Psi f_n - L_\Psi f\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{\|aC_\Psi\|}} \left\| \Psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \right\|_2 \|f_n - f\|_2,$$

so dass $f^* = L_\Psi f$ gelten muss. Analog gilt $\lim_{n\to\infty} L_\Psi g_n = L_\Psi g$. Auf Grund der Stetigkeit des Skalarproduktes in $L_2\big(\mathbb{R}^2; da\,db/a^2\big)$ folgt dann (4.18) für beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. □

Bemerkung 4.2. An Stelle von (4.18) kann man auch zeigen, dass

$$\iint\limits_{\mathbb{R}} \big(f, \Psi(a,b)\big)\overline{\big(g, \Psi(a,b)\big)}\frac{da\,db}{a^2} = \frac{1}{2\pi}(f,g)C_\Psi.$$

Anhand dieser Formel sieht man dann, dass es notwendig ist die Bedingung (4.9) zu berücksichtigen. Ohne sie wäre die rechte Seite im Allgemeinen nicht endlich und die Aussage des Satzes wäre falsch. ♢

Satz 4.3. *Der zu L_Ψ adjungierte Operator ist durch die definierende Gleichung*

$$(h, L_\Psi^* g)_{L_2(\mathbb{R})} \equiv (L_\Psi h, g)_{L_2(\mathbb{R}^2, da\,db/a^2)}$$

für beliebige $h \in L_2(\mathbb{R})$ und $g \in L_2\big(\mathbb{R}^2; da\,db/a^2\big)$ gegeben. Ein solches Element $L_\Psi^* g$ existiert in $L_2(\mathbb{R})$ und ist gegeben durch die Zuordnung

$$\begin{aligned} L_2\left(\mathbb{R}^2; \frac{da\,db}{a^2}\right) &\to L_2(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto (L_\Psi^* g)(t) := \iint\limits_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) g(a,b)\, db \frac{da}{a^2} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dieser Operator invertiert die CWT L_Ψ in dem Sinne, dass

$$2\pi (L_\Psi^* L_\Psi f, h)_{L_2(\mathbb{R})} = (f,h)_{L_2(\mathbb{R})} \qquad \forall h \in L_2(\mathbb{R}) \tag{4.20}$$

für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ gilt.

Beweis. Für die Funktionen g und h mit den obigen Eigenschaften gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} (L_\Psi h, g)_{L_2(\mathbb{R}^2; db\,da/a^2)} &\equiv \iint\limits_{\mathbb{R}} (L_\Psi h)(a,b) \overline{g(a,b)}\, \frac{db\,da}{a^2} \\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} g(a,b) \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi\left(\frac{t-a}{b}\right)} h(t)\, dt\, db\, \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t) \overline{\iint\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) g(a,b)\, db\, \frac{da}{a^2}}\, dt. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Benutzt man nämlich den vorigen Satz (nach dem $(L_\Psi h)(a,b) \in L_2\big(\mathbb{R}^2; db\,da/a^2\big)$ gilt), so zeigt man mit der cauchy-schwarzschen Ungleichung, dass das Doppel-Integral in der ersten Zeile der Gleichungskette im absoluten Sinne existiert. Gilt aber (4.21) für jedes $h(t) \in L_2(\mathbb{R})$, so bedeutet dies nach dem rieszschen Darstellungssatz, dass das in (4.19) definierte Element $L_\Psi^* g$ in $L_2(\mathbb{R})$ liegen muss, so dass L_Ψ^* wohldefiniert ist. Aus der in Satz 4.1 bewiesenen Relation und der Definitions-Gleichung für L_Ψ^* folgt nun

$$(L_\Psi^* L_\Psi f, h)_{L_2(\mathbb{R})} = \overline{(h, L_\Psi^* L_\Psi f)_{L_2(\mathbb{R})}} = \overline{(L_\Psi h, L_\psi f)_{L_2(\mathbb{R}^2; db\,da/a^2)}} = \frac{1}{2\pi}(f,h)_{L_2},$$

d. h. (4.20) gilt. □

Bemerkung 4.3. Gleichung (4.20) liefert die Rekonstruktionsformel $2\pi L_\Psi^* L_\Psi = \mathbb{1}$ nur in einem schwachen Sinne, da man $2\pi L_\Psi^* L_\Psi$ zuerst mit $h \in L_2(\mathbb{R})$ multiplizieren und dann integrieren muss. Eine anschaulichere Darstellung ist wie in Fall der Fouriertransformation möglich. Man ersetze dazu $L_\Psi f$ durch

$$(L_\Psi f) \chi_{\{a \in \mathbb{R}: \epsilon \le |a| \le N\}} \chi_{\{b \in \mathbb{R}: |b| \le N\}}.$$

Dadurch werden L_2-Funktionen $f_{\epsilon,N}$ erzeugt, für die

$$\begin{aligned} \left(L_\Psi^*\left((L_\Psi f)\chi_{\{a\in\mathbb{R}:\epsilon\le|a|\le N\}}\chi_{\{b\in\mathbb{R}:|b|\le N\}}\right)\right)(t) &\equiv (L_\Psi^* f_{\epsilon,N})(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} \int_{\epsilon\le|a|\le N} \int_{|b|\le N} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)(L_\Psi f)(a,b)\, \frac{da\,db}{a^2} \end{aligned} \tag{4.22}$$

im üblichen lebesgueschen Sinne definiert ist und die – weil sie wegen

$$\|L_\Psi^* f_{\epsilon_1,N_1}, L_\Psi^* f_{\epsilon_2,N_2}\|_2 \le \|f_{\epsilon_1,N_1}, f_{\epsilon_2,N_2}\|_2$$

(für $\epsilon_i = \epsilon_i(N_i)$, $i = 1, 2$) eine Cauchyfolge bilden – für $\epsilon \to 0$ und $N \to \infty$ im L_2-Sinn gegen f konvergieren. In der Arbeit von Holschneider-Chamichian [1] (1990) wird gezeigt,dass unter gewissen zusätzlichen Bedingungen an f auch punktweisen Konvergenz in (4.22) gilt (s.Buch von Daubechies,Seite 28). ♢

Bemerkung 4.4. Eine weitere Beobachtung, die zeigt, dass man bei der Interpretation der Konvergenz in (4.22) vorsichtig sein muss, ist die Folgende:

Der Mittelwert eines Wavelets Ψ ist 0, also gilt dies (zumindest bei endlichem Integrationsbereich) auch für jede Integral-Superposition von Wavelets, d. h. für

$$\int_b bbr \int_{\epsilon \le |a| \le N} \int_{|b| \le N} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(a,b)\, \frac{da\, db}{a^2}\, dt = 0.$$

Im gleichen approximationstheoretische Sinne gilt dies auch noch bei der Anwendung von L^*_Ψ. Im Grenzfall hingegen gilt dies nicht mehr, das Integral $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$ kann dann von 0 verschieden sein! Wie kann das sein? Die Erklärung liegt darin , dass die Konvergenz in (4.22) im L_2-Sinn stattfindet. Würde die Konvergenz im L_1-Sinn stattfinden, dann würde mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgen, dass auch im Grenzfall der Mittelwert gleich 0 ist. Folglich haben wir es in diesem Beispiel mit L_2-Konvergenz aber nicht unbedingt mit L_1-Konvergenz zu tun. Ein einfacheres Beispiel für diesen Effekt ist $g_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x)/(2n)$. Diese Funktionenfolge strebt punktweise gegen 0, es gilt $\|g_n\|_2 = 1/\sqrt{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$; jedoch gilt stets $\|g_n\|_1 = 1$. ♢

4.1.3 Mehr zur kontinuierlichen WT

Eine wichtige Verallgemeinerung der Umkehrformel (4.20) ergibt sich, wenn man L^*_φ mit einem anderen Wavelet φ bildet. Man kann nämlich in Verallgemeinerung von (4.20) für f, g zeigen, dass

$$\big((f, \Psi_{a,b}), (g, \varphi_{a,b})\big)_{L_2(\mathbb{R}^2; da\, db/a^2)} = C_{\Psi,\varphi}(f,g)_{L_2}. \tag{4.23}$$

Abkürzend setzten wir hier $\sqrt{|C_\Psi|} L_\Psi f(a,b) = (f, \Psi_{a,b})$ mit

$$\Psi_{a,b}(t) := \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad C_{\varphi,\Psi} := \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat\Psi(u)}\hat\varphi(u)\frac{du}{u} < \infty.$$

Um nun (4.23) zu zeigen beachtet man, dass zunächst für glatte f, g, φ, Ψ nach (4.13) und dem Satz von Plancherel

$$\begin{aligned}
\sqrt{\|C_\varphi C_\Psi\|} \iint_{\mathbb{R}} (L_\Psi f)(a,b)(L_\varphi g)(a,b)\, db\, \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} \int_R \overline{\hat\Psi(a\omega)}\hat f(\omega)\hat\varphi(a\omega)\overline{\hat g(\omega)}\, d\omega \frac{da}{|a|} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat f(\omega)\overline{\hat g(\omega)}\, d\omega \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat\Psi(u)}\hat\varphi(u)\, \frac{du}{|u|} \\
&= (f,g)_{L_2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat\Psi(u)}\hat\varphi(u)\, \frac{du}{|u|}
\end{aligned}$$

(mit $a\omega = u$) folgt. Falls wir fordern, dass $C_{\Psi,\varphi}$ endlich ist folgt damit (4.23) (zumindest für glatte f, g, φ und Ψ). Durch die gleichen Überlegungen wie in Satz 4.2 lässt sich die Identität dann auf beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ sowie Ψ und φ, die (4.9) erfüllen, ausdehnen. Man kann (4.23) dann als allgemeine „Rekonstruktions-Formel“

$$f(t) = \frac{1}{C_{\varphi\Psi}} \iint_{\mathbb{R}} (f, \Psi_{a,b})\varphi_{a,b}(t)\, \frac{da\, db}{a^2}$$

[1] ISO-Transliteration: Čamičian, deutsche Transkription: Tschamitschian

interpretieren, die (4.20) verallgemeinert. Die obigen Bemerkungen über die Art der Konvergenz treffen auch hier zu. Das Bemerkenswerte an der Rekonstruktionsformel ist, dass sie viel mehr Möglichkeiten zur Rekonstruktion bereitstellt, da φ und Ψ verschiedene Funktionen sein können. Erfüllen φ und Ψ beide (4.9), so sieht man mit der cauchy-schwarzschen Ungleichung, dass $C_{\Psi,\varphi}$ endlich ist. Das muss aber nicht notwendigerwiese so sein ,φ und Ψ können allgemeiner gewählt werden. Bei der diskreten Wavelet-Transformation (DWT) wird hiervon bei den biorthogonalen Wavelets Gebrauch gemacht.

Das Verhalten der WT bezüglich des Parameters a kann auch zur Analyse der Regularität eines Signals benutzt werden ,wie Holschneider-Chamichian in ihrer oben zitierten Arbeit gezeigt haben.Anschaulich ist dies naheliegend:Der Parameter a kontrolliert ja, wie detailiert man eine bestimmte Stelle untersucht. Dies ist ein nützlicher Aspekt bei der Anwendung von Transformationen zur Analyse von signalen. Auch hier ist die WT der WFT überlegen, letztere liefert schwächere Ergebnisse. Genauer gesagt gilt

Lemma 4.3. *Sei $\Psi \in L_2$ mit $\hat{\Psi}(0) = 0$, das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(1 + |x|\big)\,|\Psi(x)|\,dx$$

sei endlich. Ist dann f eine beschränkte, hölderstetige Funktion, d. h. erfüllt f die Relation

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^{\alpha}$$

mit einem Exponenten $0 < \alpha \le 1$, so erfüllt die Wavelet-Transformation die Ungleichung

$$\big|\big(f, \Psi(a,b)\big)\big| \le C'|a|^{\alpha}\sqrt{|a|}$$

mit der Konstanten $C' = C\int |\Psi(u)|\,|u|^{\alpha}\,du$.

Beweis. Wegen $\int \Psi(x)\,dx = 0$ gilt

$$(f, \Psi_{a,b}) = \int_{\mathbb{R}} |a|^{-1/2}\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\big(f(x) - f(b)\big)\,dx$$

und daher

$$\begin{aligned}|(f, \Psi_{a,b})| &\le C\int_{\mathbb{R}} |a|^{-1/2}\left\|\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\|\,|x-b|^{\alpha}\,dx \\ &= C|a|^{\alpha+1/2}\int_{\mathbb{R}} |\Psi(u)|\,|u|^{\alpha}\,du = C'|a|^{\alpha}\sqrt{|a|}\end{aligned}$$

□

Das Bemerkenswerte daran ist, dass in gewissen Fällen die Umkehrung gilt:

Satz 4.4. *Die Funktion $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ habe kompakten Träger. Ist dann $f \in L_2(\mathbb{R})$ eine Funktion die*

$$|(f, \Psi_{a,b}| \le C|a|^{\alpha+1/2}$$

erfüllt, so ist f hölderstetig mit Exponent α.

Zum Beweis sei auf [Dau92], Seite 47 verwiesen.

In diese Kategorie von Aussagen gehört auch die folgende über das Approximationsverhalten der WT, wenn man $|a|$ gegen 0 gehen lässt.

Satz 4.5. *Der Mittelwert (also formal das nullte Moment) sowie die ersten $M-1$ Momente – mit Ausnahme des N-ten, $0 < N < M$ – von Ψ mögen verschwinden, d. h. es für $k < M$ gelte*

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \Psi(x)\, dx = \begin{cases} \mu, & k = N, \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Ist zusätzlich $\mu_M^* := \int_{\mathbb{R}} \left\| x^M \Psi(x) \right\|, dx$ endlich, so gilt für festes $r = 0, 1, \ldots$ und $f \in W^{r+M,2}(\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$\left\| \operatorname{sign}\left(a^N\right) \frac{C_\Psi}{|a|^{N+1/2}} (L_\Psi f)(a,b) - \frac{\mu}{N!} f^{(n)}(b) \right\|_r \leq C |a|^{M-N} \|f\|_{r+M,2}.$$

Dabei ist $C = \mu_M^* C'/M!$ und C die Äquivalenzkonstante der Sobolevnormen (vgl. Satz 2.20).

In Übereinstimmung mit der an Formel (4.15) anschließenden Diskussion werden also durch $L_\Psi f$ – bei einer gut um ihr Maximum ω_0 lokalisierten Funktion Ψ – Details der Größe $2\pi a/\omega_0$ beschrieben.Genau dieses Grenzverhalten ist jenes, welches bei der Approximation interessiert. Gleichzeitig entspricht es dem Verhalten ,das wir bei Folgen von Faltungsintegralen vom Dirac–Typ in Abschnitt 2.1 studiert haben. Es kann also nicht verwundern, dass obige Aussagen über das Grenzverhalten bei $|a| \to 0$ frappierende Ähnlichkeit mit den bereits dort gemachten aufweisen.

4.2 Multi-Resolution-Analysis (MRA)

4.2.1 Axiome einer MRA

Unter dem Namen *Multi-Resolution-Analysis,* manchmal auch *Multi-Skalen-Analyse* ist eine Reihe von Axiomen bekannt, die von S. Mallat in [Mal89] aufgestellt wurden, um einen Rahmen für die Konstruktion von Wavelets im eigentlichen Sinne zu geben.

Definition 4.3. *Unter Multi-Resolution-Analysis (im Folgenden kurz MRA) des $L_2(\mathbb{R}^m)$ versteht man eine Folge $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ von abgeschlossenen linearen Unterräumen des $L_2(\mathbb{R}^m)$, die folgende Axiome erfüllen:*

(R1) V_0 *ist ein translationsinvarianter Raum,*

(R2) V_0 *wird von einer Riesz-Basis erzeugt, d. h. es gilt*

$$V_0 = \overline{\operatorname{span}\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}}$$

und die Translate $\operatorname{span}\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *ist l_2-stabil, d. h.* $V_0 = S_2(\varphi)$,

(R3) $V_j \subseteq V_{j+1}$,

(R4) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$,

(R5) $\bigcup_{j=1}^\infty V_j$ *liegt dicht in* $L_2(\mathbb{R}^m)$.

Hierzu ist folgendes zu bemerken: S. Mallat betrachtete eine Folge $\{V_j\}_{j=-\infty}^\infty$ von solchen Unterräumen und forderte außerdem

(R6))

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

Im Hinblick auf des entscheidende Approximations-Eigenschaft in (R5) ist dies jedoch überflüssig. Man kann nämlich mit dem Grundraum V_0 und die Approximations-Eigenschaft durch die immer größer werdenden Räume V_j erreichen. Eine Fortsetzung dieser Skala durch immer kleiner werdende Unterräume bringt daher hier nichts ein. Ferner fordert S. Mallat abweichend zu (R1), dass

(R1') $f(x) \in V_j \quad \Longrightarrow \quad f\big(x - 2^{-j}l\big) \in V_j \quad \forall j, l \in \mathbb{Z}^m.$

Diese Beziehung ähnelt (R4) , denn man kann aus (R4) in Verbindung mit $V_0 = S_2(\varphi)$ ableiten , dass die Elemente von V_j gerade die in (R1') angegebene Form haben.

Anschaulich wird (R4), wenn wir annehmen, dass φ kompakten Träger hat, z. B. $\operatorname{supp}\varphi = [-1, 1]$. Dann hat $\varphi(2x)$ entsprechend den Träger $\operatorname{supp}\varphi(2x) = [-1/2, 1/2]$. Die Elemente von V_j lösen mit wachsenden j immer feinere Details auf, denn ihr Träger kann bis zu einem Faktor 2^{-j} kleiner werden. (R1) und (R4) sind der Grund für die Bezeichnung *Multi-Resolution-Analysis* oder *Multi-Skalen-Analyse.* und bilden die Basis für die Konstruktion von „diskreten" Wavelets.

In der Approximations-Theorie sind Skalen von Räumen, die die Axiome (R3) und (R5) erfüllen und ferner l_p-stabile Basen besitzen, schon seit langem bekannt und gut untersucht. Als Beispiele sind uns aus den früheren Kapiteln Spline-Räume mit sukzessiv verfeinerten Gittern oder sowie (Folgen von) Räume(n) bandbegrenzter Funktionen bekannt. Eine einfache ,aber grundlegende Folgerung aus den obigen Axiomen bildet

Lemma 4.4. *Zu φ und $V_0 = S_2(\varphi)$ gibt es eine Folge $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}^m} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^m$*

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} h_k \varphi(2x - k). \tag{4.24}$$

Beweis. Laut (R3) muss φ auch in V_1 liegen, das nach (R4) aus l_2-stabilen Translaten (bezüglich $\mathbb{Z}$) von $\varphi(2x)$ besteht. □

Gleichung (4.24) wird *Verfeinerungsgleichung* oder *Skalierungs-Gleichung für* φ genannt. Sie liefert eine Funktionalgleichung für $\varphi(x)$, falls die Koeffizienten $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vorgegeben sind. Dies ist auch der Weg, den wir später bei der Konstruktion von Wavelets einschlagen werden ; man startet mit gegebenen Koeffizienten $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, der sogenannten *Maske* und zeigt die Existenz einer Lösung φ der Verfeinerungsgleichung (4.24). Unter einer schwachen Zusatzvoraussetzung kann man dann eine MRA konstruieren. Dies zeigt

Satz 4.6. *Sei $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}^m} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ und sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ eine Funktion, die der Verfeinerungsgleichung (4.24) zu dieser Koeffizientenfolge genügt. Außerdem gelte $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\,dx = 1$ die Ungleichungen (3.16) seien erfüllt. Dann bilden die Räume*

$$V_j := \overline{\operatorname{span}\{\varphi(2^j(\cdot - 2^{-j}l))\}} \tag{4.25}$$

eine MRA des $L_2(\mathbb{R}^m)$. Insbesondere gilt

$$\hat{\varphi}(2\pi\alpha) = \delta_{0,\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^m. \tag{4.26}$$

Beweis. Wegen (3.16) erfüllt der Raum $V_0 := S_2(\varphi)$ die Axiome (R1) und (R2). Aus (4.24) und (4.25) folgen ferner (R3) und (R4), es bleibt (R5) zu beweisen. Dazu zeigen wir zunächst (4.26). Zu diesem Zweck betrachten wir die Fouriertransformation von (4.24), für die nach Lemma 2.4 gilt

$$\hat{\varphi}(v) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} h_k \mathrm{e}^{-ikv/2}\right) 2^{-d} \hat{\varphi}\Big(\frac{\varphi}{2}\Big). \tag{4.27}$$

Wir setzen nun

$$H(z) := 2^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} h_k z^k; \tag{4.28}$$

nach Voraussetzung ist $H\big(\exp(-iv)\big)$ stetig. Nach k-maliger Anwendung von (4.27) folgt dann

$$\hat{\varphi}(v) = \prod_{j=1}^{k} H\Big(\mathrm{e}^{2^{-j} iv}\Big)\hat{\varphi}\big(2^{-k}v\big). \tag{4.29}$$

Wir können hierin $|H(1)| \geq 1$ annehmen, denn andernfalls läge entweder wegen $|\hat{\varphi}(0)| < |\hat{\varphi}(0)|$ ein Widerspruch vor oder es wäre $\hat{\varphi}(0) = 0 = \int \varphi(x)\,dx$, was dann den Voraussetzungen widersprechen würde. Nun sei $\alpha \in \mathbb{Z}^m$, $\alpha \neq 0$ vorgegeben. Man wählt dann in (4.29) $v = 2\pi\alpha \cdot 2^k$ und erhält dann wegen $\exp\big(-2^{-j}iv\big) = 1$, dass

$$\big|\hat{\varphi}\big(2\pi\alpha \cdot 2^k\big)\big| = |H(1)|^k |\hat{\varphi}(2\pi\alpha)|.$$

Dies impliziert aber $|\hat{\varphi}(2\pi\alpha)| \leq \big|\hat{\varphi}\big(2\pi\alpha \cdot 2^k\big)\big|$ für alle $k = 1, 2, \ldots$, woraus nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue $|\hat{\varphi}(2\pi\alpha)| = 0$ folgen muss.

Mit Hilfe von (4.26) zeigen wir nun

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{dist}\big(f; S_2^h(\varphi)\big) = 0$$

für die in (3.3) definierten Räume $S_2^h(\varphi)$ woraus für $h = 2^{-j}$, $j \to \infty$, das MRA-Axiom (R5) folgt. Dazu approximieren wir f zunächst durch bandbegrenzte Funktionen g_N mit $\operatorname{supp} \hat{g}_N \subseteq N \cdot [-\pi, \pi]^m$. Nach der Fehlerformel (2.35) von Satz 2.12 gilt, wenn wir g_N als beste Approximation aus dieser Klasse wählen

$$\lim_{N \to \infty} \|f - g_N\|_{2,\mathbb{R}^m} = 0. \tag{4.30}$$

Anschließend berechnen wir für $h > 0$ mit Hilfe der Parsevalformel aus Satz 2.6

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(g_N; S_2^k(\varphi))_{2,\mathbb{R}^m}^2 &= \inf_{\{a_k\} \in l_2(\mathbb{R}^m)} \left\| g_N(x) - \sum_k a_k \varphi\Big(\frac{x}{h} - k\Big) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \inf_{\{a_k\} \in l_2(\mathbb{R}^m)} \left\| \hat{g}_N(u) - h^d \sum_k a_k \mathrm{e}^{-ikuh} \hat{\varphi}(uh) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \inf_{\{a_k\} \in l_2(\mathbb{R}^m)} \left\| \frac{1}{h^{d/2}} \hat{g}_N\Big(\frac{v}{h}\Big) - h^{d/2} \sum_k a_k \mathrm{e}^{-ikv} \hat{\varphi}(v) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \inf_{\tau \in L_2(\mathbb{T}^m)} \left\| \frac{1}{h^{d/2}} \hat{g}_N\Big(\frac{v}{h}\Big) - \tau(v)\hat{\varphi}(v) \right\|_2^2
\end{aligned}$$

Hierauf können wir Formel (3.20) der Orthogonalprojektion auf $S_2(\varphi)$ anwenden und wegen $\operatorname{supp} \hat{g}_N(v/h) \subseteq Nh[-\pi, \pi]^m \subseteq [-\pi, \pi]^m$ für genügend große h (nämlich $h \leq 1/N$) kann auch die vereinfachte Fehlerformel (3.24) aus Bemerkung 3.5 angewendet werden. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(g_N; S_2^h(\varphi))_{2,\mathbb{R}^m} &= \frac{1}{(2\pi h)^m} \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{g}_N(v)|^2 \left(1 - \frac{|\hat{\varphi}(v)|^2}{[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)}\right) dv \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^m} \int_{|v_j| \leq N\pi h} \Big|\hat{g}_N\Big(\frac{v}{h}\Big)\Big|^2 \Psi(v)\,dv
\end{aligned}$$

wobei

$$\Psi(v) := 1 - \frac{|\hat{\varphi}(v)|^2}{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)}.$$

Die Funktion $\Psi(v)$ ist wegen (3.16) stetig. Sie hat nach Definition von $[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)$ wegen (4.26) an der Stelle $v = 0$ einen Nulldurchgang. Daher folgt

$$\operatorname{dist}(g_N, S_2^h(\varphi))_{2,\mathbb{R}^m} \le \frac{\varepsilon}{(2\pi h)^m} \int_{|v_j|\le Nh\pi} \left|\hat{g}_N\Big(\frac{v}{h}\Big)\right|^2 = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^m} \|\hat{g}_N\|_2^2$$

sofern $Nh\pi$ genügend klein ist. Wählen wir vorher N genügend groß, so folgt zusammen mit (4.26) die gewünschte Eigenschaft (4.2.1). □

Bemerkung 4.5. Bedingung (4.26) erlaubt eine direkte Interpretation als Approximationsaussage. Zu φ definiere nämlich

$$\varphi^*(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} \varphi(x-\alpha).$$

Ist $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ wie in Satz 4.6, so konvergiert diese Reihe im L_1-Sinn und φ^* liegt ebenfalls in $L_1(\mathbb{R}^m)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(2\pi\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha x} = \int_{[0,1]^m} \varphi^*(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha x}\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^m} \varphi^*\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,dx\end{aligned}$$

Bedingung (4.26) ist äquivalent dazu, dass die 2π-periodische Funktion $\varphi^*(x/2\pi)$ gleich 1 sein muss, es gilt also

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} \varphi(x-\alpha) = 1 \quad \forall x \in [0,1]^m. \tag{4.31}$$

Aufgrund der Periodizität gilt dies im L_1-Sinn fast überall in $\mathbb{R}^m$. ♢

Bemerkung 4.6. Eigenschaft (4.31) bedeutet, dass die Translate von φ eine Zerlegung der 1 bildet. Damit kann man – allerdings mit weit größerem technischem Aufwand – zeigen, dass $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ auch dicht in $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$, liegt siehe dazu auch [JM91]. ♢

Bemerkung 4.7. Unter entsprechenden Differenzierbarkeits-Annahmen über $\hat{\varphi}(x)$ kann man über (4.26) hinaus zusätzlich zeigen, dass

$$D^\beta \hat{\varphi}(2\pi\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\} \tag{4.32}$$

gilt, wobei D^β ein beliebiger Differentialoperator der Form

$$D^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\beta_m}$$

ist. Damit kann die Strang-Fix-Theorie aus Abschnitt 3.3(geplant) angewendet werden, um eine höhere Approximations-Ordnung in h zu erreichen. ♢

Es mag überraschen, dass die Approximations-Eigenschaft (R5) für die $S_2^{2^{-j}}$ bereits unter solch geringfügigen Zusatzannahmen an φ aus der Verfeinerungsgleichung (4.24) folgt. Dazu sei aus [Don96] zitiert:

Satz 4.7. (Wiener) *Sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\boldsymbol{L}$ die Menge aller Linearkombinationen von* beliebigen *Translaten von φ. Dann liegt $\boldsymbol{L}$ genau dann dicht in $L_1(\mathbb{R}^m)$, wenn $\hat{\varphi}(v) \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ gilt. Ist $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$, so liegt der (entsprechende) Raum $\boldsymbol{L}$ genau dann dicht in $L_2(\mathbb{R}^m)$, wenn $\hat{\varphi}(v)$ höchstens auf einer Nullmenge des $\mathbb{R}^m$ verschwindet.*

Vergleicht man dies mit dem obigen Satz 4.5, so haben wir gerade die Auswahl von Translaten aus $2^{-j}\mathbb{Z}^m$, $j = 0, 1, \ldots$ getroffen, also eine dichte Teilmenge der Menge aller Translaten ausgewählt.

