Topologie und Maßtheorie

Institut für Analysis
Andreas E. Schroth

Stand: 18.2.2000
Die jeweils aktuelle Version ist als Postscript-Datei erhältlich unter

`http://fb1.math.nat.tu-bs.de/~top/skripte/`

Inhaltsverzeichnis

Teil 1. Topologie 1

Einleitung 3

Kapitel 1. Grundbegriffe 5
1. Metrische Räume 6
2. Abgeschlossene Mengen 9
3. Umgebungen 11
4. Basen 12
5. Unterräume 15

Kapitel 2. Stetigkeit 17

Kapitel 3. Konvergenz 23
1. Folgen 23
2. Netze 25
3. Filter 31

Kapitel 4. Produkträume und Summenräume 39
1. Produkträume 39
2. Summenräume 44

Kapitel 5. Trennungsaxiome 47

Kapitel 6. Zusammenhang 59

Kapitel 7. Kompaktheit 65

Teil 2. Maßtheorie 77

Einleitung 79

Kapitel 8. Das Problem 81

Kapitel 9. Maßräume und Maße 85
1. Mengensysteme 85
2. Maße 88

Kapitel 10. Lebesgue-Maß 99
1. Konstruktion 99
2. Lebesgue-Maß und Vervollständigung 103
3. Translationsinvarianz 105
4. Lineare Abbildungen 107

Kapitel 11. Meßbare Abbildungen 113

Kapitel 12. Integrierbare Funktionen 123
1. Integral von Elementarfunktionen 123
2. Integral meßbarer Funktionen 126
3. Integral über Teilmengen 129

Kapitel 13. Konvergenzsätze 135

Kapitel 14. Riemann- und Lebesgue-Integral 145

Index 151

Teil 1

Topologie

Einleitung

In der Topologie wird so etwas wie *Nähe* eingeführt, ohne daß zwangsläufig eine Metrik vorhanden ist. Dies erfolgt über den Begriff der *offenen Menge*, der unser Grundbegriff ist. Abgeleitete Begriffe sind *abgeschlossene Menge* und *Umgebung*. Diese Begriffe werden in Kapitel 1 vorgestellt. Metrische Räume werden als Beispiele topologischer Räume untersucht.

Es zeigt sich, daß das Konzept der Topologie bereits genügt, um sinnvoll stetige Funktionen einzuführen. In Kapitel 2 wird *Stetigkeit* ganz ohne ε-δ-Aussagen allein über offene Mengen definiert.

Auch *Konvergenz* läßt sich bereits in topologischen Räumen und nicht erst in metrischen Räumen definieren und untersuchen. Allerdings zeigt sich, daß Folgen und Folgenkonvergenz für einige Charakterisierungen zu schwach sind. Deshalb werden *Netze* und *Filter* eingeführt. Beide Begriffe verallgemeinern den Begriff der Folge und sind stark genug, um die gewünschten Charakterisierungen zu liefern. Obwohl sie technisch unterschiedlich sind, verhalten sich Netze und Filter bei der Konvergenz gleich. Zentrale Ergebnisse sind, daß sich Stetigkeit und Kompaktheit über Netze und Filter charakterisieren lassen. Kapitel 3 beschäftigt sich eingehend mit Konvergenz.

In Kapitel 4 werden topologische *Produkt- und Summenräume* eingeführt. Es wird untersucht, welche der bereits bekannten Eigenschaften sich auf Produkt- und Summenräume übertragen.

Damit die Topologie eines Raumes Aussagekraft besitzt, darf es weder zu viel noch zu wenig offene Mengen geben. In Kapitel 5 werden *Trennungsaxiome* eingeführt. Sie geben an, wie gut Punkte oder abgeschlossene Mengen durch offene Mengen getrennt werden können. Die wohl wichtigsten Begriffe in diesem Zusammenhang sind *Hausdorff-Raum*, *regulär* und *normal*. Die Beziehungen zwischen den Trennungsaxiomen, Metrisierbarkeit und Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen werden untersucht.

In Kapitel 6 wird der *Zusammenhang* eingeführt. Dieser Begriff erlaubt es uns zum ersten Mal zu zeigen, daß die reelle Zahlengerade nicht homöomorph zur reellen Ebene ist.

In Kapitel 7 wird *Kompaktheit* definiert und untersucht. Kompaktheit bedeutet, daß es nicht zu viele offene Mengen gibt. Insbesondere kompakte Hausdorff-Räume, also topologische Räume mit genügend aber nicht zu vielen offenen Mengen, haben eine Reihe sehr schöner Eigenschaften.

KAPITEL 1

Grundbegriffe

Ein topologischer Raum ist eine Menge mit einer zusätzlichen Struktur, mit der, recht abstrakt, so etwas wie Nähe ausgedrückt werden kann. Bei unserem Zugang ist *offene Menge* der Grundbegriff. Eine Topologie ist die Menge der offenen Mengen und muß gewissen Regeln genügen. Für die gewöhnlichen offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ gilt, daß die Vereinigung beliebig vieler und der Schnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist. Diese charakteristischen Eigenschaften der offenen Mengen sind der Ausgangspunkt für unsere Definition einer Topologie.

(1.1) Definition: Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X heißt *Topologie auf* X, falls gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$,
2. $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,
3. $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum* und die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Oft wird nur X statt $(X, \mathcal{T})$ geschrieben.

(1.2) Beispiele:

1. *Triviale Topologie*: X beliebig, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.
2. *Diskrete Topologie*: X beliebig, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.
3. *Koendliche Topologie*: X beliebig, $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$. Dies ist eine Topologie, denn:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ nach Definition und $X \in \mathcal{T}$ da $X \setminus X = \emptyset$ endlich.
   (b) $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I \Rightarrow X \setminus U_i$ endlich.
   Daher $X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} X \setminus U_i$ endlich, also $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.
   (c) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, so gilt $X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n X \setminus U_i$ endlich, also $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.
4. Euklidsche Topologie auf $\mathbb{R}^n$ (bekannt aus Analysis II): $U \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, wenn $\forall x \in U\, \exists r > 0 \colon U(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\} \subset U$. Daß dies eine Topologie ist, wird in Satz 1.8 gezeigt.

Für $i \in \mathbb{N}$ sei $U_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1/i\}$. Jedes der U_i ist offen in $\mathbb{R}^n$ aber $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \{0\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}^n$. Unendliche Schnitte offener Mengen sind also im allgemeinen nicht offen.

(1.3) Bemerkung: Ein topologischer Raum hat genau dann die diskrete Topologie, wenn alle einelementigen Mengen offen sind. Jede beliebige Teilmenge läßt sich nämlich als Vereinigung einelementiger Teilmengen darstellen.

Die Beispiele zeigen, daß die Definition einer Topologie das bereits Vertraute umfaßt, aber weit darüber hinausgeht.

1. Metrische Räume

Die Methode, den Euklidschen Raum zu einem topologischen Raum zu machen, läßt sich für beliebige Mengen mit einem geeigneten Abstandsbegriff verallgemeinern. Wir legen zunächst fest, was ein Abstand bzw. eine Metrik ist.

(1.4) Definition: Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),
3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (X,d) heißt ein *metrischer Raum*.

(1.5) Beispiele:

1. Auf $X = \mathbb{R}^n$ werden folgende Metriken d_p, $p = \infty$ oder $1 \le p < \infty$, definiert. Dabei ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$.
   (a) *Maximumsmetrik*: $d_\infty(x,y) := \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.
   (b) Für $1 \le p < \infty$: $d_p(x,y) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$. Die Metrik d_1 heißt *Betragsmetrik*, die Metrik d_2 ist die Euklidsche Metrik.

   Um zu zeigen, daß es sich dabei tatsächlich um Metriken handelt, muß nur die Dreiecksungleichung gezeigt werden, denn die beiden anderen Bedingungen sind offensichtlich.

   Wegen $|a+b| \le |a| + |b|$ gilt:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,z) &= \max_i |x_i - z_i| = \max_i |x_i - y_i + y_i - z_i| \\ &\le \max_i (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &\le \max_i |x_i - y_i| + \max_i |y_i - z_i| = d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z) \end{aligned}$$

Für $1 \leq p < \infty$ gilt die Minkowski Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d_p(x,z) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i + y_i - z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p(x,y) + d_p(y,z) \end{aligned}$$

Auf $\mathbb{R}$ stimmen diese Metriken überein.

2. Sei $l^\infty := \{(a_n) \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ und } \exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leq m\}$ die Menge der beschränkten reellen Folgen. Dann wird durch

$$d_\infty\big((a_n),(b_n)\big) := \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i - b_i|$$

eine Metrik auf l^∞ definiert. Daß dies eine Metrik ist, läßt sich wie bei der Maximumsmetrik einsehen.

3. Für $1 \leq p < \infty$ sei $l^p := \{(a_n) \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$. Dann wird durch $d_p\big((a_n),(b_n)\big) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p\right)^{1/p}$ eine Metrik auf l^p definiert. Der Beweis, daß dies Metriken sind, kann wie oben unter Verwendung der verallgemeinerten Minkowski Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

geführt werden.

4. Sei A eine beliebige Menge und $\mathfrak{B}(A,\mathbb{R}) := \{f\colon A \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$ die Menge der beschränkten, reellwertigen Funktionen auf A. Dann wird durch $d_s(f,g) := \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$ eine Metrik auf $\mathfrak{B}(A,\mathbb{R})$ definiert. Wie bei der Maximumsmetrik läßt sich einsehen, daß dies eine Metrik ist.

5. Auf $\mathbb{Q}$ ist für jede Primzahl p der p-adische Betrag $|\cdot|_p$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} &|0|_p = 0, \\ &\left|p^n \frac{a}{b}\right|_p = 2^{-n}, \text{ mit } a,b \in \mathbb{N} \text{ nicht durch } p \text{ teilbar.} \end{aligned}$$

Die p-adische Metrik d_p ist definiert durch $d_p(x,y) = |x - y|_p$. Der Beweis, daß dies eine Metrik ist, ist eine Übungsaufgabe.

(1.6) Bemerkung: In einem metrischen Raum gilt $d(x,y) \geq 0$, denn $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2 \cdot d(x,y)$.

(1.7) Definition: Ist (X,d) ein metrischer Raum, sind $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ so heißt

$$U(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

die *r-Umgebung von x* oder die *offene r-Kugel um x.*

Ein metrischer Raum kann auf naheliegende Weise als topologischer Raum betrachtet werden. Es wird gefordert, daß eine Menge genau dann offen ist, wenn um jedes ihrer Elemente eine offene Kugel existiert, die ganz in der Menge liegt.

(1.8) Satz: *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heiße offen, falls $\forall x \in U\, \exists r > 0 : U(x,r) \subset U$. Dann bildet das System aller offenen Mengen eine Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X.*

Beweis:

1. Offensichtlich sind $\emptyset$ und X offene Mengen.
2. Seien $U_i \in \mathcal{T}_d$, $i \in I$, $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann:
   $\exists i_0 \in I : x \in U_{i_0} \Rightarrow \exists r > 0 : U(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.
3. Seien $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_d$ und $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Es gibt $r_1, \ldots, r_n > 0$ mit $U(x,r_i) \subset U_i$. Sei $r := \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$. Dann:
   $$\forall i = 1, \ldots, n : U(x,r) \subset U(x,r_i) \subset U_i \Rightarrow U(x,r) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n$$
   $$\Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}_d.$$

□

(1.9) Bemerkung: Für $\mathbb{R}^n$ und $1 \leq p < \infty$ gilt $\mathcal{T}_{d_p} = \mathcal{T}_{d_\infty}$. Obwohl die Metriken verschieden sind, induzieren sie alle die gleiche Topologie.

(1.10) Metrisationsproblem: Während jede Metrik eine Topologie induziert, gibt es Topologien, die nicht durch eine Metrik induziert werden. Interessant sind daher notwendige und hinreichende Kriterien für einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$, unter denen es eine Metrik d auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ gibt. Satz 5.15 liefert ein Beispiel dafür.

Daß selbst exotische Topologien vom Metriken induziert werden können, zeigt das folgende Beispiel.

(1.11) Beispiel: X beliebig,

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$

Dann ist d eine Metrik und $\mathcal{T}_d$ ist die diskrete Topologie, denn $U(x, 1/2) = \{x\}$, d.h. alle einelementigen Teilmengen sind offen.

2. Abgeschlossene Mengen

Das Gegenstück zum Begriff der offenen Menge ist der Begriff der abgeschlossenen Menge.

(1.12) Definition: Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.

(1.13) Satz: *Sei $\mathcal{A}$ das System der abgeschlossenen Mengen eines topologischen Raumes X. Dann gilt:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
2. $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$,
3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Sei umgekehrt eine System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit diesen drei Eigenschaften gegeben, so ist $\mathcal{T} := \{U \subset X \mid X \setminus U \in \mathcal{A}\}$ eine Topologie auf X.

Beweis:

1. $\emptyset = X \setminus X$ und $X = X \setminus \emptyset$. Daher $\emptyset, X \in \mathcal{A} \iff X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. Sei $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, also $X \setminus A_i \in \mathcal{T}$. Wegen $\bigcup_{i\in I} X \setminus A_i = X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i$ gilt $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A} \iff \bigcup_{i\in I} X \setminus A_i \in \mathcal{T}$.
3. Sei $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, also $X \setminus A_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, \ldots, n$. Wegen $\bigcap_{i=1}^n X \setminus A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$ gilt $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \iff \bigcap_{i=1}^n X \setminus A_i \in \mathcal{T}$.

Aus der Definition einer Topologie folgt somit, daß $\mathcal{A}$ die gewünschten Eigenschaften hat. Umgekehrt, hat $\mathcal{A}$ die aufgeführten Eigenschaften, so ist $\mathcal{T} := \{U \subset X \mid X \setminus U \in \mathcal{A}\}$ eine Topologie auf X. □

Das eben erzielte Ergebnis bedeutet, daß auch *abgeschlossen* statt *offen* als Grundbegriff verwendet werden kann.

Offen und abgeschlossen schließen sich nicht gegenseitig aus. Teilmengen können sowohl abgeschlossen als auch offen sein. Die leere Menge und der ganze Raum sind Beispiele hierfür. Bei der diskreten Topologie ist jede Menge sowohl abgeschlossen als auch offen.

(1.14) Definition: Sei X ein topologischer Raum und $M \subset X$. Wir setzen:

$$\overline{M} := \bigcap A, \quad M \subset A,\ A \text{ abgeschlossen}, \qquad \textit{abgeschlossene Hülle} \text{ von } M,$$

$$\mathring{M} := \bigcup U, \quad U \subset M,\ U \text{ offen}, \qquad \textit{offener Kern} \text{ von } M,$$

$$\operatorname{Rd} M := \overline{M} \setminus \mathring{M}, \qquad \textit{Rand} \text{ von } M.$$

(1.15) Bemerkung: $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält und $\mathring{M}$ ist die größte in M enthaltene offene Menge.

(1.16) Satz: *Es gilt* $\operatorname{Rd} M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$*, insbesondere ist* $\operatorname{Rd} M$ *abgeschlossen.*

Beweis:

$\operatorname{Rd} M \subset \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$**:** Sei $x \in \operatorname{Rd} M$. Nach Definition gilt $x \in \overline{M}$, $x \notin \mathring{M}$. Zu zeigen ist $x \in \overline{X \setminus M}$. Sei A abgeschlossen mit $X \setminus M \subset A$. Dann gilt $X \setminus A \subset M$ und $X \setminus A$ ist offen. Also ist $X \setminus A \subset \mathring{M}$. Wegen $x \notin \mathring{M}$ folgt $x \notin X \setminus A$ also $x \in A$. Da dies für jedes abgeschlossene $A \supset X \setminus M$ gilt, folgt $x \in \overline{X \setminus M}$.

$\overline{M} \cap \overline{X \setminus M} \subset \operatorname{Rd} M$**:** Sei $x \in \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$. Zu zeigen ist $x \notin \mathring{M}$. Angenommen $x \in \mathring{M}$. Dann gibt es eine offene Menge U mit $x \in U \subset M$. Also $x \notin X \setminus U$ und $X \setminus U$ ist eine abgeschlossene Menge, die $X \setminus M$ enthält. Das heißt $x \notin X \setminus U \supset \overline{X \setminus M}$, was den Annahmen widerspricht.

□

(1.17) Definition: Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes X heißt *dicht in* X, wenn $\overline{M} = X$ gilt.

Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, wenn X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

(1.18) Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$. Dann $\overline{M} = X$, $\mathring{M} = \emptyset$, $\operatorname{Rd} M = X$. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ separabel.
2. $X = \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{Q}^n$ zeigt, daß $\mathbb{R}^n$ separabel ist.
3. Ein diskreter Raum ist genau dann separabel, wenn er abzählbar ist.
4. Ein topologischer Raum mit der koendlichen Topologie ist separabel.

(1.19) Satz: *Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes X ist genau dann dicht in X, wenn für jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ gilt $U \cap M \neq \emptyset$.*

Beweis: Ist M nicht dicht in X so ist $X \setminus \overline{M}$ eine nichtleere offene Menge und $M \cap X \setminus \overline{M} = \emptyset$. Gibt es eine nichtleere offene Menge U mit $M \cap U = \emptyset$, so gilt auch $U \cap \overline{M} = \emptyset$. Daraus folgt $\overline{M} \neq X$. □

3. Umgebungen

Neben den Begriffen offene Menge und abgeschlossene Menge ist der Begriff *Umgebung* von zentraler Bedeutung.

(1.20) Definition: Sei x ein Punkt eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von* x, falls es eine offene Menge $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subset U$ gibt. Die Menge alle Umgebungen von x wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

(1.21) Satz: *Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:*

1. $\forall x \in X\colon \mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ *und* $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$.
2. $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \subset V \subset X \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$.
3. $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
4. $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U^* := \{y \in U \mid U \in \mathcal{U}(y)\} \in \mathcal{U}(x)$.

Sei umgekehrt jedem $x \in X$ ein System $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ so zugeordnet, daß Eigenschaften 1 – 4 erfüllt sind, dann ist $\mathcal{T} = \{U^* \mid U \in \mathcal{U}(x),\, x \in X\} \cup \{\emptyset\}$ eine Topologie auf X und für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{U}(x)$ das zugehörige Umgebungssystem von x.

Beweis: Die Eigenschaften 1 – 3 sind offensichtlich. Um Eigenschaft 4 zu zeigen, sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subset U$. Da V offen ist gilt $V \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$. Somit gilt $V \subset U^*$, also wegen Eigenschaft 2 auch $U^* \in \mathcal{U}(x)$.

Zu jedem $x \in X$ sei $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ so zugeordnet, daß Eigenschaften 1 – 4 erfüllt sind. Dann ist $\mathcal{T} = \{U^* \mid U \in \mathcal{U}(x),\, x \in X\} \cup \{\emptyset\}$ eine Topologie, denn:

1. Offensichtlich gilt $(U^*)^* = U^*$, also $U \in \mathcal{T} \iff U = U^* \iff \forall y \in U\colon U \in \mathcal{U}(y)$.
2. $\emptyset \in \mathcal{T}$ nach Definition. Wegen Eigenschaft 2 gilt $X \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in X$, also $X = X^* \in \mathcal{T}$.
3. Seien $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ und sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Also ist $U_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$, somit auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}(x)$. Wegen $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ beliebig, folgt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
4. Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ und $x \in U_1 \cap U_2$. Aus Eigenschaft 1 folgt $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$, also auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$ mit Eigenschaft 3. Wegen $x \in U_1 \cap U_2$ beliebig folgt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Mit Induktion folgt: $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Sei $\mathcal{U}'(x)$ das System der Umgebungen von x bezüglich $\mathcal{T}$. Gezeigt werden muß $\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(x)$.

$\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{U}'(x)$**:** Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gilt $U^* \in \mathcal{T}$ und $x \in U^* \subset U$, also $U \in \mathcal{U}'(x)$.

$\mathcal{U}'(x) \subset \mathcal{U}(x)$**:** Sei $U \in \mathcal{U}'(x)$. Dann gibt es $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subset U$. Nach Konstruktion von $\mathcal{T}$ gibt es einen Punkt $y \in X$ und $W \in \mathcal{U}(y)$ mit $V = W^*$. Aus $x \in V = W^*$ folgt $W \in \mathcal{U}(x)$, also auch $W^* \in \mathcal{U}(x)$. Nach Konstruktion gilt $V = W^* \subset U$, also $U \in \mathcal{U}(x)$.

□

Der Satz zeigt, daß die Axiomatik der Topologie auch aus dem Begriff der Umgebung aufgebaut werden kann.

(1.22) Definition: Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so heißt $\mathcal{T}_1$ *feiner als* $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ *gröber als* $\mathcal{T}_1$, falls $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ gilt. *Feiner* bedeutet also, daß es mehr offene Mengen gibt.

(1.23) Beispiele: Für jede Menge X ist die diskrete Topologie feiner und die triviale Topologie gröber als alle anderen Topologien auf X.

Die Euklidsche Topologie auf $\mathbb{R}$ ist feiner als die koendliche Topologie.

4. Basen

Oft ist es mühsam, eine Topologie durch Angabe aller offenen Mengen zu beschreiben. Meist ist es einfacher, nur eine Teilmenge der Menge aller offenen Mengen anzugeben und zu fordern, daß sich die übrigen offenen Mengen durch beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte ergeben. Die Topologie wird von der angegebenen Menge erzeugt. Die angegebene Teilmenge kann wesentlich kleiner sein als die Menge aller offenen Mengen.

(1.24) Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.

1. Eine *Umgebungsbasis* bei x ist eine Teilmenge $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ mit $\forall U \in \mathcal{U}(x)\, \exists B \in \mathcal{B}(x) \colon B \subset U$.
2. Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so daß jedes Element von $\mathcal{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.
3. Eine *Subbasis* für die Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, so daß die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.
4. Der Raum X genügt dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es zu jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis gibt.

5. Der Raum X genügt dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine abzählbare Basis für die Topologie gibt.

(1.25) Beispiele:

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jedes $x \in X$ ist $\{U(x, r) \mid r > 0\}$ eine Umgebungsbasis und $\{U(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Metrische Räume genügen also dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.
2. Für $X = \mathbb{R}$ ist die Menge der offenen Intervalle $\{(a, b) \mid a < b\}$ eine Basis der Euklidschen Topologie. Das System $\{(c, d) \mid c < d, \text{ mit } c, d \in \mathbb{Q}\}$ ist eine abzählbare Basis, denn für $a < b$ gilt $(a, b) = \bigcup(c, d)$, wo $c, d \in \mathbb{Q}$, $a \leq c < d \leq b$.
3. Für jeden diskreten Raum ist die Menge aller einelementigen Teilmengen eine Basis der Topologie und $\{x\}$ eine Umgebungsbasis für $\mathcal{U}(x)$.

(1.26) Satz: *Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von X und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$ eine Umgebungsbasis bei x.*

Beweis: Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subset U$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, läßt sich V darstellen als $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit geeigneter Indexmenge I und $V_i \in \mathcal{B}$. Also gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x \in V_{i_0}$. Daher ist $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis. □

(1.27) Korollar: *Wenn X dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, dann auch dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.*

Daß die Umkehrung nicht richtig ist, zeigt folgendes Beispiel.

(1.28) Beispiel: Ein überabzählbarer diskreter Raum genügt dem ersten, aber nicht dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom.

Ob ein System von Teilmengen als Basis für eine Topologie taugt, läßt sich innerhalb des Systems entscheiden. Die zugehörige Topologie kann konstruiert werden.

(1.29) Satz: *Sei X eine Menge und $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen mit:*

1. $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B} \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{B}$,
2. $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.

Dann ist $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $\mathcal{T} := \{\bigcup_{U \in \mathcal{C}} U \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B}\} \cup \{\emptyset\}$.

Beweis: Gezeigt werden muß, daß $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist.

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ nach Konstruktion und $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U \in \mathcal{T}$.
2. Sei $O_i = \bigcup_{U \in \mathcal{C}_i} U \in \mathcal{T}$ mit $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}$, $i \in I$. Wegen $\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}$ gilt $\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{U \in \mathcal{C}_i} U) = \bigcup_{U \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i} U \in \mathcal{T}$
3. Sei $O_1 = \bigcup_{U \in \mathcal{C}_1} U$, $O_2 = \bigcup_{V \in \mathcal{C}_2} V$ mit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &= (\bigcup_{U \in \mathcal{C}_1} U) \cap (\bigcup_{V \in \mathcal{C}_2} V) = \bigcup_{U \in \mathcal{C}_1} (U \cap (\bigcup_{V \in \mathcal{C}_2} V)) \\ &= \bigcup_{U \in \mathcal{C}_1} (\bigcup_{V \in \mathcal{C}_2} (U \cap V)) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

   da $U \cap V \in \mathcal{B}$.

□

Jedes System von Teilmengen einer Menge kann als Subbasis einer Topologie verwendet werden.

(1.30) Satz: *Sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{S} \cup \{X\}$ eine Subbasis für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X.*

Beweis: Das System $\mathcal{B} := \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{S}\} \cup \{X\}$ erfüllt die Bedingungen aus Satz 1.29. □

(1.31) Beispiele: Sei $X := \{f \colon [a,b] \to \mathbb{R}\}$ die Menge der reellwertigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ wo $a < b$.

1. Für $x \in [a,b]$ und $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ sei

$$U(x,c,d) := \{f \in X \mid c < f(x) < d\}.$$

   Die von dem System $\mathcal{S}_1 := \{U(x,c,d)\}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_1$ heißt die *Topologie der punktweisen Konvergenz.*
2. Für $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ und $r, s \in [a,b]$ mit $r \leq s$ sei

$$U(r,s,c,d) := \{f \in X \mid \forall x \in [r,s] : c < f(x) < d\}.$$

   Die von dem System $\mathcal{S}_2 := \{U(r,s,c,d)\}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_2$ heißt die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.*

Wegen $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ gilt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist also feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz.

Ein separabler Raum besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge und ein Raum genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, wenn die Topologie eine abzählbare Basis besitzt. Es ist anzunehmen, daß diese beiden Eigenschaften nicht unabhängig voneinander sind.

(1.32) Satz: *Sei X ein topologischer Raum. Genügt X dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, so ist X separabel. In metrischen Räumen gilt auch die Umkehrung.*

Beweis: Der Raum X genüge dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Dann gibt es eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Dabei kann $U_i \neq \emptyset$ angenommen werden. Es sei $x_i \in U_i$. Der Raum X ist separabel, wenn $M := \{x_i \mid i \in I\}$ dicht in X ist. Sei U eine nichtleere offene Menge. Dann gibt es ein U_i mit $U_i \subset U$, also $U \cap M \ni x_i$. Aus Satz 1.19 folgt, daß M dicht ist.

Sei (X, d) ein metrischer separabler Raum. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $M = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset X$ mit $\overline{M} = X$. Der Raum X genügt dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn gezeigt ist, daß $\mathcal{B} := \{U(x_i, 1/n) \mid i, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie ist. Dazu muß gezeigt werden, daß sich jede offene Menge $U \subset X$ in der Form $U = \bigcup U(x_i, 1/n)$ mit $U(x_i, 1/n) \subset U$ schreiben läßt. Für $x \in U$ gibt es $r > 0$ mit $U(x, r) \subset U$ und $r < 1$. Dann gilt $U(x, r/4) \subset U$ und, weil $U(x, r/4)$ offen und M dicht ist, auch $U(x, r/4) \cap M \neq \emptyset$. Damit gibt es ein $x_i \in U(x, r/4) \cap M$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $r/4 < 1/n < r/2$ gilt $U(x_i, 1/n) \subset U(x, r) \subset U$ und $x \in U(x_i, 1/n)$. Damit läßt sich U wie gewünscht darstellen. □

5. Unterräume

Teilmengen eines topologischen Raumes können auf natürliche Weise wieder als topologische Räume betrachtet werden.

(1.33) Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$. Die *Unterraumtopologie* oder *Spurtopologie* von M ist definiert als

$$\mathcal{T}_M := \{U \cap M \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Der Raum $(M, \mathcal{T}_M)$ heißt ein (topologischer) *Unterraum* von $(X, \mathcal{T})$.

(1.34) Bemerkung: Sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Eine Teilmenge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $B \subset X$ mit $A = B \cap M$ gibt.

Das nächste Beispiel zeigt, daß offen und abgeschlossen nur relative Eigenschaften sind. Ob eine Menge offen ist, hängt nicht nur von der Menge, sondern auch von dem umgebenden Raum ab.

(1.35) Beispiel: Für $X = \mathbb{R}$ mit der Euklidschen Topologie und $M = [0, 1]$ ist $[0, 1/2) = [0, 1] \cap (-1/2, 1/2)$ offen in M aber nicht offen in X.

(1.36) Bemerkung: Unterräume metrischer Räume sind metrisch. Genauer, ist (X, d) ein metrischer Raum so gilt $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_{d'}$ mit $d' = d|_{M\times M}$.

Damit sind alle Räume, die sich als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ realisieren lassen, metrische Räume.

(1.37) Beispiele:

$$\mathbb{B}_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \qquad n\text{-}Ball$$
$$\mathbb{S}_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \qquad n\text{-}Sphäre$$
$$\mathbb{T}_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = 1/4\} \qquad Torus$$

Es gilt $\mathrm{Rd}\,\mathbb{B}_n = \mathbb{S}_{n-1}$.

Die Erdoberfläche kann als eine 2-Sphäre betrachtet werden. Der Abstand zwischen zwei Punkten auf der Erdoberfläche ist dann die Länge der direkten Verbindungsstrecke im $\mathbb{R}^3$ und nicht, wie gewohnt, die Länge der kürzesten Verbindungslinie auf der Oberfläche. Für die Topologie ist dies glücklicherweise unerheblich.

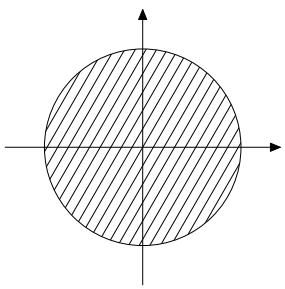


Abbildung 1.1: 2-Ball

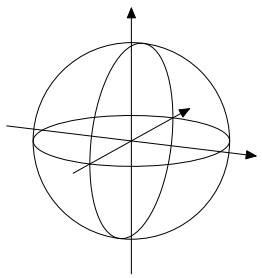


Abbildung 1.2: $\mathbb{S}_2$

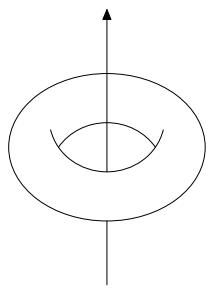


Abbildung 1.3: Torus

KAPITEL 2

Stetigkeit

Ein topologischer Raum ist eine Menge mit einer zusätzlichen Struktur. Von den Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind vor allem solche Abbildungen von Interesse, die sich mit dieser Struktur vertragen. Das sind die stetigen Abbildungen. Stetige Abbildungen sind für die Topologie das, was lineare Abbildungen für die Lineare Algebra, Gruppenhomomorphismen für die Gruppentheorie und Kollineationen für die Geometrie sind.

(2.1) Definition: Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$.

1. Die Abbildung f heißt *stetig in* $x \in X$, wenn für alle $U \in \mathcal{U}(f(x))$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$.
2. Die Abbildung f heißt stetig, wenn für jede offene Menge $O \subset Y$ das Urbild f^{-1} offen in X ist.
3. Die Abbildung f ist ein *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

(2.2) Bezeichnungen: Für die Mengen der stetigen Abbildungen von X nach Y bzw. nach $\mathbb{R}$ werden folgende Bezeichnungen verwendet.

$$C(X,Y) := \{f\colon X \to Y \mid f \text{ stetig}\},$$
$$C(X) := C(X,\mathbb{R}).$$

(2.3) Bemerkung: Es scheint auf den ersten Blick unvernünftig, die Stetigkeit einer Abbildung über eine Eigenschaft der Urbilder statt der Bilder zu definieren. Daß dies doch sinnvoll ist, liegt daran, daß sich Urbilder unter den mengentheoretischen Operationen besser verhalten als Bilder. Genauer, ist $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so gilt:

$$\begin{aligned} M,N \subset X \Rightarrow f(M \cup N) &= f(M) \cup f(N),\\ f(M \cap N) &\subset f(M) \cap f(N),\\ M,N \subset Y \Rightarrow f^{-1}(M \cup N) &= f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N),\\ f^{-1}(M \cap N) &= f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N). \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen lokaler und globaler Stetigkeit ist wie erwartet.

(2.4) Satz: *Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn f in jedem Punkt stetig ist.*

Beweis: Sei f stetig. Ist $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(f(x))$ so gibt es eine offene Menge V mit $f(x) \in V \subset U$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(V)$ offen. Außerdem gilt $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$. Somit gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$, also ist f stetig bei x.

Sei f stetig in jedem Punkt $x \in X$. Ist $O \subset Y$ eine offene Menge, so gilt $O \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in O$. Dann gilt auch $f^{-1}(O) \in \mathcal{U}(x)$ für jedes $x \in f^{-1}(O)$, was bedeutet, daß $f^{-1}(O)$ offen ist. Damit ist f stetig. □

Stetigkeit verträgt sich mit der Komposition, wie das nächste Resultat belegt.

(2.5) Satz: *Seien X, Y, Z topologische Räume und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Sei $x \in X$. Ist f stetig in x und g stetig in $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig in x. Sind f und g stetig, so ist $g \circ f$ stetig.*

Beweis: Ist $U \in \mathcal{U}(g(f(x)))$, so ist $g^{-1}(U) \in \mathcal{U}(f(x))$, also $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{U}(x)$. Damit ist $g \circ f$ stetig bei x.

Sind f und g stetig, so folgt die Behauptung mit dem eben gezeigten und Satz 2.4. □

(2.6) Bemerkung: Ist X eine Menge und sind $\mathcal{T}_1$ sowie $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so ist die Identität $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$ ist.

Es gibt also stetige Bijektionen, die keine Homöomorphismen sind. Daß dies auch für vertraute Topologien passieren kann, belegt das nächste Beispiel.

(2.7) Beispiel: Die Abbildung $f\colon [0,1) \to \mathbb{S}_1\colon t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung ist im Punkt $(1,0) = f(0)$ unstetig, denn $[0, \frac{1}{2})$ ist eine Umgebung von $0 = f^{-1}((1,0))$, aber $(f^{-1})^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big) = f\big([0, \frac{1}{2})\big)$ ist keine Umgebung von $(1,0)$.

Für den Nachweis der lokalen Stetigkeit genügt die Betrachtung einer Umgebungsbasis.

(2.8) Satz: *Seien X, Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Die Abbildung f ist genau dann stetig bei x, wenn es eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}(f(x))$ gibt, so daß für jede Umgebung $U \in \mathcal{B}(f(x))$ das Urbild $f^{-1}(U)$ in $\mathcal{U}(x)$ liegt.*

Beweis: Es muß nur die Rückrichtung gezeigt werden. Ist $V \in \mathcal{U}(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$ so gibt es ein $U \in \mathcal{B}(f(x))$ mit $U \subset V$. Wegen $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. □

(2.9) Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ jeweils mit der Euklidschen Topologie. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Für $x \in X$ ist $\mathcal{B}(f(x)) = \{U(f(x), \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis für $f(x)$. Wegen

$$f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \in \mathcal{U}(x) \iff \exists \delta > 0 : U(x, \delta) \subset f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$$

stimmt unser Stetigkeitsbegriff mit dem Stetigkeitsbegriff der Analysis überein. Da das obige Argument nur benutzt, daß die Topologien auf X und Y von Metriken induziert werden, gilt das Ergebnis für Abbildungen zwischen beliebigen metrischen Räumen.

Für den Nachweis der globalen Stetigkeit genügt die Betrachtung einer Subbasis.

(2.10) Satz: *Seien X und Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$. Dann ist f genau dann stetig, wenn es eine Subbasis $\mathcal{S}$ der Topologie auf Y gibt, so daß für alle $U \in \mathcal{S}$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist.*

Beweis: Es muß nur die Rückrichtung gezeigt werden. Sei $\mathcal{B} = \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid U_i \in \mathcal{S} \cup \{Y\}\}$ die zu $\mathcal{S}$ gehörende Basis. Das Urbild $f^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = f^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_n)$ ist als Schnitt endlich vieler offener Mengen offen. Somit ist $f^{-1}(V)$ offen für alle $V \in \mathcal{B}$. Ist $U \in Y$ offen, so läßt sich U darstellen als $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{B}$. Also ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ offen. □

Für reellwertige Funktionen verträgt sich Stetigkeit mit den Rechenoperationen.

(2.11) Satz: *Sei X ein topologischer Raum, seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen und $c, r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ und $|f|^r$ stetig. Gilt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist auch $1/f$ stetig.*

Beweis: Da sich jedes Intervall (a, b) als $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ darstellen läßt, ist $\mathcal{S} = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ eine Subbasis der Euklidschen Topologie auf $\mathbb{R}$. Für $h\colon X \to \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} G(h, a) &:= h^{-1}(a, \infty) \quad = \{x \in X \mid h(x) > a\}, \\ K(h, a) &:= h^{-1}(-\infty, a) = \{x \in X \mid h(x) < a\}. \end{aligned}$$

Es gilt $f(x)+g(x) > a$ genau dann, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > a-b$ und $g(x) > b$ gibt. Daraus folgt:

$$G(f+g,a) = \bigcup_{b\in\mathbb{R}} \big(G(f,a-b) \cap G(g,b)\big),$$
$$K(f+g,a) = \bigcup_{b\in\mathbb{R}} \big(K(f,a-b) \cap K(g,b)\big).$$

Dies zeigt, daß $f+g$ stetig ist.

Für $c > 0$ gilt $c \cdot f(x) > a$ genau dann, wenn $f(x) > {}^{a}\!/_{c}$ gilt. Daraus folgt:

$$G(c\cdot f,a) = G(f, {}^{a}\!/_{c}),$$
$$K(c\cdot f,a) = K(f, {}^{a}\!/_{c}).$$

Für $c < 0$ gilt $c \cdot f(x) > a$ genau dann, wenn $f(x) < {}^{a}\!/_{c}$ gilt. Daraus folgt:

$$G(c\cdot f,a) = K(f, {}^{a}\!/_{c}),$$
$$K(c\cdot f,a) = G(f, {}^{a}\!/_{c}).$$

Zusammengenommen gilt daher, daß $c \cdot f$ stetig ist.

Für $a < 0$ gilt

$$G(|f|^{r},a) = X,$$
$$K(|f|^{r},a) = \emptyset.$$

Für $a \geq 0$ gilt:

$$|f(x)|^{r} > a \iff |f(x)| > a^{{}^{1}\!/_{r}} \iff f(x) > a^{{}^{1}\!/_{r}} \text{ oder } f(x) < -a^{{}^{1}\!/_{r}},$$
$$|f(x)|^{r} < a \iff |f(x)| < a^{{}^{1}\!/_{r}} \iff -a^{{}^{1}\!/_{r}} < f(x) < a.$$

Daraus folgt:

$$G(|f|^{r},a) = G(f,a^{{}^{1}\!/_{r}}) \cup K(f,-a^{1r}),$$
$$K(|f|^{r},a) = K(f,a^{{}^{1}\!/_{r}}) \cap G(f,-a^{{}^{1}\!/_{r}}).$$

Dies zeigt, daß $|f|^r$ stetig ist.

