# Grundlagen der Angewandten Analysis

Hans Grabmüller
Institut für Angewandte Mathematik

**Vorlesung im Sommersemester 1999**

**Friedrich–Alexander–Universität Erlangen–Nürnberg**

# Inhaltsverzeichnis

**Literaturverzeichnis** **iii**

**0 Einführung** **1**
0.1 Bezeichnungen . . . 1
0.2 Elementare Ungleichungen . . . 6

**1 Topologische und metrische Räume** **9**
1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen . . . 9
1.2 Metrische Räume . . . 16
1.3 Der BANACHsche Fixpunktsatz . . . 21
1.4 Kompakte Räume . . . 26

**2 BANACH– und HILBERT–Räume** **31**
2.1 BANACH–Räume . . . 31
2.2 Endlichdimensionale Räume . . . 34
2.3 Stetige lineare Abbildungen und der normierte Dualraum . . . 36
2.4 HILBERT–Räume . . . 45
2.5 Räume stetiger Funktionen und der Satz von ARZELA–ASCOLI . . . 49
2.6 Die Räume $\overline{C}^m(\Omega)$ und $C^m(\overline{\Omega})$ . . . 53
2.7 Der Fixpunktsatz von SCHAUDER . . . 56

**3 Die Prinzipien der Funktionalanalysis** **64**
3.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . 64
3.2 Das Prinzip von der offenen Abbildung . . . 67
3.3 Abgeschlossene Operatoren . . . 68
3.4 Die HAHN–BANACH–Sätze . . . 73
3.5 Der Bidualraum und schwache Topologien . . . 78
3.6 Folgenkompaktheit und schwach* Topologie . . . 83
3.7 Der Satz von BANACH–SAKS . . . 85

**4 Die LEBESGUE–Räume $L^p(\Omega)$** **87**
4.1 Maße . . . 87
4.2 Das LEBESGUE–Maß auf $\mathbf{R}^n$ . . . 90
4.3 Meßbare Funktionen und der Satz von EGOROFF . . . 98
4.4 Das LEBESGUE–Integral . . . 105
4.5 Die Sätze von FATOU und LEBESGUE . . . 113

4.6 Die Absolutstetigkeit des LEBESGUE–Integrals . . . . . 116
4.7 Die Sätze von FUBINI und LUSIN . . . . . 117
4.8 Die Funktionenräume $L^p(\Omega)$ . . . . . 118
4.9 Dichte Unterräume und der FRIEDRICHSsche Mollifier . . . . . 122
4.10 Maßkonvergenz . . . . . 125
4.11 Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ . . . . . 127

**5 Die SOBOLEV–Räume $W^{m,p}(\Omega)$ 132**
5.1 Das Fundamentallemma der Variationsrechnung . . . . . 132
5.2 Verallgemeinerte Ableitungen . . . . . 134
5.3 SOBOLEV–Räume und ihre grundlegenden Eigenschaften . . . . . 138
5.4 Produkt– und Kettenregel für SOBOLEV–Funktionen . . . . . 143

**6 Fortsetzungs– und Einbettungssätze 146**
6.1 Geometrische Gebietseigenschaften . . . . . 146
6.2 Approximation von SOBOLEV–Funktionen . . . . . 148
6.3 Fortsetzung von SOBOLEV–Funktionen . . . . . 150
6.4 Einbettungen von $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . . 154
6.5 Der Satz von RELLICH–KONDRACHOV . . . . . 160
6.6 Ein Spursatz . . . . . 167

**7 Die FOURIER–Transformation 169**
7.1 Lokalkonvexe topologische Vektorräume . . . . . 169
7.2 Beispiele lokalkonvexer Vektorräume . . . . . 173
7.3 Die FOURIER–Transformation temperierter Funktionen . . . . . 180
7.4 Die FOURIER–PLANCHEREL–Transformation . . . . . 186
7.5 Die $L^1$–FOURIER–Transformation . . . . . 190
7.6 Die Faltung . . . . . 194
7.7 Der FOURIERsche Integralsatz in $L^1(\mathbf{R}^n)$ . . . . . 202

**8 Distributionen 208**
8.1 Definition von Distributionen und Beispiele . . . . . 208
8.2 Differentiation von Distributionen . . . . . 215
8.3 Distributionen mit kompaktem Träger . . . . . 218
8.4 Elementare Operationen auf Distributionen . . . . . 222
8.5 Tensorprodukte . . . . . 225
8.6 Die Faltung von Distributionen . . . . . 231
8.6.1 Die Faltung einer Distribution mit einer Funktion . . . . . 233
8.6.2 Die Faltung von Distributionen bei kompaktem Träger . . . . . 236
8.6.3 Distributionen mit konvolutivem Träger . . . . . 238
8.7 Temperierte Distributionen . . . . . 240
8.8 Die FOURIER–Transformation temperierter Distributionen . . . . . 245

# Literaturverzeichnis


[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975.

[2] H.W. Alt, Lineare Funktionalanalysis. Springer Hochschultext, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1985.

[3] S. Banach/S. Saks, Sur la convergence forte dans les champs $L^p$. Studia Math. **2**, 51–57 (1930).

[4] B.D. Craven, Lebesgue Measure & Integral. Pitman, Boston 1982.

[5] R. Dautray/J.–L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 2: Functional and Variational Methods. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1988.

[6] M. Dobrowolski, Höhere Analysis. Vorlesungsmanuskript, Erlangen 1993.

[7] N. Dunford/J.T. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory. Interscience Publishers, Inc., New York 1958.

[8] D. Gilbarg/N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Grundlehren der math. Wiss. 224, Springer–Verlag, Berlin 1977.

[9] C. Goffman/G. Pedrick, First Course in Functional Analysis. Prentice–Hall Inc, Englewood Cliffs, N. J. 1965.

[10] P.R. Halmos, Measure Theory. D. van Nostrand, New York 1950.

[11] H. Heuser, Funktionalanalysis, 2. Auflage. B.G. Teubner, Stuttgart 1986.

[12] F. Hirzebruch/W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis. HTB 296a*, Bibliographisches Institut, Mannheim 1971.

[13] H. Jeggle, Nichtlineare Funktionalanalysis. Teubner Studienbücher Mathematik, B.G. Teubner, Stuttgart 1979.

[14] L.W. Kantorowitsch/G.P. Akilow, Funktionalanalysis in normierten Räumen. Akademie–Verlag, Berlin 1964.

[15] A. Kufner/O. John/S. Fučik, Function Spaces. Noordhoff International Publishing. Leyden 1977.

[16] N. Meyers/J. Serrin, $H = W$. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51**, 1055–1056 (1964).

[17] I.P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Akademie–Verlag, Berlin 1961.

[18] F. Riesz/B. Sz.–Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, 2. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

[19] L. Schwartz, Thorie des distributions. Hermann. Paris 1966.

[20] I.N. SNEDDON, The Use of Integral Transforms. McGraw–Hill. New York 1974.

[21] F.TREVES, Topological Vector spaces, Distributions and Kernels. Academic Press. New York 1967.

[22] H. TRIEBEL, Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

[23] W. WALTER, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Heidelberger Taschenbücher 110, Springer–Verlag 1972.

[24] K. YOSIDA, Functional Analysis, $6^{th}$ Edition. Grundlehren der math. Wiss. 123, Springer–Verlag 1980.

Dieses Manuskript ist als Begleittext zu einer vierstündigen Vorlesung *Grundlagen der Angewandten Analysis* entstanden, die ich erstmals im Sommersemester 1995 für Studierende der Mathematik am Beginn des Hauptstudiums gehalten habe. Die Vorlesung war inhaltlich gedacht als Einstieg in die weiterführenden Lehrveranstaltungen der Angewandten Mathematik, denn in zahlreichen Vorlesungen und Seminaren – wie zum Beispiel über Partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Inverse Probleme, Vektoroptimierung etc. – wird auf ein gemeinsames funktionalanalytisches Fundament zurückgegriffen. Es war mein Anliegen, aufbauend auf den Grundkenntnissen der Analysis und der linearen Algebra einige wichtige Bausteine dieses Fundaments in mathematisch befriedigender Weise darzustellen.

Als Vorlage diente mir das vorzügliche Vorlesungsmanuskript [6] von M. DOBROWOLSKI, dem ich an dieser Stelle für die freundliche Überlassung seines Textes sehr herzlich danke. Der Einfluß der Vorlage auf Inhalt und Gliederung meines Manuskripts ist unverkennbar. Dennoch meine ich, daß der von mir erstellte Text eine eigene Daseinsberechtigung hat, da er in vielen Teilen die Vorlage [6] ergänzt und – wo es mir nötig erschien – auch breiter erläutert. Unter den vielfältigen Ergänzungen seien hier exemplarisch der Fixpunktsatz von SCHAUDER, die Darstellungssätze von LAX–MILGRAM sowie eine umfassendere Einführung der Maß– und Integrationstheorie in Kapitel 4 erwähnt. Dafür sind die Elemente der Spektraltheorie linearer Operatoren dem Zeitmangel zum Opfer gefallen, dem man insbesondere in einem Sommersemester mit seinen insgesamt 24 Vorlesungsdoppelstunden unterliegt. Andererseits sollte die Spektraltheorie ja auch fester Bestandteil anderer Vorlesungen sein.

Dafür wurde der eigentliche Vorlesungsstoff um zwei weitere Themenkreise ergänzt, die in der Vorlesung selbst nicht angeschnitten wurden. Zum einen habe ich in Kapitel 7 einen Abriss der Theorie der FOURIER–Transformation gebracht, soweit sich diese Theorie am klassischen Funktionsbegriff orientiert. Das Kapitel wird eingeleitet mit einer knappen Abhandlung der Theorie lokalkonvexer topologischer Vektorräume. In Kapitel 8 werden die Grundbegriffe der Distributionentheorie in dem Rahmen behandelt, den ich zum Verständnis von Spezialliteratur für nötig erachte. Neben dem Tensorprodukt und der Faltung von Distributionen wird auch die distributionelle FOURIER–Transformation mit ihren Eigenschaften diskutiert.

Zum Schluß richte ich eine Bitte an die Leser dieses Manuskripts. Selbst bei größter Sorgfalt sind Fehler jedweder Art nie völlig auszuschließen. Für Hinweise auf fehlerbehaftete Textstellen bin ich dankbar. Auch für Kritik an Umfang und Auswahl des Stoffes bin ich stets empfänglich.

Erlangen, im Herbst 1995 und im April 1999 H.G.

# Kapitel 0

# Einführung

## 0.1 Bezeichnungen

Wir gehen hier von der Vertrautheit im Umgang mit den Grundbegriffen der elementaren Mengenlehre aus. Für Mengen $M, A, B$ verwenden wir kommentarlos die folgenden Bezeichnungen und Verknüpfungen:

- $a \in M$, $a \notin M$; $A = B$, $A \neq B$; $A \subset B$, (**enthalten oder gleich**); $A \subsetneq B$ (das heißt $A \subset B$ **und** $A \neq B$)
- $A \cup B$ : **Vereinigung**
- $A \cap B$ : **Durchschnitt**
- $A \setminus B$ : **Differenz**, das ist die Menge aller Elemente $a \in A$ mit $a \notin B$; man beachte $A \setminus B \neq B \setminus A$
- $\emptyset$ : Symbol für die **leere Menge**.

Hat man eine **feste Grundmenge** $X \neq \emptyset$, so ist folgende Definition sinnvoll:

**Definition 0.1** *Für eine Teilmenge $A \subset X$ heiße*

$$\boxed{\mathcal{C}A := A^c := X \setminus A}$$

*das* **Komplement** *von $A$ (bezüglich $X$) oder die zu $A$* **komplementäre Menge**. **(Folgerung:** *$A$ und $A^c$ sind* **disjunkt***: $A \cap A^c = \emptyset$.)*

Die Verknüpfung **verschiedener** Mengenoperationen kann nicht willkürlich geschehen; sie ist vielmehr durch strenge Gesetzmäßigkeiten geregelt. Wir listen die wichtigsten dieser Gesetze

hier auf.

| | | |
|---|---|---|
| (K) | $A \cup B = B \cup A, \;\; A \cap B = B \cap A;$ | **Kommutativgesetz** |
| (As) | $\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C, \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C; \end{cases}$ | **Assoziativgesetz** |
| (D) | $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \end{cases}$ | **Distributivgesetz** |
| (Id) | $A \cup A = A, \;\; A \cap A = A;$ | **Idempotenzgesetz** |
| (N) | $A \cap X = A, \;\; A \cup \emptyset = A \;\; \forall\, A \subset X;$ | **neutrale Elemente** |
| (Do) | $A \cap \emptyset = \emptyset, \;\; A \cup X = X \;\; \forall\, A \subset X;$ | **dominante Elemente** |
| (Ko) | $A \setminus B = A \cap B^c, \;\; A \cap A^c = \emptyset, \;\; A \cup A^c = X, \;\; A^{cc} = A.$ | **Komplemente** |

Die Beziehungen (Ko) gelten für Teilmengen $A, B \subset X$. Wegen (As) können die Operationen $\cup$ und $\cap$ auch für (endliche oder unendliche) **Systeme** von Mengen $A_j, \; j \in I$, ($I$ sei eine beliebige **Indexmenge**) sinnvoll erklärt werden:

$$\boxed{\begin{aligned} \bigcup_{j \in I} A_j \;&:=\; \{a \,:\, \exists\, j_0 \in I \text{ mit } a \in A_{j_0}\}, \\ \bigcap_{j \in I} A_j \;&:=\; \{a \,:\, a \in A_j \;\forall\, j \in I\}. \end{aligned}}$$

**Definition 0.2** (a) *Für eine nichtleere Menge $X$ heiße die Zahl*

$$\boxed{|X| := \operatorname{card} X := \;\; \textit{Anzahl der Elemente in } X}$$

*die* **Kardinalität** *oder* **Mächtigkeit** *der Menge $X$. $X$ heiße* **endlich**, *wenn $|X|$ eine endliche Zahl ist; ansonsten heiße $X$* **unendlich**.

(b) *Die Menge aller Teilmengen einer nichtleeren Menge $X$ heiße die* **Potenzmenge** *von $X$, bezeichnet mit $\mathcal{P}(X)$ oder mit $2^X$:*

$$\boxed{\mathcal{P}(X) := 2^X := \{A \,:\, A \subset X\}.}$$

**Bemerkung 0.1** Gemäß Definition gilt stets $\emptyset \subset X$ für jede Menge $X$, so daß immer auch $\emptyset \in 2^X$ folgt. Für endliche Mengen $X$ hat man $|2^X| = 2^{|X|}$, was hier nicht gezeigt werden soll. Diese Beziehung allein begründet die Wahl des Symbols $2^X$ für die Potenzmenge.

Auf einem Mengensystem $A_j \in \mathcal{P}(X), \; j \in I$, gelten die DE MORGANschen Formeln:

$$\boxed{\Big(\bigcap_{j \in I} A_j\Big)^c = \bigcup_{j \in I} A_j^c, \qquad \Big(\bigcup_{j \in I} A_j\Big)^c = \bigcap_{j \in I} A_j^c.} \tag{1.1}$$

Die folgenden Bezeichnungen sind größtenteils selbsterklärend:

- $\mathbf{N}$ : Menge der **natürlichen** Zahlen; $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$
- $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ oder $:= \mathbf{C}$ : Körper der **reellen** bzw. der **komplexen** Zahlen
- $\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} \,:\, x > 0\}$, $\overline{\mathbf{R}_+} := \{x \in \mathbf{R} \,:\, x \geq 0\}$
- $z \in \mathbf{C}$ : $z = x + i\,y$ mit $x, y \in \mathbf{R}$, $\bar{z} := x - i\,y$ : **Konjugation**
- $\mathbf{K}^n := \{x \,:\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \;\wedge\; x_j \in \mathbf{K}\}$ : $n$–dimensionaler **Vektorraum** über dem Körper $\mathbf{K}$.

Der Vektorraum $\mathbf{K}^n$ trage stets die **Standardbasis** $e_1, e_2, \ldots, e_n$; hierbei bezeichnet

$$e_j := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–te Stelle}}, 0, \ldots, 0)^T$$

den $j$–ten **Standardbasisvektor**. Auf den Vektoren des $\mathbf{K}^n$ sind das **Standardskalarprodukt** und der **Betrag** (die **euklidische Norm**) wie folgt erklärt:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j, \qquad |x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Mit den Fourier–Koeffizienten $\langle x, e_j\rangle$ des Vektors $x$ gilt nun offenbar die Zerlegung

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle\, e_j.$$

Der Betragsstrich $|\cdot|$ wird mitunter auch verwendet, um die euklidische Norm von **Tensoren** zu bezeichnen. Für eine $(m \times n)$–Matrix $A = (a_{jk})$ mit $a_{jk} \in \mathbf{K}$ $\forall\; j = 1, 2, \ldots, m$ $\forall\; k = 1, 2, \ldots, n$ erhalten wir insbesondere

$$|A| := \Big(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2\Big)^{1/2}.$$

Wir charakterisieren nun ohne formale Definition elementare topologische Eigenschaften von Teilmengen des Vektorraums $\mathbf{R}^n$, der die Standardtopologie trage. Sei $x \in \mathbf{R}^n$ ein fester Punkt.

- $B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbf{R}^n \,:\, |x - y| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$ : **offene** $\epsilon$–Kugel um $x$
- $\overline{B_\epsilon(x)} := \{y \in \mathbf{R}^n \,:\, |x - y| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$ : **abgeschlossene** $\epsilon$–Kugel um $x$.

Ist $K \subset \mathbf{R}^n$ eine Teilmenge, so heiße $x \in \mathbf{R}^n$

- ein **innerer Punkt** von $K$, wenn $K$ eine offene $\epsilon$–Kugel $B_\epsilon(x) \subset K$ um den Punkt $x$ enthält
- ein **äußerer Punkt** von $K$, wenn $x$ innerer Punkt der Menge $K^c = \mathbf{R}^n \setminus K$ ist
- ein **Randpunkt** von $K$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ sowohl $B_\epsilon(x) \cap K \neq \emptyset$ als auch $B_\epsilon(x) \cap K^c \neq \emptyset$ gilt.

Nun sind die folgenden Notationen für Teilmengen $K \subset \mathbf{R}^n$ sinnvoll erklärt:

- $K^o := \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, x \text{ ist innerer Punkt von } K\}$ : **offener Kern** oder **Inneres** von $K$
- $\partial K := \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, x \text{ ist Randpunkt von } K\}$ : der **Rand** von $K$
- $\overline{K} := K \cup \partial K$ : **abgeschlossene Hülle** oder der **Abschluß** von $K$.

Schließlich heiße eine Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$

- **offen**, wenn $K = K^o$ gilt
- **abgeschlossen**, wenn $K = \overline{K}$ gilt
- **beschränkt**, wenn es Elemente $R > 0$ und $x_0 \in \mathbf{R}^n$ gibt mit $K \subset B_R(x_0)$
- **kompakt**, wenn $K$ abgeschlossenen und beschränkt ist
- **zusammenhängend**, wenn je zwei Punkte $x_0, x_1 \in K$ durch einen stetigen Weg $x(\cdot) : [0,1] \to K$ verbunden werden können, der ganz in $K$ verläuft: Es gelten $x_0 = x(0), x_1 = x(1)$ sowie $x(t) \in K \;\; \forall\, t \in [0,1]$.

Mit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ meinen wir meistens ein

- **Gebiet**; das ist eine offene und zusammenhängende Punktmenge.

Für eine weitere Teilmenge $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ bedeute

- $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ : $\Omega_0$ ist **kompakt enthalten** in $\Omega$, d.h. $\overline{\Omega_0}$ ist kompakt sowie $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$.

Schließlich bezeichnet für Teilmengen $K \subset \mathbf{R}^n$

- $\operatorname{dist}(x, K) := \inf\limits_{y \in K} |x - y|$ : den **Abstand** des Punktes $x$ zur Menge $K$.

---

Wir setzen des weiteren die Kenntnis des **Funktions**– oder **Abbildungsbegriffs** $f : X \to Y$ voraus. In diesem Zusammenhang heiße

- $D(f) := \{x \in X \,:\, f(x) \neq \emptyset\}$ : der **Definitionsbereich** von $f$. Ist $X$ die maximale Menge, auf der $f$ durch einen formelmäßigen Ausdruck sinnvoll erklärt ist, so heiße $X$ der **maximale Definitionsbereich** von $f$
- $f(A) := \bigcup\limits_{x \in A} f(x) = \{f(x) \in Y \,:\, x \in A\}$ : die **Bildmenge** der Menge $A \subset X$ unter $f$
- $f^{-1}(B) := \{x \in X \,:\, f(x) \in B\}$ : die **Urbildmenge** der Menge $B \subset Y$ unter f
- $R(f) := f(X) \subset Y$ : der **Bildbereich** von $f$
- $N(f) := \{x \in D(f) \,:\, f(x) = 0\}$ : der **Kern** oder **Nullraum** von $f$, sofern $Y$ ein Vektorraum ist.

Wir machen Gebrauch von folgenden Identitäten, die für Mengenfamilien $\{B_\lambda \subset Y \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ gelten:

$$\left.\begin{aligned} f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \\ f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2). \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Nun betrachten wir Funktionen $f : \Omega \to \mathbf{K}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Für $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ sind folgende Definitionen sinnvoll:

- $f^+(x) := \max\{0, f(x)\}$ : der **positive Anteil** von $f$
- $f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}$ : der **negative Anteil** von $f$.

Es gilt stets

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \quad f^+ = \frac{1}{2}\,(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}\,(|f| - f),$$

und jede dieser Funktionen ist stetig, wenn $f$ stetig ist. Für $K := \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ und $f : \Omega \to \mathbf{K}$ bezeichnet die Punktmenge

- $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega \,:\, f(x) \neq 0\}} \subset \overline{\Omega}$ den **Träger** von $f$.

Außerhalb des Trägers $\operatorname{supp} f$ verschwindet die Funktion $f$ identisch.

*Differenzierbarkeitseigenschaften* von $f : \Omega \to \mathbf{K}$ können am elegantesten mit der Multiindexnotation beschrieben werden. Ein $n$–dimensionaler **Multiindex**

$$\rho := (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) \in \mathbf{N}_0^n$$

ist ein geordnetes $n$–Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen. Folgende Konventionen werden getroffen:

- $|\rho| := \sum_{j=1}^{n} \rho_j$ : **Ordnung** oder **Länge** eines Multiindex $\rho$
- $\rho! := \prod_{j=1}^{n} \rho_j!$ : $\rho$–**Fakultät**
- $\binom{k}{\rho} = \frac{k!}{\rho!} = \frac{k!}{\rho_1!\rho_2!\cdots\rho_n!}$ für $|\rho| = k \in \mathbf{N}_0$ : **Polynomialkoeffizient**
- $x^\rho := x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \cdots x_n^{\rho_n}$ für $x \in \mathbf{R}^n$.

Ist $\{a_\rho\}_{0\le|\rho|\le m}$ eine Familie mehrfach indizierter Größen, so vereinbaren wir:

- $\sum_{|\rho|=k} a_\rho$ : Summe aller $a_\rho$ mit Multiindex $\rho$ gleicher Länge $k$
- $\sum_{|\rho|\le m} a_\rho := \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\rho|=k} a_\rho$.

Schließlich bezeichne für $f : \Omega \to \mathbf{K}$

- $D_j f := \dfrac{\partial}{\partial x_j} f :$ die **partielle Ableitung** von $f$ in Richtung $e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$
- $\nabla f := (D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f)^T :$ den **Gradienten** von $f$
- $D^\rho f := D_1^{\rho_1} D_2^{\rho_2} \cdots D_n^{\rho_n} f := \dfrac{\partial^{|\rho|}}{\partial x_1^{\rho_1} \partial x_2^{\rho_2} \cdots \partial x_n^{\rho_n}} f :$ die **partielle Ableitung** der Ordnung $|\rho|$ von $f$,

sofern diese Ausdrücke existieren.

Mit den obigen Notationen führen wir $\mathbf{K}$–Vektorräume stetiger Funktionen ein. Für $k \in \mathbf{N}_0$ und ein Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ bezeichne

- $C^k(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbf{K} : D^\rho f \ : \Omega \to \mathbf{K}$ ist stetig $\forall\ |\rho| \le k\}$
- $C^k(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbf{K} \ : \ \forall\ |\rho| \le k\ \ \exists!\ f_\rho : \overline{\Omega} \to \mathbf{K}$ stetig $\wedge\ D^\rho f(x) = f_\rho(x)\ \forall\ x \in (\overline{\Omega})^o\}$
- $C^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k \in \mathbf{N}_0} C^k(\Omega)$, entsprechend $C^\infty(\overline{\Omega})$
- $C_0^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) \ : \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega\}$
- $C_0^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k \in \mathbf{N}_0} C_0^k(\Omega)$.

Funktionen $f \in C^k(\Omega)$ erfüllen die Schwarzsche **Vertauschungsregel** in allen Ableitungen $D^\rho f$ der Ordnung $|\rho| \le k$. Es kommt auf die Reihenfolge der Differentiation in $D^\rho f = D_1^{\rho_1} D_2^{\rho_2} \cdots D_n^{\rho_n} f$ nicht an:

$$D_1^{\rho_1} \cdots D_i^{\rho_i} \cdots D_j^{\rho_j} \cdots D_n^{\rho_n} f = D_1^{\rho_1} \cdots D_j^{\rho_j} \cdots D_i^{\rho_i} \cdots D_n^{\rho_n} f, \quad i \ne j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |\rho| \le k.$$

Den Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ nennt man häufig (Vektor–)**Raum der Testfunktionen** über $\Omega$.

Schließlich bestehe $V^n$ für einen Funktionenraum $V$ aus allen vektorwertigen Funktionen

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T, \quad f_j \in V \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

---

## 0.2 Elementare Ungleichungen

Ungleichungen der Analysis können häufig aus einem einfachen geometrischen Argument abgeleitet werden. Ein Beispiel für diesen Sachverhalt geben wir im Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 0.1** *Die stetige und streng monoton wachsende Funktion $f : \overline{\mathbf{R}_+} \to \overline{\mathbf{R}_+}$ erfülle $f(0) = 0$ sowie $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Bezeichne $f^{-1}$ ihre Inverse, so gilt für alle $a, b \in \overline{\mathbf{R}_+}$:*

$$\boxed{ab \le \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx.} \tag{2.1}$$

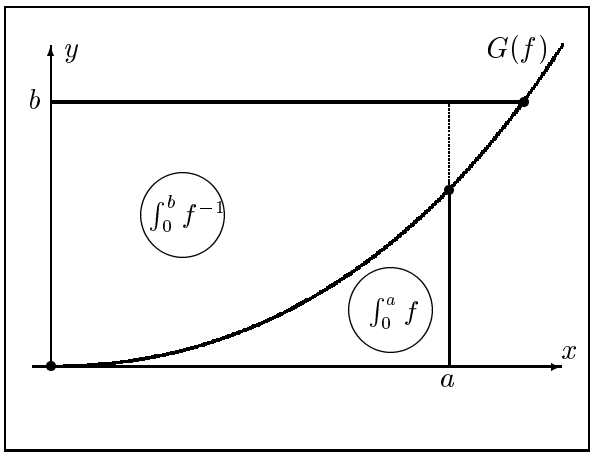


**Fig.1:** Geometrische Interpretation der Ungleichung (2.1)

*Beweis:* Die Existenz der Umkehrfunktion $f^{-1}$ ist wegen der strengen Monotonie sichergestellt, ihre Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $f$. Es ist $ab$ der elementargeometrische Flächeninhalt des oben skizzierten Rechtecks, $\int_0^a f(x)\,dx$ ist die Fläche unterhalb des Graphen $G(f)$ und $\int_0^b f^{-1}(x)\,dx$ diejenige Fläche, die im Intervall $(0,b)$ von der positiven $y$–Achse und $G(f)$ eingeschlossen wird. Die behauptete Ungleichung ist nun aus der Skizze zu ersehen; Gleichheit tritt genau für $b = f(a)$ ein. □

Man erhält aus Satz 0.1 auf sehr einfache Weise die Youngschen **Ungleichungen**:

**Satz 0.2** *Für jedes Paar konjugierter Exponenten $p, q$ mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt die* **verallgemeinerte** Youngsche **Ungleichung**

$$\boxed{ab \le \frac{1}{p}\,\epsilon^p a^p + \frac{1}{q}\,\frac{b^q}{\epsilon^q} \;\; \forall\, a, b, \epsilon \in \overline{\mathbf{R}_+}.} \tag{2.2}$$

*Beweis:* Für $\epsilon = 0$ ist diese Ungleichung trivial. Für $\epsilon > 0$ setzen wir $f(x) := x^{p-1}$ und haben $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$. Nun wenden wir (2.1) an, indem wir $a$ durch $\epsilon a$ und $b$ durch $\epsilon^{-1} b$ ersetzen:

$$ab \le \frac{1}{p}\,x^p\Big|_0^{\epsilon a} + \frac{1}{q}\,y^q\Big|_0^{\epsilon^{-1}b} = \frac{1}{p}\,\epsilon^p a^p + \frac{1}{q}\,\frac{b^q}{\epsilon^q}.$$

Das ist die behauptete Ungleichung. □

Indem man in (2.2) die Zahl $\epsilon$ durch $\sqrt{\epsilon}$ ersetzt und den Sonderfall $p = q = 2$ betrachtet, erhält man die bekanntere Youngsche **Ungleichung**

$$\boxed{ab \le \frac{\epsilon}{2}\,a^2 + \frac{1}{2\epsilon}\,b^2 \;\; \forall\, a, b, \epsilon \in \overline{\mathbf{R}_+},} \tag{2.3}$$

die sonst elementar mit der binomischen Formel bewiesen wird. Man kann sie auch aus (2.1) mit $f(x) := \epsilon x$ und $f^{-1}(y) = \epsilon^{-1} y$ herleiten. Gleichheit gilt also genau für $b = \epsilon a$.