4.2.2 Beziehung zwischen MRA und Wavelets

Eine MRA besteht aus einer aufsteigenden Folge von translationsinvarianten Räumen $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$. In jedem dieser Räume existiert eine ONB von Translaten $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$, deren Abschluss V_j aufspannt. Die zu den Wavelets führende Idee besteht nun darin, die Schachtelung der Räume V_j (die den verschiedenen Stufen der Dilatationsskala $\{2^{-j}\}_{j=0}^{\infty}$ entsprechen) zur effektiveren Konstruktion einer ONB für den gesamten Raum $L_2(\mathbb{R}^m)$ zu benutzen. Statt in jedem Raum von neuem eine eigene ONB zu konstruieren kann man – so die Idee – die bereits bestimmte Basis von V_j zu einer Basis von V_{j+1} *ergänzen.* Diese Idee wird mathematisch präzisiert in

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{4.33}$$

wobei W_j das orthogonale Komplement in V_{j+1} von V_j ist. Man kann dies zukzessive fortführen und erhält

$$V_{j+1} = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_j = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{j} W_i \right)$$

und mit Axiom (R5)

$$L_2(\mathbb{R}^m) = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \right) \tag{4.34}$$

Für jeden Raum W_j gilt nach (R4)

$$f \in W_j \quad \Longleftrightarrow \quad f(2^{-j}\cdot) \in W_0, \tag{4.35}$$

denn ist $f(x) = g(x) + h(x)$ für $f \in V_{j+1}$ zu finden, so sei $f_1(x) := f(2^{-j}x) \in V_1$ und $f_1(x) = g_0(x) + h_0(x)$ wegen $V_1 = V_0 + W_0$. Dann folgt $f(x) = f_1(2^j x) = g_0(2^j x) + g_0(2^j x)$, so dass wegen $g_0(2^j x) \in V_j$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung $h(x) = h_0(2^j x)$ folgt.

An dieser Stelle wollen wir auf den Zusammenhang zwischen der MRA und dem Begriff der *diskreten Wavelet-Transformation (DWT)* eingehen. Dieser Begriff wird in der Literatur (speziell in [Dau92]) oft als Analogon neben den der CWT aus dem vorigen Abschnitt gestellt . Dies ist nützlich wegen der Verbindung zur gefensterten Fourier– Tranformation und deren Diskretisierungen (vergl. Ende von Abschnitt 4.1.1).

Um diese Analogie Im Falle einer MRA besser heraus zu arbeiten, erweitern wir die Skala $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ zu $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, behalten die Axiome (R1)-(R5) bei und fügen bereits oben erwähnte Axiom (R6) hinzu. Dann fordern wir die (4.33) für alle $j \in \mathbb{Z}$ und können dann (4.34) als

$$L_2(\mathbb{R}^m) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$$

schreiben.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Rest des Kapitels auf den Fall einer Variablen ($m = 1$). Dann lässt sich unter bestimmten Bedingungen –die im nächsten Abschnitt noch ausführlich untersucht werden –zeigen, dass W_0 wie V_0 eine Darstellung

$$W_0 = \overline{\operatorname{span}\{\psi(\cdot - l)\}_{l=-\infty}^{\infty}} \tag{4.36}$$

mit einer Erzeugenden $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ besitzt. Nach (4.35) gilt allgemeiner

$$W_j = \overline{\operatorname{span}\{\psi(2^j x - l)\}_{l=-\infty}^{\infty}} \tag{4.37}$$

und die obige Zerlegung des $L_2(\mathbb{R})$ impliziert dann

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{jk}(f)\psi\big(2^j x - l\big) \tag{4.38}$$

mit gewissen Koeffizienten $a_{jk}(f)$. Aus der Forderung $W_j \perp V_j$ in (4.33) folgt ferner $W_j \perp W_{j+1}$, d. h. die W_j sind zueinander orthogonal. Falls nun die Translate $\{\psi(x - l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ eine ONB bilden würden, wären die $\psi(2^{-j}x - l)$ zueinander orthogonal ,d. h.

$$\Big(\psi\big(2^j x - l\big), \psi\Big(2^{j'} x - l'\Big)\Big) = \delta_{j,j'}\delta_{l,l'} \tag{4.39}$$

und man könnte die $a_{jk}(f)$ als Fourierkoeffizienten

$$a_{jk}(f) = \big(f, \psi\big(2^j x - l\big)\big) \tag{4.40}$$

schreiben. Vergleicht man nun (4.40) mit (4.19) und (4.38) mit (4.20) aus Satz 4.2, so sieht man, dass sie diskrete Analoga zu diesen Relationen darstellen. Die Parameter b der Translation und a der Dilatation durchlaufen nun statt ganz $\mathbb{R}$ nur noch diskrete Teilmengen, und zwar nimmt

- a alle Werte aus $\{2^j | j \in \mathbb{Z}\}$ und
- b alle Werte aus $\{2^j l | j, l \in \mathbb{Z}\}$

an. Formel (4.40) entspricht also einer Zerlegung in *Wavelet-Koeffizienten* analog zur klassischen Zerlegung in Fourierkoeffizienten, (4.38) bildet eine Rekonstruktionsformel analog zur klassischen Fourierreihe. Durch diesen Zusammenhang wird auch die folgende Definition der „Wavelets“ klarer.

Definition 4.4. *Gegeben sei eine MRA mit den Räumen V_j, $j \in \mathbb{Z}$, die den Axiomen (R1) bis (R5) genügt. (Falls wir auch (R6) fordern geben wir dies explizit an). Dann heißt eine Funktion ψ des orthogonalen Komplements W_0 zu V_0 in V_1 ein* Wavelet, *falls seine Translate eine ONB für W_0 bilden.*

Bemerkung 4.8. Oft werden allgemeiner *alle* Elemente von W_0 als Wavelets bezeichnet. Wir tun dies nicht und benutzen stattdessen für ein Element von W_0 den ebenso üblichen Ausdruck *Prewavelet*, wenn dessen Tranlate nur eine Riesz-Basis bilden (auch der Begriff *semi-orthogonales Wavelet* ist gängig). ♢

Zerlegungen in orthogonale Unterräume kennt man auch in der klassischen Spektralanalysis in Hilbert-Räumen. Hier ist jedoch das entscheidende Kriterium, dass die einzelnen Unterräume durch äußerst einfache Operationen auseinander enstehen und dies zu effizienten Algorithmen zur Approximation von Funktionen führt.

Um diesen Punkt noch etwas zu illustrieren, betrachten wir die Orthogonalprojektionen $P_j : L_2(\mathbb{R}^m) \to V_j, f \mapsto P_j f$ und $Q_j : L_2(\mathbb{R}^m) \to W_j : f \mapsto Q_j f$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in (4.33) kann man

$$P_{j+1} f = P_j f + Q_j f$$

schreiben. Um die Approximation in V_{j+1} zu erhalten, muss man $P_{j+1} f$ nicht vollständig neu berechnen. Vielmehr reicht es, die gegenüber $P_j f$ neu hinzukommenden Informationen (also $Q_j f$) zu bestimmen und diese zu P_j hinzuzufügen. Dies verringert den Aufwand deutlich, denn die Berechnung von $P_{j+1} f$ würde in V_{j+1} stattfinden, die von Q_j kann auf dem Unterraum W_j durchgeführt werden. Führt man dieses Prinzip nun weiter, so erhält man offensichtlich

$$P_{j+1} f = P_0 f + \sum_{i=0}^{j} Q_i f. \tag{4.41}$$

Die in (4.33) geforderte Orthogonalität liefert ausserdem noch nach Satz 1.3 der Einleitung

$$f - P_j f \perp Q_j f$$

und daher für den Fehler in der L_2 -Norm die Zerlegung

$$\|f - P_{j+1} f\|^2 = \|f - P_0 f\|^2 + \sum_{i=0}^{j} \|Q_i f\|^2 .$$

Gilt zusätzlich noch die Orthogonalität (4.39) ,so kann man den Fehler durch die Fourier-Koeffizienten in (4.40) angeben :

$$\|f - P_{j+1} f\|^2 = \|f - P_0 f\|^2 + \sum_{i=0}^{j} |\big(f, \psi(2^i x - l)\big)|^2 \tag{4.42}$$

Anschaulich bedeutet dies folgendes:

- Man startet mit einer groben Approximation $P_0 f$. P_0 stellt dabei in aller Regel einen Tiefpassfilter dar, d. h. es werden nur die großen Strukturen erfasst.
- Dann fügt man höhere Frequenzanteile hinzu, d. h. verbessert die Approximation durch feinere Details.
- Im Grenzfall hat man es also mit einer Zerlegung des gesamten Frequenzspektrums in verschiedene Bänder zu tun. Mit anderen Worten : man betrachtet immer feiner werdende Strukturen des Signals.

Besonders durchsichtig werden die Begriffsbildungen der MRA bei der Zerlegung von bandbegrenzten Funktionen einer Variablen in Wavelets. Dies kann direkt (ohne die Verwendung der noch zu entwickelnden allgemeinen Theorie) geschehen. Wir betrachten dazu

$$\varphi(x) = sinc\ \pi x \qquad ; \hat{\varphi}(v) = \chi_W(v) \qquad , W = [-\pi, \pi] \tag{4.43}$$

Das Shannon-Abtasttheorem (Satz 2.14) liefert mit $\omega = \sigma/\pi > 0$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k/\omega) sinc\ \pi(\omega x - k), \qquad f \in B_\sigma$$

wobei $B_\sigma := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : |\hat{f}(v)| = 0, |v| \geq \sigma\}$.Speziell gilt also für $\omega = 2^n$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k2^{-n}) sinc\ \pi(2^n x - k)$$

Betrachtet man für dieses φ die MRA mit den Räumen

$$V_n = \overline{\text{span}\{\varphi(2^n x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$$

so folgt $V_n = B_{\pi 2^n}$,speziell

$$V_0 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : supp\hat{f}(v) \subseteq [-\pi, \pi]\}, \qquad V_1 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : supp\hat{f}(v) \subseteq [-2\pi, 2\pi]\}$$

Man kann dann mit der Formel (3.22) für die Orthogonalprojektion auf V_0 leicht zeigen (vgl. Abschnitt 4.3.3), dass

$$W_0 = \{g \in L_2(\mathbb{R}) : supp\hat{g}(v) \subseteq [-2\pi, -\pi] \bigcup [\pi, 2\pi]\}. \tag{4.44}$$

Es ist also W_0 die Vereinigung der beiden Frequenzbänder,die $[-\pi, \pi]$ zu $[-2\pi, 2\pi]$ ergänzen. Für beliebige j umfasst W_j die Funktionen mit Frequenzbereich in $[-2^{j+1}\pi, -2^j\pi] \bigcup [2^j\pi, 2^{j+1}\pi]$. Diese Zerlegung in Frequenzbänder motiviert anschaulich die Terminologie *Multiresolution*. Die Fourier – Transformation des erzeugenden Wavelets $\Gamma(x)$ für W_0 in (4.43) lautet dann

$$\hat{\psi}(v) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\chi_{[-2\pi, 2\pi]}(x) - \chi_{[-\pi, \pi]}(x)]. \tag{4.45}$$

Man kann mittels des Kriteriums von Satz 3.2 leicht zeigen, dass seine ganzzahligen Translate wie bei einer Wavelet-Basis gewünscht eine ONB bilden.

Ein anderes klassisches Beispiel liefert die Wahl

$$V_0 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f(x)|_{[i, i+1]} = \text{konstant}, \qquad \in \mathbb{Z}\}, \tag{4.46}$$

d.h. der Raum aller stückweise konstanten Funktionen mit ganzzahligen Sprungstellen.Als Erzeugende kann man $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ nehmen. Die Räume V_n ergeben sich dann als

$$V_n = \overline{\text{span}\{\chi_{[k/2, (k+1)/2]}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}, \tag{4.47}$$

d.h. sie bestehen aus Funktionen gleichen Typs ,jedoch mit der Gitterweite 2^{-k}.Man kann sich leicht überlegen (vergleiche mit(4.44)) ,dass

$$H(x) := \chi_{[0,1/2]}(x) - \chi_{[1/2,1]}(x) \tag{4.48}$$

senkrecht zu allen ganzzahligen Translaten von $\chi_{[0,1]}(x)$ steht und dass alle ganzzahligen Translate von $H(x)$ orthogonal zueinander sind. Ferner sieht man, dass V_0 zu V_1 komplementiert wird durrh den Raum aller Translate von $H(x)$.

Damit sind wieder die Voraussetzungen für eine Wavelet-Basis erfüllt. Das entstehende Orthogonalsystem $\overline{\text{span}\{H(2^j x - k)\}_{k,j} \in \mathbb{Z}}$ ist bereits 1910 von A.Haar konstruiert worden. Die Funktion $H(x)$ wurde in (4.12) schon als (kontinuierliches) Wavelet angegeben und ist wie in der Einleitung erwähnt das älteste Beispiel eines Wavelets.Als seine Verallgemeinerungen sind diejenigen Wavelets bzw. Prewavelets anzusehen, die aus der Wahl von Splineräumen für V_0 resultieren.

4.2.3 Charakterisierung von Wavelets

Unter der Annahme, dass die Translate von $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ eine ONB für V_0 bilden und dass φ die Lösung der Verfeinerungs– bzw. Skalierungsgleichung von Lemma 4.4 ist ,suchen wir nun nach Kriterien für die Existenz und Charakterisierung eines Wavelets ψ.Dazu verwenden wir eine solche Skalierungs-Gleichung auch für φ. Wir setzen nach Axiom (R4) an:

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \varphi(2x-k), \qquad \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z}). \tag{4.49}$$

Analog zum Symbol $H(x)$ in (4.27) definieren wir dann

$$G(x) := \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k z^k. \tag{4.50}$$

Die Aufgabe ist nun, die definierende Eigenschaften von ψ zu charakterisieren, d. h. die Eigenschaften $V_1 = V_0 \oplus W_0$, $W_0 \perp V_0$ wobei die Translate von ψ eine ONB für W_0 bilden sollen. Zunächst beweisen wir ein notwendiges Kriterium für $H(x)$.

Lemma 4.5. *Bilden die Translate von φ eine ONB für $V_0 = S_2(\varphi)$, so gilt*

$$|H(x)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, \qquad z = E^{-iv}. \tag{4.51}$$

Ferner gilt unter der Annahme $\hat\varphi(0) \neq 0$

$$H(1) = 1 \tag{4.52}$$

Beweis. Nach Lemma 3.3 folgt für die ONB von Translaten

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat\varphi(2v+2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|H\left(\mathrm{e}^{-i(v+k\pi)}\right)\hat\varphi(v+k\pi)\right|^2 \\
&= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \left|H\left(\mathrm{e}^{-i(v+k\pi)}\right)\hat\varphi(v+k\pi)\right|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \left|H\left(\mathrm{e}^{-i(v+k\pi)}\right)\hat\varphi(v+k\pi)\right|^2 \\
&= \left|H\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)\right|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat\varphi(v+2\pi j)|^2 + \left|H\left(-\mathrm{e}^{-iv}\right)\right|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat\varphi(v+\pi+2\pi j)|^2 \\
&= \left|H\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)\right|^2 + \left|H\left(-\mathrm{e}^{-iv}\right)\right|^2
\end{aligned}$$

wobei die Fouriertransformierte (4.27) der Verfeinerungs-Gleichung mit $2v$ statt v benutzt wurde. Dies liefert auch direkt (4.52). □

Bemerkung 4.9. Aussage (4.50) ist keineswegs hinreichend für eine ONB; es gibt Gegenbeispiele. Nach [Dau92] (Seite 177) wähle

$$H(x) := \frac{1}{2}\left(1+z^3\right) = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-3iv/2}\right) = \mathrm{e}^{-3iv/2}\cos\left(\frac{3v}{2}\right)$$

Aus dem Beweis von Satz 4.6 folgt

$$\hat\varphi(v) = \prod_{j=1}^{k} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\hat\varphi\left(2^{-k}v\right).$$

Nun benutzen wir die Formel

$$\prod_{j=1}^{\infty}\cos(2^{-j}x) = \lim_{J\to 0}\prod_{j=1}^{J}\frac{\sin 2^{-j+1}x}{2\sin 2^{-j}x} = \lim_{J\to\infty}\frac{\sin x}{2^J \sin 2^{-J}x} = \operatorname{sinc} x,$$

mit der

$$\hat{\varphi}(v) = \mathrm{e}^{-3iv/2} \operatorname{sinc} \frac{3v}{2}$$

folgt. Man sieht jedoch, dass dann (für $v \neq 2\pi j$)

$$\sum_l |\hat{\varphi}(v+2\pi l)|^2 = \frac{4}{9} \sin^2 \frac{3v}{2} \sum_l \frac{1}{|v+2\pi l|^2}$$

Für $v = 2\pi/3$ wird dieser Ausdruck jedoch null, so dass nach Satz 3.2 die Translate von φ keine Riesz-Basis bilden. ♢

Bemerkung 4.10. Hinreichende und notwendige Bedingungen für eine ONB sind im Vergleich zu denen von Lemma 4.5 kompliziert ,wie wir noch sehen werden. Wichtige Arbeiten dazu sind [Law91] und [Coh90]. ♢

Als nächstes drücken wir die Orthogonalität $\Psi \perp V_0$ mittels der Symbole $G(z)$ und $H(z)$ aus.

Lemma 4.6. *Die Translate von φ seien eine ONB für V_0. Genau dann gilt $\Psi \perp V_0$, wenn*

$$H(z)\overline{G(z)} + H(-z)\overline{G(-z)} = 0, \qquad z = \mathrm{e}^{-iv}. \tag{4.53}$$

Beweis. Wir benutzen diesmal das Kriterium (3.13) aus Lemma 3.3, nach dem $\Psi \perp \operatorname{span}\{\varphi(\cdot - \alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ äquivalent zu $\left[\hat{\Psi}, \hat{\varphi}\right](v) = 0$ ist. Wir berechnen also unter Verwendung der fouriertransformierten der Skalierungsgleichungen für φ und Ψ

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\varphi}, \hat{\Psi}\right](v) &= \sum_k \hat{\varphi}(v+2\pi k)\overline{\hat{\Psi}(v+2\pi k)} \\
&= \sum_k H\left(\mathrm{e}^{-iv/2-\pi k}\right)\overline{G}\left(\mathrm{e}^{-iv/2-\pi k}\right)\left|\hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}+\pi k\right)\right|^2 \\
&= \sum_{\text{k ungerade}} H\left(\mathrm{e}^{-iv/2-\pi k}\right)\overline{G}\left(\mathrm{e}^{-iv/2-\pi k}\right)\left|\hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}+\pi k\right)\right|^2 \\
&+ \sum_{\text{k gerade}} H\left(\mathrm{e}^{-iv/2-\pi k}\right)\overline{G}\left(\mathrm{e}^{-iv/2-\pi k}\right)\left|\hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}+\pi k\right)\right|^2 \\
&= H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\overline{G\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)}[\hat{\varphi},\hat{\varphi}]\left(\frac{v}{2}\right) \\
&+ H\left(-\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\overline{G\left(-\mathrm{e}^{-iv/2}\right)}[\hat{\varphi},\hat{\varphi}]\left(\frac{v}{2}+\pi\right)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.3 gilt $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v) = 1$ weil die Translate eine ONB bilden. Damit folgt

$$\left[\hat{\varphi}, \hat{\Psi}\right](v) = H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\overline{G\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)} + H\left(-\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\overline{G\left(-\mathrm{e}^{-iv/2}\right)}$$

und die Aussage des Lemmas folgt aus dem bereits erwähnten Kriterium. □

Bemerkung 4.11. Falls die Translate von φ nur eine Riesz-Basis bilden, wird die Orthogonalität von Ψ zu V_0 durch eine allgemeinere Relation beschrieben.Aus dem Beweis des obigen Lemmas folgt nämlich mit

$$\tilde{H}(v) := H\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)$$

$$\Psi \perp V_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{H}(v)\overline{G(\mathrm{e}^{-iv})} + \tilde{H}(v+\pi)\overline{G\left(\mathrm{e}^{-i(v+\pi)}\right)} = 0$$

♢

Lemma 4.6 und Bemerkung 4.2.3 liefern im Prinzip die (algebraische) Beschreibung von Pre-Wavelets, d. h. von Räumen $W_0 \subseteq V_1$, die orthogonal zu V_0 sind. Wir werden dies im nächsten Abschnitt vertiefen. Vorher wollen wir die Aussage, dass Ψ ein Wavelet (im strengen Sinne) ist, in eine äquivalente Aussage über das Symbol $G(z)$ umformulieren. Dieses Kriterium erweitert das in Lemma 4.5 angegebene.

Satz 4.8. *Die Funktion φ erfülle die Bedingungen von Satz 4.6, erzeuge also eine MRA und $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ sei Lösung einer Skalierungsgleichung mit Symbol $G(z)$. Ferner seien die Translate von φ eine ONB. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Ψ ist ein Wavelet.*
2. *Die Matrix*

$$\mathrm{X}_{\varphi,\Psi}(z) := \begin{pmatrix} H(z) & G(z) \\ H(-z) & G(-z) \end{pmatrix}, \qquad z = \mathrm{e}^{-i\omega}$$

   ist für alle ω unitär.

3. *Es gelten*

$$\begin{aligned} H(z)\overline{H(z)} + H(-z)\overline{H(-z)} &= 1, \\ G(z)\overline{G(z)} + G(-z)\overline{G(-z)} &= 1, \\ H(z)\overline{G(z)} + H(-z)\overline{G(-z)} &= 0 \end{aligned}$$

4. *Es gelten*

$$\begin{aligned} H(z)\overline{H(z)} + G(z)\overline{G(z)} &= 1, \\ H(-z)\overline{H(-z)} + G(-z)\overline{G(-z)} &= 1, \\ H(z)\overline{H(-z)} + G(z)\overline{G(-z)} &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Lemma 4.5 und Lemma 4.6 sind die drei Gleichungen in Aussage 3 notwendig dafür, dass Ψ ein Wavelet ist.Zum Beweis ihrer Hinlänglichkeit zeigen wir zunächst die Äquivalenz mit den Aussagen 3 und 4.

Dazu führt man die Vektoren $\mathbf{G} = (G_1, G_2)^T := \big(G(z), G(-z)\big)$ und $\mathbf{H} = (H_1, H_2)^T := \big(H(z), H(-z)\big)$ ein, Dann sind die drei Identitäten von Aussage 3 äquivalent zu $\|\mathbf{G}\| = \|\mathbf{H}\| = 1$ und $(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = 0$, d. h. die Matrix $(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ ist unitär wie in Aussage 2 behauptet.

Ferner kann man sich leicht überlegen, dass die Aussagen 3 und 4 äquivalent sind. Denn die Gleichungen in 3 bedeuten die Orthonormiertheit der Spaltenvektoren der Matrix in Aussage 2 und die Gleichungen in 4 die Orthonormiertheit der entsprechenden Zeilenvektoren.

Aus der letzten Gleichung in Aussage 3 folgt nun nach Lemma 4.6 ,dass Ψ und seine Translate orthogonal zu V_0 sind. Man benutzt dann die aus (4.49) folgende Identität $\hat{\Psi}(\omega) = G\big(\mathrm{e}^{i\omega}\big)\hat{\varphi}(\omega/2)$,um mit dem gleichen Beweis wie in Lemma 4.5 zu zeigen , dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{\Psi}(2\omega + 2k\pi)\right|^2 = \left|G\big(\mathrm{e}^{i\omega}\big)\right|^2 + \left|G\big(\mathrm{e}^{-i\omega}\big)\right|^2 = 1$$

aus Aussage 3 folgt ,d. h. die Translate von Ψ bilden eine ONB.

Zum Beweis der noch fehlenden Eigenschaft $V_1 = V_0 \oplus W_0$ beachten wir, dass jede Funktion $f \in V_1$ gemäß Axiom (R4) als

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varphi(2x - k), \qquad \{a_k\} \in l_2(\mathbb{Z}) \tag{4.54}$$

geschrieben werden kann.Es sei dann $g \in V_0 \oplus W_0$ die beste Approximation zu f. Nach Satz 1.3 der Einleitung gilt für den Fehler

$$\|f-g\|_2^2 = \|f\|^2 - \sum_l |(f,\varphi(\cdot - l))|^2 - \sum_l |(f,\psi(\cdot - l))|^2,$$

wobei wir benützt haben, dass die Translate von φ und Ψ bereits eine ONB bilden.Wendet man Lemma 3.4 von Unterabschnitt 3.1.2 auf die gemäß (3.11) definierten Folgen $\{c(f,\varphi)(l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ und $\{c(f,\psi)(l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ an ,sowie die im Anschluß an (3.11) berechnete Formel für $c(f,f)(0)$ mit (3.12) ,so lassen sich diese drei Terme ausdrücken durch

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 = & \quad \left\| [\hat{f},\hat{f}] \right\|_{2,[0,2\pi]}^2 \\ \sum_l |(f,\varphi(\cdot - l))|^2 = & \quad \left\| [\hat{f},\hat{\varphi}] \right\|_{2,[0,2\pi]}^2 \\ \sum_l |(f,\psi(\cdot - l))|^2 = & \quad \left\| [\hat{f},\hat{\psi}] \right\|_{2,[0,2\pi]}^2 \end{aligned}$$

Dies in den Ausdruck für den Fehler $\|f-g\|^2$ eingesetzt ergibt

$$\|f-g\|_2^2 = \left\| [\hat{f},\hat{f}] \right\|_{2,[0,2\pi]}^2 - \left\| [\hat{f},\hat{\varphi}] \right\|_{2,[0,2\pi]}^2 - \left\| [\hat{f},\hat{\psi}] \right\|_{2,[0,2\pi]}^2 . \tag{4.55}$$

Nun gilt auf Grund von (4.54)

$$\hat{f}(v) = A\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\hat{\varphi}(v/2), \qquad A(z) := \frac{1}{2}\sum_k a_k z^k$$

Damit kann man $[\hat{f},\hat{f}](v)$ wie im Beweis von Lemma 4.5 weiter umformen zu

$$[\hat{f},\hat{f}](2v) = |A\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)|^2 + |A\left(-\mathrm{e}^{-iv}\right)|^2 \tag{4.56}$$

In gleicher Weise folgen

$$\begin{aligned} [\hat{f},\hat{\varphi}](2v) = & \quad A\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)\overline{H(\mathrm{e}^{-iv})} + A\left(-\mathrm{e}^{-iv}\right)\overline{H(-\mathrm{e}^{-iv})} \\ [\hat{f},\hat{\psi}](2v) = & \quad A\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)\overline{G(\mathrm{e}^{-iv})} + A\left(-\mathrm{e}^{-iv}\right)\overline{G(-\mathrm{e}^{-iv})} \end{aligned}$$

Multipliziert man hier nun die erste Gleichung mit $H(\mathrm{e}^{-iv})$, die zweite mit $G(\mathrm{e}^{-iv})$ und addiert sie ,so liefert die zweite Gleichung in Aussage 4

$$A\left(\mathrm{e}^{-iv}\right) = [\hat{f},\hat{\varphi}](2v)H(\mathrm{e}^{-iv}) + [\hat{f},\hat{\psi}](2v)G(\mathrm{e}^{-iv}).$$

Analog folgt

$$A\left(-\mathrm{e}^{-iv}\right) = [\hat{f},\hat{\varphi}](2v)H(-\mathrm{e}^{-iv}) + [\hat{f},\hat{\psi}](2v)G(-\mathrm{e}^{-iv})$$

und weiter mit den Gleichungen von Aussage 3

$$|A\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)|^2 + |A\left(-\mathrm{e}^{-iv}\right)|^2 = |[\hat{f},\hat{\varphi}](2v)|^2 + |[\hat{f},\hat{\psi}](2v)|^2.$$

Dies setzen wir in (4.56) ein und das erhaltene Resultat weiter in (4.55).Dann folgt $\|f-g\|_2^2 = 0$ und somit die gewünschte Eigenschaft $V_1 = V_0 \oplus W_0$. □

Korollar 4.1. *Die Translate von φ seien eine ONB für V_0 und $H(z)$ sei das Symbol der Verfeinerungsgleichung mit Koeffizienten $\{h_k\} \in l_2(\mathbb{Z})$. Dann ist $\Psi \in V_1$ mit Symbol der Verfeinerungsgleichung $G(z)$ ein Wavelet genau dann, wenn*

$$G(z) = a(v)\overline{H(-z)} \qquad , z = \exp(-iv) \tag{4.57}$$

gilt ,wobei $a(v)$ eine stetige, 2π-periodische Funktion mit

$$|a(v)| = 1, \qquad a(v+\pi) = -a(v) \tag{4.58}$$

ist.