Wegen $f(x)\cdot g(x) = {}^{1}\!/_{4}\big((f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2\big)$ folgt aus dem bereits gezeigten, daß $f \cdot g$ stetig ist. Analog ist die Stetigkeit von ${}^{1}\!/_{f}$ einzusehen. □

(2.12) Korollar: *$C(X)$ ist ein reeller Vektorraum und ein Ring.*

Erwartungsgemäß sind Einschränkungen stetiger Funktionen wieder stetig.

(2.13) Satz: *Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist auch $f\colon X \to f(X) \subset Y$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie von $f(X)$ in Y.*

Für $M \subset X$ ist auch $f|_M\colon M \to Y$ stetig.

Beweis: Ist $U \subset f(X)$ offen, so gibt es eine offene Menge $V \subset Y$ mit $U = V \cap f(X)$. Somit ist

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(f(X) \cap V) = f^{-1}(V)$$

offen in X, also $f\colon X \to f(X)$ stetig.

Ist $U \subset Y$ offen, so ist $f|_M^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap M$ offen in M. Also ist die Einschränkung $f|_M\colon M \to Y$ stetig. □

(2.14) Definition: Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Einbettung*, falls f stetig und injektiv ist und einen Homöomorphismus von X nach $f(X)$ induziert.

Zwei Einbettungen $f, g\colon X \to Y$ heißen *äquivalent*, wenn es einen Homöomorphismus $h\colon Y \to Y$ mit $h(f(X)) = g(X)$ gibt.

(2.15) Beispiel: Die Abbildung $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist stetig und injektiv. Es gilt $f([0,1)) = \mathbb{S}_1$. Die Abbildung f ist keine Einbettung, denn $f\colon [0,1) \to \mathbb{S}_1$ ist kein Homöomorphismus, wie in Beispiel 2.7 gezeigt wurde.

Für Einbettungen der Sphäre in die Ebene gilt folgender Satz.

(2.16) Satz von Schönfliess: *Je zwei Einbettungen von $\mathbb{S}_1$ in $\mathbb{R}^2$ sind äquivalent.*

Daß dieses Resultat keineswegs selbstverständlich ist, zeigt der Blick auf andere Dimensionen. So gibt es nichtäquivalente Einbettungen der $\mathbb{S}_2$ in den $\mathbb{R}^3$. Die (topologische) Knotentheorie ist im wesentlichen das Studium der verschiedenen nichtäquivalente Einbettungen der $\mathbb{S}_1$ in den $\mathbb{R}^3$.

Die Topologie kann statt aus dem Begriff der offenen Menge auch aus dem Begriff der abgeschlossenen Menge hergeleitet werden. Es ist daher klar, daß es auch ein Charakterisierung der Stetigkeit mittels abgeschlossener Mengen gibt.

(2.17) Satz: *Sind X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ auch $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Dies folgt aus $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. □

Wir interessieren uns nun für Abbildungen, bei denen nicht die Urbilder sondern die Bilder offener bzw. abgeschlossener Mengen offen bzw. abgeschlossen sind.

(2.18) Definition: Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

1. Die Abbildung f heißt *offen*, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ auch $f(U) \subset Y$ offen ist.
2. Die Abbildung f heißt *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ auch $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist.

(2.19) Satz: *Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von X. Dann ist f genau dann offen, wenn für jedes $U \in \mathcal{B}$ auch $f(U) \subset Y$ offen ist.*

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus $f(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f(U_i)$. □

(2.20) Satz: *Eine stetige und bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f offen oder abgeschlossen ist.*

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus $(f^{-1})^{-1} = f$. □

(2.21) Beispiele:

1. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ ist nicht offen, denn $f((-1,1)) = [0,1)$.
2. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x$ ist nicht abgeschlossen, denn die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\cdot y = 1\}$ ist abgeschlossen, aber $f(M) = \mathbb{R}\setminus\{0,\}$ ist nicht abgeschlossen.

   Die Abbildung f ist offen, denn die Mengen $U((x,y),r)$ mit $x,y,r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ bilden eine Basis der Topologie und die Bilder $f(U((x,y),r)) = (x-r, x+r)$ sind offen.

KAPITEL 3

Konvergenz

Konvergenz und Grenzwert sind wichtige Begriffe in der Mathematik. Zentrale Begriffe der Analysis, wie Ableitung und Integral, werden über Grenzwerte definiert. In der Analysis reicht es in der Regel aus, wenn die Konvergenz von Folgen untersucht wird. Die liegt daran, daß die reellen Zahlen dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen. Für beliebige topologische Räume hingegen sind Folgen nicht aussagekräftig genug. Deshalb wird eine Verallgemeinerung von Folgen benötigt. Netze und Folgen sind verschiedene aber äquivalente Verallgemeinerungen von Folgen, die auch in beliebigen topologischen Räumen aussagekräftig sind.

1. Folgen

Wir erinnern uns zunächst an den Begriff der Folge.

(3.1) Definition: Sei X ein topologischer Raum.

1. Eine *Folge* in X ist eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to X$. Die übliche Schreibweise ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Ein Punkt $x \in X$ ist *Häufungspunkt* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn gilt:
$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\, \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : x_n \in U.$$
3. Ein Punkt $x \in X$ ist *Grenzwert* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn gilt:
$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in U.$$
Ist x ein Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so *konvergiert* die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$. Dies wird mit $x_n \to x$ oder $\lim x_n = x$ bezeichnet.

(3.2) Bemerkung: Für Häufungspunkte und Grenzwerte genügt es, wenn nur die Umgebungen aus einer Umgebungsbasis betrachtet werden.

Für metrische Räume folgt mit Beispiel 1.25.1:

1. Ein Punkt x ist genau dann Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn gilt:
$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : d(x, x_n) < \varepsilon.$$

2. Ein Punkt x ist genau dann Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Dies sind die aus der Analysis bekannten Definitionen.

(3.3) Beispiele:

1. Ist X ein trivialer topologischer Raum, so konvergiert jede Folge in X gegen jeden Punkt $x \in X$.
2. Ist X ein diskreter topologischer Raum, so konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $x \in X$, wenn gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon x_n = x.$$

3. In $\mathbb{Q}$ mit dem p-adischen Abstand $|\cdot|_p$ gilt $\lim p^n = 0$, denn $d(0, p^n) = |0 - p^n|_p = |p^n|_p = 2^{-n}$ und $\lim 2^{-n} = 0$.

In der Analysis kann Stetigkeit mit Folgen charakterisiert werden. Für beliebige topologische Räume ist dies nur eingeschränkt möglich.

(3.4) Satz: *Seien X, Y topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Ist f in $x \in X$ stetig so gilt für jede Folge (x_n) in X: Konvergiert x_n gegen x, so konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x)$.*

Genügt X dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, so ist f genau dann stetig in $x \in X$ wenn für jede Folge (x_n) in X, die gegen x konvergiert, die Bildfolge $f(x_n)$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis: Sei f stetig in x und gelte $x_n \to x$. Sei $U \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 \colon x_n \in f^{-1}(U)$. Das heißt, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon f(x_n) \in U$. Daraus folgt $f(x_n) \to f(x)$.

Genüge X dem ersten Abzählbarkeitsaxiom und sei $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Sei induktiv

$$\begin{aligned} U_1' &:= U_1 \\ U_i' &:= U_i \cap U_{i-1}', \qquad i \geq 2 \end{aligned}$$

Dann ist auch $\{U_i' \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x, denn $U_i' \subset U_i$. Nach Konstruktion gilt $U_i' \supset U_j'$ für $i \leq j$. Angenommen f ist nicht stetig in x. Dann gibt es eine Umgebung M von $f(x)$, so daß $f^{-1}(M)$ keine Umgebung von x ist. Das heißt, für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $U_i' \not\subset f^{-1}(M)$. Somit gibt es $x_i \in U_i' \setminus f^{-1}(M)$. Dann ist $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Sie konvergiert gegen x, denn $U_i' \subset U_j'$ für $i \geq j$,

also $x_n \in U_i'$ für $n \geq i$. Die Folge $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, da keines der $f(x_n)$ in der Umgebung M enthalten ist. □

Das folgende Beispiel zeigt, daß in Räumen, die nicht dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügen, stetige Abbildungen geben kann, bei denen die Bildfolge jeder konvergenten Folge konvergent ist.

(3.5) Beispiel: Sei $\mathcal{T}_1$ die gewöhnliche Topologie auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{T}_2 := \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$. Dann ist die identische Abbildung $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ nicht stetig, denn das offene Intervall $(0,1)$ ist in $\mathcal{T}_1$ aber nicht in $\mathcal{T}_2$.

Bezüglich $\mathcal{T}_2$ konvergiert eine Folge x_n genau dann gegen x, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\forall n \geq n_0 \colon x_n = x$. Angenommen, dem ist nicht so. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m = m(n) \geq n$ mit $x_m \neq x$. Die Menge $U := \mathbb{R} \setminus \{x_{m(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Umgebung von x, aber die Folge $x_{m(n)}$ verläuft gänzlich außerhalb von U, konvergiert also nicht gegen x. Dies ist ein Widerspruch.

Die Identität $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ führt konvergente Folgen in konvergente Folgen über, ist aber nicht stetig.

2. Netze

Satz 3.4 und Beispiel 3.5 belegen, daß Folgen in beliebigen topologischen Räumen versagen. Netze sind ein Weg aus dieser Misere. Sie sind, grob gesprochen, eine Verallgemeinerung der Folgen, bei der anstelle von $\mathbb{N}$ beliebige gerichtete Mengen zugelassen sind.

(3.6) Definition: Eine *Ordnung* einer Menge Λ ist eine Relation $\leq$ auf Λ mit:

1. $\forall \lambda \in \Lambda \colon \lambda \leq \lambda$,
2. $\lambda \leq \mu$ und $\mu \leq \lambda \Rightarrow \mu = \lambda$,
3. $\lambda \leq \mu$ und $\mu \leq \tau \Rightarrow \lambda \leq \tau$.

Eine geordnete Menge heißt *gerichtet*, wenn zusätzlich gilt:

4. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda \, \exists \tau \in \Lambda \colon \lambda \leq \tau$ und $\mu \leq \tau$.

(3.7) Beispiele:

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind bezüglich $\leq$ gerichtete Mengen.
2. Ist x ein Element eines topologischen Raumes X, so können $\mathcal{U}(x)$ und jede Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ zu gerichteten Mengen gemacht werden, indem

$$U \leq V :\Longleftrightarrow V \subset U$$

gesetzt wird.

Daß dies eine Ordnung definiert, ist offensichtlich. Daß $\mathcal{U}(x)$ eine gerichtete Menge ist, ist ebenfalls offensichtlich. Für $U, V \in \mathcal{B}(x)$ gilt $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$. Also existiert ein $W \in \mathcal{B}(x)$ mit $W \subset U \cap V$, somit gilt $W \geq U$ und $W \geq V$. Damit ist auch $\mathcal{B}(x)$ gerichtet.

3. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zerlegungen

$$Z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

von $[a, b]$ mit $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Die Menge $\mathcal{Z}$ kann zu einer gerichteten Menge gemacht werden, indem

$$Z_1 \leq Z_2 :\Longleftrightarrow Z_2 \text{ enthält die Punkte von } Z_1$$

gesetzt wird.

(3.8) Definition: Sei X ein topologischer Raum.

1. Ein *Netz* oder eine *Moore-Smith-Folge* in X ist eine Abbildung $x\colon \Lambda \to X$, wobei Λ eine gerichtete Menge ist. Für ein Netz wird die Schreibweise $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ verwendet.
2. Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *häuft* sich in $A \subset X$ wenn gilt:

$$\forall \mu \in \Lambda\, \exists \lambda \geq \mu\colon x_\lambda \in A.$$

3. Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *schließt* in $A \subset X$ wenn gilt:

$$\exists \mu \in \Lambda\, \forall \lambda \geq \mu\colon x_\lambda \in A.$$

4. Ein Punkt $x \in X$ ist *Häufungspunkt* von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ wenn sich $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in jeder Umgebung von x häuft, d.h. wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\, \forall \mu \in \Lambda\, \exists \lambda \geq \mu\colon x_\lambda \in U.$$

5. Ein Punkt $x \in X$ ist *Grenzwert* von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ wenn $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in jeder Umgebung von x schließt, d.h. wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\, \exists \mu \in \Lambda\, \forall \lambda \geq \mu\colon x_\lambda \in U.$$

Ist x ein Grenzwert des Netzes $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, so *konvergiert* das Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gegen $x \in X$. Dies wird mit $x_\lambda \to x$ oder $\lim x_\lambda = x$ bezeichnet.

(3.9) Bemerkung: Da $(\mathbb{N}, \leq)$ eine gerichtete Menge ist, sind Folgen spezielle Netze. Für Häufungspunkte und Grenzwerte ist es unerheblich, ob eine Folge als Folge oder als Netz betrachtet wird.

Der nächste Satz ist ein Indiz, daß Netze die gewünschte Verallgemeinerung von Folgen sind.

(3.10) Satz (Charakterisierung stetiger Funktionen): *Für eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen gilt: Die Abbildung f ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn für jedes gegen x konvergente Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ das Netz $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis: Daß eine stetige Abbildung konvergente Netze auf konvergente Netze abbildet folgt wie in Satz 3.4.

Sei f nicht stetig in x. Dann gibt es eine Umgebung M von $f(x)$, so daß $f^{-1}(M)$ keine Umgebung von x ist. Das heißt, für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $U \not\subset f^{-1}(M)$. Also gibt es für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U \setminus f^{-1}(M)$. Da $\mathcal{U}(x)$ eine gerichtete Menge ist, ist $(x_U)_{U\in\mathcal{U}(x)}$ ein Netz in X. Das Netz konvergiert gegen x, denn für $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \geq U$ gilt nach Konstruktion der Ordnung $V \subset U$ also $x_V \in V \subset U$. Das Bildnetz $f(x_U)$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, da keines der $f(x_U)$ in der Umgebung M liegt. □

Der nächste Satz besagt, daß der Abschluß einer Menge M genau die Menge der Häufungspunkte von Netzen in M ist. Eine entsprechende Aussage für Folgen und $M \subset \mathbb{R}^n$ dürfte aus der Analysis bekannt sein.

(3.11) Satz: *Sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes X. Dann gilt:*

$$\overline{M} = \{x \in X \mid \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ in } M \text{ mit } x_\lambda \to x\}.$$

Beweis: Für $x \in X$ ist $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{U}(x) \mid U \text{ offen}\}$ eine Umgebungsbasis von x. Sei $x \in \overline{M}$ und $U \in \mathcal{B}(x)$. Dann ist $X \setminus U$ abgeschlossen. Wäre $M \subset X \setminus U$, so wäre auch $\overline{M} \subset X \setminus U$ im Widerspruch zu $x \in \overline{M} \cap U$. Also gilt $M \not\subset X \setminus U$, d.h. $M \cap U \neq \emptyset$. Für jede Umgebung $U \in \mathcal{B}(x)$ gibt es also ein $x_U \in M \cap U$. Doch dann ist $(x_U)_{U\in\mathcal{B}(x)}$ ein Netz, das gegen x konvergiert.

Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in M das gegen $x \in X$ konvergiert. Für $U \in \mathcal{B}(x)$ gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $x_\lambda \in U$. Insbesondere gilt $U \cap M \neq \emptyset$. Sei $A \subset X$ abgeschlossen mit $M \subset A$. Es muß gezeigt werden, daß x in A liegt, denn dann liegt x in $\overline{M}$. Angenommen $x \notin A$. Dann gilt $x \in X \setminus A \in \mathcal{B}(x)$ im Widerspruch zu $X \setminus A \cap M \neq \emptyset$. □

Eine Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$ gilt. Also folgt aus Satz 3.11 unmittelbar:

(3.12) Korollar: *Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jedes (in X) konvergenten Netzes in A wieder in A liegt.*

Das nächste Resultat ist eine Variation von Satz 3.11. Wir benötigen dafür den Begriff des Häufungspunktes einer Menge.

(3.13) Definition: Sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes X. Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt von M*, falls jede Umgebung von x die Menge M schneidet.

(3.14) Satz: *Ist M eine Teilmenge eines topologischen Raumes X, so gilt:*

1. $\overline{M} = \{x \in X \mid x \text{ Häufungspunkt von } M\}$,
2. $\operatorname{Rd} M = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon U \cap M \neq \emptyset \neq U \cap X \setminus M\}$.

Beweis: Sei $x \in \overline{M}$. Dann gibt es ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in M, das gegen x konvergiert. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Wegen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to x$ gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $x_\lambda \in U$. Wegen $x_\lambda \in M$ folgt $U \cap M \neq \emptyset$. Also ist x Häufungspunkt von M.

Ist x Häufungspunkt von M, so gilt $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es als ein $x_U \in U \cap M$. Damit ist $(x_U)_{U\in\mathcal{U}(x)}$ ein Netz in M, das gegen x konvergiert. Mit Satz 3.11 folgt $x \in \overline{M}$.

Damit ist die erste Aussage gezeigt. Wegen $\operatorname{Rd} M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$ folgt die zweite Aussage unmittelbar aus der ersten Aussage. □

Aus der Analysis ist der Begriff einer Teilfolge vertraut. Das Ziel ist nun, etwas vergleichbares für Netze zu definieren. Teilfolgen können auf zwei Weisen betrachtet werden. Aus einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden einige Glieder weggelassen oder vor die Abbildung $x \colon \mathbb{N} \to X$ wird eine streng monotone Abbildung $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gesetzt. Wir ziehen die zweite Betrachtungsweise zur Definition von Teilnetzen heran. Dazu werden zunächst kofinale Abbildungen zwischen gerichteten Mengen definiert. Dies ist eine Abschwächung und Verallgemeinerung der streng monotonen Abbildungen.

(3.15) Definition: Eine Abbildung $h \colon \Lambda' \to \Lambda$ zwischen gerichteten Mengen Λ, Λ' heißt *kofinal*, wenn gilt:

$$\forall \lambda \in \Lambda \, \exists \lambda' \in \Lambda' \, \forall \mu \geq \lambda' \colon h(\mu) \geq \lambda.$$

(3.16) Bemerkung: Eine streng monotone Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, d.h. eine Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(j) > h(i)$ für $j > i$ ist kofinal.

(3.17) Definition: Sei X ein topologischer Raum.

1. Sind Λ, Λ' gerichtete Menge, $x \colon \Lambda \to X$ ein Netz und ist $h \colon \Lambda' \to \Lambda$ kofinal, so ist $x \circ h : \Lambda' \to X$ ein *Teilnetz* von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

2. Ist $x\colon \mathbb{N} \to X$ eine Folge und ist $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton, so ist $x \circ h : \mathbb{N} \to X$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3.18) Bemerkung: Wegen Bemerkung 3.16 sind Teilfolgen spezielle Teilnetze.

Häufungspunkte eines Netzes können über Teilnetze charakterisiert werden. Dies ist eine Verallgemeinerung der Tatsache, daß die Häufungspunkte einer Folge genau die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen sind.

(3.19) Satz: *Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in einem topologischen Raum X. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, wenn es ein Teilnetz von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gibt, das gegen X konvergiert.*

Beweis: Gibt es ein Teilnetz, das gegen x konvergiert, so ist x offensichtlich Häufungspunkt. Es muß also nur die andere Implikation gezeigt werden.

Sei x ein Häufungspunkt des Netzes $x\colon \Lambda \to X$. Wir setzen

$$\Lambda' := \{(\lambda, U) \in \Lambda \times \mathcal{U}(x) \mid x_\lambda \in U\}$$

und

$$(\lambda, U) \leq (\mu, V) :\Longleftrightarrow \lambda \leq \mu \text{ und } V \subset U.$$

Damit ist Λ' eine geordnete Menge. Sie ist sogar eine gerichtete Menge wie das folgende Argument zeigt. Sind (λ, U) und (μ, V) aus Λ', so gibt es, da x ein Häufungspunkt von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist, ein $\nu \in \Lambda$ mit $\nu \geq \lambda$ und $\nu \geq \mu$ sowie $x_\nu \in U \cap V \in \mathcal{U}(x)$. Das heißt, es gibt $\nu \in \Lambda$ mit $(x_\nu, U \cap V) \in \Lambda'$ und $(\nu, U \cap V) \geq (\lambda, U), (\mu, V)$.

Die Abbildung $h\colon \Lambda' \to \Lambda\colon (\lambda, U) \to \lambda$ ist kofinal, denn für $\lambda \in \Lambda$ ist $(\lambda, X) \in \Lambda'$ und aus $(\mu, U) \geq (\lambda, X)$ folgt $\mu \geq \lambda$.

Somit ist $(x_{(\lambda,U)})_{(\lambda,U)\in\Lambda'}$ ein Teilnetz von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Wir wollen nachweisen, daß dieses Teilnetz gegen x konvergiert. Da x ein Häufungspunkt ist, gibt es für jedes $V \in \mathcal{U}(x)$ ein $\mu \in \Lambda$ mit $x_\mu \in V$, also $(\mu, V) \in \Lambda'$. Für $(\lambda, U) \in \Lambda'$ mit $(\lambda, U) \geq (\mu, V)$ gilt $x_{(\lambda,U)} = x_\lambda \in U \subset V$. Das heißt, das Teilnetz $(x_{(\lambda,U)})_{(\lambda,U)\in\Lambda'}$ schließt in V. Da $V \in \mathcal{U}(x)$ beliebig ist, folgt, daß das Teilnetz gegen x konvergiert. □

(3.20) Bemerkung: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum, so ist $x \in X$ genau dann Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen x konvergiert.

Der nächste Begriff hat keine Entsprechung für Folgen.

(3.21) Definition: Ein Netz $x\colon \Lambda \to X$ heißt *universell*, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ das Netz x entweder in A oder in $X \setminus A$ schließt.

(3.22) Satz: *Ist $x\colon \Lambda \to X$ ein universelles Netz und sind X, Y topologische Räume, so ist für jede Abbildung $f\colon X \to Y$ auch $f \circ x\colon \Lambda \to Y$ ein universelles Netz.*

Beweis: Sei $A \subset Y$. Da $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ universell ist, schließt es entweder in $f^{-1}(A)$ oder in $X \setminus f^{-1}(A)$. Daher schließt das Netz $f \circ x$ entweder in A oder in $Y \setminus A$. □

Auf den ersten Blick scheinen universelle Netze sehr rar zu sein. Wir werden jedoch sehen, daß jedes Netz ein universelles Teilnetz besitzt. Für den Beweis dieser Tatsache benötigen wir das Zornsche Lemma.

(3.23) Definition: Sei $(\Lambda, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine *Kette* ist eine Teilmenge $K \subset \Lambda$ sodaß für $\lambda, \mu \in K$ stets $\lambda \leq \mu$ oder $\mu \leq \lambda$ gilt. Eine *obere Schranke* einer Kette K ist ein Element $\lambda \in \Lambda$ mit $\mu \leq \lambda$ für alle $\mu \in K$.

Ein Element $\lambda \in \Lambda$ heißt *maximal*, wenn $\mu \in \Lambda$ und $\lambda \leq \mu$ stets $\lambda = \mu$ impliziert.

(3.24) Zornsches Lemma: *Ist $(\Lambda, \leq)$ eine geordnete Menge, so daß jede Kette in Λ nach oben beschränkt ist, so enthält Λ auch ein maximales Element.*

Das Zornsche Lemma läßt sich nicht aus den anderen Axiomen der Logik herleiten. Es wird daher üblicherweise als ein weiteres Axiom hinzugezogen.

(3.25) Satz: *Jedes Netz besitzt eine universelles Teilnetz.*

Beweis: Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Wir definieren $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ wie folgt: Für $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ falls:

1. $A \in \mathcal{C} \Rightarrow (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließt in A,
2. $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.

Wegen $X \in \mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{C}$ nicht leer. Die Menge $\mathfrak{C}$ wird durch $\subset$ zu einer geordneten Menge. Ist K eine Kette in $\mathfrak{C}$, so ist $\bigcup_{\mathcal{C}\in K} \mathcal{C}$ wieder ein Element aus $\mathfrak{C}$. Alle Ketten in $\mathfrak{C}$ sind somit nach oben beschränkt. Mit dem Zornschen Lemma gibt es daher ein maximales Element $\mathcal{C}_0 \in \mathfrak{C}$.

Der nächste Schritt erinnert an den Beweis von Satz 3.19. Wir setzen

$$\Lambda' := \{(\lambda, A) \in \Lambda \times C_0 \mid x_\lambda \in A\}.$$

Wir setzen $(\mu, B) \geq (\lambda, A)$ falls $B \subset A$ und $\mu \geq \lambda$. Dies definiert eine Ordnung auf Λ'. Mit dieser Ordnung wird Λ' zu einer gerichteten Menge, wie das folgende Argument zeigt: Sind (μ, B) und (λ, A) aus Λ', so sind μ, λ aus Λ. Da Λ gerichtet ist, gibt es ein $\nu \in \Lambda$ mit $\nu \geq \mu, \lambda$. Außerdem gilt $A, B \in \mathcal{C}_0 \in \mathfrak{C}$, also, wegen Eigenschaft 2, auch $A \cap B \in \mathcal{C}_0$. Wegen $A \cap B \in \mathcal{C}_0$ häuft sich mit Eigenschaft 1 das Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in $A \cap B$. Es gibt also ein $\tau \geq \nu \geq \mu, \lambda$ mit $x_\tau \in A \cap B$. Damit gilt $(\tau, A \cap B) \in \Lambda'$ und $(\tau, A \cap B) \geq (\mu, B), (\lambda, A)$.

Die Abbildung $h\colon \Lambda' \to \Lambda\colon (\lambda, A) \mapsto \lambda$ ist kofinal, denn für $\lambda \in \Lambda$ ist $(\lambda, X) \in \Lambda'$ und aus $(\mu, B) \geq (\lambda, X)$ folgt $\mu \geq \lambda$. Somit ist $(x_{(\lambda,A)})_{(\lambda,A)\in\Lambda'}$ ein Teilnetz von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Wir wollen nun nachweisen, daß das Teilnetz $(x_{(\lambda,A)})_{(\lambda,A)\in\Lambda'}$ universell ist. Sei $S \subset X$. Angenommen $(x_{(\lambda,A)})_{(\lambda,A)\in\Lambda'}$ häuft sich in S. Für $(\lambda, A) \in \Lambda'$ gibt es $(\mu, B) \in \Lambda'$ mit $(\mu, B) \geq (\lambda, A)$ und $x_\mu = b_{(\mu,B)} \in S$. Wegen $(\mu, B) \geq (\lambda, A)$ gilt $B \subset A$ und $\mu \geq \lambda$. Wegen $(\mu, B) \in \Lambda'$ gilt $x_\mu \in B$, also mit dem eben gezeigten $x_\mu \in B \cap S \subset A \cap S$. Das heißt, für jedes $A \in \mathcal{C}_0$ und für alle $\lambda \in \Lambda$ gibt es $\mu \geq \lambda$ mit $x_\mu \in A \cap S$. Mit anderen Worten, das Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ häuft sich in jedem $A \in \mathcal{C}_0$. Daraus folgt, daß die Menge $\mathcal{C}_0' := \mathcal{C}_0 \cup \{S \cap A \mid A \in \mathcal{C}_0\}$ ebenfalls in $\mathfrak{C}$ liegt. Nach Konstruktion gilt $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_0'$. Da $\mathcal{C}_0$ maximal ist, folgt $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0'$, also $S \in \mathcal{C}_0$.

Angenommen, das Teilnetz $(x_{(\lambda,A)})_{(\lambda,A)\in\Lambda'}$ häuft sich in S und $X \setminus S$. Mit dem eben gezeigten gilt dann $S \in \mathcal{C}_0$ und $X \setminus S \in \mathcal{C}_0$. Wegen $\mathcal{C}_0 \in \mathfrak{C}$ folgt, mit Eigenschaft 2, $S \cap X \setminus S = \emptyset \in \mathcal{C}_0$. Dies ist ein Widerspruch, denn $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ häuft sich nicht in der leeren Menge.

Damit wissen wir, daß wenn sich das Teilnetz $(x_{(\lambda,A)})_{(\lambda,A)\in\Lambda'}$ in S häuft, das Teilnetz sogar in S schließt.

Für $S \subset X$ gilt also: Das Teilnetz $(x_{(\lambda,A)})_{(\lambda,A)\in\Lambda'}$ häuft sich entweder in S oder in $X \setminus S$. Im ersten Fall schließt das Teilnetz in S, im letzten Fall in $X \setminus S$. Damit ist das Teilnetz $(x_{(\lambda,A)})_{(\lambda,A)\in\Lambda'}$ universell. □

3. Filter

Neben Netzen sind Filter eine aussagekräftige Verallgemeinerung von Folgen. Obwohl die Definition eines Filters wenig mit der Definition eines Netzes gemeinsam hat, sind die beiden Konzepte äquivalent.

(3.26) Definition: Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X mit:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$,
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
3. $F \in \mathcal{F}$ und $F \subset G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ heißt *Filterbasis* für $\mathcal{F}$, falls es für jedes $G \in \mathcal{F}$ ein $F \in \mathcal{F}_0$ mit $F \subset G$ gibt.

Die definierenden Eigenschaften eines Filters erinnern an die in Satz 1.21 gezeigten Eigenschaften von Umgebungen. Dies führt zum erstem der folgenden Beispiele. Das dritte Beispiel legt die Verwandtschaft mit Folgen offen.

(3.27) Beispiele:

1. Ist x ein Element eines topologischen Raumes X, so ist $\mathcal{U}(x)$ ein Filter und jede Umgebungsbasis eine Filterbasis.
2. Ist A eine nichtleere Teilmenge einer Menge X, so ist $\mathcal{F} := \{M \subset X \mid A \subset M\}$ ein Filter. Für diesen Filter ist $\{A\}$ eine Filterbasis.
3. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so ist $\mathcal{F} := \{A \subset X \mid \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n \colon x_m \in A\}$ ein Filter. Für diesen Filter ist $\{E_n := \{x_m \mid m \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis.

Es kann direkt nachgeprüft werden, ob ein Teilmengensystem als Filterbasis taugt.

(3.28) Satz: *Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ von Teilmengen von X ist genau dann eine Filterbasis für einen (eindeutig bestimmten) Filter, wenn gilt:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$,
2. $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}_0 \, \exists F_3 \in \mathcal{F}_0 \colon F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter mit Filterbasis $\mathcal{F}_0$. Wegen $\emptyset \notin \mathcal{F}$ gilt $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$. Seien $F_1, F_2 \subset \mathcal{F}_0$. Dann folgt $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, also gibt es ein $F_3 \in \mathcal{F}_0$ mit $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Sei $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften 1 und 2.. Dann ist das System $\mathcal{F} := \{F \subset X \mid \exists G \in \mathcal{F}_0 \colon G \subset F\}$ ein Filter. Das erste und dritte Axiom für Filter sind sofort einzusehen. Um das zweite Axiom einzusehen seien $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Dann gibt es $G_1, G_2 \in \mathcal{F}_0$ mit $G_i \subset F_i$. Nach Voraussetzung gibt es ein G_3 mit $G_3 \subset G_1 \cap G_2 \subset F_1 \cap F_2$. Also gilt $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. □

(3.29) Definition: Ist $\mathcal{F}_0$ eine Filterbasis auf X, so heißt

$$\mathcal{F} := \{F \subset X \mid \exists G \in \mathcal{F}_0 \colon G \subset F\}$$

der von $\mathcal{F}_0$ erzeugte Filter.

Wie für Folgen und Netze können auch für Filter Häufungspunkte und Grenzwerte definiert werden.

(3.30) Definition: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einem topologischen Raum X.

1. Ein Punkt $x \in X$ ist *Häufungspunkt* von $\mathcal{F}$ wenn für jedes $F \in \mathcal{F}$ und jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ stets $F \cap U \neq \emptyset$ gilt.
2. Ein Punkt $x \in X$ ist *Grenzwert* von $\mathcal{F}$ wenn $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$.

   Ist x ein Grenzwert des Filters $\mathcal{F}$, so *konvergiert* der Filter $\mathcal{F}$ gegen $x \in X$. Dies wird mit $\mathcal{F} \to x$ bezeichnet.

Unser Ziel ist nun, eine zu Satz 3.10 analoge Aussage für Filter zu zeigen. Als Vorbereitung betrachten wir das Verhalten von Filtern unter Abbildungen.

(3.31) Definition: Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X und eine Abbildung $f\colon X \to Y$ sei $f(\mathcal{F})$ der von $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter.

(3.32) Bemerkung: Die Menge $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ ist in der Tat eine Filterbasis, denn für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ gilt $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ und $f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$.

Einer der Vorteile von Netzen gegenüber Folgen ist, daß damit stetige Funktionen charakterisiert werden können. Dies wurde in Satz 3.10 gezeigt. Eine analoge Aussage gilt für Filter.

(3.33) Satz: *Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen und einem Punkt $x \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abbildung f ist stetig bei x.*
2. *Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \to x$ gilt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.*
3. *$\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$ im Sinne von Definition 3.31.*

Beweis: Wir zeigen die Implikationen $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

- $1 \to 2$**:** Sei f stetig in x und gelte $\mathcal{F} \to x$. Für $U \in \mathcal{U}(f(x))$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$. Also gilt $f(f^{-1}(U)) \in f(\mathcal{F})$. Wegen $f(f^{-1}(U)) \subset U$ folgt $U \in f(\mathcal{F})$. Das bedeutet $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{F})$, also $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.
- $2 \to 3$**:** Das System $\mathcal{U}(x)$ ist ein Filter, der gegen x konvergiert. Also konvergiert nach Voraussetzung $f(\mathcal{U}(x))$ gegen $f(x)$. Dies hat $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$ zur Folge.
- $3 \to 1$**:** Sei $U \in \mathcal{U}(f(x))$. Nach Voraussetzung gilt $U \in f(\mathcal{U}(x))$ daher existiert ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(V) \subset U$, also $V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U)$. Das bedeutet $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$. Da $U \in \mathcal{U}(f(x))$ beliebig war, folgt daß f stetig bei x ist.

□

Wie bereits angedeutet, sind Netze und Filter äquivalente Konzepte. Wir wollen nun die Zusammenhänge zwischen Netzen und Filtern untersuchen.

Wir wollen zunächst zeigen, wie in natürliche Weise aus jedem Netz ein Filter gewonnen werden kann. Dies verallgemeinert die Art, wie in Beispiel 3.27.3 Folgen als Filter betrachtet wurden.

(3.34) Satz: *Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in einem topologischen Raum X. Für $\lambda \in \Lambda$ sei $\mathrm{T}(\lambda) := \{x_\mu \mid \mu \geq \lambda\}$. Dann ist $\mathcal{F}_0 := \{\mathrm{T}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine Filterbasis in X. Für den von $\mathcal{F}_0$ erzeugten Filter $\mathcal{F}$ gilt:*

$$x_\lambda \to x \iff \mathcal{F} \to x.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{F}_0$ eine Filterbasis ist. Nach Konstruktion gilt $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$. Für $\lambda, \mu \in \Lambda$ gibt es ein $\tau \in \Lambda$ mit $\lambda \leq \tau$ und $\mu \leq \tau$. Also gilt $\mathrm{T}(\tau) \subset \mathrm{T}(\lambda) \cap \mathrm{T}(\mu)$. Dies zeigt, daß $\mathcal{F}_0$ eine Filterbasis ist.

Sei $\mathcal{F}$ der zugehörige Filter.

Gilt $x_\lambda \to x$, so gibt es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $\lambda \in \Lambda$ mit $\mathrm{T}(\lambda) \subset U$. Also gilt $U \in \mathcal{F}$. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig war, folgt $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$, also $\mathcal{F} \to x$.

Gilt $\mathcal{F} \to x$, d.h. $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$, so ist jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein Element des Filters $\mathcal{F}$. Daher existiert $\lambda \in \Lambda$ mit $\mathrm{T}(\lambda) \subset U$. Somit gilt $x_\lambda \to x$. □

Um zu aus einem Filter ein Netz zu konstruieren, ist folgende Beobachtung entscheidend.

(3.35) Bemerkung: Jede Filterbasis wird eine gerichtete Menge, indem $F_1 \leq F_2 :\Longleftrightarrow F_2 \subset F_1$ gesetzt wird.

Das heißt, ein Filter kann als Indexmenge für ein Netz verwendet werden. Die folgende Definition ist somit naheliegend.

(3.36) Definition: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge X. Ein Netz $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ heißt *$\mathcal{F}$ zugeordnet*, wenn $x_F \in F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt.

Ein Filter bestimmt also in der Regel nicht eindeutig ein Netz. Vielmehr gehört zu jedem Filter ein ganzes System von Netzen. Für die Konvergenz gilt folgendes Resultat.

(3.37) Satz: *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einem topologischen Raum X. Dann konvergiert $\mathcal{F}$ genau dann gegen $x \in X$, wenn jedes $\mathcal{F}$ zugeordnetes Netz $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ gegen x konvergiert.*

Beweis: Wir nehmen zunächst $\mathcal{F} \to x$ an. Sei $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ ein $\mathcal{F}$ zugeordnetes Netz. Jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ist ein Element von $\mathcal{F}$. Für jedes $F \in \mathcal{F}$ mit $U \leq F$, d.h. $F \subset U$ gilt $x_F \in F \subset U$. Dies zeigt $x_F \to x$.

Wir nehmen nun an, daß $\mathcal{F}$ nicht gegen x konvergiert. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \notin \mathcal{F}$. Für jedes $F \in \mathcal{F}$ gilt $F \not\subset U$, also $F \cap X \setminus U \neq \emptyset$. Für jedes $F \in \mathcal{F}$ gibt es daher $x_F \in F \cap X \setminus U$. Das Netz $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ ist $\mathcal{F}$ zugeordnet, konvergiert aber nicht gegen x. □

Die enge Beziehung zwischen Netzen und Filtern läßt sich nutzen, um mit wenig Aufwand den Abschluß einer Menge mittels Filter zu charakterisieren. Dies liefert das zu Satz 3.11 analoge Resultat.

(3.38) Satz: *Für eine Teilmenge M eines topologischen Raumes X gilt*

$$\overline{M} = \{x \in X \mid \exists \mathcal{F} \text{ Filter auf } X \text{ mit } \mathcal{F} \to x \text{ und } M \in \mathcal{F}\}.$$

Beweis: Sei $x \in \overline{M}$. Wegen Satz 3.11 gibt es ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit $x_\lambda \to x$ und $\forall \lambda \in \Lambda\colon x_\lambda \in M$. Für jedes λ gilt $\mathrm{T}(\lambda) = \{x_\mu \mid \lambda \leq \mu\} \subset M$. Für den von $\{\mathrm{T}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ erzeugten Filter $\mathcal{F}$ gilt $M \in \mathcal{F}$ und wegen Satz 3.34 auch $\mathcal{F} \to x$.

Konvergiert der Filter $\mathcal{F}$ gegen x und gilt $M \in \mathcal{F}$, so sei $\mathcal{F}_0$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$. Wegen $M \in \mathcal{F}$ gilt $M \cap F \neq \emptyset$ für jedes $F \in \mathcal{F}_0$. Für jedes $F \in \mathcal{F}_0$ gibt es also ein $x_F \in M \cap \mathcal{F}$. Dann ist $(x_F)_{F\in\mathcal{F}_0}$ ein Netz in M, das $\mathcal{F}$ zugeordnet ist und wegen Satz 3.37 gegen x konvergiert. Also gilt mit Satz 3.11 auch $x \in \overline{M}$. □

Wir führen nun das Analogon zu Teilnetzen ein.