Man verwendet die Ungleichung (2.2) zusammen mit einem *Homogenitätsargument* zum Beweis der Cauchy–Schwarz–**Ungleichungen**:

**Satz 0.3** *Für jedes Paar konjugierter Exponenten $p, q$ mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt die* **verallgemeinerte** CAUCHY–SCHWARZ–**Ungleichung**

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\Big)^{1/q} \ \forall\, x, y \in \mathbf{K}^n.} \tag{2.4}$$

*Beweis:* Die Behauptung ist trivial für $x = 0$ und/oder $y = 0$. Für $x \neq 0 \neq y$ setzen wir $\lambda := 1\Big/\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p}$ sowie $\mu := 1\Big/\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q\Big)^{1/q}$ und definieren neue Vektoren $u := \lambda\, x,\ v := \mu\, y$. Dann gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j|^p = 1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |v_j|^q$ sowie

$$|\langle u, v\rangle| = \Big|\sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j\Big| \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j| \cdot |\bar{v}_j| \overset{(2.2)}{\leq} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} |u_j|^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} |v_j|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Verwendet man nun die Homogenität des Skalarprodukts, nämlich

$$|\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda\, x, \mu\, y\rangle| \ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K},$$

so erhält man aus den obigen Setzungen von $u, v$ schon die behauptete Ungleichung (2.4). □

Im Sonderfall $p = q = 2$ resultiert wiederum die klassische CAUCHY–SCHWARZ–**Ungleichung**

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \ \forall\, x, y \in \mathbf{K}^n.} \tag{2.5}$$

Gleichheit tritt hier genau für $y = \lambda\, x$ auf, also bei linearer Abhängigkeit von $x$ und $y$.

# Kapitel 1

# Topologische und metrische Räume

## 1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

Zur Motivation für das Folgende orientieren wir uns an bekannten Ergebnissen der Analysis des Raumes $\mathbf{R}^n$. Dort ist der Begriff der **Konvergenz** einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^n$ gegen einen Grenzwert $x \in \mathbf{R}^n$ in der folgenden Weise definiert:

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N = N(\epsilon) \,:\, x_k \in B_\epsilon(x) \quad \forall\, k \geq N.} \tag{1.1}$$

Mit anderen Worten, jede offene $\epsilon$–Kugel um $x$ enthält fast alle Folgenglieder. Gemäß der Definition offener Mengen ist (1.1) somit äquivalent zur Forderung, daß in jeder offenen Teilmenge, die den Grenzwert $x$ enthält, fast alle Folgenglieder liegen müssen. Durch **Topologien** werden diese Strukturen auf allgemeine Mengen übertragen.

**Definition 1.1** *Es sei $X$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen von $X$ (genannt: die* **offenen Mengen***) mit der Eigenschaft*

(T1) $\emptyset$ *und $X$ sind offen*

(T2) *Die Vereinigung beliebig (nicht notwendig abzählbar) vieler Mengen ist offen*

(T3) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

*Dann heiße das Mengensystem $\mathcal{T}$ eine* **Topologie** *auf $X$, und das Paar $(X, \mathcal{T})$ heiße ein* **topologischer Raum**.

*Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heiße* HAUSDORFF–**Raum**, *wenn das* **Trennungsaxiom** (T) *erfüllt ist:*

(T) $$\boxed{\forall\, x, y \in X \;\wedge x \neq y \;\; \exists\, A, B \in \mathcal{T} \,:\, x \in A \,\wedge\, y \in B \text{ und } A \cap B = \emptyset.}$$

*Sind $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf derselben Menge $X$ mit $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so heiße $\mathcal{T}_1$* **gröber** *als $\mathcal{T}_2$ und entsprechend $\mathcal{T}_2$* **feiner** *als $\mathcal{T}_1$.*

**BSP. (1.1.1)** Für jede nichtleere Menge $X$ ist die **Potenzmenge** $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X) = 2^X$ gemäß Definition 1.1 eine Topologie auf $X$. Sie heißt die **diskrete** Topologie, und sie ist offenbar die

**feinste** aller möglichen Topologien. Wegen $\{x\} \in \mathcal{T}\ \forall\, x \in X$ ist offensichtlich das Trennungsaxiom (T) erfüllt: $(X, \mathcal{T})$ ist ein HAUSDORFF–Raum.

**BSP. (1.1.2)** Für eine Menge $X \neq \emptyset$ ist $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ ebenfalls eine Topologie auf $X$. Sie ist die **gröbste** aller möglichen Topologien. Hat $X$ mehr als ein Element, so kann $(X, \mathcal{T})$ kein HAUSDORFF–Raum sein.

**Definition 1.2** *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Dann bildet $A$ zusammen mit dem Mengensystem $\mathcal{T}_A := \{M \cap A : M \in \mathcal{T}\}$ einen topologischen Raum $(A, \mathcal{T}_A)$. Die Topologie $\mathcal{T}_A$ heiße* **Relativtopologie** *oder die* **induzierte Topologie** *auf $A$.*

Man beachte, daß die offenen Mengen der Relativtopologie $\mathcal{T}_A$ nicht notwendig offen in $X$ sind, sofern $A$ nicht selber offen in $X$ ist.

Wie im $\mathbf{R}^n$ ist in einem topologischen Raum der Begriff der Abgeschlossenheit **komplementär** zur Offenheit.

**Definition 1.3** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

- $A \subset X$ *heiße* **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow$ $A^c = X \setminus A$ *ist offen:* $A^c \in \mathcal{T}$
- $A^o := \bigcup\limits_{\substack{B \in \mathcal{T} \\ B \subset A}} B$ *heiße* **offener Kern** *oder* **Inneres** *von $A$*
- $\overline{A} := \bigcap\limits_{\substack{B^c \in \mathcal{T} \\ A \subset B}} B$ *heiße* **abgeschlossene Hülle** *oder* **Abschluß** *von $A$.*

Wegen (T2) ist $A^o$ stets offen und wegen $\overline{A} = \Big( \bigcup\limits_{\substack{B^c \in \mathcal{T} \\ A \subset B}} B^c \Big)^c$ ist $\overline{A}$ immer abgeschlossen.

**BSP. (1.1.3)** In der diskreten Topologie $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ gilt ja $A^c \in \mathcal{T}\ \forall\, A \in \mathcal{T}$. Also ist in dieser Topologie **jede** Menge sowohl offen als auch abgeschlossen. In der gröbsten Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ sind nur $\emptyset$ und $X$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

**Definition 1.4** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

- $U(x) \subset X$ *heiße* **Umgebung** *eines Punktes $x \in X$* $:\Leftrightarrow$ $U(x) \in \mathcal{T}$ *und* $x \in U(x)$
- $x \in X$ *heiße* **Berührpunkt** *einer Menge $A \subset X$* $:\Leftrightarrow$ $A \cap U(x) \neq \emptyset$ *für alle Umgebungen $U(x)$ von $x$.*

Wir weisen daraufhin, daß hier Umgebungen eines Punktes $x \in X$ stets **offen** sind. In einigen Monographien werden auch solche Mengen $U(x)$ als Umgebungen von $x$ bezeichnet, zu denen eine offene Menge $A \in \mathcal{T}$ mit $x \in A$ und $A \subset U(x)$ existiert.

Nun können offene und abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raumes auch auf andere Weise charakterisiert werden.

**Satz 1.1** *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.*

(a) *$A$ ist offen $\Leftrightarrow$ Jedes $x \in A$ besitzt eine Umgebung $U(x) \subset A$.*

(b) *$A$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jeder Berührpunkt $x$ von $A$ gehört zu $A$ : $x \in A$.*

(c) $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ ist Berührpunkt von } A\}$.

*Beweis:* (a) Die Implikation "$\Leftarrow$" gilt wegen $A = \bigcup_{x \in A} U(x)$ und wegen (T2). Ist $A$ umgekehrt offen, so ist die Menge $A$ selbst Umgebung jedes ihrer Punkte mit der Eigenschaft $A \subset A$.

(b) Wir zeigen die Implikation "$\Rightarrow$". Sei $A$ abgeschlossen und sei $x$ Berührpunkt von $A$. Wäre $x \in A^c$, so gäbe es gemäß (a) eine Umgebung $U(x) \subset A^c$. Mithin wäre $A \cap U(x) = \emptyset$, im Widerspruch zur Definition 1.4. Also gilt $x \in A$. Zum Beweis der Implikation "$\Leftarrow$" nehmen wir an, $A$ sei nicht abgeschlossen. Dann ist $A^c$ nicht offen, so daß gemäß (a) ein Punkt $x \in A^c$ existiert mit $A \cap U(x) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen $U(x)$. Somit ist $x$ Berührpunkt von $A$, der nach Voraussetzung $x \in A$ erfüllt. Dies widerspricht der Annahme $x \in A^c$. Also muß $A$ abgeschlossen sein.

Die Behauptung (c) ergibt sich unmittelbar aus (b). □

Wir führen nun einen Konvergenzbegriff auf einem topologischen Raum ein.

**Definition 1.5** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset X$ heiße* **konvergent zum Grenzwert** *$x \in X$, in Zeichen $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ :$\Leftrightarrow$*

$$\boxed{\forall\, U(x) \text{ Umgebung } \exists\, N = N(U) : x_k \in U(x) \quad \forall\, k \geq N.} \tag{1.2}$$

**Folgerung 1.1** *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein* HAUSDORFF*–Raum, so hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

*Beweis:* Angenommen, $x \neq y$ wären zwei Grenzwerte der Folge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$. Dann existieren gemäß (T) Umgebungen $U(x)$, $U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Also können nicht fast alle Folgenglieder $x_k$ gleichzeitig in $U(x)$ und $U(y)$ liegen, was der Konvergenzdefinition (1.2) widerspricht. Somit muß $x = y$ gelten. □

Gemäß (1.2) ist die Konvergenz umso leichter zu erzwingen, je weniger offene Mengen zur Auswahl stehen.

**BSP. (1.1.4)** Trägt $X \neq \emptyset$ die gröbste Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, so konvergiert jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset X$ gegen jeden Grenzwert $x \in X$, wie sofort aus (1.2) ersichtlich wird.

**BSP. (1.1.5)** Trägt $X \neq \emptyset$ hingegen die feinste (die diskrete) Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, so konvergieren nur die ab einem Index konstanten Folgen. Gilt nämlich $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ und wählt man die spezielle Umgebung $U(x) := \{x\}$, so muß wegen (1.2) $x_k = x \;\forall\, k \geq N$ gelten.

Neben der Konvergenz spielt der Begriff der Stetigkeit in der Analysis eine wichtige Rolle.

**Definition 1.6** *Seien $X, Y$ topologische Räume.*

- *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heiße* **stetig** :$\Leftrightarrow$ *Die* **Urbilder** *offener Mengen (in $Y$) sind offen (in $X$)*

- *Die Abbildung $f$ heiße* **offen** $:\Leftrightarrow$ *Die* **Bilder** *offener Mengen (in $X$) sind offen (in $Y$).*

**BSP. (1.1.6)** Der Raum $X \neq \emptyset$ trage die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Unabhängig von der Topologie auf $Y$ gilt für jede Abbildung $f : X \to Y$ und für jede Teilmenge $B \subset Y$ die Stetigkeitsbedingung $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Also ist jede Abbildung auf $X$ stetig.

**Bemerkung 1.1** Bei fester Topologie $\mathcal{T}_Y$ auf $Y$ kann die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ immer durch Hinzunahme aller Urbilder $f^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{T}_Y$, zur Topologie $\mathcal{T}_X$ erzwungen werden.

**Satz 1.2** *Seien $X, Y, Z$ topologische Räume. Dann gelten:*

(a) *$f : X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ Die Urbilder abgeschlossener Mengen (in $Y$) sind abgeschlossen (in $X$).*

(b) *Aus $f : X \to Y$ stetig und $g : Y \to Z$ stetig folgt $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

*Beweis:* (a) Wir können ohne Einschränkung $f(X) = Y$ annehmen. Andernfalls setzen wir $\tilde{Y} := f(X)$ und gehen zur Relativtopologie auf $\tilde{Y}$ über. Die Stetigkeitsdefinition 1.6 bleibt hiervon unberührt. Nun gilt aber nach (1.2), Abschnitt 0.1

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^c \ \forall\, B \subset Y,$$

und daraus folgt mit Definition 1.6 die Behauptung.

(b) Eine offene Teilmenge $B \subset Z$ hat wegen der Stetigkeit von $g$ ein offenes Urbild $g^{-1}(B) \subset Y$ und somit wegen der Stetigkeit von $f$ auch ein offenes Urbild $f^{-1}(g^{-1}(B)) \subset X$. □

Topologische Räume können miteinander identifiziert werden, wenn es zwischen ihnen einen **Homöomorphismus** gibt.

**Definition 1.7** *Seien $X, Y$ topologische Räume.*

- *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heiße ein* **Homöomorphismus** $:\Leftrightarrow$ *$f$ ist bijektiv und zusammen mit der inversen Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig*
- *$X, Y$ heißen* **homöomorph** $:\Leftrightarrow$ *Es existiert ein Homöomorphismus $f : X \to Y$.*

**Bemerkung 1.2** Ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist bijektiv, stetig und offen. Er bildet die offenen Mengen des einen Raumes genau auf die offenen Mengen des anderen Raumes ab. Das heißt, beide Räume $X$ und $Y$ haben die gleiche topologische Struktur; man kann sie miteinander identifizieren.

**BSP. (1.1.7)** Ein bekanntes Resultat der reellen Analysis besagt, daß die Inverse einer stetigen bijektiven Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ebenfalls stetig ist. Diese Aussage ist in allgemeinen topologischen Räumen falsch, wie folgendes Beispiel lehrt. Wir setzen

$$X := [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}^1, \qquad Y := \{(y_1, y_2)^T \,:\, y_1^2 + y_2^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^2 \quad \text{(Einheitskreislinie)},$$

und versehen diese Mengen jeweils mit der Relativtopologie. Die Abbildung

$$f = (f_1, f_2)^T : X \to Y, \qquad f_1(x) := \cos x, \ \ f_2(x) := \sin x$$

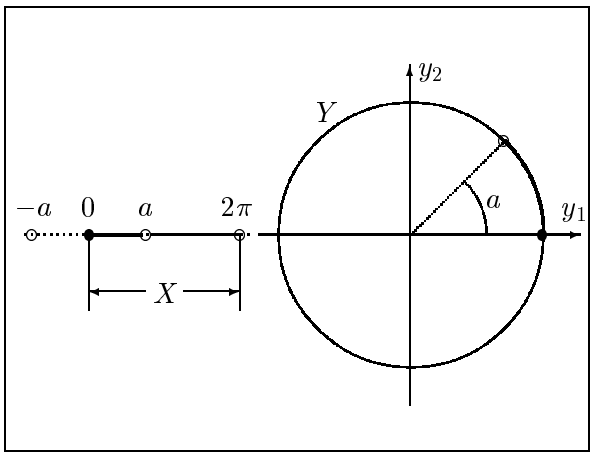


**Fig.2:** Die stetige bijektive Abbildung $f$ hat eine unstetige Inverse

ist stetig und bijektiv, die Inverse dagegen ist unstetig. Jedes Intervall $I_a := [0, a) = (-a, a) \cap X$, $0 < a < 2\pi$, ist nämlich in der Relativtopologie auf $X$ offen, während das Bild $f(I_a) \subset Y$ in der Relativtopologie auf $Y$ nicht offen ist.

In der Analysis des $\mathbf{R}^n$ lassen sich viele topologische Eigenschaften sowohl mit offenen Mengen als auch mit Hilfe von Folgen unter Verwendung des Konvergenzbegriffes charakterisieren. Zum Beispiel sei an die Äquivalenz der Stetigkeitsdefinition zum einen über den Begriff des Funktionenlimes und zum anderen mit Hilfe der $\epsilon - \delta$–Formulierung erinnert. Ein anderes Beispiel ist die Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle $\overline{A}$ einer Menge $A \subset \mathbf{R}^n$ als Menge aller Häufungspunkte von $A$.

In der mengentheoretischen Topologie gilt die Konvention, diejenige Definition immer als die "richtige" anzusehen, die den Folgenbegriff vermeidet, also nur mit den Begriffen der abgeschlossenen und offenen Menge auskommt.

Die Behandlung der Frage, wann eine solche rein topologische Formulierung auch mit Hilfe des Folgenbegriffs ausgedrückt werden kann, erfordert die Einführung einer weiteren Strukturbedingung an den topologischen Raum.

**Definition 1.8** *Seien $X$ ein topologischer Raum und $x \in X$ ein fester Punkt.*

- *Ein System von offenen Teilmengen $\{U_j\}_{j \in I}$ mit $x \in U_j \ \forall\, j \in I$ heiße* **Umgebungsbasis** *von $x$ $:\Leftrightarrow$ Jede Umgebung $U(x)$ von $x$ enthält eine der Mengen $U_j$*
- *$X$ erfüllt das* **erste Abzählbarkeitsaxiom** $:\Leftrightarrow$ *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine* **abzählbare** *Umgebungsbasis.*

**BSP. (1.1.8)** Im $\mathbf{R}^n$ bilden die offenen $\frac{1}{k}$–Kugeln $B_{1/k}(x)$, $k \in \mathbf{N}$ um den Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ eine abzählbare Umgebungsbasis für die Standardtopologie des $\mathbf{R}^n$, der somit das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Nun können wir die Stetigkeit von Abbildungen $f : X \to Y$ mit der Folgenstetigkeit identifizieren.

**Satz 1.3** *Seien $X, Y$ topologische Räume, und $X$ erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann sind für jede Abbildung $f : X \to Y$ die Aussagen* (a) *und* (b) *äquivalent:*

(a) *$f$ ist stetig.*

(b) *$f$ ist* **folgenstetig**, *das heißt:*

$$\boxed{\forall\, x \in X\ \forall\, (x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X \wedge \lim_{k\to\infty} x_k = x : \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x).} \tag{1.3}$$

*Beweis:* Wir zeigen zuerst die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) und geben dazu eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ vor. Sei $V = V(y)$ eine Umgebung von $y = f(x)$ und gelte $U := f^{-1}(V)$. Offenbar ist $x \in U$, und da $f$ stetig sei, muß $U$ offen und somit Umgebung von $x$ sein. Gemäß (1.2) existiert eine Zahl $N = N(U)$ mit $x_k \in U\ \forall\ k \geq N$. Also gilt auch $f(x_k) \in V\ \forall\ k \geq N$ und somit $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = y = f(x)$. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wurde hier nicht verwendet.
Nun zeigen wir die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a). Angenommen, $f$ wäre nicht stetig. Dann existiert eine offene Menge $V \subset Y$, so daß $U := f^{-1}(V) \subset X$ nicht offen ist. Gemäß Satz 1.1(a) gibt es daher einen Punkt $x \in U$, der keine Umgebung in $U$ besitzt. Nun sei aber $\{U_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ die existierende abzählbare Umgebungsbasis von $x$. Aus jeder der offenen Mengen $B_k := \bigcap\limits_{j=1}^{k} U_j$ wählen wir ein $x_k$ mit $x_k \notin U$ aus. Dies ist möglich, denn andernfalls hätten wir $B_k \subset U$, und $B_k$ wäre Umgebung von $x$ in $U$. Nun gilt nach Konstruktion $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, aber $f(x_k) \notin V$, im Widerspruch zur Bedingung (1.3). Also muß $f$ stetig sein. □

Wir charakterisieren auch die Berührpunkte einer Menge mit Hilfe des Folgenbegriffs.

**Satz 1.4** *Der topologische Raum $X$ erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann existiert zu jedem Berührpunkt $x$ einer Menge $A \subset X$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset A$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Insbesondere folgt daraus*

$$\boxed{\overline{A} = \{x \in X : (x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset A \wedge \lim_{k\to\infty} x_k = x\}.} \tag{1.4}$$

*Beweis:* Sei $x \in X$ Berührpunkt der Menge $A \subset X$ und sei $\{U_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ die existierende abzählbare Umgebungsbasis von $x$. Die Schnitte $B_k := \bigcap\limits_{j=1}^{k} U_j$ sind Umgebungen von $x$ und erfüllen somit $A \cap B_k \neq \emptyset$ (siehe Definition 1.4). Wir wählen $x_k \in A \cap B_k$. Dann erfüllt die Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ das in Satz 1.4 Verlangte. □

**Bemerkung 1.3** Topologien auf einer beliebigen Menge $X$ sind i.a. nicht in kanonischer Weise vorgegeben, sondern sie werden meistens durch eine andere Struktur der Menge erzeugt, wie zum Beispiel der Existenz eines Abstandsbegriffes $d(x, y)$ zwischen zwei Punkten $x, y \in X$. Dieser Situation werden wir im nächsten Abschnitt 1.2 begegnen. Ein allgemeineres Konstruktionsverfahren zur Erzeugung einer Topologie besteht darin, ein System von Mengen auszuzeichnen und mit diesen Mengen innere Punkte und damit offene Mengen zu definieren. Diese Vorgehensweise spiegelt sich bei der Konstruktion der Topologie des $\mathbf{R}^n$ wider, wo das erforderliche System von der Familie $\{B_\epsilon(x)\}_{\epsilon>0}$ der offenen $\epsilon$–Kugeln um den Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ gebildet wird. In diesem Sinne definieren wir:

- *Ein System* $\{U_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *von Teilmengen* $U_\lambda(x) \subset X$ *heiße* **lokale Basis** *des Punktes* $x \in X \;:\Leftrightarrow$ *Es gilt* $x \in U_\lambda(x)\ \forall\ \lambda \in \Lambda$.

**Definition 1.9** *Auf der Menge* $X$ *sei für jedes* $x \in X$ *eine lokale Basis* $\{U_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *erklärt.*

- $x \in A$ *heiße* **innerer Punkt** *einer Menge* $A \subset X \;:\Leftrightarrow$ *Es gibt eine* **endliche** *Teilmenge* $\Lambda_N \subset \Lambda$ *mit* $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda_N} U_\lambda(x) \subset A$
- $A \subset X$ *heißt* **offen** $:\Leftrightarrow$ *Jedes* $x \in A$ *ist innerer Punkt von* $A$.

Der hier geprägte Begriff der offenen Teilmengen von $X$ darf natürlich nicht mit den Axiomen des topologischen Raumes kollidieren. Daß beide Definitionen kompatibel sind, besagt der folgende

**Satz 1.5** *Das in* Definition 1.9 *konstruierte System der offenen Mengen ist eine Topologie auf* $X$.

*Beweis:* Es sind die Axiome (T1)–(T3) der Definition 1.1 nachzuweisen. Daß $\emptyset$ und $X$ offen sind, ist eine triviale Folgerung aus Definition 1.9. Also gilt (T1). Weiterhin sei $B := \bigcup\limits_{j\in I} A_j$ die Vereinigungsmenge einer Familie offener Mengen $A_j \subset X$. Zu jedem $x \in B$ existiert ein Index $j_0 \in I$ mit $x \in A_{j_0}$. $x$ ist innerer Punkt von $A_{j_0}$ und als solcher wegen $A_{j_0} \subset B$ auch innerer Punkt von $B$. Also gilt (T2). Da der Begriff des inneren Punktes mit dem **endlichen Durchschnitt** von Mengen $U_\lambda(x)$ definiert wurde, folgt schließlich auch das Axiom (T3), nämlich daß der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen offen ist. □

**Bemerkung 1.4** Sind die Teilmengen $U_\lambda(x)$ aus der lokalen Basis des Punktes $x$ im Sinne der Definition 1.9 offen, so bilden ihre endlichen Durchschnitte eine Umgebungsbasis des Punktes $x$. Im Beispiel des $\mathbf{R}^n$ bildet das System $\{B_\epsilon(x)\}_{\epsilon>0}$ der offenen $\epsilon$–Kugeln um den Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ selbst schon eine Umgebungsbasis von $x$.

**Definition 1.10** *Sei* $X$ *ein topologischer Raum.*

- *Eine Menge* $A \subset X$ *heiße* **dicht** $:\Leftrightarrow\ \overline{A} = X$
- $X$ *heiße* **separabel** $:\Leftrightarrow$ *Es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge* $A \subset X$.

**BSP. (1.1.9)** Der $\mathbf{R}^n$ mit der Standardtopologie ist separabel, denn die Punkte $x \in \mathbf{R}^n$ mit rationalen Koordinaten liegen dicht in $\mathbf{R}^n$. Um dies einzusehen, bedient man sich der Charakterisierung (1.4) und der Tatsache, daß sich jeder Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ beliebig genau durch Punkte mit rationalen Koordinaten approximieren läßt.

**BSP. (1.1.10)** **Das zweite Abzählbarkeitsaxiom**. Eine weitere Möglichkeit der Definition einer Topologie auf einer Menge $X$ bietet sich durch folgende Konstruktion an:

- Man zeichne ein beliebiges System $\{U_j\}_{j\in I}$ von Teilmengen $U_j \subset X$ als offene Mengen aus, unter denen sich $\emptyset$ und $X$ befinden müssen
- Man vervollständige dieses System zu einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$ unter Hinzunahme aller endlichen Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen der $U_j$.

Das Initialsystem $\{U_j\}_{j\in I}$ heißt dann **Subbasis**, die endlichen Durchschnitte der $U_j$ heißen **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$.

Die Begriffe Subbasis und Basis können auch in allgemeinen topologischen Räumen $(X,\mathcal{T})$ sinnvoll geprägt werden, selbst wenn $\mathcal{T}$ nicht nach der obigen Vorschrift entstanden ist. Eine **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$ ist ein Mengensystem, mit dem alle offenen Mengen durch Vereinigung erzeugt werden können. In diesem Sinne definiert man:

**Definition 1.11** *Ein topologischer Raum erfüllt das* **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, *wenn seine Topologie durch eine abzählbare (Sub–)Basis erzeugt werden kann.*

Jede Basis einer Topologie ist sogleich Umgebungsbasis für die Elemente von $X$. Also folgt aus dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom das erste. Die offenen Intervalle im $\mathbf{R}^n$ mit rationalen Endpunkten bilden eine abzählbare Basis der Standardtopologie, so daß der $\mathbf{R}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

**Beachte:** Aus dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom folgt die Separabilität des topologischen Raumes. (Man beweise dies!)