Beweis. Die erste und die letzte der drei Gleichungen unter Punkt 3 des obigen Satzes liefern für die Grössen $\alpha := \overline{H(z)}$ und $\beta := \overline{H(-z)}$ die Beziehungen

$$H(z)\alpha + H(-z)\beta = 1$$
$$G(z)\alpha + G(-z)\beta = 0$$

mit der Lösung

$$\alpha = \frac{G(-z)}{\det \mathrm{X}_{\varphi,\Psi}(-z)}.$$

Aus der Unitarität der Matrix $\mathrm{X}_{\varphi,\Psi}$ in Satz 4.7 folgt $|a(v)| := |det\mathrm{X}_{\varphi,\Psi}(exp-iv)| = 1$. Ferner gilt

$$det\mathrm{X}_{\varphi,\Psi}(-z) = H(z)G(-z) - H(-z)G(z) = -det\mathrm{X}_{\varphi,\Psi}(z),$$

d. h. $A(v+\pi) = -a(v)$. Umgekehrt folgt den letzten beiden Beziehungen

$$G(z)\overline{H(z)} + G(-z)\overline{H(-z)} = a(v+\pi)G(z)G(-z) + a(v)G(-z)G(z) = 0,$$

d. h.(4.53). Ferner gilt dann

$$|G(z)|^2 + |G(-z)|^2 = |H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1,$$

so dass die beiden Gleichungen aus (3) erfüllt sind. □

Die einfachste Wahl für $a(\omega)$, mit der (4.57 und (4.58) erfüllt sind, ist – bis auf das Vorzeichen – $a(\omega) = -\mathrm{e}^{-i\omega}$. Mit $z = \exp(-i\omega)$ ergibt dies

$$G(z) = \sum_k g_k z^k = -z\overline{\sum_l h_l(-z)^l}, \qquad g_k = (-1)^k\overline{h_{1-k}} \tag{4.59}$$

Diese spezielle Wahl hat einige Vorteile. Von theoretischer Seite betrachtet übertragen sich viele Eigenschaften der Folge $\{h_k\}$, z. B. ihre endliche Länge direkt auf die Folge $\{g_k\}$. Von der praktischen Seite her betrachtet vereinfacht sich die Implementierung.

4.2.4 Existenz von Wavelets

In den beiden vorangegangenen Unterabschnitten wurde klar, dass die Verfeinerungsgleichung den Schlüssel zur Beschreibung von Wavelets liefert.In diesem Unterabschnitt wollen wir daher die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung untersuchen.Dazu definieren wir zur Folge $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ den Operator

$$f \in L_2(\mathbb{R}) \qquad \mapsto (Tf)(x) := \sum_l h_l f(2x-l). \tag{4.60}$$

Die Fouriertransformierte dieses Operators lautet

$$\hat{Tf}(v) = \frac{1}{2}\hat{f}\Big(\frac{v}{2}\Big)\sum_l h_l \mathrm{e}^{-ivl/2} = H\Big(\mathrm{e}^{-iv/2}\Big)\hat{f}\Big(\frac{v}{2}\Big), \tag{4.61}$$

wie man sofort aus Relation (4.27) bzw q4.5 (14.10,96 entnimmt.Diese lässt sich nun als

$$\hat{\varphi}(v) = \hat{T\varphi}(v) \tag{4.62}$$

schreiben,d.h.$\hat{\varphi}$ ist Fixpunkt des Operators T. Um die Existenz einer Lösung φ zu zeigen, ist es daher naheliegend ,den Operator T iterativ anzuwenden.In Verallgemeinerung dieser schon in benutzten Idee gilt dann

$$\hat{T^n f}(v) = \prod_{j=1}^{n} H\Big(\mathrm{e}^{2^{-j}iv}\Big)\hat{f}\big(2^{-n}v\big). \tag{4.63}$$

Wir zeigen nun

Lemma 4.7. *Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ streben die Fouriertranformierten $[T^n f]^\wedge(v)$ unter der Normierungsbedingung $H(1) = 1$ gleichmäßig und absolut auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}$ gegen eine stetige Funktion $F(v)$. Sie ist gegeben durch*

$$F(v) = \prod_{j=1}^{\infty} H\Big(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\Big)\hat{f}(0)$$

und erfüllt die Gleichung

$$F(v) = H\Big(\mathrm{e}^{-iv/2}\Big)F\Big(\frac{v}{2}\Big). \tag{4.64}$$

Es gibt daher höchstens eine Funktion $\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R})$, die die Verfeinerungsgleichung (4.24) und die Normierungsbedingung $\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx = 1$ erfüllt.

Beweis. Wegen $H(1) = 1$ gelten die Ungleichungen

$$\big|H\big(\mathrm{e}^{-iv}\big) - 1\big| \le \frac{1}{2}\left|\sum_n h_n\big(\mathrm{e}^{-inv} - 1\big)\right| \le \sum_n |h_n|\left|\frac{nv}{2}\right|\operatorname{sinc}\frac{nv}{2} \le C|v|$$

sowie

$$\big|H\big(\mathrm{e}^{-iv}\big)\big| \le 1 + C|v| \le \mathrm{e}^{C|v|}$$

Für das N-te bzw. M-te Teilprodukt, $N \ge M$, folgt

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=1}^{N} H\Big(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\Big) - \prod_{j=1}^{M} H\Big(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\Big)\right| &\le \left|\prod_{j=1}^{M} H\Big(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\Big)\right|\left|1 - \prod_{j=M+1}^{N} H\Big(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\Big)\right| \\ &\le \exp\sum_{j=1}^{N-1} 2^{-j}C|v|\left|1 - \prod_{j=M+1}^{N} H\Big(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\Big)\right|\end{aligned}$$

Die Größe

$$D_{N,M} := \left|1 - \prod_{j=M+1}^{N} H\Big(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\Big)\right|$$

mit $N > M$ läßt sich nun abschätzen durch

$$\begin{aligned} D_{N,M} &\leq \left|1 - H\left(\mathrm{e}^{-2^{-M-1}iv}\right)\right| + \left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-M-1}iv}\right)\right| D_{N,M-1} \\ &\leq 2^{-M-1}C|v| + \mathrm{e}^{C|v|}D_{N,M-1}. \end{aligned}$$

Iterative Anwendung dieser Ungleichung ergibt

$$D_{N,M} \leq \mathrm{e}^{cR} \sum_{j=M+1}^{N} 2^{-j} \xrightarrow{N>M\to\infty} 0$$

für alle $|v| \leq R$. Das heißt, daß die Folge $\prod_{j=1}^{N} H\left(\exp\left(-2^{-j}iv\right)\right)$ auf jedem Kompaktum von $\mathbb{C}$ eine Cauchy-Folge bildet; hieraus folgt der erste Aussage des Lemmas.

Der zweite Teil folgt direkt aus

$$F(v) = H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right) \prod_{j=2}^{\infty} H\left(\mathrm{e}^{2^{-j}iv}\right) = F\left(\frac{v}{2}\right) H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)$$

Die Eindeutigkeit von $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ mit $\hat{\varphi} = F$ und $\hat{\varphi}(0) = 1$ ist eine direkte Folge des Satzes über die Eindeutigkeit der inversen Fourier-Transformation (Satz 2.4, Teil 3). □

Bemerkung 4.12. Dieses Lemma kann auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass $\sum_n |h_n| (1 + |n|)^{\epsilon}$ für ein $\epsilon \in (0, 1)$ gilt, bewiesen werden. Eine stärkere hinreichende Voraussetzung ist, dass die Maske $\{h_n\}$ endlichen Träger hat. ♢

Aus obigem Lemma folgt noch nicht $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$,was ja für eine MRA per Definition gefordert wird.Dazu muss die inverse Fourier-Transformation angewandt werden können.Nach der Theorie in den Abschnitten 2.1,2.2 kann das dadurch geschehen,dass entweder $\hat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$ oder $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ gezeigt wird. Ein Kriterium für letzteres gibt

Lemma 4.8. (Mallat, 1989) *Erfüllt die Maske $\{h_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ die Bedingung in Bemerkung 4.12 und das Symbol $H(z)$ die Bedingung (4.50), so liegt die Grenzfunktion F in Lemma 4.7 in $L_2(\mathbb{R})$ und $\varphi := \mathcal{F}^{-1}[F] \in L_2(\mathbb{R})$ löst die Verfeinerungsgleichung.*

Beweis. Um $F(v) \in L_2(\mathbb{R})$ zu zeigen ,setze (für $k = 0$ wird das Produkt gleich 1 gesetzt)

$$f_k(v) := \prod_{j=1}^{k} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right) \chi_{[-2^k\pi, 2^k\pi]}(v)$$

Dann strebt $f_k(v)$ nach dem vorigen gegen $F(v)$. Weiter gilt unter Ausnutzung der Eigenschaft (4.50) des Symbols $H(z)$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |f_k(v)|^2 \, dv \\ &= \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} \prod_{j=1}^{k-1} \left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\right|^2 \left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-k}iv}\right)\right|^2 \, dv \\ &= \int_{0}^{2^k\pi} \prod_{j=1}^{k-1} \left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\right|^2 \left(\left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-k}iv}\right)\right|^2 + \left|H\left(\mathrm{e}^{(-2^k v+\pi)i}\right)\right|^2\right) dv \\ &= \int_{0}^{2^k\pi} \prod_{j=1}^{k-1} \left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\right|^2 \, dv = \int_{-2^{k-1}\pi}^{2^{k-1}\pi} \left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\right|^2 \, dv = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{k-1}(v)|^2 \, dv \end{aligned}$$

Also gilt $\|f_k\|_2 = \|f_{k-1}\|_2 = \cdots = \|f_0\|_2 = 1$ und daher nach dem Lemma von Fatou

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(v)|^2 \, dv \le \limsup_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(v)|^2 \, dv = 1.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Nach dem Satz von Plancherel existiert nun $\varphi := \mathcal{F}^{-1}[F]$ in $L_2(\mathbb{R})$. Anwendung von $\mathcal{F}^{-1}$ auf beide Seiten dieser Gleichung liefert die Behauptung für φ. □

Um nun nach Satz 4.7 und Korollar 4.1 des vorigen Abschnitts Wavelets konstruieren zu können, fehlt noch der Nachweis, dass die Translate von φ aus diesem Satz eine ONB bilden, denn aus $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ folgt dies keineswegs automatisch. Zwar haben wir in Lemma 4.3 gezeigt, dass die Bedingung (4.50) an $H(z)$ – die in Lemma 4.8 vorausgesetzt war – notwendig für diese Eigenschaft ist.Jedoch ist sie keineswegs hinreichend ,wie das danach folgende Beispiel zeigte.

Um eine Idee für ein hinreichendes Kriterium zu bekommen, untersuchen wir die Folge $\{f_k\}$ aus Lemma 4.8 genauer. Dazu setzen wir $f_k(v) = \hat{\varphi}_k(v)$ und erhalten $\varphi_k \in L_2(\mathbb{R})$ durch Anwendung der Fourier-Umkehrtransformation auf $\varphi_k \in L_2(\mathbb{R})$. Die Translate dieser φ_k bilden aber ein ONS, denn mit der Parsevalformel folgt

$$\begin{aligned}
&2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(v)\varphi_k(x-n)\,dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_k(v) \mathrm{e}^{inv} \overline{\hat{\varphi}_k(v)}\,dv = \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} \mathrm{e}^{inv} |f_k(v)|^2 \, dv \\
&= \int_{2^{-k}\pi}^{2^k\pi} \mathrm{e}^{inv} \left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{-k}iv}\right)\right|^2 \left|\prod_{j=1}^{k-1} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\right|^2 dv \\
&= \int_{0}^{2^k\pi} \mathrm{e}^{inv} \left(\left|H\left(\mathrm{e}^{-2^{k}iv}\right)\right|^2 + \left|H\left(-\mathrm{e}^{-2^{k}iv}\right)\right|^2\right) \left|\prod_{j=1}^{k-1} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\right|^2 dv \\
&= \int_{0}^{2^k\pi} \mathrm{e}^{inv} \left|\prod_{j=1}^{k-1} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)\right|^2 dv = \int_{-2^{k-1}\pi}^{2^{k-1}\pi} \mathrm{e}^{inv} |f_k(v)|^2 \, dv \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi_{k-1}(x)\varphi_{k-1}(x-n)\,dx
\end{aligned}$$

Wendet man dies rekursiv an, so ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x)\varphi_k(x-n)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\varphi_0(x-n) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{[-\pi,\pi]}\right|^2 \mathrm{e}^{inv}\,dv = \delta_{0,n},$$

da wir $f_0(v) = \hat{\varphi}_0(v) = \chi_{[-\pi,\pi]}(v)$ gesetzt haben.

Die gewünschte Orthonormalität würde einfach durch Grenzübergang aus

$$\begin{aligned}
\left|\delta_{0,n} - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x-n)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_k(x)\varphi_k(x-n) - \varphi(x)\varphi(x-n)\right) dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{inv} \left(|f_k(v)|^2 - |\hat{\varphi}(v)|^2\right) dv\right| \\
&\le \left|\|f_k\|_2 - \|\hat{\varphi}\|_2\right| \le \|f_k - \hat{\varphi}\|
\end{aligned}$$

folgen, wenn wir zusätzlich zu Lemma 4.8 zeigen könnten, dass die Folge $\{f_k\}$ auch im L_2-Sinne gegen $\hat{\varphi}$ strebt. Das einfachste Kriterium dafür ist (Mallat, 1989)

$$\inf_{|v|\le\pi/2} \left|H\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)\right| =: q > 0. \tag{4.65}$$

Dann wähle j_0 derart, dass $2^{-j_0}|v| \le \delta$ für $|v| \le \pi/2$ gilt und δ_0 dabei so klein ist, dass $|\hat\varphi(\omega)| \ge 1/2$ für $|\omega| \le \delta$ ist. Dies ist möglich, weil $\hat\varphi(0) = 1$ und $\hat\varphi$ nach Lemma 4.7 in jedem kompakten Intervall stetig ist. Dann schreibe für jedes $k \ge 1$

$$\begin{aligned}\chi_{[-2^k\pi,2^k\pi]}(v)\hat\varphi(v) &= \prod_{j=1}^{k+j_0} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-k-j}iv}\right)\hat\varphi\left(2^{-k-j_0}v\right)\chi_{[-2^k\pi,2^k\pi]}(v)\\ &= f_k(v)\prod_{j=1}^{j_0} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-k-j}iv}\right)\hat\varphi\left(2^{-k-j_0}v\right)\end{aligned}$$

und schätze damit auf $\left[-2^k\pi, 2^k\pi\right]$ ab:

$$|f_k(v)| \le \frac{|\hat\varphi(v)|}{q^{j_0}\,|\hat\varphi(2^{-k-j_0}v)|} \le \frac{2}{q^{j_0}}\,|\hat\varphi(v)| \equiv C\,|\hat\varphi(v)|$$

Daher besitzt $\left|\hat f_k(v)\right|^2$ eine L_1-Majorante $C^2\,|\hat\varphi(v)|^2$ und der Satz von der majorisierten Konvergenz ist anwendbar. Das bewiesene formulieren wir in

Satz 4.9. (Mallat, 1989) *Erfüllt das Symbol $H(x)$) von φ außer den Voraussetzungen von Lemma 4.8 noch das Kriterium (4.64) von Mallat, so bilden die Translate der Funktion φ eine ONB.*

Es gibt Untersuchungen von A. Cohen (Dissertation, 1990) und W. Lawton (ebenfalls 1990) über exakte Kriterien für die Orthonormalität der Translate von φ. Da das Kriterium von Lawton anschaulicher und einfacher ist, sei es hier vorgestellt.

Satz 4.10. (Lawton, 1990) *Es sei $H(x) = \left(\sum_{n=0}^N h_n z^n\right)/2$, $z = \exp(-iv)$, das Symbol einer Verfeinerungsgleichung, das (4.50) erfüllt und sei $\varphi(v)$ die Limesfunktion nach Satz 4.10.*

1. *Es sei dann $A = (A_{lk})$ die $(2N-1 \times 2N-1)$-Matrix mit den Einträgen*

$$A_{lk} := \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} h_n\overline{h_{k-2l+n}}, \qquad -N+1 \le l,k \le N-1$$

   wobei h_i für $h \notin \{0,1,\ldots,N\}$ formal zu 0 gesetzt wird.Hinreichend dafür, dass die Translate von φ eine ONB ist , dass zum Eigenwert 1 von A nur ein eindimensionaler Eigenraum existiert.

2. *Hinreichend für Bedingung 1 ist, dass der für $f \in C_{2\pi}$ durch*

$$(P_0 f)(v) := \left|H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\right|^2 f\left(\frac{v}{2}\right) + \left|H\left(-\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\right|^2 f\left(\frac{v}{2}+\pi\right)$$

   definierte Operator P_0 als einziges invariantes *Polynom $t(v)$ nur das Polynom $t(v) = 1$ besitzt, d. h. aus $P_0 t = t$ folgt notwendig $t \equiv 1$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass 1 immer ein Eigenwert von A ist. Dazu sei $\boldsymbol\beta = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ mit der 1 in der Mitte. Dann folgt

$$(A\boldsymbol\beta)_l = \sum_k A_{lk}\delta_{k,0} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} h_n\overline{h_{n-2l}} = \delta_{l,0} = \beta_l,$$

denn mit $z = \exp(-iv/2)$ folgt

$$4 = \left|\sum h_n z^n\right|^2 + \left|\sum h_n (-z)^n\right|^2 = \sum_{n,l} h_n \overline{h_l} z^{n-l} + \sum_{n,l} h_n \overline{h_l} (-z)^{n-l}$$
$$= \sum_j \left(\sum_n h_n \overline{h_{n-j}}\right) z^j + \sum_j \left(\sum_n h_n \overline{h_{n-j}}\right) (-z)^j = 2 \sum_j \left(\sum_n h_n \overline{h_{n-2j}}\right) z^{2j},$$

so dass

$$1 = \sum_j \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-ijv} \sum_n h_n \overline{n_{n-2j}}.$$

Also ist $\boldsymbol{\beta}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Andererseits betrachte den Vektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{-N+1}, \ldots, \alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})$ mit $\alpha_l := \int \varphi(x) \overline{\varphi(x-l)}\, dx$. Für diesen gilt aufgrund der Verfeinerungsgleichung ($2x - n = u$)

$$\alpha_l = \sum_{n,m=0}^{N} h_n \overline{h_m} \int \varphi(2x-n) \overline{\varphi(2x-2l-m)}\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^{N} h_n \overline{h_m} \alpha_{2l+m-n}$$
$$= \sum_{k=-N+1}^{N-1} \frac{\alpha_k}{2} \sum_{n=0}^{N} h_n \overline{h_{k-2l+n}}$$

Also gilt auch $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$ und nach Voraussetzung muss $\boldsymbol{\alpha} = \gamma\boldsymbol{\beta}$ mit $\gamma \in \mathbb{C}$ gelten. Dann folgt aber mit den Umformungen wie in Abschnitt 3.1.2

$$\gamma \delta_{0,l} = \alpha_l = \int \varphi(x) \overline{\varphi(x-l)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{ilv} \sum_k |\hat{\varphi}(2\pi k + v)|^2\, dv,$$

so dass $\sum_k |\hat{\varphi}(v + 2\pi k)|^2 = \gamma$ gelten muss. In Satz 4.5 haben wir aber gesehen, dass die Normierung $\int \varphi(x)\, dx = 1$ und die Verfeinerungsgleichung $\hat{\varphi}(2\pi k) = \delta_{0,k}$ implizieren, so dass schließlich $\gamma = 1$ und die gewünschte Orthogonalität folgt.

Zu 2. Wie schon beutzt gilt

$$\left|H(z)\right|^2 = \frac{1}{4} \sum_j \sum_n h_n \overline{h_{n-j}} z^j$$

mit $z = \exp(-iv/2)$ und daher für alle trigonometrischen Polynome

$$f(v) = \sum f_k \exp(-ikv)$$

$$\left|H(z)\right|^2 f\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1}{4} \sum_l z^l \sum_{k,n} h_n \overline{h_{n-k}} f_{l-k}$$

Nach Definition von P_0 folgt damit

$$(P_0 f)(v) = \frac{1}{2} \sum_l \mathrm{e}^{-ivl} \sum_{k,n} h_n \overline{h_{n-k}} f_{2l-k}$$

Für die Fourierkoeffizienten diese trigonometrischen Polynoms ergibt sich also

$$(P_0 f)_l = \frac{1}{2} \sum_{k,n} h_n \overline{n_{n-k}} f_{2l-k} = \frac{1}{2} \sum_m f_m \sum_n h_n \overline{h_{n-2l+m}}$$

Invarianz von f unter P_0 bedeutet nun, dass $(P_0 f)_l = f_l$ gilt, ist also äquivalent dazu, dass die Koeffizientenfolge $\{f_l\}$ Eigenvektor der Matrix A in 2 ist. Laut Voraussetzung ist aber die Koeffizientenfolge von $f(v) \equiv 1$ die einzige für die dies überhaupt gilt. Daher ist $\boldsymbol{\beta}$ aus 1 der einzige Eigenvektor zum Eigenwert 1. □

Ein allgemeiner (positiver) Effekt des Kriteriums von Lawton ist, dass es die Orthonormalität der Translate φ für „fast alle Symbole $H(z)$“ mit der Eigenschaft (4.50) liefert. Das soll heißen, dass die Entartung des Eigenwerts 1 der Matrix ein Ausnahmefall ist, der nur unter zusätzlichen Voraussetzungen auftritt.

Das Kriterium von Lawton steht zunächst isoliert da und es ist nicht klar, ob es notwendig ist. Das Bindeglied dazu liefert folgendes Ergebnis aus der Dissertation von A.Cohen:

Satz 4.11. (A.Cohen, 1990) *Es seien die Voraussetzungen von Satz ?? erfüllt. Dann bilden die Translate von φ ein ONS genau dann, wenn gilt:*

1. *Es existiert eine kompakte Menge K, die kongruent modulo 2π zu $[-\pi,\pi]$ ist, d. h. das Maß von K sei 2π und zu jedem $\xi \in [-\pi,\pi]$ existiert ein $l \in \mathbb{Z}$, so dass $\xi + 2\pi l \in K$.*

2. *Es existiert ein Umgebung um 0, so dass*

$$\inf_{k>0} \inf_{\xi\in K} \left| H\left(\mathrm{e}^{-2^{-k} iv}\right)\right| > 0$$

Lawton und Cohen konnten kurz danach die Äquivalenz dieses Kriteriums zu dem obigen von Lawton zeigen (eine ausführliche Darstellung dieser Dinge ist in [Dau92], Seiten 192f, zu finden).

Es ist evident, dass Teil 2 dieses Satezes eine schwächere Bedingung als das mallatsche Kriterium ist. Cohen konnte sogar zeigen, dass es für 2 hinreichend ist, dass $\left|H\left(\exp(-iv)\right)\right|$ in $[-\pi/3,\pi/3]$ keine Nullstelle hat (das mallatsche Kriterium fordert dies für $[-\pi/2,\pi/2]$). Bezüglich der Einzelheiten zu obigem Satz sei wieder auf [Dau92], S.182-187 verwiesen.

4.3 Konstruktion spezieller Wavelets

4.3.1 Charakterisierung von Pre-Wavelets

Ist eine Funktion φ gegeben, die einen translationsinvarianten Raum $V_0 = S_2(\varphi) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ erzeugt und deren Translate von φ eine Riesz-Basis bilden ,so kann man auf Grund der bisherigen Überlegungen zur Berechnung von Wavelets wie folgt vorgehen:

- Bilde aus den Translaten durch den Übergang $\varphi_{\mathrm{ortho}} = \tilde{\varphi}$,

$$[\tilde{\varphi}]^{\wedge}(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\sqrt{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](\omega)}}$$

  eine ONB. Eine Möglichkeit zur Konstruktion von $\tilde{\varphi}$ besteht darin, $\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \varphi(x-k)$ anzusetzen und die b_k nach Korollar 3.1 mit Hilfe der z-Transformation aus der Laurent-Entwicklung von

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k = \frac{1}{\sum_j \overline{c(\varphi,\varphi)(j)} z^j}, \qquad c(\varphi,\varphi)(j) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(x-j)}\,dx$$

  Eine Alternative stellt das gram-schmidtsche Orthonormalisierung-Verfahren dar (siehe dazu [Mey92]).

- Berechne das Mutterwavelet (engl.: mother wavelet) Ψ gemäß Korollar und untersuche ob es wünschenswerte Eigenschaften (Glattheit, kompakter Träger, gutes Approximationsverhalten, ...) hat.

Bei konkret vorgegebenen Beispielen von φ hat dieses Vorgehen den Nachteil, dass der notwendige Übergang zu $\varphi_{\mathrm{ortho}} = \tilde{\varphi}$ zu aufwendig ist oder zu komplizierte Basen liefert. So geht z. B. bei Splines der kompakte Träger verloren.

Dies hat zur Idee der sogenannten *Prewavelets* ψ geführt (siehe Bemerkung 4.8).Bei diesen wird außer $\psi \perp V_0$ nur verlangt, dass die Translate von φ eine Riesz-Basis bilden. Genau gesagt hat man dazu folgende drei Schritte durchzuführen :

1. Konstruiere ein Element ψ, das orthogonal zu V_0 ist.
2. Bilde den Raum $W_0 = \overline{\operatorname{span}\{\psi(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}}$ und zeige, dass die Translate von ψ eine Riesz-Basis bilden.
3. Zeige, dass $V_1 = V_0 \oplus W_0$ gilt.

Wir beginnen mit zwei hinreichenden Kriterien für die Existenz einer Riesz-Basis, die das meyersche Kriterium (Satz 3.2) ergänzen und zur Untersuchung des zweiten Punktes dienen:

Lemma 4.9. *Die Translate von $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ bilde eine Riesz-Basis. Dann bilden die Translate von $\tilde{\varphi} \in L_2(\mathbb{R})$ eine Riesz-Basis wenn mindestens eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:*

1. *Man kann $\tilde{\varphi}(x)$ als eine Linearkombination $\tilde{\varphi}(x) = \sum_l a_l \varphi(x-l)$ mit Koeffizientenfolge $\{a_l\} \in l_1(\mathbb{Z})$ darstellen und die Funktion $A(z) := \sum_l a_l z^l$ verschwindet auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nicht.*
2. *Man kann $\tilde{\varphi}(x)$ als eine Linearkombination $\tilde{\varphi}(x) = \sum_l b_l \varphi(2x-l)$ mit einer Koeffizientenfolge $\{b_l\} \in l_1(\mathbb{Z})$ darstellen und die Funktion $B(z) := \sum_l b_l z^l$ hat die Eigenschaft, daß nicht z und $-z$ zugleich Nullstellen sein können.*

Beweis. Es gilt $\hat{\tilde{\varphi}}(v) = \hat{\varphi}(v) \sum_l a_l \mathrm{e}^{-ilv} = a(v)\hat{\varphi}(v)$ und weiter

$$\left[\hat{\tilde{\varphi}}, \hat{\tilde{\varphi}}\right](v) = |a(v)|^2 \, [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v).$$

Nach Voraussetzung gilt aber $C_1 \le |a(v)|^2 \le C_2$ mit Konstanten C_1, C_2 und Teil 1 folgt aus dem meyerschen Kriterium aus Satz 3.2.

Zum Beweis des zweiten Teils beachte man $[\tilde{\varphi}]^{\wedge}(v) = B(z)\hat{\varphi}(v/2)$ mit $z = \exp(-iv/2)$ und

$$\begin{aligned}\left[\hat{\tilde{\varphi}}, \hat{\tilde{\varphi}}\right](v) &= \sum_l \left|B\left(\mathrm{e}^{-i(v+2\pi l)/2}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}+\pi l\right)\right|^2 \\ &= \sum_k \left|\hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}+2\pi k\right)\right|^2 |B(z)|^2 + \sum_k \left|\hat{\varphi}\left(\frac{v}{2}+\pi+2\pi k\right)\right|^2 |B(-z)|^2\end{aligned}$$

Mit dem meyerschen Kriterium folgt aber

$$C\left[|B(z)|^2 + |B(-z)|^2\right] \le \left[\hat{\tilde{\varphi}}, \hat{\tilde{\varphi}}\right](v) \le D \max_{|z|=1} |B(z)| \le D \, \|\{b_l\}\|_{l_1(\mathbb{Z})}$$

wobei C und D die Stabilitätsschranken von φ sind. Hieraus ergeben sich jene für $\tilde{\varphi}$. □

Ein Weg zur Lösung des Konstruktionsproblems 1 wurde bereits durch Bemerkung 4.12 angedeutet. Wir geben hier noch eine genauere Charakterisierung an, die diejenige von Korollar 4.1 verallgemeinert und erweitern dazu den Zugang in Abschnitt 4.2. Die wesentliche Idee besteht darin , dass die Charakterisierung (3.14) der Orthogonalität der Translate der Erzeugenden φ , die wesentlich in den Beweis der Lemmas 4.5 und 4.6 einging ,ersetzt wird durch eine Charakterisierung der Biorthogonalität der Riesz–Basis $\{\psi(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ zu ihrer dualen Basis .Diese ist ist erklärt durch

Definition 4.5. (Duale Basis, biorthogonale Basis) *Die Translate von $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ seien eine Riesz-Basis für V_0. Dann heißt $\tilde{\varphi} \in V_0$* dual zu φ*, bzw. die Translate von $\tilde{\varphi}$ eine* duale Basis

$$(\varphi(\cdot - l), \tilde{\varphi}(\cdot - j)) = \delta_{j,l}$$

für alle $j, l \in \mathbb{Z}$ gilt. Man bezeichnet die Translate von $\tilde{\varphi}$ auch als biorthogonale Basis.