(3.39) Definition: Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ Filter auf X. Der Filter $\mathcal{F}_1$ heißt *feiner* als $\mathcal{F}_2$, falls $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ gilt.

Häufungspunkte eines Netzes können über konvergente Teilnetze charakterisiert werden. Dies wurde in Satz 3.19 gezeigt. Für Filter gilt eine entsprechende Aussage.

(3.40) Satz: *Ist x ein Häufungspunkt des Filters $\mathcal{F}$, so gibt es einen feineren Filter $\mathcal{G}$, der gegen x konvergiert.*

Beweis: Sei x ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $F \cap U \neq \emptyset$. Also ist $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F} \cup \mathcal{U}(x) \cup \{F \cap U \mid U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis. Sei $\mathcal{G}$ der von $\mathcal{G}_0$ erzeugte Filter. Dann gilt $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{G}$, also $\mathcal{G} \to x$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Sei umgekehrt $\mathcal{G}$ ein Filter mit $\mathcal{G} \to x$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Dann gilt $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{G}$. Für $F \in \mathcal{F}$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $F, U \subset \mathcal{G}$, also $F \cap U \neq \emptyset$. Somit ist x Häufungspunkt von x. □

Als nächstes führen wir das Analogon zu universellen Netzen ein.

(3.41) Definition: Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter*, wenn er sich nicht verfeinern läßt, d.h. falls aus $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ stets $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ folgt.

Der folgende Satz zeigt, daß Ultrafilter tatsächlich den universellen Netzen entsprechen.

(3.42) Satz: *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für $A \subset X$ stets $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $A \subset X$ mit $A \notin \mathcal{F}$. Es muß $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gezeigt werden. Sei $F \in \mathcal{F}$. Dann gilt $F \not\subset A$. Das heißt für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $F \cap X \setminus A \neq \emptyset$. Somit ist $\mathcal{F} \cup \{F \cap X \setminus A \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter so daß für jede Teilmenge A stets $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt. Sei $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$. Es muß gezeigt werden, daß $\mathcal{G}$ kein Filter ist. Sei $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Dann gilt $X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Wegen $A \cap X \setminus A = \emptyset$ kann $\mathcal{G}$ kein Filter sein. □

So wie jedes Netz ein universelles Teilnetz besitzt, kann jeder Filter zu einem Ultrafilter verfeinert werden. Auch für den Beweis dieser Tatsache ist das Zornsche Lemma notwendig.

(3.43) Satz: *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*

Beweis: Sei $\Lambda := \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ Filter auf } X \text{ mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\}$. Durch die Inklusion wird Λ zu einer geordneten Menge. Sei Ω eine Kette von Λ. Wir behaupten, daß $\hat{\mathcal{G}} := \bigcup_{\mathcal{G} \in \Omega} \mathcal{G}$ eine obere Schranke von Ω ist. Für jedes $\mathcal{G} \in \Omega$ gilt $\mathcal{G} \subset \hat{\mathcal{G}}$. Die Schranke $\hat{\mathcal{G}}$ ist ein Filter. Das erste und dritte Axiom für Filter sind offensichtlich erfüllt. Um das zweite Axiom nachzuweisen seien $F_1, F_2 \in \hat{\mathcal{G}}$. Dann gibt es Filter $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \Omega$ mit $F_i \in \mathcal{G}_i$. Da Ω eine Kette ist gilt $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ oder $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$. Durch Umnummerierung kann $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ erreicht werden. Doch dann gilt $F_1, F_2 \in \mathcal{G}$, also auch $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{G} \subset \hat{\mathcal{G}}$. Dies zeigt, daß $\hat{\mathcal{G}}$ ein Filter ist. Nach Konstruktion gilt $\mathcal{F} \subset \hat{\mathcal{G}}$. Somit gilt $\hat{\mathcal{G}} \in \Omega$, d.h. $\hat{\mathcal{G}}$ ist in der Tat eine obere Schranke von Ω.

Mit dem Zornschen Lemma folgt, daß es ein maximales $\mathcal{G} \in \Lambda$ gibt. Es muß noch gezeigt werden, daß dieses $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter ist. Angenommen dem ist nicht so. Dann gibt es eine nichtleere Menge $A \subsetneqq X$ so daß weder A noch $A \setminus X$ in $\mathcal{G}$ enthalten ist. Für $F \in \mathcal{G}$ gilt $F \not\subset A$, also $F \cap X \setminus A \neq \emptyset$. Daher ist $\mathcal{G} \cup \{X \setminus A\}$ eine Filterbasis, was der Maximalität von $\mathcal{G}$ widerspricht. □

KAPITEL 4

Produkträume und Summenräume

In diesem Kapitel werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, aus vorhandenen topologischen Räumen neue topologische Räume zu konstruieren. Genauer, es werden Produkte und Summen topologischer Räume vorgestellt.

1. Produkträume

Das Produkt zweier Mengen X_1 und X_2 ist üblicherweise definiert als

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2\}.$$

Dies läßt sich induktiv auf endliche Produkte ausdehnen. Selbst das Produkt abzählbar vieler Mengen läßt sich entsprechend definieren:

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in X_n\}.$$

Für das Produkt überabzählbar vieler Mengen ist dieser Ansatz jedoch untauglich.

Sind alle X_n gleich einer festen Menge X, so liefert das Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ genau den Raum der Folgen in X. Bei dem Unterfangen, Folgen durch Netze zu verallgemeinern, wurden Folgen bereits als Abbildungen von der Indexmenge $\mathbb{N}$ in die Menge X betrachtet. Diese Sichtweise führt auch nun zum Erfolg. Allerdings ist nun der Bildbereich die Vereinigung der Mengen X_i, und für i in der Indexmenge I gilt $x(i) \in X_i$.

(4.1) Definition: Seien X_i mit $i \in I$ Mengen. Die Menge

$$\prod_{i\in I} X_i := \left\{ x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I\colon x(i) = x_i \in X_i \right\}$$

heißt das *Produkt der Mengen* X_i. Für $x \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ schreiben wir auch $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Für $j \in I$ heißt die Abbildung

$$\pi_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j\colon x \mapsto x(j) = x_j$$

die *j-te Projektion* oder *Projektion auf* X_j.

(4.2) Bemerkungen: Gilt $X_i = X$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ die Menge aller Folgen in X.

Gilt $M_i \subset X_i$ für alle $i \in I$, so kann $\prod_{i\in I} M_i$ als Teilmenge von $\prod_{i\in I} X_i$ aufgefaßt werden, denn

$$x \in \prod_{i\in I} M_i \Rightarrow x\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i \subset \bigcup_{i\in I} X_i \quad \text{und} \quad \forall i \in I\colon x(i) \in M_i \subset X_i.$$

Das nächste Ziel ist, auf dem Produkt topologischer Räume eine Topologie zu definieren. Der scheinbar naheliegende Versuch, Produkte offener Mengen in den einzelnen Faktoren als Basis der Topologie auf dem Produkt zu wählen, führt bei unendlichen Produkten nicht zum gewünschten Ziel. Die folgende Definition hingegen liefert günstige Eigenschaften der Produkttopologie.

(4.3) Definition: Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, eine Familie topologischer Räume. Dann heißt die von $\mathcal{S} := \{\pi_j^{-1}(U_j) \mid j \in I, U_j \in \mathcal{T}_j\}$ erzeugte Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ die *Produkttopologie* der $(X_i, \mathcal{T}_i)$.

Die Produkttopologie kann über die Stetigkeit der Projektionen charakterisiert werden. Dies deutet an, daß die Definition der Produkttopologie zweckmäßig ist.

(4.4) Satz: *Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, für die alle Projektionen stetig sind.*

Beweis: Die Projektionen sind nach Konstruktion stetig. Ist $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ und $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, so daß alle Projektionen $\pi_j\colon (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}') \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ stetig sind, so gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}'$, also $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. □

Der naive Ansatz, eine Basis für die Produkttopologie zu definieren, ist gescheitert. Der Grund für das Scheitern ist die Tatsache, daß unendliche Schnitte offener Mengen nicht offen zu sein brauchen. Da aber endliche Schnitte offener Mengen wieder offen sind, kann leicht eine Basis für die Produkttopologie angegeben werden.

(4.5) Bemerkung: Die Mengen $\prod_{i\in I} Y_i$, mit $Y_i \in \mathcal{T}_i$ und $Y_i \neq X_i$ für nur endlich viele i und $Y_i = X_i$ sonst, bilden eine Basis der Produkttopologie, denn:

$$\pi_j^{-1}(U_j) = \prod_{i\in I} Y_i \quad \text{mit} \quad Y_i = \begin{cases} U_j & i = j, \\ X_i & i \neq j. \end{cases}$$

Die in Satz 4.4 festgestellten Eigenschaften der Projektionen lassen sich erweitern.

(4.6) Satz: *Die Projektionen sind stetig und offen.*

Beweis: Die Stetigkeit der Projektionen wurde schon in Satz 4.4 gezeigt. Um nachzuprüfen, daß π_j offen ist genügt zu zeigen, daß es eine Basis $\mathcal{B}$ der Produkttopologie gibt, so daß für alle $U \in \mathcal{B}$ das Bild $\pi_j(U) \subset X_j$ offen ist (Satz 2.19). Wir nehmen die eben vorgestellte Basis. Sei $U = \prod_{i\in I} Y_i$, mit $Y_k \in \mathcal{T}_k$ und $Y_i = X_i \in \mathcal{T}_i$ für $i \neq k$. Dann gilt $\pi_j(U) = Y_j \in \mathcal{T}_j$, also ist π_j offen. □

(4.7) Bemerkung: Projektionen sind im allgemeinen nicht abgeschlossen. Zum Beispiel ist $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, aber $\pi_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht abgeschlossen (vgl. Beispiel 2.21).

Die Produkttopologie verhält sich bezüglich der Konvergenz wie erhofft. Das heißt, Konvergenz im Produkt liegt genau dann vor, wenn in den einzelnen Faktoren Konvergenz vorliegt.

(4.8) Satz: *Seien X_i, $i \in I$, topologische Räume. Für $x \in X := \prod_{i\in I} X_i$ und einen Filter $\mathcal{F}$ auf X gilt:*

$$\mathcal{F} \to x \iff \forall i \in I\colon \pi_i(\mathcal{F}) \to x_i = \pi_i(x).$$

Beweis: Wir nehmen zunächst $\mathcal{F} \to x$ an. Wegen Satz 4.4 sind die Projektionen stetig. Mit Satz 3.33 folgt, daß $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi(x) = x_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Gilt umgekehrt $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x) = x_i$ für alle $i \in I$ so ist

$$\mathcal{B}(x) := \left\{ \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) \mid J \subset I \text{ endlich}, U_j \in \mathcal{U}(\pi_j(x)) \right\}$$

eine Umgebungsbasis von x. Sei $U := \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}(x)$. Wegen $\pi_j(\mathcal{F}) \to \pi_j(x)$ existiert $F_j \in \mathcal{F}$ mit $\pi_j(F_j) \subset U_j$. Also gilt $F_j \subset \pi_j^{-1}(\pi_j(F_j)) \subset \pi_j^{-1}(U_j)$. Der Schnitt $F := \bigcap_{j\in J} F_j \subset \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) = U$ ist in $\mathcal{F}$, da J endlich ist. Also konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x. □

(4.9) Bemerkung: Für Netze gilt eine analoge Aussage.

(4.10) Beispiel: Sei $X_i = X$ für alle $i \in I$. Dann gilt

$$\prod_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} X = \{x\colon I \to X\} = X^I.$$

Für $X = \mathbb{R}$ ist der Produktraum $\mathbb{R}^Y = \{f\colon Y \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf Y. Ist $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz so gilt:

$$f_\lambda \to f \iff \forall y \in Y\colon f_\lambda(y) = \pi_y(f_\lambda) \to f(y) = \pi_y(f).$$

Das heißt, f_λ konvergiert punktweise gegen f.

Für einige der nächsten Beweise benötigen wir beschränkte Metriken. Das folgende Resultat besagt, daß eine beliebige Metrik stets durch eine beschränkte Metrik ersetzt werden kann, ohne daß sich die induzierte Topologie ändert.

(4.11) Lemma: *Ist (X,d) ein metrischer Raum so ist $d'\colon X\times X\to\mathbb{R}$ mit $d'(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$ ebenfalls eine Metrik auf X. Die beiden Metriken erzeugen dieselbe Topologie, d.h. es gilt $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_{d'}$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß d' eine Metrik ist. Es gilt $d'(x,y)=0 \iff d(x,y)=0 \iff x=y$. Die Symmetrie $d'(x,y)=d'(y,x)$ ist offensichtlich. Für die Dreiecksungleichung müssen 8 Fälle betrachtet werden. Indem gegebenfalls x und y vertauscht werden, kann stets $d(x,z)\le d(y,z)$ erreicht werden. Dies reduziert die zu betrachtenden Fälle auf sechs.

$d'(x,y)$		$d'(x,z)$		$d'(y,z)$
$d(x,y)$	$\le$	$d(x,z)$	$+$	$d(y,z)$
$d(x,y)\le 1$	$\le$	$d(x,z)$	$+$	1
$d(x,y)\le 1$	$\le$	1	$+$	1
$1\le d(x,y)$	$\le$	$d(x,z)$	$+$	$d(y,z)$
1	$\le$	$d(x,z)$	$+$	1
1	$\le$	1	$+$	1

In allen Fällen ist die Dreiecksungleichung erfüllt.

Für $r<1$ gilt $d(x,y)<r \iff d'(x,y)<r$. Daher gilt $U_d(x,r)=U_{d'}(x,r)$ für $r<1$, was $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_{d'}$ zur Folge hat. □

Bei der Produktbildung ist interessant, welche allen Faktoren gemeinsamen Eigenschaften sich auf das Produkt übertragen. Metrisierbarkeit ist eine Eigenschaft, die sich für abzählbare Produkte überträgt. Für überabzählbare Produkte ist dies nicht mehr wahr.

(4.12) Satz: *Sind (X_i,d_i) mit $i\in\mathbb{N}$ metrische Räume, so ist $X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ ebenfalls metrisierbar.*

Beweis: Wegen Lemma 4.11 kann $d_i(x,y)\le 1$ für alle $i\in\mathbb{N}$ und $x,y\in X_i$ angenommen werden. Für $x=(x_1,x_2,\dots)$ und $y=(y_1,y_2,\dots)$ mit $x_i,y_i\in X_i$ sei $d(x,y):=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$. Wegen $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\infty$ gilt $d(x,y)<\infty$.

Die Funktion d ist eine Metrik auf X denn:

1. $d(x,y)=0 \iff \forall i\in\mathbb{N}\colon d_i(x_i,y_i)=0 \iff \forall i\in\mathbb{N}\colon x_i=y_i \iff x=y$.
2. Die Symmetrie von d folgt unmittelbar aus der Symmetrie der einzelnen d_i.
3. Die Dreiecksungleichung überträgt sich ebenfalls.

Sei $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf X und $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie. Es muß $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ gezeigt werden. Dazu zeigen wir, daß für ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X gilt:

$$x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{T} \iff x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{T}_d.$$

Angenommen $x_\lambda \to x$ bezüglich $\mathcal{T}$. Mit Satz 4.8 gilt $\pi_i(x_\lambda) \to \pi_i(x)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x_{\lambda_i} = \pi_i(x_\lambda)$ und $x_i = \pi_i(x)$. Es gilt $x_{\lambda_i} \to x_i$, also $d_i(x_{\lambda_i}, x_i) \to 0$. Für $\varepsilon > 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon/2$. Seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1} > 0$ so gewählt, daß $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i}\varepsilon_i < \varepsilon/2$. Für $1 \le i \le k-1$ existiert $\lambda_i \in \Lambda$ mit $\forall \mu \ge \lambda_i$: $d(x_{\mu_i}, x_i) < \varepsilon_i$. Da Λ gerichtet ist, gibt es $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \ge \lambda_i$ für $1 \le i \le k-1$. Dann gilt $d(x_{\mu_i}, x_i) < \varepsilon_i$ für $1 \le i \le k-1$ und $\mu \ge \lambda$. Somit:

$$\begin{aligned} d(x_\mu, x) &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} d(x_{\mu_i}, x_i) + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} d(x_{\mu_i}, x_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i}\varepsilon_i + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Daraus folgt $x_\lambda \to x$ bezüglich $\mathcal{T}_d$.

Gilt $x_\lambda \to x$ bezüglich $\mathcal{T}_d$ so gilt auch $d(x_\lambda, x) \to 0$, also $d_i(x_{\lambda_i}, x_i) \to 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit Bemerkung 4.9 folgt daraus $x_\lambda \to x$ bezüglich $\mathcal{T}$. □

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, folgt aus dem vorangegangenen Resultat unmittelbar folgendes Beispiel.

(4.13) Beispiel: Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ ist die Topologie der punktweisen Konvergenz metrisierbar.

(4.14) Bemerkung: Für endlich viele metrische Räume (X_i, d_i), $1 \le i \le n$, ist das Produkt $X := \prod_{i=1}^{n} X_i$ metrisiert durch

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n).$$

Die durch Produktbildung gewonnene Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist daher gegeben durch $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$. Dies ist nicht die Euklidsche Metrik, erzeugt aber die gleiche Topologie wie die Euklidsche Metrik (Beispiel 1.9).

Das nächste Resultat besagt, daß sich die Produkttopologie auch gut bezüglich stetiger Abbildungen in das Produkt verhält. Die Produkttopologie kann sogar durch Eigenschaften topologischer Funktionen in das Produkt charakterisiert werden.

(4.15) Satz (Universelle Eigenschaft der Produkttopologie):
Gegeben sind topologische Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ mit $i \in I$. Es sei $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$ deren Produkt und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum.

Eine Abbildung $f\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T})$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung $\pi_i \circ f\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig ist.

Durch diese Eigenschaft ist die Produkttopologie gekennzeichnet. Das bedeutet, ist $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf X, so daß für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung $f\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}')$ genau dann stetig ist, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung $\pi_i \circ f\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig ist, so gilt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Beweis: Sei $f\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T})$ stetig. Für jedes $i \in I$ ist die Projektion $\pi_i\colon (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig, also ist auch $\pi_i \circ f\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig.

Sei nun für jedes $i \in I$ die Abbildung $\pi_i \circ f\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig. Für jedes $U \in \mathcal{T}_i$ gilt $\pi_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, da π_i stetig ist. Nach Voraussetzung ist $(\pi_i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_Y$. Da $\{\pi_i^{-1}(U) \mid i \in I, U \in \mathcal{T}_i\}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}$ ist, folgt die Stetigkeit von f.

Sei $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf X mit universeller Eigenschaft. Für $(Y, \mathcal{T}_Y) = (X, \mathcal{T})$ ist nach Voraussetzung die identische Abbildung $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ stetig. Daraus folgt $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Umgekehrt sei $(Y, \mathcal{T}_Y) = (X, \mathcal{T}')$. Die identische Abbildung $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ ist trivialerweise stetig. Also ist nach Voraussetzung für jedes $i \in I$ die Abbildung $\pi_i \circ \mathrm{id} = \pi_i\colon (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig. Mit Satz 4.4 folgt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, also mit dem bereits gezeigten $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. □

Für Abbildungen in den $\mathbb{R}^n$ impliziert das obige Resultat folgendes wohlbekannte Resultat.

(4.16) Beispiel: Für $I = \{1, \ldots, n\}$, $X_i = \mathbb{R}$ und Y ein beliebiger topologischer Raum ist eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon Y \to \mathbb{R}^n$ genau dann stetig, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Abbildung $f_i\colon Y \to \mathbb{R}$ stetig ist.

2. Summenräume

Die disjunkte Vereinigung von Mengen ist schlicht das getrennte Nebeneinandersetzen von Mengen. Die nachfolgende Definition drückt dies etwas technischer aus.

(4.17) Definition: Für Mengen X_i mit $i \in I$ heißt

$$\dot{\bigcup_{i\in I}} X_i := \biguplus_{i\in I} X_i := \bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\}$$

die *disjunkte Vereinigung der Mengen* X_i.

Für $k \in I$ heißt die Abbildung $j_k \colon X_k \to \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i \colon x \mapsto (x,k)$ die *kanonische Inklusion*. Üblicherweise wird für $x \in X_k$ das zugehörige Element in $\dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ mit x statt (x,k) geschrieben, d.h. x wird mit $j_k(x)$ identifiziert.

Sind die einzelnen Mengen einer disjunkten Vereinigung topologische Räume, so läßt sich auf der disjunkten Vereinigung eine naheliegende Topologie definieren.

(4.18) Definition: Für topologische Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ heißt die von $\{j_i(U_i) \mid i \in I, U_i \in \mathcal{T}_i\}$ erzeugte Topologie auf $X := \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ die *Summentopologie* der $(X_i, \mathcal{T}_i)$.

(4.19) Bemerkung: Eine Menge $U \subset \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ ist genau dann offen in $\dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$, wenn für jedes $i \in I$ der Schnitt $U \cap X_i$ offen in X_i ist. Insbesondere sind die Summanden $X_i \subset \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ offen und abgeschlossen in $\dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ und $\{j_i(U_i) \mid i \in I, U_i \in \mathcal{T}_i\}$ ist bereits eine Basis der Summentopologie.

Mit anderen Worten, der Summenraum ist einfach das Nebeneinandersetzen topologischer Räume, wobei jeder beteiligte Raum seine Topologie behält.

Die kanonischen Inklusionen sind erwartungsgemäß besonders gute Abbildungen.

(4.20) Satz: *Die kanonischen Inklusionen sind stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen.*

Beweis: Das Mengensystem $\{j_i(U_i) \mid i \in I, U_i \in \mathcal{T}_i\}$ ist eine Basis der Summentopologie auf $X := \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ und es gilt

$$j_k^{-1}(j_i(U_i)) = \begin{cases} U_i & i = k, \\ \emptyset & i \neq k. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß j_k stetig ist. Nach Konstruktion ist j_k offen.

Ist A_k eine abgeschlossene Teilmenge von X_k, so ist $X_k \setminus A_k$ offen. Die Menge

$$X \setminus j_k(A_k) = X \setminus A_k = \bigcup_{i\neq k} X_i \cup X_k \setminus A_k$$

ist als Vereinigung offener Mengen offen in X, also ist $A_k = j_k(A_k)$ abgeschlossen in X. □

Wird die disjunkte Vereinigung metrischer Räume betrachtet, so ändert sich auf den beteiligten Mengen die Metrik nicht, aber je zwei Mengen haben einen positiven Abstand. Daher ist das folgende Resultat nicht überraschend.

(4.21) Satz: *Sind (X_i, d_i), $i \in I$, metrische Räume, so ist $X := \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ metrisierbar.*

Beweis: Wegen Lemma 4.11 können wir annehmen, daß für $i \in I$ und $x, y \in X_i$ stets $d_i(x, y) \leq 1$ gilt.

Durch

$$d(x,y) := \begin{cases} d_i(x,y) & \text{falls } x, y \in X_i, \\ 2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wird eine Metrik auf X definiert. Dies ist wie im Beweis zu Lemma 4.11 einzusehen.

Für $r \leq 1$ und $x \in X_i$ gilt $U_{d_i}(x, r) = U_d(x, r)$. Dies zeigt, daß die induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ gleich der Summentopologie ist. □

KAPITEL 5

Trennungsaxiome

Konvergenz ist nicht für alle topologische Räume ein gutes Konzept, wie das folgende Beispiel illustriert. Sei X eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_m \neq x_n$ für $m \neq n$. Dann konvergiert diese Folge gegen jeden Punkt $x \in X$. Denn ist U eine offene Menge, die x enthält, so ist $X \setminus U$ endlich, also liegen nur endlich viele Folgenglieder nicht in U. Daher konvergiert die Folge gegen x.

Der Grund für dieses Verhalten ist, daß es nicht genügend trennende offene Mengen gibt. Daher werden Trennungsaxiome eingeführt. Sie sind ein Maß dafür, wie gut offene Mengen trennen können. Die wichtigsten Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Trennungsaxiomen werden untersucht. Es werden Charakterisierungen der einzelnen Trennungsaxiome vorgestellt.

(5.1) Definition: Sei A eine Teilmenge eines topologischen Raumes X. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von* A, wenn es eine offene Menge $V \subset X$ mit $A \subset V \subset U$ gibt. Mit

$$\mathcal{U}(A) := \{U \subset X \mid U \text{ Umgebung von } A\}$$

wird die Menge der Umgebungen von A bezeichnet.

(5.2) Definition: Ein topologischer Raum X heißt *T_i-Raum*, mit $i \in \{0,1,2,3,4\}$, falls X das Trennungsaxiom T_i erfüllt. Dabei ist:

- T_0: $\forall x, y \in X,\ x \neq y$: $\exists U \in \mathcal{U}(x)$: $y \notin U$ oder $\exists U \in \mathcal{U}(y)$: $x \notin U$.
- T_1: $\forall x, y \in X,\ x \neq y$: $\exists U \in \mathcal{U}(x)$: $y \notin U$.
- T_2: $\forall x, y \in X,\ x \neq y$: $\exists U \in \mathcal{U}(x),\ V \in \mathcal{U}(y)$: $U \cap V = \emptyset$.
- T_3: $\forall x \in X$, $\forall A$ abgeschlossen in X mit $x \notin A$: $\exists U \in \mathcal{U}(x),\ V \in \mathcal{U}(A)$: $U \cap V = \emptyset$.
- T_4: $\forall A, B$ abgeschlossen in X mit $A \cap B = \emptyset$: $\exists U \in \mathcal{U}(A),\ V \in \mathcal{U}(B)$: $U \cap V = \emptyset$.

Ein topologischer Raum X heißt:

Hausdorff-Raum,	falls X ein T_2-Raum ist,
regulär,	falls X ein T_2- und T_3-Raum ist,
normal,	falls X ein T_2- und T_4-Raum ist.

(5.3) Beispiel: Aus den Übungen ist der Raum $X := \mathbb{N}\backslash\{1\}$ mit $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn aus $n \in U$ und d teilt n stets $d \in U$ folgt, bekannt. Dieser Raum ist T_0 aber nicht T_1. Denn für $n, m \in X$ mit $n < m$ ist $U := \{d \in X \mid d \text{ teilt } n\}$ eine Umgebung von n mit $m \notin U$. Also gilt T_0. Wird m von n geteilt, so enthält jede Umgebung von m auch n. Daher gilt T_1 nicht.

Ist X eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie, so ist X ein T_1- aber kein T_2-Raum.

Die Aussage des folgenden Satzes ist offensichtlich und bedarf keines Beweises.

(5.4) Satz: *Jeder T_2-Raum ist ein T_1-Raum und jeder T_1-Raum ist ein T_0-Raum.*

Die anderen Implikationen sind entweder nicht trivial oder falsch. Eine sehr genaue und mit Beispielen belegte Untersuchung der Abhängigkeiten der Trennungsaxiome findet sich in *Counterexamples in Topology* von L.A. Steen und S.A. Seebach.

Einige der Trennungsaxiome lassen sich handlich charakterisieren. Wir beginnen mit T_1.

(5.5) Satz: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist ein T_1-Raum.*
2. *Alle einelementigen Teilmengen sind abgeschlossen.*
3. *Die Topologie von X ist feiner als die koendliche Topologie.*

Beweis: Sei x ein Punkt eines T_1-Raumes X. Für jedes $y \in X \setminus \{x\}$ gibt es eine offene Umgebung U_y von y, die x nicht enthält. Die Vereinigung $\bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} U_y = X \setminus \{x\}$ ist offen, also ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Ist jede einelementige Menge abgeschlossen, so sind alle endlichen Mengen als endliche Vereinigung einelementiger Mengen ebenfalls abgeschlossen. Also sind alle Mengen, deren Komplemente endlich sind, offen. Damit ist die gegebene Topologie feiner als die koendliche Topologie.

Ist die Topologie auf X feiner als die koendliche Topologie, so ist für verschiedene Punkte $x, y \in X$ die Menge $X \setminus \{y\}$ offen und enthält x. □

Auch T_2-Räume können charakterisiert werden. Die Charakterisierung besagt unter anderem, daß in T_2-Räumen Konvergenz ein gutes Konzept ist.

(5.6) Satz: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist ein Hausdorff-Raum.*
2. *Die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie.*
3. *Jeder Filter auf X hat höchstens einen Grenzwert.*
4. *Jedes Netz in X hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis: Die Äquivalenz der Aussagen 3 und 4 ist offensichtlich. Wir zeigen daher nur, daß die Aussagen 1, 2 und 3 äquivalent sind..

Sei X ein Hausdorff-Raum und $(x,y) \in X \times X \setminus \Delta$. Wegen $(x,y) \notin \Delta$ gilt $x \neq y$. Weil X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es disjunkte offene Mengen U und V mit $x \in U$ und $y \in V$. Damit ist $U \times V \subset X \times X$ offen und disjunkt zur Diagonalen Δ. Somit gibt es für $(x,y) \in X \times X \setminus \Delta$ stets eine offene, zu Δ disjunkte Umgebung. Daher ist $X \times X \setminus \Delta$ offen, also Δ abgeschlossen.

Sei Δ abgeschlossen in $X \times X$ und $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Wegen $x \neq y$ gilt $(x,y) \neq \Delta$. Da Δ abgeschlossen ist, gibt es eine zu Δ disjunkte offene Teilmenge U, die (x,y) enthält. Nach Konstruktion der Produkttopologie gibt es offene Mengen $V, W \subset X$ mit $(x,y) \in V \times W \subset U \subset (X \times X) \setminus \Delta$. Es folgt $x \in V$ und $y \in W$ sowie $V \cap W = \emptyset$. Somit ist X ein Hausdorff-Raum.

Seien x, y zwei verschiedene Elemente eines topologischen Raumes X. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter, der gegen x und y konvergiert. Dann gilt $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U}(y) \subset \mathcal{F}$. Für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ und jede Umgebung $V \in \mathcal{U}(y)$ gilt daher $U \cap V \in \mathcal{F}$, also $U \cap V \neq \emptyset$. Somit ist X kein Hausdorff-Raum.

Umgekehrt, ist X kein Hausdorff-Raum, so gibt es verschiedene Elemente x und y, so daß für $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ stets $U \cap V \neq \emptyset$ gilt. Doch dann ist $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(y) \cup \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}(x),\, V \in \mathcal{U}(y)\}$ eine Filterbasis. Der davon erzeugte Filter konvergiert nach Konstruktion sowohl gegen x als auch gegen y. □

Für T_3-Räume gibt es die folgende Charakterisierung. Für kommende Beweise ist vorallem die dritte Aussage interessant.

(5.7) Satz: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist ein T_3-Raum.*
2. *$\forall x \in X$ ist $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{U}(x) \mid U$ abgeschlossen$\}$ eine Umgebungsbasis.*

3. *Für jede offene Teilmenge $U \subset X$, jeden Punkt $x \in U$ gibt es eine offene Teilmenge $V \subset X$ mit $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Beweis: Sei x ein Element eines T_3-Raumes X und U eine offene Umgebung von x. Dann ist $X \setminus U$ abgeschlossen, also gibt es disjunkte offene Mengen V und W mit $x \in V$ und $X \setminus U \subset W$. Es folgt $V \subset X \setminus W \subset U$ und $X \setminus W$ ist abgeschlossen. Also gilt $\overline{V} \subset X \setminus W \subset U$ und $\overline{V} \in \mathcal{B}(x)$. Dies zeigt, daß $\mathcal{B}(x)$ in der Tat eine Umgebungsbasis ist.

Angenommen $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{U}(x) \mid U \text{ abgeschlossen}\}$ ist eine Umgebungsbasis und U eine offene Umgebung von x. Dann gibt es eine abgeschlossene Umgebung $W \in \mathcal{B}(x)$ mit $W \subset U$. Da auch $\{U \in \mathcal{U}(x) \mid U \text{ offen}\}$ eine Umgebungsbasis ist, gibt es ein offene Umgebung V mit $V \subset W$, also $x \in V \subset \overline{V} \subset W \subset U$.

Erfülle X die Bedingung 3, sei $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $x \notin A$. Dann ist $X \setminus A$ offen und enthält x. Also gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus A$. Für $U := X \setminus \overline{V}$ gilt $A \subset U$, $U \cap V = \emptyset$ und U ist offen. Also ist X ein T_3-Raum. □

Mit ähnlichen Argumenten läßt sich die folgende Charakterisierung von T_4-Räumen beweisen. Eine weitere Charakterisierung folgt in Satz 5.14.

(5.8) Satz: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist ein T_4-Raum.*
2. *Für jede abgeschlossene Teilmenge A und jede offene Teilmenge U, die A umfaßt, gibt es eine offene Menge V mit $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Die Trennungsaxiome vererben sich mit einer Ausnahme auf Teilräume.

(5.9) Satz: *Für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ist jeder Teilraum eines T_i-Raumes wieder ein T_i-Raum.*

Beweis: Für $i \in \{0, 1, 2\}$ ist die Aussage offensichtlich wahr.

Sei M ein Teilraum eines T_3-Raumes X. Sei $x \in M$ und A eine abgeschlossene Teilmenge von M, die x nicht enthält. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge B von X mit $A = B \cap M$. Es gilt $x \notin B$. Weil X ein T_3-Raum ist, gibt es disjunkte offene Teilmengen U, V von X mit $x \in U$ und $B \subset V$. Doch dann werden x und A durch $U \cap M$ und $V \cap M$ getrennt. □

Für T_4-Räume läßt sich kein analoger Satz beweisen. Das Problem ist, daß es für disjunkte abgeschlossene Teilmengen A, B von M zwar abgeschlossene Mengen

$C, D \subset X$ mit $A = M \cap C$ und $B = M \cap D$ gibt, aber die Mengen C und D müssen nicht disjunkt sein.

(5.10) Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{Q}$. Die Mengen $A := \mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}]$ und $B := \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, 2]$ sind disjunkt und abgeschlossen. Es gibt aber keine disjunkte abgeschlossene Teilmengen C, D von $\mathbb{R}$ mit $A = C \cap \mathbb{Q}$ und $B = D \cap \mathbb{Q}$.

Wir untersuchen nun die Abhängigkeiten zwischen normal und regulär.

(5.11) Satz: *Jeder normale Raum ist regulär.*

Beweis: Ist X normal, so ist X ein Hausdorff-Raum, also auch ein T_1-Raum. Wegen Satz 5.5 sind einelementige Mengen abgeschlossen. Doch dann induziert T_4 bereits T_3, also ist X regulär. □

Die Hausdorff-Eigenschaft, genauer das Trennungsaxiom T_1, ist wesentlich im eben geführten Beweis. Es gibt T_4-Räume, die keine T_3-Räume sind.

Erstaunlicherweise ist in Räumen, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügen, auch die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes richtig.

(5.12) Satz: *Jeder reguläre Raum mit abzählbarer Basis ist normal.*

Beweis: Sei X ein regulärer Raum mit abzählbarer Basis $\mathcal{B}$. Seien A und B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Wir setzen:

$$\mathcal{B}_1 := \{U \in \mathcal{B} \mid \overline{U} \cap B = \emptyset\} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{B}_2 := \{V \in \mathcal{B} \mid \overline{U} \cap A = \emptyset\} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $x \in X \setminus B$. Da X regulär ist, also insbesondere eine T_3-Raum ist, gibt es mit Satz 5.7 eine offene Teilmenge $W \subset X$ mit $x \in W \subset \overline{W} \subset X \setminus B$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es ein $U \in \mathcal{B}_1$ mit $x \in U \subset W$. Da $x \in X \setminus B$ beliebig gewählt ist, folgt $X \setminus B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Entsprechend folgt $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Wir setzen:

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(U_n \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus \overline{V_i} \right),$$
$$V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(V_n \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus \overline{U_i} \right).$$

Die Mengen U und V sind offen, es gilt $A \subset U$ und $B \subset V$. Zudem sind U und V disjunkt, denn sonst gäbe es $x \in X$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_n \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus \overline{V_i}$ und $x \in V_m \cap \bigcap_{i=1}^{m} X \setminus \overline{U_i}$. Für $n \leq m$ folgt der Widerspruch $x \in U_n$ und $x \in X \setminus \overline{U_n} \subset$

$X \setminus U_n$. Für $m \leq n$ folgt ein analoger Widerspruch. Also sind U und V disjunkt. Dies zeigt, daß X normal ist. □

In den nächsten Sätzen wird untersucht, wie Metrisierbarkeit mit den Trennungsaxiomen zusammenhängt.

(5.13) Satz: *Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.*

Beweis: Das Trennungsaxiom T_2 gilt in X, denn für verschiedene $x, y \in X$ sei $r := \frac{1}{3} \cdot d(x, y) \neq 0$. Dann gilt $U(x, r) \cap U(y, r) = \emptyset$.

Wir wollen nun das Trennungsaxiom T_4 verifizieren. Seien A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Für $x \in X$ sei $d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$. Die Abbildung $d(\cdot, A)\colon X \to \mathbb{R}\colon x \mapsto d(x, A)$ ist stetig und für $x \notin A$ gilt $d(x, A) > 0$ (vgl. Übungsaufgabe 8). Damit ist auch die Abbildung $d(\cdot, A) - d(\cdot, B)$ stetig. Daher sind die Mengen

$$U := \{x \in X \mid d(x, A) - d(x, B) > 0\},$$
$$V := \{x \in X \mid d(x, A) - d(x, B) < 0\}$$

als Urbilder offener Mengen offen. Die Mengen U und V sind offensichtlich disjunkt. Außerdem gilt $B \subset U$ und $A \subset V$. Damit ist T_4 erfüllt. □

Das nächste Ergebnis ist das erste Beispiel einer Fortsetzungssatzes. Fortsetzungssätze beschäftigen sich mit dem Problem, ob eine auf Teilen eines topologischen Raumes vorgegebene Funktion zu einer *stetigen* Funktion auf dem ganzen Raum fortgesetzt werden kann. Solche Sätze spielen in verschiedenen Bereichen der Topologie eine wichtige Rolle.

(5.14) Satz (Lemma von Urysohn): *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist ein T_4-Raum.*
2. *Für je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen A und B gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0, 1]$ mit:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in A, \\ 1 & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die zweite Bedingung die erste impliziert. Es sei $U := f^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ und $V := f^{-1}\big((\frac{1}{2}, 1]\big)$. Nach Konstruktion sind U und V

disjunkt und es gilt $A \subset U$ sowie $B \subset V$. Da f stetig ist, sind U und V als Urbild in $[0,1]$ offener Mengen offen. Dies zeigt, daß T_4 gilt.

Sei nun umgekehrt X ein T_4-Raum. Seien A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Die Menge $D := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar, also $D = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dabei kann so durchnumeriert werden, daß $q_1 = 0$ und $q_2 = 1$ gilt.

Wir zeigen zunächst, daß jedem $r \in D$ so eine offene Teilmenge $U_r \subset X$ zugeordnet werden kann, daß gilt:

1. $A \subset U_0$ sowie $B \subset X \setminus U_1$.
2. $r < s \Rightarrow \overline{U_r} \subset U_s$.