---

## 1.2 Metrische Räume

Wie wir bereits in Bemerkung 1.3 angedeutet haben, können Topologien auf einer Menge $X$ unter anderem durch eine metrische Struktur erzeugt werden. Eine solche Struktur ist die Abstraktion des bekannten Abstandsbegriffes auf dem euklidischen Vektorraum $\mathbf{R}^n$. Wie schon mehrfach erfolgt, wird dabei die Menge $X$ als Punktmenge gedeutet, in welcher Entfernungen zwischen den Punkten definiert sind.

**Definition 1.12** *Gegeben sei eine nichtleere Menge $X$.*

- *Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften*

| | | |
|---|---|---|
| (M1) | $d(x,y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$ | (Definitheit) |
| (M2) | $d(x,y) = d(y,x) \;\forall\; x,y \in X$ | (Symmetrie) |
| (M3) | $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \;\forall\; x,y,z \in X$ | (Dreiecksungleichung) |

  *heiße eine* **Metrik** *auf $X$*

- *Das Paar $(X,d)$ heiße ein* **metrischer Raum**, *wenn $d$ eine Metrik auf $X$ ist.*

**Folgerung 1.2** *Auf einem metrischen Raum $(X,d)$ gilt die* **Viereckungleichung**

$$|d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2)| \leq d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2) \;\; \forall\; x_j, y_j \in X. \tag{2.1}$$

*Beweis:* Wir haben wegen (M2) und (M3)

$$d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y_2) + d(y_1,y_2), \quad d(x_2,y_2) \leq d(x_1,x_2) + d(x_1,y_1) + d(y_1,y_2),$$

und daraus folgt bereits die behauptete Ungleichung (2.1). □

**BSP. (1.2.1)** Beispiele metrischer Räume sind

- der Vektorraum $\mathbf{K}^n$ mit jeder der drei Metriken

(D1) $$\boxed{d(x,y) := |x-y| = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\Big)^{1/2},}$$

(D2) $$\boxed{d^*(x,y) := \max_{1\le j\le n} |x_j - y_j|,}$$

(D3) $$\boxed{d^{**}(x,y) := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|.}$$

Man überzeugt sich durch Nachrechnen sehr einfach von der Gültigkeit der Relationen

$$d^*(x,y) \le d^{**}(x,y) \le \sqrt{n}\, d(x,y), \quad d(x,y) \le d^{**}(x,y) \le n\, d^*(x,y) \tag{2.2}$$

- eine beliebige Menge $X$ mit der **diskreten Metrik**

(D4) $$\boxed{d(x,y) := \begin{cases} 1 \ : \ x \neq y, \\ 0 \ : \ x = y \end{cases}}$$

- jede Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raumes $(X,d)$ mit derselben Metrik $d$
- das Paar $(X, d^*)$ mit der Metrik

(D5) $$\boxed{d^*(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},}$$

wenn $(X,d)$ bereits ein metrischer Raum ist. Es ist klar, daß die Metrikaxiome (M1) und (M2) für $d^*$ sofort aus denen für $d$ folgen. Die Dreiecksungleichung (M3) erhält man mit Hilfe der streng monoton wachsenden Funktion

$$f(t) := \frac{t}{1+t}, \quad t \ge 0,$$

für die $f(b+c) \le f(b) + f(c)\ \forall\, b, c \ge 0$ gilt. Für $0 \le a \le b+c$ folgt nun

$$f(a) \le f(b+c) \le f(b) + f(c),$$

und daraus resultiert (M3), wenn $a := d(x,z)$, $b := d(x,y)$ und $c := d(y,z)$ gesetzt werden

- der Vektorraum $\mathbf{R}^n$ mit der Metrik

(D6) $$\boxed{d(x,y) := \begin{cases} |x-y| & : \ x = \lambda\, y \text{ für ein } \lambda \in \mathbf{R}, \\ |x| + |y| & : \ \text{sonst.} \end{cases}}$$

Die Metrikaxiome (M1) und (M2) sind direkt nachvollziehbar, die Dreiecksungleichung (M3) elementar mit einigen Fallunterscheidungen nachweisbar. Die Metrik (D6) wird in der Literatur manchmal *Washington D.C. Metrik* oder *SNCF–Metrik* (die französische Eisenbahn fährt immer über Paris) genannt.

Der Name **Erlanger Metrik** wurde vom Kollegen M. DOBROWOLSKI geprägt. Er argumentiert im Fall $n = 2$ wie folgt: Um in Erlangen mit dem Bus von einem Ortsteil in den benachbarten zu kommen

(Fußweg 5min.), muß man zuerst zum zentralen Busbahnhof fahren (bzw. zum Hugo), dort umsteigen und dann im wesentlichen die gleiche Strecke wieder zurückfahren. Diese Metrik, die nicht nur bei Mathematikern, sondern auch bei den Benutzern des öffentlichen Nahverkehrs immer wieder neu auf große Begeisterung stößt, ... ist die im Grundraum $\mathbf{R}^2$ definierte Metrik (D6).

**Definition 1.13** *Zwei Metriken $d_1$, $d_2$ auf derselben Menge $X$ heißen* **äquivalent**, *wenn es Zahlen $\alpha$, $\beta > 0$ gibt mit*

$$\boxed{\alpha \cdot d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta \cdot d_1(x,y) \ \forall\ x,y \in X.} \tag{2.3}$$

In diesem Sinne sind die obigen Metriken (D1), (D2), (D3) auf dem Raum $X := \mathbf{K}^n$ äquivalent, wie man aus den Ungleichungen (2.2) ersieht.

Im metrischen Raum $(X,d)$ können nun die Kugeln

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) < \epsilon\},\ \ \epsilon > 0, \quad B^*_\epsilon(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) \le \epsilon\},\ \ \epsilon \ge 0,$$

sinnvoll erklärt werden, die häufig in Analogie zur Terminologie des $\mathbf{R}^n$ die **offenen** (bzw. **abgeschlossenen**) $\epsilon$–Kugeln um den Punkt $x$ genannt werden. Wir werden in BSP.(1.2.3) sehen, daß diese Terminologie im Fall der Abgeschlossenheit nicht immer mit dem topologischen Begriff konform ist. Der metrische Raum $(X,d)$ wird zu einem HAUSDORFF–Raum, indem das System der $\frac{1}{k}$–Kugeln $\{B_{1/k}(x)\}_{k\in\mathbf{N}}$ zur **lokalen Basis** des Punktes $x \in X$ erklärt wird; mit anderen Worten

**Definition 1.14** *Seien $X$ ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.*

- *$A$ ist* **offen** $:\Leftrightarrow$ *Zu jedem $x \in A$ gibt es ein $k \in \mathbf{N}$ mit $B_{1/k}(x) \subset A$*
- *Die so definierte Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$ heiße auch die von der Metrik* **induzierte Topologie**.

**Folgerung 1.3** (a) *Jede der Kugeln $B_\epsilon(x)$, $\epsilon > 0$ ist offen im Sinne der* Definition 1.14.

Sei nämlich $y \in B_\epsilon(x)$ und sei $\rho := d(x,y) < \epsilon$. Wird $k \in \mathbf{N}$ gemäß $0 < 1/k \le \epsilon - \rho$ gewählt, so folgt $B_{1/k}(y) \subset B_\epsilon(x)$, denn es gilt

$$\forall\ z \in B_{1/k}(y) \,:\, d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) < \rho + \frac{1}{k} \le \epsilon.$$

(b) *Das System $\{B_{1/k}(x)\}_{k\in\mathbf{N}}$ bildet eine abzählbare Umgebungsbasis um den Punkt $x \in X$, d.h. $X$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

(c) *Stetigkeit und Folgenstetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen einem metrischen Raum $X$ und einem topologischen Raum $Y$ sind äquivalent* (Satz 1.3).

(d) *Konvergenz einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ zum (eindeutigen) Grenzwert $x \in X$ heißt:*

$$\boxed{\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N = N(\epsilon) \,:\, d(x_k,x) < \epsilon \quad \forall\ k \ge N.} \tag{2.4}$$

**BSP. (1.2.2)** In jedem metrischen Raum $(X,d)$ ist die Metrik $d: X\times X \to \mathbf{R}$ selber stetig, weil folgenstetig: Für $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ und $(y_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y$ folgt nämlich aus (2.1) und (2.4)

$$|d(x,y) - d(x_k,y_k)| \le d(x,x_k) + d(y,y_k) < 2\epsilon,$$

also $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,y_k) = d(x,y)$.

**BSP. (1.2.3)** Im Gegensatz zu den abgeschlossenen $\epsilon$–Kugeln im $\mathbf{R}^n$ gilt in einem allgemeinen metrischen Raum $X$ nicht immer $\overline{B_\epsilon(x)} = B^*_\epsilon(x)$. Die Menge $X$ trage zum Beispiel die diskrete Metrik (D4), in welcher die einpunktigen Mengen $\{x\}$ für jedes $x \in X$ offen sind. Die induzierte Topologie ist also die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Wir erhalten offensichtlich $B^*_1(x) = X$, $B_1(x) = \{x\}$ und somit wegen (1.4) auch $\overline{B_1(x)} = \{x\}$.

In der Analysis spielt der Begriff der **Vollständigkeit** eines topologischen Raumes und der mit ihm verbundene Begriff der CAUCHY–**Folge** eine eminent wichtige Rolle. Wir definieren ganz in Analogie zum $\mathbf{R}^n$:

**Definition 1.15** *Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum.*

- *Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ heiße* CAUCHY–**Folge** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon)\ :\ d(x_j,x_k) < \epsilon \quad \forall\, j,k \ge N.} \tag{2.5}$$

- *$X$ heiße* **vollständig** $:\Leftrightarrow$ *Jede* CAUCHY–*Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ konvergiert gegen ein $x \in X$.*

**Folgerung 1.4** (a) *Jede konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ ist* CAUCHY–*Folge.*

Denn wegen (2.4) gilt unter Verwendung vom (M3)

$$d(x_j,x_k) \le d(x_j,x) + d(x_k,x) < 2\epsilon\ \forall\, j,k \ge N.$$

(b) *Jede* CAUCHY–*Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ ist* **beschränkt**.

Wir wählen in (2.5) $\epsilon = 1$ und bestimmen dazu die Zahl $N$ nach Vorschrift. Setzen wir nun

$$R := 1 + \max_{1\le k<N} d(x_k,x_N),$$

so folgt bereits $x_k \in B_R(x_N)\ \forall\, k \in \mathbf{N}$.

Die Vollständigkeit eines metrischen Raumes vererbt sich auf seine abgeschlossenen Teilmengen.

**Satz 1.6** *Sei $X$ ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt*

$$\boxed{A \text{ ist vollständig} \ \Leftrightarrow\ A \text{ ist abgeschlossen.}}$$

*Beweis:* Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Ist $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset A$ eine CAUCHY–Folge, so hat sie einen Grenzwert $x \in X$. Dieser ist gemäß (2.4) und Definition 1.4 Berührpunkt der Menge $A$ und gehört nach Satz 1.1(b) ebenfalls zu $A$. Wenn umgekehrt $A$ nicht abgeschlossen wäre, so gäbe es einen Berührpunkt $x \in X$ von $A$ mit $x \notin A$. Nach Satz 1.4 gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset A$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Wegen der Vollständigkeit von $A$ muß aber $x \in A$ gelten. □

Wir betrachten nun Homöomorphismen zwischen metrischen Räumen.

**Definition 1.16** *Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume und $T : X \to Y$ eine Abbildung.*

- *$T$ heiße eine* **Isometrie** *zwischen $X$ und $Y$ $:\Leftrightarrow$*

$$\boxed{d_X(x,y) = d_Y(Tx,Ty) \ \forall\, x,y \in X.} \tag{2.6}$$

- *$X, Y$ heißen* **isometrisch** $:\Leftrightarrow$ *Es gibt eine bijektive Isometrie zwischen $X$ und $Y$.*

Eine Isometrie $T : X \to Y$ ist wegen (2.6) injektiv und stetig. Ist $T$ surjektiv, so ist die inverse Abbildung $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls eine Isometrie. Isometrische Räume sind daher als topologische Räume homöomorph. Da durch eine bijektive Isometrie auch die metrischen Strukturen beider Räume ineinander überführt werden, kann man isometrische Räume miteinander identifieren. Insbesondere gilt dies für zwei metrische Räume $(X, d)$ und $(X, d^*)$, wenn die zwei Metriken $d, d^*$ äquivalent sind.

Ist ein metrischer Raum **nicht** vollständig, so gibt es einen Prozeß zu seiner Vervollständigung, der aus der elementaren Analysis der reellen Zahlen bekannt ist. Die Konstruktion der reellen aus den rationalen Zahlen erfolgt zum Beispiel, indem man CAUCHY–Folgen rationaler Zahlen (mit gleichem asymptotischen Verhalten) zu Äquivalenzklassen zusammenfaßt und jede dieser Klassen mit einer reellen Zahl identifiziert. Die Übertragung dieses Prozesses auf allgemeine metrische Räume führt auf den folgenden

**Satz 1.7** *Zu jedem metrischen Raum $X$ gibt es einen vollständigen metrischen Raum $\tilde{X}$ und eine Isometrie $I : X \to \tilde{X}$ derart, daß $I(X)$ dicht in $\tilde{X}$ ist.*

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Vollständigkeitskriterium für metrische Räume, welchem wir die folgende Definition vorausschicken.

**Definition 1.17** *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Die Größe*

$$\boxed{\operatorname{diam} A := \sup_{x,y\in A} d(x,y)}$$

*heiße der* **Durchmesser** *von $A$.*

**Satz 1.8 (Durchschnittssatz von CANTOR)**
*Ein metrischer Raum $X$ ist genau dann vollständig, wenn jede fallende Folge nichtleerer abgeschlossener Mengen $A_k$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0$ genau einen gemeinsamen Punkt $x \in X$ enthält:*

$$\boxed{(A_k \supset A_{k+1} \wedge \lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0) \ \Rightarrow \ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}.} \tag{2.7}$$

*Beweis:* Wir zeigen die Notwendigkeit "⇒". Es sei also $(A_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ eine Folge mit den verlangten Eigenschaften. Aus jedem $A_k$ sei ein $x_k$ ausgewählt. Zu $\epsilon > 0$ sei $N = N(\epsilon)$ so bestimmt, daß $\operatorname{diam} A_k < \epsilon \ \forall\, k \geq N$ gilt. Wegen $x_j \in A_k \ \forall\, j \geq k$ folgern wir $d(x_j, x_k) \leq \operatorname{diam} A_N < \epsilon \ \forall\, j,k \geq N$. Somit ist $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ CAUCHY–Folge, die gegen ein $x \in X$ konvergiert. $x$ ist offenbar Berührpunkt aller $A_k$, und da diese abgeschlossen sind, folgt $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Wären zwei Elemente $x, y$ in diesem Durchschnitt, so wäre $d(x,y) \leq \operatorname{diam} A_k \to 0$ $(k \to \infty)$, also $x = y$.

Zum Beweis der Hinlänglichkeit "⇐" betrachten wir eine CAUCHY–Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ und setzen $A_k := \overline{\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \{x_j\}\right)}$. Dann hat die Folge $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ wegen (2.5) die verlangten Eigenschaften und es gilt (2.7). Der Punkt $x \in X$ ist offensichtlich Grenzwert der betrachteten CAUCHY–Folge. □

---

## 1.3 Der BANACHsche Fixpunktsatz und das Prinzip der sukzessiven Approximation

Eine Vielzahl der Aufgabenstellungen in der Analysis kann reduziert werden auf die Lösung einer allgemeinen nichtlinearen Gleichung $F(x) = f$, die auch äquivalent als **Fixpunktgleichung**

$$\boxed{x = Tx} \tag{3.1}$$

geschrieben werden kann (dazu setze man zum Beispiel $Tx := F(x) + x - f$). Wir gehen hier von der Vorgabe der Abbildung $T : X \to X$ auf einem metrischen Raum $X$ aus und fragen nach einer Lösung $x \in X$ der Gleichung (3.1), die wir **konstruktiv** mit Hilfe des einfachsten Verfahrens, nämlich der **sukzessiven Approximation**

$$\boxed{x_{k+1} := Tx_k, \quad k \in \mathbf{N}_0, \quad x_0 \in X \text{ vorgegeben},} \tag{3.2}$$

bestimmen wollen.

**Definition 1.18** *Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume und $T : X \to Y$ eine Abbildung.*

- *$T$ heiße* LIPSCHITZ–**stetig** :⇔

$$\boxed{\exists\, L \geq 0 \ : \ d_Y(Tx, Ty) \leq L \cdot d_X(x,y) \quad \forall\, x, y \in X.} \tag{3.3}$$

  *Die Zahl $L$ heißt dann* LIPSCHITZ–**Konstante** *von $T$*

- *Ist $X = Y$ und kann in* (3.3) *$L < 1$ gewählt werden, so heiße $T$ eine* **Kontraktion** *(auf $X$). In diesem Fall ist es üblich, die* LIPSCHITZ*–Konstante mit $q$ zu bezeichnen und $q$ die* **Kontraktionskonstante** *von $T : X \to X$ zu nennen*

- *Eine Lösung $x \in X$ der Gleichung* (3.1) *heiße* **Fixpunkt**.

Man verifiziert problemlos, daß eine LIPSCHITZ–stetige Abbildung insbesondere stetig ist.

**Satz 1.9** (BANACHscher **Fixpunktsatz**)
*Es sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ kontrahierend mit einer Kontraktionskonstanten $q \in [0,1)$. Dann hat $T$ in $X$ genau einen Fixpunkt $x = Tx \in X$. Dieser ist bei beliebigem Startwert $x_0 \in X$ der Grenzwert der Folge (3.2) der sukzessiven Approximation. Weiter gelten für jedes $k \in \mathbf{N}$ die Fehlerabschätzungen (FA):*

$$\boxed{d(x,x_k) \le \begin{cases} \dfrac{q^k}{1-q}\, d(Tx_0,x_0) & : \textbf{ a priori FA,} \\ \dfrac{q}{1-q}\, d(x_k,x_{k-1}) & : \textbf{ a posteriori FA.} \end{cases}} \tag{3.4}$$

*Beweis:* Wegen $T(X) \subset X$ gilt in (3.2) stets $x_k \in X \ \forall\, k \in \mathbf{N}$, sofern wir mit beliebigem $x_0 \in X$ starten. Unter Verwendung der Kontraktionsbedingung (3.3) erhalten wir des weiteren

$$d(x_{k+1},x_k) = d(Tx_k,Tx_{k-1}) \le q \cdot d(x_k,x_{k-1}) \le q^2 \cdot d(x_{k-1},x_{k-2}) \le \cdots \le q^k \cdot d(Tx_0,x_0). \tag{3.5}$$

Mittels der $\Delta$–Ungleichung (M3) erschließt man hieraus für jedes $j \in \mathbf{N}$:

$$d(x_{j+k},x_k) \quad \le \quad \sum_{i=1}^{j} d(x_{i+k},x_{i+k-1}) \overset{(3.5)}{\le} q^k \cdot d(Tx_0,x_0) \sum_{i=1}^{j} q^{i-1} = q^k\, \frac{1-q^j}{1-q}\, d(Tx_0,x_0),$$

$$\text{bzw.} \quad \overset{(3.5)}{\le} \quad q \cdot d(x_k,x_{k-1}) \sum_{i=1}^{j} q^{i-1} = q\, \frac{1-q^j}{1-q}\, d(x_k,x_{k-1}).$$

Wegen $0 \le q < 1$ resultiert aus der ersten Ungleichung, daß $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0} \subset X$ CAUCHY–Folge ist, die wegen der Vollständigkeit von $X$ gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert. Auf Grund der Stetigkeit von $T$ kann man in (3.2) zum Grenzwert $k \to \infty$ übergehen und erhält $x = Tx$ sowie aus den obigen Ungleichungen

$$d(x,x_k) = \lim_{j\to\infty} d(x_{j+k},x_k) \le \begin{cases} \dfrac{q^k}{1-q}\, d(Tx_0,x_0), \\ \dfrac{q}{1-q}\, d(x_k,x_{k-1}). \end{cases}$$

Wäre $x$ nicht eindeutig bestimmt, das heißt wäre $y = Ty \ne x$ ein weiterer Fixpunkt, so ergäbe sich

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \le q \cdot d(x,y), \quad \text{also } 0 < (1-q) \cdot d(x,y) \le 0.$$

Dieser Widerspruch löst sich nur für $x = y$. □

Eine modifizierte Version des BANACHschen Fixpunktsatzes geht davon aus, daß $T$ nicht selbst, sondern $T^N$ für eine feste Potenz $N \in \mathbf{N}$ kontrahierend sein muß. Eine Stetigkeitsvoraussetzung an $T$ wird ebenfalls nicht gefordert.

**Satz 1.10** *Es sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung, für die ein $N \in \mathbf{N}$ existiert mit*

$$\boxed{\exists\, q \in [0,1) \,:\, d(T^N x, T^N y) \le q \cdot d(x,y) \quad \forall\, x,y \in X.} \tag{3.6}$$

*Dann besitzt $T$ genau einen Fixpunkt $x = Tx \in X$, und dieser ist bei beliebigem Startwert $x_0 \in X$ der Grenzwert der Folge* (3.2) *der sukzessiven Approximation. Weiter gilt die a priori Fehlerabschätzung*

$$\boxed{d(x, x_{kN+j}) \le \frac{q^k}{1-q}\, d(T^{j+N}x_0, T^j x_0) \quad \forall\, k \in \mathbf{N},\ j = 0, 1, \ldots, N-1.} \tag{3.7}$$

*Beweis:* Gemäß Satz 1.9 hat die Kontraktion $T^N$ genau einen Fixpunkt $x = T^N x \in X$. Dieser kann durch sukzessive Approximation

$$x = \lim_{k\to\infty} (T^N)^k x_0 = \lim_{k\to\infty} T^{kN} x_0, \quad d(x, x_{kN}) \le \frac{q^k}{1-q}\, d(T^N x_0, x_0), \ \ k \in \mathbf{N}, \tag{3.8}$$

bestimmt werden. Um zu zeigen, daß $x$ auch Fixpunkt von $T$ ist, treffen wir die spezielle Wahl $x_0 := Tx \in X$ und folgern $x = \lim\limits_{k\to\infty} T^{kN+1}x = \lim\limits_{k\to\infty} T(\underbrace{T^{kN}x}_{=x}) = Tx$. Es ist zu beachten, daß hier keine Stetigkeit von $T$ benötigt wird.

Zur Klärung der Eindeutigkeit sei angenommen, es wäre $x = Tx$ und $y = Ty$. Dann folgt aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von $T^N$: $(x = T^N x) = (T^N y = y)$. Schließlich ergibt sich die Konvergenz der Folge $(T^k x_0)_{k\in\mathbf{N}_0}$ der sukzessiven Approximation aus (3.8), da jede der Teilfolgen $(T^{kN}T^j x_0)_{k\in\mathbf{N}_0}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, zum selben Grenzwert $x$ konvergiert und darüberhinaus wegen (3.8) der Fehlerabschätzung (3.7) genügt. □

Mit ganz analogen Argumenten zeigt man auch den folgenden Fixpunktsatz, der etwas stärkere Voraussetzungen an die Abbildung $T$ stellt (zum Beispiel ihre LIPSCHITZ–Stetigkeit):

**Satz 1.11 (Fixpunktsatz von** J. WEISSINGER**)**
*Es sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung, für die es eine konvergente Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} L_k$ mit* LIPSCHITZ*–Konstanten $L_k \ge 0$ gibt:*

$$\boxed{d(T^k x, T^k y) \le L_k\, d(x, y) \quad \forall\, x, y \in X, \ \ k \in \mathbf{N}.} \tag{3.9}$$

*Dann besitzt $T$ genau einen Fixpunkt $x = Tx \in X$, und dieser ist bei beliebigem Startwert $x_0 \in X$ der Grenzwert der Folge* (3.2) *der sukzessiven Approximation. Weiter gilt die a priori Fehlerabschätzung*

$$\boxed{d(x, x_k) \le \Big(\sum_{j=k}^{\infty} L_j\Big)\, d(Tx_0, x_0).} \tag{3.10}$$

**BSP. (1.3.1)** **Nichtlineare** VOLTERRA–URYSON**–Integralgleichungen.** Wir betrachten ein abgeschlossenes Intervall $I := [a, b]$ und einen abgeschlossenen Dreiecksbereich $D := \{(s, t) : a \le s \le t \le b\} \subset \mathbf{R}^2$, sowie für Funktionen $f : I \to \mathbf{K}^n$ und $K : D \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ die nichtlineare Integralgleichung

$$x(t) - \int_a^t K(s, t; x(s))\, ds = f(t), \quad t \in I. \tag{3.11}$$

Unter einer *Lösung* dieser Gleichung verstehen wir eine Funktion $x \in X := (C(I))^n$, die die Gleichung (3.11) in jedem Punkt $t \in I$ erfüllt. Die metrischen Räume $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{K}^n$ seien mit der Standardtopologie versehen, und $X$ trage ebenfalls die Standardmetrik

$$d(x,y) := \max_{t\in I} |x(t) - y(t)|, \tag{3.12}$$

so daß $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Wir stellen die folgende Voraussetzung an die Vorgaben:

(V) *Die Abbildung* $D \times \mathbf{K}^n \ni (s,t;x) \mapsto K(s,t;x) \in \mathbf{K}^n$ *sei stetig und erfülle die* LIPSCHITZ*-Bedingung*

$$\exists\, L \geq 0 \,:\, |K(s,t;x) - K(s,t;y)| \leq L \cdot |x-y| \quad \forall\, x,y \in \mathbf{K}^n \;\forall\,(s,t) \in D. \tag{3.13}$$

In diesem Fall gilt der folgende

**Satz 1.12 (Existenzsatz von PICARD)**
*Unter den Voraussetzungen* (V) *sei der metrische Raum* $X := (C(I))^n$ *mit einer* **gewichteten Metrik**

$$d_A(x,y) := \max_{t\in I} e^{-A(t-a)}|x(t) - y(t)|, \quad x,y \in X \tag{3.14}$$

*versehen. Darin sei die Konstante* $A > 0$ *gemäß*

$$\boxed{\frac{L}{A}\,(1 - e^{-A(b-a)}) =: q < 1} \tag{3.15}$$

*gewählt. Dann besitzt die Integralgleichung* (3.11) *für jede Vorgabe* $f \in X$ *genau eine Lösung* $x \in X$*, und diese ist der Fixpunkt* $x = Tx$ *der durch*

$$(Tx)(t) := f(t) + \int_a^t K(s,t;x(s))\,ds, \quad x \in X, \;\; t \in I \tag{3.16}$$

*definierten Abbildung* $T$*. Es gilt das Prinzip der sukzessiven Approximation, d.h.:*

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} := \lim_{k\to\infty} T^k x_0, \;\; x_0 := f, \quad d_A(x,x_k) \leq \frac{q^k}{1-q}\, d_A(Tf,f). \tag{3.17}$$

*Beweis:* Zunächst ist die gewichtete Metrik (3.14) wegen

$$e^{-A(b-a)} d(x,y) \leq d_A(x,y) \leq d(x,y) \;\forall\, x,y \in X$$

äquivalent zur Standardmetrik (3.12). Somit ist auch $(X,d_A)$ ein vollständiger metrischer Raum, da äquivalente Metriken dieselbe Topologie auf $X$ erzeugen. Es ist klar, daß $T$ unter der Voraussetzung (V) für jedes $f \in X$ eine Selbstabbildung von $X$ in sich ist: $T : X \to X$. Ferner ist die Integralgleichung (3.11) äquivalent zur Fixpunktgleichung $x = Tx$, so daß die Behauptungen des Satzes aus dem BANACHschen Fixpunktsatz 1.9 folgen, sofern dessen Voraussetzung der Kontraktion erfüllt ist. Dazu sei $0 \leq q < 1$ gemäß (3.15) fixiert. Für jedes Paar $x,y \in X$ erhalten wir:

$$e^{-A(t-a)}|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq e^{-A(t-a)} \int_a^t |K(s,t;x(s)) - K(s,t;y(s))|\,ds$$

$$\overset{(3.13)}{\leq} L \int_a^t e^{-A(t-s)} e^{-A(s-a)} |x(s) - y(s)|\,ds \leq \Big(L \int_a^t e^{-A(t-s)}\,ds\Big) \cdot d_A(x,y)$$

$$\leq \frac{L}{A}\,(1 - e^{-A(t-a)}) \cdot d_A(x,y) \leq q \cdot d_A(x,y).$$

Durch Übergang zum Maximum über $t \in I$ erhält man die Kontraktionsbedingung $d_A(Tx, Ty) \leq q \cdot d_A(x, y)$. □

**BSP. (1.3.2)** **Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen.** Für $f : [a, b] \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I := [a, b], \quad x(a) = x_0 \in \mathbf{K}^n \text{ vorgegeben.} \tag{3.18}$$

Unter einer *Lösung* dieser Aufgabe verstehen wir eine Funktion $x \in (C^1(I))^n$, die die Differentialgleichung in jedem Punkt $t \in I$ erfüllt. Wir setzen hier voraus:

($\mathrm{V}_D$) *Die Abbildung* $I \times \mathbf{K}^n \ni (t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbf{K}^n$ *sei stetig und erfülle die* LIPSCHITZ*–Bedingung*

$$\exists\, L \geq 0 : |f(t, x) - f(t, y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}^n \ \forall\, t \in I. \tag{3.19}$$

Wie in BSP.(1.3.1) trage $X := (C(I))^n$ die Standardmetrik $d$ aus (3.12). Unter der Voraussetzung ($\mathrm{V}_D$) ist die Aufgabe (3.18) äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))\, ds, \quad t \in I. \tag{3.20}$$

Jede Lösung $x \in X$ von (3.20) hat wegen der glättenden Eigenschaft der Integration die bessere Regularität $x \in (C^1(I))^n$ und löst die Aufgabe (3.18). Nun ist die Integralgleichung (3.20) vom Typ (3.11), und ($\mathrm{V}_D$) impliziert die Voraussetzung (V). Somit besitzt die Anfangswertaufgabe (3.18) gemäß Satz 1.12 genau eine Lösung $x(t)$. □

Falls die Funktion $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ nur in einer Teilmenge $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ mit $x_0 \in \Omega$ einer LIPSCHITZ–Bedingung genügt, so kann die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zur Anfangswertaufgabe (3.18) i.a. nur auf einem Teilintervall $[a, b']$ erwartet werden. Solche lokalen Existenzaussagen werden in der gängigen Literatur gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt (z.B. W. WALTER: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Heidelberger Taschenbücher 110, Springer–Verlag 1972).