Bemerkung 4.13. Aus der angegebenen Relation für die Biorthogonalität folgt sofort die lineare Unabhängigkeit der Translate von $\tilde{\varphi}$, sowie $g = 0$ für jedes Elementin V_0 ,dass orthogonal zu den Translaten von $\tilde{\varphi}$ ist.Das bedeutet, dass diese eine Basis für V_0 bilden. ♢

Lemma 4.10. *Es gelten die folgenden Aussagen :*

1. *Die Tranlate von $\tilde{\varphi}$ erfüllen obige Biorthogonalitäts-Relation dann und nur dann, wenn $\left[\hat{\tilde{\varphi}}, \hat{\varphi}\right] = 1$ auf $[-\pi, \pi]$ gilt. Dann folgt die Darstellung*

$$\hat{\tilde{\varphi}}(v) = \frac{\hat{\varphi}(v)}{[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v)}.$$

2. *Erfüllt $\tilde{\varphi}$ außerdem die Verfeinerungsgleichung*

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(x - k)$$

mit dem Symbol

$$\tilde{H}(z) := \frac{1}{2} \sum_k \tilde{h}_k z^k,$$

so gilt

$$H(z)\overline{\tilde{H}(z)} + H(-z)\overline{\tilde{H}(-z)} = 1, \qquad z = \mathrm{e}^{-iv/2}.$$

3. *Ist $\psi \in V_1$ mit Symbol $G(z)$ gegeben, d. h. es gilt die Verfeinerungsgleichung (4.48) , so ist ψ orthogonal zu V_0 genau dann,wenn gilt*

$$G(z)\overline{\tilde{H}(z)} + G(-z)\overline{\tilde{H}(-z)} = 0, \qquad z = \mathrm{e}^{-iv/2}.$$

Beweis. Es gilt (mit dem schon früher benutztem Argument)

$$\begin{aligned}(\varphi, \tilde{\varphi}(\cdot - n)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(v)\overline{\hat{\tilde{\varphi}}(v)}\mathrm{e}^{inv}\, dv = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi k + 2\pi} \hat{\varphi}(v)\overline{\hat{\tilde{\varphi}}(v)}\mathrm{e}^{inv}\, dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\hat{\varphi}, \hat{\tilde{\varphi}}\right](v)\mathrm{e}^{inv}\, dv,\end{aligned}$$

d. h. die Biorthogonalität ist äquivalent zu $\left[\hat{\varphi}, \hat{\tilde{\varphi}}\right] = 1$ auf $[-\pi, \pi]$.

Dann beachte, dass

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_l a_l \varphi(x - l), \qquad \hat{\tilde{\varphi}}(v) = \hat{\varphi}(v) \sum_l a_l \mathrm{e}^{-ivl}$$

mit $a(v) := \sum_l a_l \mathrm{e}^{-ilv} \in L_2([-\pi,\pi])$ gilt. Einsetzen in $\left[\hat{\tilde{\varphi}},\hat{\varphi}\right](v) = 1$ ergibt die angegebene Charakterisierung von $\tilde{\varphi} \in V_0$:

$$1 = a(v)[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v), \qquad \hat{\tilde{\varphi}}(v) = \frac{\hat{\varphi}(v)}{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)}.$$

Weiter gilt dann mit $z = \exp(-iv/2)$

$$\begin{aligned}
\delta_{0,n} = (\varphi, \tilde{\varphi}(\cdot - n)) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(z)\overline{\tilde{H}(z)}\hat{\varphi}\Big(\frac{v}{2}\Big)\overline{\hat{\tilde{\varphi}}\Big(\frac{v}{2}\Big)}\mathrm{e}^{-inv}\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} H(z)\overline{\tilde{H}(z)}\hat{\varphi}\Big(\frac{v}{2}+2\pi k\Big)\hat{\tilde{\varphi}}\Big(\frac{v}{2}+2\pi k\Big)\mathrm{e}^{-inv}\,dv \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} H(-z)\overline{\tilde{H}(-z)}\hat{\varphi}\Big(\frac{v}{2}+\pi+2\pi k\Big)\hat{\tilde{\varphi}}\Big(\frac{v}{2}+\pi+2\pi k\Big)\mathrm{e}^{-inv}\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[H(z)\overline{\tilde{H}(z)} + H(-z)\overline{\tilde{H}(-z)}\mathrm{e}^{-inv}\,dv\Big]
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit Lemma 3.3 das angegebene Kriterium für die Biorthogonalität ,d.h. Teil 2.

Analog folgt Teil 3 durch

$$(\psi, \tilde{\varphi}(\cdot - n)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[G(z)\overline{\tilde{H}}(z) + G(-z)\overline{\tilde{H}}(-z)\Big]\mathrm{e}^{-inv}\,dv$$

Nach Bemerkung 4.13 wird V_0 von den Translaten von $\tilde{\varphi}$ erzeugt und obiges Kriterium für $\psi \perp V_0$ folgt. □

Wir lösen nun zunächst die beiden Gleichungen dieses Lemmas nach $\overline{\tilde{H}(z)}$ und $\overline{\tilde{H}(-z)}$ auf. In der Schreibweise des vorigen Abschnitts gilt

$$\begin{pmatrix} H(z) & H(-z) \\ G(z) & G(-z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\tilde{H}(z)} \\ \overline{\tilde{H}(-z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die cramersche Regel ergibt dann (zunächst formal)

$$\overline{\tilde{H}(z)} = \frac{G(-z)}{H(z)G(-z) - H(-z)G(z)} = \frac{G(-z)}{D(z)}. \tag{4.66}$$

Nun kann man zeigen, dass die Determinante $D(z)$ für $|z| = 1$ keine Nullstelle hat. Andernfalls gäbe es $\alpha \neq 0$ mit $(G_1, G_2)^{\mathrm{T}} = \alpha(H_1, H_2)^{\mathrm{T}}$, so dass

$$0 = \overline{H(z)}G(z) + \overline{H(-z)}G(-z) = \alpha\Big(|H(z)|^2 + |H(-z)|^2\Big).$$

gelten würde. Dies steht aber im Widerspruch zu Lemma 4.5.

Daher kann $1/D(z)$ in eine Laurent-Reihe auf einem (geeignet dünnen) Kreisring um $|z| = 1$ entwickelt werden. Beachtet man ferner $D(-z) = -D(z)$, so folgt

$$D(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(d_{2l}z^{2l} + d_{2l+1}z^{2l+1}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(-d_{2l}z^{2l} + d_{2l+1}z^{2l+1}\right)$$

und daher

$$D(z) = z\sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{2l+1}z^{2l} \equiv -zK\left(z^2\right)$$

wobei $K(z)$ eine konvergente Laurent-Reihenentwicklung in einem dünnen Kreisring um $|z| = 1$ besitzt und daher die Koeffizienten in $l_1(\mathbb{Z})$ liegen müssen.

Löst man nun (4.66) nach $G(-z)$ auf und ersetzt dann $-z$ durch z, so folgt die Charakterisierung

$$G(z) = zK\big(z^2\big)\overline{\tilde{H}(-z)}.$$

Jetzt müssen wir noch das Symbol $\tilde{H}(z)$ mit Hilfe von H ausdrücken. Dazu benutzt man die Formel für $\tilde{\varphi}$ aus dem eben bewiesenen Lemma. Mit $z = \exp(iv/2)$ folgt

$$\tilde{H}(z) = \frac{\hat{\tilde{\varphi}}(v)}{\hat{\varphi}(v/2)} = \frac{\hat{\varphi}(v)}{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)} \frac{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v/2)}{\hat{\varphi}(v/2)} = H(z)\frac{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v/2)}{[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](v)}$$

Unter Verwendung der in Korollar 3.1 hergestellten Beziehung mit dem Symbol $F(\varphi,\varphi)(z)$ erhält man damit

$$\tilde{H}(-z) = H(-z)\frac{F(\hat{\varphi},\hat{\varphi})(-z)}{F(\hat{\varphi},\hat{\varphi})(z^2)}$$

Dies setzen wir in obige Gleichung für $G(z)$ ein und beachten ,dass $F(\hat{\varphi},\hat{\varphi})(z)$ nach Satz 3.2 die gleichen Eigenschaften wie $K(z)$ besitzt ,da die Translate von φ eine Riesz-Basis bilden sollen. Damit erhalten wir die angestrebte Charakterisierung des orthogonalen Komplements W_0 von V_0 in V_1 als Verallgemeinerung von Korollar 4.1 auf den Fall von Prewavelets.

Satz 4.12. *Die Translate von φ seien eine Riesz-Basis von V_0 .Dann ist $\psi \in V_1$ orthogonal zu V_0 genau dann , wenn mit $z = \exp(-iv/2)$ gilt*

$$G(z) = zK\big(z^2\big)\overline{H(-z)}F(\hat{\varphi},\hat{\varphi})(-z). \tag{4.67}$$

Dabei ist die Funktion $F(\hat{\varphi},\hat{\varphi})(-z)$ wie in Korollar 3.1 erklärt und $K\big(z^2\big)$ eine beliebige Funktion mit konvergenter Laurent-Entwicklung in einem Kreisring um $|z| = 1$, die keine Nullstelle auf $|z| = 1$ besitzt.

Zur Lösung von Punkt 3 (also der Aufgabe für $V_1 = V_0 \oplus W_0$ zu sorgen) ist ein vorbereitendes Lemma notwendig.

Lemma 4.11. *Sei $V \subseteq L_2(\mathbb{R})$ ein Raum, der eine l_2-stabile Basis aus Translaten der Erzeugenden $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(\mathbb{R})$ besitzt, sei also jedes $f \in V$ darstellbar als*

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(1)}\varphi_1(x-l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(2)}\varphi_2(x-l)$$

und die Normen $\|f\|_2$ und $\left|\left\{c_l^{(1)}\right\}\right|_2 + \left|\left\{c_l^{(2)}\right\}\right|_2$ seien äquivalent. Seien ferner ψ_1 und ψ_2 Funktionen aus V der Form

$$\psi_j(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^{(j,1)}\varphi_1(x-l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^{(j,2)}\varphi_2(x-l), \qquad j = 1,2$$

mit Folgen $\left\{a_l^{(j,k)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$, $j,k = 1,2$. Dann bilden die Translate von ψ_1 und ψ_2 eine l_2-stabile Basis von V sofern die Determinante von

$$A(z) := \begin{vmatrix} a_{1,1}(z) & a_{1,2}(z) \\ a_{2,1}(z) & a_{2,2}(z) \end{vmatrix}, \qquad a_{j,k}(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^{(j,k)} z^l$$

für alle $|z| = 1$ nicht verschwindet.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert $A^{-1}(z)$ mit den Elementen $b_{j,k}(z)$. Diese haben nach der cramerschen Regel die Form

$$b_{j,k}(z) = \frac{\tilde{a}_{j,k}(z)}{\det A(z)}, \qquad \tilde{a}_{j,k}(z) = \begin{cases} a_{3-j,3-k}(z), & j = k, \\ -a_{j,k}(z), & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $\det A(z)$ verschwindet nicht auf dem Einheitskreis. Nun ist $\det A(z)$ holomorph und daher auch $1/\det A(z)$ holomorph in einer gewissen Umgebung des Einheitskreises. Somit gilt die Laurent-Entwicklung

$$\frac{1}{\det A(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_l z^l, \qquad \{\gamma_l\}_{l\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z}).$$

Dann kann man leicht einsehen, dass für die $b_{j,k}(z)$ ebenfalls eine Laurent-Entwicklung mit Koeffizienten $\left\{b_l^{(j,k)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ gilt.

Nun beachte man, dass sich für die Fourierkoeffizienten der ψ_j

$$\hat{\psi}_j(v) = a_{j,1}\big(\mathrm{e}^{-iv}\big)\hat{\varphi}_1(v) + a_{j,2}\big(\mathrm{e}^{-iv}\big)\hat{\varphi}_2(v)$$

ergibt. Dieses Gleichungssystem können wir nach $\hat{\varphi}_1$ und $\hat{\varphi}_2$ auflösen und erhalten nach der cramerschen Regel (bzw. mit den obigen Formeln für $b_{j,k}(z)$) die Relationen

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(v) &= \frac{1}{A(z)}\Big(a_{22}(z)\hat{\psi}_1(v) - a_{12}(z)\hat{\psi}_2(v)\Big), \\ \hat{\varphi}_2(v) &= \frac{1}{A(z)}\Big(-a_{21}(z)\hat{\psi}_1(v) + a_{11}(z)\hat{\psi}_2(v)\Big), \end{aligned}$$

mit $z = \exp(-iv)$. Die Fourier-Rücktransformation zeigt daher, dass φ_1 und φ_2 Linearkombinationen von Translaten von ψ_1 und ψ_2 mit Koeffizientenin $l_1(\mathbb{Z})$ sind. Jedes Element f von V hat daher die Form

$$\begin{aligned} f &= \sum_l c_l^{(1)}\varphi_1(\cdot - l) + \sum_l c_2^{(1)}\varphi_2(\cdot - l) \\ &= \sum_l c_l^{(1)} \sum_{k=1}^{2}\sum_i b_i^{(1,k)}\psi_k(\cdot - i - l) + \sum_l c_l^{(2)} \sum_{k=1}^{2}\sum_i b_i^{(2,k)}\psi_k(\cdot - i - l) \\ &= \sum_{k=1}^{2}\sum_j d_j^{(k)}\psi_k(\cdot - j) \end{aligned}$$

mit

$$d_j^{(k)} = \sum_l \Big(c_l^{(1)} b_{j-l}^{(1,k)} + c_l^{(2)} b_{j-l}^{(2,k)}\Big).$$

Hieraus folgt, dass V durch Translate von ψ_1 und ψ_2 erzeugt wird, und dass ferner für die Koeffizienten

$$\left\|\left\{d_l^{(k)}\right\}\right\|_{l_2} \le C\left(\left\|\left\{c_l^{(1)}\right\}\right\|_{l_2} + \left\|\left\{c_l^{(2)}\right\}\right\|_{l_2}\right) \le C'\|f\|_2.$$

mit $k = 1, 2$ gilt. Die Konstanten $C, C' > 0$ hängen dabei nicht von den Folgen oder von f ab. Vertauscht man die Rolle der ψ_j mit der der φ_j, so sieht man, dass weiterhin auch

$$c_j^{(k)} = \sum_l \Big(d_l^{(1)} a_{j-l}^{(1,k)} + d_l^{(2)} a_{j-l}^{(2,k)}\Big)$$

und mit Konstanten $D, D' > 0$ schließlich

$$\|f\|_2 \le D\left(\left\|\left\{c_l^{(1)}\right\}\right\|_{l_2} + \left\|\left\{c_l^{(2)}\right\}\right\|_{l_2}\right) \le D'\left(\left\|\left\{d_l^{(1)}\right\}\right\|_{l_2} + \left\|\left\{d_l^{(2)}\right\}\right\|_{l_2}\right)$$

gilt. Somit haben wir auch die in der Stabilitätsungleichung geforderte Abschätzung nach unten gezeigt. □

Als Anwendung auf eine MRA erhalten wir

Satz 4.13. *Seien φ und ψ aus $L_2(\mathbb{R})$ Funktionen, die Verfeinerungsgleichungen mit Koeffizienten $\{h_k\}$ und $\{g_k\}$ (bzw. Symbolen $H(z)$ und $G(z)$) erfüllen. Die Translate von φ seien eine Riesz-Basis für V_0. Ferner sei $W_0 = \overline{\operatorname{span}\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}}$. Dann gilt $V_0 \oplus W_0 = V_1$ mit l_2-stabiler bzw. Riesz-Basis für W_0, wenn*

$$D(z) := \det\begin{pmatrix} H(z) & G(z) \\ H(-z) & G(-z)\end{pmatrix}$$

auf dem Einheitskreis keine Nullstelle hat. Ferner gilt die Zerlegungsformel

$$\varphi(2x-l) = \frac{1}{2}\sum_k \left(p_{2k-l}\varphi(x-k) + q_{2k-l}\psi(x-k)\right), \qquad l = 0, 1, \tag{4.68}$$

mit Koeffizienten $\{p_k\}$ und $\{q_k\}$ aus $l_1(\mathbb{Z})$ und Symbolen $P(z)$ und $Q(z)$, die

$$P(z) = \frac{G(-z)}{D(z)}, \qquad Q(z) = \frac{H(-z)}{D(z)} \tag{4.69}$$

erfüllen.

Beweis. Wir nehmen $V = V_1$ und $\psi_1 = \varphi$, $\psi_2 = \psi$ als Spezialfall. Mit $\varphi_1(x) := \varphi(2x)$ und $\varphi_2(x) = \varphi(2x-1)$ gilt dann

$$\psi_1(x) = \varphi(x) = \sum_k h_k\varphi(2x-k) = \sum_k h_{2k}\varphi_1(x-k) + \sum_k h_{2k+1}\varphi_2(x-k)$$

und analog

$$\psi_2(x) = \psi(x) = .\sum_k g_{2k}\varphi_1(x-k) + \sum_k g_{2k+1}\varphi_2(x-k)$$

Es ist also das vorige Lemma anwendbar mit

$$a_{11}(z^2) = \sum_k h_{2k}z^{2k} = H(z) + H(-z)$$
$$a_{12}(z^2) = \sum_k h_{2k+1}z^{2k} = \frac{1}{z}(H(z) - H(-z))$$

und analog

$$a_{21}(z^2) = G(z) + G(-z)$$
$$a_{22}(a^2) = \frac{1}{z}(G(z) - G(-z))$$

Aufgrund der Voraussetzungen des Lemmas ist dann die Regularität der Matrix $A(z^2)$ auf dem Einheitskreis nachzuprüfen .Man untersuche also

$$\det A(z^2) = \begin{vmatrix} H(z)+H(-z) & (H(z)-H(-z))/z \\ G(z)+G(-z) & (G(z)-G(-z))/z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H(z)+H(-z) & 2H(z)/z \\ G(z)+G(-z) & 2G(z)/z\end{vmatrix}$$
$$= \frac{2}{z}\begin{vmatrix} H(-z) & H(z) \\ G(-z) & G(z)\end{vmatrix} = -\frac{2}{z}D(z)$$

Laut Vorraussetzung wird diese Funktion auf dem Einheitskreis nicht null. Damit folgt $V_1 = V_0 \oplus W_0$ mit l_2-stabiler Basis aus Translaten von φ und ψ. Speziell bilden die Translaten von ψ eine Riesz-Basis für W_0.

Jetzt haben wir noch die Zerlegungsformel zu zeigen. Wir führen den Nachweis mit Hilfe der Fouriertransformation der Skalierungsgleichungen. Mit $\tilde{z} = \mathrm{e}^{-iv}$ gilt dann

$$\hat{\varphi}(v) = \hat{\varphi}_1(v) \sum_k h_{2k} z^k + \hat{\varphi}_2(v) \sum_k h_{2k+1} z^k = a_{11}(z)\hat{\varphi}_1(v) + a_{12}(z)\hat{\varphi}_2(v),$$
$$\hat{\psi}(v) = \hat{\varphi}_1(v) \sum_k g_{2k} z^k + \hat{\varphi}_2(v) \sum_k g_{2k+1} z^k = a_{21}(z)\hat{\varphi}_1(v) + a_{22}(z)\hat{\varphi}_2(v).$$

Durch Addition von geeigneten Vielfachen dieser Gleichungen ergibt sich daraus mit $\tilde{z} = \exp(-iv/2)$

$$\hat{\varphi}(v) \sum_k g_{2k} z^k - \hat{\psi}(v) \sum_k h_{2k} z^k = -\det A(z)\hat{\varphi}_2(v) = 2D(\tilde{z})\hat{\varphi}_1(v)$$
$$\hat{\varphi}(v) \sum_k g_{2k+1} z^k - \hat{\psi}(v) \sum_k h_{2k+1} z^k = \det A(z)\hat{\varphi}_1(v) = 2D(\tilde{z})\hat{\varphi}_2(v)/z$$

Dies vergleichen wir mit den Fouriertransformierten der behaupteten Zerlegungsformeln

$$\hat{\varphi}_1(v) = \frac{1}{2}\hat{\varphi}(v) \sum_k p_{2k} z^k + \frac{1}{2}\hat{\psi}(v) \sum_k q_{2k} z^k,$$
$$\frac{1}{z}\hat{\varphi}_2(v) = \frac{1}{2}\hat{\varphi}(v) \sum_k p_{2k+1} z^{k-1} + \frac{1}{2}\hat{\psi}(v) \sum_k q_{2k+1} z^{k-1}.$$

Hieraus ersehen wir, dass wie gewnscht

$$P(\tilde{z}) = \frac{G(-\tilde{z})}{D(\tilde{z})}, \qquad Q(\tilde{z}) = \frac{H(-\tilde{z})}{D(\tilde{z})}$$

gelten muss. □

Bemerkung 4.14. Setzt man die direkt vor Satz 4.12 hergeleitete Beziehung $G(z) = zK(z^2)\overline{\tilde{H}(-z)}$ in $D(z)$ ein, so folgt $D(z) = zK(z^2)$ mit der nach Lemma 4.10 geltenden Beziehung zwischen $H(z)$ und $\tilde{H}(z)$.Das Kriterium von Satz 4.13 ist also bei dieser Wahl von $G(z)$ automatisch erfüllt. ♢

4.3.2 Pre-Wavelets auf Spline-Basis

Mit Hilfe der in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 untersuchten kardinalen Splines können in relativ einfacher Weise Pre-Wavelets konstruiert werden. Dazu brauchen wir nur das notwendige und hinreichende Kriterium von Satz 4.12 auf die Räume $S_{k,2}$ zu spezialisieren, d. h. wir wählen $V_0 = \operatorname{span}\{N_k(\cdot - j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ und $\varphi(x) = N_k(x)$ aus (3.58) als erzeugender Funktion. Als Räume für die durch $V_0 = S_{k,2}$ erzeugte MRA ergeben sich dann $V_j = S_{k,2}^{2^{-j}}$. Nach Lemma 3.14 bilden die gemäß (3.62) aus den $N_k(x)$ entstehenden Elemente eine Riesz-Basis . Sie haben kompakten Träger und Linearkombinationen von ihnen sind sehr einfach zu berechnen (Lane-Riesenfeld -Algorithmus).

In Lemma 3.15 haben wir bereits die zugehörige Verfeinerungsgleichung für $\varphi = N_k$ mit Symbol

$$H(z) \equiv H_k(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^k \tag{4.70}$$

bestimmt. Entscheidend für die Anwendung von Satz 4.12 ist jedoch die Funktion $[\hat\varphi,\hat\varphi](v)$, für die nach (3.78) folgende explizite Darstellung gilt:

$$[\hat\varphi,\hat\varphi](v) = \frac{z^{1-k}}{(2k-1)!}E_{2k-1}(z), \qquad z = \mathrm{e}^{-iv}.$$

Dabei bezeichnet $E_{2k-1}(z)$ das Euler-Frobenius-Polynom vom Grad $2k-2$. Aus den Sätzen 3.6 und 4.12 erhalten wir nun

Korollar 4.2. *Es ist $\Psi_k(x) \in V_1 = S_{k,2}^{(1/2)}$ ein Pre-Wavelet genau dann, wenn $\Psi(x)$ einer Verfeinerungsgleichung*

$$\Psi_k(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_l \varphi(2x-l)$$

genügt mit Symbol

$$G_k(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k z^k = -\left(\frac{1-z}{2}\right)^k K(z) E_{2k-1}(z). \tag{4.71}$$

Dabei ist $z = \exp(-iv)$ und $K(z)$ eine Funktion wie in Satz 4.12.

Beweis. Obige Formeln für $H(z)$ und $[\hat\varphi,\hat\varphi](v) = F(\hat\varphi,\hat\varphi)(\exp(-iv))$ in (4.66) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \overline{H_k(-z)}\, z\, K\big(z^2\big)(-z)^{1-k} E_{2k-1}(-z) \\ &= -\left(\frac{\overline{z}-1}{2}\right)^k z^k\, z^{-2k} K(z) E_{2k-1}(-z). \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung mit $K(z)$ ersetzt durch $z^{-2k}K(z)$. □

Auf Chui-Wang [CW91] geht die Idee zurück, Pre-Wavelets mit Hilfe der "cardinal spline interpolation", die in Abschnitt 3.2.3 betrachtet wurde, zu konstruieren. Sie verwenden dazu den *Lagrange-Spline* $L_{2k}(x) \in S_{2k,2}$, mit der Eigenschaft

$$L_{2k}(j) = \delta_{0,j}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Wie in Abschnitt 3.2.3 gezeigt wurde existiert er und fällt exponentiell ab.

Satz 4.14. *Die Translate der Funktion*

$$\Psi_k(x) := L_{2k}^{(k)}(2x-1)$$

sind Pre-Wavelets, d. h. de erzeugen den Raum W_0 mit $V_0 \oplus W_0 = V_1$, wobei $V_0 = S_{k,2}$ gewählt ist.

Beweis. Die Orthogonalität von Ψ_k zu V_0 kann man direkt verifzieren durch

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N_k(x-l)\,\Psi_k(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} N_k(x) L_{2k}^{(k)}(2x+2l-1)\,dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} L_{2k}'(2x+2l-1) N_k^{(k-1)}(x)\,dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \int_i^{i+1} a_i L_{2k}'(2x+2l-1)\,dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} a_i \big(L_{2k}(2i+2l+1) - L_{2k}(2i+2l-1)\big) = 0 \end{aligned}$$

denn $L_{2k}(j) = 0$ für $j \neq 0$.

Zur Anwendung von Korollar 4.2 berechnet man das Symbol von $\Psi_k(x)$. Fouriertransformation liefert unter Benutzung der Formel (3.76) für $L_{2k}(x)$.

$$\hat{\Psi}_k(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varrho_l^{(2k)} \mathcal{F}\left[N_{0,2k}^{(k)}(2x-1+k-l)\right](v) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varrho_l^{(2k)} \mathrm{e}^{-i(l-k+1)v/2} \mathcal{F}\left[N_{0,2k}^{(k)}\right](v/2)$$

Mit $\tilde{z} = \exp(-iv/2)$ gilt nach (3.79)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varrho_l^{(2k)} \mathrm{e}^{-i(l-k+1)v/2} = (2k-1)! E_{2k-1}(\tilde{z})$$

Ferner gilt nach (3.66)

$$\mathcal{F}\left[N'_{0,2k}\right](v/2) = (1-\exp(-iv/2))\mathcal{F}\left[N_{0,2k-1}\right](v/2),$$

sodass nach iterativer Anwendung dieser Formel folgt

$$\hat{\Psi}_k(v) = (2k-1)!\left(1-\mathrm{e}^{-iv/2}\right)^k \frac{\hat{N}_{0,k}(v/2)}{E_{2k-1}(\tilde{z})},$$

d. h. das Symbol von Ψ_k lautet mit $\tilde{z} = \exp(-iv/2)$

$$G_k(\tilde{z}) = (2k-1)! \frac{(1-\tilde{z})^k}{E_{2k-1}(\tilde{z})}. \tag{4.72}$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus Korollar 4.2 , falls wir zeigen, dass Ψ_k von der dort angegebenen Form ist. Dazu ergibt der Vergleich von (4.70) und (4.71), dass

$$K\left(\tilde{z}^2\right) = 2^{k-1}(2k-1)! \frac{E_{2k-1}\left(\tilde{z}^k\right)}{E_{2k-1}(-\tilde{z})E_{2k-1}(\tilde{z})}.$$

Dies ist aber eine Funktion in $\tilde{z}^2$ und aufgrund der Eigenschaften der Euler-Frobenius-Polynome von der nachzuweisenden Form. □

Aus diesem Satz kann man eine weitere Charakterisierung des orthogonalen Komplements W_0 gewinnen ,nämlich

$$W_0 = \{w^{(k)}(x) : w(x) = s(2x), s(x) \in S_{2k,2} \text{ und } s(2j+1) = 0, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Bezüglich des Beweises sei auf das Buch von Chui (loc.cit.) verwiesen.