Wir setzen $U_1 := X \setminus B$. Damit gilt $A \subset U_1$. Also gibt es wegen Satz 5.8 eine offene Menge U_0 mit $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$. Die weiteren $U_r = U_{q_i}$ werden induktiv gewonnen. Angenommen die offenen Mengen U_{q_i} wurden für $1 \leq i \leq n$ schon konstruiert und sie erfüllen Bedingung 2. Es sei $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $q_j < q_{n+1} < q_k$ und $\{q_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cap (q_j, q_k) = \emptyset$. Es gilt $\overline{U_{q_j}} \subset U_{q_k}$. Also existiert eine offene Menge $U_{q_{n+1}}$ mit $U_{q_j} \subset \overline{U_{q_j}} \subset U_{q_{n+1}} \subset \overline{U_{q_{n+1}}} \subset U_{q_k}$.

Wir definieren nun mit diesen offenen Mengen U_r die gesuchte Fortsetzung.

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r \in D \mid x \in U_r\} & \text{falls } x \in U_1, \\ 1 & \text{falls } x \notin U_1, \end{cases}$$

Wegen $A \subset U_0$ sowie $B \subset X \setminus U_1$ gilt $f(x) = 0$ für $x \in A$ und $f(x) = 1$ für $x \in B$. Es muß noch gezeigt werden, daß die Abbildung f stetig ist. Analog zu Satz 2.11 genügt es zu zeigen, daß für $a \in \mathbb{R}$ die Mengen $f^{-1}(-\infty, a)$ und $f^{-1}(a, \infty)$ offen sind. Für $a < 0$ gilt $f^{-1}(-\infty, a) = \emptyset$ und $f^{-1}(a, \infty) = X$. Für $a > 1$ gilt $f^{-1}(-\infty, a) = X$ und $f^{-1}(a, \infty) = \emptyset$. Zudem gilt $f^{-1}(-\infty, 0) = f^{-1}(1, \infty) = \emptyset$.

Für $0 < a \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) < a &\iff \exists r \in D, r < a \colon f(x) \leq r \\ &\iff \exists r \in D, r < a \colon x \in U_r \\ &\iff x \in \bigcup_{r<a} U_r \end{aligned}$$

Also ist $f^{-1}(-\infty, a) = \bigcup_{r<a} U_r$ als Vereinigung offener Mengen offen. Für $0 \leq a < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) > a &\iff \exists r \in D, r > a \colon f(x) > r \\ &\iff \exists r \in D, r > a \colon x \notin U_r \\ &\iff x \in \bigcup_{r>a} X \setminus U_r \end{aligned}$$

Für $r > a$ gibt es $s \in D$ mit $r > s > a$, also $\overline{U_s} \subset U_r$, das heißt $X \setminus U_r \subset X \setminus \overline{U_s}$ Damit ist $f^{-1}(-\infty, a) = \bigcup_{r>a} X \setminus U_r = \bigcup_{r>a} X \setminus \overline{U_r}$ als Vereinigung offener Mengen wieder offen. □

Das Lemma von Urysohn kann im Beweis der folgenden Charakterisierung metrischer und separabler Räume eingesetzt werden.

(5.15) Satz: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist metrisch und separabel.*
2. *X ist regulär und hat eine abzählbare Basis.*
3. *X kann in den Hilbert Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ eingebettet werden.*

Beweis: Mit Satz 5.13, Satz 5.11 und Satz 1.32 folgt die zweite Aussage aus der ersten Aussage.

Wegen Satz 4.12 ist $[0,1]^{\mathbb{N}}$ metrisch. Somit ist $X \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ ebenfalls metrisch. Wie in Übungsaufgabe 6a ist einzusehen, daß $[0,1]^{\mathbb{N}}$ separabel ist. Also hat $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und somit auch X eine abzählbare Basis (Satz 1.32). Doch dann ist mit dem gleichen Satz auch X separabel. Also impliziert die dritte Aussage die erste Aussage.

Daß aus der zweiten Aussage die dritte Aussage folgt ist weniger leicht zu sehen. Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis eines regulären Raumes X. Sei

$$\mathfrak{Z} := \{(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid \overline{V} \subset U\}$$

die Menge der *zulässigen Paare*. Das $\mathcal{B}$ abzählbar ist, ist auch $\mathfrak{Z}$ abzählbar, also $\mathfrak{Z} = \{(U,V)_i =: (U_i, V_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Sei $U \in \mathcal{B}$ und $x \in U$. Da X regulär, also insbesondere ein T_3-Raum ist, folgt mit Satz 5.7, daß es ein $V \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in V$ und $(U,V) \in \mathfrak{Z}$. Insbesondere gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $(U,V) = (U,V)_i$. Wegen Satz 5.12 und Satz 5.14 gibt es eine stetige Abbildung $f_i \colon X \to [0,1]$ mit

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \overline{V_i}, \\ 1 & \text{falls } x \notin U_i. \end{cases}$$

Sei

$$f \colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}} \colon x \mapsto (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}}.$$

Da alle f_i stetig sind, ist die Abbildung f ebenfalls stetig (Satz 4.15). Die Abbildung f ist injektiv, denn für verschieden $x, y \in X$ gibt es $(U,V)_i \in \mathfrak{Z}$ mit $x \in V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ und $y \notin U_i$. Also gilt $f_i(x) = 1 \neq 0 = f_i(y)$, somit auch $f(x) \neq f(y)$. Um nachzuweisen, daß f eine Einbettung ist, ist nur noch zu zeigen, daß $f^{-1} \colon f(X) \to X$ stetig ist. Dies ist gezeigt, wenn für jedes Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \not\to x$ auch $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \not\to f(x)$ gilt.

Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz, das nicht gegen x konvergiert. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U$ und $\forall\lambda \in \Lambda\, \exists\mu \geq \lambda\colon x_\mu \notin U$. Zu U gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $(U,V) = (U,V)_i \in \mathfrak{Z}$. Es gilt $f_i(x) = 0$ und $f_i(x_\mu) = 1$ mit μ wie oben. Das bedeutet, daß $f_i(x_\lambda)$ nicht gegen $f_i(x)$ konvergiert, also konvergiert auch $f(x_\lambda)$ nicht gegen $f(x)$. □

Wegen Satz 1.32 folgt aus Satz 5.15 sofort das folgende Resultat.

(5.16) Korollar (Metrisationssatz von Urysohn): *Ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis ist genau dann metrisierbar, wenn er regulär ist.*

Das folgend Resultat gibt an, wann eine durch eine Reihe definierte Funktion stetig ist.

(5.17) Satz (Weierstraß M-Test): *Sei X ein topologischer Raum und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Sie $M_n > 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergent. Weiterhin sei $|f_n(x)| \leq M_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ gegen $f(x)$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Beweis: Da für jedes $x \in X$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergiert, existiert die Funktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Wir zeigen nun, daß diese Funktion stetig ist. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=k+1}^{\infty} M_n < \varepsilon/3$. Für $y \in X$ gilt dann:

$$\left| f(y) - \sum_{n=1}^{k} f_n(y) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(y) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(y)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n < \varepsilon/3.$$

Die Funktion $\sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ ist als endliche Summe stetiger Funktionen stetig. Daher gibt es eine Umgebung U von x so daß für $y \in U$ stets $|\sum_{n=1}^{k}(f_n(x) - f_n(y))| < \varepsilon/3$ gilt. Doch dann gilt für $y \in U$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{n=1}^{k}(f_n(x) - f_n(y)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(y) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{k}(f_n(x) - f_n(y)) \right| + \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| + \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(y) \right| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist f stetig □

Der nächste Fortsetzungssatz ist eine wesentliche Verallgemeinerung des Lemmas von Urysohn und ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie.

(5.18) Satz (Fortsetzungssatz von Tietze): *Ist C eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes X und $f\colon C \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine stetige Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$ mit $g|_C = f$.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß f beschränkt ist. Es gibt also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M > 0$ für $x \in C$. Der erste Schritt ist zu zeigen, daß es für $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $g_n\colon X \to [-\frac{2^{n-1}}{3^n}M, \frac{2^{n-1}}{3^n}M]$ gibt mit

$$(*) \qquad |f(x) - g_1(x) - \cdots - g_n(x)| \leq \frac{2^n}{3^n}M \quad \text{für} \quad x \in C.$$

Dies wird durch Induktion bewiesen. Für $n = 1$ sei:

$$A_1 := \{x \in C \mid f(x) \geq {}^{M}\!/_{3}\},$$
$$B_1 := \{x \in C \mid f(x) \leq -{}^{M}\!/_{3}\}.$$

Die Mengen A_1 und B_1 sind abgeschlossen in der abgeschlossenen Menge C, also auch abgeschlossen in X. Mit Satz 5.14 gibt es eine stetige Funktion $g_1\colon X \to [-{}^{M}\!/_{3}, {}^{M}\!/_{3}]$ mit $g_1(x) = {}^{M}\!/_{3}$ für $x \in A_1$ und $g_1(x) = -{}^{M}\!/_{3}$ für $x \in B_1$. Bedingung $(*)$ ist erfüllt, denn

$$x \in A_1\colon\ f(x) - g_1(x) = f(x) - \frac{M}{3} \geq 0,\ f(x) - \frac{M}{3} \leq \frac{2M}{3},$$
$$\text{also} \quad |f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2M}{3}.$$
$$x \in B_1\colon\ f(x) - g_1(x) = f(x) + \frac{M}{3} \leq 0,\ f(x) + \frac{M}{3} \geq -\frac{2M}{3},$$
$$\text{also} \quad |f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2M}{3}.$$
$$x \in C \setminus (A_1 \cup B_1)\colon\ |f(x) - g_1(x)| \leq |f(x)| + |g_1(x)| \leq \frac{M}{3} + \frac{M}{3} = \frac{2M}{3}.$$

Für den Induktionsschritt seien $g_1, \ldots, g_n$ schon konstruiert. Wir setzen:

$$A_{n+1} := \{x \in C \mid f(x) - g_1(x) - \cdots - g_n(x) \geq \frac{2^n}{3^{n+1}}M\},$$
$$B_{n+1} := \{x \in C \mid f(x) - g_1(x) - \cdots - g_n(x) \leq -\frac{2^n}{3^{n+1}}M\}.$$

Mit Satz 5.14 gibt es eine stetige Funktion $g_{n+1}\colon X \to [-\frac{2^n}{3^{n+1}}M, \frac{2^n}{3^{n+1}}M]$ mit $g_{n+1}(x) = \frac{2^n}{3^{n+1}}M$ für $x \in A_{n+1}$ und $g_{n+1}(x) = -\frac{2^n}{3^{n+1}}M$ für $x \in B_{n+1}$. Wie oben ist einzusehen, daß Bedingung $(*)$ erfüllt ist.

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}M = \frac{M}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left({}^{2}\!/_{3}\right)^n = \frac{M}{3} \cdot \frac{1}{1 - {}^{2}\!/_{3}} = M.$$

Wegen $|g_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n} M$ folgt aus Satz 5.17, daß die Grenzfunktion $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stetig ist. Außerdem gilt $|g(x)| \leq M$.

Wegen Bedingung $(*)$ gilt $f(x) = g(x)$ für $x \in C$, d.h. g ist die gesuchte Fortsetzung von f.

Ist f unbeschränkt, so sei $h\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ ein Homöomorphismus. Dann ist $h \circ f : C \to (-1,1)$ stetig und beschränkt, also gibt es mit dem eben gezeigten eine stetige Fortsetzung $g\colon X \to [-1,1]$. Da g stetig ist, ist die Menge $B := g^{-1}(\{-1,1\})$ abgeschlossen in X und disjunkt zu C. Also gibt es mit Satz 5.14 eine stetige Funktion $u\colon X \to [0,1]$ mit $u(x) = 1$ für $x \in C$ und $u(x) = 0$ für $x \in B$. Die Funktion $u(x) \cdot g(x)$ ist stetig und für $x \in X$ gilt $|u(x) \cdot g(x)| < 1$. Für $x \in C$ gilt $u(x) \cdot g(x) = g(x) = (h \circ f)(x)$. Somit ist $h^{-1} \circ (u \cdot g)$ eine stetige Fortsetzung von f. □

(5.19) Bemerkung: Die Umkehrung des obigen Satzes gilt auch. Außerdem kann $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt werden.

KAPITEL 6

Zusammenhang

Zusammenhang ist ein sehr intuitiver Begriff. Es stellt sich aber heraus, daß die intuitive Vorstellung von Zusammenhang nicht dem topologischen Zusammenhang, sondern dem Weg-Zusammenhang entspricht.

(6.1) Definition: Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, falls für jedes Paar disjunkter offener Mengen U und V mit $U \cup V = X$ entweder U oder V die leere Menge ist.

(6.2) Beispiele:

1. Jede unendliche Menge mit der koendlichen Topologie ist zusammenhängend.
2. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{Q} = U \cup V$ mit $U = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$, $V = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$.

Für den Zusammenhang gibt es handliche Kriterien.

(6.3) Satz: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist zusammenhängend.*
2. *Für $A \subset X$ mit $A \notin \{\emptyset, X\}$ gilt* $\operatorname{Rd} A \neq \emptyset$.
3. *Ist A eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X, so gilt $A = X$ oder $A = \emptyset$.*
4. *Sind A, B disjunkte, nichtleere Teilmengen mit $X = A \cup B$, so gilt $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ oder $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.*
5. *Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \{0,1\}$, wobei $\{0,1\}$ die diskrete Topologie trägt, ist konstant.*

Beweis: 1) $\to$ 2): Aus $\operatorname{Rd} A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ mit $A \neq \emptyset$ folgt $A = \overline{A} = \overset{\circ}{A}$. Also sind A und $X \setminus A$ disjunkte offene Mengen, deren Vereinigung ganz X ergibt. Da X zusammenhängend ist, folgt $A = X$ oder $A = \emptyset$.

2) $\to$ 3): Ist $A \subset X$ offen und abgeschlossen, so gilt $A = \overset{\circ}{A} = \overline{A}$, also $\operatorname{Rd} A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus A = \emptyset$ und somit $A \in \{\emptyset, X\}$.

3) $\to$ 4): Seien A, B disjunkte, nichtleere Teilmengen mit $X = A \cup B$, und $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$. Aus $A \cap \overline{B} = \emptyset$ und $X = A \cup B$ folgt $A = X \setminus \overline{B}$. Also ist A offen. Aus $\overline{A} \cap B = \emptyset$ und $X = A \cup B$ folgt $A = \overline{A}$. Also ist A abgeschlossen. Somit ist A leer oder es gilt $A = X$, in welchem Fall B leer ist.

4) $\to$ 5): Ist $f\colon X \to \{0,1\}$ eine stetige nichtkonstante Funktion, so sind $A := f^{-1}(0)$ und $B := f^{-1}(1)$ nichtleere disjunkte abgeschlossene Mengen. Es gilt $\emptyset = A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B}$ und $A \cup B = X$.

5) $\to$ 1): Ist X nicht zusammenhängend, so gibt es zwei disjunkte offene Mengen U, V mit $U \cup V = X$ und $U \neq \emptyset \neq V$. Es sei $f\colon X \to \{0,1\}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in U, \\ 1 & \text{falls } x \in V. \end{cases}$$

Die Abbildung f ist stetig und nicht konstant. □

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind leicht zu erkennen.

(6.4) Satz: *Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.*

Beweis: Ist $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall, so existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $(-\infty, c) \cap M \neq \emptyset \neq (c, \infty)$. Also ist M nicht zusammenhängend.

Sei $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir zeigen, daß für $\emptyset \neq A \subsetneq M$ stets $\operatorname{Rd} A \neq \emptyset$ gilt. Wegen Satz 6.3 ist M dann zusammenhängend. Wegen $M \neq A$ gibt es $a \in A$ und $b \in M \setminus A$. Wir können $a < b$ annehmen. (Andernfalls betrachten wir $X \setminus A$ statt A). Es sei $s := \sup(A \cap [a,b])$. Es gilt $s \notin \overset{\circ}{A}$ aber $s \in \overline{A}$, also $s \in \operatorname{Rd} A$. □

Das nächste Resultat besagt, daß stetige Bilder zusammenhängendender Räume wieder zusammenhängend ist.

(6.5) Satz: *Ist X eine zusammenhängender Raum und $f\colon X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ ebenfalls zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen $f(X) = U \cup V$, wobei U und V disjunkte offene Mengen sind. Dann sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ disjunkte offene Mengen mit $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Da X zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$. Also $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. □

Ein bekannter Satz der reellen Analysis ist in Wirklichkeit ein Satz über zusammenhängende Mengen.

(6.6) Satz (Zwischenwertsatz): *Sei X ein zusammenhängender Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Für $a = f(x) < c < b = f(y)$ existiert $z \in X$ mit $f(z) = c$.*

Beweis: Wegen Satz 6.5 ist $f(X)$ zusammenhängend, also mit Satz 6.4 ein Intervall. Daraus folgt die Aussage. □

(6.7) Korollar: *Die Kreislinie $\mathbb{S}_1$ ist zusammenhängend.*

Beweis: Das Intervall $[0, 2\pi]$ ist zusammenhängend und $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist stetig mit $f([0, 2\pi]) = \mathbb{S}_1$. □

Der Beweis der folgenden Aussage ist eine Übungsaufgabe.

(6.8) Satz: *Ist A eine zusammenhängende Teilmenge von X, so ist auch $\overline{A}$ zusammenhängend.*

(6.9) Beispiel: Die *topologische Sinuskurve*

$$S := \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0, \infty)\} \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$$

ist zusammenhängend.

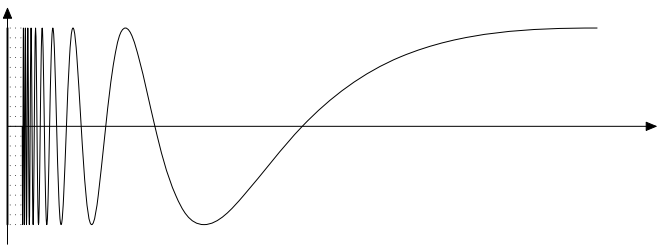


Abbildung 6.1: Topologische Sinuskurve

Unter einer offensichtlichen Einschränkung ist die Vereinigung zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend.

(6.10) Satz: *Ist X_i zusammenhängend für $i \in I$ und gilt stets $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, so ist $X := \bigcup_{i \in I} X_i$ zusammenhängend.*

Beweis: Sei $f\colon X \to \{0, 1\}$ stetig. Da jedes einzelne X_i zusammenhängend ist, ist die Einschränkung von f auf X_i konstant. Sei $i \neq j$. Es gilt $f(X_i) = \{a\}$ und $f(X_j) = \{b\}$. Wegen $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ gilt $a = b$. Also ist f konstant. Mit Satz 6.3 folgt, daß X zusammenhängend ist. □

(6.11) Satz: *Das Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ nichtleerer Räume X_i ist genau dann zusammenhängend, wenn alle X_i zusammenhängend sind.*

Beweis: Sei X zusammenhängend. Für jedes $i \in I$ ist die kanonische Projektion $\pi_i\colon X \to X_i$ stetig und surjektiv, also ist mit Satz 6.5 auch $X_i = \pi_i(X)$ zusammenhängend.

Seien für $i \in I$ die Räume X_i zusammenhängend. Sei $f\colon X \to \{0,1\}$ eine stetige Abbildung und $a \in \{0,1\}$ mit $f^{-1}(a) \neq \emptyset$. Es muß $f^{-1}(a) = X$ gezeigt werden. Das Urbild $f^{-1}(a)$ ist offen, also gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ und offene Teilmengen $U_i \in X_i$ mit $U_i = X_i$ für $i \in I \setminus J$ und $\emptyset \neq U_i \neq X_i$ für $i \in J$, so daß $\prod_{i\in I} U_i \subset f^{-1}(a)$. Sei J minimal mit dieser Eigenschaft. Es muß $J = \emptyset$ gezeigt werden. Angenommen $J \neq \emptyset$. Dann existiert $j \in J$. Seien $x_i \in U_i$ und sei $\varphi_j\colon X_j \to X$ definiert durch:

$$\pi_i(\varphi_j(y)) = \begin{cases} y & \text{falls } i = j, \\ x_i & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Die Abbildung φ_j ist stetig, da für jedes $i \in I$ die Abbildung $\pi_i \circ \varphi_j$ stetig ist. Also ist auch $f \circ \varphi_j$ stetig. Daraus folgt $f(\varphi_j(y)) = a$ für alle $y \in X_j$. Daher gilt $\prod_{i\in I} V_i \subset f^{-1}(a)$ mit

$$V_i = \begin{cases} X_i & \text{falls } i = j, \\ U_i & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Dies widerspricht der Minimalität von J. □

(6.12) Beispiele: Die Räume $\mathbb{R}^n$, $[0,1]^n$, der Hilbert Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und der Torus $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ sind zusammenhängend.

(6.13) Definition: Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt

$$\mathcal{Z}(x) := \bigcup_{\substack{x\in A\subset X,\\ A \text{ zusammenhängend}}} A$$

die *Zusammenhangskomponente* von x.

Ein topologischer Raum X heißt *total unzusammenhängend*, wenn $\mathcal{Z}(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$.

(6.14) Bemerkung: Für $x \in X$ ist $\mathcal{Z}(x)$ zusammenhängend (Satz 6.10) und abgeschlossen (Satz 6.8).

Für $y \neq x$ gilt wegen Satz 6.10 entweder $\mathcal{Z}(x) \cap \mathcal{Z}(y) = \emptyset$ oder $\mathcal{Z}(x) = \mathcal{Z}(x) \cup \mathcal{Z}(y) = \mathcal{Z}(y)$. Also folgt: $\forall z \in \mathcal{Z}(x)\colon\ \mathcal{Z}(z) = \mathcal{Z}(x)$.

(6.15) Beispiele:

1. $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend, denn $\mathbb{Q}$ enthält kein Intervall. Die rationalen Zahlen sind aber nicht diskret, daher sind die Zusammenhangskomponenten nicht offen in $\mathbb{Q}$.
2. Die Cantormenge aus Übung 24 ist total unzusammenhängend.

Der topologische Zusammenhang ist zwar ein technisch sehr eleganter aber nicht besonders anschaulicher Begriff. Der folgende Begriff kommt der Anschauung wesentlich näher. Es besagt, daß eine Menge genau dann wegzusammenhängend ist, wenn man von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt gelangen kann, ohne den Raum verlassen zu müssen.

(6.16) Definition: Seien a, b Elemente eines topologischen Raumes X. Ein *Weg* von a nach b ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn sich je zwei Elemente von X durch einen Weg verbinden lassen.

Die Begriffe wegzusammenhängend und zusammenhängend sind nicht äquivalent. Wegzusammenhängend ist stärker als zusammenhängend.

(6.17) Satz: *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Beweis: Sei X wegzusammenhängend und $f\colon X \to \{0,1\}$ eine stetige Funktion. Sei $x \in X$. Wir zeigen, daß für $y \in X$ stets $f(y) = f(x)$ gilt. Für $y \in X$ gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Die Abbildung $f \circ \gamma\colon [0,1] \to \{0,1\}$ ist stetig und das Intervall $[0,1]$ ist zusammenhängend, also gilt $f(y) = (f \circ \gamma)(1) = (f \circ \gamma)(0) = f(x)$. □

Das folgende Beispiel belegt, daß wegzusammenhängend echt stärker als zusammenhängend ist.

(6.18) Beispiel: Die topologische Sinuskurve ist nicht wegzusammenhängend.

Es gibt allerdings eine große Klasse von Mengen, für die Weg-Zusammenhang und Zusammenhang gleichbedeutend sind.

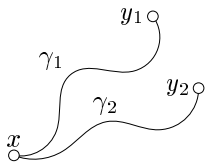
(6.19) Satz: *Jede offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend.*

Beweis: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $x \in U$. Wir setzten

$$W(x) := \{y \in U \mid \exists \text{ Weg } \gamma\colon [0,1] \to U\colon \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}.$$

Die Menge $W(x)$ ist zusammenhängend. Denn für $y_1, y_2 \in W(x)$ existieren Wege $\gamma_i\colon [0,1] \to U$ mit $\gamma_i(0) = x$, $\gamma_i(1) = y_i$, wo $i = 1, 2$. Dann wird durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(1-2t) & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2t-1) & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$



ein Weg von y_1 nach y_2 definiert.

Sei $y \in W(x)$. Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $U(r, y) \subset U$. Die Kugel $U(r, y)$ ist wegzusammenhängend, also gilt $U(r, y) \subset W(x)$. Also ist $W(x)$ offen. Wegen $U \backslash W(x) = \bigcup_{y \notin W(x)} W(y)$ ist $W(x)$ abgeschlossen. Da U zusammenhängend ist, folgt $U = W(x)$. Also ist U wegzusammenhängend. □

Auch das stetige Bild eines wegzusammenhängenden Raumes ist wegzusammenhängend.

(6.20) Satz: *Ist X ein wegzusammenhängender Raum und $f\colon X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ ebenfalls wegzusammenhängend.*

Beweis: Seien $y_i = f(x_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ Elemente aus $f(X)$. Es gibt einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$. Die Komposition $f \circ \gamma$ ist ein Weg in $f(X)$ von y_1 nach y_2. □

Mit diesem Satz läßt sich zeigen, daß für $n > 1$ die reellen Zahlen nicht zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind. Die Existenz flächenfüllender Kurven (Peano Kurven) zeigt, daß dies keineswegs offensichtlich ist.

(6.21) Satz: *Für $n \geq 2$ sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph.*

Beweis: Angenommen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wäre ein Homöomorphismus. Für $n \geq 2$ ist der Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend, aber $\mathbb{R} \setminus f(0)$ ist nicht wegzusammemhängend, im Widerspruch zum vorangehenden Satz. □

KAPITEL 7

Kompaktheit

Um sicher zu stellen, daß ein Netz oder ein Filter höchstens einen Grenzwert hat, wurden die Trennungsaxiome, insbesondere Trennungsaxiom T_2, eingeführt. Umgekehrt zu fordern, daß jedes Netz mindestens einen Grenzwert hat, wäre eine zu große und unpraktische Einschränkung. Die Forderung, daß jedes Netz mindestens einen Häufungspunkt hat, führt hingegen zu einer interessanten Klasse von topologischen Räumen, den kompakten Räumen. Wir definieren Kompaktheit allerdings nicht über Häufungspunkte von Netzen oder Filtern, sondern über offene Mengen.

(7.1) Definitionen:

1. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.
2. Eine *Teilüberdeckung* $\mathcal{V}$ einer Überdeckung $\mathcal{U}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ mit $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$.
3. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ enthält.

Im Gegensatz zu manchen anderen Texten verlangen wir nicht, daß ein kompakter Raum auch ein Hausdorff-Raum ist.

(7.2) Beispiele:

1. Jeder endliche topologische Raum ist kompakt.
2. Jeder topologischer Raum mit der koendlichen Topologie ist kompakt. Denn ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so sei $U \in \mathcal{U}$. Es gilt $U = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Zu x_i gibt es ein $U_i \in \mathcal{U}$ mit $x_i \in U_i$. Daher ist $\{U, U_1, \ldots, U_n\}$ eine endliche Teilüberdeckung.
3. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ist $[a, b]$ kompakt. Denn sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Wir setzen

$$X := \Big\{ x \in [a, b] \mid \exists U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \colon [a, x] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \Big\}.$$

   Es muß $X = [a, b]$ gezeigt werden. Es gilt $a \in X$, also $X \neq \emptyset$. Die Menge X ist nach oben durch b beschränkt, also existiert $s := \sup X \in [a, b]$. Es gibt

ein $V \in \mathcal{U}$ mit $s \in V$. Da V offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap [a,b] \subset V$. Es gibt $x \in X$ mit $s - \varepsilon < x \leq s$. Wegen $x \in X$ gibt es $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{U}$: $[a,x] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, also $[a,s] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup V$. Daraus folgt $s \in X$ und $[a,b] \cap (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset X$. Wegen $s = \sup X$ folgt daraus $s = b$, also $X = [a,b]$.

4. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ist (a,b) nicht kompakt, denn

$$\{(a, b - 1/n \cdot (b-a) \mid n > 1\}$$

ist eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Ähnlich ist einzusehen, daß $\mathbb{R}$ nicht kompakt ist.

Für Anwendungen ist unsere Definition der Kompaktheit nicht immer günstig. Es gibt jedoch eine Reihe verschiedener Charakterisierungen der Kompaktheit.

(7.3) Satz: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist kompakt.*
2. *Ist $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $\bigcap_{i \in J} A_i = \emptyset$.*
3. *Jedes Netz in X hat einen Häufungspunkt.*
4. *Jedes Netz in X hat ein konvergentes Teilnetz.*
5. *Jedes universelle Netz in X konvergiert.*
6. *Jeder Filter auf X hat einen Häufungspunkt.*
7. *Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis: Die Aussagen 3 und 6 bzw. 5 und 7 sind mit Satz 3.34 und Satz 3.37 offensichtlich äquivalent. Aus Satz 3.19 folgt unmittelbar die Äquivalenz von Aussage 3 und Aussage 4. Wir zeigen daher nur die Implikationen $1 \leftrightarrow 2$ und $1 \to 5 \to 4 \to 2$.

Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von X. Sei $U_i := X \setminus A_i$. Für jedes $i \in I$ ist U_i offen. Es gilt $\bigcap_{i \in I} A_i = X \setminus (\bigcup_{i \in I} U_i)$, also $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset \iff \bigcup_{i \in I} U_i = X$. Der Raum X ist genau dann kompakt, wenn es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gibt mit $\bigcup_{i \in J} U_i = X$, also $\bigcap_{i \in J} A_i = \emptyset$. Die zeigt die Äquivalenz von Aussage 1 und Aussage 2.

Wir zeigen nun die Implikation $1 \to 5$. Angenommen X ist kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist ein universelles Netz in X, das nicht konvergiert. Dann gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x, so daß das Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ nicht in U_x schließt. Da das Netz universell ist, schließt $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in $X \setminus U_x$. Das heißt, es gibt ein $\lambda_x \in \Lambda$ mit $x_\mu \notin U_x$ für $\mu \geq \lambda_x$. Das System $\{U_x \mid x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Es

gibt ein $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \geq \lambda_{x_i}$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Für $\mu \geq \lambda$ gilt $x_\mu \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$, was ein offensichtlicher Widerspruch ist. Also konvergiert jedes universelle Netz.

Nach Satz 3.25 besitzt jedes Netz ein universelles Teilnetz. Damit impliziert Aussage 5 unmittelbar Aussage 4.

Es fehlt noch die Implikation $4 \to 2$. Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen mit $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $J \in I$. Wir setzen

$$\Lambda := \Big\{ \bigcap_{i\in J} A_i \mid \emptyset \neq J \subset I \text{ und } J \text{ endlich} \Big\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\emptyset \notin \Lambda$. Wir ordnen Λ durch $A \geq B \iff A \subset B$. Damit wird Λ zu einer gerichteten Menge. Für $A \in \Lambda$ sei $x_A \in A$ frei gewählt. Dann ist $(x_A)_{A\in\Lambda}$ ein Netz in X. Nach Annahme gibt es ein konvergentes Teilnetz. Sei $h\colon \Lambda' \to \Lambda$ eine kofinale Abbildung, die dieses Teilnetz beschreibt. Sei x ein Grenzwert der Teilfolge. Für $A \in \Lambda$ gibt es ein $\mu \in \Lambda'$ mit $h(\lambda) \geq A$, also $h(\lambda) \subset A$, für $\lambda \geq \mu$. Doch dann gilt $x_{h(\lambda)} \in A$ für $\lambda \geq \mu$. Da A abgeschlossen ist, ist der Grenzwert des konvergenten Netzes ebenfalls in A, also $x \in A$. Da $A \in \Lambda$ beliebig ist, folgt $\{x\} \subset \bigcap_{A\in\Lambda} A \subset \bigcap_{i\in I} A_i$, also $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. □

Im Beweis der Implikation $5 \to 4$ geht über Satz 3.25 das Zornsche Lemma ein.

Folgen reichen in der Regel nicht aus um kompakte Räume zu charakterisieren. Genügt ein topologischer Raum X dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom so gilt jedoch, daß X genau dann kompakt ist, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Ähnlich wie Zusammenhang ist Kompaktheit eine Eigenschaft, die unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

(7.4) Satz: *Ist X ein kompakter Raum und $f\colon X \to Y$ stetig und surjektiv, so ist Y ebenfalls kompakt.*

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist die Menge der Urbilder $\mathcal{V} := \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{V_1, \ldots, V_n\} \subset \mathcal{V}$. Da f surjektiv ist, ist $\{f(V_1), \ldots, f(V_n)\} \subset \mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von Y. □

Da $\mathbb{S}_1$ als stetiges Bild von $[0,1]$ betrachtet werden kann, ist folgendes Beispiel unmittelbar einzusehen.

(7.5) Beispiel: Die Kreislinie $\mathbb{S}_1$ ist kompakt.

Beliebige Teilmengen eines kompakten Raumes sind in der Regel nicht kompakt. Zum Beispiel ist (a, b) eine nicht kompakte Teilmenge des kompakten Raumes $[a, b]$. Für abgeschlossene Teilmengen hingegen gilt folgendes Resultat.

(7.6) Satz: *Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.*

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung einer abgeschlossenen Teilmenge A eines kompakten Raumes X. Es gibt Mengen U_i, $i \in I$, offen in X, so daß $\mathcal{U} = \{A \cap U_i \mid i \in I\}$. Dann ist $\{U_i \mid i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{V}$ von X. Damit ist $\{A \cap U \mid U \in \mathcal{V} \setminus \{X \setminus A\}\} \subset \mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von A. □

Für Hausdorff-Räume gilt sogar die Umkehrung.

(7.7) Satz: *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.*

Beweis: Sei A eine kompakte Teilmenge eines kompakten Hausdorff-Raumes X. Sei $x \in X \setminus A$. Da X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es für jedes $y \in A$ disjunkte offene Mengen U_y und V_y mit $x \in U_y$ und $y \in V_y$. Es gilt $A \subset \bigcup_{y \in A} V_y$. Da A kompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_n \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Die Menge $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ ist offen. Es gilt $x \in U \subset X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}) \subset X \setminus A$. Da $x \in A$ beliebig ist, folgt, daß $X \setminus A$ offen ist. Daher ist A abgeschlossen. □

Dieses Zusammenspiel zwischen kompakt und abgeschlossen kann in bestimmten Situation zum Erkennen von Homöomorphismen benutzt werden.

(7.8) Satz: *Jede stetige und bijektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorff-Raum ist ein Homöomorphismus.*

Beweis: Wegen Satz 2.20 genügt es zu zeigen, daß f abgeschlossen ist. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Mit Satz 7.6 ist A kompakt. Aus Satz 7.4 folgt, daß $f(A)$ ebenfalls kompakt ist. Wegen Satz 7.7 folgt daraus, daß $f(A)$ abgeschlossen ist. □

Jedenfalls mit Blick auf die Konvergenz von Filtern und Netzen sind kompakte Hausdorff-Räume besonders gut. In gewissem Sinn sind sie sogar optimal.

(7.9) Korollar: *Seien $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_3$ Topologien auf einer Menge X, so daß $(X, \mathcal{T}_2)$ ein kompakter Hausdorff-Raum ist. Dann ist $(X, \mathcal{T}_1)$ kein Hausdorff-Raum und $(X, \mathcal{T}_3)$ nicht kompakt.*

Beweis: Die Abbildungen

$$\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$$
$$\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{T}_3) \to (X, \mathcal{T}_2)$$

sind stetig, bijektiv aber keine Homöomorphismen. Wegen Satz 7.8 kann daher $(X, \mathcal{T}_1)$ kein Hausdorff-Raum und $(X, \mathcal{T}_3)$ nicht kompakt sein.

Alledings ist $(X, \mathcal{T}_1)$ kompakt und $(X, \mathcal{T}_3)$ ein Hausdorff-Raum. □

Unmittelbar aus Satz 7.8 folgt folgendes Ergebnis über Einbettungen.

(7.10) Korollar: *Jede stetige und injektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ist eine Einbettung.*

Für kompakte Räume folgen aus dem Trennungsaxiom T_2 bereits die Trennungsaxiome T_3 und T_4.

(7.11) Satz: *Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal.*

Beweis: Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Wir zeigen zunächst, daß X regulär ist.

Sei also A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $x \in X \setminus A$. Laut Satz 7.7 ist A kompakt. Da X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es zu jedem $y \in A$ disjunkte offene Mengen U_y, V_y mit $x \in U_y$ und $y \in V_y$. Es gilt $A \subset \bigcup_{y \in A} V_y$. Da A kompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_n \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} =: V$. Es sei $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. Dann sind U und V disjunkte offene Mengen mit $A \subset V$ und $y \in U$.

Um zu zeigen daß X normal ist, widerholen wir das Argument. Seien A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Da X ein Hausdorff-Raum ist, sind A und B kompakt. Mit der bereits gezeigten Regularität wissen wir, daß es für jedes $y \in B$ disjunkte offene Mengen U_y und V_y gibt mit $A \subset U_y$ und $y \in V_y$. Da B kompakt ist, gibt es analog zu oben $y_1, \ldots, y_n \in B$ mit $B \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Daher sind $\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ und $\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ disjunkte offene Umgebungen von B bzw. A. □

Der folgende, keineswegs triviale Satz besagt, daß Kompaktheit mit der Produktbildung verträglich ist.

(7.12) Satz von Tychonoff: *Das Produkt $X := \prod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume $X_i \neq \emptyset$, $i \in I$, ist genau dann kompakt, wenn für jedes $i \in I$ der Raum X_i kompakt ist.*

Beweis: Sei X kompakt. Für jedes $i \in I$ ist die Projektion $\pi_i : X \to X_i$ stetig und surjektiv, also ist mit Satz 7.4 auch X_i kompakt.

Sei nun umgekehrt für jedes $i \in I$ der Raum X_i kompakt. Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in X. Aus der Stetigkeit der einzelnen π_i folgt mit Satz 3.22, daß für jedes $i \in I$ auch das Netz $(\pi_i(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ universell ist. Mit Satz 7.3 folgt, daß jedes dieser Bildnetze konvergiert. Daraus folgt mit Bemerkung 4.9, daß auch $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergiert. Wieder mit Satz 7.3 zeigt dies, daß X kompakt ist. □

Bei dem vorherigen Beweis geht auf Umwegen wieder das Zornsche Lemma ein. Die eigentliche Arbeit wird nämlich in Satz 3.25 erledigt. Dieser Satz wird in Satz 7.3 verwendet. Es kann sogar gezeigt werden, daß der Satz von Tychonoff äquivalent zum Zornschen Lemma ist. Werden nur endliche oder abzählbare Produkte betrachtet, so kann der Beweis auch ohne das Zornsche Lemma geführt werden.

(7.13) Beispiele: Die Würfel $[0,1]^n$, der Hilbert Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und der Torus $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ sind als Produkte kompakter Räume kompakt.

In Beispiel 7.2 wurde gezeigt, daß abgeschlossene beschränkte Intervalle kompakt sind. Das folgende Resultat belegt, daß die für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ typisch ist.