Die Frage, wann eine Funktion $f(x)$ der **reellen** Veränderlichen $x \in \mathbf{R}^n$ einer LIPSCHITZ–Bedingung genügt, kann häufig mit folgendem Satz beantwortet werden, in welchem $J_f(x) := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ die JACOBI–Matrix von $f \in \mathrm{Abb}\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ im Punkte $x$ bezeichnet.

**Satz 1.13** *Sei* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *ein konvexes Gebiet. Dann ist jede in* $\Omega$ *differenzierbare Funktion* $f : \Omega \to \mathbf{R}^m$ *mit beschränkter Ableitung* $\sup\limits_{x \in \Omega} |J_f(x)| = M$ LIPSCHITZ*–stetig in* $\Omega$ *mit der* LIPSCHITZ*–Konstanten* $M$*:*

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y| \quad \forall\, x, y \in \Omega.} \tag{3.21}$$

*Beweis:* Mit je zwei Punkten $x, y \in \Omega$ liegt wegen der Konvexität von $\Omega$ auch die Verbindungsstrecke $\xi(t) := (1-t)x + ty$, $0 \leq t \leq 1$ ganz in $\Omega$. Wir haben wegen der Voraussetzung der Differenzierbarkeit:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\xi(t))\, dt = \int_0^1 J_f(\xi(t))(y - x)\, dt,$$

und somit durch Setzen der Beträge $|f(y) - f(x)| \leq M \cdot |y - x|$. □

**Bemerkung 1.5** Eine differenzierbare Funktion mit unbeschränkter Ableitung ist i.a. nicht LIPSCHITZ–stetig, wie das Beispiel der Funktion $f(y) := y^2$ zeigt. Die Differentialgleichung $y' = y^2$ belegt nun auch, daß das Resultat aus BSP.(1.3.2) nicht zu verbessern ist, denn die Lösungen $y(t) = \frac{1}{C - t}$ existieren nicht für alle $t$.

## 1.4 Kompakte Räume

Ein Standardergebnis der reellen Analysis des $\mathbf{R}^n$, nämlich der Auswahlsatz von Bolzano–Weierstrass besagt, daß jede unendliche Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset K$ in einer beschränkten und abgeschlossenen Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ einen Häufungspunkt besitzt: Es existiert eine Teilfolge $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ und ein $x \in K$ mit $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} x_k = x$. Diese Bolzano–Weierstrass–**Eigenschaft** ist die Grundlage für zahlreiche Aussagen der reellen Analysis, obwohl sie in manchen Fällen nur latent auftritt.

**BSP. (1.4.1)** Eine stetige Funktion $f \in \mathrm{Abb}\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{K})$ ist auf einer beschränkten und abgeschlossenen Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ beschränkt:

$$\boxed{\exists\, M > 0 \,:\, |f(x)| \le M \quad \forall\, x \in K.} \tag{4.1}$$

Denn andernfalls hätten wir

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \;\; \exists\, x_k \in K \,:\, |f(x_k)| > k, \tag{4.2}$$

so daß der Auswahlsatz von Bolzano–Weierstrass die Existenz einer Teilfolge $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ und eines Punktes $x \in K$ lieferte mit $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} x_k = x$. Da $f$ aber stetig ist, folgte auch $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} f(x_k) = f(x)$ im Widerspruch zu (4.2), wonach $\liminf\limits_{k\in\mathbf{N}'} |f(x_k)| \ge \lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} k = \infty$ gilt. □

Hier haben wir die Bolzano–Weierstrass–Eigenschaft der Menge $K$ explizit genutzt.

**BSP. (1.4.2)** **(Extremalsatz)** Eine stetige Funktion $f \in \mathrm{Abb}\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ nimmt auf einer beschränkten und abgeschlossenen Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ das Maximum und das Minimum ihrer Funktionswerte jeweils in einem Punkt der Menge $K$ an:

$$\boxed{\exists\, x_*, x^* \in K \,:\, f(x_*) = \min_{x\in K} f(x), \quad f(x^*) = \max_{x\in K} f(x).} \tag{4.3}$$

Denn da die Menge $f(K) \subset \mathbf{R}$ beschränkt ist, sichert das Supremumsprinzip die Existenz der Zahl $M := \sup f(K)$; es gilt mit anderen Worten

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, x \in K \,:\, M - f(x) < \epsilon. \tag{4.4}$$

Hiermit zeigen wir die Existenz eines Punktes $x^* \in K$ mit $f(x^*) = M$. Wäre nämlich $f(x) < M \;\forall\, x \in K$, so wäre die Funktion $g(x) := 1/(M - f(x))$ auf ganz $K$ stetig, positiv und beschränkt: $0 < g(x) \le L \;\forall\, x \in K$. Wird jedoch in (4.4) die Zahl $\epsilon > 0$ zu $\epsilon := \frac{1}{2L}$ fixiert, so finden wir dazu ein $x \in K$ mit $2L < 1/(M - f(x)) = g(x)$, im Widerspruch zur Beschränktheit von $g$. Ganz analog können wir mit dem Beweis der Aussage $f(x_*) = \min\limits_{x\in K} f(x)$ verfahren. □

In diesem Beweis wird die Bolzano–Weierstrass–Eigenschaft nicht explizit verwendet; sie steckt natürlich latent in der Aussage über die Beschränktheit der Mengen $f(K)$ und $g(K)$.

Von **Kompaktheit** ist hier zunächst keine Rede; es liegt jedoch auf der Hand, die Kompaktheit mit der Bolzano–Weierstrass–Eigenschaft gleichzusetzen.

**Definition 1.19** *Eine Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ heiße* **kompakt** $:\Leftrightarrow$ *Jede unendliche Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset K$ besitzt einen Häufungspunkt $x \in K$: Es gibt eine Teilfolge $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ mit $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} x_k = x$.*

Nun sind die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen $K \subset \mathbf{R}^n$ wegen ihrer BOLZANO–WEIERSTRASS–Eigenschaft kompakt. Daß auch die umgekehrte Aussage in $\mathbf{R}^n$ wahr ist, wird in dem bekannten Satz von HEINE–BOREL konstatiert.

**Satz 1.14 (von HEINE–BOREL)**
*Eine Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn $K$ beschränkt und abgeschlossen ist.*

Wir orientieren uns an diesen Sachverhalten des $\mathbf{R}^n$ und definieren allgemeiner:

**Definition 1.20** *Sei $X$ ein topologischer Raum.*

- *$X$ heiße* **kompakt** $:\Leftrightarrow$ *Jedes System $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von offenen Mengen $A_\lambda \subset X$ mit der Überdeckungseigenschaft $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ enthält eine* **endliche** *Teilüberdeckung: Es gibt eine* **endliche** *Teilmenge $\Lambda_N \subset \Lambda$ mit $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda_N} A_\lambda$*

- *$X$ heiße* **folgenkompakt** $:\Leftrightarrow$ *Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}'}$ mit Grenzwert $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} x_k = x \in X$.*

*Diese Definitionen sind auch für Teilmengen $K \subset X$ des topologischen Raumes $X$ gültig.*

Die BOLZANO–WEIERSTRASS–Eigenschaft, nämlich daß beschränkte und abgeschlossene Mengen kompakt sind, ist in allgemeinen metrischen Räumen falsch. Es gilt vielmehr

**Satz 1.15** *Der topologische Raum $X$ erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt:*

$$\boxed{X \text{ ist kompakt } \Rightarrow \text{ } X \text{ ist folgenkompakt.}}$$

*Beweis:* Sei also $X$ kompakt. Wir nehmen im Widerspruch zur Behauptung an, $X$ sei nicht folgenkompakt. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Wir zeigen in einer Teilbehauptung:

$$\forall\, x \in X \;\exists\, U(x) \text{ Umgebung} : U(x) \text{ enthält höchstens endlich viele der } x_k. \tag{4.5}$$

Denn nach dem ersten Abzählbarkeitsaxiom besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\{U_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, zu der wir die Mengen $V_m := \bigcap\limits_{j=1}^{m} U_j \supset V_{m+1}$ definieren können. Würde jedes $V_m$ unendlich viele Folgenglieder enthalten, so könnte induktiv aus $V_m$ ein Folgenglied $x_{k_m}$ ausgewählt werden mit $k_m > k_{m-1}$. Da jede Umgebung $U(x)$ gemäß Definition 1.8 ein $V_m$ enthält, wären dann auch fast alle Elemente der Teilfolge $(x_{k_m})_{m\in\mathbf{N}}$ in $U(x)$ enthalten. Dies widerspricht der gestellten Prämisse, also gilt (4.5).

Die gemäß (4.5) existierenden $U(x)$ bilden eine offene Überdeckung von $X$, die wegen der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung enthält. Somit können nur endlich viele Folgenglieder in dieser Teilüberdeckung liegen, im Widerspruch zu $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$. □

In einem kompakten HAUSDORFF–Raum sind Kompaktheit und Abgeschlossenheit von Teilmengen äquivalent:

**Satz 1.16** *Seien $X$ ein kompakter* HAUSDORFF*–Raum und $K \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

$$\boxed{K \text{ kompakt} \Leftrightarrow \quad K \text{ abgeschlossen.}}$$

*Beweis:* Zum Beweis der Notwendigkeit "$\Rightarrow$" zeigen wir, daß $K^c$ offen ist und wählen dazu ein $z \in K^c$. Das Trennungsaxiom (T) garantiert zu jedem $x \in K$ die Existenz von offenen Umgebungen $V_x(z), U(x)$ mit $V_x(z) \cap U(x) = \emptyset$. Das System $\{K \cap U(x) \,:\, x \in K\}$ ist eine offene Überdeckung von $K$ bezüglich der Relativtopologie und enthält somit endlich viele Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_N \in K$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} U(x_j)$. Dann ist $V(z) := \bigcap_{j=1}^{N} V_{x_j}(z)$ eine Umgebung von $z$ mit $K \cap V(z) = \emptyset$, also $V(z) \subset K^c$.

Zum Beweis der Hinlänglichkeit "$\Leftarrow$" sei eine offene Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ der abgeschlossenen Menge $K$ vorgegeben. Das Mengensystem $\{K^c, U_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ ist dann eine offene Überdeckung von $X$, die wegen der Kompaktheit von $X$ eine endliche Teilüberdeckung von $X$ und damit auch von $K$ enthält. □

In einem metrischen Raum sind präzisere Aussagen möglich:

**Folgerung 1.5** *Ein folgenkompakter metrischer Raum $X$ ist vollständig.*

*Beweis:* Eine beliebige CAUCHY–Folge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset X$ besitzt gemäß Definition 1.20 eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbf{N}}$ mit $\lim\limits_{j \to \infty} x_{k_j} = x \in X$. Das heißt, zu jeder Vorgabe $\epsilon > 0$ gibt es Zahlen $j = j(\epsilon)$ und $N = N(\epsilon)$ mit

$$d(x_{k_j}, x) < \epsilon, \quad d(x_{k_j}, x_\ell) < \epsilon \;\; \forall\, \ell \geq N.$$

Daher gilt $d(x_\ell, x) < 2\epsilon \;\; \forall \;\; \ell \geq N$. Eine CAUCHY–Folge ist somit konvergent, wenn eine Teilfolge konvergiert. □

**Definition 1.21** *Ein metrischer Raum $X$ heiße* **praekompakt** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, x_1, x_2, \ldots, x_N \in X \,:\, X \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(x_j).} \tag{4.6}$$

*Darin bezeichnet $B_\epsilon(x)$ die offene $\epsilon$–Kugel um den Punkt $x$.*

**Satz 1.17** *Seien $X$ ein vollständiger metrischer Raum und $K \subset X$ eine Teilmenge. Dann gelten:*

(a) $$\boxed{K \text{ kompakt} \Leftrightarrow \quad K \text{ folgenkompakt.}}$$

(b) *Falls $K$ darüber hinaus* **abgeschlossen** *ist, so hat man auch*

$$\boxed{K \text{ kompakt} \Leftrightarrow \quad K \text{ praekompakt.}}$$

*Beweis:* Wir beweisen die folgenden Implikationen, aus denen sich dann sofort die Aussagen (a) und (b) ergeben.

(i) $K$ kompakt $\Rightarrow$ $K$ folgenkompakt: Da ein metrischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (Folgerung 1.3(b)), ist dies eine Konsequenz aus Satz 1.15.

(ii) $K$ folgenkompakt $\Rightarrow$ $K$ praekompakt und abgeschlossen: Jeder Grenzwert von konvergenten Folgen $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset K$ gehört zu $K$; also ist $K$ abgeschlossen. Angenommen, $K$ wäre nicht praekompakt. Dann gibt es im Gegensatz zu (4.6) ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset K$ mit $d(x_j, x_k) \geq \epsilon \ \forall\, j,k \in \mathbf{N}$. Diese Folge enthält somit keine konvergente Teilfolge. $K$ wäre dann auch nicht folgenkompakt.

(iii) $K$ praekompakt und abgeschlossen $\Rightarrow$ $K$ kompakt: Angenommen, es sei $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von $K$, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Nun läßt sich $K$ gemäß (4.6) auch durch abgeschlossene Kugeln $\overline{B_1(x_1)}, \ldots, \overline{B_1(x_N)}$ vom Radius 1 überdecken. Unter diesen Kugeln muß es ein $\overline{B_1(x_{j_1})}$ geben, so daß sich $B_1 := \overline{B_1(x_{j_1})} \cap K$ ebenfalls nicht durch endlich viele der $U_\lambda$ überdecken läßt. $B_1$ wird durch endlich viele Kugeln vom Radius $\frac{1}{2}$ überdeckt, und man iteriert das obige Argument. Es resultiert somit eine Folge von abgeschlossenen Mengen $B_k$, die sich nicht durch endlich viele der $U_\lambda$ überdecken lassen, mit

$$K \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots, \quad B_k \subset \overline{B_{1/k}(x_{j_k})}.$$

Nach dem CANTORschen Durchschnittssatz 1.8 gibt es genau ein $x \in K$ im Schnitt dieser $B_k$. Weiter liegt $x$ in einem $U_\lambda$, und da $U_\lambda$ offen ist, muß auch ein $B_k$ für genügend großes $k$ in diesem $U_\lambda$ liegen, was der Konstruktion der $B_k$ widerspricht. □

**Bemerkung 1.6** In der Literatur wird häufig die Aussage von Satz 1.17(b) als Definition der Praekompaktheit verwendet: $K$ heiße praekompakt, wenn der Abschluß $\overline{K}$ kompakt ist. Diese Definition ist nur in vollständigen metrischen Räumen zur Definition 1.21 äquivalent. Vielerorts wird deshalb auch die folgende Definition verwendet:

- *In einem metrischen Raum $X$ heiße $K \subset X$* **relativ kompakt** $:\Leftrightarrow$ *$\overline{K}$ ist kompakt.*

Eine wichtige Eigenschaft kompakter metrischer Räume ist ihre Separabilität:

**Satz 1.18** *Ein kompakter metrischer Raum $X$ ist separabel.*

*Beweis:* Für $\epsilon_k := \frac{1}{k}$ kann $X$ durch endlich viele offene $\epsilon_k$–Kugeln $B_{\epsilon_k}(x_{jk})$ mit Mittelpunkten $x_{jk}$, $j = 1, 2, \ldots, N_k$, überdeckt werden. Die abzählbare Menge dieser Mittelpunkte liegt dicht in $X$, denn jeder Punkt $x \in X$ kann beliebig genau durch ein solches $x_{jk}$ approximiert werden: Bei festem $k$ liegt $x$ nämlich in einer der Kugeln $B_{\epsilon_k}(x_{jk})$ und erfüllt dann $d(x, x_{jk}) < \frac{1}{k}$. □

Nun verallgemeinern wir den Extremalsatz aus BSP.(1.4.2).

**Satz 1.19** *Seien $X, Y$ topologische Räume und sei $X$ kompakt. Dann gilt:*

(a) *Für stetige Funktionen $f : X \to Y$ ist das Bild $f(X)$ kompakt.*

(b) *Stetige Funktionen $f : X \to \mathbf{R}$ nehmen auf $X$ das Maximum und das Minimum ihrer Funktionswerte jeweils in einem Punkt von $X$ an: Es gilt (4.3) mit $K := X$.*

*Beweis:* (a) Die Urbildmengen $f^{-1}(U_\lambda)$ einer offenen Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von $f(X)$ bilden eine offene Überdeckung von $X$, aus der eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda_N}$ ausgewählt werden kann. Das System $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_N}$ ist dann die gesuchte endliche Teilüberdeckung von $f(X)$.

(b) Gemäß (a) ist $f(X)\subset\mathbf{R}$ kompakt, also nach dem Satz von HEINE–BOREL beschränkt und abgeschlossen. Somit überträgt sich der Beweisgang aus BSP.(1.4.2) wörtlich auf die hier vorliegende Situation. □

**Bemerkung 1.7** Der Satz 1.19 bleibt richtig, wenn man kompakt durch folgenkompakt und stetig durch folgenstetig ersetzt. Man orientiere sich an BSP.(1.4.1) und dem Beweis von Satz 1.3(b).

# Kapitel 2

# Banach– und Hilbert–Räume

## 2.1 Banach–Räume

In diesem Kapitel sind alle Vektorräume reell oder komplex; entsprechend bezeichnen wir mit $\mathbf{K}$ wieder einen der beiden Körper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

**Definition 2.1** *Sei $X$ ein Vektorraum über $\mathbf{K}$.*

- *Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \overline{R_+}$ mit den Eigenschaften*

| | | |
|---|---|---|
| (N1) | $\|x\| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq x \in X$ | (Definitheit) |
| (N2) | $\|\lambda\, x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{K} \;\forall\, x \in X$ | (Homogenität) |
| (N3) | $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ | (Dreiecksungleichung) |

  *heiße eine* **Norm** *auf $X$. Um den eindeutigen Bezug auf $X$ zu kennzeichenen, schreiben wir mitunter auch $\|\cdot\|_X$ anstelle von $\|\cdot\|$*

- *Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heiße ein* **normierter** (*Vektor–*)**Raum**, *wenn $\|\cdot\|$ eine Norm auf $X$ ist*

- *Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$ heiße eine* **Halbnorm** *auf $X$, wenn die Axiome* (N2) *und* (N3) *erfüllt sind. Eine Halbnorm kennzeichnen wir mitunter auch durch das Symbol $p(x) := \|x\|$, $x \in X$.*

**Folgerung 2.1** (a) *Im normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ gilt die Ungleichung*

$$\boxed{|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad \forall\, x, y \in X.} \tag{1.1}$$

Diese folgt aus (N3), wenn wir die zwei folgenden Ungleichungen betrachten:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \overset{(N3)}{\leq} \|x - y\| + \|y\|, \quad \|y\| = \|y - x + x\| \overset{(N2,N3)}{\leq} \|x - y\| + \|x\|.$$

(b) *Eine Norm* $\|\cdot\| : X \to \overline{\mathbf{R}_+}$ *erzeugt vermöge*

$$\boxed{d(x,y) := \|x-y\| \quad \forall\, x,y \in X} \tag{1.2}$$

*eine (translationsinvariante)* **Metrik** *auf* $X$*:*

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad \forall\, x,y,z \in X.$$

*Somit ist jeder normierte Raum* $(X, \|\cdot\|)$ *stets auch metrischer Raum* $(X,d)$*.*

(c) *Eine Norm* $\|\cdot\| : X \to \overline{\mathbf{R}_+}$ *ist stetig, da folgenstetig* (Satz 1.3).
Denn die Konvergenz einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ zum Grenzwert $x$ bedeutet ja $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,x) = 0$. Hieraus erschließt man

$$0 \le \lim_{k\to\infty} |\|x_k\| - \|x\|| \overset{(1.1)}{\le} \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = \lim_{k\to\infty} d(x_k,x) = 0.$$

(d) *Die linearen Operationen "+" (Addition) und "*$\lambda\cdot$*" (Multiplikation mit Skalaren) sind auf* $X$ *stetig.*
Seien nämlich $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}, (y_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $x \in X$ bzw. $y \in X$. Dann gilt für jedes Paar $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$:

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \|(\lambda\, x_k + \mu\, y_k) - (\lambda\, x + \mu\, y)\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda\,(x_k - x) + \mu\,(y_k - y)\|$$

$$\overset{(\mathrm{N2,N3})}{\le} |\lambda| \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| + |\mu| \lim_{k\to\infty} \|y_k - y\| = 0,$$

also $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda\, x_k + \mu\, y_k) = \lambda\, x + \mu\, y$. Ferner sei $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$ eine konvergente Zahlenfolge mit Grenzwert $\lambda$. Dann gilt wegen der Beschränktheit $|\lambda_k| \le L$ konvergenter Zahlenfolgen:

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \|\lambda_k x_k - \lambda\, x\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda_k (x_k - x) + (\lambda_k - \lambda)\, x\| \overset{(\mathrm{N2,N3})}{\le} L \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| + \|x\| \lim_{k\to\infty} |\lambda_k - \lambda| = 0,$$

also $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k x_k = \lambda\, x$.

(e) *Das System der offenen* $\frac{1}{k}$*–Kugeln* $\{B_{1/k}(0)\}_{k\in\mathbf{N}}$ *bildet eine abzählbare* **Nullumgebungsbasis***; durch Translation* $B_{1/k}(x) = x + B_{1/k}(0)$ *erhält man die Umgebungsbasen jedes anderen Punktes* $x \in X$*. Somit sieht die Topologie eines normierten Raumes* $X$ *in jedem Punkt* $x \in X$ *gleich aus.*

**Definition 2.2** *Ein vollständiger normierter Raum heiße* BANACH–**Raum**.

**BSP. (2.1.1)** **Die Räume** $\ell^p$ **und** $c_0(\mathbf{N})$**.** Wir bezeichnen mit $X$ die Menge aller Zahlenfolgen $x = (x(i))_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$. Versehen mit der linearen Struktur

$$\text{"+"} \;:\; x + y = (x(i))_{i\in\mathbf{N}} + (y(i))_{i\in\mathbf{N}} := (x(i) + y(i))_{i\in\mathbf{N}} \quad \forall\, x,y \in X,$$

$$\text{"}\lambda\cdot\text{"} \;:\; \lambda\, x = \lambda\,(x(i))_{i\in\mathbf{N}} := (\lambda\, x(i))_{i\in\mathbf{N}} \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{K}\ \forall\, x \in X,$$

ist $X$ ein Vektorraum über $\mathbf{K}$. Wir definieren die folgenden Unterräume von $X$:

$$\begin{aligned}
\ell^p &:= \{x \in X : \|x\|_{\ell^p} := \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p\Big)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \le p < \infty, \\
\ell^\infty &:= \{x \in X : \|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i\in\mathbf{N}} |x(i)| < \infty\}, \\
c_0(\mathbf{N}) &:= \{x \in X : \lim_{i\to\infty} x(i) = 0\}, \quad \text{versehen mit der Abbildung } \|\cdot\|_{\ell^\infty} : X \to \overline{\mathbf{R}_+}.
\end{aligned}$$

Um nachzuweisen, daß wir hier BANACH–Räume vorliegen haben, benötigen wir als technisches Hilfsmittel die Ungleichungen von HÖLDER und MINKOWSKI:

**Satz 2.1** (a) *Für jedes Paar konjugierter Exponenten $p, q$ mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und für $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$ gilt:*

$$\boxed{\text{(i)}\ \ xy := (x(i)y(i))_{i\in\mathbf{N}} \in \ell^1, \qquad \text{(ii)}\ \ \|xy\|_{\ell^1} \le \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^q}. \quad \text{(HÖLDER–Ungleichung)}}$$

(b) *Für $1 < p < \infty$ und $x, y \in \ell^p$ gilt:*

$$\boxed{\|x + y\|_{\ell^p} \le \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}. \quad \text{(MINKOWSKI–Ungleichung)}}$$

*Beweis:* (a) Wir haben unter Verwendung der CAUCHY–SCHWARZ–Ungleichung (2.4) aus Abschnitt 0.2:

$$\begin{aligned}
\|xy\|_{\ell^1} &= \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)y(i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| \cdot |y(i)| \overset{(2.4)}{\le} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y(i)|^q\Big)^{1/q} \\
&= \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^q} < \infty,
\end{aligned}$$

also $xy \in \ell^1$ sowie die behauptete HÖLDER–Ungleichung.

(b) Zunächst resultiert aus der $\Delta$–Ungleichung des Betrages $|\cdot|$:

$$|x(i) + y(i)|^p = |x(i) + y(i)| \cdot |x(i) + y(i)|^{p-1} \le |x(i)| \cdot |x(i) + y(i)|^{p-1} + |y(i)| \cdot |x(i) + y(i)|^{p-1}.$$

Wir summieren über $i$ und wenden auf der rechten Seite die HÖLDER–Ungleichung mit $q := p/(p-1)$ an:

$$\|x + y\|_{\ell^p}^p \le (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}) \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x(i) + y(i)|^p\Big)^{(p-1)/p}.$$

Für $\|x + y\|_{\ell^p} \neq 0$ ergibt sich daraus die MINKOWSKI–Ungleichung nach Division durch den Summenausdruck. Für $\|x + y\|_{\ell^p} = 0$ ist die MINKOWSKI–Ungleichung aber trivial. □

**Folgerung 2.2** *Die Räume $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$, $1 \le p \le \infty$ und $(c_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ sind BANACH–Räume.*

*Beweis:* (a) Die Normaxiome (N1) und (N2) sind unmittelbar an den Definitionen von $\|\cdot\|_{\ell^p}$ abzulesen. Für $1 < p < \infty$ folgt das Normaxiom (N3) aus der MINKOWSKI–Ungleichung. Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Dreiecksungleichung aber trivial:

$$p=1 \quad : \qquad \|x+y\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)+y(i)| \le \sum_{i=1}^{\infty} (|x(i)|+|y(i)|) = \|x\|_{\ell^1} + \|y\|_{\ell^1},$$

$$p=\infty \quad : \qquad \|x+y\|_{\ell^\infty} = \sup_{i\in\mathbf{N}} |x(i)+y(i)| \le \sup_{i\in\mathbf{N}} (|x(i)|+y(i)|) \le \|x\|_{\ell^\infty} + \|y\|_{\ell^\infty}.$$

Damit sind die Räume $\ell^p$ und $c_0(\mathbf{N})$ normierte Vektorräume.