Die obige Wahl von $K(z)$, die zu einer Basis von W_0 aus Translaten von interpolatorischen Pre-Wavelets führt, ist nur eine von unendlich vielen. Sie führt zudem auf Ψ_m deren Träger nicht kompakt (wenn auch exponentiell abfallend) ist. Daher kann man sich zum Ziel setzen, die Freiheit in der Wahl von $K(z)$ dazu zu nutzen, Ψ mit *kompaktem* Träger zu konstruieren. Dieses Problem kann man mit Hilfe der Verfeinerungsgleichung studieren. Dabei zeigt sich, dass die Länge des Trägers mit jener der „Maske“ $\{H_k\}$ eng zusammenhängt. Den genauen Zusammenhang formulieren wir in

Lemma 4.12. *Seien φ und Ψ Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$, die Translate von φ seien l_2-stabil. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Wenn $\Psi(x)$ außerhalb des Intervalls (a,b) (mit einer Intervallänge größer oder gleich 1) identisch verschwindet und im Inneren dieses Intervalls keine Nullstelle hat, wenn also*

$$\varphi(x) \begin{cases} \neq 0, & x \in (a,b) \\ = 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

mit $|b-a| \geq 1$ gilt und ferner $\Psi(x)$ die Identität

$$\Psi(x) = \sum_{l=N_1}^{N_2} g_l \varphi(2x-l)$$

mit $b_l \neq 0$, $N_1 \leq l \leq N_2$ erfüllt, dann gilt

$$\operatorname{supp} \Psi = \left(\frac{a+N_1}{2}, \frac{b+N_2}{2} \right)$$

2. *Ist φ Lösung der Verfeinerungsgleichung*

$$\varphi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} h_l \varphi(2x-l), \qquad h_l \in l_1(\mathbb{Z}),$$

so gilt

$$\varphi(x) \begin{cases} \neq 0, & x \in [0,N] \\ = 0, & sonst \end{cases} \iff h_l \begin{cases} \neq 0, & 0 \leq l \leq N \\ = 0, & sonst. \end{cases}$$

Beweis. Teil 2 ist eine direkte Folge von Teil 1; da letzterer sehr einfach zu zeigen ist überlassen wir die Details des Beweises dem Leser zur Übung. □

Formuliert man Aussage 1 mit Hilfe des Symbols

$$B(z) := \frac{1}{2} \sum_{l=N_1}^{N_2} b_l z^l = \frac{1}{2} z^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2-N_1} b_{N_1+j} z^j,$$

so sieht man Folgendes: Hat φ kompakten Träger und will man ein Pre-Wavelet mit möglichst kleinem Träger konstruieren, dann muss das Symbol der Verfeinerungsgleichung für dieses Pre-Wavelet Ψ ein Polynom von möglichst kleinem Grad sein (abgesehen von der Multiplikation mit einem Monom, diese bewirkt nur eine Verschiebung des Trägers). Im oben betrachteten Fall von kardinalen Splines bedeutet dies, dass $G_k(z)$ (bis auf Multiplikation mit einem Monom) ein Polynom möglichst kleinen Grades sein sollte.

Nun kann man den Grad der Polynome im Zähler von (4.71) nicht weiter verringern, da man sie nicht durch Funktionen von z^2 wegkürzen kann, denn sonst mußte immer $-z$ eine Nullstelle sein, wenn z dies ist. Es bleibt daher nur noch die Möglichkeit

$$K(z) = cz^{N_0}$$

zu wählen. Wir kommen also zu dem Ergebnis

Satz 4.15. *Das Pre-Wavelet Ψ_m^* zu N_m mit kleinstem Träger hat – abgesehen von einem monomiellen Faktor cz^{N_0} das Symbol*

$$G_m^*(z) = \frac{1}{(2m-1)!} \left(\frac{1-z}{2} \right)^m E_{2m-1}(-z) = \left(\frac{1-z}{2} \right)^m \sum_{k=0}^{2m-2} (-z)^k N_{0,2m}(k+1).$$

Es gilt

$$G_m^*(z) = \sum_{l=0}^{3m-2} q_l^* z^l, \qquad q_l^* = \frac{(-1)^l}{2^{m-1}} \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} N_{0,2m}(l+1-j).$$

Das entstehende Pre-Wavelet $\Psi_m^*(x)$ hat den Träger $[0, 2m-1]$ und die Form

$$\Psi_m^*(x) = \sum_{l=0}^{3m-2} q_l^* N_{0,m}(2x-l)$$

Als Beispiel betrachten wir den Fall $m = 2$, wobei $G_2(z)$ bis auf eine Normierungskonstante die Form

$$(1-z)^2 E_3(z) = (1-z)^2\big(1+4z+z^2\big) = 1+2z-6z^2+2z^3+z^4$$

hat, also bis auf eine Konstante

$$(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4) = (1, 2, -6, 2, 1)$$

gilt. Eine Linearkombination von Translaten von $N_2(2x)$ (das sind Dachfunktionen) mit diesen Koeffizienten steht senkrecht auf den kardinalen linearen Splines.

Eine andere Möglichkeit ,interpolatorische Spline-Prewavelets zu konstruieren, besteht darin die Elemente von W_0 aus Linearkombinationen von Translaten von Fundamental-Interpolanten in W_0 darzustellen.Dazu kann man diese als Linearkombination von Translaten aus Ψ_m^* ansetzen, d.h. sie über einen weiteren Filter zu Ψ_m^* bestimmen.Diese Konstruktion benötigt zwar zusätzlichen Aufwand ,bietet jedoch den Vorteil,dass die Koeffizienten der Entwicklung nach dieser Wavelet-Basis (s.Abschnitt 4.2.2) direkt durch *Sampling* gewonnen werden können. Bezüglich weiterer Details sei auf den Artikel von M.Unser-A.Aldroubi-M.Eden:'A family of polynomial spline wavelet transforms'.Signal Process.,30(2),141-162, 1993 verwiesen.

4.3.3 Wavelets vom Paley-Littlewood-Typ

Im Gegensatz zur Konstruktion von Spline–Prewavelets gehen wir hier nicht von einer erzeugenden Funktion φ mit kompaktem Träger, sondern „dual“ dazu von ihrer Fouriertransformierten .Wir nehmen also jetzt $\operatorname{supp}\hat{\varphi} = W$ für eine Funktion $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ an, wobei W ein kompaktes Gebiet (hier: ein Intervall) ist. Aus Abschnitt 2.4 wissen wir, dass dies zu analytischen Funktionen φ führt ,die also im Gegensatz zu Splines sehr glatt sind. Aus demselben Grunde ergibt sich aber gegenüber den Splinefunktionen der Nachteil , dass sie keinen kompakten Träger haben können.

Als Vorteil ergibt sich eine relativ einfache Möglichkeit zur Konstruktion von Orthonormalbasen und darüber hinaus von Wavelets. Wir wollen dies am Spezialfall $\hat{\varphi} = \chi_{2\pi W}$ bzw. $\varphi(x) = W(2\pi x)$ mit der Transferfunktion aus (2.44) demonstrieren.

Nach Lemma 3.3 ist zunächst zu zeigen,dass

$$[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](v) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(v+2\pi k)|^2 = 1. \tag{4.73}$$

gilt.Am Ende von Unterabschnitt 3.1.3 haben wir gesehen,dass dies sofort für Fundamentalgebiete W des $\mathbb{R}^m$ folgt, d. h. Gebiete mit den Eigenschaften

1. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^m} (k+W) = \mathbb{R}^m$
2. $(k+W) \cap (j+W) = \emptyset$ für $j \neq k$

denn dann gilt trivialerweise

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \big|\chi_{2\pi W}(v+2\pi k)\big|^2 = 1.$$

Als weitere vorteilhafte Eigenschaft wurde in Satz 2.14 bewiesen, dass für solche Gebiete W die „Fourierkoeffizienten“ der Orthogonalentwicklung von $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$

$$\Big(g, W\big(2\pi(2^n \cdot - k)\big)\Big)_2 = g\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

erfüllen, d. h. sie sind durch „Sampling“ zu ermitteln.

Wavelets können nun direkt ohne Verwendung der allgemeinen Theorie konstruiert werden. Ist

$$V_0 = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^m) : \left|\hat{f}(v)\right| = 0 \text{ für } v \notin 2\pi W \right\},$$

so gilt

$$V_1 = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^m) : \left|\hat{f}(v)\right| = 0 \text{ für } v \notin 4\pi W \right\},$$

so dass Elemente Ψ aus W_0

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\Psi(x)}\varphi(x-j)\,dx = \int_{4\pi W} \overline{\hat{\Psi}(v)}\hat{\varphi}(v)\mathrm{e}^{-ijv}\,dv = \int_W \overline{\hat{\Psi}(v)}\mathrm{e}^{-ijv}\,dv$$

erfüllen müssen. Durch die Wahl

$$\hat{\Psi}(v) = \chi_{4\pi W \setminus 2\pi W}(v)$$

kann man dies erreichen. Zum Nachweis von Bedingung (4.72) für die Orthogonalität der Translate benötigt man jedoch im Falle einer Raumdimension $m \geq 2$ mehrere Basis-Wavelets. Man sieht dies am Beispiel $W = [0,1]^m$, wo $2W \setminus W$ durch $2^m - 1$ verschiedenen Translate von W überdeckt werden muss ,um (4.72) zu garantieren.

Es ist nicht unmittelbar klar, wie sich Wavelets im allgemeinen Fall $\hat{\varphi} = \chi_{2\pi W}$ konstruieren lassen. Es sei dazu bemerkt, dass Zerlegungen des $\mathbb{R}^m$ in Translate von Fundamentalgebiete auch *Pflasterungen* (“tilings”) heißen. Es gibt viele Möglichkeiten für Pflasterungen. Erstmals scheinen Littlewood und Paley dieses Prinzip 1935 auf die Fouriertransformation angewendet zu haben. Y. Meyer nennt daher Wavelet-Konstruktionen auf dieser Basis „Wavelets vom Littlewood-Paley-Typ“. Interessanterweise treten sie auch bei Grenzfällen der kardinalen Interpolation mit Box-Splines wieder auf, was zur Konstruktion weiterer Wavelets vom Littlewood-Paley-Typ ausgenutzt werden könnte.

In diesem Zusammenhang sei auch [GM92] erwähnt. Dort werden „Selbstähnliche Pflasterungen es $\mathbb{R}^n$“ zur Erzeugung von MRAs mit orthonormalen Wavelets vom Haar-Typ verwndet. Außerdem sind allgemeiner Matrix-Transformationen des $\mathbb{Z}^m$ statt Translationen zugelassen.Eine Erweiterung diese Idee auf Box-Splines findet man in [DGL95] .

Diesen Vorzügen der Wahl von $\hat{\varphi}$ stehen allerdings auch erhebliche Nachteile gegenüber. Dies wird im Spezialfall $\varphi(x) = \operatorname{sinc} \pi x$ mit $W = [-1/2, 1/2]$ klar, der bereits am Ende von Unterabschnitt 4.2.2 zur Erläuterung des Wavelet-Prinzips diente (dort wurde das Gebiet $2\pi W$ als W bezeichnet). Als Verfeinerungsgleichung ergibt sich nämlich dann nach dem Satz von Shannonn

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \operatorname{sinc}\big((2x-k)\pi\big) \\ &= \varphi(2x) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)\pi}\varphi(2x-2l-1),\end{aligned}$$

also keine endliche Summe. Entsprechend besitzt das zugehörige Wavelet $\Psi(x)$ keinen kompakten Träger. Seine explizite Form ergibt sich aus (4.45) als Differenz zweier Sinc-Funktionen. Dies bedeutet, dass $\Psi(x)$ außerdem nur mäßig in $|x|$ ablingt bzw. ein schlechtes Lokalisierungsverhalten hat.

Allgemeiner gilt, dass alle Konstruktionen, bei denen Ψ eine charakteristische Funktion ist, den Nachteil haben, dass φ nicht genügend schnell abfällt. Der tiefere

Grund kann aus Teil 4 von Lemma 2.4 abgelesen werden, wonach ein polynomiales Abklingen von $\Psi(x)$ notwendig die Existenz von Ableitungen von $\hat{\Psi}(v)$ impliziert.

Y. Meyer gab eine Konstruktion an, die garantiert, dass $\operatorname{supp}\hat{\varphi}$ kompakt ist und $\hat{\varphi}$ glatt ist. Diese wollen wir kurz vorstellen: Er wählt

$$\hat{\varphi}(v) = \begin{cases} 1, & |v| \le 2\pi/3, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3|v|}{4\pi} - \frac{1}{4}\right)\right), & 2\pi/3 \le |v| \le 4\pi/3, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei ν eine glatte Funktion (aus C^k oder C^∞) die außerhalb von $[0,1]$ verschwindet, auf diesem Intervall Werte aus $[0,1]$ annimmt und ferner

$$\nu(x) + \nu(1-x) = 1$$

erfüllt. Graphisch ergibt sich, dass sich die Träger von $\hat{\varphi}(v)$ und $\hat{\varphi}v2 \pm 2\pi)$ jeweils auf den Bereichen $(-4\pi/3, 2\pi/3$ bzw. $(2\pi/3, 4\pi/3)$ überlappen. Dort ist also nachzuprüfen, dass $|\varphi(v)|^2 + |\varphi(v \pm 2\pi)|^2 = 1$ gilt. Obige Konstruktion liefert dies für jede angegebene Funktion $\nu(x)$, denn für $-4\pi/3 \le v \le -2\pi/3$ gilt mit

$$x := \frac{3|v|}{4\pi} - \frac{1}{4} = -\frac{3|v|/\pi + 1}{4}, \qquad y := \frac{3|v+2\pi|}{4\pi} - \frac{1}{4} = \frac{3|v|/\pi + 5}{4},$$

dass $y = 1 - x$ ist und daher

$$|\hat{\varphi}(v+2\pi)|^2 = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu(y)\right)\right|^2 = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\nu(y))\right)\right|^2 = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\nu(y)\right)\right|^2$$

Man hätte in der Definition auch

$$\nu\left(\frac{3|\xi|}{2\pi} - 1\right)$$

verwenden können, und das Resultat wäre das gleiche gewesen. Die Verfeinerungsgleichung lautet hier $\hat{\varphi}(v) = H(z)\hat{\varphi}(v/2)$ mit

$$H(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\xi + 4\pi l), \qquad z = \mathrm{e}^{-iv/2}$$

und als Symbol des zugehörigen Wavelets erhält man

$$G(z) = z\overline{H(-z)} = z\Big(\hat{\Psi}(v+2\pi), \hat{\Psi}(v-2\pi)\Big), \qquad z = \mathrm{e}^{-iv/2}.$$

Hieraus kann man wegen der expliziten Formel für $\hat{\varphi}$ die Form des Wavelets berechnen(s.Formel (4.2.3) in Dau[92]).

4.4 Praktische Aspekte einer MRA

4.4.1 Zerlegungs- und Rekonstruktions-Algorithmen

Ein allgemeines Approximationsproblem lautet folgendermaßen:

Problem: Gegeben sei eine Funktion f. Die Aufgabe ist es nun, eine Approximation $\tilde{f}$ aus einem der Räume V_J zu berechnen. Dabei soll J den kleinstmöglichen Wert haben, so dass ein vorgegebenes Kriterium für die Güte der Approximation gerade noch erfüllt ist (Im Limes $J \to \infty$ ist dies wegen (R5) stets möglich).

Die praktische Lösung hängt allerdings sehr davon ab, welche Informationen man über f hat. Einiges dazu werden wir im Unterabschnitt 4.4.3 ausführen. Eine der Schwierigkeiten besteht darin, dass man den Wert von J nicht kennt.Dazu hat man einen Algorithmus zu entwickeln , mit dessen Hilfe man effizient sowohl J als auch die Approximation selbst erhält. Die Grundidee ist einfach: Man startet mit einer (im Allgemeinen groben) Approximation aus V_0. Unter Benutzung der Wavelet-Zerlegung

$$V_{j+1} = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_j = V_j \oplus W_j$$

verfeinert man die Approximation, indem man solange schrittweise zu V_1, V_2, ... V_j übergeht, bis das Kriterium erfüllt ist. Schematisch sieht das dann so aus:

$$\begin{array}{ccccccccccc} V_0 & \to & V_1 & \to & V_2 & \to & \cdots & V_{J-1} & \to & V_J \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \nearrow & \\ W_0 & & W_1 & & W_2 & & \cdots & W_{J-1} & & \end{array}$$

Grundidee des Zerlegungs- und des Rekonstruktions-Verfahrens

Dieses „hierarchische Prinzip“ ist bei den verschiedensten Aufgabenstellungen bis hin zur Lösung von Operatorgleichungen (z. B. DGLen) anwendbar. Für die praktische Anwendung ist es wichtig, für den Übergang von V_j nach V_{j+1} einen effizienten Algorihmus zu finden. Wie wir im Folgenden zeigen werden, kann eine MRA genau dies leisten. Es gibt aber noch einen anderen Aspekt, der von der Signal- bzw. Bildverarbeitung herrührt und für den die MRA ursprünglich entwickelt wurde: Gegeben sei eine Approximation $s_n(x)$ eines Signals $s(x)$. Diese wird zunächst aufgespalten in

$$s_n(x) \equiv \sum_k c_k^n \varphi(2^n x - k) = \underbrace{s_{n-1}(x)}_{V_{n-1}} + \underbrace{t_{n-1}(x)}_{W_{n-1}} \tag{4.74}$$

Stellt man sich dies fortgeführt vor, so erhält man

$$s_n(x) = \underbrace{t_{n-1}(x)}_{W_{n-1}} + \underbrace{t_{n-2}(x)}_{W_{n-2}} + \cdots + \underbrace{t_{n-M}(x)}_{W_{n-M}} + \underbrace{s_{n-M}(x)}_{V_{n-M}}. \tag{4.75}$$

Gemäß der Definition der W_j als Räume, die durch Skalierung entstehen, bedeutet dies eine Zerlegung nach immer gröberen Details. Man wird also nur so lange zerlegen wollen, bis man bei der nächsten Zerlegung ein „Bild“ s_{n-M-1} erhält, dass keine wesentliche Information mehr liefert.
Anschaulich gesprochen filtert man nacheinander immer gröbere Details aus dem Bild und erhält als „Überbleibsel“ $s_{n-M-1}(x)$. In dieser Sprache der Filter ist also $s_{n-M-1}(x)$ durch sukzessive Anwendung eines Tiefpassfilters entstanden, da nach dem Sampling-Theorem grobe Details und niedrige Frequenzen einander entsprechen.

Wieder anschaulich gesprochen wird man die Zerlegung nur so weit fortführen, bis das gefilterte Bild $s_{n-M-1}(x)$ ausreichend verschwommen ist bzw. keine wesentlichen Informationen mehr enthält. Häufig ist zudem das ursprüngliche Signal $s(x)$ mit Rauschen oder sonstigen Artefakten behaftet, deren Spektrum üblicherweise nur hohe Frequenzen enthält. Üblicherweise wird daher zur Entfernung (oder zumindest Unterdrückung) dieser Störungen ein Tiefpassfilter verwendet. Wegen der Vernachlässigung der in $s_{n-M-1}(x)$ enthaltenen groben Details (was in der Sprache der Filter die Anwendung eines Hochpassfilters bedeutet) stellt somit das Endergebnis einen Bandpassfilter dar. (Zur diesen Begriffen siehe Abschnitt 2.3.2).

Man kann nun (4.75) auf zwei Arten lesen, von links nach rechts oder von rechts nach links. Die erste Lesart entspricht einer Analyse: Von $s(x)$ ausgehend ist die Zerlegung zu bestimmen. Die zweite Lesart entspricht einer Synthese: Die einzelnen Bestandteile der Zerlegung werden wieder zum ursprünglichen Signal zusammengesetzt.

Analyse. Das Zerlegungs-Verfahren. Betrachten wir zunächst das Zerlegungsverfahren (engl. 'decomposition algorithm'). Bei ihm geht man von $s(x)$ aus und berechnet (in der angegebenen Reihenfolge) t_{n-1}, t_{n-2}, ... , t_{n-M}. Dabei charakteriesieren die einzelnen Funktionen immer gröbere Details.

Synthese. Der Rekonstruktions-Verfahren. Beim Rekonstruktionsverfahren (engl.'reconstruction algorithm'), als der Synthese, geht man von der gröbsten Approximation s_{n-M} aus und verbessert sie indem man (wieder in der angegebenen Reihenfolge) t_{n-M}, t_{n-M+1}, ... , t_{n-1} hinzunimmt. Man nimmt also mehr und mehr Details hinzu. Damit ist aber auch klar, warum man häufig von einer Approximation des Signals und nicht vom Signal selbst ausgehen wird. Oft sind die feinsten Strukturen nämlich völlig unwichtig; häufig sind sie Rauschen oder sonstige Artefakte.

Im Folgenden sollen dafür effiziente Algorithmen angegeben werden. Dabei wird die *Synthese* mit den Verfeinerungsgleichungen (4.24) für φ und (4.48) von Ψ durchgeführt und die *Analyse* mit den Gleichungen von Satz 4.9, die sowohl für Prewavelets wie auch für *echte* Wavelets gelten (im letzteren Fall vereinfachen sie sich sogar , da der Nenner in Relation (4.68) dann wegfällt).

Betrachten wir zunächst den Fall der Wavelets. Hier wird für die Analyse eine Darstellung der $t_j(x) \in W_j$ als

$$t_j = \sum_k d_k^j \Psi\big(2^j x - k\big), j = n-2, n-3, \dots, n-M \tag{4.76}$$

mit Hilfe des Wavelets Ψ gesucht. Das Zerlegungsverfahren soll – ausgehend von den Koeffizienten c_l^n –diese neuen Koeffizienten so bestimmen, dass (4.73) erfüllt ist. Dazu benutzt man die Zerlegungsrelation (4.68) in Satz 4.9 für den Fall von Wavelets ,in dem $D(z) = 1$ bzw. $P(z) = G(-z), Q(z) = H(-z)$ gilt. Dies liefert

$$\begin{aligned} s_j(x) &= \sum_l c_l^j \varphi\big(2^j x - l\big) = \sum_l c_l^j \sum_k \Big(h_{l-2K} \varphi\big(2^{j-1} x - k\big) + g_{l-2k} \Psi\big(2^{j-1} x - k\big) \Big) \\ &= \sum_k \varphi\big(2^{j-1} x - k\big) \sum_l h_{l-2k} c_l^j + \sum_k \Psi\big(2^{j-1} x - k\big) \sum_l g_{l-2k} c_l^j \\ &= s_{j-1}(x) + t_{j-1}(x), \end{aligned}$$

dabei haben wir die h_k als reell angenommen. Durch Vergleich dieser Darstellung mit jenen von $s_{j-1}(x)$ und $t_{j-1}(x)$ folgt

$$\begin{aligned} c_k^{j-1} &= \sum_l h_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} &= \sum_l g_{l-2k} c_l^j \end{aligned} \tag{4.77}$$

Man kann die Koeffizienten der Zerlegung (4.75) also nach folgendem Schema berechnen.

$$\begin{array}{ccccccccc} \boxed{c^n} & \to & c^{n-1} & \to & c^{n-2} & \cdots & \to & c^{n-M} \\ & \searrow & & \searrow & & & \searrow & \\ & & d^{n-1} & & d^{n-2} & \cdots & & d^{n-M} \end{array}$$

Schema des Zerlegungs-Verfahrens

Nun betrachten wir das Rekonstruktionsverfahren. Bei ihm ist aus den Koeffizientenfolgen c^{n-M}, d^{n-M}, ..., d^{n-1} – vgl. (4.74) – rückwärts die Koeffizientenfolge c^n in (4.73) zu berechnen. Dazu geht man von den Skalierungsgleichungen (4.24) und (4.49) für φ und Ψ aus; aus diesen folgt

$$\begin{aligned} s_{j-1}(x) + t_{j-1}(x) &= \sum_l c_l^{j-1} \varphi\big(2^{j-1} - l\big) + \sum_l d_l^{j-1} \Psi\big(2^{j-1} - l\big) \\ &= \sum_l c_l^{j-1} \sum_k h_k \varphi\big(2^j x - 2l - k\big) + \sum_l d_l^{j-1} \sum_k g_k \varphi\big(2^j x - 2l - k\big) \\ &= \sum_k \varphi\big(2^j x - k\big) \sum_l \Big(c_l^{j-1} h_{k-2l} + d_l^{j-1} g_{k-2l} \Big) \end{aligned}$$

und damit die Rekonstruktionsformel

$$c_k^j = \sum_l \Big(c_l^{j-1} h_{k-2l} + d_l^{j-1} g_{k-2l} \Big) \tag{4.78}$$

Das Rekonstruktionsverfahren läuft also nach folgendem Schema ab:

$$\begin{array}{ccccccccc} \boxed{c^{n-M}} & \to & c^{n-M+1} & \to & c^{n-M+2} & \cdots & c^{n-1} & \to & c^n \\ & \nearrow & & \nearrow & & & & \nearrow & \\ \boxed{d^{n-M}} & & \boxed{d^{n-M+1}} & & & \cdots & \boxed{d^{n-1}} & & \end{array}$$

Schema des Rekonstruktionsverfahrens

Bei beiden Schemata sind die Folgen markiert, von denen ausgegangen wird.

Berechnungs-Komplexität. Wir gehen davon aus, dass die Länge der Folge c^j $l_j = |l^j| < \infty$ sei, gleiches treffe auf $\{h_k\}$ und $\{g_k = (-1)^k h_{1-k}\}$ zu. Für jede Berechnung der Faltung benötigt man dann höchsten f Punktoperationen, f ist dabei ein Vielfaches der Filterlänge (wie schon oben bemerkt ...). In (4.77) fallen dann bei der j-ten Stufe l_j dieser Faltungen an; aus der Folge c^j, $|c^j|$ erhält man die Folge c^{j-1} der Länge $l_{j-1} = |c^{j-1}| \approx l_j/2$. Insgesamt werden also etwa

$$2f(l_n + l_{n-1} + \cdots + l_{n-M}) \approx f l_n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^M} \right) \approx 2 f l_n$$

Punktoperationen benötigt, denn für die Folgen d^j fällt noch einmal der gleiche Aufwand an. Die Anzahl der Operationen ist also *proportional* der Zahl l_n der Anfangs gegebenen Koeffizienten.

Beim Rekonstruktionsverfahren fängt man mit zwei Folgen der Länge l_{n-M} an; in den folgenden Schritten hat man es dann mit Folgen mit geometrisch anfwachsender Länge zu tun (kurz: die Länge verdoppelt sich jeweils). Es ist intuitiv klar, dass auch bei diesem Verfahren die Zahl der Punktoperationen proportional zu l_n ist.

Wir wollen es bei dieser kurzen Betrachtung belassen, der Interessierte sollte sich in [LMR94] (S. 129ff) genauer informieren. Eine Bemerkung erscheint allerdings wichtig: Algorithmen deren Aufwand linear in der Zahl der Eingangsdaten ist gehören zu den schnellsten Algorithmen überhaupt [2]

4.4.2 MRA und diskrete Filterungsverfahren

Analyse und Synthese bzw.Zerlegungs- und Rekonstruktionsverfahren beruhen auf diskreten Faltungen, die als Filter interpretiert werden können.Dabei kann wie schon bemerkt die Bildung der c_k^{j-1} innerhalb einer MRA als ein Tiefpassfilter und die der d_k^{j-1} als ein Hochpassfilter angesehen werden.

Ein genauerer Blick auf (4.77) zeigt, dass nach Bildung der Faltung nur jeder zweite Index (d. h. nur die geraden oder nur die ungeraden Indizes) für die Berechnung der neuen Koeffizienten c_k^{j-1} und d_k^{j-1} herangezogen werden. In der Sprache der Filter ist dies also ein *Downsampling (Subsampling)*. Der Umkehrprozess in (4.78) kann so beschrieben werden:

Man fülle zuerst die Folgen c_k^{j-1} und d_k^{j-1} mit Nullen auf um sie auf doppelte Länge zu bringen und faltet sie dann mit den Filterfolgen $\{h_{k-2l}\}_l$ und $\{g_{k-2l}\}_l$. Dies entspricht in der Sprache der Filter einem *Upsampling*.