(7.14) Satz (Heine-Borel): *Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind genau die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen.*

Beweis: Sei A eine kompakte Teilmenge von X. Mit Satz 7.7 gilt, daß A abgeschlossen ist. Das System $\{U(0,i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ induziert eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $A \subset U(0,i)$. Damit ist A beschränkt.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Da A beschränkt ist, gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $A \subset [-i,i]^n$. Mit Satz 7.6 ist A als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes $[-i,i]^n$ kompakt. □

(7.15) Beispiel: Die Sphären $\mathbb{S}_n$ sind beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n+1}$. Also sind sie kompakt.

Auf kompakten Mengen nehmen reellwertige Funktionen Maximum und Minimum an.

(7.16) Satz: *Ist X ein kompakter Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$ und $f(x_2) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$.*

Beweis: Mit Satz 7.4 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also wegen Satz 7.14 beschränkt und abgeschlossen. Dies bedeutet, daß $\inf\{f(x) \mid x \in X\}$ und $\sup\{f(x) \mid x \in X\}$ existieren und in $f(X)$ liegen. □

Kompaktheit ist eine sehr schöne Eigenschaft. Doch viele vertraute Räume, wie zum Beispiel $\mathbb{R}^n$, sind nicht kompakt. Die folgende Definition umfaßt aber auch diese Räume.

(7.17) Definition: Ein topologischer Raum X heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

(7.18) Beispiele:

1. Jeder kompakte Raum ist lokalkompakt.
2. $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt, denn $\overline{U(x,1)}$ ist eine kompakte Umgebung von x.
3. Die rationalen Zahlen sind nicht lokalkompakt, da keine Umgebung in $\mathbb{Q}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist.

Das folgende Resultat ergänzt Satz 7.6 und Satz 7.7.

(7.19) Satz: *Jeder offene Unterraum eines kompakten Hausdorff-Raumes ist lokalkompakt.*

Beweis: Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und U offen in X. Sei $x \in U$. Wegen Satz 7.11 ist X regulär, also gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Mit Satz 7.6 ist $\overline{V}$ eine kompakte Umgebung von x in U. □

Der folgende Satz besagt, daß jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum fast kompakt ist. Durch Hinzunahme eines Punktes kann ein lokalkompakter Raum kompakt werden.

(7.20) Satz: *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\infty_X \notin X$ ein zusätzlicher Punkt. Dann ist $(\hat{X} := X \cup \{\infty_X\}, \mathcal{T}')$ mit*

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{X \setminus K \cup \{\infty_X\} \mid K \subset X \text{ und } K \text{ kompakt}\}$$

ein kompakter Hausdorff-Raum, genannt die Ein-Punkt-Kompaktifizierung *von X.*

Beweis: Das Mengensystem $\mathcal{T}'$ ist eine Topologie, denn es gilt:

1. $\{X \cup \{\infty_X\}, \emptyset\} \subset \mathcal{T}'$.

2. Seien $U_i \in \mathcal{T}'$ mit $i \in I$. Es sei $J := \{i \in I \mid U_i \in \mathcal{T}\}$. Gilt $J = I$ so ist $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Gilt $J \neq I$ so folgt $U := \bigcup_{i\in J} U_i \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Zudem gilt $V := \bigcup_{i\in I\setminus J} U_i = \bigcup_{i\in I\setminus J}(X \setminus K_i) \cup \{\infty_X\} = \{\infty_X\} \cup X \setminus \bigcap_{i\in I\setminus J} K_i$ wobei $K_i \subset X$ kompakt ist. Aus Satz 7.7 und Satz 7.6 folgt, daß $K := \bigcap_{i\in I\setminus J} K_i$ kompakt ist. Daher gilt $V \in \mathcal{T}'$. Da U offen in X ist, ist $K \setminus U = K \cap X \setminus U$ als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes K kompakt. Also ist $U \cup V = U \cup X \setminus K \cup \{\infty_X\} = X \setminus (K \setminus U) \cup \{\infty_X\}$ ein Element von $\mathcal{T}'$.
3. Mit analogen Argumenten ist einzusehen, daß der Schnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{T}'$ wieder in $\mathcal{T}'$ liegt.

Wir zeigen nun, daß $(\hat{X}, \mathcal{T}')$ kompakt ist. Seien $U_i \in \mathcal{T}'$, $i \in I$, mit $X \cup \{\infty_X\} = \bigcup_{i\in I} U_i$. Es gibt ein $i_0 \in I$ mit $\infty_X \in U_{i_0} = X \setminus K \cup \{\infty_X\}$, wo K eine kompakte Teilmenge von X ist. Es gilt $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Da K kompakt ist, gibt es ein endliche Teilüberdeckung $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$. Daraus folgt $\hat{X} = \bigcup_{m=0}^{n} U_{i_m}$. Dies zeigt, daß $(\hat{X}, \mathcal{T}')$ kompakt ist.

Es muß noch gezeigt werden, daß $\hat{X}$ ein Hausdorff-Raum ist. Seien x, y zwei verschiedenen Punkte aus $\hat{X}$. Gilt $x, y \in X$, so gibt es, da X ein Hausdorff-Raum ist, disjunkte Mengen $U, V \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ mit $x \in U$ und $y \in V$. Gilt $\{x, y\} \not\subset X$, so kann $x = \infty_X$ angenommen werden. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von y in X. Die Umgebungen K und $X \setminus K$ trennen y und x. □

Da sich Regularität auf Unterräume überträgt, folgt aus Satz 7.20 unmittelbar folgendes Resultat.

(7.21) Korollar: *Jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum ist regulär. Jeder Punkt eines lokalkompakten Hausdorff-Raumes besitzt eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Teilmengen.*

Lokale Kompaktheit überträgt sich eher auf Unterräume als Kompaktheit.

(7.22) Korollar: *Jede offene oder abgeschlossene Teilmenge eines lokalkompakten Hausdorff-Raumes ist lokalkompakt.*

Beweis: Sei X lokalkompakt. Ist U offen in X, so ist U offen in $\hat{X}$, als mit Satz 7.19 lokalkompakt.

Ist U abgeschlossen in X und kompakt, so ist U auch lokalkompakt. Ist U abgeschlossen in X aber nicht kompakt, so ist $U \cup \{\infty_X\}$ der Abschluß von U in $\hat{X}$, da das Komplement offen ist. Also ist $U \cup \{\infty_X\}$ kompakt. Da U offen in $U \cup \{\infty_X\}$ ist, folgt mit Satz 7.19, daß U lokalkompakt ist. □

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung ist nicht das einzige Verfahren zur Kompaktifizierung eines Raumes. Zum Beispiel kann $\mathbb{R}$ auch durch Hinzufügen von zwei Punkten, $+\infty$ und $-\infty$, kompaktifiziert werden. Dies führt zur Enden-Kompaktifizierung von Mannigfaltigkeiten. Das Gegenstück zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung ist die Stone-Čhech-Kompaktifizierung. Hier werden möglichst viele Punkte zur Kompaktifizierung herangezogen. Allerdings soll X dicht in der Kompaktifizierung liegen.

Das Kompaktifizieren sollte sich gut mit der Stetigkeit vertragen. Leider ist dem nicht immer so. Zum Beispiel kann die stetige Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ nicht zu einer stetigen Funktion von $\hat{\mathbb{R}}$ nach $[-1,1]$ fortgesetzt werden. Der folgende Begriff charakterisiert die stetigen Funktionen, die stetig auf die Ein-Punkt-Kompaktifizierung fortgesetzt werden können.

(7.23) Definition: Seien X und Y lokalkompakte Hausdorff-Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *eigentlich*, wenn das Urbild kompakter Mengen kompakt ist.

(7.24) Beispiel: Die Sinusfunktion ist nicht eigentlich, denn $[-1,1]$ ist kompakt, aber $\mathbb{R} = \sin^{-1}([-1,1])$ ist nicht kompakt.

(7.25) Satz: *Seien X und Y lokalkompakte Hausdorff-Räume. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung $\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ mit $\hat{f}|_X = f$ und $\hat{f}(\infty_X) = \infty_Y$ ist genau dann stetig, wenn f eigentlich ist.*

Beweis: Sei f eigentlich. Es muß nur gezeigt werden, daß $\hat{f}$ in ∞_X stetig ist. Sei $U \subset \hat{Y}$ offen mit $\infty_Y \in U$. Ohne Einschränkung gilt $U = Y \setminus K \cup \{\infty_Y\}$, wo K kompakt ist. Zudem gilt $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(K) \cup \{\infty_X\}$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(K)$ kompakt, also ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von ∞_X.

Sei $\hat{f}$ stetig. Ist $K \subset Y$ kompakt, so ist $K \cup \{\infty_Y\}$ offen in $\hat{Y}$. Da $\hat{f}$ stetig ist, ist $\hat{f}^{-1}(K \cup \{\infty_Y\}) = f^{-1}(K) \cup \{\infty_X\}$ offen in $\hat{X}$. Damit ist $f^{-1}(K)$ kompakt. Dies zeigt, daß f eigentlich ist. □

Da Homöomorphismen trivialerweise eigentlich sind, folgt aus dem eben gezeigten unmittelbar das folgende Resultat.

(7.26) Korollar: *Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung eines Raumes X ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt*

(7.27) Beispiel: Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ ist die n-Sphäre $\mathbb{S}_n$. Dies ist mit der Stereographischen Projektion einzusehen.

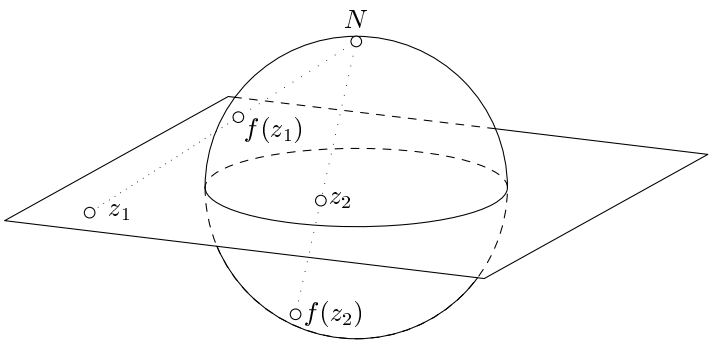


Abbildung 7.1: Stereographische Projektion

Es gilt $\mathbb{S}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\|^2 + |y|^2 = 1\}$. Es sei $N := (0,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dann gilt $N \in \mathbb{S}_n$ und für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned} t(x,0) + (1-t)N \in \mathbb{S}_n \setminus \{N\} &\iff \|tx\|^2 + (1-t)^2 = 1 \\ &\iff t^2\|x\|^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \\ &\iff t^2(\|x\|^2 + 1) = 2t \\ &\iff t = \frac{2}{\|x\|^2 + 1} \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}_n \setminus \{N\}\colon x \mapsto \left(\frac{2}{\|x\|^2 + 1} \cdot x, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

ist daher stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung lautet $f^{-1}(x,y) = \frac{1}{1-y}x$. Damit ist f ein Homöomorphismus. Da $\mathbb{S}_n$ kompakt ist, ist $\mathbb{S}_n$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$.

(7.28) Satz (Baire): *Sind U_n, $n \in \mathbb{N}$, dichte offene Teilmengen eines lokalkompakten Hausdorff-Raumes X, so ist der Schnitt $W := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ebenfalls dicht in X.*

Beweis: Sei V eine nichtleere offene Teilmenge von X. Es muß $W \cap V \neq \emptyset$ gezeigt werden. Wir konstruieren iterativ Punkte x_n und Mengen T_n wie folgt.

Da U_1 dicht in X ist, ist $V \cap U_1$ eine nichtleere offene Teilmenge von X. Sei $x_1 \in V \cap U_1$. Wegen Korollar 7.22 gibt es eine kompakte Umgebung T_1 von x_1 in $V \cap U_1$. Seien für $1 \leq i \leq n$ die Punkte x_i und die Mengen T_i schon konstruiert. Dabei ist T_i eine kompakte Umgebung von x_i. Da T_n eine Umgebung ist, ist $\overset{\circ}{T}_n$ nicht leer. Also gibt es ein $x_{n+1} \in \overset{\circ}{T}_n \cap U_{n+1}$. Wie oben gibt es eine kompakte Umgebung T_{n+1} von x_{n+1} in $\overset{\circ}{T}_n \cap U_{n+1}$.

Nach Konstruktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

1. T_n ist kompakt,
2. $\overset{\circ}{T}_n \neq \emptyset$,
3. $T_n \subset T_{n-1} \cap U_{n-1} \subset V \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i$.

Angenommen $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$ ist leer. Für $n \geq 2$ ist $T_1 \setminus T_n$ offen in T_1. Gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n \neq \emptyset$, so ist $\{T_1 \setminus T_n \mid n \geq 2\}$ eine offene Überdeckung des kompakten Raumes T_1. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Damit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T_1 = \bigcup_{i=1}^{n}(T_1 \setminus T_n) = T_1 \setminus T_n$. Wegen $\emptyset \neq T_n \subset T_1$ ist dies ein Widerspruch. Dies zeigt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n \neq \emptyset$. Nach Konstruktion gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n \subset V \cap W$, somit folgt $V \cap W \neq \emptyset$. $\square$

Teil 2

Maßtheorie

Einleitung

In der Maßtheorie geht es zunächst darum, wie Teilmengen sinnvoll eine *Größe* oder ein *Inhalt* zugeordnet werden kann. Was sinnvoll ist, hängt meist von der Situation ab. Im täglichen Leben ist die Mächtigkeit einer Menge oft das sinnvolle Maß. Beim Integrieren hingegen versagt dieses Maß meist. Statt dessen wird zum Beispiel ein Maß benötigt, das für zusammenhängende Intervalle die Länge des Intervalls als Maß zuordnet. In Kapitel 8 werden wir jedoch sehen, daß es kein solches Maß auf $\mathbb{R}$ gibt - jedenfalls nicht, wenn verlangt wird, daß allen Teilmengen der reellen Zahlen ein Maß zugeordnet werden kann.

In Kapitel 9 stellen wir Teilmengensysteme vor, auf denen sinnvollerweise ein Maß definiert werden kann. Dies führt zum Begriff der σ-Algebra. Außerdem präzisieren wir in diesem Kapitel, was ein Maß ist und stellen auch schwächere Abbildungen vor. Diese "fast"-Maße werden für spätere Beweise benötigt. Zentrales Ergebnis des Kapitels ist eine Konstruktion, die ausgehend von einer Funktion auf Teilen der Potenzmenge über das äußere Maß ein Maß auf der Menge der *meßbaren Teilmengen* liefert. Das Problem ist nun, herauszufinden, welche Mengen meßbar sind und welche Eigenschaften der Ursprungsfunktion vom Maß ererbt werden.

In Kapitel 10 wir dies am konkreten Beispiel des Lebesgue-Maßes untersucht. Das *Lebesgue-Maß* ist ein Maß auf $\mathbb{R}^k$, das Quadern den gewöhnlichen Inhalt, d.h. das Produkt der Seitenlängen, zuordnet. Es wird gezeigt, daß es ein solches Maß tatsächlich gibt und daß zumindest alle offenen Mengen, und somit auch alle Borel-Mengen, meßbar sind. Es werden einige Eigenschaften des Lebesgue-Maßes gezeigt, so zum Beispiel die Translationsinvarianz. Fazit des Kapitels ist, daß das Lebesgue-Maß im wesentlichen das übliche k-dimensionale Volumen ist.

In Kapitel 11 werden *meßbare Abbildungen* vorgestellt. Sie spielen in der Maßtheorie die Rolle, die stetige Abbildungen in der Topologie spielen. Ähnlich definiert verhalten sie sich auch fast wie stetige Abbildungen. Bei Grenzübergängen verhalten sie sich allerdings entscheiden anders als stetige Funktionen. Konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen punktweise gegen eine Funktion, so ist diese Grenzfunktion ebenfalls meßbar.

In Kapitel 12 wird versucht, meßbaren Abbildungen in die erweiterte reelle Gerade ein Integral zuzuordnen. Dies erfolgt schrittweise. Zunächst wird sogenannten

Elementarfunktionen, das sind so etwas wie Treppenfunktionen mit endlich vielen Stufen, ein Integral zugeordnet. Anschließend wird über einen Grenzprozeß allen positiven meßbaren Funktionen ein Integral zugeordnet. Dies führt schließlich zum Integral einer beliebigen integrierbaren Funktion. Das Integral wird so allgemein wie möglich definiert. Insbesondere ist das Integral auf jedem Maßraum und nicht nur auf dem $\mathbb{R}^k$ mit dem Lebesgue-Maß definiert.

In Kapitel 13 wird untersucht, wie sich das Integral bei Gernzprozessen verhält. Dies liefert Verfahren, die Integrierbarkeit einer Funktion zu erkennen und das Integral zu berechnen.

In Kapitel 14 schließlich wird das zum Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ gehörende Integral untersucht. Dieses Lebesgue-Integral konkurriert mit dem Riemann-Integral. Es zeigt sich jedoch, daß für Funktionen, die sowohl Riemann- als auch Lebesgue-integrierbar sind, beide Integrale übereinstimmen. Allerdings gibt es Funktionen, die Lebesgue- aber nicht Riemann-integrierbar sind und Funktionen, die uneigentlich Riemann- aber nicht Lebesgue-integrierbar sind.

KAPITEL 8

Das Problem

Aus der Analysis ist das Riemann-Integral bekannt. Die Konstruktionsidee des Riemann-Integrals ist wie folgt. Gegeben sei eine Funktion

$$f\colon [a,b] \to [0,c] \subset \mathbb{R}$$

auf einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ ist eine Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ reeller Zahlen mit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Zu einer gegebenen Zerlegung ist

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)(a_i - a_{i-1})$$

die Obersumme und

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)(a_i - a_{i-1})$$

die Untersumme. Das Oberintegral ist das Infimum aller Obersummen und das Unterintegral das Supremum aller Untersummen. Stimmen Ober- und Unterintegral überein, so ist die Funktion f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar. Der Wert des Integrals ist das Ober- bzw. Unterintegral.

Für die Konstruktion ist wesentlich, daß der Definitionsbereich ein Intervall ist. Das Integral kann auf Definitionsbereiche, die sich als Vereinigung und Schnitt endlich vieler Intervalle konstruieren lassen, ausgedehnt werden. Für Funktionen über exotischeren Teilmengen der reellen Zahlen oder gar über komplizierten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist das Riemann-Integral nicht definierbar. Um dennoch integrieren zu können, ist eine andere Konstruktionsmethode nötig. Die Idee ist, nicht den Definitionsbereich, sondern den Bildbereich zu zerlegen. Dies führt zum Lebesgue-Integral.

Sei $f\colon [a,b] \to [0,c]$ wie oben. Zu einer festen Zerlegung $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = c$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda\big(f^{-1}([c_{i-1}, c_i])\big)$$

die Obersumme und

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}\lambda\big(f^{-1}([c_{i-1},c_i])\big)$$

die Untersumme. Dabei ist $\lambda(A)$ die Länge oder der Inhalt einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$. Wie oben ist das Oberintegral das Infimum über alle Obersummen und das Unterintegral das Supremum über alle Untersummen. Stimmen Ober- und Unterintegral überein, so ist die Funktion auf $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar. Diese Konstruktion kann leicht auf beliebige Definitionsbereiche erweitert werden. Das Problem ist jedoch, eine geeignete Längenfunktion $\lambda\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ oder allgemeiner eine Volumenfunktion $\lambda_n\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu finden.

Bevor wir eine Liste der gewünschten Eigenschaften aufstellen, müssen wir uns zunächst um den Bildbereich kümmern.

(8.1) Definition: Die *erweiterte reelle Gerade* $\overline{\mathbb{R}}$ ist die Punktmenge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ mit den üblichen Rechenregeln auf $\mathbb{R}$ und folgenden zusätzlichen Rechenregeln:

$$\forall r \in \mathbb{R}\colon\ -\infty < r < \infty,$$

$$\forall r \in \mathbb{R}\colon\ r+\infty = \infty, \quad r+(-\infty) = -\infty, \quad r-\infty = -\infty, \quad r-(-\infty) = \infty,$$

$$\forall r \in \mathbb{R}\colon\ \frac{r}{\infty} = \frac{r}{-\infty} = 0,$$

$$r\cdot\infty = \begin{cases} \infty & \text{für } r>0, \\ -\infty & \text{für } r<0, \end{cases} \qquad r\cdot-\infty = \begin{cases} -\infty & \text{für } r>0, \\ \infty & \text{für } r<0, \end{cases}$$

$$\infty+\infty = \infty, \quad -\infty-\infty = -\infty,$$

$$\infty\cdot\infty = -\infty\cdot-\infty = \infty, \quad \infty\cdot-\infty = -\infty.$$

Alle anderen Ausdrücke, wie zum Beispiel $\infty - \infty$ oder $0 \cdot \infty$, sind nicht erklärt.

(8.2) Gewünschte Eigenschaften einer Volumenfunktion: Eine n-dimensionale Volumenfunktion $\lambda_n\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ sollte folgende Eigenschaften haben:

1. Monotonie:

$$A \subset B \subset \mathbb{R}^n \ \Rightarrow\ \lambda_n(A) \le \lambda_n(B)$$

2. σ-Additivität: Für paarweise disjunkte Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\lambda_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(A_k)$$

3. Gewöhnlicher Inhalt für Quader:

$$\lambda_n\Big(\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]\Big) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

4. Translationsinvarianz:

$$A \subset \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow\ \lambda_n(A + x) = \lambda_n(A),$$

wobei $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$.

Der folgende Satz zeigt, daß wir zu viel verlangen.

(8.3) Satz: *Es gibt keine Funktion $\lambda_n \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit den Eigenschaften aus Bemerkung 8.2.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für $n = 1$. Auf den reellen Zahlen führen wir folgende Äquivalenzrelation ein:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$[x] := \{y \in \mathbb{R} \mid y \sim x\}$$

die Äquivalenzklasse von x.

Sei D eine Teilmenge der reellen Zahlen, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Für die Existenz einer solchen Menge wird das Auswahlaxiom, das zum Zornschen Lemma äquivalent ist, benötigt.

Sei $x \in D \setminus [0, 1]$. Dann gibt es eine rationale Zahl q mit $x - q \in [0, 1]$. Da q rational ist, gilt $x - q \in [x]$. Also enthält $D \setminus \{x\} \cup \{x - q\}$ ebenfalls aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element. Daher kann $D \subset [0, 1]$ angenommen werden.

Die rationalen Zahlen, und somit auch $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, sind abzählbar. Sei also $\{q_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Es gilt

$$[0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D + q_i \subset [-1, 2].$$

Die zweite Inklusion ist offensichtlich. Um die erste Inklusion einzusehen sie $y \in [0, 1]$. Sei x das eindeutig bestimmte Element aus D äquivalent zu y. Es gilt $y - x \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in [0, 1]$. Daher ist $y - x$ eine rationale Zahl aus $[-1, 1]$. Somit gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $y - x = q_i$ und $y \in D + (y - x) = D + q_i$.

Weiterhin gilt

$$q_i \neq q_j \Rightarrow D + q_i \cap D + q_j = \emptyset.$$

Denn gilt $x_1 + q_i = x_2 + q_j$ mit $x_1, x_2 \in D$, so gilt $x_1 - x_2 = q_j - q_i \in \mathbb{Q}$, also $x_1 \sim x_2$. Da D aus jeder Äquivalenzklasse nur ein Element enthält, folgt $x_1 = x_2$, also auch $q_i = q_j$.

Sei $c := \lambda(D)$. Wegen der Translationsinvarianz gilt $\lambda(D + q_i) = c$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Aus den geforderten Eigenschaften folgt zusammen mit den bereits gezeigten Eigenschaften:

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} D + q_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(D + q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c.$$

Andererseits gilt

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} D + q_i\Big) \leq \lambda([-1,2]) = 3.$$

Dies führt zu der nicht zu erfüllenden Bedingung $1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} c \leq 3$. □

Die Maßtheorie versucht dieses Dilemma zu lösen. An den Eigenschaften einer Volumenfunktion wird nicht gerüttelt. Dafür wird in Kauf genommen, daß nicht allen Mengen ein Volumen zugeordnet werden kann. Das heißt, Mengen, die ähnlich wie die obige Menge D beschaffen sind, lassen sich nicht vermessen. Gesucht sind also vernünftige Systeme $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, so daß eine Volumenfunktion $\lambda_n \colon \mathcal{A} \to [0, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit den Eigenschaften aus Bemerkung 8.2 existiert.

KAPITEL 9

Maßräume und Maße

Wir untersuchen zunächst Mengensysteme, die als Definitionsbereich einer Maßfunktion geeignet sind. Anschließend betrachten wir Funktionen, die zumindest einigen der Eigenschaften, die eine Maßfunktion besitzen sollte, genügen. Allerdings verzichten wir ganz auf die Translationsinvarianz und die Vorgabe des Maßes auf Quadern. Für beliebige Mengen können diese Forderungen ohnehin nicht formuliert werden.

Die zentrale Aussage des Kapitels ist, daß über den Umweg eines äußeren Maßes auf jeder Menge ein nichttriviales Maß konstruiert werden kann.

1. Mengensysteme

Wir haben gesehen, daß in der Regel kein Lebesgue-Maß auf der gesamten Potenzmenge einer Menge möglich ist. Gesucht sind daher Teilmengen der Potenzmenge, die zu Maßen passen, das heißt, die mit den typischen Operationen für Maße verträglich sind. Dies führt zu den σ-Algebren.

(9.1) Definition: Ein Teilmengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ einer Menge X heißt *σ-Algebra in X*, falls gilt:

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(9.2) Beispiele:

1. Für jede Menge X sind $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ jeweils σ-Algebren.
2. Für jede Menge X ist

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ abzählbar oder } X \setminus A \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra. Die ersten beiden Axiome sind offensichtlich erfüllt. Seien $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge A_n abzählbar, so ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar. Sind nicht alle A_n abzählbar, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $X \setminus A_{n_0}$ abzählbar ist. Doch dann ist $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n_0}$ erst recht abzählbar.

Aus den Axiomen in 9.1 folgen unmittelbar folgende Eigenschaften einer σ-Algebra.

(9.3) Lemma: *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X, so gilt:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap X \setminus B \in \mathcal{A}$.

Das heißt, eine σ-Algebra in X enthält ganz X sowie die leere Menge und ist abgeschlossen bezüglich Komplementbildung, abzählbarer Vereinigung und abzählbarem Durchschnitt.

Die folgenden Mengensysteme sind Abschwächungen von σ-Algebren.

(9.4) Definition: Ein Teilmengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ einer Menge X heißt *Ring*, falls gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$.
2. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.
3. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Ein Ring $\mathcal{R}$ ist eine *Algebra*, wenn zusätzlich gilt:

4. $X \in \mathcal{R}$.

Ein Ring $\mathcal{R}$ ist eine *σ-Ring*, wenn verschärfend gilt:

3′. $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

(9.5) Bemerkung: Mit Lemma 9.3 ist eine σ-Algebra auch eine Algebra und ein σ-Ring.

Da sich die definierenden Eigenschaften auf Durchschnitte übertragen, gilt folgendes Ergebnis unmittelbar.

(9.6) Satz: *Sei X eine Menge und seien $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, σ-Algebren (Ringe, Algebren bzw. σ-Ringe), so ist*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \forall i \in I \colon A \in \mathcal{A}_i\}$$

eine σ-Algebra (ein Ring, eine Algebra bzw. ein σ-Ring).

Oft ist ein Mengensystem vorgegeben und gesucht wird eine möglichst kleine σ-Algebra, die dieses Mengensystem enthält. Dies führt zu folgender, durch den vorangehenden Satz ermöglichten Definition.

(9.7) Definition: Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Teilmengensystem einer Menge X, so ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \text{ und } \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra*.

In einfachen Situationen kann das Erzeugnis direkt angegeben werden.

(9.8) Beispiele:

1. Ist $\mathcal{E}$ bereits eine σ-Algebra, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.
2. Für $A \subset X$ gilt $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$.

Interessant sind Situationen, in denen eine σ-Algebra von einem Mengensystem erzeugt wird, das selbst schon eine Struktur trägt. Zum Beispiel kann das gegebene Mengensystem eine Topologie sein. Dies führt zu folgenden Begriffen.

(9.9) Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. $\mathcal{B}(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$ heißt die *Borelsche σ-Algebra* von $(X, \mathcal{T})$. Die Mengen in $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ heißen *Borel-Mengen*.
2. $U \subset X$ heißt *G_δ-Menge*, wenn es offene Mengen $U_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = U$ gibt. Jede G_δ-Menge liegt in $\mathcal{B}(\mathcal{T})$.
3. $A \subset X$ heißt *F_σ-Menge*, wenn es abgeschlossene Mengen $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ gibt. Jede F_σ-Menge liegt in $\mathcal{B}(\mathcal{T})$.

Wie weit die Borelsche σ-Algebra von der gegebenen Topologie entfernt sein kann, läßt das folgende Beispiel erahnen.

(9.10) Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}$, sei

$\mathcal{T}_1$ die Euklidsche Topologie,
$\mathcal{T}_2$ die von $\{[a, b) \mid a < b\}$ erzeugte Topologie und
$\mathcal{T}_3 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$.

Dann gilt $\mathcal{B}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{B}(\mathcal{T}_2) = \mathcal{B}(\mathcal{T}_3)$.

Dies ist wie folgt einzusehen. Wegen $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt $\mathcal{B}(\mathcal{T}_3) \subset \mathcal{B}(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{B}(\mathcal{T}_2)$. Es muß also nur noch $\mathcal{B}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{B}(\mathcal{T}_3)$ gezeigt werden. Da $\mathcal{B}(\mathcal{T}_3)$ eine σ-Algebra ist, genügt es $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{B}(\mathcal{T}_3)$ zu zeigen. Es gilt

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, \infty) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, \infty) \subset \mathcal{B}(\mathcal{T}_3).$$

Ist $U \in \mathcal{T}_2$, so gibt es $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subset \mathcal{B}(\mathcal{T}_3)$.

(9.11) Bemerkung: Meist kann $\sigma(\mathcal{E})$ nur schlecht direkt beschrieben werden. Durch alternierendes Komplementbilden und Vereinigen werden oft immer neue Mengen geschaffen.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß es Ringe gibt, die keine Algebren sind und daß es Algebren sowie σ-Ringe gibt, die keine σ-Algebren sind,

(9.12) Beispiele:

1. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{R} := \{A \subset X \mid A \text{ endlich}\}$. Dann ist $\mathcal{R}$ ein Ring aber, falls X unendlich ist, keine Algebra.
2. Sei X eine beliebige Menge und
$$\mathcal{R} := \{A \subset X \mid A \text{ endlich oder } X \setminus A \text{ endlich}\}.$$
Dann ist $\mathcal{R}$ eine Algebra. Ist X unendlich, so ist $\mathcal{R}$ keine σ-Algebra.
3. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{R} := \{A \subset X \mid A \text{ abzählbar}\}$. Dann ist $\mathcal{R}$ ein σ-Ring. Ist X überabzählbar, so ist $\mathcal{R}$ keine σ-Algebra.

2. Maße

Wir definieren nun, was ein Maß ist. Dabei sind wir, im Vergleich zum vorangegangenen Kapitel, sehr bescheiden. Wir verlangen nur, daß das Maß auf einer σ-Algebra und nicht zwingend auf der Potenzmenge definiert ist. Außerdem geben wir keine Maße, wie etwa die der Quader, vor. Wir untersuchen auch schwächere Funktionen wie Prä-Maße, Inhalte und äußere Maße. Wir zeigen, daß es auf jeder Menge ein nichttriviales äußeres Maß gibt und daß jedes äußere Maß auf der Menge der meßbaren Mengen ein Maß induziert.

(9.13) Definition: Sei X eine Menge und $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Prä-Maß*, falls gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. σ-Additivität: Sind $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$, so gilt:
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Inhalt*, falls statt der σ-Additivität gilt:

2'. Endliche Additivität: Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt, so gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Ein Prä-Maß auf einer σ-Algebra heißt ein *Maß*.

(9.14) Beispiele:

1. Für eine beliebige Menge X und $\mathcal{R} := \{A \subset X \mid A \text{ endlich}\}$ ist $\mu(A) := |A|$ ein Inhalt, ja sogar ein Prä-Maß.
2. Für eine beliebige Menge X mit $\mathcal{R} := \mathcal{P}(X)$ liefert
$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$
ein Maß, das sogenannte *Zählmaß*.
3. Für eine beliebige Menge X mit $\mathcal{R} := \mathcal{P}(X)$ liefert
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$
ein Inhalt, aber, falls X unendlich ist, kein Maß.
4. Sei X eine überabzählbare Menge. Dann ist
$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ abzählbar oder } X \setminus A \text{ abzählbar}\}$$
eine σ-Algebra (Beispiel 9.2.2). Die Funktion
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1 & \text{falls } X \setminus A \text{ abzählbar,} \end{cases}$$
ist ein Maß. Um dies einzusehen, muß die σ-Additivität nachgewiesen werden. Sei $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, eine Menge paarweise disjunkter Mengen. Sind alle A_i abzählbar, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ abzählbar, und es gilt $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0$. Ist A_j nicht abzählbar, so ist $X \setminus A_j$ abzählbar. Für $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$, also $A_i \subset X \setminus A_j$. Damit ist A_i abzählbar, und es gilt $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 1$.
5. Für eine beliebige Menge X mit $\mathcal{R} := \mathcal{P}(X)$ und $x \in X$ liefert
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
ein Maß, das sogenannte *Dirac-Maß*.

In der Maßtheorie sind also Mengen von Interesse, bei denen eine σ-Algebra von Teilmengen und ein Maß auf dieser σ-Algebra gegeben ist. Dies führt zu den folgenden Begriffen.

(9.15) Definition: Sei X eine Menge, sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra und sei $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß. Dann heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein *Maßraum*.

Ein Maß μ heißt

endlich,	falls $\mu(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.
ein *Wahrscheinlichkeitsmaß,*	falls $X \in \mathcal{A}$ und $\mu(X) = 1$.
σ-endlich,	falls es Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gibt mit $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Die Axiome von Kolmogorov schlagen eine Brücke zwischen der Maß- und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

(9.16) Axiome von Kolmogorov für Wahrscheinlichkeiten: Für eine (stochastisches) Experiment sei X die Menge aller möglichen Ergebnisse. Für $A \subset X$ sei $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis des Experiments in A liegt. Die Funktion P erfüllt dann folgende Eigenschaften:

1. Unmögliches Ereignis: $P(\emptyset) = 0$.
2. Sicheres Ereignis: $P(X) = 1$
3. Für disjunkte Mengen A, B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Damit ist P ein Inhalt, aber nicht notwendigerweise ein Maß.

Aufsteigende bzw. absteigende Ketten von Mengen spielen in den weiteren Untersuchungen eine gewisse Rolle, so daß wir eine bequeme Notation einführen.

(9.17) Bezeichnung: Seien $A_i, i \in \mathbb{N}$, Teilmengen einer Menge X. Gilt $A_i \subset A_j$ für $i < j$, so schreiben wir $A_i \uparrow$. Gilt $A_j \subset A_i$ für $i < j$, so schreiben wir $A_i \downarrow$.

Der folgende Satz faßt zentrale Eigenschaften eines Maßraumes zusammen.

(9.18) Satz: *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann:*

1. *Für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
2. *Monotonie: Für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
3. *Subtraktivität: Für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt*
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$
4. *Subadditivtät: Für Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt*
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

5. *Stetigkeit von unten: Für Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $A_i \uparrow$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

6. *Stetigkeit von oben: Für Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $A_i \downarrow$ und $\mu(A_i) < \infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$, gilt*

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Beweis:

1. Es gilt $A \cup B = A \cup B \setminus A$ und $A \cap B \setminus A = \emptyset$. Daraus folgt $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Da B die disjunkte Vereinigung von $B \setminus A$ und $A \cap B$ ist, gilt $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)$. Zusammengenommen folgt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. Ist A eine Teilmenge von B, so ist B die disjunkte Vereinigung von A und $B \setminus A$. Also gilt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$, da $\mu(B \setminus A) \geq 0$.
3. Diese Aussage folgt mit analogen Argumenten. Die Voraussetzungen garantieren, daß $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ definiert ist.
4. Wir setzen $B_1 := A_1$ und $B_i := A_i \setminus (\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)$ für $i \geq 2$. Es gilt $B_i \subset A_i$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ falls $i \neq j$. Zudem gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Somit folgt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

5. Wir setzen $B_1 := A_1$ und $B_i := A_i \setminus (\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k) = A_i \setminus A_{i-1}$ für $i \geq 2$. Es gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ falls $i \neq j$. Wegen $A_i = \bigcup_{k=1}^{i} B_k$ folgt $\mu(A_i) = \sum_{k=1}^{i} \mu(B_k)$. Daher gilt:

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

6. Wir setzen $B_i := A_1 \setminus A_i$. Dann gilt $B_i \subset B_j$ für $i \leq j$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_1 \setminus A_i = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Wegen $\mu(A_i) < \infty$ folgt daraus:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

Andererseits folgt mit der bereits bewiesenen Stetigkeit von unten:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \lim_{i\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_i)\big) = \mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Zusammengenommen folgt

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

□

Wir führen nun äußere Maße ein. Im Gegensatz zu Maßen verlangen wir, daß ein äußeres Maß auf der gesamten Potenzmenge definierte ist. Dafür ersetzen wir die σ-Additivität durch die wesentlich schwächere Subadditivität.

(9.19) Definition: Ein *äußeres Maß* auf einer Menge X ist eine Abbildung $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. Für $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$,
3. Für $A, B \subset X$ mit $A \subset B$ gilt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Zur kontrollierten Konstruktion von äußeren Maßen benötigen wir den folgenden Begriff.

(9.20) Definition: Sei X eine Menge. Ein Teilmengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ besitzt die *Folgenüberdeckungseigenschaft*, falls gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $\forall A \subset X\ \exists A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$: $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Wir zeigen nun, daß auf jeder Menge ein äußeres Maß konstruiert werden kann und daß die Konstruktion kontrolliert werden kann.

(9.21) Satz: *Sei X eine Menge, besitze $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ die Folgenüberdeckungseigenschaft und sei $\lambda\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Dann ist $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit*

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \mid E_n \in \mathcal{F} \text{ und } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big\}$$

ein äußeres Maß auf X.

Beweis:

1. Es gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$, denn mit $E_n := \emptyset$ gilt $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0$.
2. Seien $A \subset B \subset X$. Sind $E_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, so gilt auch $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Daraus folgt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

3. Seien $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, eine Menge von Teilmengen. Seien $E_{nm} \in \mathcal{F}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{nm}$. Es gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{nm}.$$

Da die rechte Seite der Inklusion eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{F}$ darstellt, folgt:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda(E_{nm})\Big).$$

Dies gilt für alle $E_{nm} \in \mathcal{F}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{nm}$. Daher folgt

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

□

Obwohl die obige Konstruktion eines äußeren Maßes μ^* von einer Funktion $\lambda\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ startet, ist in der Regel die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{F}$ verschieden von λ.

Ein äußeres Maß ist in der Regel nicht additiv. Uns interessieren daher die Menge der Mengen, auf denen eine additive Funktion induziert wird. Dies führt zu den meßbaren Mengen. Allerdings, anders als vielleicht vermutet, ist eine Menge nicht dann meßbar, wenn die Einschränkung des äußeren Maßes auf die Menge additiv ist, sondern wenn auf jeder anderen Menge Additivität bezüglich der gegebenen Menge induziert wird.