(b) Um die Vollständigkeit der Räume $\ell^p$, $1 \le p < \infty$ nachzuweisen, betrachten wir eine CAUCHY–Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \ell^p$. Aus

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, N = N(\epsilon) \,:\, |x_j(i) - x_k(i)| \le \|x_j - x_k\|_{\ell^p} < \epsilon \quad \forall\, j,k \ge N,\, i \in \mathbf{N}, \tag{1.3}$$

erhalten wir wegen der Vollständigkeit von $\mathbf{K}$ insbesondere die punktweise Konvergenz $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(i) = x(i) \in \mathbf{K}$ $\forall\, i \in \mathbf{N}$. Nun haben wir für jedes feste $m \in \mathbf{N}$ gemäß (1.3):

$$\sum_{i=1}^{m} |x_j(i) - x_k(i)|^p < \epsilon^p \quad \forall\, j,k \ge N,$$

und nach Grenzübergang $j \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{m} |x(i) - x_k(i)|^p \le \epsilon^p \quad \forall\, k \ge N.$$

Da dies unabhängig von $m$ gilt, finden wir $\|x - x_k\|_{\ell^p} \le \epsilon$ $\forall\, k \ge N$, also $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ in $\ell^p$ sowie $x = (x - x_k) + x_k \in \ell^p$.

(c) Der Beweis der Vollständigkeit für den Raum $\ell^\infty$ verläuft ganz analog; die Summen sind lediglich durch das Supremum zu ersetzen.

(d) Nun sei $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine CAUCHY–Folge in $c_0(\mathbf{N})$. Wegen der Vollständigkeit von $\ell^\infty$ gibt es ein $x \in \ell^\infty$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Das heißt, zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N(\epsilon)$ mit

$$|x_k(i) - x(i)| \le \|x_k - x\|_{\ell^\infty} < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, k \ge N, \;\; i \in \mathbf{N}.$$

Da $x_N \in c_0(\mathbf{N})$ Nullfolge ist, finden wir ein $L = L(\epsilon)$ mit $|x_N(i)| \le \frac{\epsilon}{2}$ $\forall\, i \ge L$. Somit gilt

$$|x(i)| \le |x_N(i) - x(i)| + |x_N(i)| \le \epsilon \quad \forall\, i \ge L.$$

Das heißt, $x$ ist Nullfolge, und der Raum $c_0(\mathbf{N})$ ist vollständig. □

---

## 2.2 Endlichdimensionale Räume

In Definition 1.13 hatten wir den Begriff der äquivalenten Metriken eingeführt. Ganz analog erklären wir:

**Definition 2.3** *Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf demselben Vektorraum $X$ heißen* **äquivalent**, *wenn es Zahlen $\alpha, \beta > 0$ gibt mit*

$$\boxed{\alpha \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \cdot \|x\|_1 \quad \forall\, x \in X.} \tag{2.1}$$

Sind zwei Normen äquivalent, so gilt dies auch für die induzierten Metriken (1.2), die nun gleiche Topologien erzeugen, wie wir bereits in Abschnitt 1.2 vermerkt und in BSP.(1.3.1) verwendet haben.

Die Quintessenz des vorliegenden Abschnitts ist die Tatsache, daß in endlichdimensionalen Vektorräumen topologische Begriffsbildungen überflüssig sind. Denn jeder endlichdimensionale Vektorraum läßt sich über ein Skalarprodukt normieren, so daß die Kenntnis der üblichen linearen Algebra vollständig ausreicht. Als wichtigstes Resultat zeigen wir die Äquivalenz aller Normtopologien.

**Satz 2.2** *Es sei $X$ ein endlichdimensionaler (Vektor–)Raum über $\mathbf{K}$. Dann gilt:*

(a) *Alle Normen auf $X$ sind äquivalent.*

(b) *$X$ ist ein* Banach*–Raum.*

*Ein endlichdimensionaler Unterraum $U$ eines normierten Raumes $X$ ist abgeschlossen und vollständig.*

*Beweis:* (a) Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis des endlichdimensionalen Raumes $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ werde gemäß der Zerlegung $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ der Koeffizientenvektor $\alpha = \alpha(x) := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbf{K}^n$ eindeutig zugeordnet. Aus Folgerung 2.1(d) erhalten wir die Stetigkeit der Abbildung $\mathbf{K}^n \ni \alpha \mapsto x \in X$, und aus Folgerung 2.1(c) die Stetigkeit der Abbildung $X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$. Da nun das Kompositum $\mathbf{K}^n \ni \alpha \mapsto x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$ stetig ist, nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge $\{\alpha : |\alpha| = 1\}$ gemäß Satz 1.19(b) Maximum und Minimum seiner Funktionswerte an: Es existieren $x_*, x^* \in X$ mit $|\alpha(x_*)| = 1 = |\alpha(x^*)|$ und

$$m := \|x_*\| \le \|x\| \le \|x^*\| =: M \quad \forall\, x \in X : |\alpha(x)| = 1. \tag{2.2}$$

Es muß $m > 0$ sein, da $\alpha = 0$ nicht zu dieser Menge gehört. Ist nun $0 \neq x \in X$ beliebig, so setzen wir $\lambda_j := \alpha_j / |\alpha(x)|$, $y := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = x/|\alpha(x)|$ und $\lambda = \lambda(y) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbf{K}^n$. Dann gilt $|\lambda(y)| = 1$ und somit wegen (2.2) und (N2):

$$m \le \|y\| = \frac{1}{|\alpha(x)|} \|x\| \le M.$$

Multiplikation mit $|\alpha(x)|$ zeigt nun, daß die Normen $|\alpha(x)|$ und $\|x\|$ äquivalent sind. Daher ist eine beliebige Norm äquivalent zur Norm $|\alpha(x)|$.

(b) Die Vollständigkeit von $X$ resultiert aus der Vollständigkeit des Koeffizientenraums $(\mathbf{K}^n, |\cdot|)$.

(c) $U$ ist gemäß (b) vollständig und somit wegen Satz 1.6 auch abgeschlossen. □

Endlichdimensionale Räume zeichnen sich auch hinsichtlich der Kompaktheit aus:

**Satz 2.3** *Sei $X$ ein* Banach*–Raum. Dann gilt:*

$$\boxed{B_1^*(0) \text{ ist kompakt} \Leftrightarrow \quad X \text{ ist endlichdimensional.}}$$

*Beweis:* Wir zeigen zunächst die Hinlänglichkeit "$\Leftarrow$". In Satz 2.2 haben wir bewiesen, daß der endlichdimensionale Raum $X$ homöomorph zum Raum $(\mathbf{K}^n, |\cdot|)$ ist. In diesem ist aber die Einheitskugel $B_1^*(0) = \{\alpha \in \mathbf{K}^n : |\alpha| \leq 1\}$ beschränkt und abgeschlossen, mithin gemäß Satz 1.14 kompakt.

Wir zeigen die Notwendigkeit "$\Rightarrow$" und nehmen im Widerspruch zur Behauptung an, $X$ sei nicht endlichdimensional. Nach Voraussetzung ist $B_1^*(0)$ kompakt und somit auch praekompakt und abgeschlossen (vgl. Beweis von Satz 1.17). Also gibt es gemäß (4.6), Abschnitt 1.4, Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$ mit

$$B_1^*(0) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{1/2}(x_j). \tag{2.3}$$

Wir setzen $U := \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ und haben dann sicher wegen der Widerspruchsannahme $U \subsetneq X$. Somit existiert ein Element $0 \neq x \in U^c$, und da $U$ gemäß Satz 2.2 abgeschlossen ist, muß $d := \operatorname{dist}(x, U) > 0$ gelten. Nach Definition von $d$ existiert ein $u \in U$ mit

$$d \leq \|x - u\| \leq \frac{3}{2}\, d.$$

Setzen wir $z := (x-u)/\|x-u\|$, so gilt $\|z\| = 1$. Somit existiert wegen (2.3) ein $x_j$ mit $\|z - x_j\| < \frac{1}{2}$. Weiter ist

$$x = u + \|x-u\| \cdot z = u + \|x-u\| \cdot x_j + \|x-u\| \cdot (z - x_j) =: \tilde{u} + \|x-u\| \cdot (z - x_j).$$

$U$ ist Unterraum, so daß $\tilde{u} \in U$ gilt, und durch Setzen der Normen in der obigen Gleichung folgt deshalb

$$d \leq \|x - \tilde{u}\| = \|x-u\| \cdot \|z - x_j\| \leq \frac{3}{2}\, d \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\, d.$$

Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn $U = X$, also $X$ endlichdimensional gilt. □

Die Aussage von Satz 2.3 zählt zu den entscheidenden Anstößen, die zur Entwicklung der Funktionalanalysis geführt haben. Wir werden in einem späteren Abschnitt **schwache** Topologien definieren, in denen wir die Zahl der offenen Mengen soweit verringern werden, daß die Kompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel im BANACH–Raum erzwungen wird.

---

## 2.3 Stetige lineare Abbildungen und der normierte Dualraum

Nachfolgend bezeichnen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume über demselben Körper $\mathbf{K}$. Wie in der linearen Algebra zeigt man, daß der Nullraum $N(T)$ und der Bildraum $R(T)$ einer linearen Abbildung $T : X \to Y$ **Unterräume** von $X$ bzw. $Y$ sind. Ist $T$ darüber hinaus stetig, so ist $N(T)$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ selbst abgeschlossen (Satz 1.2(a)).

Stetige lineare Abbildungen $T : X \to Y$ haben einige besondere Eigenschaften, die im folgenden Satz aufgelistet sind.

**Satz 2.4** *Seien* $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *normierte Räume über demselben Körper* $\mathbf{K}$ *und* $T : X \to Y$ *eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $T$ *ist stetig.*

(b) $T$ *ist im Punkt* 0 *stetig.*

(c) *Der folgende Ausdruck ist beschränkt:*

$$\boxed{\|T\|_{X\to Y} := \sup_{0\neq x\in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.} \tag{3.1}$$

*Beweis:* Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) ist klar. Zum Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) bestimmen wir in der Stetigkeitsdefinition zu $\epsilon = 1$ die Zahl $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ so, daß gilt:

$$\|Tx\|_Y \leq 1 \quad \forall\, x \in X \,:\, \|x\|_X \leq \delta. \tag{3.2}$$

Für $\|x\|_X = \delta$ ist dann der Ausdruck in (3.1) durch die Zahl $\frac{1}{\delta}$ beschränkt. Für allgemeine $x \neq 0$ setzen wir $y := \delta\, x/\|x\|_X$ und haben $\|y\|_X = \delta$. Aus (3.2) folgt nun mit (N2): $\|Ty\|_Y = \delta\, \|Tx\|_Y/\|x\|_X \leq 1$. Somit ist $\|T\|_{X\to Y}$ auch in diesem Fall durch $\frac{1}{\delta}$ beschränkt. Um die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen, betrachten wir eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x \in X$. Unter Verwendung der Linearität von $T$ resultiert aus (3.1)

$$\|Tx_k - Tx\|_Y \leq \|T\|_{X\to Y}\|x_k - x\|_X \to 0 \;\; (k \to \infty),$$

also die Stetigkeit von $T$. □

**Definition 2.4** *Lineare Abbildungen* $T : X \to Y$ *heißen* **beschränkt** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\exists\, M > 0 \,:\, \|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall\, x \in X.} \tag{3.3}$$

*Andernfalls heiße* $T$ **unbeschränkt**.

Die folgenden Aussagen ergeben sich unmittelbar aus der Definition (3.1):

**Satz 2.5** *Es seien* $X, Y, Z$ *normierte Räume über demselben Körper* $\mathbf{K}$ *und* $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$ *stetige lineare Abbildungen. Dann gelten:*

$$\boxed{\|T\|_{X\to Y} = \sup_{\{x\in X\,:\,\|x\|_X=1\}} \|Tx\|_Y = \sup_{\{x\in X\,:\,\|x\|_X\leq 1\}} \|Tx\|_Y,} \tag{3.4}$$

$$\boxed{\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{X\to Y} \cdot \|x\|_X \quad \forall\, x \in X,} \tag{3.5}$$

$$\boxed{\|ST\|_{X\to Z} \leq \|S\|_{Y\to Z} \cdot \|T\|_{X\to Y}.} \tag{3.6}$$

**Bemerkung 2.1** Wegen (3.5) und Satz 2.4 sind die beschränkten linearen Abbildungen $T : X \to Y$ genau die (im Punkt 0) stetigen linearen Abbildungen.

**Definition 2.5** *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume über dem Körper* $\mathbf{K}$.

- $\boxed{B(X,Y) := \{T : X \to Y \ : T \text{ beschränkt und linear}\}, \qquad B(X) := B(X,X)}$
- *$X$ heiße eine* **normierte Algebra** *über* $\mathbf{K}$ $:\Leftrightarrow$ *In $X$ ist ein Produkt "$\cdot$" erklärt mit*

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(i)}\ \ x \cdot y \in X \ \forall\, x, y \in X, \\ \text{(ii)}\ \ (\lambda\, x + \mu\, y) \cdot z = \lambda\, x \cdot z + \mu\, y \cdot z \ \ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \ \forall\, x, y, z \in X, \\ \text{(iii)}\ \ \|x \cdot y\|_X \le \|x\|_X \cdot \|y\|_X \ \ \forall\, x, y \in X\end{array}}$$

- *Ist das Produkt einer normierten Algebra $X$* **kommutativ***: $x \cdot y = y \cdot x \ \forall\, x, y \in X$, so heiße $X$* **kommutative normierte Algebra** *über* $\mathbf{K}$
- *Ist $X$ vollständig, so heiße die normierte Algebra eine* BANACH–**Algebra** *über* $\mathbf{K}$.

**BSP. (2.3.1)** Wir betrachten den in BSP.(2.1.1)definierten BANACH–Raum $(c_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ mit dem kommutativen Produkt

$$x \cdot y := xy = (x(i)y(i))_{i \in \mathbf{N}} = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in c_0(\mathbf{N}).$$

Da das Produkt zweier Nullfolgen $x, y \in c_0(\mathbf{N})$ wieder eine Nullfolge ist, gelten (i) und (ii) in Definition 2.5. Ferner folgt (iii) aus

$$\|x \cdot y\|_{\ell^\infty} = \sup_{i \in \mathbf{N}} |x(i)y(i)| \le (\sup_{i \in \mathbf{N}} |x(i)|)(\sup_{i \in \mathbf{N}} |y(i)|) = \|x\|_{\ell^\infty} \cdot \|y\|_{\ell^\infty}.$$

Wegen der Vollständigkeit von $c_0(\mathbf{N})$ (Folgerung 2.2) haben wir also mit $(c_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ eine kommutative BANACH–Algebra über $\mathbf{K}$ vorliegen.

Ein Beispiel einer nichtkommutativen normierten Algebra ist der Raum $(B(X), \|\cdot\|_{X \to X})$. Wir bereiten diese Aussage durch den folgenden Satz vor.

**Satz 2.6** *Seien $X, Y$ normierte Räume über dem Körper* $\mathbf{K}$. *Dann gilt:*

(a) *$(B(X,Y), \|\cdot\|_{X \to Y})$ ist normierter Raum über* $\mathbf{K}$.

(b) *Ist $Y$ ein* BANACH*–Raum, so ist auch $B(X,Y)$ ein* BANACH*–Raum.*

*Beweis:* (a) Ganz offenbar ist $B(X,Y)$ ein Vektorraum über $\mathbf{K}$ mit dem Nullelement $O : x \mapsto 0 \ \forall\, x \in X$. Wir zeigen die Normeigenschaften für $\|\cdot\|_{X \to Y}$: (N1) ist offenkundig an (3.1) ablesbar. Die Homogenität (N2) folgt aus der Homogenität der Norm $\|\cdot\|_Y$: Für $0 \neq \lambda \in \mathbf{K}$ gilt:

$$\begin{aligned}\|\lambda T\|_{X \to Y} &= \sup_{\|x\|_X = 1} \|(\lambda T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|\lambda\,(Tx)\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} (|\lambda| \cdot \|Tx\|_Y) = |\lambda| \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y \\ &= |\lambda| \cdot \|T\|_{X \to Y}.\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die Dreiecksungleichung (N3) mit Hilfe von (3.5) aus der Beziehung

$$\|(T_1 + T_2)x\|_Y \le \|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y \overset{(3.5)}{\le} (\|T_1\|_{X \to Y} + \|T_2\|_{X \to Y}) \cdot \|x\|_X \quad \forall\, x \in X.$$

(b) Sei nun $Y$ vollständig und sei $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset B(X,Y)$ eine CAUCHY–Folge. Wegen (3.5) gilt

$$\|T_j x - T_k x\|_Y \le \|T_j - T_k\|_{X\to Y}\|x\|_X \quad \forall\, x \in X, \tag{3.7}$$

so daß auch $(T_k x)_{k\in\mathbf{N}} \subset Y$ CAUCHY–Folge ist. Deren Grenzwert werde mit $y =: T(x) \in Y$ bezeichnet. Zu zeigen ist $T \in B(X,Y)$ für die so induzierte Abbildung $X \ni x \mapsto y = T(x) \in Y$. Die Linearität erhält man aus der punktweisen Konvergenz:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lim_{k\to\infty} T_k(\lambda x + \mu y) = \lim_{k\to\infty}(\lambda T_k x + \mu T_k x) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbf{K}\ \ \forall\, x,y \in X.$$

Wegen (1.1) ist auch die Zahlenfolge der Normen $(\|T_k\|_{X\to Y})_{k\in\mathbf{N}}$ eine CAUCHY–Folge, also durch eine Konstante $M$ beschränkt. Daraus resultiert

$$\|T(x)\|_Y = \lim_{k\to\infty}\|T_k x\|_Y \overset{(3.5)}{\le} M\cdot\|x\|_X \quad \forall\, x \in X,$$

und somit gemäß (3.3) die Beschränktheit von $T$. Also folgt $T \in B(X,Y)$. Schließlich gilt noch gemäß (3.7): $\|(T_j - T_k)x\|_Y \le \epsilon\cdot\|x\|_X\ \ \forall\, j,k \ge N(\epsilon)$ unabhängig von $x$, und wegen der Stetigkeit der $\|\cdot\|_Y$–Norm können wir zum Grenzwert $j\to\infty$ übergehen. Daraus resultiert $\|T - T_k\|_{X\to Y} \le \epsilon\ \forall\, k \ge N(\epsilon)$, womit die Normkonvergenz $T_k \to T$ begründet ist. □

**BSP. (2.3.2)** Für jeden normierten Raum $X$ ist also $(B(X), \|\cdot\|_{X\to X})$ selbst ein normierter Raum, auf dem die **Hintereinanderausführung**

$$S\cdot T : X \to X, \quad (S\cdot T)x := S(Tx) \quad \forall\, x \in X\ \ \forall\, S,T \in B(X)$$

ein **nichtkommutatives** Produkt "$\cdot$" induziert. Dieses hat offenbar die Eigenschaften (i), (ii) aus Definition 2.5, und wegen (3.6) gilt auch die Eigenschaft (iii). Das heißt, mit B(X) liegt eine nichtkommutative normierte Algebra über $\mathbf{K}$ vor. Gemäß Satz 2.6(b) ist $B(X)$ sogar eine BANACH–Algebra, wenn $X$ vollständig ist.

**Definition 2.6** *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum über $\mathbf{K}$.*

- *Der Raum $B(X,\mathbf{K})$ heiße der (topologische)* **Dualraum** *von $X$ und wird kürzer mit $X^*$ bezeichnet (mitunter auch mit $X'$):*

$$\boxed{X^* := B(X,\mathbf{K}) = \{\ell : X \to \mathbf{K}\ :\ \ell \text{ beschränkt und linear}\}}$$

- *Die Elemente von $X^*$ heißen* **beschränkte lineare Funktionale**.

**Folgerung 2.3** *$X^*$ ist stets ein* BANACH*–Raum* (Satz 2.6(b)) *mit der Norm*

$$\boxed{\|\ell\|_{X^*} = \sup_{\{x\in X\,:\,\|x\|_X=1\}} |\ell(x)|.} \tag{3.8}$$

Bevor wir Beispiele für Dualräume geben, beweisen wir noch ein nützliches **Fortsetzungsprinzip** für stetige lineare Abbildungen.

**Satz 2.7** *Seien $X, Y$ BANACH–Räume, $M \subset X$ ein dichter Unterraum und $T : M \to Y$ stetig und linear. Dann gibt es genau eine Fortsetzung $\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit den Eigenschaften*

$$\boxed{\tilde{T}|M = T, \qquad \|T\|_{M\to Y} = \|\tilde{T}\|_{X\to Y}.} \tag{3.9}$$

*Beweis:* Da $M \subset X$ dicht in $X$ ist, existiert zu jedem $x \in X$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x\|_X = 0$. Insbesondere ist $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ CAUCHY–Folge, und wegen

$$\|T(x_j - x_k)\|_Y \le \|T\|_{M\to Y}\|x_j - x_k\|_X \tag{3.10}$$

trifft dies auch auf die Folge $(Tx_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset Y$ zu. Sei $y = \lim\limits_{k\to\infty} Tx_k =: \tilde{T}x \in Y$ ihr Grenzwert. Wir zeigen, daß $y$ nur von $x$ und nicht von der speziellen Wahl der Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ abhängt. Hat nämlich $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ dieselbe Konvergenzeigenschaft mit $\tilde{y} = \lim\limits_{k\to\infty} T\tilde{x}_k$, so ergibt sich aus (3.11): $\|y-\tilde{y}\|_Y = \lim\limits_{k\to\infty} \|T(x_k - \tilde{x}_k)\|_Y = 0$, also $y = \tilde{y}$. Daß die durch die Zuordnungsvorschrift $X \ni x \mapsto y = \tilde{T}x \in Y$ induzierte Abbildung $\tilde{T} : X \to Y$ linear ist, zeigt man wie im Beweis zu Satz 2.6(b). Setzt man in (3.11) $x_j = 0$, so erhält man noch durch Grenzübergang $x_k \to x$ die Ungleichung $\|\tilde{T}x\|_Y \le \|T\|_{M\to Y}\|x\|_X$, also $\|\tilde{T}\|_{X\to Y} \le \|T\|_{M\to Y}$. Trivialerweise gilt auch die umgekehrte Ungleichung:

$$\|T\|_{M\to Y} = \sup_{\{x\in M\,:\,\|x\|_X=1\}} \|Tx\|_Y \le \sup_{\{x\in X\,:\,\|x\|_X=1\}} \|\tilde{T}x\|_Y = \|\tilde{T}\|_{X\to Y}.$$

Somit ist alles bewiesen. □

**BSP. (2.3.3)** **Die Dualräume von $\ell^p$.** Wir betrachten die in BSP.(2.1.1) eingeführten BANACH–Räume $\ell^p$, $1 \le p \le \infty$, deren topologische Dualräume $\ell^{p*}$ bestimmt werden sollen. Wir bringen in Erinnerung, daß zwei *Algebren* $X, Y$ **algebraisch isomorph** heißen (in Zeichen: $X \cong Y$), wenn es eine bijektive Abbildung $T : X \to Y$ (einen **Isomorphismus**) gibt, der die algebraischen Strukturen beider Algebren ineinander überführt. Jede **bijektive lineare** Abbildung $T$ zwischen zwei Vektorräumen $X, Y$ über $\mathbf{K}$ ist ein Isomorphismus. Sind $X, Y$ **normierte** Räume, so heißen $X, Y$ **topologisch isomorph**: $X \cong Y$, wenn der Isomorphismus $T : X \to Y$ ein Homöomorphismus ist: $T \in B(X,Y)$ mit stetiger Inversen $T^{-1} \in B(Y,X)$. Wir zeigen nun:

**Satz 2.8** (a) *Sei $p, q$ ein Paar konjugierter Exponenten $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann sind die BANACH–Räume $\ell^{p*}$ und $\ell^q$ isometrisch isomorph: $\ell^{p*} \cong \ell^q$.*

(b) *Die BANACH–Räume $\ell^{1*}$ und $\ell^\infty$ sind isometrisch isomorph: $\ell^{1*} \cong \ell^\infty$.*

(c) *Die BANACH–Räume $c_0(\mathbf{N})^*$ und $\ell^1$ sind isometrisch isomorph: $c_0(\mathbf{N})^* \cong \ell^1$. Es gilt jedoch $\ell^{\infty*} \ncong \ell^1$.*

*Beweis:* Wir führen wie in BSP.(2.1.1) die Menge $X := \mathbf{K}^\mathbf{N}$ aller Zahlenfolgen $x = (x(i))_{i\in\mathbf{N}} \in X$ ein und bezeichnen mit $e_k \in X$ die Standardbasisvektoren $e_k(i) = \delta_{ik}$, $i, k \in \mathbf{N}$. Trivialerweise gilt $e_k \in \ell^p$ sowie $\|e_k\|_{\ell^p} = 1 \;\forall\, k \in \mathbf{N}$ und für jedes $p \in [1, \infty]$. Jedem $f \in \ell^{p*}$ (bzw. $f \in c_0(\mathbf{N})^*$) ordnen wir vermöge $y(i) := f(e_i)$, $i \in \mathbf{N}$, eine Zahlenfolge $y \in X$ zu und betrachten die durch die Zuordnungsvorschrift $\ell^{p*} \ni f \mapsto y =: Tf \in X$ induzierte lineare Abbildung $T$, von der wir die geforderten Eigenschaften eines isometrischen Isomorphismus zeigen wollen. Zunächst beweisen wir in einer Zwischenbehauptung die Normkonvergenz der FOURIER–Reihe

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)e_i, \quad x \in \ell^p, \tag{3.11}$$

für jedes $p \in [1, \infty)$:

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{k} x(i)e_i\Big\|_{\ell^p}^p = \Big\| \sum_{i=k+1}^{\infty} x(i)e_i\Big\|_{\ell^p}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{i=k+1}^{\infty} x(i)e_i(j)\Big|^p = \sum_{j=k+1}^{\infty} |x(j)|^p \to 0 \ \ (k \to \infty). \tag{3.12}$$

Die Reihe (3.11) konvergiert hingegen **nicht** in $\ell^\infty$, und daran scheitert bereits der Nachweis von $\ell^{\infty *} \cong \ell^1$. Anstelle von (3.12) haben wir zum Beispiel für die konstante Folge $x := (1)_{i \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty$:

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{k} x(i)e_i\Big\|_{\ell^\infty} = \sup_{j \in \mathbf{N}} \sum_{i=k+1}^{\infty} e_i(j) = 1 \quad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Nehmen wir hingegen $x \in c_0(\mathbf{N})$ an, so gibt es zu jeder Vorgabe $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon)$ mit $|x(i)| < \epsilon \ \forall\, i \geq N$. Deshalb folgt nun

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{k} x(i)e_i\Big\|_{\ell^\infty} \leq \sup_{j \in \mathbf{N}} \sum_{i=k+1}^{\infty} |x(i)|e_i(j) \leq \epsilon \cdot \sup_{j \in \mathbf{N}} \sum_{i=k+1}^{\infty} e_i(j) = \epsilon \quad \forall\, k \geq N,$$

und somit auch in diesem Fall die Normkonvergenz der Reihe (3.11). Da $f$ stetig ist, haben wir jetzt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i) \quad \forall\, x \in \ell^p \quad (\text{bzw. } \forall\, x \in c_0(\mathbf{N})). \tag{3.13}$$

Nun wählen wir spezielle $x_k \in \ell^p$, $k \in \mathbf{N}$, nämlich für konjugierte Exponenten $1 < p, q < \infty$ die Folgen

$$x_k(i) := \begin{cases} |y(i)|^q / y(i) & : \ i \leq k \text{ und } y(i) \neq 0, \\ 0 & : \text{ sonst}, \end{cases} \qquad i \in \mathbf{N}. \tag{3.14}$$

Im Fall $p = 1$ setzen wir hingegen

$$x_k := \begin{cases} \dfrac{|y(k)|}{y(k)}\, e_k & : \ y(k) \neq 0, \\ 0 & : \text{ sonst}, \end{cases} \qquad k \in \mathbf{N},$$

und im Fall $c_0(\mathbf{N})^*$ wählen wir die gemäß (3.14) mit $q = 1$ definierten Folgen $x_k \in c_0(\mathbf{N})$. Nun gilt zunächst für $1 < p < \infty$ wegen $p = q/(q-1)$:

$$\sum_{i=1}^{k} |y(i)|^q = f(x_k) \overset{(3.5)}{\leq} \|f\|_{\ell^{p*}} \|x_k\|_{\ell^p} = \|f\|_{\ell^{p*}} \Big( \sum_{i=1}^{k} |y(i)|^{p(q-1)} \Big)^{1/p} = \|f\|_{\ell^{p*}} \Big( \sum_{i=1}^{k} |y(i)|^q \Big)^{1/p},$$

woraus im Limes $k \to \infty$ nach Division durch die letzte Summe die Ungleichung

$$\|y\|_{\ell^q} = \|Tf\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{\ell^{p*}}$$

folgt. Somit bildet $T$ stetig von $\ell^{p*}$ in $\ell^q$ ab. Ganz analog erhält man wegen $\|x_k\| = 1$ in den beiden anderen Fällen für jedes $k \in \mathbf{N}$:

$$|y(k)| = f(x_k) \overset{(3.5)}{\leq} \|f\|_{\ell^{1*}} \|x_k\|_{\ell^1} = \|f\|_{\ell^{1*}},$$

$$\sum_{i=1}^{k} |y(i)| = f(x_k) \overset{(3.5)}{\leq} \|f\|_{c_0(\mathbf{N})^*} \|x_k\|_{\ell^\infty} = \|f\|_{c_0(\mathbf{N})^*},$$

und daraus resultieren die beiden Ungleichungen

$$\|y\|_{\ell^\infty} = \|Tf\|_{\ell^\infty} \leq \|f\|_{\ell^{1*}}, \quad \|y\|_{\ell^1} = \|Tf\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{c_0(\mathbf{N})^*}.$$

Auch in diesen Fällen bildet $T$ stetig aus dem Dualraum in den jeweiligen Grundraum ab. Es bleibt noch die Surjektivität von $T$ zu zeigen. Dazu definieren wir uns zu $y \in \ell^q$ das lineare Funktional $f$ durch die Vorschrift (3.13). Nun gilt

$$|f(x)| \leq \begin{cases} \|x\|_{\ell^p}\|y\|_{\ell^q} \ \forall\, x \in \ell^p \text{ (HÖLDER–Ungleichung)} & : \ 1 < q < \infty, \\ \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x(i)|\Big)\, \|y\|_{\ell^\infty} = \|x\|_{\ell^1}\|y\|_{\ell^\infty} \ \forall\, x \in \ell^1 & : \ q = \infty, \\ \|x\|_{\ell^\infty}\Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y(i)|\Big) = \|x\|_{\ell^\infty}\|y\|_{\ell^1} \ \forall\, x \in c_0(\mathbf{N}) & : \ q = 1. \end{cases}$$

In jedem Fall liegt $f$ in dem richtigen Dualraum und zusammen mit den bereits bewiesenen Ungleichungen gilt die Isometrie–Bedingung $\|f\|_{..^*} = \|Tf\|_{\ell^q}$, $1 \leq q \leq \infty$, aus der dann auch die Injektivität von $T$ folgt. Damit ist alles gezeigt. □

Wir definieren nun **kompakte** Abbildungen $T : X \to Y$ und erinnern daran, daß gemäß Bemerkung 1.6 in einem vollständigen metrischen Raum die Begriffe "relativ kompakt" und "praekompakt" zusammenfallen.