Bemerkung 4.15. Man könnte statt von *Downsampling* auch von *Restriktion* und statt *Upsampling* auch von *Prolongation* sprechen. Diese Prozesse tauchen in ganz ähnlicher Weise bei der Beschreibung von Mehrgitterverfahren ('multigrid methods') auf, vergleichen hierzu beispielsweise [Hac85], Abschnitte 3.4f. und 3.5f. ♢

Es ist sinnvoll, die beiden Prozesse (4.77) und (4.78) auch mit Hilfe der z-Transformation zu beschreiben. Führt man formal

$$c^j(z) := \sum_k c_k^j z^k \qquad\qquad d^j(z) := \sum_k d_k^j z^k \tag{4.79}$$

ein, so werden die Zerlegungsformeln (4.77) äquivalent durch

$$\begin{aligned} c^{j-1}(z^2) &= H(1/z)c^j(z) + H(-1/z)c^j(-z) \\ d^{j-1}(z^2) &= G(1/z)c^j(z) + G(-z)c^j(-z) \end{aligned} \tag{4.80}$$

ausgedrückt.Zum Beweis erweitern wir die Definition der Koeffizienten c_k^{j-1} zu

$$b_i := \sum_l h_{l-i} c_l^j.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} c^{j-1}(z^2) &= \sum_i b_{2i} z^{2i} = [\sum_i b_i z^i + \sum_i b_i (-z)^i]/2 \\ &= [\sum_i \sum_l h_{l-i} z^{i-l} c_l^j z^l + \sum_i \sum_l h_{l-i} (-z)^{i-l} c_l^j (-z)^l]/2 \\ &= H(1/z)c^j(z) + H(-1/z)c^j(-z), \end{aligned}$$

d.h.die erste Relation in (4.79) . Der Beweis der zweiten verläuft genauso.

[2] Schnellere Algorithmen sind im Allgemeinen nicht mehr deterministisch sondern beruhen auf statistischen Überlegungen. Üblicherweise bezeichnet man Algorithmen die von der Ordnung $\mathcal{O}(n \log n)$ sind noch als schnell – bekanntestes Beispiel ist die schnelle Fouriertransformation

Um die Wirkungsweise klarer herauszustellen, verwenden wir Formel (4.78) mit anderen Filtern

$$\tilde{H}(z) = \sum_k \tilde{h}_k z^k, \qquad \tilde{G}(z) = \sum_k \tilde{g}_k z^k, \tag{4.81}$$

d.h. in der Form

$$\tilde{c}_k^j = \sum_l \left(c_l^{j-1} \tilde{h}_{2l-k} + d_l^{j-1} \tilde{g}_{2l-k} \right).$$

Dies ergibt nach Anwendung der z-Transformation äquivalent dazu

$$\tilde{c}^j(z) = \tilde{H}(1/z) c^{j-1}(z^2) \tilde{G}(1/z) d^{j-1}(z^2) \tag{4.82}$$

Dies entspricht der Verwendung von dualen bzw. biorthogonalen Wavelets, die bereits in Abschnitt 4.3.1 ,Definition 4.5 eingeführt wurden und später ausführlich dargestellt werden. Die Frage ist nun, wann dies eine Rekonstruktionsformel darstellt. Dazu setzen wir (4.80) in (4.82) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{c}^j(z) &= \big(H(1/z)\tilde{H}(1/z) + G(1/z)\tilde{G}(1/z) \big) c^j(z) \\ &+ \big(H(-1/z)\tilde{H}(1/z) + G(-1/z)\tilde{G}(1/z) \big) c^j(-z). \end{aligned} \tag{4.83}$$

In diesem Ausdruck enhält der zweite Term die *Aliasing*-Effekte: $c^j(-z)$, $z = \exp(-iv)$ liefert eine Verschiebung der Fourierreihe $\sum_l c_l^j \exp(-ilv)$ um die Frequenz π. Dies entspricht genau dem Aliasing, das nach dem shannonschen Abtasttheorem zu erwarten ist, wenn man mit halber Nyquist-Rate (bzw. mit doppeltem Zeitabstand) abtastet – denn danach liefert die Verschiebung um π die fehlenden Abtastwerte zur exakten Darstellung. Also muss man

$$H(-z)\tilde{H}(z) + G(-z)\tilde{G}(z) = 0 \tag{4.84}$$

fordern und dies ist genau die in Lemma 4.10 angegebene Relation .

Will man eine exakte Rekonstruktionsformel erhalten, so muss man nach (4.82) noch

$$H(z)\tilde{H}(z) + G(z)\tilde{G}(z) = 1 \tag{4.85}$$

fordern. Die beiden Relationen (4.84) und (4.85) werden später zu den *biorthogonalen* Wavelets führen. Im Spezialfall $H(z) = \tilde{H}(z)$ und $G(z) = \tilde{G}(z)$ erhalten wir Relation (4.52), die in Lemma 4.6 für Wavelets gezeigt wurde.Dann gilt außerdem (4.50) aus Lemma 4.5, so dass Formel (4.81) exakt wird, d. h. $\tilde{c}^j(z) = c^j(z)$.

Entsprechende Relationen kann man auch für Pre-Wavelets ableiten.In den Zerlegungsformeln des vorhergehenden Unterabschnitts muss man dann die $H(z), G(z)$ durch die allgemeineren Filter $P(z), Q(z)$ aus Satz 4.9 ersetzen.Dasselbe muss in den obigen Formeln (4.79) für $c^{j-1}(z^2)$ und $d^{j-1}(z^2)$ geschehen.Nimmt man dann für die Rekonstruktion in (4.81) als Filter $\tilde{H}(z) = H(z), \tilde{G}(z) = G(z)$,so sieht man auf Grund der Definition der Determinante $D(z)$ in Satz 4.9 , dass (4.81) exakt wird bzw. Formel (4.76) gilt.

Im Spezialfall von Spline–Prewavelets sind die Symbole der Filter $P(z), Q(z)$ keine Polynome mehr bzw. die entsprechenden Filter nicht mehr endlich. Dies liegt daran, dass $|D(z)| \neq 1$ ist und dies gilt auch im Falle der Spline–Prewavelets mit kompaktem Träger von Satz 4.11. Eine allgemeine Methode zur Berechnung der zugehörigen Zerlegungs– und Rekonstruktionsformeln besteht darin,die auftretenden diskreten Faltungen durch endliche Teilsummen zu ersetzen ,wodurch ein Abschneidefehler ensteht. Untersuchungen dazu findet man z.B. in Chui [Chu92],Kap.7.Eine

andere Möglichkeit besteht in der Aufspaltung in einzelne Filter ,die entweder endlich sind oder die man rekursiv berechnen kann.Dies liefert effiziente Algorithmen (vergl. den am Ende von Abschnitt 4.3.2 zitierten Artikel von Unser-Altroubi-Eden).

Auf diesem Wege kann man die Konstruktion von Wavelets bzw. Pre-Wavelets auf anderem Wege – nämlich über diskrete Faltungen (Filter) von Folgen – nochmals motivieren bzw. einführen. Ferner ist damit die Verbindung zum Filter-Design im Elektroingenieurwesen (siehe etwa [Bra]) darstellbar. Mehr dazu findet der interessierte Leser in [Dau92] (Abschnitt 5.6), und wesentlich umfangreicher in [Wic96]. Wickerhauser baut seinen Zugang ganz darauf auf und behandelt speziell in Kapitel 5ff. Wavelets und biorthogonale Wavelets. Dort findet man auch ausführliche Anleitungen zur Implementation von Algorithmen auf Wavelet-Basis.

4.4.3 Zum Problem der Ausgangs-Approximation.

Noch gar nichts haben wir über die anfängliche Approximation gesagt. Das soll jetzt in aller Kürze getan werden. Üblicherweise befindet man sich in der Situation, dass man die zu approximierende Funktion nur an diskreten Stellen, sagen wir an den Stellen $2^{-n}k$ kennt; d. h. die Abtastrate $h = 2^{-n}$ ist vorgegeben. Die einfachste Wahl ist dann natürlich

$$s(x) = s_n(x) = \sum_k c_k^n \varphi(2^n x - k), \qquad c_k^n = f\big(2^{-k}k\big) \tag{4.86}$$

mit einer geeigneten Funktion φ die die Forderung

$$\varphi(l) = \delta_{0l} \tag{4.87}$$

erfüllt, denn dann wird durch $s(x)$ die – sofern die Abtastwerte zuverlässig sind – wünschenswerte Interpolations-Eigenschaft

$$s\big(2^{-n}l\big) = \sum_k f\big(2^{-n}k\big)\varphi(l-k) = f\big(2^{-n}l\big) \tag{4.88}$$

trivialerweise erfüllt.Hierin liegt ein Vorteil der Verwendung einer Basis aus interpolatorischen Spline–Prewavelets

Für orthogonale $\varphi(2^n x - k)$, also Wavelets ist Bedingung (4.87) jedoch nicht erfüllt. Das Beste was man erreichen kann ist, dass φ bei 0 gut lokalisiert ist .Dann kann man sich leicht überlegen – man ersetze dazu die Summe über k durch eine Summe über $|k-l| \le r$ mit einem gewissen r – dass Bedingung (4.86) i.a. nur bis zu einem gewissen n ausreichend genau erfüllt ist.

Statt bei der elementaren Methode der Interpolation zu bleiben kann man natürlich auch direkt auf die beste Approximation der Funktion s durch Funktionen aus V_n abzielen, also darauf, dass

$$f\big(2^{-n}k\big) \approx (f, \varphi_{k-n}), \qquad \varphi_{k,n}(x) = 2^{n/2}\varphi(2^n x - k),$$

mit einer möglchst kleinen Abweichung erfüllt ist. Dazu macht man eine Taylorentwicklung um den Punkt $x_{n,k} = 2^n k$

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{k,n}) &= 2^{n/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(2^n(x+k))\varphi(x)\,dx \\ &= 2^{n/2} f(x_{n,k}) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx + 2^{3n/2} f'(x_{n,k}) \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha)\varphi(x)\,dx \\ &\quad + 2^{5n/2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha)^2 f''\big(\eta(x)\big)\varphi(x)\,dx,\end{aligned}$$

$\eta = \eta(x, k, \alpha, n)$. Im Falle der Entwicklung bis zum konstanten Glied erhält man

$$(f, \varphi_{k,n}) = 2^{n/2} f(2^n k) + \mathcal{O}\Big(2^{3n/2}\Big)$$

wenn die $\int \varphi(x)\,dx = 1$ worausgesetzt wird und f' beschränkt ist. Verschwindet $\int x\varphi(x)\,dx$, (das erste Moment also), so ist die Fehlerordnung $\mathcal{O}\big(2^{5n/2}\big)$ (sofern f'' beschränkt ist). Es ist dann klar, dass die Fehlerordnung mit steigender Zahl der verschwindenden Momente größer wird. – Es sei hierzu auf die Sätze 2.2 und 2.23 in Kapitel 2 verwiesen, wo dies in einem wesentlich allgemeineren Rahmen gezeigt wird. Daubechies konstruierte nun spezielle Wavelets (die sogenannten *Coiflets)*, die einerseits einen möglichst kleinen Träger und andererseits eine vorgegebene Anzahl von verschwindende Momenten haben. Wir gehen nicht weiter darauf ein und verweisen dazu auf [BCR91].Dort wird auch gezeigt ,dass die obigen Überlegungen zur Entwicklung effektiver Algorithmen für die Anwendung auf Integral-und Pseudodifferentialoperatoren führen.

Die weitere Verwendung der Orthogonal-Projektion als Approximation läuft nach dem oben angegebenen Schema ab. Man fängt mit

$$c_k^n = \Big(f, 2^{n/2}\varphi(2^n \cdot -k)\Big)_2,$$

also den Entwicklungskoeffizienten der Funktion f nach der ONB von V_n. Ihre „schnelle“ Berechnung führt man mit Hilfe es oben angegebenen Zerlegungsverfahrens durch. Aus (4.75) und der Orthogonalität der W_j folgt dann – man vergleiche dies mit (4.42) –

$$s_n \equiv P_n f = \sum_{j=n-M}^{n-1} Q_j f + s_{n-M}, \qquad Q_j f \equiv t_j$$

und im Vergleich mit (4.76) zeigt sich

$$t_j(x) = \sum_k \big(f, \Psi\big(2^j \cdot -k\big)\,\Psi\big(2^j x - k\big)\big), \qquad d_k^j = \big(f, \Psi\big(2^j \cdot -k\big)\big).$$

Die Koeffizienten d_k^j sind also die Koeffizienten der Wavelet-Basis der Stufe j. Wie schon gesagt ist der Berechnungsaufwand einmal proportional zur Länge der Filterfolge $\{h_k\}$, zum anderen zur Anzahl der verwendeten Entwicklungskoeffizienten c_k^n. Die Zwischenapproximationen sind keine Orthogonalprojektionen, sondern sie sind nur für verschiedene j zueinander orthogonal. Der durch den Abbruch entstehende Approximations-Fehler muss natürlich noch untersucht werden, ebenso die Fehler bei der Berechnung der Skalarprodukte.

4.4.4 Unterteilungsalgorithmen

Die Verfeinerungsgleichung (4.24), der die Erzeugende φ jeder MRA genügt ,kann man noch in anderer Weise zur effektiven Berechnung eines Elementes

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^n \varphi(2^n x - k) \in V_n$$

benützen. Dies wurde bereits (im Anschluss an Lemma 3.15 zum Beweis der Verfeinerungsgleichung für kardinale B-Splines) kurz für den Fall der kardinalen Splines dargestellt. Auch im allgemeinen Fall gibt es – wegen der Inklusion $V_n \subseteq V_{n+1}$ – für $s(x) \in V_n$ eine Darstellung

$$s(x) = \sum_l c_l^{n+1} \varphi\big(2^{n+1} x - l\big). \tag{4.89}$$

Die neuen Koeffizienten erhält man dabei auf einfache Weise aus den alten, denn es gilt

$$\begin{aligned}\sum_l c_l^n \varphi(2^n x - l) &= \sum_l c_l^n \sum_k h_k \varphi\big(2^{n+1}x - 2l - k\big) \qquad \text{mit } k' := 2l + k \\ &= \sum_{k'} \varphi\big(2^{n+1}x - k'\big) \sum_l c_{l'}^n h_{k'-2l}, \text{ d. h.}\end{aligned}$$

$$c_k^{n+1} = \sum_l c_l^n h_{k-2l}. \tag{4.90}$$

Man kann diese Formel nun rekursiv anwenden und erhält die allgemeine Darstellung

$$s(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{n+N} \varphi\big(2^{n+N}x - l\big), \tag{4.91}$$

dabei ist N beliebig. Die Koeffizienten c_l^{n+N} können mit Hilfe von (4.88) iterativ berechnet werden. Dies ist das Prinzip der *Unterteilungsalgorithmen.*

Erfüllt φ gewisse Voraussetzungen (die z. B. dann erfüllt sind, wenn φ ein B-Spline ist, so kann man zeigen, dass die Folge der Koeffizienten $\{c_l^{n+N}\}$ der immer weiter „verfeinerten“ Darstellung (4.91) gegen $\{s\big(2^{-n-N}l\big)\}$ strebt. Dies ergibt einen sehr effizienten Algorithmus, wenn man die Kurve $s(x)$ global berechnen will. Um sich das plausibel zu machen nehme man $n = 0$ an und gehe davon aus, dass die Koeffizienten c_l^N die Funktionswerte $s\big(2^{-N}l\big)$ genügend (d. h. bis auf eine vorzugebende Toleranz) genau approximieren. Geht man von K Koeffizenten aus, so muss man insgesamt $2^N K$ Koeffizienten auf dem feinsten Gitter berechnen. Hat die Folge $\{h_k\}$ die Länge $L < \infty$, so ist die Zahl der für den Übergang von c_l^j nach c_l^{j+1} notwendigen Multiplikationen höchstens gleich $2^{j+1}K$. Die Gesamtzahl der Rechenoperationen ist also höchstens gleich K mal der Gesamtzahl der zu berechnenden Koeffizienten.

Um die Konvergenz von $\{c_l^N\}_{l\in\mathbb{Z}}$ gegen $\{s\big(2^{-N}l\big)\}$ zu verstehen müssen wir einige der Grundlagen der Theorie der Unterteilungsalgorithmen darstellen. Weitergehende Einzelheiten findet man in [CDM91]. Dort wird die Theorie sehr allgemein behandelt und der multivariate Aspekt in den Vordergrund gestellt. Ferner sei wegen des engen Zusammenhangs mit den Wavelets auf die Arbeiten [DL91] und [DL92] verwiesen.

Es sei nunmehr $\{h_l\}_{l\in I}$ eine Folge endlicher Länge, eine sogenannte *Maske.* Dann definiere man auf dem Folgenraum $l_\infty(\mathbb{Z})$ den Operator

$$\begin{aligned} S : l_\infty(\mathbb{Z}) &\to l_\infty(\mathbb{Z}) \\ \mathbf{c} &\to (S\mathbf{c})_\alpha := \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{\alpha-2l} c_l \end{aligned} \tag{4.92}$$

und damit iterativ das Unterteilungsverfahren

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^0 &:= \mathbf{c} := \{c_l\}_{l\in\mathbb{Z}} \\ \mathbf{c}^N &:= S\mathbf{c}^{N-1}, \qquad N = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{4.93}$$

Dieses Verfahren heißt konvergent für $\mathbf{c} \in_\infty (\mathbb{Z})$, falls eine stetige Funktion $f_\mathbf{c}$ auf $\mathbb{R}$ existiert, so dass in der l_∞-Norm $\|\cdot\|_\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \big\| f_\mathbf{c}\big(2^{-n}l\big) - c_l^n \big\|_\infty = 0 \tag{4.94}$$

gilt. Um diese Konvergenz von Folgen gegen eine Funktion genauer zu untersuchen, geht man von der Folge $\{c_l^0\}_{l\in\mathbb{Z}}$ zu einer stückweise linearen Funktion $f_{\mathbf{c}}^0(x)$ (dem sogenannten *Kontrollpolygon)* über. Dieses ist definiert als

$$f_{\mathbf{c}}^0(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l^0 N_2(x-l) \tag{4.95}$$

mit

$$N_2(x) := \begin{cases} 1-|x-1|, & 0\le x\le 2 \\ 0, \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann definiere man allgemeiner

$$f_{\mathbf{c}}^n(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l^n N_2(2^n x - l), \qquad n = 1,2,\dots, \tag{4.96}$$

so dass

$$f_{\mathbf{c}}^n\left(2^{-n}l\right) = c_l^n \tag{4.97}$$

gilt. Mit anderen Worten :die Folge $\{c_l^n\}$ wird jetzt dem feineren Gitter $2^{-n}\mathbb{Z}$ zugeordnet. Man bezeichnet $f_{\mathbf{c}}^n$ daher als Kontrollpolygon zum Gitter $2^{-n}\mathbb{Z}$. Mit dem bereits in Abschnitt 4.2.4 definierten Operator

$$(Tf)(x) := \sum_l h_l f(2x-l). \tag{4.98}$$

folgt

$$\begin{aligned}\left(Tf_{\mathbf{c}}^0\right)(x) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l^0 T(N_2(\cdot - l))(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l^0 \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} h_\beta N_2(2x-2l-\beta) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} N_2(2x-j) \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{j-2l} c_l^0 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(Sc^0\right)_j N_2(2x-j)\end{aligned}$$

und nach Induktion

$$\left(T^n f_{\mathbf{c}}^0\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(S^n \mathbf{c}^0\right)_j N_2(2^n x - j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j^n (2^n x - j) = f_c^n(x). \tag{4.99}$$

Durch den Operator T wird also die Frage nach der Konvergenz der Folgen c^n auf die Frage der Konvergenz der stückweise linearen Funktionen $f_{\mathbf{c}}^n$ bzw. auf das Iterationsverhalten von T zurückgeführt.Dazu haben wir in Abscnitt 4.2.4 die Konvergenz der Fouriertransformierten $\hat{T^n f}(v)$ in $L_2(\mathbb{R})$ und damit auch die Konvergenz der Funktionen $f_{\mathbf{c}}^n$ in $L_2(\mathbb{R})$ bewiesen.

Im Hinblick auf die angestrebte Konvergenz der „Kontrollpunkte“ sind wir jedoch nach (4.92) an der Konvergenz der $T^n f$ im L_∞-Sinne interessiert. Zur Untersuchung der Konvergenz der c_j^n betrachten wir zunächst den Spezialfall

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\delta} := \{\delta_l := \delta_{l,0}\}_{l\in\mathbb{Z}}. \tag{4.100}$$

Satz 4.16. *Die Maske $\{h_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sei endlich und die zugehörige Verfeinerugnsgleichung (4.24) besitze als Lösung eine stetige Funktion φ mit kompaktem Träger (die nach Lemma 4.7 bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist). Ferner gelte für die Translate von φ eine L_∞-Stabilitätsbedingung, d. h.*

$$\|\mathbf{c}\|_\infty = \sup_l |c_l| \le D \left\| \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l \varphi(\cdot - l) \right\|_\infty \tag{4.101}$$

mit einer Konstanten D für alle Folgen $\mathbf{c} \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Dann konvergieren die Kontrollpunkte

$$\delta_\alpha^n := (S^n\delta)_\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{Z}$$

gleichmäßig für $n \to \infty$ gegen die Werte $\varphi(2^{-n}\alpha)$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_\alpha \left|\varphi\left(2^{-n}\alpha\right) - \delta_\alpha^n\right| = 0.$$

Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f_\delta^n(x) - \varphi(x)\right\|_\infty = 0$$

für Folgen $f_\delta^n(x)$ nach (4.94).

Bemerkung 4.16. Einen Existenzsatz für die Lösung von (4.24) haben wir – wie schon erwähnt – in Abschnitt 4.2.4 bewiesen. Dort haben wir auch gezeigt, dass bei einer endlichen Maske der Träger von φ notwendigerweise kompakt sein muss. ♢

Beweis. Wir wissen nach Bemerkung 4.6, dass bei Annahme der Normierung $\hat\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ die Translate von φ eine Zerlegung der Eins bilden:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \varphi(x-\alpha) = 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es sei dann $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]$ für ein $R > 0$ nach Voraussetzung. Dann können wir für festes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x) - \sum_\alpha \varphi\left(2^{-n}\alpha\right)\varphi(2^n x - \alpha)\right| &= \sum_{|\alpha - 2^n x|\le R} \frac{\varphi(x) - \varphi(2^{-n}\alpha)}{\varphi(2^n x - \alpha)} \\ &\le \sum_{|\alpha-2^n x|\le R} \omega\left(\varphi; 2^{-n}R\right)\left|\varphi(2^n x - \alpha)\right| \\ &\le 2R\omega\left(\varphi; 2^{-n}R\right)\|\varphi\|_\infty\end{aligned} \tag{4.102}$$

abschätzen, denn die Menge $\{\alpha \in \mathbb{Z} : |\alpha - 2^n x| \le R\}$ hat höchstens $2R$ Elemente. Die Größe $\omega(\varphi; 2^{-n}R)$ ist dabei der aus Abschnitt 2.1 bekannte Stetigkeitsmodul von φ.

Nun gilt aber für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi(x) = \varphi_\delta^n(x) = \sum_\alpha \delta_\alpha^n \varphi(2^n x - \alpha) \tag{4.103}$$

wie man durch Induktion leicht sieht. In der Tat gilt $\varphi(x) = \varphi_\delta^0(x)$ nach Definition von $\delta_\alpha^0 = \delta_\alpha$ und Fouriertransformationn zeigt

$$\left[\varphi_\delta^n\right]^\wedge(v) = \left[T\varphi_\delta^{n-1}\right]^\wedge(v) = H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\left[\varphi_\delta^{n-1}\right]^\wedge\left(\frac{v}{2}\right) = H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right)\hat\varphi\left(\frac{v}{2}\right) = \hat\varphi(v)$$

nach Induktionsannahme. Aus(4.100) und (4.101) ergibt sich zusammen

$$\left\|\sum_\alpha \left[\delta_\alpha^n - \varphi\left(2^{-n}\alpha\right)\right]\varphi(2^n\,\cdot - \alpha)\right\|_\infty \le 2R\|\varphi\|_\infty\omega\left(\varphi; 2^{-n}R\right)$$

und daraus mit der Stabilitätsvoraussetzung

$$\sup_\alpha \left|\varphi\left(2^{-n}\alpha\right) - \delta_\alpha^n\right| \le 2R \cdot D\|\varphi\|_\infty\omega\left(\varphi; 2^{-n}R\right). \tag{4.104}$$

Daraus folgt die behauptete Konvergenz der δ_α^n für $n \to \infty$. Die Konvergenz der Folgen $f_\delta^n(x)$ folgt durch eine analoge Abschätzung , denn $f_\delta^0(x) = N_2(x)$ erfüllt wie φ die Bedingung $\sum_l N_2(x-l) = 1$. □

Mit diesem Satz haben wir die Konvergenz eines – wie schon bemerkt – sehr effizienten Algorithmus zur Berechnung von φ gezeigt. Interessant sind aus diesem Grunde auch Abschätzungen zur Konvergenzgeschwindigkeit, die man in [CDM91] finden kann.

Die Konvergenz einer allgemeinen Folge von Kontrollpunkten kann nun auf den Fall der δ_α^n zurückgeführt werden. Dazu schreiben wir

$$c_l^0 = c_l = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} c_\beta \delta_{\cdot,l-\beta}0$$

für eine endliche Folge $\{c_l\}$ und erhalten

$$(S^n\mathbf{c})_\alpha := \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} (S^n\boldsymbol{\delta}_{\cdot\beta})_\alpha,$$

wobei $\boldsymbol{\delta}_{\cdot\alpha}$ die Folge $\{\delta_{l-\beta}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ für festes β bezeichnet. Durch Induktion zeigt man

$$(S^n\delta_{\cdot-\beta})_\alpha = (S^n\delta)_{\alpha-2^n\gamma},$$

denn für $n=0$ stimmt dies trivialerweise – S^0 ist die Identität – und ferner gilt

$$\begin{aligned}\big(S^{n+1}\delta_{\cdot-\beta}\big) &= \sum_l h_{\alpha-2l}(S^n\delta_{\cdot-\beta})_l = \sum_l h_{\alpha-2l}(S^n\delta)_{l-2^n\beta}\\ &= \sum_\gamma (S^n\delta)_\gamma h_{\alpha-2\gamma-2^{n+1}\beta} = \big(S^{n+1}\big)_{\alpha-2^{n+1}\beta}.\end{aligned}$$

Dies in die Formel für $S^n\mathbf{c}$ eingesetzt ergibt

$$(S^n\mathbf{c})_\alpha = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} c_\beta (S^n\delta)_{\alpha-2^n\beta} \tag{4.105}$$

Damit zeigen wir nun

Satz 4.17. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt für alle Folgen* $\mathbf{c}\in l_\infty(\mathbb{Z})$ *die Konvergenzaussage*

$$\sup_\alpha \big\|c_\alpha^n - s_{\mathbf{c}}\big(2^{-n}\alpha\big)\big\| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{4.106}$$

wobei $c_\alpha^n = (S^n\mathbf{c})_\alpha$ *und* $s_{\mathbf{c}}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi(x-j)$.

Beweis. Es gilt $s_c(2^{-n}\alpha) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi(x-j)$ und daher mit (4.103)

$$\begin{aligned}\big|c_\alpha^n - s_{\mathbf{c}}\big(2^{-n}\alpha\big)\big| &= \left|\sum_\beta c_\beta[(S^n\delta)_{\alpha-2^n\beta} - \varphi\big(2^{-n}\alpha-\beta\big)]\right|\\ &\le \|\mathbf{c}\|_\infty \sum_\beta \Big\|(S^n\delta)_{\alpha-2^n\beta} - \varphi\big(2^{-n}\alpha-\beta\big)\Big\|\\ &\le 2RD\|\varphi\|_\infty\|\mathbf{c}\|_\infty\omega\big(\varphi;2^{-n}R\big).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Am Schluss bemerken wir noch, dass mit Satz 4.17 die Konvergenz im Sinne von (4.92) gezeigt wurde. Eine anschaulichere Interpretation ergibt sich, wenn man die Parameter n und α so koppelt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{2^n} = x\in\mathbb{R}$$

für festes x gilt. Dann folgt aufgrund der Stetigkeit von φ aus (4.104) sofort

$$\lim_{n\to\infty} c_{\alpha_n}^n = s_{\mathbf{c}}(x).$$

4.5 Konstruktion von glatten Wavelets mit kompaktem Träger

4.5.1 Bedingungen an das Symbol der Skalierungsgleichung

Die bisher vorgestellten Kontruktionen von Wavelets oder Prewavelets (in Abschnitt 4.3) haben erzeugende Funktionen von translations – invarianten Räumen geliefert, die entweder (wie die Pre–Wavelets vom Spline-Typ) selbst eine vorgegebene Glattheit und einen kompakten Träger hatten oder deren Fouriertransformierte diese Eigenschaft hatten (dies war bei den Wavlets vom Paley-Littlewood-Typ der Fall). Beim Übergang zu den Fourier - Transformierten bzw.den inversen Fourier -Transformierten ging die Eigenschaft des kompakten Trägers allerdings verloren (bei den Spline– Prewavelets schon bei der Konstruktion einer ONB im Ausgangs–Splineeraum). Dies steht im Einklang mit dem Heisenbergschen Unschärfeprinzip ,dessen Rolle schon in Abshnitt 4.1 erläutert wurde.Der dort zitierte Satz von Balian-Low zeigt,dass das Phänomen in verschärfter Form bei orthogonalen Basen aus ganzzahligen Translaten auftritt.