(9.22) Definition: Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt μ^*-*meßbar*, wenn für jede Menge $E \subset X$ gilt:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap X \setminus A).$$

(9.23) Bemerkung: Laut Definition eines äußeren Maßes gilt für $A, E \subset X$ ohnehin $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap X \setminus A)$. Ein Menge $A \subset X$ ist also genau dann μ^*-meßbar, wenn für jede Menge $E \subset X$ gilt:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap X \setminus A).$$

Der folgende Satz rechtfertigt die Definition meßbarer Mengen. Er besagt, daß die meßbaren Mengen eine σ-Algebra bilden und daß das äußere Maß eingeschränkt auf diese σ-Algebra ein Maß ist.

(9.24) Satz: *Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge X. Dann ist das System $\mathcal{A}$ aller μ^*-meßbaren Teilmengen von X eine σ-Algebra, und die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}$ ist ein Maß.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{A}$ eine Algebra ist. Anschließend zeigen wir, daß die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}$ ein Inhalt ist. Danach weisen wir die σ-Additivität nach. Abschließend zeigen wir, daß $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und daß μ^* auf $\mathcal{A}$ ein Maß induziert.

Das Mengensystem $\mathcal{A}$ ist eine Algebra:

1. Die Bedingung in Definition 9.22 ist symmetrisch in A und $X \setminus A$. Daher ist A genau dann in $\mathcal{A}$, wenn $X \setminus A$ in $\mathcal{A}$ ist.
2. Für jede Teilmenge $E \subset X$ gilt

   $$\mu^*(E \cap \emptyset) + \mu^*(E \cap X \setminus \emptyset) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = \mu^*(E).$$

   Damit ist die leere Menge in $\mathcal{A}$. Mit dem bereits gezeigten gilt dann auch $X \in \mathcal{A}$.
3. Seien $A, B \in \mathcal{A}$ zwei μ^*-meßbare Mengen. Da A meßbar ist, gilt für jede Teilmenge $E \subset X$:

   $$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap X \setminus A).$$

   Da B meßbar ist, gilt für jede Teilmenge $E \subset X$:

   $$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) &= \mu^*((E \cap A) \cap B) + \mu^*((E \cap A) \cap X \setminus B), \\ \mu^*(E \cap X \setminus A) &= \mu^*((E \cap X \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \cap X \setminus A) \cap X \setminus B). \end{aligned}$$

   Daraus folgt:

   $$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap X \setminus B) \\ &\qquad + \mu^*(E \cap X \setminus A \cap B) + \mu^*(E \cap X \setminus A \cap X \setminus B) \\ &\geq \mu^*(E \cap A \cap B) \\ &\qquad + \mu^*(E \cap A \cap X \setminus B \cup E \cap X \setminus A \cap B \cup E \cap X \setminus A \cap X \setminus B) \\ &\geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap X \setminus (A \cap B)) \end{aligned}$$

   Mit Bemerkung 9.23 gilt daher $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4. Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Mit dem eben gezeigten gilt:

   $$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap X \setminus B \in \mathcal{A}, \\ A \cup B &= X \setminus (X \setminus A \cap X \setminus B) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine Algebra.

Die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}$ ist ein Inhalt:

1. Nach Definition gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. Seien $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt. Es gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$ und

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap X \setminus A),\\ &= \mu^*(A) + \mu^*(B).\end{aligned}$$

   Mit vollständiger Induktion folgt daraus, daß für disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n).$$

Wir weisen nun die σ-Additivität nach: Seien $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte Mengen. Da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die endliche Vereinigung $\bigcup_{i=1}^n A_i$ in $\mathcal{A}$. Durch vollständige Induktion zeigen wir, daß für $n \in \mathbb{N}$ und $E \subset X$ gilt:

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i)$$

Wegen $A_1 \in \mathcal{A}$ ist der Induktionsanfang $n = 1$ klar. Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ gilt, da $A_{n+1} \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i) &= \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i \cap A_{n+1}) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i \cap X \setminus A_{n+1})\\ &= \mu^*(E \cap A_{n+1}) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} X \setminus A_i)\end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap A_{n+1}) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} X \setminus A_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} X \setminus A_i).\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis erfolgreich geführt.

Aufgrund der Monotonie gilt

$$\mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i) \geq \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i).$$

und daher

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i).\end{aligned}$$

Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i) \\ &\geq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i) \\ &= \mu^*(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu^*(E \cap X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i).\end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 9.23 ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ somit in $\mathcal{A}$ und die obige Ungleichung in Wirklichkeit eine Gleichung. Einsetzen von $E := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ liefert

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Seien $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen $B_1 := A_1$ und

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i = A_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} X \setminus A_i \in \mathcal{A} \text{ für } n \geq 2.$$

Da die Mengen B_i paarweise disjunkt sind, gilt mit dem eben gezeigten

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$$

und

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}$ ein Maß. □

Satz 9.24 zusammen mit Satz 9.21 liefern eine Möglichkeit, Maße zu konstruieren. Die Frage ist jedoch, ob das Maß und die Menge der meßbaren Mengen kontrolliert werden können. Genauer, können in Satz 9.21 das Mengensystem $\mathcal{F}$ und die Funktion λ so vorgegeben werden, daß auf einer vorgegebenen Menge von Teilmengen, etwa allen Quadern, das Maß vorgeschriebene Werte annimmt. Wir werden dieser Frage in Kapitel 10 nachgehen.

Zuvor wenden wir uns noch den Nullmengen zu.

(9.25) Definition: Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und $B \subset A$ gilt $B \in \mathcal{A}$. In diesem Fall folgt wegen der Monotonie auch $\mu(B) = 0$.

Mengen $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißen *Nullmengen*.

Der in Satz 9.21 konstruierte Maßraum ist vollständig.

(9.26) Satz: *Sei X eine Menge, sei $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß, sei $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der μ^*-meßbaren Funktionen und $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$. Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig.*

Beweis: Sei A eine μ^*-meßbare Menge mit $\mu^*(A) = \mu(A) = 0$. Sei $B \subset A$. Wegen der Monotonie gilt $\mu^*(B) = 0$. Für $E \in X$ gilt daher

$$\mu^*(E) = \mu^*(B) + \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap X \setminus B).$$

Dies zeigt $B \in \mathcal{A}$. □

Beliebige Maßräume können zu vollständigen Maßräumen ergänzt werden.

(9.27) Satz: *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei*

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \subset X \mid \exists E, F \in \mathcal{A}\colon E \subset A \subset F \text{ und } \mu(F \setminus E) = 0\}$$

Dann ist $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra und mit $\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ wo

$$\overline{\mu}(A) := \mu(E) = \mu(F) \text{ falls } E \subset A \subset F \text{ und } E, F \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(F \setminus E) = 0$$

ist $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ vollständig. Der Maßraum $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ heißt die Vervollständigung *von $(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist. Wegen $X \in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ gilt $X \in \overline{\mathcal{A}}$.

Sei $A \in \overline{\mathcal{A}}$. Nach Konstruktion existieren $E, F \in \mathcal{A}$ mit $E \subset A \subset F$ und $\mu(F \setminus E) = 0$. Daraus folgt $X \setminus F \subset X \setminus A \subset X \setminus E$ und $\mu(X \setminus E \setminus (X \setminus F)) = \mu(F \setminus E) = 0$. Also gilt $X \setminus A \in \overline{\mathcal{A}}$.

Sei $A_n \in \overline{\mathcal{A}}$, $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Mengen $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ mit $E_n \subset A_n \subset F_n$ und $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$. Es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ und, da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{A}$. Weiterhin gilt

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus E_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \setminus E_n) = 0.$$

Daraus folgt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \overline{\mathcal{A}}$. Dies zeigt, daß $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist.

Wir weisen nun nach, daß $\overline{\mu}$ wohldefiniert ist. Seien $E_1, E_2, F_1, F_2 \in \mathcal{A}$ mit $E_i \subset A \subset F_i$ und $\mu(F_i \setminus E_i) = 0$ für $i \in \{1, 2\}$. Für $i \in \{1, 2\}$ gilt $E_i \subset A \subset F_1 \cap F_2$ und $\mu((F_1 \cap F_2) \setminus E_i) \leq \mu(F_i \setminus E_i) = 0$, also $\mu((F_1 \cap F_2) \setminus E_i) = 0$. Daraus folgt $\mu(F_1 \cap F_2) = \mu(E_1) = \mu(E_2) = \mu(F_1) = \mu(F_2)$. Also ist $\overline{\mu}(A) = \mu(E_1) = \mu(E_2)$ wohldefiniert.

Als nächstes zeigen wir die σ-Additivität von $\overline{\mu}$. Seien $A_n \in \overline{\mathcal{A}}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Es gibt $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ mit $E_n \subset A_n \subset F_n$ und $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$. Die Mengen E_n sind ebenfalls paarweise disjunkt. Also gilt:

$$\overline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n).$$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ vollständig ist. Sei $A \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $\overline{\mu}(A) = 0$ und $B \subset A$. Es gibt $E, F \in \mathcal{A}$ mit $E \subset A \subset F$ und $\overline{\mu}(A) = \mu(E) = \mu(F) = 0$. Es folgt $\emptyset \subset B \subset F$ und $\mu(F \setminus \emptyset) = 0$. Dies bedeutet $B \in \overline{\mathcal{A}}$. □

KAPITEL 10

Lebesgue-Maß

In diesem Kapitel wird das Lebesgue-Maß vorgestellt und seine wichtigsten Eigenschaften gezeigt. Das Lebesgue-Maß ist ein translationsinvariantes Maß, das auf Quadern den gewohnten Wert annimmt und zumindest auf der ganzen Borelschen σ-Algebra definiert ist. Das Lebesgue-Maß ist sogar unter allen affinen Kongruenzen des $\mathbb{R}^k$ invariant, also so homogen wie möglich.

1. Konstruktion

In diesem Abschnitt wird das Lebesgue-Maß konstruiert. Außerdem wird gezeigt, daß alle offenen Mengen Lebesgue-meßbar sind und daß Quader das gewohnte Maß haben.

(10.1) Notation: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{F}_k := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^k \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{C}_k := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i \leq b_i\}$$

die Menge der offenen bzw. abgeschlossenen Quader in $\mathbb{R}^n$. Für

$$O = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k) \in \mathcal{F}_k,$$
$$K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \in \mathcal{C}_k$$

sei

$$\lambda_k(O) := \lambda_k(K) := (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_k - a_k).$$

zudem gelte $\lambda_k(\emptyset) := 0$. Dies definiert eine Funktion $\lambda_k \colon \mathcal{F}_k \cup \mathcal{C}_k \to [0, \infty)$.

Für $A \subset \mathbb{R}^k$ gilt $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)^k$. Daraus erhalten wir folgendes Resultat.

(10.2) Lemma: *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat die Menge $\mathcal{F}_k$ der offenen Quader die Folgenüberdeckungseigenschaft.*

Wir haben nun die Situation aus Satz 9.21, nämlich eine Funktion $\lambda_k \colon \mathcal{F}_k \to [0, \infty)$, die auf einem Mengensystem mit der Folgenüberdeckungseigenschaft definiert ist.

(10.3) Definition: Das durch $\lambda_k : \mathcal{F}_k \to [0, \infty)$ gemäß Satz 9.21 induzierte äußere Maß λ_k^* auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ heißt das *k-dimensionale äußere Lebesgue-Maß*. Die λ_k^*-meßbaren Mengen heißen *Lebesgue-meßbar* und das zugehörige Maß das *Lebesgue-Maß*.

Die Konstruktion von λ_k^* aus λ_k liefert nicht automatisch eine Übereinstimmung von λ_k^* und λ_k auf $\mathcal{F}_k$. Das nächste Resultat deutet an, daß dies in der vorliegenden Situation dennoch gilt. Der endgültige Beweis folgt in Satz 10.6

(10.4) Satz: *Für $K \in \mathcal{C}_k$ gilt $\lambda_k^*(K) = \lambda_k(K)$.*

Beweis: Sei $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \in \mathcal{C}_k$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \left(a_1 - \tfrac{1}{n}, b_1 + \tfrac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(a_k - \tfrac{1}{n}, b_k + \tfrac{1}{n}\right)$$

und somit, nach Definition von λ_k^*:

$$\lambda_k^*([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]) \leq \left(b_1 - a_1 + \tfrac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(b_k - a_k + \tfrac{2}{n}\right).$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\lambda_k^*(K) \leq (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_k - a_k) = \lambda_k(K).$$

Wir wollen nun noch die umgekehrte Ungleichung zeigen. Seien $O_i \in \mathcal{F}_k$, $i \in \mathbb{N}$, mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$. Dies ist eine offene Überdeckung des kompakten Quaders K. Daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung, also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$. Die endlich vielen offenen Quader O_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, zerlegen den Quader K in endlich viele disjunkte Quader. Daher gibt es $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{C}_k$ mit:

1. $K = \bigcup_{j=1}^{m} K_j$.
2. $K_i \cap K_j \subset \operatorname{Rd} K_i \cap \operatorname{Rd} K_j$ für $i \neq j$.
3. $\forall j \in \{1, \ldots, m\}\ \exists i = i(j) \in \{1, \ldots, n\} : \overset{\circ}{K}_j \in O_i$.

Da die einzelnen Quader K_j sich höchstens in ihren Rändern schneiden, gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\lambda_k(O_i) \geq \sum_{j\,:\,i(j)=i} \lambda_k(K_j).$$

Daraus folgt:

$$\lambda_k(K) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_k(K_j) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_k(O_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k(O_i).$$

Dies gilt für jede Überdeckung von K mit offenen Quadern. Also folgt

$$\lambda_k(K) \leq \lambda_k^*(K).$$

Damit ist gezeigt, daß für $K \in \mathcal{C}_k$ die Werte von λ_k und λ_k^* übereinstimmen. □

Wir sind unserem Ziel schon sehr nahe. Wir haben ein äußeres Maß, das auf abgeschlossenen Quadern den gewünschten Wert annimmt. Als nächstes muß untersucht werden, ob die Menge der Lebesgue-meßbaren Mengen groß genug ist. Wir wollen, daß zumindest alle offenen Quader Lebesgue-meßbar sind. Da diese Quader die Topologie erzeugen, bedeutet dies, daß dann auch die Borelsche σ-Algebra aus Lebesgue-meßbaren Mengen besteht.

(10.5) Satz: *Jede Borel-Menge des $\mathbb{R}^k$ ist Lebesgue-meßbar.*

Beweis: Für $a \in \mathbb{R}$ und $i \in \{1, \dots, k\}$ setzen wir:

$$H_i^+(a) := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq a\},$$
$$H_i^-(a) := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \leq a\}.$$

Dies sind abgeschlossene Halbräume von $\mathbb{R}^k$. Wir zeigen, daß die offenen Halbräume $\overset{\circ}{H}{}_i^+(a)$ und $\overset{\circ}{H}{}_i^-(a)$ Lebesgue-meßbar sind. Es gilt $\overset{\circ}{H}{}_i^-(a) = \mathbb{R}^k \setminus H_i^+(a)$. Also ist $\overset{\circ}{H}{}_i^-(a)$ genau dann Lebesgue-meßbar, wenn für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^k$ gilt:

$$\lambda_k^*(E) \geq \lambda_k^*(E \cap H_i^+(a)) + \lambda_k^*(E \cap \overset{\circ}{H}{}_i^-(a)).$$

Für E mit $\lambda_k^*(E) = \infty$ ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Wir setzen daher im folgenden $\lambda_k^*(E) < \infty$ voraus. Nach Konstruktion von λ_k^* gibt es für jedes $\delta > 0$ Mengen $O_n \in \mathcal{F}_k$, $n \in \mathbb{N}$, mit $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty O_n$ und $\lambda_k^*(E) \leq \sum_{n=1}^\infty \lambda_k(O_n) \leq \lambda_k^*(E) + \delta$. Wir können annehmen, daß alle O_n verschieden von $\emptyset$ sind. Die offenen Quader haben also die Gestalt

$$O_n = (a_{1n}, b_{1n}) \times \cdots \times (a_{kn}, b_{kn}) \qquad \text{mit } a_{jn} < b_{jn}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_k(O_n) \frac{\varepsilon_n}{b_{in} - a_{in}} < \varepsilon.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$V_n := \emptyset, \qquad W_n := O_n \qquad \text{falls } a \leq a_{in}$$
$$V_n := O_n, \qquad W_n := \emptyset \qquad \text{falls } a \geq b_{in}$$

und, falls $a_{in} < a < b_{in}$:

$$V_n := (a_{1n}, b_{1n}) \times \cdots \times (a_{in}, a) \times \cdots \times (a_{kn}, b_{kn}) = O_n \cap \overset{\circ}{H}{}_i^-(a),$$
$$W_n := (a_{1n}, b_{1n}) \times \cdots \times (a - \varepsilon_n, b_{in}) \times \cdots \times (a_{kn}, b_{kn}) \supset O_n \cap H_i^+(a).$$

Nach Konstruktion gilt

$$E \cap \overset{\circ}{H}_i^-(a) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$
$$E \cap H_i^+(a) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\lambda_k(V_n) + \lambda_k(W_n) &\leq (b_{1n} - a_{1n}) \cdots (b_{in} - a_{in} + \varepsilon_n) \cdots (b_{kn} - a_{kn}) \\ &= \lambda_k(O_n) + \lambda_k(O_n) \cdot \frac{\varepsilon_n}{b_{in} - a_{in}}\end{aligned}$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_k(V_n) + \lambda_k(W_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(O_n) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt:

$$\lambda_k^*(E \cap \overset{\circ}{H}_i^-(a)) + \lambda_k^*(E \cap H_i^+(a)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(O_n) \leq \lambda_k^*(E) + \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt:

$$\lambda_k^*(E \cap \overset{\circ}{H}_i^-(a)) + \lambda_k^*(E \cap H_i^+(a)) \leq \lambda_k^*(E).$$

Damit ist $\overset{\circ}{H}_i^-(a)$ Lebesgue-meßbar. Mit analogen Argumenten ist einzusehen, daß auch $\overset{\circ}{H}_i^+(a)$ Lebesgue-meßbar ist. Wegen

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k) = \overset{\circ}{H}_1^+(a_1) \cap \overset{\circ}{H}_1^-(b_1) \cap \cdots \cap \overset{\circ}{H}_k^+(a_k) \cap \overset{\circ}{H}_k^-(b_k)$$

sind alle offenen Quader Lebesgue-meßbar. Da die offenen Quader mit rationalen Eckpunkten die Topologie erzeugen, sind alle offenen Mengen, also auch alle Borel-Mengen Lebesgue-meßbar. □

In Satz 10.4 wurde gezeigt, daß jeder abgeschlossene Quader den gewünschten Inhalt hat. Für offene Quader gilt die gleiche Aussage.

(10.6) Satz: *Für jeden offenen Quader* $U = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k) \in \mathcal{F}_k$ *gilt* $\lambda_k^*(U) = \lambda_k(U) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k)$.

Beweis: Sei $K := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \in \mathcal{C}_k$. Da K eine Borel-Menge ist, ist K mit Satz 10.5 auch Lebesgue-meßbar. Mit Satz 10.4 gilt $\lambda_k^*(K) = \lambda_k(K) =$

$(b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k)$. Wir setzen

$$K_i^+ := [a_1, b_1] \times \cdots \times [b_i, b_i] \times \cdots \times [a_k, b_k],$$
$$K_i^- := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, a_i] \times \cdots \times [a_k, b_k].$$

Dann ist K die disjunkte Vereinigung von U, $\bigcup_{i=1}^k K_i^+$ und $\bigcup_{i=1}^k K_i^-$. Mit Satz 10.4 gilt $\lambda_k^*(K_i^+) = \lambda_k^*(K_i^-) = 0$, also $\lambda_k^*(U) = \lambda_k^*(K) = \lambda_k(U)$. □

2. Lebesgue-Maß und Vervollständigung

Wir wissen nun, daß alle Borel-Mengen Lebesgue-meßbar sind. Die nächste Frage ist, wie viel größer als die Borelsche σ-Algebra die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Funktionen ist und ob diese σ-Algebra direkt aus der Borelschen σ-Algebra konstruiert werden kann.

(10.7) Definition: Die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf die Borelsche σ-Algebra heißt *Borel-Lebesgue-Maß*.

Das Lebesgue- bzw. das Borel-Lebesgue-Maß wird mit λ bzw λ_k bezeichnet.

Wir wollen zeigen, daß das Lebesgue-Maß die Vervollständigung des Borel-Lebesgue-Maßes ist. Für den Beweis benötigen wir den folgenden technischen Begriff.

(10.8) Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ die Borelsche σ-Algebra und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{A}$. Ein Maß $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *regulär*, falls:

1. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ gilt $\mu(K) < \infty$.
2. Für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ ist offen}\}$.
   (Regularität von außen)
3. Für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ ist kompakt}\}$.
   (Regularität von innen)

(10.9) Satz: *Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^k$ ist regulär.*

Beweis:

1. Sei $K \subset \mathbb{R}^k$ kompakt. Wegen Satz 7.14 ist K beschränkt. Somit gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $K \subset [-r, r]^k$. Also gilt $\lambda(K) \leq \lambda([-r, r]^k) = (2r)^k < \infty$.
2. Sei A eine Lebesgue-meßbare Menge. Da λ monoton ist, gilt

   $$\lambda(A) \leq \inf\{\lambda(U) \mid A \subset U, U \text{ ist offen}\}.$$

   Falls $\lambda(A) = \infty$, ist damit die Regularität von außen gezeigt. Gilt $\lambda(A) < \infty$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ offene Quader $O_n \in \mathcal{F}_k$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A \subset$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(O_n) < \lambda(A) + \varepsilon$. Für $O := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ gilt daher $\lambda(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(O_n) < \lambda(A) + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) \mid A \subset U, U \text{ ist offen}\}$.

3. Sei zunächst A eine beschränkte, Lebesgue-meßbare Menge. Sei $B \subset \mathbb{R}^k$ eine kompakte Menge, die A umfaßt. Mit dem bereits gezeigten gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O mit $B \setminus A \subset O$ und $\lambda(O) < \lambda(B \setminus A) + \varepsilon$. Wir setzen $K := B \setminus O = B \cap (\mathbb{R}^k \setminus O)$. Die Menge K ist kompakt und liegt in A. Wegen $B \subset K \cup O$ und $\lambda(B) < \infty$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda(B) &\leq \lambda(K) + \lambda(O) \\ &\leq \lambda(K) + \lambda(B \setminus A) + \varepsilon \\ &= \lambda(K) + \lambda(B) - \lambda(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt $\lambda(A) - \varepsilon \leq \lambda(K)$. Also gilt

$$\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(K) \mid K \subset A, K \text{ ist kompakt}\}.$$

Aus der Monotonie folgt unmittelbar die umgekehrte Ungleichung.

Sei nun A eine unbeschränkte, Lebesgue-meßbare Menge. Für $i \in \mathbb{N}$ setzen wir $A_i := A \cap \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq i\}$. Es gilt $A_i \uparrow$, alle A_i sind beschränkt und $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Mit der in Satz 9.18 gezeigten Stetigkeit von unten folgt $\lambda(A) = \lim_{i \to \infty} \lambda(A_i)$. Für $b < \lambda(A)$ gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\lambda(A_{i_0}) > b$. Also gibt es mit dem bereits gezeigten eine kompakte Menge K mit $K \subset A_{i_0} \subset A$ und $\lambda(K) > b$. Daraus folgt wie gewünscht

$$\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(K) \mid K \subset A, K \text{ ist kompakt}\}.$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt wieder direkt aus der Monotonie von λ.

□

Die Regularität des Lebesgue-Maß kann nun eingesetzt werden, um zu zeigen, daß jede Lebesgue-meßbar Menge zwischen zwei Borel-Mengen mit gleichem Maß liegt.

(10.10) Satz: *Ist $A \subset \mathbb{R}^k$ eine Lebesgue-meßbare Menge, so gibt es Borel-Mengen $E, F \subset \mathbb{R}^k$ mit $E \subset A \subset F$ und $\lambda(E) = \lambda(A) = \lambda(F)$.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ Lebesgue-meßbar. Mit dem vorangegangenen Resultat gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ offene Mengen O_n und kompakte Mengen K_n mit $K_n \subset A \subset O_n \subset X$ und $\lambda(K_n) + 1/n \geq \lambda(A) \geq \lambda(O_n) - 1/n$. Wir setzen $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ und

$F := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Die Mengen E und F sind Borel-Mengen und es gilt $E \subset A \subset F$. Zudem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(E) \leq \lambda(A) \leq \lambda(E) + \frac{1}{n},$$
$$\lambda(F) - \frac{1}{n} \leq \lambda(A) \leq \lambda(F).$$

Dies zeigt $\lambda(E) = \lambda(A) = \lambda(F)$. □

Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ die Borelsche σ-Algebra des $\mathbb{R}^k$. Mit dem eben gezeigten folgt fast zwangsläufig das folgende Ergebnis.

(10.11) Satz: *Das Lebesgue-Maß ist die Vervollständigung des Borel-Lebesgue-Maßes.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ eine Lebesgue-meßbare Menge. Mit dem eben gezeigten Resultat gibt es Borel-Mengen $E, F \subset \mathbb{R}^k$ mit $E \subset A \subset F$ und $\lambda(E) = \lambda(A) = \lambda(F)$. Gilt $\lambda(A) < \infty$, so folgt $\lambda(F) = \lambda(E) + \lambda(F \setminus E)$, also $\lambda(F \setminus E) = 0$. Damit ist A in der Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Gilt $\lambda(A) = \infty$, so sei $A_i := \{x \in A \mid |x| \leq i\}$ für $i \in \mathbb{N}$. Die Mengen A_i sind Lebesgue-meßbar und beschränkt. Insbesondere gilt $\lambda(A_i) < \infty$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Mit dem eben gezeigten gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ Borel-Mengen E_i, F_i mit $E_i \subset A_i \subset F_i$ und $\lambda(F_i \setminus E_i) = 0$. Für $E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ und $F := \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ gilt $E \subset A \subset F$ sowie $F \setminus E = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \setminus E_i)$. Daraus folgt $\lambda(F \setminus E) \leq \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_i \setminus E_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(F_i \setminus E_i) = 0$. Also ist A in der Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. □

3. Translationsinvarianz

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß es ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ gibt, das Quadern den gewohnten Inhalt zuweist. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß daraus die Translationsinvarianz folgt. Damit sind die Forderungen, die in Kapitel 8 an eine Volumenfunktion gestellt wurden, weitgehend erfüllt.

Zunächst ein technisches Lemma, das auch im nächsten Abschnitt wertvolle Dienste leisten wird.

(10.12) Lemma: *Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine Bijektion für die es eine positive reelle Zahl $c \in (0, \infty)$ gibt mit $\lambda_k^*(\varphi(U)) = c \cdot \lambda_k(U)$ und $\lambda_k^*(\varphi^{-1}(U)) = 1/c \cdot \lambda_k(U)$ für alle offenen Quader $U \subset \mathbb{R}^k$. Dann gilt $\lambda_k^*(\varphi(A)) = c \cdot \lambda_k^*(A)$ und $\lambda_k^*(\varphi^{-1}(A)) = 1/c \cdot \lambda_k^*(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}^k$ und $A \subset \mathbb{R}^k$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn $\varphi(A)$ Lebesgue-meßbar ist.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ und seine $U_n \in \mathcal{F}_k$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Es gilt $\varphi(A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(U_n)$, also

$$\lambda_k^*(\varphi(A)) \leq \lambda_k^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(U_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k^*(\varphi(U_n)) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(U_n).$$

Da dies für alle Überdeckungen von A mit offenen Quadern gilt, folgt $\lambda_k^*(\varphi(A)) \leq c \cdot \lambda_k^*(A)$.

Mit analogen Argumenten ist $\lambda_k^*(\varphi^{-1}(A)) \leq 1/c \cdot \lambda_k^*(A)$ einzusehen. Dies gilt für alle $A \subset \mathbb{R}^k$, insbesondere für $\varphi(A)$. Also folgt

$$\lambda_k^*(A) = \lambda_k^*(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \leq \frac{1}{c} \cdot \lambda_k^*(\varphi(A)).$$

Dies zeigt $\lambda_k^*(\varphi(A)) = c \cdot \lambda_k^*(A)$. Entsprechend ist $\lambda_k^*(\varphi^{-1}(A)) = 1/c \cdot \lambda_k^*(A)$ einzusehen.

Sei A eine Lebesgue-meßbare Menge und $E \subset \mathbb{R}^k$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda_k^*(E \cap \varphi(A)) &= \lambda_k^*\big(\varphi(\varphi^{-1}(E)) \cap \varphi(A)\big) \\ &= \lambda_k^*\big(\varphi(\varphi^{-1}(E) \cap A)\big) \\ &= c \cdot \lambda_k^*\big(\varphi^{-1}(E) \cap A\big). \end{aligned}$$

Entsprechend folgt $\lambda_k^*(E \cap \mathbb{R}^k \setminus \varphi(A)) = c \cdot \lambda_k^*(\varphi^{-1}(E) \cap \mathbb{R}^k \setminus A)$. Da A Lebesgue-meßbar ist, zeigt dies:

$$\begin{aligned} \lambda_k^*(E \cap \varphi(A)) + \lambda_k^*(E \cap \mathbb{R}^k \setminus \varphi(A)) & \\ &= c \cdot \lambda_k^*(\varphi^{-1}(E) \cap A) + c \cdot \lambda_k^*(\varphi^{-1}(E) \cap \mathbb{R}^k \setminus A) \\ &= c \cdot \lambda_k^*(\varphi^{-1}(E)) \\ &= \lambda_k^*(E). \end{aligned}$$

Damit ist $\varphi(A)$ meßbar. Die Umkehrung folgt mit den gleichen Argumenten. □

Für jedes $z \in \mathbb{R}^k$ erfüllt die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k : x \mapsto x+z$ die Voraussetzungen aus Lemma 10.12 mit $c = 1$. Also folgt unmittelbar die Translationsinvarianz.

(10.13) Satz: *Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ und $z \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt $\lambda_k^*(A + z) = \lambda_k^*(A)$ und $A + z$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn A Lebesgue-meßbar ist.*

(10.14) Bemerkung: Das vorangegangene Resultat besagt, daß das Lebesgue-Maß und das äußere Lebesgue-Maß translationsinvariant sind.

Es kann sogar gezeigt werden, daß es für jedes translationsinvariante Maß $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ ein $c \in [0, \infty)$ gibt mit $\mu = c \cdot \lambda$. Dabei gilt $c = \mu([0,1]^k)$.

Wir haben in Satz 8.3 gezeigt, daß es kein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ gibt. Damit folgt aus Satz 10.13 unmittelbar folgendes Resultat.

(10.15) Korollar: *Es gibt Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, die nicht Lebesgue-meßbar sind.*

4. Lineare Abbildungen

Wir wollen nun untersuchen, wie sich das Lebesgue-Maß unter linearen Abbildungen verhält. Wichtigstes Hilfsmittel ist wieder Lemma 10.12. Wir untersuchen zunächst besonders einfache lineare Abbildungen. Da diese jedoch die lineare Gruppe erzeugen, können wir damit Aussagen über beliebige lineare Abbildungen ableiten.

(10.16) Lemma: *Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\varphi_{ci} \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die lineare Abbildung mit $\varphi_{ci}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, c \cdot x_i, \dots, x_k)$. Dann gilt für alle $A \subset \mathbb{R}^k$:*

$$\lambda_k^*(\varphi_{ci}(A)) = |c| \cdot \lambda_k^*(A) = |\det \varphi_{ci}| \cdot \lambda_k^*(A).$$

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^k$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn $\varphi_{ci}(A)$ Lebesgue-meßbar ist.

Beweis: Die Abbildung φ_{ci} ist eine Bijektion und $\det \varphi_{ci} = c$. Sei nun $U := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k) \in \mathcal{F}_k$ ein offener Quader. Es gilt

$$\varphi_{ci}(U) = \begin{cases} (a_1, b_1) \times \cdots \times (ca_i, cb_i) \times \cdots \times (a_k, b_k) & \text{falls } c > 0, \\ (a_1, b_1) \times \cdots \times (cb_i, ca_i) \times \cdots \times (a_k, b_k) & \text{falls } c < 0. \end{cases}$$

Daraus folgt $\lambda_k^*(\varphi_{ci}(U)) = \lambda_k(\varphi_{ci}(U)) = |c| \cdot \lambda_k(U)$. Mit Lemma 10.12 folgen die Aussagen. □

Indem wir Produkte von Abbildungen aus Lemma 10.16 bilden, erhalten wir sofort das folgende Resultat.

(10.17) Korollar: *Für $c_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, sei $\psi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die lineare Abbildung mit $\psi(x_1, \dots, x_k) = (c_1 \cdot x_1, \dots, c_k \cdot x_k)$. Dann gilt für alle $A \subset \mathbb{R}^k$:*

$$\lambda_k^*(\psi(A)) = |c_1 \cdots c_k| \cdot \lambda_k^*(A) = |\det \psi| \cdot \lambda_k^*(A).$$

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^k$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn $\psi(A)$ Lebesgue-meßbar ist.

Ebenfalls aus Lemma 10.12 folgt eine analoge Aussage für Permutationen.

(10.18) Lemma: *Sei $\sigma\colon \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ eine Permutation und $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die lineare Abbildung mit $\varphi(x_1,\dots,x_k) = (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)})$. Dann gilt für alle $A \subset \mathbb{R}^k$*

$$\lambda_k^*(\varphi(A)) = \lambda_k^*(A) = |\det \varphi| \cdot \lambda_k^*(A),$$

und $A \subset \mathbb{R}^k$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn $\varphi(A)$ Lebesgue-meßbar ist.

Beweis: Für alle offenen Quader $O \in \mathcal{F}_k$ gilt offensichtlich $\lambda_k^*(\varphi(O)) = \lambda_k^*(O)$. Außerdem gilt $|\det \varphi| = 1$. Also folgt die Behauptung aus Lemma 10.12. □

Bevor wir ein analoges Resultat für Scherungen zeigen können, müssen wir nachweisen, daß gewisse Hyperebenen Nullmengen sind. Es wird sich später herausstellen, daß sogar alle Hyperebenen Nullmengen sind.

(10.19) Lemma: *Sei $c \in (0,\infty)$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Sei*

$$H_c := \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 = c \cdot x_2\}.$$

Dann gilt $\lambda_k^*(H_c) = 0$, insbesondere ist H_c Lebesgue-meßbar.

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ sei $H_{cm} := \{(x_1,\dots,x_k) \in H_c \mid \forall i \in \{2,\dots,k\}\colon |x_i| < m\}$. Für $n, j \in \mathbb{N}$ sei

$$H_{cmnj} := (c \cdot m \cdot \frac{j-1}{n}, c \cdot m \cdot \frac{j+1}{n}) \times (m \cdot \frac{j-1}{n}, m \cdot \frac{j+1}{n}) \times (-m,m)^{k-2}.$$

Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda_k(H_{cmnj}) = c \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (2m)^k$. Zudem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$H_{cm} \subset \bigcup_{j=-n}^{n} H_{cmnj}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_k^*(H_{cm}) \leq c(2m)^k \cdot \frac{2n+1}{n^2}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$ induziert dies $\lambda_k^*(H_{cm}) = 0$. Aus $H_c = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_{cm}$ folgt nun $\lambda_k^*(H_c) = 0$. □

Wir berechnen nun das Maß diagonal halbierter Quader.

(10.20) Lemma: *Sei $c \in (0,\infty)$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Seien*

$$D_c^+ := \{(x_1,\dots,x_k) \in (0,c) \times (0,1)^{k-1} \mid x_1 < cx_2\},$$
$$D_c^- := \{(x_1,\dots,x_k) \in (0,c) \times (0,1)^{k-1} \mid x_1 > cx_2\},$$
$$D_c^0 := \{(x_1,\dots,x_k) \in (0,c) \times (0,1)^{k-1} \mid x_1 = cx_2\} \subset H_c.$$

Dann gilt $\lambda_k^*(D_c^+) = \lambda_k^*(D_c^-) = \frac{c}{2}$.

Beweis: Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ definiert durch $\varphi(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, -x_2, x_3, \dots, x_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(D_c^+) &= \{(-x_1, -x_2, x_3, \dots, x_k) \mid 0 < x_1 < c,\ 0 < x_i < 1 \text{ für } i \in \{2, \dots, k\},\\ &\qquad\qquad x_1 < cx_2\}\\ &= \{(y_1, y_2, \dots, y_k) \mid -c < y_1 < 0,\ -1 < y_2 < 0,\\ &\qquad\qquad 0 < y_i < 1 \text{ für } i \in \{3, \dots, k\},\ y_1 > cy_2\}.\end{aligned}$$

Also folgt $\varphi(D_c^+) + (c, 1, 0, \dots, 0) = D_c^-$. Mit Korollar 10.17 und Satz 10.13 gilt $\lambda_k^*(D_c^+) = \lambda_k^*(D_c^-)$. Mit Lemma 10.19 gilt $\lambda_k(D_c^0) = 0$. Da $(0, c) \times (0, 1)^{k-1}$ die disjunkte Vereinigung von D_c^+, D_c^- und D_c^0 ist, folgt

$$\lambda_k^*(D_c^+) = \lambda_k^*(D_c^-) = \frac{1}{2}\lambda_k((0, c) \times (0, 1)^{k-1}) = \frac{c}{2}.$$

□

Wir benutzen nun diese Resultat, um zu zeigen, daß das Bild des Einheitswürfels unter einer Scherung das gewohnte Maß hat.

(10.21) Lemma: *Sei* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \geq 2$. *Sei* $\varphi_c\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *definiert durch* $\varphi_c(x_1, \dots, x_k) = (x_1 + cx_2, x_2, \dots, x_k)$. *Dann gilt*

$$\lambda_k^*(\varphi_c((0, 1)^k)) = 1 = \lambda_k((0, 1)^k) = |\det \varphi_c| \cdot \lambda_k((0, 1)^k).$$

Beweis: Wir nehmen zunächst $c > 0$ an und betrachten die Translation

$$\tau\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k : (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1 + 1, x_2, \dots, x_k).$$

Mit D_c^+ und D_c^- wie in Lemma 10.20 ist $(0, 1 + c) \times (0, 1)^{k-1}$ die disjunkte Vereinigung von D_c^+, $\tau(D_c^-)$, $\varphi_c((0, 1)^k)$ und einer Menge N mit $\lambda_k^*(N) = 0$. Also folgt $\lambda_k^*(\varphi_c((0, 1)^k)) = c + 1 - c/2 - c/2 = 1$.

Gilt $c < 0$, so sei $\psi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit $\psi(x_1, \dots, x_k) = (1 - x_1, x_2, \dots, x_k)$. Dann folgt $\psi(\varphi_c((0, 1)^k)) = \varphi_{-c}((0, 1)^k)$, also, mit Satz 10.13 und Lemma 10.16 $\lambda_k^*(\varphi_c((0, 1)^k)) = \lambda_k^*(\psi(\varphi_c((0, 1)^k))) = \lambda_k^*(\varphi_{-c}((0, 1)^k)) = 1$. □

Wir können nun ein zu Lemma 10.21 analoges Resultat für Scherungen beweisen.