**Definition 2.7** *Seien $X, Y$* BANACH*–Räume.*

- *Eine Abbildung $T : X \to Y$ heiße* **kompakt** $:\Leftrightarrow$ *$T$ bildet beschränkte Teilmengen von $X$ auf relativ kompakte Teilmengen von $Y$ ab.*

In Satz 1.17 haben wir gezeigt, daß in einem vollständigen metrischen Raum relative Kompaktheit abgeschlossener Mengen und Folgenkompaktheit äquivalent sind. Deshalb ergibt sich:

**Folgerung 2.4** *Seien $X, Y$* BANACH*–Räume.*

(a) *Eine Abbildung $T : X \to Y$ ist genau dann kompakt, wenn das Bild $(Tx_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset Y$ jeder beschränkten Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.*

(b) *Eine* **lineare** *Abbildung $T : X \to Y$ ist genau dann kompakt, wenn das Bild $T(B_1(0)) \subset Y$ der offenen Einheitskugel $B_1(0) \subset X$ relativ kompakt ist.*

(c) *Setzen wir*

$$\boxed{K(X,Y) := \{T : X \to Y \ : \ T \text{ kompakt und linear}\},}$$

*so gilt $K(X,Y) \subset B(X,Y)$. Das heißt, jeder kompakte lineare Operator ist stetig.*

Denn für jedes $T \in K(X,Y)$ ist das Bild $T(B_1(0))$ der offenen Einheitskugel $B_1(0)$ relativ kompakt und somit gemäß (4.6), Abschnitt 1.4, beschränkt. Also gilt wegen

$$\|T\|_{X\to Y} = \sup_{\{x\in X\,:\,\|x\|_X \leq 1\}} \|Tx\|_Y = \sup_{\{x\in X\,:\,\|x\|_X < 1\}} \|Tx\|_Y \leq M$$

die behauptete Eigenschaft $T \in B(X,Y)$.

**BSP. (2.3.4)** **Endlichdimensionale Abbildungen.** Sind $X, Y$ Vektorräume über demselben Körper $\mathbf{K}$, so heiße eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ **endlichdimensional** oder **von endlichem Rang**, wenn der Bildraum $R(T)$ endliche Dimension hat: $\dim R(T) < \infty$. In BANACH–Räumen $X, Y$ gilt nun:

- *Ist $T \in B(X,Y)$ endlichdimensional, so ist $T$ kompakt.*

Denn die offene Einheitskugel $B_1(0) \subset X$ wird unter $T$ in die Teilmenge $T(B_1(0))$ des endlichdimensionalen BANACH–Raumes $R(T)$ abgebildet. Sie ist somit gemäß Satz 2.3 relativ kompakt.

Wir zeigen, daß $K(X,Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $B(X,Y)$ ist.

**Satz 2.9** *Es seien $X, Y, Z$ BANACH–Räume über dem Körper $\mathbf{K}$. Dann gilt:*

(a) $\lambda T \in K(X,Y), \quad T + S \in K(X,Y) \ \forall\, T, S \in K(X,Y) \ \forall\, \lambda \in \mathbf{K}$.

(b) $TB \in K(X,Z) \ \forall\, B \in B(X,Y) \ \forall\, T \in K(Y,Z), \quad BT \in K(X,Z) \ \forall\, B \in B(Y,Z) \ \forall\, T \in K(X,Y)$.

(c) $K(X,Y)$ *ist abgeschlossen in* $B(X,Y)$.

*Beweis:* (a) Diese Aussage ist klar: Ist $B_1(0) \subset X$ die offene Einheitskugel, so sind die Bildmengen $K_T := T(B_1(0))$ und $K_S := S(B_1(0))$ relativ kompakte Teilmengen von $Y$, und dies überträgt sich auf $\lambda K_T$ und $K_T + K_S$.

(b) Sei $B_1(0) \subset X$ wieder die offene Einheitskugel. Weil $B \in B(X,Y)$ beschränkt ist, muß $B(B_1(0)) \subset Y$ eine beschränkte Teilmenge sein, die unter $T$ ein relativ kompaktes Bild in $Z$ hat. Also ist $TB$ kompakt. Um die Kompaktheit von $BT$ zu zeigen, betrachten wir eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset B_1(0)$. Da $T$ kompakt ist, existieren eine Teilfolge $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ und ein $y \in Y$ mit $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} Tx_k =: \lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} y_k = y$. Nun ist $B$ aber stetig. Also folgt $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} By_k = \lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} (BT)x_k = By \in Z$, das heißt $BT$ ist kompakt.

(c) Es sei eine konvergente Folge $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset K(X,Y)$ mit Grenzwert $T \in B(X,Y)$ gegeben. Zu zeigen ist $T \in K(X,Y)$ oder äquivalent die relative Kompaktheit von $T(B_1(0))$. Dazu bestimmen wir bei gegebener Überdeckung der Menge $T(B_1(0))$ durch offene $\epsilon$–Kugeln eine endliche Teilüberdeckung wie folgt: Zu festem $\epsilon > 0$ sei $N = N(\epsilon)$ so gewählt, daß $\|T - T_k\|_{X\to Y} < \frac{\epsilon}{3} \ \forall\, k \geq N$ gilt. Da $T_N$ voraussetzungsgemäß kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, x_2, \ldots, x_m \in B_1(0)$, so daß das System der offenen Kugeln $\{B_{\epsilon/3}(T_N x_j)\}_{1\leq j\leq m}$ eine offene Überdeckung von $T_N(B_1(0))$ bildet. Wir behaupten: Das System der offenen Kugeln $\{B_\epsilon(Tx_j)\}_{1\leq j\leq m}$ bildet die gesuchte endliche Teilüberdeckung. In der Tat, zu jedem $x \in B_1(0)$ existiert ein Index $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $T_N x \in B_{\epsilon/3}(T_N x_j)$, also $\|T_N x - T_N x_j\|_Y < \frac{\epsilon}{3}$. Daraus folgt:

$$\|Tx - Tx_j\|_Y \leq \|Tx - T_N x\|_Y + \|T_N x - T_N x_j\|_Y + \|T_N x_j - Tx_j\|_Y < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

also $Tx \in B_\epsilon(Tx_j)$. □

**Bemerkung 2.2** (a) Hinsichtlich der Eigenschaften (a) – (c) von Satz 2.9 bildet der Unterraum $K(X) := K(X,X)$ für jeden BANACH–Raum $X$ ein **nichttriviales abgeschlossenes zweiseitiges Ideal** in der BANACH–Algebra $B(X)$ der beschränkten linearen Abbildungen.

(b) Die Nullabbildung $O : X \to \{0\}$ ist immer kompakt, die identische Abbildung $Id : X \to X, \quad Id(x) := x \ \forall\, x \in X$, ist genau dann kompakt, wenn der BANACH–Raum $X$ endlichdimensional ist (Satz 2.3).

Wir allgemeinern die letzte Aussage:

**Definition 2.8** *Seien $X, Y$ BANACH–Räume mit $X \subset Y$.*

- *Wir sagen, $X$ kann in $Y$ (stetig)* **eingebettet** *werden, in Zeichen $X \hookrightarrow Y$, wenn die Identität $Id : X \to Y$ stetig ist:*

$$\boxed{\|x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall\, x \in X.}$$

- *Die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ heiße* **kompakt** $:\Leftrightarrow$ *Es gilt $Id \in K(X, Y)$.*

**Folgerung 2.5** *Sind $X, Y$ endlichdimensional (also gemäß* Satz 2.2 BANACH–*Räume) mit $X \subset Y$, so ist die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ immer kompakt. Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen $X, Y$ über $\mathbf{K}$ ist beschränkt.*

Denn $X$ mit $\dim X = n$ und $Y$ mit $\dim Y = m$ sind topologisch isomorph zu $(\mathbf{K}^n, |\cdot|)$ bzw. $(\mathbf{K}^m, |\cdot|)$, und die linearen Abbildungen $T : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ sind genau die $m \times n$–Matrizen, für die stets $|T| < \infty$ gilt.

**BSP. (2.3.5)** Wir betrachten die in BSP.(2.1.1) eingeführten BANACH–Räume $\ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Wegen $\|x\|_{\ell^\infty} \leq \|x\|_{\ell^p}$ $\forall\, x \in \ell^p$ gilt für sie stets $\ell^p \hookrightarrow \ell^\infty$ mit stetiger Einbettung, die aber nicht kompakt ist. Die Folge $(e_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \ell^p$ ist beschränkt: $\|e_k\|_{\ell^p} = 1$ $\forall\, k \in \mathbf{N}$ $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$; man vergleiche BSP.(2.3.3). Wegen $\sup\limits_{i \in \mathbf{N}} |e_j(i) - e_k(i)| = 1$ $\forall\, j \neq k \in \mathbf{N}$ enthält sie in $\ell^\infty$ aber keine konvergente Teilfolge.

**BSP. (2.3.6)** **Prinzip der Auswahl einer Diagonalfolge.** Wir geben ein nichttriviales Beispiel einer kompakten Abbildung $T \in K(\ell^\infty)$. Wir definieren

$$T : \ell^\infty \to \ell^\infty, \qquad (Tx)(i) := \frac{1}{i}\, x(i) \quad \forall\, i \in \mathbf{N}\ \forall\, x \in \ell^\infty.$$

Die offene 1–Kugel $B_1(0)$ wird auf die Menge

$$M := \{x \in \ell^\infty \,:\, |x(i)| < \frac{1}{i},\ \ i \in \mathbf{N}\}$$

abgebildet, deren relative Kompaktheit zu zeigen ist. Dazu ist für $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge zu bestimmen. Wir bedienen uns des obengenannten Prinzips: Die Zahlenfolge $(x_k(1))_{k \in \mathbf{N}}$ ist durch 1 beschränkt. Sie hat wegen BOLZANO–WEIERSTRASS einen Häufungspunkt $y(1)$. Das heißt, es existiert eine Teilfolge $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}$ mit $\lim\limits_{k \in \mathbf{N}_1} x_k(1) = y(1)$. Die Teilfolge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}_1}$ tragen wir in die erste Zeile einer quadratischen Tafel ein. Die Zahlenfolge $(x_k(2))_{k \in \mathbf{N}_1}$ ist durch $\frac{1}{2}$ beschränkt. Wiederum existiert ein Häufungspunkt $y(2) = \lim\limits_{k \in \mathbf{N}_2} x_k(2)$, $\mathbf{N}_2 \subset \mathbf{N}_1$. Die Teilfolge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}_2}$ tragen wir in die zweite Zeile der Tafel ein, usf. Haben wir die gesamte Tafel gefüllt, so steht in der $j$–ten Zeile eine Teilfolge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}_j}$, deren Komponentenfolgen $(x_k(i))_{k \in \mathbf{N}_j}$ für $i = 1, 2, \ldots, j$ gegen die Grenzwerte $y(i)$ konvergieren. Die Diagonalfolge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}_k}$ konvergiert nun punktweise in allen Komponenten gegen ein $y \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Es bleibt die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen. Nach Konstruktion von $M$ gibt es zunächst für jedes $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon)$ mit $|x(i)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ $\forall\, i > N$. Auf der

endlichen Indexmenge $\{1, 2, \ldots, N\}$ ist die Konvergenz bereits gleichmäßig: Es gibt ein $L = L(\epsilon)$ mit $|x_k(i) - y(i)| \leq \frac{\epsilon}{3}\ \forall\, 1 \leq i \leq N\ \forall\, k \geq L : k \in \mathbf{N}_k$. Daraus erhalten wir für solche $k \geq L$:

$$\|x_k - y\|_{\ell^\infty} = \sup_{i\in\mathbf{N}} |x_k(i) - y(i)| \leq \sup_{1\leq i\leq N} |x_k(i) - y(i)| + \sup_{i>N} |x_k(i)| + \sup_{i>N} |y(i)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Wir haben $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}_k} \|x_k - y\|_{\ell^\infty} = 0$ gezeigt. $M$ ist relativ kompakt und $T$ ist somit kompakt.

---

## 2.4 HILBERT–Räume

In diesem Abschnitt bezeichnet ein Querstrich über einer Zahl $z \in \mathbf{K}$ die komplexe Konjugation: $z = x + i\,y \ \Rightarrow\ \bar{z} = x - i\,y$. Ist $\mathbf{K} := \mathbf{R}$, so ist die Konjugation ohne Bedeutung.

**Definition 2.9** *Sei $X$ ein Vektorraum über $\mathbf{K}$.*

- *Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbf{K}$ mit den Eigenschaften*

| | |
|---|---|
| (SP1) $\langle x, x\rangle > 0 \ \Leftrightarrow\ 0 \neq x \in X$ | (positive Definitheit) |
| (SP2) $\langle \lambda\, x + \mu\, y, z\rangle = \lambda\, \langle x, z\rangle + \mu\, \langle y, z\rangle\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K}\ \forall\, x, y, z \in X$ | (Sesquilinearität) |
| (SP3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ \forall\, x, y \in X$ | (Antisymmetrie) |

  *heiße ein* **Skalarprodukt** *oder* **inneres Produkt** *auf $X$*

- *Das Paar $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heiße ein* **Praehilbert–Raum**, *wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $X$ ist.*

**Folgerung 2.6** (a) *Aus* (SP2) *und* (SP3) *folgt, daß ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum über $\mathbf{R}$ eine* **Bilinearform** *ist: Es ist in beiden Komponenten* **linear**. *Ist $X$ hingegen ein Vektorraum über $\mathbf{C}$, so ist das Skalarprodukt eine* **Sesquilinearform**, *d.h. es ist linear in der ersten Komponenten und* **antilinear** *in der zweiten:*

$$\boxed{\langle x, \lambda\, y + \mu\, z\rangle = \bar{\lambda}\, \langle x, y\rangle + \bar{\mu}\, \langle x, z\rangle \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K}\ \forall\, x, y, z \in X.} \tag{4.1}$$

(b) *Die auf einem Praehilbert–Raum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wohldefinierte Abbildung*

$$\boxed{\|\cdot\|_X : X \to \mathbf{R}, \quad \|x\|_X := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall\, x \in X} \tag{4.2}$$

*heiße die durch das Skalarprodukt* **induzierte Norm**. *Jeder Praehilbert–Raum ist somit gleichzeitig normierter Raum.*

Die Normaxiome (N1) und (N2) der induzierten Norm (4.2) erhält man unmittelbar aus (SP1), (SP2) und (4.1). Zum Nachweis der Dreiecksungleichung (N3) benötigen wir ein vorbereitendes Resultat:

**Satz 2.10** *Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Praehilbert–Raum über $\mathbf{K}$. Dann gilt für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm (4.2):*

$$\|x+y\|_X^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle \;\forall\, x,y\in X, \tag{4.3}$$

$$2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 = \|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 \;\forall\, x,y\in X, \quad \text{(Parallelogrammgleichung)} \tag{4.4}$$

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|_X\|y\|_X \;\forall\, x,y\in X. \quad \text{(Cauchy–Schwarz–Ungleichung)} \tag{4.5}$$

*Gleichheit tritt in der* Cauchy–Schwarz*–Ungleichung genau dann ein, wenn $x, y$ linear abhängig sind.*

*Beweis:* Wir zeigen zunächst (4.3). Für $x, y \in X$ gelten:

$$\|x+y\|_X^2 = \langle x+y, x+y\rangle \overset{(SP2)}{=} \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \overset{(4.2)}{=} \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$$
$$\overset{(SP3)}{=} \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle.$$

Ersetzt man hier $y$ durch $-y$, so findet man

$$\|x-y\|_X^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle.$$

Addition zu (4.3) liefert bereits die Parallelogrammgleichung (4.4). Zum Beweis von (4.5) vermerken wir, daß die Behauptung für $y = 0$ trivial ist. Ist also $y \neq 0$, so ersetzen wir in (4.3) $y$ durch $\alpha\, y$ und wählen speziell $\alpha := -\langle x,y\rangle / \|y\|_X^2$. Dann folgt

$$0 \le \|x+\alpha\, y\|_X^2 = \|x\|_X^2 + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|_X^2} - \frac{2}{\|y\|_X^2}\,\mathrm{Re}\,\langle x, \langle x,y\rangle\, y\rangle = \|x\|_X^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|_X^2}.$$

Nach Multiplikation mit $\|y\|_X^2$ und Bilden der Qudratwurzel steht schon die Ungleichung (4.5) da. Ist $x + \alpha\, y = 0$, so gilt Gleichheit überall in dieser Rechnung. □

**Bemerkung 2.3** Aus (4.3) und (4.5) erhält man jetzt die Dreiecksungleichung (N3) für die induzierte Norm, nämlich

$$\|x+y\|_X^2 \le \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 + 2\,\|x\|_X\|y\|_X = (\|x\|_X + \|y\|_X)^2.$$

Somit ist das durch das Skalarprodukt induzierte Funktional (4.2) tatsächlich eine Norm auf dem Praehilbert–Raum $X$; dieser ist nun selbst ein normierter Raum. Im Gegensatz zu endlichdimensionalen Räumen, die immer mit der euklidischen Norm – und somit über das Standardskalarprodukt – in äquivalenter Weise normiert werden können, geht nicht jeder unendlichdimensionale normierte Raum aus einem Praehilbert–Raum hervor.

**Definition 2.10** *Ein Vektorraum $X$ mit einem Skalarprodukt heiße* Hilbert–**Raum** $:\Leftrightarrow$ *$X$ ist vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm (4.2).*

**BSP. (2.4.1)** Auf dem Vektorraum $\ell^2$ (vgl. BSP.(2.1.1)) wird vermöge

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x(i)\overline{y(i)} \quad \forall\, x,y\in\ell^2 \tag{4.6}$$

eine Sesquilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbf{K}$ definiert, die die Eigenschaften (SP1) – (SP3) hat, also ein **Skalarprodukt** auf $\ell^2$ ist. Man erkennt unmittelbar, daß die induzierte Norm

$$\|x\|_{\ell^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2\Big)^{1/2}, \quad x \in \ell^2,$$

die kanonische Norm auf $\ell^2$ ist, in der $\ell^2$ vollständig ist (Folgerung 2.2). Also liegt mit $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein HILBERT–Raum vor.

In einem (Prae–)HILBERT–Raum ist ein **Orthogonalitätsbegriff** sinnvoll erklärbar:

**Definition 2.11** *Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein (Prae–)*HILBERT*–Raum.*

- *Zwei Elemente $x, y \in X$ heißen* **orthogonal** *oder* **senkrecht**, *in Zeichen $x \perp y$, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ gilt:*

$$\boxed{x \perp y \;:\Leftrightarrow\; \langle x, y\rangle = 0 = \langle y, x\rangle \;\Leftrightarrow\; y \perp x}$$

- *Sei $M \subset X$ Unterraum. Ein Element $y \in X$ heiße* **orthogonal** *$M$, in Zeichen $y \perp M$, wenn $\langle x, y\rangle = 0 \;\forall\, x \in M$ gilt*

- *Die Teilmenge*

$$\boxed{M^\perp := \{y \in X \,:\, y \perp M\} \subset X}$$

*heiße* **Orthogonalkomplement** *von $M$.*

**Folgerung 2.7** *Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$* HILBERT*–Raum und $M \subset X$ Unterraum, nicht notwendig abgeschlossen.*

(a) *$M^\perp \subset X$ ist ein abgeschlossener Unterraum.*

Die Unterraumstruktur erhält man so: Aus $y, z \in M^\perp$ folgt $\langle x, y\rangle = 0 = \langle x, z\rangle \;\forall\, x \in M$, und somit wegen (4.1) auch

$$\langle x, \lambda\, y + \mu\, z\rangle = \bar\lambda\, \langle x, y\rangle + \bar\mu\, \langle x, z\rangle = 0 \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K}.$$

Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, sei $(y_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset M^\perp$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y \in X$ gegeben. Dann gilt für jedes $x \in M$:

$$|\langle x, y_k\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x, y_k - y\rangle| \le \|x\|_X \|y_k - y\|_X \to 0 \;\; (k \to \infty),$$

also $0 = \langle x, y_k\rangle \to \langle x, y\rangle$, und somit $y \in M^\perp$.

(b) *Es gilt stets* $\boxed{M \subset \overline{M} = M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp.}$

Es ist klar, $M^{\perp\perp} = \{x \in X \,:\, \langle y, x\rangle = 0 \;\forall\, y \in M^\perp\}$ ist wegen (a) abgeschlossen. Gemäß Definition 2.11 erfüllt jedes $x \in M$ diese Bedingung, so daß $M \subset M^{\perp\perp}$ folgt. Durch Abschluß erhält man die Behauptung.

Ist $X$ HILBERT–Raum und $M \subset X$ abgeschlossener Unterraum, so ist $X$ die direkte Summe von $M$ und $M^\perp$:

**Satz 2.11 (von der orthogonalen Projektion)**
*Seien $X$ ein* HILBERT*–Raum und $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann läßt sich $X$ in die direkte Summe $X = M \oplus M^\perp$ zerlegen, das heißt:*

$$\boxed{\forall x \in X \ \exists!\, y \in M \ \exists!\, z \in M^\perp \ : \ x = y + z.} \tag{4.7}$$

*Beweis:* Sei $x \in X$ fest gewählt und

$$d := \operatorname{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|_X$$

gesetzt. Das heißt, es existiert eine **Minimalfolge** $(y_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset M$ mit $d \le \|x - y_k\|_X \to d$. Wir verwenden die Parallelogrammgleichung (4.4), in der wir $x, y$ durch $x - y_j$ bzw. $x - y_k$ für $j \neq k$ ersetzen:

$$\|y_j - y_k\|_X^2 \le 2\,\|x - y_j\|_X^2 + 2\,\|x - y_k\|_X^2 - 4d^2 \to 0 \ \ (j, k \to \infty).$$

Die CAUCHY–Folge $(y_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset M$ hat einen Grenzwert $y \in M$, für den $\|x - y\|_X = \lim\limits_{k \to \infty} \|x - y_k\|_X = d$ gilt. Wir setzen $z := x - y$ und zeigen $z \in M^\perp$. In der Tat, zunächst gilt wie gezeigt $\|z\|_X = d$ und somit für alle $\lambda \in \mathbf{K}$ sowie für $0 \neq u \in M$:

$$0 \le \|z + \lambda\, u\|_X^2 - \|z\|_X^2 = |\lambda|^2 \cdot \|u\|_X^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\bar\lambda\,\langle z, u\rangle).$$

Mit der speziellen Wahl $\lambda := -\langle z, u\rangle / \|u\|_X^2$ erhält man sodann $0 \le -|\langle z, u\rangle|^2 / \|u\|_X^2 \le 0$, und dies trifft nur für $z \in M^\perp$ zu. Wir haben die gewünschte Zerlegung mit $y \in M$ und $z \in M^\perp$ erreicht. Um die Eindeutigkeit dieser Zerlegung zu zeigen, genügt es zu vermerken, daß $x \perp x$ genau für $x = 0$ gilt. Es folgt also $M \cap M^\perp = \{0\}$. □

Die Zuordnungsvorschrift (4.7), nämlich $X \ni x \mapsto y =: Px \in M$ induziert eine Abbildung $P : X \to M$, genannt die **orthogonale Projektion** von $X$ auf den Unterraum $M$.

**Folgerung 2.8** *Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein* HILBERT*–Raum und $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum.*

(a) *Es existiert genau eine Abbildung $P : X \to M$, die*

$$\boxed{\langle Px, u\rangle = \langle x, u\rangle \quad \forall\, x \in X \ \forall\, u \in M} \tag{4.8}$$

*erfüllt. $P$ ist linear und stetig mit Norm $\|P\|_{X \to X} = 1$.*

Denn äquivalent mit (4.8) ist die Bedingung $x - Px \perp M \ \forall\, x \in X$, und das ist gemäß (4.7) genau dann der Fall, wenn $x - Px =: z \in M^\perp$ gilt, also wenn $Px = y \in M$ die orthogonale Projektion auf $M$ ist. Die Linearität von $P$ ist einfach nachzurechnen; die Eindeutigkeit ist in der Aussage (4.7) enthalten. Zum Beweis der Stetigkeit setzen wir in (4.8) speziell $u := Px \in M$ und erhalten:

$$\|Px\|_X^2 = \langle x, Px\rangle \le \|x\|_X \|Px\|_X \quad \forall\, x \in X, \qquad \text{also} \quad \|P\|_{X \to X} \le 1.$$

Dies zeigt schon die Stetigkeit von $P$. Ist andererseits $x \in M$, so haben wir gemäß (4.7): $x = Px$. Somit folgt $\|x\|_X = \|Px\|_X \le \|P\|_{X \to X} \cdot \|x\|_X$, also $1 \le \|P\|_{X \to X}$. Zusammen mit obiger Ungleichung resultiert $\|P\|_{X \to X} = 1$.