Diese Unvereinbarkeit von zu starkem gleichzeitigen Abklingen einer Funktion und ihrer Fourier–Transformierten wird jetzt nochmals untersucht. Statt des Abklingens der Fourier – Transformierten kann man äquivalent dazu die Glattheit der Funktion voraussetzen (vergl.Abschnitt 2.4.2) ,womit wieder die Problematik bei den oben erwähnten Beispielen angesprochen ist. Wir zeigen dazu folgenden Satz von I.Daubechies,der diese Frage für biorthogonale Systeme von Translaten untersucht.

Satz 4.18. *Es seien f und g nicht-konstante Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$ und*

$$f_{j,k}(x) := 2^{-j/2} f\big(2^{-j}x - k\big), \qquad g_{j,k}(x) := 2^{-j/2} g\big(2^{-j}x - k\big)$$

definiert.Ferner sei die Biorthogonalitätsrelation

$$(f_{j,k}, g_{j',k'}) = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'} \tag{4.107}$$

für diese Funktionen erfüllt.Ist dann f glatt in dem Sinne , dass $f \in C^m$ und alle $f^{(l)}$ mit $l \le m$ gleichmäßig beschränkt sind, so impliziert ein Abklingverhalten von g in der Form $|g(x)| \le C(1+|x|)^{-\alpha}$ mit $\alpha > m+1$,dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l g(x)\, dx = 0, \qquad 0 \le l \le m \tag{4.108}$$

gilt, d. h. die ersten $m+1$ Momente von g müssen verschwinden.

Die Anwendungen dieses Satzes auf orthonormale Wavelets (vergl.(4.39)) liefern einige Antworten auf die oben aufgeworfene Frage , welchen Grad an gleichzeitiger Lokalisierung für ein Wavelet und seine Fourier–Transformierte man erreichen kann ,wobei letztere Eigenschaft wie bemerkt durch die Glattheit des Wavelets beschrieben werden kann.

Korollar 4.3. *Es gelte für $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$*

$$(\Psi_{j,k}, \Psi_{j',k'}) = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}.$$

Dann kann $\Psi(x)$ nicht gleichzeitig exponentiell in x abklingen und in C^∞ liegen bei gleichmäßig beschränkten Ableitungen.

Als weitere Anwendung folgt aus Satz 4.18 eine notwendige Bedingung an die Struktur der Symbole von Skalierungsgleichungen , wenn die zugehörigen Wavelets vorgebene Glattheit und Abklingverhalten besitzen sollen.

Korollar 4.4. *Es mögen die Translate von $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ und $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ jeweils eine ONB bilden,und Ψ sei ein Wavelet zu φ mit einem vorgegebenen Abklingverhalten $|\Psi(x)| \leq C(1+|x|)^{-N-\varepsilon}$. Sollen dann φ, Ψ glatt sein mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen $l-$ter Ordnung für $0 \leq l \leq N-1$,so impliziert dies für das Symbol $H(z)$ von φ die Bedingung*

$$H(z) = ((1+z)/2)^N L(v), \qquad z = \mathrm{e}^{-iv}.$$

mit $L(v) \in C^{N-1}$.

Beweis. Es gelten nach Abschnitt 4.2 die Relationen

$$\hat{\varphi}(v) = H(\mathrm{e}^{-iv/2})\hat{\varphi}(v/2), \qquad \hat{\Psi}(v) = G(\mathrm{e}^{-iv/2})\hat{\varphi}(v/2),$$

sodass wegen $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ auch die Symbole $H(z), G(z)$ in einer Umgebung von 0 $(N-1)-$ mal stetig differenzierbar sind.Nach Korollar 4.1, Formel (4.56) gilt weiter

$$\hat{\Psi}(v) = a(v/2)\overline{H(\mathrm{e}^{-i(v/2+\pi)})}\hat{\varphi}(v/2), \qquad z = \exp(-iv)$$

mit $|a(v)| = 1$.Es muss dann auch $a(v)$ in einer Umgebung von 0 genauso glatt wie $H(z), G(z)$ sein.Nun gilt nach Satz 4.18 für Ψ die Momentenbedingung (4.108), was nach Lemma 2.4 ,Teil 4 gleichbedeutend damit ist ,dass Ψ eine $N-$fache Nullstelle besitzt.Die obige Relation impliziert dann, dass das Gleiche für $H(z)$ gilt und [4.110 folgt. □

Das eigentliche Ziel in diesem Abschnitt ist aber die Konstruktion von orthonormalen Wavelets , die neben einer ausreichenden Glattheit vor allem einen kompaktem Träger besitzen sollen.In Lemma 4.9 war zwar schon ein Kriterium dafür an das Symbol $H(z)$ aufgestellt worden ,jedoch nur unter den vereinfachenden Annahmen, dass supp φ bereits aus einem einzigen (wenn auch beliebigen) Intervall besteht und ferner ,dass die „Maske“ $\{h_l\}$ keine Lücken besitzt.

Wir benötigen deshalb noch ein allgemeineres Kriterium,das auf dem Satz von Paley–Wiener (Satz 2.21 in Abschnitt 2.5) beruht.

Satz 4.19. (Deslauriers-Dubuc,1987) *Ist die endliche Reihe*

$$\sum_{n_1}^{n_2} \gamma_j \mathrm{e}^{-ijv}, \qquad \sum_{n_1}^{n_2} \gamma_j = 1$$

gegeben, so ist $\prod_{j=1}^{\infty} g\left(\mathrm{e}^{2^{-j}iv}\right)$ die Fourier–Transformierte einer Funktion mit Träger $[n_1, n_2]$.

Zusammen mit der nach Lemma 4.7 garantierten Existenz des unendlichen Produkts in diesem Satz wissen wir damit,dass bei Wahl eines trigonometrischen Polynoms als Symbol einer Verfeinerungsgleichung diese eindeutig lösbar ist und als Lösung die Erzeugende φ eines tranlationsinvarianten Raumes mit einem kompaktem Träger liefert. Dies wird die Grundlage des Vorgehens im nächsten Unterabschnitt bilden.

4.5.2 Konstruktion der Daubechies–Wavelets

Als notwendige Bedingung dafür ,dass die Translate von φ eine ONB bilden, wurde in Lemma 4.5 an das Symbol $H(z)$ von φ die Beziehung

$$|H(x)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, \qquad z = \mathrm{e}^{-iv}. \tag{4.109}$$

aufgestellt.Nach Lemma 4.10 wissen wir ausserdem, dass $H(z)$ notwendigerweise als trigonometrisches Polynom zu wählen ist ,um einen kompakten Träger für φ zu erhalten.Da ferner φ und das dazu konstruierte Wavelet ψ eine gewisse Glattheit besitzen sollen, also $\varphi, \psi \in C^N$. Dann muss nach Korollar 4.4 des vorigen Unterabschnitts

$$H(z) = ((1+z)/2)^n L(v), \qquad z = \mathrm{e}^{-iv}. \tag{4.110}$$

mit einem trigonometrisches Polynom $L(v)$ gelten. Um Beziehung (4.109) näher zu untersuchen,setzen wir

$$M(v) := |H(z)|^2 = |\mathrm{e}^{-imv} H(\mathrm{e}^{-iv})|^2 = (cos\, v/2)^{2N} |L(v)|^2, \qquad z = \mathrm{e}^{-iv}. \tag{4.111}$$

Wir setzen nun weiter voraus, dass die Koeffizienten von $H(z)$ und somit diejenigen von $H(z)^2$ reell sind.Multiplikation mit dem Faktor $\exp -imv$ –wobei m der Grad von $H(z)$ ist –zeigt,dass $|H(z)|^2$ und $|L(v)|^2$ Cosinus-Polynome sind.Man kann daher $|L(v)|^2$ als ein Polynom von $\sin^2 v/2 = (1-\cos v\,)/2$ schreiben und erhält aus (4.109) als Bedingung an das Polynom P

$$1 = M(v) + M(v+\pi) = (1-y)^N\, P(y) + y^N\, P(1-y), \qquad y := \sin^2 v/2. \tag{4.112}$$

Die Lösung dieser Gleichung geschieht mit

Satz 4.20. *Es gelten folgende Aussagen :*

1. *Sind $p_1(x), p_2(x)$ zwei teilerfremde Polynome , so gilt*

$$p_1(x)A(x) + p_2(x)B(x) = 1 \tag{4.113}$$

   mit zwei weiteren Poynomen $A(x)$, $B(x)$.

2. *Sind $p_1(x), p_2(x)$ Polynome vom Grad n_1, n_2 so kann man in (4.113) Polynome $A^*(x), B^*(x)$ vom Grad $\le n_2 - 1$ bzw. vom Grad $\le n_1 - 1$ finden und diese sind eindeutig bestimmt.*

3. *Das Polynom*

$$P_N^*\,(y) := \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k$$

   ist eine spezielle Lösung von (4.112), und zwar das eindeutig bestimmte Polynom niedrigsten Grades $N-1$. Die allgemeine Lösung von (4.112) hat die Form

$$P(y) = P_N^*\,(y) + y^N\; R(y) \tag{4.114}$$

   wobei $R(y)$ ein Polynom mit der Eigenschaft $R(1-y) = -R(y)$ ist.

Beweis. zu a): Er benützt den Euklidischen Algorithmus.O.B.d.A. kann man $\operatorname{grad} p_1 \ge \operatorname{grad} p_2$ annehmen und erhält

$$p_1(x) = a_2(x)p_2(x) + b_2(x), \qquad \operatorname{grad} a_2 = \operatorname{grad} p_1 - \operatorname{grad} p_2$$

Ebenso folgt

$$p_1(x) = a_2(x)p_2(x) + b_2(x), \qquad \operatorname{grad} b_3 < \operatorname{grad} b_2$$

und iterativ weiter (mit $b_1 := p_2$) für $i = 2, 3, \ldots$,

$$b_{i-1}(x) = a_{i+1}(x)b_i(x) + b_{i+1}(x), \qquad \operatorname{grad} b_{i+1} < \operatorname{grad} b_i. \tag{4.115}$$

daher muss diese Iteration einmal stoppen und es gilt $b_{n+1} = 0$ für ein gewisses n, d.h.

$$b_{n-1}(x) = a_{n+1}(x)b_n(x).$$

Hieraus schliesst man, dass b_n Teiler von b_{n-1} ist,und dann sukzessive aus (4.115 für $i = n-1, n-2, \ldots$,dass b_n ein Teiler von sowohl p_1 als auch p_2 ist.Da $p-1, p_2$ teilerfremd sein sollen folgt daraus, dass b_n eine Konstante $\neq 0$ sein muss.

Nun geht man rückwärts und erhält

$$\begin{aligned} b_n &= -a_n b_{n-1} + b_{n-2} = -a_n(b_{n-3} - a_{n-1}b_{n-2}) + b_{n-2} \\ &= (1 + a_n a_{n-1})b_{n-2} - a_n b_{n-3} \equiv c^{(2)}b_{n-2} - d^{(2)}b_{n-3}. \end{aligned}$$

Hier wieder (4.115 eingesetzt in b_{n-2} erhält man $b_n = c^{(3)}b_{n-3} - d^{(3)}b_{n-4}$ usw. bis schliesslich

$$b_n = c^{(n-2)}b_2 - d^{(n-2)}b_1 = c^{(n-2)}(p_1 - a_2 p_2) - d^{(n-2)}p_2$$

folgt, d.h. wegen $b_n = const.$ die Behauptung.

Beweis zu b): Gilt a) mit gewissen $A(x), B(x)$,so schreibe man $A(x) = C(x)p_2(x) + A^*(x)$, wobei $\operatorname{grad} A \geq n_2 = \operatorname{grad} p_2$ angenommen ist und $\operatorname{grad} A^* < n_2$ gilt.Mit diesem $C(x)$ setze man $B^*(x) = C(x)p_1(x) + B(x)$ und es folgt

$$\begin{aligned} 1 &= p_1(x)[C(x)p_2(x) + A^*(x)] + p_2(x)[B^*(x) - C(x)p_1(x)] \\ &= p_1(x)A^*(x) + p_2(x)B^*(x) \end{aligned} \tag{4.116}$$

und daraus $\operatorname{grad} A^* < n_1 = \operatorname{grad} p_1$.Die Eindeutigkeit folgt nun so: wären $\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)$ ein weiteres Paar solcher Polynome ,so wäre ebenfalls (4.117) erfüllt und Subtraktion ergibt

$$0 = p_1(x)[A^*(x) - \tilde{A}(x)] + p_2(x)[B^*(x) - \tilde{B}(x)].$$

Dies liefert aber einen Widerspruch ,denn die Nullstellen von $p_2(x)$ müssten dann alle in denen von $A^* - \tilde{A}$ enthalten sein,was $\operatorname{grad} p_2 > \operatorname{grad} a^* - \tilde{A}$ nicht sein kann. **Beweis zu c)**:Wir wenden Teil b) auf $p_1(x) = (1-x)^N, p_2(x) = x^N$ an .Dann implizieren die Eindeutigkeit von $A^*(x), B^*(x)$ und

$$1 = (1-x)^N A^*(x) * x^N B^*(x) = x^N A^*(1-x)] + (1-x)^N B^*(1-x),$$

dass $B^*(x) = A^*(1-x)$ gilt.Dies setzen wir in obige Gleichung ein, lösen nach A^* auf und entwickeln nach Taylor.Dies ergibt

$$\begin{aligned} A^*(x) = &= (1-x)^{-N}[1 - x^N A^*(1-x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{k} x^k [1 - x^N A^*(1-x)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} x^k + R_0(x) := P_N^*(x) + R_0(x) \end{aligned}$$

mit einem Polynom $R_0(x)$.Dieses enthält Potenzen ,die alle höher als x^N sind.Da aber A^* vom Grad $N-1$ sein soll,muss es gleich der Summe rechts sein.Also ist $A^*(x) = P_N^*(x)$ mit dem oben angegebenen Polynom $P_N^*(x)$ eine Lösung von (4.112).

Die Lösungen $P(x)$ mit höherem Grad können als $P(x) = P_N^*(x) + \tilde{R}(x)$ mit einem Polynom $\tilde{R}(x)$ geschrieben werden.Dann folgt

$$0 = (1-x)^N \ \tilde{R}(x) + x^N \ \tilde{R}(1-x)$$

Dann muss aber $\tilde{R}(x)$ durch x^N teilbar sein.Schreibt man demgemäss $\tilde{R}(x) = x^N R(x)$,so sieht man ,dass $R(1-y) = -R(y)$ gelten muss. □

Bemerkung 4.17. Teil a) und b) dieses Satzes bilden einen Spezialfall des Satzes von Bezout. ♢

Mit obigem Satz ist die Lösung der Gleichung (4.112) vollständig beschrieben.Um jedoch daraus das Symbol $H(z), z = \mathrm{e}^{-iv}$ zu bestimmen , müssen wir noch die „Wurzel aus M(v)“ in (4.111) ziehen. Dies geht immer unter der lt.(4.111) vorausgesetzten Eigenschaft $M(v) \geq 0$,wie der folgende Satz von F. Riesz zeigt (man beachte ,dass für den „homogenen“ Fall $R(x) = 0$ das Polynom $P_N^*(x)$ bereits diese Bedingung erfüllt !).

Satz 4.21. (F. Riesz 1911) *Ist $M(v)$ ein positives trigonometrisches Cosinus–Polynom vom Grad m, so gibt es ein komplexes Polynom $H(z)$ vom Grad m mit reellen Koeffizienten ,sodass für $z = \mathrm{e}^{-iv}$ gilt*

$$M(v) := |H(z)|^2, \qquad H(z) = (1/2)\sum_{j=0}^{m} h_j z^j. \tag{4.117}$$

Beweis. Er sei hier nur skizziert, Näheres ist G.Polya –G.Szegö: Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis (1964,Bd.II),Kapitel VI Aufgaben 11,40,41) zu entnehmen .

Man schreibt $M(v) = \mathrm{e}^{-imv}Q(\mathrm{e}^{-iv})$,wobei $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_{2m} z^{2m}$ ein komplexs Polynom vom Grad $2m$ ist.Die Koeffizienten haben die Eigenschaft $a_j = \overline{a_{2m-j}}$ und genügen daher $Q(z) = z^{2m}\overline{Q}(z^{-1})$. Man kann also $Q(z)$ folgendermaßen in Nullstellen zerlegen

$$Q(z) = c \cdot z^r \prod_{\mu=1}^{k}(z - \xi_\mu) \prod_{\nu=1}^{l}(z - z_\nu)(z - \overline{z}_\nu^{-1}) \qquad , c \neq 0$$

Hier bezeichnen ξ_μ die Nullstellen mit $|\xi_\mu| = 1$ auf dem Einheitskreis und $z_\nu, \overline{z}_\nu^{-1}$ diejenigen außerhalb (es gilt zudem $\xi_\mu = \overline{\xi}_\mu^{-1}$!).Nun hat jede Nullstelle von $Q(z)$ auf dem Einheitskreis die gleiche Multiplizität wie die entsprechenden von $M(v)$, deren Multiplizität gerade ist wegen $M(v) \geq 0$. Also kann man weiter schreiben $\prod_{\mu=1}^{k}(z - \xi_\mu) = \prod_{\mu=1}^{k/2}(z - \xi_\mu)^2$ und somit (beachte $|\mathrm{e}^{iv} - \overline{z}_\nu^{-1}| = |\mathrm{e}^{-iv} - \overline{z}_\nu|/|z_\nu|$)

$$M(v) = |M(v)| = |c| \cdot |\prod_{\mu=1}^{k/2}(\mathrm{e}^{iv} - \xi_\mu)^2 \prod_{\nu=1}^{l}(\mathrm{e}^{iv} - z_\nu)(\overline{z}_\nu - \mathrm{e}^{-iv})/z_\nu|$$

Daraus folgt schon die Darstellung $M(v) = |H(z)|^2$ mit einem (i. a. komplexen) Polynom $H(z)$ vom Grad $\leq m$. Im vorliegenden Fall eines Cosinus–Polynoms $M(v)$ muss für die Koeffizienten von $Q(z)$ schärfer gelten $a_j = a_{2m-j}$, sodass die Nullstellen ξ_μ und z_ν paarweise konjugiert auftreten , d. h. es sind $\xi_\mu, \overline{\xi_\mu}$ und $z_\nu, \overline{z_\nu}, 1/z_\nu, 1/\overline{z_\nu}$ alle Nullstellen. Entsprechend numeriert kann man sie zusammenfassen und erhält z. B. im zweiten Produkt Faktoren der Form

$$|(\mathrm{e}^{iv} - z_\nu)\overline{(\mathrm{e}^{iv} - z_\nu)}(\overline{z}_\nu - \mathrm{e}^{-iv})\overline{(\mathrm{e}^{-iv} - \overline{z}_\nu)}/|z_\nu|^2 = |\mathrm{e}^{i2v} - 2\mathrm{e}^{iv} Re\ z_\nu + |z_\nu|^2|/|z_\nu|^2.$$

Daher kann in diesem Fall $H(z)$ als Polynom mit *reellen* Koeffizienten angenommen werden. □

Man beachte ,dass die obige Zerlegung nicht eindeutig bestimmt ist.Je nachdem wie man die einzelnen Faktoren zusammenfasst ,erhält man verschiedene $H(z)$.Dies kann man ausnützen ,um möglichst günstige $H(z)$ zu erhalten. Ein Prinzip, nach dem dies geschehen kann, besteht in der Forderung ,dass $H(z)$ sich möglichst ähnlich

wie ein Filter mit linearer Phase verhält,d. h. man wählt unter den nach (4.117) möglichen Zerlegungen $H(z)$ so,dass es möglichst gut die Beziehung

$$H(\mathrm{e}^{-iv}) = \mathrm{e}^{-ilv}|H(\mathrm{e}^{-iv})| \tag{4.118}$$

für ein $l \in \mathbb{Z}$ erfüllt.Ein solcher Filter verhält sich stabiler gegenüber Phasenverzerrungen, was bei einer Reihe von Anwendungen wünschenswert ist.Seine Koeffizienten besitzen ferner die vorteilhafte Symmetrie- Eigenschaft $h_n = h_{2l-n}$ .Dies ist aber bei orthogonalen Wavelets mit kompaktem Träger, wie sie gerade durch die beiden vorangegangenen Sätze über (4.114) und (4.117) geliefert werden sollen, aus prinzipiellen Gründen mit Ausnahme des Haar–Wavelets nicht möglich (vergl. [Chu92],Abschnitt 5.5 , wo diese Sachverhalte ausführlich dargestellt sind).In [Dau92], Abschnitt 8.1 ist deshalb beschrieben, wie man die Mehrdeutigkeit der Zerlegung (4.117) ausnützen kann, um (4.118) möglichst gut zu erfüllen. Andere Strategien zur Wahl von $H(z)$ anhand von (4.114) und (4.117) findet man in [Dau92] , Abschnitt 6.4. Abschließend sei bemerkt, dass die praktische Berechnung der zu $H(z)$ gehörenden Erzeugenden φ über die Unterteilungsalgorithmen aus Abschnitt 4.4.4 erfolgt.

4.5.3 Glattheit und verschwindende Momente

Auf der Basis des Ansatzes im vorangegangenen Unterabschnitt wollen wir jetzt genauere Kriterien dafür angeben, wie glatt die Erzeugende φ und damit das assoziierte Wavelet ist. Dazu war das Symbol $H(z)$ in (4.110) in der Form

$$H(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N L(v), \qquad z = \mathrm{e}^{-iv}$$

angesetzt worden, weil dies eine notwendige Bedingung für $f \in C^N$ war . Bezüglich einer hinreichenden Bedingung erinnern wir an Lemma 2.22 in Abschnitt 2.4.3, wo – als eine Variante des Sobolev-Lemmas 2.21 für $\mathbb{R}^n$ – gezeigt worden war, dass mit $\alpha \in \mathbb{R}$ aus $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(v)| \left(1+|v|\right)^{\alpha} dv < \infty$ sowohl $f \in C^n$ als auch die Hölderstetigkeit $\left|f(x) - f(u)\right| \le C|x-y|^{\alpha-n}$ folgt, sofern $\alpha > 1/2$ und $\alpha - n > 0$ mit $n \in \mathbb{Z}_+$; d. h. per Definition gilt $f \in C^{\alpha}$.. Ein erster Blick auf $\hat{\varphi}(v) = \prod_{j=1}^{\infty} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)$ zeigt

$$\hat{\varphi}(v) = \prod_{j=12}^{\infty} \mathrm{e}^{-2^{-j-1}iv} \cos^N\left(2^{-j-1}v\right) L\left(2^{-j}v\right) = \mathrm{e}^{iv/2}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{v}{2}\right)\right]^N \prod_{j=1}^{\infty} L\left(2^{-j}v\right)$$

wobei

$$\prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(2^{-j}x\right) = \mathrm{sinc}\, x$$

benutzt wurde. Der Faktor $\left[\mathrm{sinc}(v/2)\right]^N$ hat für $|v| \to \infty$ bereits das Abklingverhalten $|v|^{-N}$; es ist allerdings noch notwendig, dass Anwachsen von $\prod_{j=1}^{\infty} L\left(2^{-j}v\right)$ zu kontrollieren. Wir folgen dazu der Darstellung in [Dau92]; die Voraussetzungen seien wie in Lemma 4.8.

Lemma 4.13. *Gilt*

$$q := \sup_v \left|L(v)\right| < 2^{N-\alpha-1}, \qquad \alpha \ge 0,$$

so folgt $\varphi \in C^{\alpha}$.

Beweis. Wegen $H(1) = 1$ muss $L(0) = 1$ sein, also wegen der Periodizität von $L(v)$ $\big|L(v)\big| \le 1 + c|v|$. Für $|v| \le 1$ folgt

$$\left|\prod_{j=1}^{\infty} L\big(2^{-j}v\big)\right| \le \sup_{|v|\le 1} \prod_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{2^{-j}C|v|} \le \mathrm{e}^{C}.$$

Im Falle $|v| \ge 1$ wähle $J \in \mathbb{N}$, so dass $2^{J-1} \le |v| \le 2^J$. Dann folgt mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$, dass

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=1}^{\infty} L(2^{-j}v)\right| &\le \prod_{j=1}^{J} \big|L(2^{-j}v)\big| \prod_{j=1}^{\infty} \big|L(2^{-j-J}v)\big| \le q^J \mathrm{e}^C \le 2^{(N-\alpha-1-\varepsilon)} C_1 J \\ &\le C_2\big(1+|v|\big)^{N-\alpha-1-\varepsilon}\end{aligned}$$

Setzt man dies in die obige Darstellung von $\hat{\varphi}(v)$ ein, so folgt

$$|\hat{\varphi}(v)| \le C_3\big(1+|v|\big)^{-N} C_2\big(1+|v|\big)^{N-\alpha-1-\varepsilon} \le C_4\big(1+|v|\big)^{-\alpha-1-\varepsilon}$$

und daher nach der obigen Bemerkung auch $\varphi \in C^\alpha$. □

Man kann diese Beweismethode noch verfeinern.

Lemma 4.14. *Es seien $H(z)$ und $L(v)$ wie bisher gegeben und ferner*

$$q_j := \sup_v \left|\prod_{k=0}^{j-1} L\big(2^{-k}v\big)\right|$$

definiert ,sowie K_j durch $2^{jK_j} := q_j$ und $K := \inf_j K_j$. Dann gilt schärfer $\lim_{j\to\infty} K_j = K$ und weiter $\varphi \in C^\alpha$ falls $K < N - 1 - \alpha$ gilt.

Beweis. Es sei zunächst $j > j_0$ bei festem j_0 und $j = n \cdot j_0 + r$ mit $0 \le r < j_0$ gesetzt. Dafür gilt

$$\begin{aligned}q_j &= \sup_v \left|\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{l=0}^{j_0-1} L\big(v2^{-kj_0-l}\big) \prod_{l=0}^{r} L\big(v2^{-kn-l}\big)\right| \\ &\le (q_{j_0})^n \sup_v \left|\prod_{l=0}^{r} L\big(v2^{-kn-l}\big)\right| \le (q_{j_0})^n \cdot q_1^r\end{aligned}$$

und weiter

$$K_j = \frac{\log\ q_j}{j \log\ 2} \le \frac{n \cdot \log\ q_{j_0} + r \cdot \log\ q_1}{j \log\ 2} \le K_{j_0} + \frac{1}{j} C_{j_0}.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man nun $j_0 = j_0(\varepsilon)$ so groß , dass $K_{j_0} \le K + \varepsilon$ nach Definition von K. Dann folgt aus dem Vorigen

$$K_j \le K + \varepsilon + \frac{1}{j} C_{j_0(\varepsilon)}.$$

Wird $j \ge j_2(\varepsilon)$ gewählt, so ergibt sich $K_j \le K + 2\varepsilon$ für $j \ge j_2$ und somit die erste Aussage. Es sei nun $K_l < N - 1 - \alpha$ für ein $l = 1, 2, \ldots$ (dies ist speziell der Fall, wenn $K < N - 1 - \alpha$).Dann fassen wir je l Terme im Produkt $\prod_{j=1}^{\infty} L\big(v2^{-j}\big)$ zusammen, schreiben

$$L_l(w) = \prod_{k=1}^{l-1} L\big(w2^{-k}\big)$$

und erhalten

$$\prod_{j=1}^{\infty} L\big(v2^{-j}\big) = \prod_{j=0}^{\infty} L_l\big(v2^{-1-jl}\big)$$

Damit können wir die gleiche Technik wie im vorigen Lemma jetzt auf $L_l(v)$ anwenden mit dem Faktor 2^l statt 2. Dies ergibt wie oben

$$|\hat{\varphi}(v)| \le C\big(1+|v|\big)^{-N+K_l} \le C\big(1+|v|\big)^{-\alpha-1-\varepsilon}$$

□

Bemerkung 4.18. Die Eigenschaft $\lim_{j\to\infty} K_j = K$ ist wichtig im Hinblick auf das folgende Lemma ,das zeigt ,dass asymptotisch gesehen der Wert von K für die mögliche Glattheit von $\hat{\varphi}$ maßgebend ist. ♢

Lemma 4.15. *Seien $H(z)$ und $L(z)$ wie vorher gegeben und die Translate der Erzeugenden φ liefere eine ONB. Dann gibt es eine Folge $\{\xi_l\}$ mit $|\xi_l| \le 2^{l+1}\pi$ und*

$$\left|\prod_{j=1}^{\infty} L\big(2^{-j}\xi_l\big)\right| \ge C(1+|\xi_l|)^K$$

mit K aus dem obigen Lemma und von l unabhängigem C.