(10.22) Lemma: *Seien* c, k, φ_c *wie in Lemma 10.21. Dann gilt* $\lambda_k^*(\varphi_c(A)) = \lambda_k^*(A) = |\det \varphi_c| \cdot \lambda_k^*(A)$ *für alle* $A \subset \mathbb{R}^k$. *Zudem ist* A *genau dann Lebesgue-meßbar, wenn* $\varphi_c(A)$ *Lebesgue-meßbar ist.*

Beweis: Es gilt $\varphi_c^{-1} = \varphi_{-c}$, also muß wegen Lemma 10.12 nur $\lambda_k^*(\varphi_c(U)) = \lambda_k^*(U)$ für jeden offenen Quader $U \in \mathcal{F}_k$ gezeigt werden.

Sei $U = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k) \in \mathcal{F}_k$ und seien $\psi, \tau \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, die durch

$$\begin{aligned}\psi(x_1, \ldots, x_k) &= ((b_1 - a_1) \cdot x_1, \ldots, (b_k - a_k) \cdot x_k)\\ \tau(x_1, \ldots, x_k) &= (x_1 + a_1, \ldots, x_k + a_k)\end{aligned}$$

definierten Abbildungen.

Es gilt $U = \tau(\psi((0,1)^k))$ und $\det \psi = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_k - a_k) = \lambda_k(U)$.

Wir untersuchen nun, was bei Konjugation von τ mit φ_c und bei Konjugation von φ_c mit ψ passiert. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_c(\tau(x_1, \ldots, x_k)) &= (x_1 + a_1 + c(x_2 + a_2), x_2 + a_2, \ldots, x_k + a_k)\\ &= (x_1 + c \cdot x_2 + a_1 + c \cdot a_2), x_2 + a_2, \ldots, x_k + a_k)\\ &= \tau'(\varphi_c(x_1, \ldots, x_k)),\end{aligned}$$

wobei τ' eine Translation ist. Es gibt also eine Translation τ' mit $\varphi_c \circ \tau = \tau' \circ \varphi_c$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\varphi_c(\psi(x_1, \ldots, x_k)) &= ((b_1 - a_1) \cdot x_1 + c(b_2 - a_2)x_2, (b_2 - a_2)x_2, \ldots, (b_k - a_k) \cdot x_k)\\ &= ((b_1 - a_1) \cdot (x_1 + c\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}x_2), (b_2 - a_2)x_2, \ldots, (b_k - a_k) \cdot x_k)\\ &= \psi(\varphi_{c'}(x_1, \ldots, x_k))\end{aligned}$$

mit $c' = c \cdot \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$. Das heißt, es gilt $\varphi_c \circ \psi = \psi \circ \varphi_{c'}$ mit c' wie angegeben. Mit Satz 10.13 und Korollar 10.17 folgt daraus

$$\begin{aligned}\lambda_k^*(\varphi_c(U)) &= \lambda_k^*(\varphi_c \circ \tau \circ \psi((0,1)^k))\\ &= \lambda_k^*(\tau' \circ \psi \circ \varphi_{c'}((0,1)^k))\\ &= |\det \psi| \cdot \lambda_k^*(\varphi_{c'}((0,1)^k))\\ &= |\det \psi|\\ &= \lambda_k(U).\end{aligned}$$

□

Die bis jetzt untersuchten linearen Abbildungen erzeugen die lineare Gruppe. Wir können daher den Hauptsatz dieses Abschnitts zeigen.

(10.23) Satz: *Sei $\varphi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\lambda_k^*(\varphi(A)) = |\det \varphi| \cdot \lambda_k^*(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}^k$. Ist φ invertierbar, so ist ist A genau dann Lebesgue-meßbar, wenn $\varphi(A)$ Lebesgue-meßbar ist.*

Beweis: Sei zunächst $\det \varphi \neq 0$. Dann läßt sich φ (über den Gauß-Algorithmus) als ein Produkt linearer Abbildungen wie sie in Korollar 10.17, Lemma 10.18 und Lemma 10.22 untersucht wurden darstellen. Wegen $\det(\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_m) = \det \varphi_1 \cdots \det \varphi_m$ folgt das gewünschte Resultat aus eben diesen Lemmata.

Wegen Lemma 10.19 gibt es eine Hyperebene $H_1 \subset \mathbb{R}^k$ mit $\lambda_k(H_1) = 0$. Ist H eine weitere Hyperebene des $\mathbb{R}^k$, so gibt es eine invertierbare lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit $\psi(H_1) = H$. Also gilt mit dem eben gezeigten $\lambda_k(H) = 0$ für jede Hyperebene H.

Sei nun $\det \varphi = 0$. Dann gibt es eine Hyperebene H mit $\varphi(\mathbb{R}^k) \subset H$. Für $A \subset \mathbb{R}^k$ gilt also $\lambda_k^*(\varphi(A)) \leq \lambda_k^*(H) = 0 = \det \varphi \cdot \lambda_k^*(A)$. □

Satz 10.23 und Satz 10.13 besagen, daß alle linear beschriebenen Mengen das gewohnte Maß haben. Damit haben auch Kreise, Kugeln usw. das übliche Maß, da sie als Grenzwerte von Polytopen konstruiert werden können.

Satz 10.23 besagt auch, daß das Lebesgue-Maß invariant unter der speziellen orthogonalen Gruppe ist.

KAPITEL 11

Meßbare Abbildungen

Ein Maßraum ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge X, eine σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und einem Maß $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$. In diesem Kapitel lassen wir das Maß weitgehend unberücksichtigt und betrachten Paare $(X, \mathcal{A})$, die aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ bestehen. Solche Paare heißen Meßräume. Wir haben nun eine ähnliche Situation wie bei topologischen Räumen. Wir betrachten eine Menge und ein System von Teilmengen dieser Menge. Das Analogon zu stetigen Abbildungen sind meßbare Abbildungen. Sie werden ähnlich wie stetige Abbildungen definiert und genießen ähnliche Eigenschaften.

Die folgende Definition ist das Analogon zu Definition 2.1.

(11.1) Definition: Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Dann heißt $(X, \mathcal{A})$ ein *Meßraum*.

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Meßräume. Eine Abbildung $f\colon X \to X'$ heißt *meßbar*, genauer $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-meßbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für jedes $A \in \mathcal{A}'$ gilt.

Das nächste Resultat ist das Analogon zu Satz 2.10.

(11.2) Satz: *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Meßräume und sei $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(X')$ mit $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}'$. Eine Abbildung $f\colon X \to X'$ ist genau dann meßbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für jedes $A \in \mathcal{E}'$ gilt.*

Beweis: Da f^{-1} alle Mengenoperationen respektiert, ist

$$\mathcal{B}' := \{A \subset X' \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{E}' \subset \mathcal{B}'$. Also gilt $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subset \mathcal{B}'$. Daraus folgt $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$. Damit ist f meßbar. □

Dieses Ergebnis erlaubt uns einen Zusammenhang zwischen stetigen und meßbaren Funktionen herzustellen.

(11.3) Korollar: *Eine stetige Abbildung $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ zwischen zwei topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ ist $\mathcal{B}(\mathcal{T})$-$\mathcal{B}(\mathcal{T}')$-meßbar.*

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Meßbarkeit einer stetigen Funktion verloren gehen kann, wenn die σ-Algebren vergrößert werden.

(11.4) Beispiele:

1. Wir betrachten $X = \mathbb{R}$ und $X' = \mathbb{R}^2$ mit der Euklidschen Topologie. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$ ist stetig. Also ist sie mit Korollar 11.3 auch $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-meßbar. Sie ist jedoch nicht $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$-$\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$-meßbar. Aus Lemma 10.19 wissen wir, daß $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ eine Lebesgue-meßbare Nullmenge ist. Wegen der Vollständigkeit sind daher alle Teilmengen von $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ebenfalls Lebesgue-meßbar. Da es nicht Lebesgue-meßbare Mengen in $\mathbb{R}$ gibt, gilt $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Doch dann ist f nicht $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$-$\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$-meßbar. Daraus folgt auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \neq \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$.
2. Sei $X = X' = \mathbb{R}^k$ und f die Komposition einer Translation mit einer regulären linearen Abbildung. Wegen Satz 10.13 und Satz 10.23 ist f eine $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)}$-$\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)}$-meßbare Abbildung.

Das nächste Resultat ist das Analogon zu Satz 2.5 und besagt, daß die Komposition meßbarer Funktionen wieder meßbar ist. Der Beweis zu Satz 2.5 kann übernommen werden.

(11.5) Satz: *Sind $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, Meßräume sowie $f\colon X_1 \to X_2$ und $g\colon X_2 \to X_3$ meßbare Abbildungen, dann ist auch die Komposition $g \circ f\colon X_1 \to X_3$ meßbar.*

Die folgende Definition ist das Analogon zu Definition 1.33, der Definition der Spurtopologie.

(11.6) Definition: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $Y \subset X$. Dann ist

$$\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Y. Der Meßraum $(Y, \mathcal{A}_Y)$ heißt *Unterraum* von $(X, \mathcal{A})$.

(11.7) Bemerkung: Die σ-Algebra $\mathcal{A}_Y$ ist die kleinste σ-Algebra auf Y, bezüglich der die Einbettung $\iota\colon Y \to X$ meßbar ist.

Das nächste Resultat entspricht Satz 2.13. Der Beweis von dort kann übernommen werden.

(11.8) Satz: *Seien $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ Meßräume und $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ meßbar. Für $Y \subset X$ ist $f|_Y\colon (Y, \mathcal{A}_Y) \to (X', \mathcal{A}')$ meßbar. Für $Z \subset X'$ mit $f(X) \subset Z$ ist $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{A}'_Z)$ meßbar.*

Wir betrachten nun das Produkt von Meßräumen. Es ist wie das Produkt von topologischen Räumen definiert.

(11.9) Definition: Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, eine Menge von Meßräumen und $X := \prod_{i\in I} X_i$. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ-Algebra, bezüglich der alle Projektionen $\pi_i\colon (X, \mathcal{A}) \to (X_i, \mathcal{A}_i)$ meßbar sind. Dann heißt $(X, \mathcal{A})$ das *Produkt* der Meßräume $(X_i, \mathcal{A}_i)$.

(11.10) Bemerkung: Analog zur Topologie wird $\mathcal{A}$ erzeugt von Mengen der Gestalt $\prod_{i\in I} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$, wo aber nur für endlich viele $i \in I$ der Faktor A_i verschieden von X_i ist.

Die folgende Charakterisierung der Meßbarkeit von Abbildungen aus einem Produkt ist das Analogon zu einigen Aussagen von Satz 4.15. Der Beweis kann wieder übernommen werden.

(11.11) Satz: *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, und $(Y, \mathcal{B})$ Meßräume. Sei $(X, \mathcal{A})$ das Produkt der $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$. Eine Abbildung $f\colon Y \to X$ ist genau dann $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$-meßbar, wenn $\pi_i \circ f\colon Y \to X_i$ für jedes $i \in I$ eine $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}_i$-meßbare Abbildung ist.*

Wir beschränken uns nun auf meßbare Abbildungen in die erweiterte reelle Gerade. Dazu müssen wir die zugehörige Borelsche σ-Algebra erklären.

(11.12) Definition: Für die erweiterte reelle Gerade $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) &:= \{A, A \cup \{\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\infty, -\infty\} \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \\ &= \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \{\{\infty\}, \{-\infty\}\}).\end{aligned}$$

(11.13) Notation: Eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ von einem Meßraum $(X, \mathcal{A})$ in die erweiterte reelle Gerade heißt *meßbar*, wenn f eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-meßbare Abbildung ist. Gilt $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, so sprechen wir von einer *Borel-meßbaren* Abbildung. Gilt $(X, \mathcal{A}) = \left(\mathbb{R}^k, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)}\right)$, so sprechen wir von einer *Lebesgue-Borel-meßbaren* Abbildung.

(11.14) Beispiel: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $A \subset X$. Die *charakteristische Funktion* von A ist die Abbildung $\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Die Funktion χ_A ist genau dann meßbar, wenn $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Folgende Eigenschaften der charakteristischen Funktionen sind offensichtlich:

$$\begin{aligned} \chi_{A \cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}, \\ \chi_{A \cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B, \\ \chi_{X \setminus A} &= 1 - \chi_A. \end{aligned}$$

Die folgenden Erzeugendensysteme für $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sind beweistechnisch sehr nützlich.

(11.15) Lemma: *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) &= \sigma(\{[-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{[-\infty, c) \mid c \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{[c, \infty] \mid c \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{(c, \infty] \mid c \in \mathbb{R}\}). \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen nur die erste Gleichung. Die weiteren Fälle gehen analog.

Sei $\mathcal{A} := \sigma(\{[-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R}\})$. Es gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\infty, -n] = \{-\infty\} \in \mathcal{A}$. Daher ist für $c \in \mathbb{R}$ auch $[-\infty, c] \setminus \{-\infty\} = (-\infty, c]$ in $\mathcal{A}$. Für $b < c$ gilt $(-\infty, c] \setminus (-\infty, b] = (b, c] \in \mathcal{A}$. Analog zu Beispiel 9.10 folgt daraus $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$, insbesondere $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Doch dann gilt $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \in \mathcal{A}$, also auch $\{\infty\} \in \mathcal{A}$. Dies zeigt $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. □

Mit Satz 11.2 erhalten wir aus diesem Ergebnis unmittelbar folgende Charakterisierung meßbarer Abbildungen.

(11.16) Satz: *Für einen Meßraum $(X, \mathcal{A})$ und eine Abbildung $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist meßbar,*
2. $\forall c \in \mathbb{R}$: $f^{-1}([-\infty, c]) \in \mathcal{A}$,
3. $\forall c \in \mathbb{R}$: $f^{-1}([-\infty, c)) \in \mathcal{A}$,
4. $\forall c \in \mathbb{R}$: $f^{-1}([c, \infty]) \in \mathcal{A}$,
5. $\forall c \in \mathbb{R}$: $f^{-1}((c, \infty]) \in \mathcal{A}$.

Dieses Ergebnis kann seinerseits eingesetzt werden, um ein Satz 2.11 analoges Resultat zu zeigen.

(11.17) Satz: *Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum, sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbare Funktionen und ist $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Abbildungen $f+g$, $f \cdot g$ und $c \cdot f$ auf ihren Definitionsbereichen meßbar. Dabei wird $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$ gesetzt.*

Beweis: Ist $\{f(x), g(x)\} = \{\infty, -\infty\}$, so ist $f(x) + g(x)$ nicht definiert. Der Definitionsbereich von $f+g$ hat daher die Gestalt

$$X \setminus \Big(\big(f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(-\infty)\big) \cup \big(f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\infty)\big) \Big),$$

liegt also in $\mathcal{A}$. Es gilt

$$f(x) + g(x) < c \iff \exists n \in \mathbb{N}\colon\ f(x) < n \text{ und } g(x) < c - n.$$

Das heißt

$$(f+g)^{-1}([-\infty, c)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big(f^{-1}([-\infty, n)) \cap g^{-1}([-\infty, c-n)) \big)$$

ist ebenfalls in $\mathcal{A}$. Damit ist $f+g$ meßbar.

Der weitere Beweis ist analog zum Beweis von Satz 2.11. □

Satz 11.16 kann auch eingesetzt werden, um zu zeigen, daß sich Meßbarkeit auf Grenzfunktionen überträgt. Dieser Satz hat keine Entsprechung für stetige Abbildungen.

(11.18) Satz: *Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum, sind $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, meßbare Funktionen, dann sind auch die Abbildungen $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ und $\liminf f_n$ meßbar.*

Beweis: Aus

$$\sup f_n(x) \le c \iff \forall n \in \mathbb{N}\colon\ f_n(x) \le c$$

folgt

$$(\sup f_n)^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, c]) \in \mathcal{A}.$$

Mit Satz 11.16 zeigt dies, daß $\sup f_n$ meßbar ist. Analog folgt aus

$$(\inf f_n)^{-1}([c, \infty]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([c, \infty]) \in \mathcal{A}.$$

die Meßbarkeit von $\inf f_n$.

Wegen

$$\limsup f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x)$$
$$\liminf f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x)$$

sind auch $\limsup f_n$ und $\liminf f_n$ meßbar. □

Wegen $\lim f_n = \limsup f_n = \liminf f_n$ folgt aus diesem Ergebnis unmittelbar das folgende Resultat.

(11.19) Korollar: *Sind $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, meßbare Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergieren, dann ist auch f meßbar.*

Wir konstruieren nun aus einer meßbaren Funktion zwei ebenfalls meßbare Funktionen, die keine negativen Werte annehmen, zusammen aber die ursprüngliche Funktion kodieren.

(11.20) Definition: Sei X eine Menge und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Wir definieren $f^+, f^-\colon X \to [0,\infty]$ durch

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(11.21) Satz: *Sei $(X,\mathcal{A})$ ein Meßraum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann meßbar, wenn f^+ und f^- meßbar sind. Weiterhin ist mit f auch $|f|$ meßbar.*

Beweis: Wegen $f^+ = \max\{f,0\}$ und $f^- = -\min\{f,0\}$ folgt aus Satz 11.18, daß mit f auch f^+ und f^- meßbar sind. Wegen $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$ induziert mit Satz 11.17 die Meßbarkeit von f^+ und f^- die Meßbarkeit von f und die Meßbarkeit von $|f|$. □

Unter den meßbaren Funktionen interessieren wir uns nun für solche nicht negativen Funktionen, die nur endlich viele Werte annehmen.

(11.22) Definition: Sei $(X,\mathcal{A})$ ein Meßraum. Eine *Elementarfunktion* auf X ist eine meßbare Abbildung $u\colon X \to [0,\infty)$, die nur endlich viele verschiedene Werte annimmt

Wir setzen $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X,\mathcal{A}) := \{u\colon X \to [0,\infty) \mid u \text{ Elementarfunktion}\}$.

Die Idee ist, daß Elementarfunktionen so etwas wie Treppenfunktionen sind. Das folgende Lemma konkretisiert diese Idee.

(11.23) Lemma: *Es gilt:*

$$u \in \mathcal{E} \iff \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in [0,\infty) \text{ mit } u = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

Weiterhin besitzt jedes $u \in \mathcal{E}$ eine solche Darstellung mit paarweise disjunkten A_i deren Vereinigung X ergibt. Eine Darstellung dieser Gestalt heißt Normaldarstellung *von u.*

Beweis: Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $a_1, \ldots, a_n \in [0,\infty)$ mit $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. Mit Satz 11.17 wissen wir, daß u meßbar ist. Offensichtlich gilt $0 \leq u(x) < \infty$ für jedes $x \in X$. Die Anzahl der verschiedenen Werte für u wird durch 2^n beschränkt. Damit ist u eine Elementarfunktion.

Sei u eine Elementarfunktion. Seien $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die möglichen Funktionswerte. Wir setzen $A_i := f^{-1}(a_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ eine Normaldarstellung. □

Sind zwei Elementarfunktionen gegeben, so gibt es Normaldarstellungen, die auf einer gemeinsamen Menge von Teilmengen aufbaut.

(11.24) Lemma: *Für Elementarfunktionen $u, v \in \mathcal{E}$ gibt es paarweise disjunkte $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{k} C_i = X$ und Zahlen $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in [0,\infty)$ mit $u = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{C_i}$ und $v = \sum_{i=1}^{k} b_i \chi_{C_i}$.*

Beweis: Seien $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ und $v = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i}$ Normaldarstellungen. Wir setzen $C_{ij} := A_i \cap B_j$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist jedes A_i die disjunkte Vereinigung der C_{ij}, $j \in \{1, \ldots, m\}$ und jedes B_j die disjunkte Vereinigung der C_{ij}, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daher gilt $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{C_{ij}}$ und $\chi_{B_j} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{C_{ij}}$. Daraus folgt $u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{C_{ij}}$ und $v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{C_{ij}}$. Durch Umnumerierung ergibt sich die Behauptung. □

Der folgende Satz besagt, daß jede meßbare Funktion der Grenzwert einer monotonen Folge von Elementarfunktionen ist. Das wird im weiteren von Nutzen sein. Denn Elementarfunktionen kann auf natürliche Weise ein Integral zugeordnet werden. Über den Grenzprozeß kann dann meßbaren Funktionen ein Integral zugeordnet werden.

(11.25) Satz: *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum. Eine Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ ist genau dann meßbar, wenn es eine monoton wachsende Folge $u_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, von Elementarfunktionen gibt, die punktweise gegen f konvergiert.*

Beweis: Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$, die punktweise gegen f konvergiert, so ist mit Korollar 11.19 die Funktion f meßbar.

Ist f eine meßbare Funktion, so definieren wir $u_n \in \mathcal{E}$ durch

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{falls } \frac{i-1}{2^n} \le f(x) \le \frac{i}{2^n} \text{ mit } i \in \{1,\dots,n\cdot 2^n\}, \\ n & \text{falls } f(x) \ge n. \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt $u_n(x) \le f(x)$ und $u_n(x) \le u_{n+1}(x)$ für alle $x \in X$. Gilt $f(x) = \infty$, so folgt $\lim u_n(x) = \infty = f(x)$. Gilt $f(x) < \infty$, so folgt $0 \le f(x) - u_n(x) \le \frac{1}{2^n}$ für $n > f(x)$. Dies induziert $\lim u_n(x) = f(x)$. □

(11.26) Notation: Ist $u_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, so schreiben wir dafür $u_n \uparrow f$.

Meßbare Abbildungen erlauben es auch, ein Maß abzubilden.

(11.27) Satz: *Sind $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Maßräume, ist μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und ist $f\colon X \to X'$ meßbar, so ist*

$$f(\mu) = \mu'\colon \mathcal{A}' \to \overline{\mathbb{R}}\colon A \mapsto \mu(f^{-1}(A))$$

ein Maß auf $(X', \mathcal{A}')$. Das Maß $f(\mu)$ heißt Bildmaß.

Beweis: Gezeigt werden muß nur die σ-Additivität, der Rest ist offensichtlich.

Sei $A_n \in \mathcal{A}'$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}'$. Dann besteht die Folge $f^{-1}(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ebenfalls aus paarweise disjunkten Mengen. Da f meßbar ist, gilt $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$. Daraus folgt wie gewünscht

$$\begin{aligned} f(\mu)(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu(f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\mu)(A_n). \end{aligned}$$

□

Die Konstruktion des Bildmaßes verträgt sich mit der Komposition.

(11.28) Lemma: *Sind* $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, *Meßräume, sind* $f\colon X_1 \to X_2$ *sowie* $g\colon X_2 \to X_3$ *meßbare Abbildungen und ist* μ *ein Maß auf* $(X_1, \mathcal{A}_1)$, *so gilt* $(g \circ f)(\mu) = g(f(\mu))$.

Beweis: Für $A \in \mathcal{A}_3$ gilt $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{A}$. Somit:

$$(g \circ f)(\mu)(A) = \mu((g \circ f)^{-1}(A)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(A))) = f(\mu)(g^{-1}(A)) = g(f(\mu))(A).$$

□

KAPITEL 12

Integrierbare Funktionen

Die Betrachtungen in diesem Kapitel finden, soweit nicht explizit anders angegeben, in einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ statt.

Unser Ziel ist es, die meßbaren Funktionen aus diesem Raum in die erweiterte reelle Zahlengerade zu integrieren. Dazu definieren wir zunächst das Integral von Elementarfunktionen, anschließend, über einen Grenzprozeß, das Integral positiver meßbarer Funktionen. Da sich jede meßbare Funktion f als Differenz zweier positiver meßbarer Funktionen f^+ und f^- darstellen läßt, können wir auch für eine meßbare Funktionen f das Integral definieren, vorausgesetzt die Integrale der Funktionen f^+ und f^- sind endlich.

1. Integral von Elementarfunktionen

Wir definieren zunächst das Integral von Elementarfunktionen. Dies geschieht auf naheliegende Weise. Da wir später das Integral positiver meßbarer Funktionen als Grenzwert von Integralen approximierender Elementarfunktionen definieren werden, muß das Verhalten des Integrals bei Grenzprozessen untersucht werden.

(12.1) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $u \in \mathcal{E}$ eine Elementarfunktion mit $u(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, wobei die a_i paarweise verschieden sind. Dann heißt

$$\int u \, d\mu = \int_X u \, d\mu = \int u = \int u(x) \, d\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(u^{-1}(a_i))$$

das *Integral*, genauer μ-Integral, von u über X. Eine Elementarfunktion u heißt *integrierbar*, wenn $\int u \, d\mu < \infty$ gilt.

(12.2) Bemerkung: Eine Elementarfunktion u ist genau dann integrierbar, wenn für $a \neq 0$ stets $\mu(u^{-1}(a)) < \infty$ gilt.

Das Integral einer Elementarfunktion läßt sich auch über Normaldarstellungen bestimmen.

(12.3) Lemma: *Ist $u = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ eine Normaldarstellung einer Elementarfunktion $u \in \mathcal{E}$, so gilt $\int u \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$.*

Beweis: Sei $u(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $A_i := u^{-1}(a_i)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $B_j \neq \emptyset$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ angenommen werden. Da die B_j paarweise disjunkt sind, folgt $\{b_1, \dots, b_m\} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ gibt es also ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $B_j \subset A_i$ und $b_j = a_i$. Daraus folgt

$$a_i \mu(A_i) = \sum_{B_j \subset A_i} b_j \mu(B_j),$$

also

$$\int u \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

□

Das nächste Resultat besagt, daß das Integrieren linear und monoton ist.

(12.4) Satz: *Sind $u, v \in \mathcal{E}$ Elementarfunktionen und $c \in [0, \infty)$ sowie $A \in \mathcal{A}$, so gilt:*

1. $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A)$.
2. $\int c \cdot u \, d\mu = c \cdot \int u \, d\mu$.
3. $\int (u + v) \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu$.
4. $u \leq v \Rightarrow \int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu$.

Beweis: Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich wahr.

Sind $u, v \in \mathcal{E}$ Elementarfunktionen, so gibt es wegen Lemma 11.24 eine gemeinsame Normaldarstellung $u = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{C_i}$ und $v = \sum_{i=1}^{k} b_i \chi_{C_i}$. Daher gilt $u + v = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) \chi_{C_i}$. Dies bewirkt

$$\int (u + v) \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(C_i) + \sum_{i=1}^{k} b_i \mu(C_i) = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu.$$

Dies beweist die dritte Aussage. Gilt zudem $u \leq v$, so folgt, in der obigen gemeinsamen Normaldarstellung $a_i \leq b_j$ für $i \in \{1, \dots, k\}$. Daraus folgt unmittelbar die vierte Behauptung. □

Aus der Linearität des Integrierens folgt sofort das nächste Ergebnis.

(12.5) Korollar: *Für jede Darstellung $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ einer Elementarfunktion gilt $\int u \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$.*

(12.6) Beispiel: Wir betrachten $f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Borel-Menge und es gilt $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$. Damit ist f eine Elementarfunktion und $\int f \, d\lambda = 0$.

Wir untersuchen nun, wie sich das Integral bei Grenzwerten verhält.

(12.7) Satz: *Ist $v \in \mathcal{E}$ eine Elementarfunktion und ist $u_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen mit $v \leq \sup u_n$, so gilt $\int v\, d\mu \leq \sup \int u_n\, d\mu$.*

Beweis: Sei $v = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ eine Normaldarstellung von v. Für jedes i gilt $0 \leq a_i < \infty$ und $A_i \in \mathcal{A}$. Sei $0 < c < 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B_n := \{x \in X \mid u_n(x) - c \cdot v(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid u_n(x) \geq c \cdot v(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Aus $u_n \leq u_{n+1}$ folgt $B_n \subset B_{n+1}$. Für $x \in X$ mit $v(x) \neq 0$ gilt $\sup u_n(x) \geq v(x) > c \cdot v(x)$. Also gibt es ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $u_{n(x)}(x) \geq c \cdot v(x)$. Somit gilt $x \in B_{n(x)}$. Für $x \in X$ mit $v(x) = 0$ gilt $x \in B_1$. Daraus folgt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Nach Konstruktion gilt $u_n \geq c \cdot v \cdot \chi_{B_n}$. Daraus folgt $\int u_n\, d\mu \geq c \cdot \int v \cdot \chi_{B_n}\, d\mu$. Weiterhin gilt

$$\int v \cdot \chi_{B_n}\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \int \chi_{A_k} \cdot \chi_{B_n}\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \int \chi_{A_k \cap B_n}\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_k \cap B_n).$$

Andererseits gilt mit Satz 9.18.5:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_i \cap B_n)) = \mu(A_i).$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int v \cdot \chi_{B_n}\, d\mu = \int v\, d\mu.$$

Also gilt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n\, d\mu \geq c \cdot \lim_{n\to\infty} \int v\chi_{B_n}\, d\mu = c \cdot \int v\, d\mu.$$

Da $c \in (0,1)$ beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n\, d\mu \geq \int v\, d\mu.$$

□

Dieses Ergebnis ist die entscheidende Zutat zum Beweis des nächsten Resultats.

(12.8) Korollar: *Sind $u_n, v_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, zwei monoton wachsende Folgen von Elementarfunktionen mit $\sup u_n = \sup v_n$ so gilt $\sup \int u_n\, d\mu = \sup \int v_n\, d\mu$.*

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $u_m \leq \sup u_n = \sup v_n$. Mit dem eben gezeigten folgt daraus $\int u_m\, d\mu \leq \sup \int v_n\, d\mu$, also $\sup \int u_m\, d\mu \leq \sup \int v_n\, d\mu$. Werden in diesem

Argument die Rollen von u und v vertauscht, so folgt $\sup \int v_m \, d\mu \leq \sup \int u_n \, d\mu$, also insgesamt $\sup \int u_n \, d\mu = \sup \int v_n \, d\mu$. □

2. Integral meßbarer Funktionen

Satz 11.25 zusammen mit Korollar 12.8 ermöglichen es, das Integral einer positiven meßbaren Funktion zu definieren.

(12.9) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to [0, \infty]$ eine meßbare Abbildung. Sei $u_n \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$ eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Dann heißt

$$\int f \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x) := \sup\{\int u_n \, d\mu \mid n \in \mathbb{N}\}$$

das *Integral* von f über X.

Eine meßbare Funktion heißt *integrierbar*, wenn $\int f \, d\mu < \infty$ gilt.

(12.10) Bemerkung: Das Integral einer meßbaren positiven Funktion existiert nach Satz 11.25 und ist wegen Korollar 12.8 eindeutig bestimmt.

(12.11) Bemerkung: Für eine Elementarfunktion u stimmt das Integral im Sinne von Definition 12.9 mit dem Integral im Sinne von Definition 12.1 überein, denn $u_n := u$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen u konvergiert.

Das Integrieren ist weiterhin linear und monoton.

(12.12) Satz: *Sind $f, g\colon X \to [0, \infty]$ meßbare Funktionen und $c \in [0, \infty)$ so gilt:*

1. $\int c \cdot f \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu$.
2. $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.
3. $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Beweis: Sei $u_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Dann ist $c \cdot u_n$ eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen $c \cdot f$ konvergiert. Also gilt:

$$\int c \cdot f \, d\mu = \sup \int c \cdot u_n \, d\mu = c \cdot \sup \int u_n \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu.$$

Dies beweist die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt analog.

Sei $v_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen, die punktweise gegen g konvergiert. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $u_m \leq \sup v_n$. Daher

folgt $\int u_m \, d\mu \leq \sup \int v_n \, d\mu = \int g \, d\mu$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\int f \, d\mu = \sup \int u_m \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. □

Die Additivität des Integrierens erlaubt es nun, das Integral einer beliebigen meßbaren Funktion zu definieren.

(12.13) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Abbildung. Sei $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := -\min\{f, 0\}$. Die Funktion f heißt *integrierbar*, wenn $\int f^+ \, d\mu < \infty$ und $\int f^- \, d\mu < \infty$ gilt. In diesem Fall ist

$$\int f \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x) := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

das *Integral* von f über X.

Im Spezialfall $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \lambda_k)$ oder $(\mathbb{R}^k, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)}, \lambda_k)$ heißt eine integrierbare Abbildung *Lebesgue-integrierbar*.

(12.14) Bemerkung: Eine meßbare Funktion $f\colon X \to [0, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann im Sinne von Definition 12.13 integrierbar, wenn sie im Sinne von Definition 12.9 integrierbar ist und die Werte des Integrals stimmen überein.

Das folgende Resultat charakterisiert integrierbare Funktionen.

(12.15) Satz: *Für eine meßbare Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist integrierbar.*
2. *Es gibt integrierbare Abbildungen $u, v\colon X \to [0, \infty]$ mit $f = u - v$.*
3. *Es gibt eine integrierbare Abbildung $g\colon X \to [0, \infty]$ mit $|f| \leq g$.*
4. *Die Funktion $|f|$ ist integrierbar.*

Im 2. Fall gilt $\int f \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu$.

Beweis: Die Inklusion $1 \to 2$ folgt mit $u := f^+$ und $v := f^-$.

Wir zeigen nun die Inklusion $2 \to 3$. Sind u, v integrierbare positive Funktionen mit $f = u - v$, so gilt $|f| = \max\{u - v, v - u\}$. Da u und v positiv sind, gilt $u - v \leq u + v \geq v - u$. Daraus folgt $|f| \leq u + v =: g$. Mit Satz 12.12 ist g und dann auch $|f|$ integrierbar.

Die Inklusion $3 \to 4$ folgt unmittelbar aus Satz 12.12.3.

Wir zeigen abschließend die Inklusion $4 \to 1$. Ist $|f|$ integrierbar, so gilt $0 \leq f^+ \leq |f| \geq f^- \geq 0$. Also sind f^+ und f^-, somit auch f integrierbar.

Gibt es integrierbare Abbildungen $u, v\colon X \to [0,\infty]$ mit $f = f^+ - f^- = u - v$, so gilt $f^+ + v = f^- + u \geq 0$. Daraus folgt mit Satz 12.12.2 sofort

$$\int f^+ \, d\mu + \int v \, d\mu = \int f^- \, d\mu + \int u \, d\mu,$$

also

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu.$$

□

Die Linearität und Monotonie des Integrierens bleibt weitgehend erhalten.

(12.16) Satz: *Seien $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. *Die Funktion $c \cdot f$ ist integrierbar und $\int c \cdot f \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu$.*
2. *Die Funktion $f + g$ ist integrierbar, sofern sie auf ganz X definiert ist. In diesem Fall gilt $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.*
3. *Aus $f \leq g$ folgt $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.*
4. *$|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.*

Beweis:

1. Es gilt:

$$(c \cdot f)^+ = \begin{cases} c \cdot f^+ & \text{falls } c > 0, \\ 0 & \text{falls } c = 0, \\ |c| \cdot f^- & \text{falls } c < 0, \end{cases}$$

$$(c \cdot f)^- = \begin{cases} c \cdot f^- & \text{falls } c > 0, \\ 0 & \text{falls } c = 0, \\ |c| \cdot f^+ & \text{falls } c < 0. \end{cases}$$

   Für $c \geq 0$ ist die Behauptung damit bewiesen. Für $c < 0$ gilt $\int (c \cdot f) \, d\mu = \int |c| \cdot f^- \, d\mu - \int |c| \cdot f^+ \, d\mu = |c| \cdot (-\int f \, d\mu) = c \cdot \int f \, d\mu$.
2. Es gilt $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ und $f^+ + g^+ \geq 0 \leq f^- + g^-$. Mit Satz 12.15.2 folgt die Behauptung.
3. Aus $f \leq g$ folgt $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$. Also gilt $\int f^+ \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu$ und $\int g^- \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu$. Dies induziert

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

4. Wegen $f \leq |f| \geq -f$ gilt $\int f\,d\mu \leq \int |f|\,d\mu$ und $\int -f\,d\mu = -\int f\,d\mu \leq \int |f|\,d\mu$. Dies impliziert $|\int f\,d\mu| \leq \int |f|\,d\mu$.

□

Die Summe zweier reellwertiger meßbarer Funktionen ist wieder meßbar. Daher folgt aus dem voranstehenden Resultat unmittelbar das nächste Ergebnis.

(12.17) Korollar: *Der Raum*

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrierbar}\}$$

ist ein reeller Vektorraum und das Integral ist ein monotones lineares Funktional auf $\mathcal{L}^1(\mu)$.

3. Integral über Teilmengen

Wir definieren nun das Integral über meßbare Teilmengen eines Maßraumes.

(12.18) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, sei $A \in \mathcal{A}$ und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Abbildung. Die Funktion f heißt *über A integrierbar*, wenn $f \cdot \chi_A$ über X integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f\,d\mu := \int_X f \cdot \chi_A\,d\mu$$

das *Integral von f über A.*

Ist $g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar, so heißt g integrierbar, wenn die Fortsetzung

$$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}\colon x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

integrierbar ist. In diesem Fall sei

$$\int_A g\,d\mu := \int_X f\,d\mu.$$

Über einer Nullmenge ist jede meßbare Funktion integrierbar und der Wert des Integrals ist stets 0.

(12.19) Satz: *Ist $A \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Abbildung, so ist f über A integrierbar und es gilt $\int_A f\,d\mu = 0$.*

Beweis: Für $g\colon X \to [0,\infty]$ mit

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in X \setminus A, \\ \infty & \text{falls } x \in A, \end{cases}$$

gilt $|f \cdot \chi_A| \leq g$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n\colon X \to [0,\infty]$ definiert durch

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in X \setminus A, \\ n & \text{falls } x \in A. \end{cases}$$

Es gilt $g_n = n \cdot \chi_A$, also $\int g_n \, d\mu = n \cdot \mu(A) = 0$. Wegen $g_n \uparrow g$ folgt $\int g \, d\mu = 0$. Aus der Monotonie folgt daher $\int |f \cdot \chi_A| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu = 0$, also auch $\int_A f \, d\mu = 0$. □

Das Verhalten der Charakteristischen Funktion gegenüber Vereinigung von Mengen bewirkt ein analoges Verhalten beim Integral.

(12.20) Satz: *Sind $A, B \in \mathcal{A}$ und ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ über A und B integrierbar, so gilt*

$$\int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu = \int_{A \cup B} f \, d\mu + \int_{A \cap B} f \, d\mu.$$

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B}$. □

Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, haben das gleiche Integral, wie wir weiter unten sehen werden. Daher führen wir folgenden Begriff ein.

(12.21) Definition: Für zwei Abbildungen $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sagen wir

$$f = g \qquad \textit{fast überall (f.ü.)},$$

falls $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

Eine Abbildung $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *fast überall endlich*, wenn

$$\{x \in X \mid f(x) \in \{\infty, -\infty\}\}$$

eine Nullmenge ist.

Integrierbare Funktionen nehmen höchstens auf einer Nullmenge unbeschränkte Werte an.

(12.22) Satz: *Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so ist f fast überall endlich.*

Beweis: Mit f ist auch $|f|$ integrierbar. Wir setzen $A := \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$ und betrachten die Funktion $g\colon X \to [0, \infty]$ mit

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in X \setminus A, \\ \infty & \text{falls } x \in A. \end{cases}$$

Wegen $g \leq |f|$ ist g nach Satz 12.15 ebenfalls integrierbar. Wäre A keine Nullmenge, so wäre $\int g\, d\mu = \infty$, was der Integrabilität von g widerspricht. □

Wird eine Funktion auf einer Nullmenge verändert, so bleibt das Integral gleich.