(b) *Gilt $M \subsetneq X$, so gibt es ein $0 \neq z_0 \in X$ mit $z_0 \perp M$.*

Denn wählen wir $0 \neq x_0 \in X \setminus M = M^c \neq \emptyset$ und zerlegen es gemäß (4.7) in die direkte Summe $x_0 = y_0 + z_0$, so leistet $z_0 \in M^\perp$ bereits das Verlangte: Wäre nämlich $z_0 = 0$, so wäre $x_0 = y_0 \in M$, im Widerspruch zu $x_0 \in M^c$.

Die bedeutendste Eigenschaft eines HILBERT–Raumes $X$ findet ihren Niederschlag in dem folgenden Satz über die Darstellbarkeit der beschränkten linearen Funktionale auf $X$.

**Satz 2.12 (Darstellungssatz von FRÉCHET-RIESZ)**
*In einem HILBERT-Raum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt stets:*

(a) *Zu jedem beschränkten linearen Funktional $\ell \in X^*$ gibt es genau ein $y \in X$ mit $\|\ell\|_{X^*} = \|y\|_X$ und*

$$\boxed{\ell(x) = \langle x, y\rangle \quad \forall\, x \in X.} \tag{4.9}$$

(b) *Die zugeordnete Abbildung $T : X^* \to X, \quad X^* \ni \ell \mapsto y =: T\ell \in X$ ist eine bijektive antilineare Isometrie.*

*Beweis:* (a) Der Unterraum $M := N(\ell) = \{x \in X : \ell(x) = 0\} \subset X$ ist abgeschlossen. Wir unterscheiden zwei Fälle gemäß (i) $M = X$ und (ii) $M \subsetneq X$. Im Fall (i) leistet $y := 0$ bereits das in (4.9) Verlangte. Im Fall (ii) erschließen wir aus Folgerung 2.8(b) die Existenz eines $0 \neq z_0 \in X$ mit $z_0 \perp M$. Wir setzen $\alpha := \ell(z_0) \neq 0$ und folgern

$$\ell\Big(x - \frac{\ell(x)}{\alpha}\, z_0\Big) = 0 \quad \forall\, x \in X, \qquad \text{also} \quad x - \frac{\ell(x)}{\alpha}\, z_0 \in M, \;\; z_0 \in M^\perp.$$

Somit gilt

$$0 = \langle x - \frac{\ell(x)}{\alpha}\, z_0, z_0\rangle = \langle x, z_0\rangle - \frac{\|z_0\|_X^2}{\alpha}\, \ell(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Setzen wir hier $y := \bar\alpha z_0/\|z_0\|_X^2$, so leistet $y$ wiederum das in (4.9) Verlangte. Um Eindeutigkeit von $y$ zu zeigen, sei angenommen, es sei $z \in X$ eine weitere Darstellung von $\ell$. Dann gilt $\langle x, y - z\rangle = 0\ \forall\, x \in X$, also $y - z \in X^\perp = \{0\}$. Die Gleichung $\|\ell\|_{X^*} = \|y\|_X$ folgt einerseits aus (4.9) durch die CAUCHY–SCHWARZ–Ungleichung: $|\ell(x)| \le \|x\|_X \|y\|_X$, und andererseits durch die spezielle Wahl $x = y$ mit $\|y\|_X^2 = \langle y, y\rangle = \ell(y) \le \|\ell\|_{X^*}\|y\|_X$.

(b) Die Antilinearität von $T$ folgt aus (4.9), da das Skalarprodukt in $y$ antilinear ist. Die Isometrie haben wir schon in (a) bewiesen, aus der auch die Injektivität folgt. Die Surjektivität von $T$ ergibt sich aus der Tatsache, daß jedes $y \in X$ vermöge $\ell_y(x) := \langle x, y\rangle$ ein beschränktes lineares Funktional $\ell_y \in X^*$ erzeugt. □

Auch wenn die Abbildung $T$ keine **lineare** Isometrie ist, so ist ihre Antilinearität offenbar ausreichend, um die Räume $X$ und $X^*$ miteinander zu identifizieren.

---

## 2.5 Räume stetiger Funktionen und der Satz von ARZELA–ASCOLI

In Abschnitt 0.1 wurde bereits der $\mathbf{K}$–Vektorraum $C(\Omega)$ der auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ stetigen Funktionen eingeführt. Eine geeignete Norm auf diesem Raum ist nicht bekannt, da Funktionen $f \in C(\Omega)$ weder beschränkt noch integrierbar sein müssen, wie das Beispiel $\Omega := (0,1)$ und $f(t) := \frac{1}{t}$ lehrt. Anders verhält es sich mit stetigen Funktionen $f : X \to \mathbf{K}$ auf einem kompakten metrischen Raum $X$, da der Betrag $|f|$ wegen des Extremalsatzes

1.19(b) Maximum und Minimum seiner Funktionswerte auf $X$ annimmt. Der Spezialfall $X := K \subset \mathbf{R}^n$ mit einer kompakten Teilmenge $K$ ist für viele Anwendungen interessant genug.

Sei also $(X, d)$ ein **kompakter metrischer** Raum,

$$C(X) := \{f : X \to \mathbf{K} \ : \ f \text{ stetig}\}$$

der $\mathbf{K}$–Vektorraum der stetigen Funktionen auf $X$, auf dem das Funktional

$$\boxed{\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C(X),} \tag{5.1}$$

wohldefiniert ist.

**Satz 2.13** *$(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist* BANACH*–Raum über dem Körper $\mathbf{K}$.*

*Beweis:* Die Normaxiome (N1) – (N3) sind unmittelbar an der Definition (5.1) ablesbar. Die Konvergenz $f_k \to f$ in der Norm (5.1) ist die **gleichmäßige** Konvergenz. Für eine CAUCHY–Folge $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset C(X)$ heißt das:

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, N = N(\epsilon) \ : \ \max_{x \in X} |f_j(x) - f_k(x)| \le \epsilon \quad \forall\, j, k \ge N. \tag{5.2}$$

Speziell ist dann auch $(f_k(x))_{k \in \mathbf{N}}$ für jedes feste $x \in X$ CAUCHY–Folge in $\mathbf{K}$, also konvergent mit einem Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$. Darüber hinaus ergibt sich aus (5.2) für jedes feste $x \in X$:

$$|f(x) - f_k(x)| = \lim_{j \to \infty} |f_j(x) - f_k(x)| \le \limsup_{j \to \infty} \|f_j - f_k\|_\infty \le \epsilon \quad \forall\, k \ge N.$$

Wir müssen nun die Stetigkeit der Funktion $f$ zeigen. Da $f_k$ stetig ist, gibt es zu dem oben fixierten $\epsilon > 0$ und zu $x \in X$ eine offene $\delta$–Kugel $B_\delta(x) \subset X$ mit $|f_k(x) - f_k(y)| \le \epsilon \ \forall\, y \in B_\delta(x)$. Nun folgt unter Verwendung der $\Delta$–Ungleichung für jedes $k \ge N$:

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \le \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon \quad \forall\, y \in B_\delta(x).$$

Somit ist $f$ in jedem Punkt $x \in X$ stetig und $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. □

Nun untersuchen wir die relativ kompakten Teilmengen von $C(X)$.

**Definition 2.12** *Sei $M \subset C(X)$ eine Teilmenge.*

- *$M$ heiße* **gleichmäßig beschränkt** $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists\, C < \infty \ : \ \|f\|_\infty \le C \quad \forall\, f \in M}$
- *$M$ heiße* **gleichgradig stetig** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) \ : \ |f(x) - f(y)| \le \epsilon \ \forall\, x, y \in X \ \textit{mit}\ d(x, y) \le \delta \ \forall\, f \in M.} \tag{5.3}$$

Im Unterschied zur gewöhnlichen Stetigkeit darf die Zahl $\delta$ bei gleichgradiger Stetigkeit **nicht** von dem speziellen $f \in M$ abhängen.

**BSP. (2.5.1)** **Kompakte Integraloperatoren in $C(\overline{\Omega})$.** Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist $X := \overline{\Omega}$ kompakt, also $E := (C(X), \|\cdot\|_\infty)$ BANACH–Raum über dem Körper $\mathbf{K}$. Seien ferner $K : X \times X \to \mathbf{K}$ und $F : X \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ stetige Funktionen. Wir setzen

$$(Tf)(x) := \int_\Omega K(x,z)\, F(z, f(z))\, dz, \quad x \in X,\ f \in E. \tag{5.4}$$

Wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen an $K$ und $F$ gilt offenbar $Tf \in E\ \forall\, f \in E$. Wir zeigen, daß das Bild $M := T(B_r(g))$ der offenen $r$–Kugel $B_r(g)$ um den Punkt $g \in E$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist. Zunächst gilt wegen $\|f - g\|_\infty < r$:

$$|f(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x)| \le \|f - g\|_\infty + \|g\|_\infty < r + \|g\|_\infty =: R \quad \forall\, x \in X\ \forall\, f \in B_r(g).$$

Das heißt, die Menge der Funktionswerte $\{f(x) : x \in X \wedge f \in B_r(g)\} \subset \mathbf{K}$ liegt in der kompakten Kugel $\overline{B_R(0)} \subset \mathbf{K}$, und wegen der Stetigkeit von $F$ folgt deshalb

$$\exists\, C < \infty : |F(x, f(x))| \le C \quad \forall\, x \in X\ \forall\, f \in B_r(g). \tag{5.5}$$

(i) $M$ ist *gleichmäßig beschränkt:* Setzen wir nämlich $L := \max\limits_{x \in X} \int_\Omega |K(x,z)|\, dz < \infty$, so folgt aus (5.5):

$$\|Tf\|_\infty = \max_{x \in X} \Big| \int_\Omega K(x,z)\, F(z, f(z))\, dz \Big| \le LC =: C^* < \infty \quad \forall\, f \in B_r(g).$$

(ii) $M$ ist *gleichgradig stetig:* Die stetige skalare Funktion $K(x,z)$ ist auf dem Kompaktum $X$ sogar **gleichmäßig stetig**:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |K(x,z) - K(y,z)| \le \epsilon \quad \forall\, z \in X\ \forall\, x, y \in X \text{ mit } |x - y| \le \delta.$$

Für ebendiese $\epsilon, \delta, x$ und $y$ folgern wir:

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \le \int_\Omega |K(x,z) - K(y,z)|\, |F(z, f(z))|\, dz \overset{(5.5)}{\le} C \cdot \epsilon \int_\Omega dz =: \tilde{\epsilon} \quad \forall\, f \in B_r(g).$$

Das ist die gleichgradige Stetigkeit.

Wir werden im folgenden Satz zeigen, daß die relativ kompakten Teilmengen $M \subset E := C(X)$ genau die gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Teilmengen sind. Somit muß $T : E \to E$ gemäß Definition 2.7 **kompakt** sein. Speziell für $F(x, \cdot) := Id$ gilt dann $T \in K(E)$.

**Satz 2.14 (von ARZELA–ASCOLI)**
*Sei $(X, d)$ ein kompakter metrischer Raum. Ferner sei $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ der* BANACH*–Raum der auf $X$ stetigen skalarwertigen Funktionen. Dann gilt für eine Teilmenge $M \subset C(X)$:*

| *$M$ ist relativ kompakt $\Leftrightarrow$ $M$ ist gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.* |
|---|

*Beweis:* Wir zeigen hier nur die für die meisten praktischen Belange wichtige Richtung "$\Leftarrow$". Die Notwendigkeit "$\Rightarrow$" belegen wir exemplarisch in BSP.(2.5.2).
Wegen der Äquivalenz zur Folgenkompaktheit geben wir eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Folge $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset C(X)$ vor. Wir müssen die Existenz einer gleichmäßig konvergenten

Teilfolge nachweisen. Wegen Satz 1.18 enthält $X$ eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_j : j \in \mathbf{N}\}$. Mit dem Prinzip der Auswahl einer Diagonalfolge (vgl. BSP.(2.3.6)) konstruiert man eine Teilfolge, die wir wieder mit $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ bezeichnen, welche die Eigenschaft

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_j) =: g_j \in \mathbf{K} \quad \forall\, j \in \mathbf{N} \tag{5.6}$$

besitzt. Zum Beweis ihrer gleichmäßigen Konvergenz sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und $\delta > 0$ gemäß (5.3) gewählt. Den kompakten Raum $X$ überdecken wir mit offenen Kugeln $B_{\delta/2}(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Zu jedem Index $i$ gibt es einen Punkt $x_i$ aus der dichten Teilmenge $\{x_j : j \in \mathbf{N}\}$ mit $x_i \in B_{\delta/2}(z_i)$. Des weiteren gilt wegen (5.3):

$$|f_k(x) - f_k(y)| \le \epsilon \quad \forall\, x, y \in B_{\delta/2}(z_i)\ \forall\, k \in \mathbf{N},$$

und wegen (5.6) gibt es ein $N = N(\epsilon)$ mit

$$|f_k(x_i) - f_l(x_i)| \le \epsilon \quad \forall\, k, l \ge N,\ \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Unter Verwendung der $\Delta$–Ungleichung resultiert nun für $k, l \ge N$ und für jedes $x \in X$:

$$|f_k(x) - f_l(x)| \le |f_k(x) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_l(x_i)| + |f_l(x_i) - f_l(x)| \le \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon,$$

und somit die gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$. □

**BSP. (2.5.2)** Wir betrachten die Menge $M := \{f_1, f_2, \ldots\}$ der Folgenglieder von $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C([0,1])$, wobei gelte

$$f_k(x) := \begin{cases} 1 - kx & : \ 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ 0 & : \ \text{sonst}, \end{cases} \qquad k \in \mathbf{N}.$$

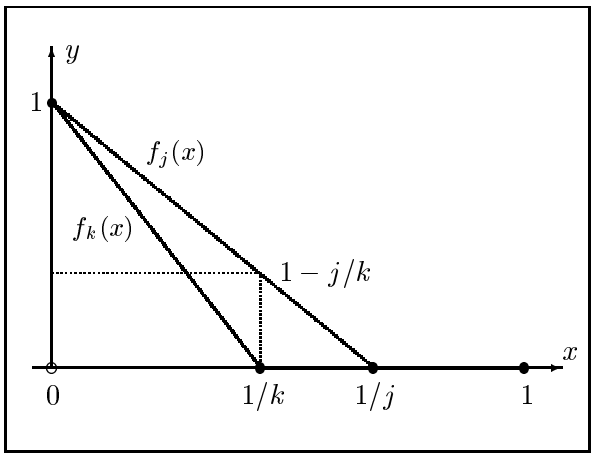


**Fig.3:** Die Graphen der Funktionen $f_k(x)$

Es ist offenbar unmöglich, ein $\delta > 0$ mit $|f_k(0) - f_k(x)| \le \frac{1}{2}\ \forall\, 0 \le x \le \delta\ \forall\, k \in \mathbf{N}$ zu bestimmen. Also ist die Menge $M$ **nicht** gleichgradig stetig. Wegen $\max_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f_j(x)| = 1 - \frac{j}{k}$ für $j < k$ kann man keine gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen. Dies zeigt bereits, daß die gleichgradige Stetigkeit notwendig ist für die Gültigkeit von Satz 2.14. Ebenso notwendig ist die gleichmäßige Beschränktheit. Dazu brauchen wir nur die unbeschränkte Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C([0,1])$ der Funktionen $f_k(x) := k$ zu betrachten. Diese enthält ebenfalls keine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Schließlich

ist auch die Kompaktheit von $X$ notwendig. Um dies zu beweisen, wählen wir eine beliebige Funktion $0 \neq f \in C_0^\infty(\mathbf{R}) \subset C(\mathbf{R})$. Die Folge

$$f_k(x) := f(x+k), \quad k \in \mathbf{N},$$

konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, aber nicht gleichmäßig. Es ist klar, $\|f_k\|_\infty = \|f\|_\infty \ \forall\, k \in \mathbf{N}$ liefert die gleichmäßige Beschränktheit, und die gleichgradige Stetigkeit folgt unter Verwendung von Satz 1.13 aus

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq M\,|x-y| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}\ \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

---

## 2.6 Die Räume $\overline{C}^m(\Omega)$ und $C^m(\overline{\Omega})$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ stets ein Gebiet; des weiteren sei $m \in \mathbf{N}_0$. Die $\mathbf{K}$–Vektorräume

$$C^m(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbf{K} \ :\ D^\rho f : \Omega \to \mathbf{K} \text{ stetig } \forall\ |\rho| \leq m\}, \quad C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbf{N}_0} C^m(\Omega)$$

hatten wir bereits in Abschnitt 0.1 eingeführt. Da Funktionen $f \in C^m(\Omega)$ nicht beschränkt zu sein brauchen, führen wir außerdem den folgenden $\mathbf{K}$–Vektorraum ein:

$$\boxed{UCB(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbf{K} \ :\ f \text{ gleichmäßig stetig und beschränkt}\}}$$

(**U**niformly **C**ontinuous and **B**ounded functions). Gleichmäßige Stetigkeit von $f : \Omega \to \mathbf{K}$ heißt ja bekanntlich

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0\ :\ |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \quad \forall\, x, y \in \Omega \text{ mit } |x-y| \leq \delta.} \tag{6.1}$$

Die Zahl $\delta > 0$ ist unabhängig von $x$ und $y$.

**Folgerung 2.9** *Jedes $f \in UCB(\Omega)$ besitzt eine eindeutige stetige und beschränkte Fortsetzung $f_0 : \overline{\Omega} \to \mathbf{K}$.*

Seien nämlich $x \in \overline{\Omega}$ und $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \Omega$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$ gegeben. Die Folge $(f(x_k))_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$ ist nach Voraussetzung beschränkt:

$$|f(x_k)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f(x)| =: M_f < \infty.$$

Sie besitzt also eine konvergente Teilfolge, die wiederum mit $(f(x_k))_{k \in \mathbf{N}}$ bezeichnet werde, $\lim\limits_{k \in \mathbf{N}} f(x_k) =: f_0(x) \in \mathbf{K}$. Ganz offensichtlich gilt $|f_0(x)| \leq M_f$, und $f_0(x)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$. Sei nämlich $(y_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \Omega$ eine weitere Folge mit $y_k \to x$ und $f(y_k) \to g_0$. Für jedes $\epsilon > 0$ und für die durch (6.1) fixierte Zahl $\delta > 0$ gibt es dann ein $N = N(\epsilon)$ mit $|f_0(x) - f(x_k)| \leq \epsilon$, $|g_0 - f(y_k)| \leq \epsilon$ und $|x_k - y_k| \leq \delta\ \forall\, k \geq N$, und es folgt aus (6.1):

$$|f_0(x) - g_0| \leq |f_0(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y_k)| + |f(y_k) - g_0| \leq 3\epsilon \quad \forall\, k \geq N.$$

Dies zeigt bereits $f_0(x) = g_0$. □

**BSP. (2.6.1)** Die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $f$ ist unverzichtbar für die eindeutige Fortsetzbarkeit, wie das Beispiel der beschränkten stetigen Funktion $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ auf dem offenen Intervall $\Omega := (0,1) \subset \mathbf{R}$ lehrt. Diese Funktion kann nicht stetig in den Punkt $x = 0$ fortgesetzt werden.

**Satz 2.15** *Der Raum $UCB(\Omega)$, versehen mit der Norm*

$$\boxed{\|f\|_{\infty;\Omega} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, \quad f \in UCB(\Omega),} \tag{6.2}$$

*ist ein* BANACH*–Raum.*

*Beweis:* Die Normaxiome (N1) – (N3) können direkt an (6.2) abgelesen werden. Zum Nachweis der Vollständigkeit betrachten wir eine CAUCHY–Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset UCB(\Omega)$. Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $N = N(\epsilon)$ mit

$$|f_j(x) - f_k(x)| \le \|f_j - f_k\|_{\infty;\Omega} \le \epsilon \quad \forall\, j,k \ge N \ \forall\, x \in \Omega. \tag{6.3}$$

Es existiert somit punktweise der Limes $f_k(x) \to f(x) \in \mathbf{K}$ für jedes $x \in \Omega$. Die Ungleichung (6.3) liefert die Beschränktheit der Funktion $f : \Omega \to \mathbf{K}$:

$$|f(x)| = \lim_{j\to\infty} |f_j(x)| \le \lim_{j\to\infty} |f_j(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \le \epsilon + \|f_N\|_{\infty;\Omega} < \infty \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Zum Nachweis der gleichmäßigen Stetigkeit sei zu $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so gewählt, daß (6.1) für die Funktion $f_N$ gilt. Aus (6.3) folgt $|f(x) - f_N(x)| \le \epsilon \ \forall\, x \in \Omega$ und somit

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \le 3\epsilon \quad \forall\, x,y \in \Omega \text{ mit } |x-y| \le \delta.$$

Wir haben auch die gleichmäßige Stetigkeit von $f$ gezeigt. □

**Definition 2.13** *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Dann setzen wir für $m \in \mathbf{N}_0$*

$$\bar{C}^m(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega) \,:\, D^\rho f \in UCB(\Omega) \ \forall\, |\rho| \le m\}$$

*und erklären auf $\bar{C}^m(\Omega)$ das Funktional*

$$\boxed{\|f\|_{m,\infty;\Omega} := \max_{0\le|\rho|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\rho f(x)|, \quad f \in \bar{C}^m(\Omega).} \tag{6.4}$$

**Bemerkung 2.4** (a) Offensichtlich ist $(\bar{C}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty;\Omega})$ wegen $\bar{C}(\Omega) := \bar{C}^0(\Omega) = UCB(\Omega)$ ein BANACH–Raum (Satz 2.15). Dies gilt auch für $(\bar{C}^m(\Omega), \|\cdot\|_{m,\infty;\Omega})$, wie im nächsten Satz zu zeigen ist.

(b) Ist $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein **beschränktes** Gebiet, so ist $\overline{\Omega}$ ein kompakter metrischer Raum, der die Standardtopologie des $\mathbf{R}^n$ trägt. Somit ist $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ gemäß Satz 2.13 ein BANACH–Raum. Auf dem Kompaktum $\overline{\Omega}$ sind stetige Funktionen bekanntlich ja auch beschränkt und gleichmäßig stetig.

(c) Im allgemeinen ist die Zuordnung der Punktmengen $\Omega \rightleftharpoons \overline{\Omega}$ nicht eindeutig, wie folgendes

Beispiel lehrt: In $\mathbf{R}^2$ sei $B_1(0) := \{(x,y) \,:\, x^2+y^2<1\}$ die offene Kreisscheibe vom Radius 1. Wir betrachten die **geschlitzte** Kreisscheibe

$$\Omega := B_1(0) \setminus \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le 1,\ y = 0\},$$

die ein Gebiet ist und $\overline{\Omega} = B_1^*(0) = \overline{B_1(0)}$ erfüllt. Ihr Abschluß ist die abgeschlossene Einheitskreisscheibe, obwohl $\Omega \neq B_1(0)$ gilt.

(d) Ist $\Omega$ die **größte** in $\overline{\Omega}$ enthaltene offene Punktmenge, so ist die Zuordnung der Punktmengen $\Omega \rightleftharpoons \overline{\Omega}$ eindeutig. Für **beschränkte** Gebiete $\Omega$ kann in diesem Fall der $\mathbf{K}$–Vektorraum $\bar{C}^m(\Omega)$ mit dem Raum

$$\boxed{C^m(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbf{K} \,:\, \forall\, |\rho| \le m \ \exists!\ f_\rho : \overline{\Omega} \to \mathbf{K} \text{ stetig} \wedge\ D^\rho f(x) = f_\rho(x)\ \forall\, x \in (\overline{\Omega})^o\}}$$

identifiziert werden. Im allgemeinen gilt $\bar{C}^m(\Omega) \neq C^m(\overline{\Omega})$; insbesondere ist $\bar{C}^m(\mathbf{R}^n) \neq C^m(\mathbf{R}^n)$.

**Satz 2.16** *Die Räume* $(\bar{C}^m(\Omega), \|\cdot\|_{m,\infty;\Omega})$ *sind* BANACH*–Räume.*

*Beweis:* Die Normaxiome (N1) – (N3) sind auch hier direkt an (6.4) ablesbar. Die Vollständigkeit zeigen wir wie in Satz 2.15: Ist $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \bar{C}^m(\Omega)$ eine CAUCHY–Folge, so ist $(D^\rho f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset UCB(\Omega)$ für $|\rho| \le m$ eine CAUCHY–Folge bezüglich der Norm (6.2) und besitzt gemäß Satz 2.15 einen Grenzwert $f_\rho \in UCB(\Omega)$. Es bleibt $f_\rho = D^\rho f$ zu zeigen, und dies bewerkstelligen wir exemplarisch für $\rho := e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, im Sinne einer vollständigen Induktion. Es bezeichne

$$D_i^+ f(x) := \frac{1}{h}\,(f(x+he_i) - f(x)), \quad h > 0$$

den Differenzenquotienten von $f$ in einem Punkt $x \in \Omega$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $f$ reellwertig ist. Andernfalls betrachten wir Real– und Imaginärteil von $f$ getrennt. Weiter sei $h_0 > 0$ hinreichend klein, so daß $x + he_i \in \Omega$ für alle $0 < h \le h_0$ gilt. Für solche $h$ wenden wir den Mittelwertsatz an:

$$\begin{aligned}
&|D_i^+ f(x) - f_\rho(x)| \\
&\le \frac{1}{h}\,|f(x+he_i) - f_k(x+he_i)| + \frac{1}{h}|f(x) - f_k(x)| + |f_\rho(x) - D_i f_k(x)| + |D_i^+ f_k(x) - D_i f_k(x)| \\
&\le \frac{2}{h}\,\|f - f_k\|_{\infty;\Omega} + \|f_\rho - D_i f_k\|_{\infty;\Omega} + |D_i f_k(x + \vartheta\, e_i) - D_i f_k(x)| \\
&\le \frac{2}{h}\,\|f - f_k\|_{\infty;\Omega} + \|f_\rho - D_i f_k\|_{\infty;\Omega} + 2\,\|D_i f_k - D_i f_N\|_{\infty;\Omega} + |D_i f_N(x + \vartheta\, e_i) - D_i f_N(x)|.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist richtig für beliebiges $k, N \in \mathbf{N}$ und $0 < \vartheta < h$. Wir geben nun $\epsilon > 0$ vor und wählen $N = N(\epsilon)$ so, daß $2\,\|D_i f_k - D_i f_N\|_{\infty;\Omega} \le \frac{\epsilon}{3}\ \forall\, k \ge N$ ausfällt. Dann wählen wir $h > 0$ so klein, daß der letzte Summand kleiner wird als $\frac{\epsilon}{3}$. Für genügend großes $k \ge N$ erhalten wir sodann $|D_i^+ f(x) - f_\rho(x)| \le \epsilon$ und daher $D_i f = f_\rho$ für $\rho = e_i$. Man schließt mittels vollständiger Induktion auf $D^\rho f = f_\rho$ für allgemeines $|\rho| \le m$ und somit auf $f_k \to f$ in $\bar{C}^m(\Omega)$. □

## 2.7 Der Fixpunktsatz von SCHAUDER

Im Fixpunktsatz von BANACH spielt der Begriff der **Kontraktion** die entscheidende Rolle. Eine Loslösung von diesem Begriff kann i.a. nur auf Kosten der Eindeutigkeitsaussage erfolgen. Existenzaussagen sind jedoch auch ohne Kontraktionseigenschaft möglich, wie wir in diesem Abschnitt belegen werden. Wir befassen uns zunächst mit dem Begriff der **konvexen** Menge.