Der Beweis benutzt die notwendige Bedingung nach A. Cohen (Satz 4.11). Wir gehen darauf nicht weiter ein ,sondern verweisen an dieser Stelle auf [Dau92], Lemma 7.1.3.

Anstelle eines Beweises wollen wir die Kriterien der beiden Lemmata auf das Polynom $P_N^*(y)$ aus dem vorangegangenen Unterabschnitt anwenden. Wir wissen danach bereits, dass

$$P_N^*\Big(\sin^2\Big(\frac{v}{2}\Big)\Big) = |L_N^*(v)|^2, \qquad H\big(\mathrm{e}^{-iv}\big) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-iv}}{2}\right)^N L_N^*(v) \tag{4.119}$$

ein Symbol $H(z)$ mit ener Erzeugenden φ liefert, deren Translate eine ONB bilden. Wir benötigen im Folgenden einige Eigenschaften von $P_N^*(y)$,die mit elementaren Mitteln gezeigt werden können.

Lemma 4.16. *Es gelten*

1. *$x^{-N+1}P_N^*(x)$ ist monoton fallend in $x \ge 0$.*
2. *$P_N^*(x) \le 2^{N-1}\max(1,2x)^{N-1}$, $0 \le x \le 1$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus

$$x^{-N+1}P_N^*(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{x} \frac{1}{x^{N-1-k}}.$$

Die zweite Aussage ergibt sich folgendermaßen: Aus $x^N P_N^*(1-x)+(1-x)^N P_N^*(x) = 1$ erhält man durch Einsetzen von $x = 1/2$ den Wert $P_N^*(1/2) = 2^{N-1}$. Damit folgt $P_N^*(x) \le P_N^*(1/2) = 2^{N-1}$ für $0 \le x \le 1/2$. Im Falle $x \ge 1/2$ folgt mit der ersten Aussage

$$P_N^*(x) \le x^{N-1}\left[2^{N-1}P_N^*\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 4^{N-1}x^{N-1}.$$

□

Hieraus ergibt sich für das Beispiel in (4.119) zunächst

$$\sup_{|v|\le\pi}|L_N^*(v)| = \left|\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1+k}{k}\right|^{1/2} < \left(2^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1+k}{k}2^{-n}\right)^{1/2}$$
$$= \left[2^{N-1}P_N^*\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2} = 2^{N-1}$$

Lemma 4.13 kann dann wegen $q < 2^{N-1}$ nur für $\alpha = 0$ angewendet d. h. φ ist stetig.Dies folgt jedoch bereits aus $\hat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$ und ist nicht das optimal Erreichbare. Anwendung von Lemma 4.14 mit $l = 2$ liefert bereits eine bessere Aussage: Wegen

$$\sin^2 v = (1-\cos v)(1+\cos v) = 2(1-\cos v)\left(1-\frac{1-v}{2}\right) = 4\sin^2\left(\frac{v}{2}\right)\left[1-\sin^2\left(\frac{v}{2}\right)\right].$$

können wir schreiben

$$q_2 = \sup_{|v|}|L_N^*(v)L_N^*(2v)| = \sup_{0\le y\le 1}\sqrt{P_N^*(y)P_N^*\big(4y(1-y)\big)}, \qquad y = \sin^2\left(\frac{v}{2}\right)$$

Nun ist $4y(1-y)$ für $y \le 1/2$ monoton steigend und für $y \ge 1/2$ monoton fallend; das Maximum ist 1. Daher folgt

$$\left|P_N^*(y)P_N^*\big(4y(1-y)\big)\right| \le \left|P_N^*\left(\frac{1}{2}\right)\right| |P_N^*(1)| \le 2^{N-1}4^{N-1} = 2^{3(N-1)}.$$

Im Falle $y \ge 1/2 - \sqrt{3}/4$ gilt $4y(1-y) \le 1/2$ und daher analog

$$\left|P_N^*(y)P_N^*\big(4y(1-y)\big)\right| \le |P_N^*(1)|\left|P_N^*\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 2^{N-1}4^{N-1} = 2^{3(N-1)}.$$

Im Falle $1/2 \le y \le 1/2 + \sqrt{2}/4$ folgt wegen $y^2(1-y) \le 4/27$ für $x > 0$ mit Teil 2 von Lemma 4.16 schließlich

$$\left|P_N^*(y)P_N^*\big(4y(1-y)\big)\right| \le 4^{N-1}2y^{N-1}\big(4y(1-y)\big)^{N-1} \le 4^{N-1}\big(16y^2(1-y)\big)^{N-1}$$
$$\le 2^{6(N-1)}\left(\frac{4}{27}\right)^{N-1}$$

Insgesamt folgt $q_2 \le 2^{4(N-1)}\sqrt{27}^{-N+1}$ und daher nach Wurzelziehen

$$K_2 \le (N-1)\left(2-\frac{3}{4}\log_2 3\right).$$

Wegen $K < N-1-\alpha$ bzw. $\alpha < N-1-K$ folgt dann $\alpha = \mu(N-1)$ mit $\mu = (3\log_2 3)/4 - 1 \approx 0{,}1887218754$, d. h. eine Lipschitzstetigkeit mit diesem Exponenten α. I. Daubechies bemerkt in ihrem Buch, dass die Abschätzung von q_4 ein $\alpha = \mu(N-1)$ mit $\mu \approx 0{,}1936$ ergibt und dass weiterhin folgende Beobachtung zu asymptotisch scharfen Abschätzungen führt: $y^* = 3/4$ ist Fixpunkt der Abbildung $y \mapsto 4y(1-y)$, und es gilt $y^* = \sin^2(v^*/2) = (1-\cos v^*)/2 = 3/4$ hat die Lösung $v^* \equiv \pm 2\pi/3 \mod 2\pi$. Daraus folgt

$$|L_N(2v^*)|^2 = P_N^*(4y^*(1-y^*)) = P_N^*(y^*) = (L(v^*))^2$$

und somit

$$q_j := \sum_v\left|\prod_{k=0}^{j-1}L_N^*\big(2^{-k}v\big)\right| = \sum_u\left|\prod_{k=0}^{j-1}L_N^*\big(2^k u\big)\right| \ge \left|P_N^*\left(\frac{3}{4}\right)\right|^{j/2},$$

d. h.

$$K = \inf_j K_j = \inf_j \frac{\log_2 q_j}{2} \geq \frac{\log_2 P_N^*(3/4)}{2}.$$

Man kann für $P_N^*(3/4)$ eine recht scharfe Abschätzung angeben: Lemma 4.16 liefert mit Teil 2 $P_N^*(3/4) \leq 2^{N-1}(6/4)^{N-1} = 3^{N-1}$ und andererseits mit Teil 1

$$P_N^*\left(\frac{3}{4}\right) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1} P_N^*(1), \qquad P_N^*(1) = \binom{2N-1}{N}\frac{1}{2}\binom{2N}{N} \geq \frac{4^{N-1}}{\sqrt{N}}.$$

Wir erhalten also die asymptotische Schranke $\varkappa \geq (N-1)/2\log_2 3$ und daher asymptotisch $\alpha \approx (N-1)\big(1-(\log_2 3)/2\big) \approx 0{,}20751874964(N-1)$. Die obere Schranke folgt in einem schwachen Sinn aus dem (nicht bewiesenen Lemma 4.15), kann aber auch exakt nachgewiesen werden durch folgendes mehr elementares

Lemma 4.17. *Es sei* $H(x) = \big((1+z)/2\big)^N L(v)$, $z = \exp(-iv)$ *und es gelte* $\big|L(v)\big| \leq \big|L(2\pi/3)\big|$ *für* $|v| \leq 2\pi/3$ *und* $\big|L(v)L(2v)\big| \leq \big|L(2\pi/3)\big|^2$ *für* $2\pi/3 \leq |v| \leq \pi$. *Dann gilt für die durch* H *erzeugte Lösung* φ *der Skalierungsgleichung* $|\hat\varphi(v)| \leq C\big(1+|v|\big)^{-N+K}$ *mit* $K = \log_2\big|L(2\pi/3\big|$; *dieses Abklingverhalten ist optimal.*

Bezüglich eines Beweises sei auf Lemma 7.1.7 in [Dau92] verwiesen. Er benutzt die Methode der invarianten Zykeln, die schon oben beim Nachweis einer ONB aus Translaten auftrat und die noch etwas allgemeinere Ergebnisse als das zitierte Lemma liefert. Damit kann eine asymptotisch scharfe Abschätzung für die Glattheit von φ angegeben werden .

Satz 4.22. *Die Polynome* $P_N^*(y)$ *aus Satz 4.20 liefern eine Lösung* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ *der Verfeinerungsgleichung (4.24) mit einer* $C^{(N-1)\alpha}$*-Glattheit, wobei* $\alpha = \alpha(N)$ *sich für* $N \to \infty$ *dem Wert* $1 - (\log_2 3)/3 \approx= 0{,}2075$ *annähert.*

Dieses Ergebnis ist für kleine N nicht scharf. Dazu werden in [Dau92] außerdem noch zwei weitere Zugänge zur Untersuchung der Glattheit von φ dargestellt. Der erste besteht wie der vorige in einer Abschätzung des Abklingverhaltens von $\hat\varphi$, diesmal in der L_1- oder L_2-Norm (Littlewood-Paley-Abschätzungen). Dies liefert für die ersten zehn Erzeugenden aus P_N^*, $N = 2, 3, \ldots, 10$ noch erheblich bessere Ergebnisse als die Methode der invarianten Zyklen, z. B. (alle Werte mit drei Nachkommastellen angegeben)

N	2	3	4	6	8	10
α	0,500	0,915	1,275	1,888	2,417	2,902

also $\alpha/(N-1) > 0.3$!

Die zweite Methode benutzt keine Fourieranalysis, sondern Überlegungen aus der Theorie der Lösungen von Verfeinerungsgleichungen und liefert

N	2	3	4
α	0,550	1,088	1,618

Einzelheiten können wir hier nicht angeben. Nach [Dau92] ist es aber mühsam mit dieser Methode die Beispiele für höhere N zu untersuchen .Daher wird auf Arbeiten von Dyn-Levin (1989) und Rioul (1991) verwiesen, die einfachere Kriterien herleiten.

Aus den Untersuchungen zur Glattheit von φ aus $P_N^*(y) = |L_N^*(v)|^2$, $y = \sin^2(v/2)$ ergibt sich als wichtige Folgerung: Asymptotisch gesehen wird die Glattheit von φ durch C^α, $\alpha = \mu(N-1)$ mit $\mu \approx 0{,}2075$ beschrieben und die Verfeinerungsgleichung von φ hat das Symbol $H(x) = \big((1+z)/2\big)^N L_N^*(v)$, $z = \exp(-iv)$. Wie schon früher ausgeführt, ist der Aufwand für die bei der Anwendung entscheidenden Zerlegungs-

und Rekonstruktions-Algorithmen im Wesentlichen proportional zur Länge der zu $H(z)$ gehörigen Maske, also proportional zu $2N-1$, dem „Grad“ von $H(z)$. Dies bedeutet, dass der Aufwand proportional zur Anforderung an die Glattheit wächst. Der obige Ansatz für $H(v)$ wurde aber durch Korollar 4.4 zu Satz 4.18 motiviert, wo die Faktorisierung mit Faktor $\big((1+z)/2\big)^M$ als notwendige Bedingung für das Erreichen von C^{M-1}-Glattheit auftrat. Diese Faktorisierung ist aber (wie dort gezeigt) äquivalent zu der Momentenbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l \Psi(x)\,dx = 0, \qquad 0 \le l \le M-1 \tag{4.120}$$

für das zu φ gehörige Wavelet, d. h. die ersten M Momente von Ψ verschwinden.

Im Falle der Wahl von P_N^* und den daraus resultierenden (Möglichkeiten für die) Erzeugenden φ wird jedoch die C^{M-1}-Glattkeit asymptotisch nur mit $N-1 = 4(M-1)$ ereicht, also einer „Verschwendung‘ von Momentenbedingungen. In dieser Situation stellt sich also die Frage: Was ist wichtiger, die Anzahl der verschwindenden Momente oder die Glattheitsordnung?

Falls man die Glattheit als vorrangig ansieht, dann ist die Wahl von P_N^* nicht optimal und man wird die allgemeineren Symbole $H(z)$ zu $P_N(y) = P_N^*(y) + y^N R(y)$ mit $R(1-y) = -R(y)$ aus Theorem 4.19 betrachten, also etwa (mit $y = \sin^2(v/2)$)

$$\begin{aligned}\big|H\big(\mathrm{e}^{-iv}\big)\big|^2 &= (1-y)^{N-1}P(y)\\ &= \Big(\cos^2\frac{v}{2}\Big)^{N-1}\Big(P_{N-1}\Big(\sin^2\frac{v}{2}\Big) + a\cos v\Big(\sin^2\frac{v}{2}\Big)^N\Big),\end{aligned}$$

wobei also die Anzahl der Momentenbedingungen gegenüber P_N^* zugunsten eines zusätzlichen Parameters a um 1 verringert ist. Dieser Parameter soll so bestimmt werden, dass die Glattheitsordnung möglichst groß ist. Dies führt bei kleinen Werten von N tatsächlich zu einer Verbesserung der Glattheit – wenn auch nicht in dramatischer Weise (vergl. [Dau88]). (Ein Problem ist auch die Frage, welches P_N bei gegebenem Grad N zur optimalen Glattheit von φ führt.) Es gibt Argumente von Seiten der Anwender, möglichst glatte Wavelets zu verwenden, diese sind aber nicht zwingend; vergleiche hierzu [Dau92], Seite 244f.

Für den Standpunkt, dass die Anzahl der verschwindenden Momente für den Erfolg bei der Anwendung ausschlaggebend ist, gibt es eine Reihe von Argumenten
.

Das erste Argument kommt durch die Betrachtung der Wavelet-Entwicklung einer Funktion $F(x) \in L_2$ – also im Fall $\mathbb{R}^2$ eines Bildes – zustande: es sei gegeben durch

$$F(x) = \sum_{j,k} (F, \Psi_{j,k})\Psi_{j,k}, \tag{4.121}$$

wobei die $\Psi_{J,k} = 2^{J/2}\Psi\big(2^J x - k\big)$ ein ONS bilden (diese Entwicklung wurde schon in Unterabschnitt 4.2.2 diskutiert).Ist $F \in C^{M-1}$ und gilt die Momenten -Bedingung (4.120) für Ψ, so liefert Taylor-Entwicklung von $F(x)$ mit $\big|x - 2^{-J}k\big| \le \delta/2$

$$F(x) = F\big(2^{-J}k\big) + F'F\big(2^{-J}k\big)\big(x - 2^{-J}k\big) + \cdots + \big(x - 2^{-J}k\big)^M; R_F(x)$$

und daher für genügend großes J bzw. genügend kleines $\delta > 0$ ($u = 2^J x - k$)

$$\begin{aligned}|(F, \Psi_{j,k})| &= \Big|0 + \int \big(x - 2^{-J}k\big)^M R_F(x)\Psi_{(2^J - k)}2^{J/2}\,dx\Big|\\ &\le \Big(\max_{x \in supp\Psi_{J,k}} |R_F(x)|\Big)2^{-J(M-1/2)}\int |u|^M|\Psi(u)|\,du.\end{aligned} \tag{4.122}$$

Bei Anwendungen in der Datenkompression besteht ein allgemeines Prinzip darin, nur diejenigen Koeffizienten der Wavelet-Entwicklung (4.121) zu speichern,deren absoluter Wert über einem gewissem Level τ liegt. Dieses Prinzip (bzw.verfeinerte Varianten davon) kann man an Hand der Darstellung des Fehlers in (4.42) rechtfertigen.

Je schneller nun die Koeffizienten abfallen , desto effizienter ist diese Speicherung ,weil dann weniger Koeffizienten benötigt werden.Zu beachten ist dabei die tatsächlich vorhandene Glattheitsordnung von $F(x)$,denn diese beeinflußt die Größe des Restglieds in (4.122) .Daher bringt die Wahl eines zu großen M unnötigen Aufwand .

Ausführlichere Betrachtungen dazu findet man in [BCR91](diese Arbeit wurde bereits in Unterabschnitt 4.4.3 erwähnt ,wo das Problem der Ausgangsapproximation auf die gleichen Überlegungen führte). In der Signal– oder Bildverarbeitung kann das obige Prinzip wie folgt veranschaulicht werden: bei festem M werden nach (4.122) für große J nur solche Koeffizienten $(F, \Psi_{j,k})$ gespeichert , wo $|R_F(x)|$ groß in der Nähe von $k2^{-J}$ ist ,d. h. F oder eine seiner Ableitungen hat dort eine Singularität .Auf diese Weise werden also die *wesentlichen Einzelheiten* des Bildes gespeichert. Bei den praktischen Anwendungen wird dieses Prinzip allerdings noch erheblich verfeinert (Stichworte sind „Wavelet–Pakete“ und „Best Basis“). Dazu besteht eine umfangreiche Literatur ,siehe z. B. den Artikel von D.L. Donoho in [CM94] und [Wic96],Kapitel 7.

Eine mehr theoretische Begründung für die Wahl eines großen M liefern approximationstheoretische Betrachtungen.Danach ist die Momenten -Bedingung (4.120) äquivalent dazu,dass der Grad des durch Linearkombinationen von $\varphi_{j,k}$ oder $\Psi_{j,k}$ erzeugten Polynomraums gleich M ist(exakte Begründung durch die Strang–Fix Theorie).Da Polynome im wesentlichen glatte Konturen beschreiben , bedeutet die Wahl eines großen M , dass die Approximation mit solchen Linearkombinationen einen möglichst guten *Tiefpassfilter* liefern soll.

Diese letzte Forderung kann dahingehend modifiziert werden, dass sich die Produkte $\prod_{j=1}^{n} H\left(\mathrm{e}^{-2^{-j}iv}\right)$ möglichst wie ideale Tiefpassfilter verhalten sollen .Am Beispiel des Signals $f(x) = \sum f_l \varphi(x-l)$ mit $\hat{f}(v) = \sum f_l \mathrm{e}^{-ilv}\hat{\varphi}(v)$ und des Produkts $H\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)H\left(\mathrm{e}^{-i2v}\right)H\left(\mathrm{e}^{-i4v}\right)$ bedeutet dies ,dass sich in

$$\sum f_l \mathrm{e}^{-ilv} H\left(\mathrm{e}^{-iv/2}\right) H\left(\mathrm{e}^{-iv/4}\right) H\left(\mathrm{e}^{-iv/8}\right) \hat{\varphi}(v/8)$$

der Faktor nach der Summe sich in etwa so verhalten soll wie der ideale Tiefpassfilter $\chi_{-\pi,\pi}(v)$ .Dies führt dann dazu ,dass $H\left(\mathrm{e}^{-iv}\right)$ möglichst „flach“ bei $v = \pi$ sein sollte ,bzw. $H(z)$ möglichst hoch faktorisierbar in $(1+z)^M$. Details findet man im Buch von von I. Daubechies (S.245-247) noch auf

Literaturverzeichnis

[Ach53] Achiezer, D.: *Vorlesungen über Approximationstheorie.* Berlin : Akademie-Verlag, 1953

[Ach85] Achilles, D.: *Die Fouriertransformation in der Signalverarbeitung.* Berlin : Springer, 1985. – ISBN 3–540–08362–6

[Ada75] Adams, R. A.: *Sobolev Spaces.* New York : Academic Press, 1975. – ISBN 0–12–044150–0

[AU96] Aldroubi, A. ; Unser, M. A.: *Wavelets in Medicine and Biology.* CRC Press, Inc., 2000 Corporate Blvd., N. W., Boca Raton, Florida 33431 : CRC Press, 1996. – ISBN 0–8493–9483–X

[BCR91] Beylkin, G. ; Coifman, R. R. ; Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms. **In:** *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43 (1991), S. 141–183

[BDR94] Boor, C. de ; DeVore, R. A. ; Ron, A.: Approximation From Shift Invariant Subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$. **In:** *Transactions of the American Mathematical Society* 361 (1994), S. 787–806

[Boo78] Boor, C. de: *A Practical Guide to Splines.* Berlin : Springer, 1978. – ISBN 3–540–90356–9

[Boo90] Boor, C. de: *Splinefunktionen.* Basel : Birkhäuser, 1990. – ISBN 3–7643–2514–3

[Bra] Bracewell, Ronald N.: *The Fourier transform and its applications.* New York : McGraw-Hill. – ISBN 0–07–007015–6

[CDM91] Cavaretta, A. S. ; Dahmen, W. ; Micchelli, C. A.: *Memoires of the American Mathematical Society.* Bd. 89 : Stationary subdivision. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1991. – ISBN 0–8218–2507–0

[Chu92] Chui, C.: *Wavelet Analysis and its Applications 1: An Introduction to Wavelets.* New York : Academic Press, 1992. – ISBN 0–12–174584–8

[CM94] Chui, C. ; Montefusco, L.: *Wavelets: Theory, Algorithms and Applications.* New York : Academic Press, 1994. – ISBN 0–12–174575–9

[Coh90] Cohen, A.: Analyses Multirésolution et Filtres miroir en Quadrature. **In:** *Annales de l'Institute Henri Poincaré en l'Analyse nonlinéaire* (1990), Nr. 7, S. 439–459

[Con74] Constantinecu, F.: *Distributionen und ihre Anwendung in der Physik.* Stuttgart : Teubner, 1974. – ISBN 3–519–02042–4

[Cra94] CRANDAL, R.: *Projects in Scientific Computation.* New York : Springer, 1994

[CW91] CHUI, C. K. ; WANG, J. Z.: On compactly supported spline wavelets and a duality principle. **In:** *Trans. Amer. Math. Soc.* (1991)

[Dau88] DAUBECHIES, I.: Orthonormal bases of compactly supported wavelets. **In:** *Communications on Pure and Applied Mathemtics* (1988), Nr. 41(7), S. 909–996

[Dau92] DAUBECHIES, I.: *Ten Lectures on Wavelets.* Philadelphia, Pennsylvania : SIAM, 1992. – ISBN 0–89871–274–2

[DGL95] DAHLKE, S. ; GRÖCHENIG, K.-H. ; LATOUR, V. Biorthogonal Box Spline Wavelet Bases. 1995

[DL91] DAUBECHIES, i. ; LAGARIAS, J. V.: Two-scale difference equations I:Existence and global regularity of solutions. **In:** *SIAM J.Math.Anal.* 22 (1991), S. 1388–1410

[DL92] DAUBECHIES, i. ; LAGARIAS, J. V.: Two-scale difference equations II:Local regularity, infinite products of matrices and fractals. **In:** *SIAM J.Math.Anal.* 23-4 (1992), S. 1031–1079

[Don96] DONOGHUE: *Distributions and Fourier Transforms.* New York : Academic Press, 1996

[GM92] GRÖCHENIG, K. ; MADYCH, R.: Multiresolution Analysis, Haar beses, and self-similar tilings of $\mathbb{R}^2$. **In:** *IEEE Trans. Inform. Theory* 38 (1992), S. 556–568

[Gra95] GRAPS, A.: An Introduction to Wavelets. **In:** *IEEE Transactions on Computer Science and Engineering* 2 (1995), Nr. 2

[Haa10] HAAR, A.: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. **In:** *Math. Annalen* 69 (1910), S. 331–371

[Hac85] HACKBUSCH, W.: *Multigrid Methods and Applications.* Berlin : Springer, 1985

[Heu86] HEUSER: *Funktionalanalysis.* Stuttgart : Teubner, 1986

[HG96] HERMANN, U. ; GÖTZE, L.: *Die neue deutsche Rechtschreibung.* Gütersloh : Bertelsmann Lexikon Verlag, 1996. – ISBN 3–577–10625–5

[HLP88] HARDY, G. H. ; LITTLEWOOD, J. E. ; POLYA, G.: *Inequalities.* 2. Cambridge : Cambridge University Press, 1988. – ISBN 0–521–35880–9

[JM91] JIA, R. Q. ; MICCHELLI, C. A.: Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets II: Powers of two. **In:** LAURENT, P. J. (Hrsg.) ; A., Le M. (Hrsg.) ; SCHUMAKER, L. L. (Hrsg.): *Curves and Surfaces.* New York : Academic Press, 1991, S. 209–246

[JS91] JETTER, K. ; STÖCKLER, J.: Algorithms for cardinal interpolation using box splines and radial basis functions. **In:** *Numerical Mathematics* 60 (1991)

[JS94] JAWERTH, B. ; SWELDENS, W.: An Overview of Wavelets Based on Multi Resolution Analysis. **In:** *SIAM review* 36 (1994)

[Kai94] KAISER, G.: *A Frienly Guide to Wavelets*. Boston : Birkhauser, 1994. – ISBN 3–7643–3711–7

[Kra95] KRABS, W.: *Mathematical Foundations of Signal Theory*. Berlin : Heldermann Verlag, 1995. – ISBN 3–88538–406–X

[Law91] LAWTON, W. M.: Nesessary and sufficient conditions for the existence of orthonormal wavelet bases. **In:** *Journal of Mathematical Physics* (1991), Nr. 32, S. 57–61

[LMR94] LOUIS, A. K. ; MAASS, P. ; RIEDER, A.: *Wavelets*. Stuttgart : Teubner, 1994. – ISBN 3–519–02094–7

[Mal89] MALLAT, S.: Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases of $L_2(\mathbb{R})$. **In:** *Transaction of the American Mathematical Society* 315 (1989), S. 69–87

[Mar82] MARR, David: *Vision : a computational investigation into the human representation and processing of visual information*. San Francisco : Freeman, 1982. – ISBN 0–7167–1284–9

[Mey90] MEYER, Y.: *Ondelettes et Opérateurs 1: Ondelettes*. Paris : Hermann, 1990

[Mey92] MEYER: *Wavelets and Operators*. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – ISBN 0–521–42000–8

[Mey93] MEYER, Y.: *Wavelets: Algorithms and Applications*. Philadelphia : SIAM, 1993

[Nik75] NIKOLSKIJ, S. M.: *Approximation of Functions in Several Variables and Embedding Theorems*. Berlin : Springer, 1975. – ISBN 3–540–06442–7

[Pap77] PAPOULIS, A.: *Signal Analysis*. New York : McGraw-Hill, 1977. – ISBN 0–07–048460–0

[PTVF92a] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, P. F.: *Numerical Recipes in C*. 2. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – ISBN 0–521–43108–5

[PTVF92b] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, P. F.: *Numerical Recipes in FORTRAN*. 2. Cambridge : Cambridge University Press, 1992

[QC38] QUADE, W. ; COLLATZ, L.: Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen. **In:** *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Kl* (1938), S. 383–429

[RS72] REED ; SIMON: *Methods of Modern Mathematical Physics*. New York : Academic Press, 1972. – ISBN 0–12–585001–8

[Rud91] RUDIN: *Functional Analysis*. New York : McGraw-Hill, 1991. – ISBN 0–07–054236–8

[Run04] RUNGE, C.: *Theorie und Praxis der Reihen*. Leipzig : G. J. Göschen, 1904

[Sch71] SCHONEBERG: Cardinal Interpolation and Spline Function IV. The exponential Euler Splines. **In:** AL., Butzer et. (Hrsg.): *Proceedings of the INSM in Oberwolfach 20*, 1971

[Sch73] SCHOENBERG, I. J.: *Cardinal Spline Interpolation*. Philadelphia : SIAM, 1973 ISSN 0163–9439

[Sch81] SCHUMAKER, I. I.: *Spline Functions I: Basic Theory*. New York : Wiley, 1981. – ISBN 0–471–76475–2

[SSWD96] SCHOLZE-STUBENRECHT, W ; WERMKE, M. ; DROSDOWSKI, G.: *Duden: Rechtschreibung der deutschen Sprache*. 21. Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich : Dudenverlag, 1996 (Der Duden). – ISBN 3–411–04011–4

[SW71] STEIN, E. M. ; WEISS, G.: *Princeton Mathematical Series*. Bd. 32 : Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1971. – ISBN 0–691–08078–X

[Tim63] TIMAN, A.F.: *The Theory of Functions of One Real Variable*. Oxford : Pergamon Press, 1963

[VM94] VIDAKOVIČ, B. ; MULLER, P. Wavelets for Kids. `ftp.isds.duke.edu/pub/brani/papers/wav4kids[A-B].ps.Z`. 1994

[Wic96] WICKERHAUSER, M. V.: *Adaptive Wavelet-Analysis: Theorie und Software*. Braunschweig : Vieweg, 1996. – ISBN 3–528–06688–1