(12.23) Satz: *Sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei meßbare Abbildungen, die fast überall übereinstimmen, so gilt:*

1. *$f, g \geq 0 \Rightarrow \int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.*
2. *Ist f integrierbar, so ist auch g integrierbar und $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Menge

$$A := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

eine Nullmenge. Also gilt $\int_A f\, d\mu = 0 = \int_A g\, d\mu$. Dies induziert mit Satz 12.20

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X\setminus A} f\, d\mu + \int_A f\, d\mu = \int_{X\setminus A} g\, d\mu + \int_A g\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Da diese Behauptung im allgemeinen Fall für $|f|$ und $|g|$ gilt, folgt die zweite Behauptung. □

Das eben erzielte Resultat kann herangezogen werden um zu zeigen, daß wir uns beim Integrieren auf reellwertige Funktionen beschränken können.

(12.24) Satz: *Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so gibt es eine integrierbare Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ fast überall und $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.*

Beweis: Da f integrierbar ist, ist f fast überall endlich. Die Funktion

$$g\colon X \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } |f(x)| < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

hat daher die gewünschten Eigenschaften. □

Das Maß der Menge von Elementen von X, deren Funktionswert mindestens den Abstand c von 0 hat, kann abgeschätzt werden.

(12.25) Satz (Čebyšev-Markovsche Ungleichung): *Für eine integrierbare Funktion* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *und* $c > 0$ *gilt*

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \cdot \int |f| \, d\mu.$$

Beweis: Die Menge $A_c := \{x \in X \mid |f(x)| \geq c\}$ ist meßbar, da f meßbar ist. Es gilt

$$\int |f| \, d\mu \geq \int_{A_c} |f| \, d\mu = \int |f| \cdot \chi_{A_c} \, d\mu \geq \int c \cdot \chi_{A_c} \, d\mu = c \cdot \mu(A_c).$$

□

Das Integral einer positiven meßbaren Funktion verschwindet genau dann, wenn die Funktion fast überall die Nullfunktion ist. Für beliebige integrierbare Funktionen ist die analoge Aussage offensichtlich falsch.

(12.26) Satz: *Für eine integrierbare Funktion* $f\colon X \to [0, \infty]$ *gilt genau dann* $\int f \, d\mu = 0$*, wenn* $f = 0$ *fast überall.*

Beweis: Gilt $f = 0$ fast überall so folgt mit Satz 12.23 $\int f \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$.

Gilt $\int f \, d\mu = 0$, so setzen wir $A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Es folgt $\mu(A_n) \leq n \cdot \int f \, d\mu = 0$ und $A_n \subset A_{n+1}$. Für $x \in X$ mit $f(x) > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$. Also gilt $\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Aus der Stetigkeit von unten folgt nun

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$

□

Die Anschauung legt nahe, daß für eine integrierbare Funktion die Menge der Punkte, deren Funktionswert nicht 0 ist, nicht zu groß sein kann. Der nächste Satz präzisiert diese Idee.

(12.27) Satz: *Ist* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine integrierbare Abbildung, so hat der Raum* $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ σ*-endliches Maß, d.h. es gibt eine Folge* $A_n \in \mathcal{A}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, mit* $\mu(A_n) < \infty$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$*.*

Beweis: Für $A_n := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ gilt $\mu(A_n) \leq n \cdot \int |f| \, d\mu < \infty$. Weiterhin gilt $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. □

In den folgenden Beispielen bestimmen wir für zwei Maße auf der Potenzmenge einer Menge X den Raum der integrierbaren Funktionen.

(12.28) Beispiele:

1. Sei X eine beliebige Menge, sei $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ und sei $\nu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ das Zählmaß, d.h.

$$\nu(A) = \begin{cases} |A| & \text{falls } |A| < \infty, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jede beliebige Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist meßbar.

Ist f integrierbar, so ist f fast überall endlich. Da $\emptyset$ die einzige ν-Nullmenge ist, folgt $f(X) \subset \mathbb{R}$. Die Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ist somit als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen selbst abzählbar.

Ist f integrierbar, so ist auch $|f|$ integrierbar. Die ist in der gegebenen Situation äquivalent zu $\sum_{x\in X,\, f(x)\neq 0} |f(x)| < \infty$. Also gilt:

$$\mathcal{L}^1(\nu) = \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \mid \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \text{ abzählbar und } \sum_{x\in X} |f(x)| < \infty \right\}$$

Für den Spezialfall $X = \mathbb{N}$ folgt

$$\mathcal{L}^1(\nu) = l^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}.$$

2. Sei X eine beliebige Menge, sei $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$, sei $p \in X$ und sei $\delta_p\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ das Dirac-Maß, d.h.

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wieder ist jede Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar. Eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn $|f(p)| < \infty$ gilt. Weiter gilt $\int f\, d\delta_p = f(p)$ und

$$\int_A f\, d\delta_p = \begin{cases} f(p) & \text{falls } p \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also gilt $\mathcal{L}^1(\delta_p) = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$.

KAPITEL 13

Konvergenzsätze

In diesem Kapitel untersuchen wir folgendes Problem. Gegeben ist eine Folge meßbarer oder integrierbarer Funktionen, die gegen eine Funktion konvergiert. Was kann in dieser Situation über die Integrierbarkeit und das Integral der Grenzfunktion ausgesagt werden. Unter welchen Bedingungen ist das Integral der Grenzfunktion der Limes der Integrale?

Das folgende Beispiel zeigt, daß dies tatsächlich nicht immer gilt.

(13.1) Beispiel: Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und die Funktionen

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} n & \text{für } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist f die Nullfunktion, so gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ aber $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq \int f \, d\lambda = 0$.

Wir müssen zunächst klären, in welchem Sinne Funktionenfolgen konvergieren sollen. Im Rahmen der Integrationstheorie gibt es hierzu verschiedene sinnvolle Konzepte.

(13.2) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n, f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, meßbare Funktionen.

1. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert fast überall gegen* f, wenn es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt, mit $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$.
2. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert fast überall gleichmäßig gegen* f, wenn es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt, mit
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X \setminus N} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$
3. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert fast gleichmäßig gegen* f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $N \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(N) < \varepsilon$ und
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X \setminus N} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

4. Sei $p > 0$. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert im p-ten Mittel gegen* f, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu = 0$.
5. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert stochastisch* oder *im Maß gegen* f, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Die nachfolgenden Beispiele zeigen, daß die es sich bei den eben eingeführten Konvergenzbegriffen um verschiedene Begriffe handelt.

(13.3) Beispiele:

1. Wir betrachten den Maßraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mit den Abbildungen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

und $f_n(x) = x^n$. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert punktweise gegen f.

Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $N_\varepsilon := [1-\varepsilon, 1]$. Es gilt $\lambda(N_\varepsilon) = \varepsilon$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [0,1]\setminus N_\varepsilon} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^n = 0.$$

Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert also auch fast gleichmäßig gegen f.

Sei $A \subset [0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| = 0$ und sei $c := \sup A$. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$, also $c < 1$. Es folgt $(c,1] \cap A = \emptyset$ und $\mu((c,1]) > 0$. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert also nicht fast überall gleichmäßig gegen f.

2. Wir betrachten auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ die Abbildungen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < n, \\ 1 & \text{falls } x \geq n. \end{cases}$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_n(x) \to 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{2}\}) = \infty.$$

Die f_n konvergieren also nicht stochastisch gegen die Nullfunktion.

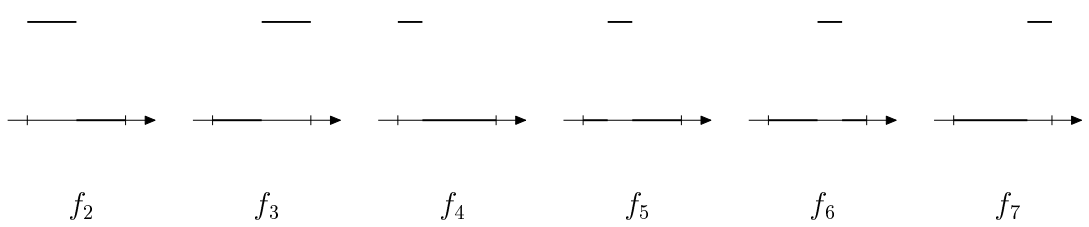
3. Wir betrachten den Maßraum $([1,2], \mathcal{B}([1,2]), \lambda)$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Wir definieren $f_n \colon [1,2] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{n}{2^k} \leq x < \frac{n+1}{2^k}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei f die Nullfunktion auf $[1,2]$. Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in [1,2] \mid |f_n(x) - 0| > \varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{k(n)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

Die Folge der f_n konvergiert also stochastisch gegen f. Trotzdem gibt es kein $x \in [1,2)$, für das $f_n(x)$ gegen $f(x) = 0$ konvergiert.



Für eine monotone Folge positiver meßbarer Funktionen kann das Integral mit dem Limes vertauscht werden.

(13.4) Satz von der monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi): *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n, f\colon X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, meßbare Funktionen, so daß für $n \le m$ gilt $f_n(x) \le f_m(x)$ fast überall und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ fast überall. Dann gilt*

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \sup \int f_n\,d\mu.$$

Beweis: Sei

$$A := \{x \in X \mid f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} \cup \bigcup_{m>n} \{x \in X \mid f_m(x) < f_n(x)\}.$$

Ist μ vollständig, so ist A eine Nullmenge. Ist μ nicht vollständig, so ist A in einer Nullmenge B enthalten und wir ersetzen A durch B.

Für $x \in X \setminus A$ gilt $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup f_n(x)$. Wegen $\int_X f_n\,d\mu = \int_{X\setminus A} f_n\,d\mu$ und $\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus A} f\,d\mu$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß für jedes $x \in X$ gilt:

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N},$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup f_n(x).$$

Zu jedem $n \in N$ gibt es eine Folge $u_{nk} \in \mathcal{E}$ von Elementarfunktionen mit $u_{nk} \uparrow f_n$. Für $v_n := \max\{u_{1n}, \ldots, u_{nn}\} \in \mathcal{E}$ gilt $v_n \le f_n$ und $v_n \uparrow f$. Also gilt

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n\,d\mu = \sup \int v_n\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Andererseits folgt aus $f_n \leq f$ auch $\int f_n \, d\mu \leq \inf f \, d\mu$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$\sup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \sup \int f_n \, d\mu.$$

□

Aus diesem Resultat folgt, daß bei Reihen positiver meßbarer Funktionen das Integral hereingezogen werden kann.

(13.5) Korollar: *Sind $f_n \colon X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, meßbar Abbildungen, so gilt*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis: Die Funktionen $g_n := f_1 + \cdots + f_n$ erfüllen die Bedingungen aus Satz 13.4. Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\mu = \int \lim_{n \to \infty} g_n \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

□

Aus Satz 13.4 folgt auch, daß sich mit einer positiven meßbaren Funktion auf einem Maßraum ein neues Maß auf der gleichen σ-Algebra definieren läßt.

(13.6) Korollar: *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $F \colon X \to [0, \infty]$ eine meßbare Abbildung. Dann ist $\mu_F \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu_F(A) := \int_A F \, d\mu$ ein Maß.*

Beweis: Da $\emptyset$ eine μ-Nullmenge ist, gilt mit Satz 12.19 erwartungsgemäß $\mu_F(\emptyset) = \int_\emptyset F \, d\mu = 0$.

Es muß noch die σ-Additivität gezeigt werden. Sei $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen. Dann gilt

$$\mu_F(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \int F \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int F \cdot \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(A_n).$$

□

Die wesentliche Frage ist, wann zwei Maße über die eben eingeführte Konstruktion auseinander hervorgehen. Das heißt, wann gibt es zu zwei Maßen $\mu, \tau \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine meßbare Abbildung $F \colon X \to [0, \infty]$ mit $\tau = \mu_F$. Klar ist, daß es eine solche Abbildung nur dann geben kann, wenn alle μ-Nullmengen auch τ-Nullmengen sind. Ist μ ein σ-endliches Maß, so gilt auch die Umkehrung. Dies ist die Aussage des Satzes von Radon-Nikodym, der hier ohne Beweis aufgeführt wird.

(13.7) Satz von Radon-Nikodym: *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum. Sei μ ein σ-endliches und τ ein beliebiges Maß auf X. Es gibt genau dann eine meßbare Funktion $F\colon X \to [0, \infty]$ mit $\tau = \mu_F$, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ auch $\tau(A) = 0$ gilt.*

In diesem Fall heißt F die Dichte von τ bezüglich μ.

Der Satz von Radon-Nikodym kann herangezogen werden, um zu zeigen, daß die sogenannte δ-Funktion keine Funktion in unserem Sinne ist.

(13.8) Beispiel: Für den Maßraum $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \lambda)$ und das Dirac-Maß δ_p mit $p \in \mathbb{R}^k$ gilt $\lambda(\{p\}) = 0$ aber $\delta_p(\{p\}) = 1$. Somit hat δ_p keine Dichte bezüglich λ.

Ist f eine bezüglich eines Maßes τ integrierbare Funktion und besitzt τ eine Dichte F bezüglich eines Maßes μ, so gilt $\int f\, d\tau = \int f \cdot F\, d\mu$. Da δ_p keine Dichte bezüglich λ hat, gibt es *keine* δ-Funktion $\delta\colon \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^k} f\, d\delta_p = f(p) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x) \cdot \delta(x - p)\, d\lambda.$$

Das nächste Resultat, das Lemma von Fatou, zeigt, daß für eine Folge von positiven meßbaren Funktionen das Integral des Limes inferior durch den Limes inferior der Integrale beschränkt wird.

(13.9) Satz (Lemma von Fatou): *Sei $f_n\colon X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge meßbarer Abbildungen und $f = \liminf f_n$. Dann gilt*

$$\int f\, d\mu = \int \liminf f_n\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu.$$

Beweis: Wegen Satz 11.18 ist die Funktion $f = \liminf f_n$ meßbar. Sei $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Dann gilt $f(x) = \sup g_n(x) = \lim g_n(x)$ für jedes $x \in X$. Die Folge der g_n ist monoton wachsend. Weiterhin gilt $g_n \leq f_n$ also auch $\int g_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu$. Daraus folgt

$$\int f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n\, d\mu = \liminf \int g_n\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu.$$

□

Bis jetzt haben wir nur Konvergenzsätze für positive Funktionen kennengelernt. Mit dem nächsten Resultat, dem Satz von der majorisierten Konvergenz, wenden wir uns beliebigen meßbaren Funktionen zu.

(13.10) Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue): *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, sei $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer*

Funktionen und sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Funktion, so daß die Folge der f_n fast überall gegen f konvergiert. Weiterhin existiere eine integrierbare Funktion $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $|f_n| \leq g$ fast überall für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f integrierbar und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$ sowie $\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

Beweis: Es sei

$$\begin{aligned} A := \{x \in X \mid g(x) = \infty\} &\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X \mid |f_n(x)| = \infty\} \\ &\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X \mid |f_n(x)| > g(x)\} \\ &\cup \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}. \end{aligned}$$

Es gibt eine Nullmenge $B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann daher $g(x) < \infty$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ sowie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in X$ angenommen werden. Wegen $|f| \leq g$ ist mit g auch f integrierbar. Für $g_n := |f_n - f|$ gilt $\liminf g_n(x) = \lim g(x) = 0$ für jedes $x \in X$. Daher gilt

$$0 \leq g_n \leq |f_n| + |f| \leq g + |f|\,.$$

Also:

$$\begin{aligned} \int (g + |f|)\, d\mu &= \int \liminf(g + |f| - g_n)\, d\mu \\ &\leq \liminf \int (g + |f| - g_n)\, d\mu \\ &= \int g\, d\mu + \int |f|\, d\mu + \liminf(-\int g_n\, d\mu) \\ &= \int g\, d\mu + \int |f|\, d\mu - \limsup \int g_n\, d\mu. \end{aligned}$$

Daraus folgt $0 \leq -\limsup \int g_n\, d\mu \leq 0$, also $\limsup \int g_n\, d\mu = 0$. Wegen $\int g_n\, d\mu \geq 0$ bedeutet dies $\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = 0$, also $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$.

Aus Satz 12.16.4 wissen wir $|\int f\, d\mu - \int f_n\, d\mu| \leq \int |f - f_n|\, d\mu$. Daraus folgt schließlich $\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$. □

Wir wenden nun in einem Beispiel den Satz von der majorisierten Konvergenz an um den großen Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen zu zeigen.

(13.11) Beispiel: Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, wo $\nu(A) = |A|$ das Zählmaß ist. Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ gilt, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ also absolut konvergiert. Das Integral berechnet sich zu

$$\int f\,d\nu = \sum_{f(n)>0} f(n) - \sum_{f(n)<0} (-f(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Für eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei

$$f_k(n) := \begin{cases} f(n) & \text{für } n \in \varphi(\{1,\dots,k\}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n)$. Weiter gilt $|f_k| \le |f|$ und $|f|$ ist integrierbar. Also ist auch jedes f_k integrierbar und $\int f_k\,d\nu = \sum_{n=1}^{k} f(\varphi(n))$. Daraus folgt mit Satz 13.10:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int f\,d\nu = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\nu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f(\varphi(n)).$$

Dies ist der *große Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen.*

Ein weiteres Korollar zu Satz 13.10 besagt, daß bei einer monotonen Folge von Mengen das Integral mit dem Grenzprozeß vertauscht werden kann.

(13.12) Korollar: *Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und seien $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \subset A_{n+1}$ und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann gilt $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu$.*

Beweis: Da f integrierbar ist, ist auch $|f|$ integrierbar. Die Funktionen $f_n := f \cdot \chi_{A_n}$ sind ebenfalls integrierbar. Die Folge der f_n konvergiert punktweise gegen f. Wegen $|f_n| \le |f| =: g$ folgt nun die Behauptung mit Satz 13.10. □

In metrischen Räumen gibt es den Begriff der Cauchy-Folge. Bekanntlich ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchy-Folge wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \ge n_0\colon\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

In der Integrationstheorie kann der Begriff der Cauchy-Folge variiert werden.

(13.13) Definition: Sei $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge meßbarer, fast überall endlicher Abbildungen.

1. Die Folge der f_n heißt *Cauchy-Folge im Maß*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon, \delta > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \ge n_0\colon \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \le \delta.$$

2. Sei $p > 0$. Die Folge der f_n heißt *Cauchy-Folge im p-ten Mittel*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \int |f_n - f|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

Das nächste Resultat besagt, daß der Raum der meßbaren Funktionen in gewissem Sinne vollständig ist.

(13.14) Satz: *Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge meßbarer, fast überall endlicher Funktionen, die eine Cauchy-Folge im Maß ist. Dann existiert eine meßbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und eine Teilfolge $(f_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $f_n(X) \subset \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n(k) \in \mathbb{N}$ mit $n(k) > n(k-1)$, so daß für $m, n \geq n(k)$ gilt:

$$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Dadurch ist eine Teilfolge $f_{n(k)}$ bestimmt. Wir setzten:

$$A_k := \{x \in X \mid \left|f_{n(k+1)}(x) - f_{n(k)}(x)\right| \geq \frac{1}{2^k}\},$$

$$B_m := \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k.$$

Es gilt:

$$\mu(A_k) \leq \frac{1}{2^k},$$

$$\mu(B_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} \to 0.$$

Sei $x \in X \setminus B_m$, sei $j \geq m$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left|f_{n(j+p)}(x) - f_{n(j)}(x)\right| \leq \sum_{i=1}^{p} \left|f_{n(j+i)}(x) - f_{n(j+i-1)}(x)\right| \leq \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2^{j+i-1}} \leq \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Für $x \in X \setminus B_m$ ist $f_{n(k)}(x)$ also eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Für $B := \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ gibt es eine Abbildung $f : X \setminus B \to \mathbb{R}$, so daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $f_{n(k)}$ auf $X \setminus B_M$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir setzten $f(x) := 0$ für $x \in B$. Dann konvergiert die Teilfolge $f_{n(k)}$ fast gleichmäßig gegen f. □

Das folgende Resultat belegt, daß aus fast gleichmäßiger Konvergenz die Konvergenz fast überall folgt.

(13.15) Lemma: *Seien $f, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, meßbar und konvergiere f_n fast gleichmäßig gegen f. Dann konvergiert f_n auch fast überall gegen f.*

Beweis: Gelte $f_n \to f$ fast gleichmäßig. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann eine Menge $B_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B_n) < \frac{1}{n}$, so daß auf $X \setminus B_n$ die Folge der f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Insbesondere konvergiert die Funktionenfolge auf $X \setminus B_n$ punktweise gegen f. Die Schnittmenge $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ ist eine Nullmenge, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu(B) \leq \mu(B_n) < \frac{1}{n}$. □

(13.16) Satz von Lebesgue II: *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer Funktionen. Weiterhin sei $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Funktion, so daß die Folge der f_n im Maß gegen f konvergiert. Gibt es nun noch eine integrierbare Funktion $g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $|f_n| \leq g$ fast überall und für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist auch f integrierbar und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ sowie $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.*

Beweis: In dem die Funktionen gegebenfalls auf eine Nullmenge verändert werden, können wir annehmen daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ sowohl $f_n(X) \in \mathbb{R}$ als auch $|f_n(x)| \leq g(x)$ für jedes $x \in X$ gilt. Es kann eine Teilfolge $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konstruiert werden, die fast gleichmäßig, und daher auch fast überall, gegen f konvergiert. Wegen Satz 13.10 ist f integrierbar und es gilt $\lim_{k\to\infty} \int |f_{n(k)} - f| \, d\mu = 0$.

Angenommen $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \neq 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\int |f_{n(l)} - f| \, d\mu > \varepsilon$ für jedes $l \in \mathbb{N}$.

Die Teilfolge $(f_{n(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert im Maß gegen f, besitzt ebenfalls eine Teilfolge, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Dies widerspricht $\lim_{k\to\infty} \int |f_{n(l)} - f| \, d\mu \neq 0$ und Satz 13.10. □

(13.17) Bemerkung: Der entsprechende Satz für Cauchy-Folgen im Maß gilt ebenfalls.

(13.18) Lemma: *Sei $p > 0$ und sei $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge meßbarer und fast überall endlicher Abbildungen. Konvergiert die Folge der f_n im p-ten Mittel gegen eine Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, so konvergiert sie auch im Maß gegen f.*

Bilden die f_n eine Cauchy-Folge im p-ten Mittel, so ist die Folge der f_n auch eine Cauchy-Folge im Maß.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &= \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)|^p > \varepsilon^p\}) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^k} \int |f_n - f|^p \, d\mu \to 0.\end{aligned}$$

Für Cauchy-Folgen führt das analoge Argument zum Erfolg. □

(13.19) Satz: *Sei $p > 0$ und sei $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge meßbarer und fast überall endlicher Abbildungen, die eine Cauchy-Folge im p-ten Mittel bilden. Dann gibt es eine meßbare Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, gegen die die Folge der f_n im p-ten Mittel konvergiert.*

Beweis: Bilden die f_n eine Cauchy-Folge im p-ten Mittel, so bilden sie auch eine Cauchy-Folge im Maß. Daher gibt es mit Satz 13.14 eine meßbare Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ und eine Teilfolge $(f_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ die fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt $\int |f_n - f|^p \, d\mu < \varepsilon$. Für ein festes $m \geq n_0$ setzen wir

$$\begin{aligned}g_k &= \left|f_{n(k)} - f_m\right|^p, \\ g &= |f - f_m|^p.\end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{k \to \infty} g_k = \liminf g_k = g$ fast überall. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int |f - f_m|^p \, d\mu &= \int g \, d\mu \\ &= \int \liminf g_k \, d\mu \\ &\leq \liminf \int g_k \, d\mu \\ &= \liminf \int \left|f_{n(k)} - f_m\right|^p d\mu \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert f_m im p-ten Mittel gegen f. □

KAPITEL 14

Riemann- und Lebesgue-Integral

In diesem Kapitel wird kurz beleuchtet, wie sich Riemann- und Lebesgue-Integral zueinander verhalten. Das Riemann-Integral wird dabei als bekannt vorausgesetzt.

Es zeigt sich, daß für reelle Funktionen die beiden Begriffe meist das gleiche liefern. Es gibt allerdings Lebesgue-integrierbare Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind und uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen, die nicht Lebesgue-integrierbar sind.

Soweit nicht anders angegeben, betrachten wir in diesem Kapitel stets die folgende Situation. Gegeben ist eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$Z_n = (a_{n0} = a, a_{n1}, \ldots, a_{nk(n)} = b)$$

eine Zerlegung von $[a,b]$. Die Zerlegungen seien so, daß Z_n feiner ist als Z_{n+1} und $\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\{1,\ldots,k(n)\}}(a_{ni} - a_{n(i-1)}) = 0$ gilt.

Wir setzen

$$\begin{aligned} g_n(x) &:= \inf\{f(y) \mid a_{ni} \le y < a_{n(i+1)}\} && \text{für } a_{ni} \le x < a_{n(i+1)}, \\ h_n(x) &:= \sup\{f(y) \mid a_{ni} \le y < a_{n(i+1)}\} && \text{für } a_{ni} \le x < a_{n(i+1)}. \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $g_n \le f \le h_n$ und g_n sowie h_n sind Lebesgue-meßbare (und Lebesgue-integrierbare) Funktionen. Da Z_{n+1} feiner als Z_n ist, gilt $g_n \le g_{n+1}$ und $h_n \ge h_{n+1}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} O(f, Z_n) &:= \int_{[a,b]} h_n \, d\lambda && \text{Obersumme} \\ U(f, Z_n) &:= \int_{[a,b]} g_n \, d\lambda && \text{Untersumme} \end{aligned}$$

sowie

$$h := \lim_{n\to\infty} h_n, \qquad g := \lim_{n\to\infty} g_n.$$

Die Funktionen h und g sind Lebesgue-meßbar, sogar Lebesgue-integrierbar. Es gilt

$$\int_{[a,b]} h\,d\lambda := \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n\,d\lambda,$$
$$\int_{[a,b]} g\,d\lambda := \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n\,d\lambda.$$

Wir untersuchen nun, wann die Funktion f Riemann-integrierbar ist.

(14.1) Lemma: *In der eben geschilderten Situation ist die Funktion f genau dann Riemann-integrierbar, wenn $h = g$ fast überall gilt.*

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist Riemann-integrierbar} &\iff \lim_{n\to\infty} (O(f, Z_n) - U(f, Z_n)) = 0 \\ &\iff \int_{[a,b]} (h-g)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} (h_n - g_n)\,d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Wegen $h - g \geq 0$ folgt mit Satz 12.26, daß das Integral $\int_{[a,b]}(h-g)\,d\lambda$ genau dann verschwindet, wenn $h = g$ fast überall gilt. □

Das nächste Ergebnis besagt, daß eine meßbare Funktion auf einem vollständigen Raum meßbar bleibt, wenn sie auf einer Nullmenge verändert wird.

(14.2) Lemma: *Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen, die fast überall gleich sind, so ist f genau dann meßbar, wenn g meßbar ist.*

Beweis: Sei $c \in \mathbb{R}$. Da f fast überall mit g übereinstimmt, gibt es Nullmengen $N_1, N_2 \in \mathcal{A}$ mit

$$\{x \in X \mid f(x) \leq c\} = (\{x \in X \mid g(x) \leq c\} \setminus N_1) \cup N_2.$$

Ist g meßbar, so gilt $\{x \in X \mid g(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$, also auch $\{x \in X \mid f(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$. Da dies für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt, ist f meßbar. Indem die Rollen von f und g vertauscht werden, folgt die Behauptung. □

Das nächste Resultat untersucht, wann eine Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist.

(14.3) Satz: *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Riemann-integrierbare Funktion, so ist f auch Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,d(x) = \int_{[a,b]} f\,d\lambda.$$

Beweis: Mit der Notation aus der Einleitung gilt $g_n \uparrow g$ und $h_n \downarrow h$ und $g_n \leq f \leq h_n$. Daraus folgt $g \leq f \leq h$.

Ist f Riemann-integrierbar, so gilt mit Lemma 14.1 $g = h$ fast überall, also auch $g = f$ fast überall. Da das Lebesgue-Maß vollständig ist und g Lebesgue-meßbar ist, ist mit Lemma 14.2 auch f Lebesgue-meßbar. Aus Satz 13.10 folgt, daß f Lebesgue-integrierbar ist. Weiterhin gilt

$$\int_{[a,b]} g\,d\lambda \leq \int_{[a,b]} f\,d\lambda \leq \int_{[a,b]} h\,d\lambda,$$

also $\int_{[a,b]} g\,d\lambda = \int_{[a,b]} f\,d\lambda$. Nach Definition des Riemann-Integrals gilt

$$\int_{[a,b]} g\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,d(x).$$

□

Eine beschränkte Riemann-integrierbare Funktion muß nicht Borel-meßbar sein.

Das nächste Resultat stellt einen Bezug zwischen der lokalen Stetigkeit von f und der Differenz der Funktionen g und h her.

(14.4) Lemma: *Für $x_0 \in [a,b]$ gilt:*

1. *Ist f stetig in x_0, so gilt $g(x_0) = h(x_0)$.*
2. *Gilt $g(x_0) = h(x_0)$ und $x_0 \neq a_{ni}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \{0,\ldots,k(n)\}$, so ist f stetig in x_0.*

Beweis:

1. Ist f stetig in x_0, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß es für jedes $n \geq n_0$ ein $i \in \{0,\ldots,k(n)-1\}$ gibt mit

   $$x_0 \in [a_{ni}, a_{n(i+1)}] \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

   Für $n \geq n_0$ gilt also

   $$h_n(x_0) - g_n(x_0) = \sup_{x\in[a_{ni},a_{n(i+1)}]} f(x) - \inf_{x\in[a_{ni},a_{n(i+1)}]} f(x) \leq \varepsilon.$$

   Dies induziert $g(x_0) = h(x_0)$.

2. Sei $g(x_0) = h(x_0)$ und $x_0 \neq a_{ni}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \{0, \ldots, k(n)\}$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in \{0, \ldots, k(n) - 1\}$ mit

$$h_n(x_0) - g_n(x_0) = \sup_{x \in [a_{ni}, a_{n(i+1)}]} f(x) - \inf_{x \in [a_{ni}, a_{n(i+1)}]} f(x) \leq \varepsilon.$$

Wegen $x_0 \notin \{a_{ni}, a_{n(i+1)}\}$ ist $[a_{ni}, a_{n(i+1)}]$ eine Umgebung von x_0. Für alle x aus dieser Umgebung gilt $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Daher ist f stetig in x_0.

□

Der nächste Satz charakterisiert die Riemann-integrierbaren Funktionen unter den beschränkten Funktionen auf einem kompakten Intervall.

(14.5) Satz: *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f fast überall stetig ist.*

Beweis: Wir setzen:

$$A := \{x \in [a, b] \mid g(x) \neq h(x)\},$$
$$B := \{x \in [a, b] \mid f \text{ unstetig in } x\},$$
$$C := \{a_{ni} \mid n \in \mathbb{N},\ i \in \{0, \ldots, k(n)\}\}.$$

Mit dem eben bewiesenen Resultat gilt $A \subset B \subset A \cup C$. Da C abzählbar ist, gilt $\lambda(C) = 0$. Daher:

$$\lambda(A) \leq \lambda(B) \leq \lambda(A) + \lambda(C) = \lambda(A) < b - a < \infty,$$

also $\lambda(A) = \lambda(B)$. Die Funktion f ist mit Lemma 14.1 genau dann Riemann-integrierbar, wenn A eine Nullmenge ist. Mit dem eben gezeigten ist A genau dann eine Nullmenge, wenn B ein Nullmenge ist. □

Wir verwenden nun diese Ergebnis, um zu zeigen, daß es Lebesgue-integrierbare Funktionen gibt, die nicht Riemann-integrierbar sind.

(14.6) Beispiele:

1. Die Funktion

$$f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nirgendwo stetig, also auch nicht Riemann-integrierbar. Da f fast überall mit der Nullfunktion übereinstimmt, ist f Lebesgue-integrierbar und $\int f \, d\lambda = 0$.

2. Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{falls } x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ und } a, b \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist bei jedem $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ stetig, also fast überall stetig. Die Funktion ist daher sowohl Riemann- als auch Lebesgue-integrierbar und $\int f\, d\lambda = 0$.

Für uneigentliche Integrale gilt das folgende Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

(14.7) Satz: *Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion, so ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.*

Mit diesem Satz kann gezeigt werden, daß die Funktion

$$\frac{\sin x}{x}$$

auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Index

abgeschlossen, 15
abgeschlossene Abbildung, 22
abgeschlossene Hülle, 10
abgeschlossene Menge, 9
abgeschlossener Quader, 99
Abzählbarkeitsaxiom
  erstes, 12, 24
  zweites, 13
äquivalente Einbettungen, 21
Äquivalenzklasse, 83
äußeres Lebesgue-Maß, 100
äußeres Maß, 92
Algebra, 86
Auswahlaxiom, 83
Axiome von Kolmogorov, 90

Basis, 12
Betragsmetrik, 6
Bildmaß, 120
Borel-Lebesgue-Maš, 103
Borel-Menge, 87
Borel-meßbar, 115
Borelsche σ-Algebra, 87

Cantormenge, 63
Cauchy-Folge, 141
  im Maß, 141
  im p-ten Mittel, 142
charakteristische Funktion, 116

δ-Funktion, 139
dicht, 10
Dichte, 139
Dirac-Maß, 89, 133, 139
disjunkte Vereinigung von Mengen, 45
diskrete Topologie, 5, 12
diskreter Raum, 10
Dreiecksungleichung, 6

eigentlich, 73
Ein-Punkt-Kompaktifizierung, 71
Einbettung, 21
Elementarfunktion, 118, 123–126
Enden-Kompaktifizierung, 73
endliches Maß, 90
erstes Abzählbarkeitsaxiom, 12, 24
erweiterte reelle Gerade, 82
erzeugte σ-Algebra, 87
Euklidsche Metrik, 6
Euklidsche Topologie, 5, 12, 13

fast überall, 130
feiner, 12, 35
Filter, 31
Filterbasis, 32
Folge, 23
Folgenüberdeckungseigenschaft, 92
Fortsetzungssatz, 52
F_σ-Menge, 87

G_δ-Menge, 87
gerichtete Menge, 25, 34
gleichmäßige Konvergenz, 14
Grenzwert
  einer Folge, 23
  eines Filters, 33
  eines Netzes, 26
gröber, 12
großer Umordnungssatz, 141

häufen, 26
Häufungspunkt
  einer Folge, 23
  einer Menge, 28

eines Filters, 33
eines Netzes, 26
Hausdorff-Raum, 48
Heine-Borel, 70
Hilbert Würfel, 54, 62, 70
Homöomorphismus, 17

Inhalt, 88
Inklusion
kanonische, 45
Integral, 123
über einer Teilmenge, 129
einer meßbaren Funktion, 127
einer meßbaren positiven Funktion, 126
integrierbar, 123, 126, 127, 129

kanonische Inklusion, 45
Kette, 30
koendliche Topologie, 5, 10, 12, 47, 48, 65
kofinal, 28
Kolmogorov, 90
kompakt, 65
Kompaktheit, 65–75
Konvergenz
einer Folge, 23
eines Filters, 33
eines Netzes, 26
fast überall, 135
fast gleichmäßig, 135
gleichmäßig, 14
gleichmäßig
fast überall, 135
im p-ten Mittel, 136
im Maß, 136
punktweise, 14, 41, 43
stochastische, 136
Kugel, 8

Lebesgue-Borel-meßbar, 115
Lebesgue-Integral, 81
Lebesgue-integrierbar, 127
Lebesgue-Maß, 100
äußeres, 100
Lebesgue-meßbar, 100
Lemma von Fatou, 139
Lemma von Urysohn, 52
lokalkompakt, 71

Maß, 89
endlich, 90
σ-endlich, 90
Maßraum, 90
vollständiger, 97
maximal, 30
Maximumsmetrik, 6
Menge
abgeschlossen, 9
geordnet, 25
gerichtet, 25, 34
offen, 5
meßbar, 93, 115
meßbare Abbildung, 113
Meßraum, 113
Metrik, 6
metrischer Raum, 6, 13, 19
Minkowski Ungleichung, 7
verallgemeinert, 7
Monotonie, 90
Moore-Smith-Folge, 26

n-Ball, 16
n-Sphäre, 16, 73
Netz, 26
universell, 30
zugeordnetes, 34
normal, 48
Normaldarstellung, 119
Nullmenge, 97, 129

obere Schranke, 30
Oberintegral, 81, 82
Obersumme, 81, 82, 145
offen, 15
offene Abbildung, 22
offene Menge, 5
offene r-Kugel, 8
offene Überdeckung, 65
offener Kern, 10
offener Quader, 99
Ordnung, 25

Prä-Maß, 88
Produkt
  von Meßräumen, 115
  von Mengen, 39
Produkttopologie, 40
Projektion, 39
punktweise Konvergenz, 14, 41, 43

Quader, 99

r-Umgebung, 8
Rand, 10
Raum
  diskret, 10
  metrisch, 6, 19
  topologisch, 5
regulär, 48, 103
Regularität
  von außen, 103
  von innen, 103
Riemann-Integral, 81, 145–149
Ring, 86

Satz
  von Beppo Levi, 137
  von der majorisierten Konvergenz, 139
  von Lebesgue, 139
  von Lebesgue II, 143
schließen, 26
Schönfliess, 21
separabel, 10, 14
σ-endliches Maß, 90
σ-Algebra, 85
  erzeugte, 87
σ-Ring, 86
Sinuskurve
  topologische, 61, 63
Spurtopologie, 15
stetig, 17
Stetigkeit
  von oben, 91
  von unten, 91
Stone-Čhech-Kompaktifizierung, 73
Subadditivtät, 90
Subbasis, 12
Subtraktivität, 90
Summentopologie, 45
Symmetrie, 6

$T_0 - T_4$ - Raum, 47
Teilfolge, 29
Teilnetz, 28
Teilüberdeckung, 65
Topologie, 5
  diskret, 5, 12
  Euklidsch, 5, 12, 13
  koendlich, 5, 10, 12, 47, 48, 65
  trivial, 5, 12
Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, 14
Topologie der punktweisen Konvergenz, 14
topologische Sinuskurve, 61, 63
topologischer Raum, 5
Torus, 16, 62, 70
total unzusammenhängend, 62
translationsinvariant, 106
Trennungsaxiom, 47–57
triviale Topologie, 5, 12
Čebyšev-Markovsche Ungleichung, 132
Tychonoff, 69

Überdeckung, 65
Ultrafilter, 36
Umgebung, 11
  einer Menge, 47
Umgebungsbasis, 12
universell, 30
Unterintegral, 81, 82
Unterraum, 15, 114
Unterraumtopologie, 15
Untersumme, 81, 82, 145
Urysohn, 52

verallgemeinerte Minkowski Ungleichung, 7
Vervollständigung, 97
vollständig, 97
Volumenfunktion, 82

Wahrscheinlichkeitsmaß, 90
Weg, 63
wegzusammenhängend, 63

Zählmaß, 89, 133, 140
Zerlegung, 81, 145
Zornsches Lemma, 30, 36, 67, 70, 83
zugeordnetes Netz, 34
zusammenhängend, 59
Zusammenhang, 59–64
Zusammenhangskomponente, 62
zweites Abzählbarkeitsaxiom, 13