**Definition 2.14** *Sei $X$ ein Vektorraum über* $\mathbf{K}$ *und $S \subset X$ eine Teilmenge.*

- *$S$ heiße* **konvex** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall\, x_1, x_2 \in S\,:\,(1-\lambda)\,x_1 + \lambda\, x_2 \in S\ \ \forall\, \lambda \in (0,1)} \tag{7.1}$$

- *Ein Element $x \in X$ heiße* **konvexe Linearkombination** *(konvexe LK) aus endlich vielen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$* $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \ \textit{mit}\ \lambda_k \geq 0\ \ \forall\, k = 1,2,\ldots,N\ \textit{und}\ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1} \tag{7.2}$$

- *Die Menge*

$$\mathrm{co}\,(S) := \{x \in X\,:\, x \textit{ ist konvexe LK aus je endlich vielen } x_k \in S\}$$

*heiße* **konvexe Hülle** *von $S$.*

**Folgerung 2.10** (a) *Eine konvexe Menge $S \subset X$ enthält die konvexe Hülle jeder ihrer Teilmengen. Es gilt dann insbesondere $S = \mathrm{co}\,(S)$.*

Dazu brauchen wir nur zu zeigen, daß eine konvexe Menge $S$ alle ihre konvexen LK enthält, denn trivialerweise gilt stets $S \subset \mathrm{co}\,(S)$. Der erforderliche Nachweis gelingt durch vollständige Induktion nach $N$. Für $N = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $N = 2$ seien $x_1, x_2 \in S$ und $x := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Wird $\lambda := \lambda_2$ gesetzt, so ist $\lambda_1 = 1 - \lambda$, und wir erhalten $x \in S$ aus (7.1).

*Vererbung:* Seien nun $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1} \in S$, und sei bereits bewiesen, daß der Punkt $x$ aus (7.2) in $S$ liegt. Dann gilt wegen (7.1) auch

$$y := (1-\lambda)\,x_{N+1} + \lambda\, x = (1-\lambda)\,x_{N+1} + \lambda \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\, x_k \in S \quad \forall\, \lambda \in (0,1).$$

Wir setzen $\tilde{\lambda}_k := \lambda \cdot \lambda_k$ sowie $\tilde{\lambda}_{N+1} := 1 - \lambda$ und erhalten $y = \sum\limits_{k=1}^{N+1} \tilde{\lambda}_k x_k \in \mathrm{co}(S)$, denn es gilt $\sum\limits_{k=1}^{N+1} \tilde{\lambda}_k = \lambda \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k + 1 - \lambda = 1$. □

(b) $\mathrm{co}\,(S)$ *ist die kleinste konvexe Menge, die $S$ enthält.*

(c) *Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.*

Sind nämlich $S_j \subset X,\ j \in I$, konvexe Teilmengen und $S := \bigcap_{j\in I} S_j$, so gilt für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in S$ wegen $z_\lambda := (1-\lambda)\,x_1 + \lambda\,x_2 \in S_j\ \forall\,\lambda \in (0,1)\ \forall\,j \in I$ auch $z_\lambda \in S$. □

(d) *In einem* BANACH*–Raum $X$ ist der Abschluß $\overline{S}$ einer konvexen Menge $S \subset X$ wieder konvex.*

Denn seien $x, y \in \overline{S}$ gegeben und für festes $\lambda \in (0,1)$ $z_\lambda := (1-\lambda)\,x + \lambda\,y$ gesetzt. Dann gibt es Folgen $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}, (y_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset S$ mit $x_k \to x$ und $y_k \to y$. Wegen der Linearität der Konvergenz ergibt sich nun $z_{\lambda,k} := (1-\lambda)\,x_k + \lambda\,y_k \to z_\lambda$. Aus der Konvexität von $S$ erhalten wir aber $z_{\lambda,k} \in S$ und somit auch $z_\lambda \in \overline{S}$. □

Wir zeigen nun, daß sich die Kompaktheit von Teilmengen eines BANACH–Raumes auf die abgeschlossene konvexe Hülle vererbt.

**Satz 2.17 (von MAZUR)**
*Seien $X$ ein* BANACH*–Raum und $S \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist auch die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\mathrm{co}\,(S)}$ kompakt.*

*Beweis:* Wegen Bemerkung 1.6 reicht es, die relative Kompaktheit von $\mathrm{co}\,(S)$ zu zeigen. Für jedes $\epsilon > 0$ läßt sich $S$ also durch endlich viele offene $\epsilon$–Kugeln $B_\epsilon(y_i),\ i = 1,2,\ldots,m$, überdecken. Es sei $\tilde{S} := \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset S$ und $\tilde{X} := \mathrm{span}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ gesetzt. Ist $R := \max\limits_{1\le i\le m} \|y_i\|_X$, so gilt $\tilde{S} \subset B_R^*(0)$ und somit nach Folgerung 2.10(b) auch $\mathrm{co}\,(\tilde{S}) \subset B_R^*(0)$, da die abgeschlossene $R$–Kugel $B_R^*(0)$ konvex ist. Als beschränkte Teilmenge des endlichdimensionalen BANACH–Raumes $\tilde{X}$ ist also $\mathrm{co}\,(\tilde{S})$ relativ kompakt (Satz 2.3). Sei nun $x \in \mathrm{co}\,(S)$ in der Form (7.2) mit $x_1, x_2, \ldots, x_N \in S$ vorgelegt. Dann gibt es zu jedem $x_k$ ein $y_{i_k} \in \tilde{S}$ mit $\|x_k - y_{i_k}\|_X < \epsilon\ \forall\ k = 1,2,\ldots,N$. Für das Element

$$\tilde{y} := \sum_{k=1}^{N} \lambda_k y_{i_k} \in \mathrm{co}\,(\tilde{S})$$

folgt hieraus

$$\|x - \tilde{y}\|_X \le \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \|x_k - y_{i_k}\|_X < \epsilon \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = \epsilon. \tag{7.3}$$

Wird also die relativ kompakte Menge $\mathrm{co}\,(\tilde{S})$ durch endlich viele $\epsilon$–Kugeln $B_\epsilon(\tilde{y}_i),\ i = 1,2,\ldots,p$, überdeckt, so muß das System $\{B_{2\epsilon}(\tilde{y}_i)\}_{1\le i\le p}$ wegen

$$\|x - \tilde{y}_i\|_X \le \|x - \tilde{y}\|_X + \|\tilde{y} - \tilde{y}_i\|_X \overset{(7.3)}{<} 2\epsilon$$

eine offene Überdeckung von $\mathrm{co}\,(S)$ sein. Also ist $\mathrm{co}\,(S)$ relativ kompakt. □

Wir betrachten nun Abbildungen $T$ auf Teilmengen $S$ eines BANACH–Raumes $X$. Eine Existenzaussage für **Fixpunkte**

$$x = Tx \tag{7.4}$$

liefert der folgende Satz, den wir hier ohne Beweis zitieren (vgl. L.W. KANTOROWITSCH/G.P. AKILOW: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Akademie–Verlag, Berlin 1964).

**Satz 2.18 (Fixpunktsatz von SCHAUDER)**
*Es seien $X$ ein* BANACH*–Raum und $S \subset X$ eine abgeschlossene, konvexe und kompakte Teilmenge. Dann besitzt jede stetige Abbildung $T : S \to S$ mindestens einen Fixpunkt $x \in S$.*

Anders als beim Fixpunktsatz von BANACH wird hier weder eine Eindeutigkeitsaussage noch eine Konstruktionsvorschrift zur Berechnung des Fixpunktes $x$ geliefert. Für Anwendungen sind auch die folgenden Varianten des Fixpunktsatzes von SCHAUDER wichtig.

**Satz 2.19** *Es sei $X$ ein* BANACH*–Raum und $S \subset X$ eine Teilmenge.*

(a) *Ist $S$ abgeschlossen, konvex und beschränkt, so besitzt jede stetige und kompakte Abbildung $T : S \to S$ mindestens einen Fixpunkt $x \in S$.*

(b) *Ist $S$ abgeschlossen und konvex und ist das Bild $T(S)$ der Menge $S$ unter der stetigen Abbildung $T : S \to S$ relativ kompakt, so besitzt $T$ mindestens einen Fixpunkt $x \in S$.*

*Beweis:* (a) Da Fixpunkte höchstens in der Teilmenge $S^* := \overline{T(S)} \subset S$ auftreten können, bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Einschränkung $\tilde{T} := T|\tilde{S}$ von $T$ auf die gemäß Satz 2.17 abgeschlossene, konvexe und kompakte Teilmenge $\tilde{S} := \overline{\mathrm{co}\,(S^*)} \subset S$ betrachten. Dann erfüllen nämlich $\tilde{S}$ und $\tilde{T}$ die Voraussetzungen des Satzes 2.18 von SCHAUDER, und es folgt die Existenz eines Fixpunktes.

(b) Der Beweisgang ist derselbe wie in (a). Da die Menge $S^* := \overline{T(S)} \subset S$ kompakt ist, setzen wir wie vorher $\tilde{S} := \overline{\mathrm{co}\,(S^*)} \subset S$ und betrachten $T|\tilde{S} =: \tilde{T} : \tilde{S} \to \tilde{S}$. □

**BSP. (2.7.1)** **Der Existenzsatz von PEANO für Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen.** Wir betrachten hier nochmals die Anfangswertaufgabe (3.18) aus BSP.(1.3.2), nämlich

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I := [a, b], \qquad x(a) = x_0 \in \mathbf{K}^n \text{ vorgegeben.} \tag{7.5}$$

Dabei werde $f : I \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ stetig vorausgesetzt, und unter einer Lösung der Aufgabe (7.5) verstehen wir wieder eine Funktion $x \in (C^1(I))^n$, für die die Differentialgleichung in jedem Punkt $t \in I$ erfüllt ist.

Zunächst definieren wir mit einem festen $\delta > 0$ die stetige Abbildung $F : I \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ durch

$$F(t,x) := \begin{cases} f(t,x) & : \ |x - x_0| \le \delta, \\ f\Big(t, x_0 + \delta \, \dfrac{x - x_0}{|x - x_0|}\Big) & : \ |x - x_0| > \delta. \end{cases}$$

Die kompakte Menge $K := I \times \overline{B_\delta(x_0)}$ wird unter der stetigen Abbildung $f$ in eine beschränkte Menge $f(K) \subset \mathbf{K}^n$ abgebildet, und wegen $F(I \times \mathbf{K}^n) \subset f(K)$ folgt dann, daß die Funktion $F$ beschränkt ist: $|F(t,x)| \le C \ \forall\, t \in I \ \forall\, x \in \mathbf{K}^n$. Mit der Lösung der Aufgabe (7.5) sind wir fertig, wenn wir eine Lösung von

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad t \in I, \qquad x(a) = x_0 \tag{7.6}$$

nachweisen, für die $|x(t) - x_0| \le \delta$ gilt. Nun ist die Lösung der Aufgabe (7.6) äquivalent zur Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = (Tx)(t) := x_0 + \int_a^t F(s, x(s))\, ds, \quad t \in I,$$

im BANACH–Raum $X := (C(I))^n$ der stetigen Vektorfunktionen $x : I \to \mathbf{K}^n$. Man konsultiere nochmals BSP.(1.3.2). Wir suchen mit anderen Worten einen Fixpunkt $x = Tx \in X$. Wegen der Stetigkeitsvoraussetzung an $f$ gilt sicher $Tx \in X \ \forall\, x \in X$, und mit einem einfachen Folgenargument

zeigt man die Stetigkeit von $T : X \to X$. Darüber hinaus ergibt sich wegen der Beschränktheit von $F$:

$$\|Tx\|_\infty = \max_{t\in I} \left| x_0 + \int_a^t F(s, x(s))\, ds \right| \le |x_0| + (b-a)\, C < \infty \quad \forall\, x \in X.$$

Das heißt, das Bild $M := T(X)$ ist gleichmäßig beschränkt. In Analogie zu BSP.(2.5.1) zeigt man, daß $M$ auch gleichgradig stetig ist. Der Satz 2.14 von ARZELA–ASCOLI liefert in dieser Situation die Kompaktheit der Menge $\overline{M} \subset X$. Setzen wir jetzt $S := \overline{\mathrm{co}\,(\overline{M})}$, so ist $S \subset X$ wegen Satz 2.17 abgeschlossen, konvex und kompakt. Es gilt ferner $T : S \to S$, so daß die Voraussetzungen zum Fixpunktsatz 2.18 von SCHAUDER verifiziert sind. Jeder Fixpunkt $x^* = Tx^* \in S$ ist Lösung von (7.6) und deshalb von (7.5), solange $|x^*(t) - x_0| \le \delta$ gilt, und das ist sicher für alle $t \in [a, b']$ mit einem geeigneten $b' \le b$ der Fall. Wir fassen zusammen:

**Satz 2.20 (Existenzsatz von PEANO)**
*Unter der Voraussetzung $f : I \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ stetig existiert mindestens auf einem Teilintervall $[a, b'] \subset [a, b] =: I$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe (7.5). Ist $f$ beschränkt, so existiert mindestens eine Lösung auf ganz $I$.*

Zum Beweis der letzten Aussage setze man einfach $F := f$. Eindeutigkeit kann nicht erwartet werden, wie man am Beispiel der Funktion $f(t, x) := 2t\sqrt{|x|}$ erkennt. Die Funktion $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.20 auf jedem Intervall $I = [a, b]$; die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbf{R}, \qquad x(0) = 0$$

besitzt aber **zwei Lösungen**, nämlich $x_1(t) := \frac{t^4}{4}$ und $x_2(t) := 0$.

**BSP. (2.7.2)** **Positive Lösungen von nichtlinearen STURMschen Randwertaufgaben.** Es seien $I := [0, 1]$ und $I^o := (0, 1)$ gesetzt. Für $F : I \times \mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{R}_+}$ suchen wir **positive reguläre** Lösungen (kurz: pr–Lsgn) $x \in C^2(I^o) \cap C^1(I)$ mit $x(t) > 0\ \forall\ t \in I$ der folgenden nichtlinearen STURMschen Randwertaufgabe:

$$\left.\begin{aligned} & x''(t) = -F(t, x(t)), \quad t \in I^o, \\ & B_j[x] := \alpha_j x(j) + (-1)^{j+1}\beta_j x'(j) - R_j[x] = \begin{cases} h & : \ j = 0, \\ H & : \ j = 1, \end{cases} \\ & R_0[x] \equiv 0, \quad R_1[x] := L_1\sqrt{x^2(1) + 1}. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Aufgaben vom Typ (7.7) resultieren u.a. aus der nichtlinearen Theorie axialsymmetrischer elastischer Membranen, wo man aus Stabilitätsgründen an positiven Lösungen interessiert ist. Wir listen zunächst die Voraussetzungen auf, unter denen die Aufgabe (7.7) einer Lösungstheorie zugänglich gemacht werden kann.

($\mathrm{V}_S$) *Die Abbildung $F : I \times \mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{R}_+}$ sei stetig; insbesondere gelte $F(t, x) \ge 0\ \forall\, t \in I\ \forall\, x > 0$. Für jedes feste $t \in I$ sei $F(t, \cdot) : \mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{R}_+}$ monoton nichtsteigend. Die Koeffizienten $\alpha_j, \beta_j, L_1$ der Randoperatoren $B_j$ erfüllen die Bedingungen: $\beta_j > 0$, $\alpha_j + \beta_j > 0$ für $j = 0, 1$ sowie*

$$\Delta := (\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_1 + \beta_1) - \beta_0\beta_1 > 0; \quad 0 \le \frac{L_1}{\Delta}\max\{\beta_0, \alpha_0 + \beta_0\} < 1.$$

Wir führen die Randwertaufgabe (7.7) in einem ersten Schritt in eine äquivalente Integralgleichung über. Den folgenden Sachverhalt verifiziert man sehr einfach durch direktes Nachrechnen.

**Satz 2.21 (Äquivalenzsatz)**
*Es gelte die Voraussetzung* ($\mathrm{V}_S$). *Zu gegebenen Koeffizienten*

$$A := \frac{1}{\Delta}\,(\alpha_0 H - \alpha_1 h), \quad B := \frac{1}{\Delta}((\alpha_1+\beta_1)h + \beta_0 H), \quad C := \frac{L_1}{\Delta}\,\alpha_0, \quad D := \frac{L_1}{\Delta}\,\beta_0$$

*seien die affinen Funktionen* $q(t) := At + B$, $w(t) := Ct + D$ *für* $t \in I$ *erklärt. Bezeichne ferner*

$$K(t,s) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}\,(\alpha_0 t + \beta_0)(\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 s) \;:\; 0 \le t \le s \le 1, \\ \dfrac{1}{\Delta}\,(\alpha_0 s + \beta_0)(\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 t) \;:\; 0 \le s \le t \le 1 \end{cases} \tag{7.8}$$

*die* GREENsche *Funktion der homogenen linearen Randwertaufgabe*

$$x''(t) = -F(t, x(t)), \;\; t \in I^o, \quad \alpha_j x(j) + (-1)^{j+1}\beta_j x'(j) = 0, \;\; j = 0, 1.$$

*Genau dann ist* $x$ *eine* pr–Lsg *der Aufgabe* (7.7), *wenn* $0 < x \in C(I)$ *die folgende Integralgleichung* (IGl) *löst:*

$$x(t) = q(t) + \int_0^1 K(t,s)\,F(s, x(s))\,ds + w(t)\sqrt{x^2(1)+1} \quad \forall\, t \in I. \tag{7.9}$$

**Bemerkung 2.5** (a) Für affine Funktionen $\ell(t) := at + b$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ gilt stets

$$\min\{a+b, b\} \le \ell(t) \le \max\{a+b, b\} \quad \forall\, t \in I.$$

(b) Man erschließt aus ($\mathrm{V}_S$) unter Zuhilfenahme von (a):

$$K(t,s) > 0 \;\; \forall\, t, s \in I, \qquad 0 \le w(t) \le \frac{L_1}{\Delta}\,\max\{\alpha_0 + \beta_0, \beta_0\} < 1. \tag{7.10}$$

Vermöge der Variablensubstitution $y(t) := x(t) - q(t)$ ist die Aufgabe (7.7) nun äquivalent mit der Lösung $y \in C(I)$, $y + q > 0$, der folgenden Fixpunktgleichung:

$$y(t) = (\tilde{T}y)(t) := \int_0^1 K(t,s)\,F(s, y(s)+q(s))\,ds + w(t)\sqrt{(y_1+q_1)^2+1}, \quad t \in I, \tag{7.11}$$

worin $y_1 := y(1)$ und $q_1 := q(1)$ gesetzt wurden. Wir wollen eine Existenzaussage mit Hilfe des Fixpunktsatzes 2.19 herleiten. Dazu setzen wir für ein festes $\delta > 0$, über welches wir noch geeignet verfügen wollen:

$$q_0 := \max_{t\in I} w(t) < 1, \;\; F_\delta := \max_{t\in I} F(t,\delta), \;\; K := F_\delta \cdot \max_{t\in I}\int_0^1 K(t,s)\,ds, \;\; r_0 := \frac{K + |q_1| + 1}{1 - q_0},$$

$$M_\delta := \Big\{ y \in C(I) \,:\, \exists\, H \in C(I) \text{ mit } 0 \le H(t) \le F_\delta \;\; \exists\, 0 \le \rho \le r_0 \,:$$

$$y(t) = \int_0^1 K(t,s)\,H(s)\,ds + w(t)\sqrt{\rho^2+1}\Big\}.$$

Lösungen $y$ der Integralgleichung (7.11) liegen in der Menge $M_\delta$, sofern sie $y + q \ge \delta$ erfüllen:

**Satz 2.22** *Es gelte die Voraussetzung* ($\mathrm{V}_S$). *Jede Lösung* $y \in C(I)$ *der Gleichung* (7.11) *mit* $y+q \ge \delta$ *erfüllt* $y \in M_\delta$ *sowie* $\|y\|_\infty \le r_0$.

*Beweis:* Wegen $\sqrt{(y_1+q_1)^2+1} \le \|y\|_\infty + |q_1| + 1$ erhält man (7.11) die Abschätzung $\|y\|_\infty \le K + q_0(\|y\|_\infty + |q_1| + 1)$, und hieraus

$$\|y\|_\infty \le \frac{1}{1-q_0}\,(K + q_0(|q_1|+1)). \tag{7.12}$$

Da $q_0 < 1$ ist, folgt bereits $\|y\|_\infty \le r_0$. Setzen wir nun $H(t) := F(t, y(t)+q(t))$ sowie $\rho := |y_1 + q_1|$, so haben wir $H \in C(I)$, ferner $0 \le H(t) \le F(t,\delta) \le F_\delta$ und wegen

$$0 \le \rho \le \|y\|_\infty + |q_1| \overset{(7.12)}{\le} \frac{1}{1-q_0}\,(K + q_0(|q_1|+1) + |q_1|(1-q_0)) \le r_0$$

die behauptete Eigenschaft $y \in M_\delta$. □

Wegen dieser Aussage sind wir motiviert, Fixpunkte der Abbildung $\tilde{T}$ in $M_\delta$ zu suchen. Zur Gewährleistung der Positivität führen wir die Abschneidefunktion

$$c_y(t) := \max\{\delta, y(t)+q(t)\}, \quad t \in I$$

ein und betrachten anstelle von (7.11) die Fixpunktgleichung $y = Ty$ mit

$$(Ty)(t) := \int_0^1 K(t,s)\,F(s, c_y(s))\,ds + w(t)\sqrt{(y_1+q_1)^2+1}, \quad t \in I,\ \ y \in C(I). \tag{7.13}$$

Wir formulieren nun das Hauptergebnis:

**Satz 2.23** (E. Novak, H. Grabmüller)
*Unter der Voraussetzung* ($V_S$) *existiere ein* $\delta > 0$ *mit*

$$\boxed{\forall\, y \in M_\delta \wedge \min_{t\in I}\{y(t)+q(t)\} \le \delta\ \ \exists\, t_0 \in I\,:\, y(t_0) < (Ty)(t_0).} \tag{N}$$

*Dann hat die Gleichung* (7.11) *mindestens eine Lösung* $y \in C(I)$ *mit* $y + q \ge \delta$.

*Beweis:* Wir führen den Beweis auf die Aussage des Fixpunktsatzes 2.19(b) zurück. Dazu setzen wir $X := (C(I), \|\cdot\|_\infty)$ sowie $S := \overline{M_\delta}$ und betrachten die Abbildung $T$ aus (7.13). Für diese Elemente verifizieren wir die erforderlichen Eigenschaften.

(i) *$S$ ist abgeschlossen und konvex:* Da die Abgeschlossenheit per Definition gegeben ist, brauchen wir nur die Konvexität von $M_\delta$ zu zeigen, die sich dann wegen Folgerung 2.10(d) auf die abgeschlossene Hülle vererbt. Seien also $y_0, y_1 \in M_\delta$ gegeben,

$$y_j(t) = \int_0^1 K(t,s)\,H_j(s)\,ds + w(t)\sqrt{\rho_j^2+1}, \quad j = 0, 1.$$

Wir setzen $y_\lambda := (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1$, $\lambda \in (0,1)$, und haben $y_\lambda \in M_\delta$ zu zeigen. Es gelten aber für $H_\lambda := (1-\lambda)H_0 + \lambda H_1$ die geforderten Bedingungen $H_\lambda \in C(I)$ und $0 \le H_\lambda(t) \le F_\delta$. Setzt man noch

$$\sqrt{\rho_\lambda^2+1} := (1-\lambda)\sqrt{\rho_0^2+1} + \lambda\sqrt{\rho_1^2+1},$$

so zeigt man unter Beachtung von $0 \le \rho_j \le r_0$ mit direkter Rechnung durch Quadrieren: $0 \le \rho_\lambda^2 \le r_0^2\ \ \forall\, \lambda \in (0,1)$. Also gilt für

$$y_\lambda(t) = \int_0^1 K(t,s)\,H_\lambda(s)\,ds + w(t)\sqrt{\rho_\lambda^2+1}$$

die behauptete Eigenschaft $y_\lambda \in M_\delta$.

(ii) *Die Abbildung $T : X \to X$ ist stetig und erfüllt $T(S) \subset M_\delta$:* Die Stetigkeitsaussage folgt mit Standardargumenten aus der Stetigkeit der Abbildungen $y \mapsto c_y$ und somit wegen $c_y \geq \delta$ aus der Stetigkeit der Abbildung $y \mapsto F(\cdot, c_y(\cdot))$. Zum Beweis der Selbstabbildungseigenschaft $T(S) \subset M_\delta$ wählen wir zu $y \in S$ eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset M_\delta$ mit $\|y_k - y\|_\infty \to 0$. Dann gilt auch punktweise $y_k(t) \to y(t)$ für jedes $t \in I$ und wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \Big| \lim_{k\to\infty} \Big( \int_0^1 K(t,s)\, H_k(s)\, ds + w(t)\sqrt{\rho_k^2 + 1}\Big)\Big| \leq K + q_0(r_0+1) \\ &\leq K + \frac{q_0}{1-q_0}\,(K + |q_1| + 1) + q_0 \leq \frac{1}{1-q_0}\,(1 + K + q_0|q_1|), \quad t \in I. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Setzen wir nun $H(t) := F(t, c_y(t))$ sowie $\rho := |y_1 + q_1|$, so resultiert $0 \leq H(t) \leq F_\delta$ sowie mit (7.14) auch

$$\rho \leq \|y\|_\infty + |q_1| \leq \frac{1}{1-q_0}\,(1 + K + |q_1|) = r_0,$$

also $Ty \in M_\delta$.

(iii) *$T(S) \subset X$ ist relativ kompakt:* Dies folgt aus dem Satz von Arzela–Ascoli. Wegen $T(S) \subset M_\delta$ erfüllt nämlich $Ty$ für jedes $y \in S$ die Abschätzung (7.14):

$$|(Ty)(t)| \leq \frac{1}{1-q_0}\,(1 + K + q_0|q_1|) \quad \forall\, t \in I;$$

das heißt, die Menge $T(S)$ ist gleichmäßig beschränkt. Ihre gleichgradige Stetigkeit erschließt man sofort aus der Ungleichung

$$|(Ty)(t_1) - (Ty)(t_2)| \leq F_\delta \int_0^1 |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\, ds + |w(t_1) - w(t_2)|\sqrt{r_0^2 + 1}.$$

Nun sind alle Voraussetzungen zum Fixpunktsatz 2.19(b) erfüllt, so daß die Fixpunktmenge $F^* := \{y^* \in M_\delta : Ty^* = y^*\} \subset X$ nichtleer ist. Jedes $y^* \in F^*$ ist Lösung der IGl (7.11). Denn wäre $\min\limits_{t\in I}\{y^*(t) + q(t)\} \leq \delta$, so gäbe es wegen der Bedingung (N) ein $t_0 \in I$ mit $y^*(t_0) < (Ty^*)(t_0)$, im Widerspruch zur Fixpunktgleichung $y^* = Ty^*$. Also gilt $y^* + q > \delta$ und somit auch $y^* = \tilde{T}y^*$, was äquivalent mit Gleichung (7.11) ist. □

Um zu Existenzbereichen von pr–Lsgn der Randwertaufgabe (7.7) zu gelangen, beachten wir, daß für $L_1 > 0$ wegen $w(t) = \frac{L_1}{\Delta}\,(\alpha_0 t + \beta_0) > 0$ sowie wegen $K(t,s) > 0$ die Ungleichung $y(t) \geq \min\limits_{t\in I} w(t) =: \delta_0$ für jedes $y \in M_\delta$ und jede Zahl $\delta > 0$ gelten muß. Wählen wir nun

$$\delta := \frac{1}{2}\,\delta_0 \quad \text{und} \quad q(t) \geq 0,$$

so ist die Bedingung (N) stets **leer**, und die Existenz von pr–Lsgn zur Aufgabe (7.7) gesichert. Da wir $q(t) \geq \min\{B, A+B\}$ haben, mit

$$A = \frac{1}{\Delta}\,(\alpha_0 H - \alpha_1 h), \quad B := \frac{1}{\Delta}\,((\alpha_1 + \beta_1)h + \beta_0 H), \quad A + B = \frac{1}{\Delta}\,((\alpha_0 + \beta_0)H + \beta_1 h),$$

führt die Diskussion des Existenzkriteriums $\min\{B, A+B\} \geq 0$ zu folgendem Existenzbereich in der Parameterebene der $(h, H)$–Randdaten:

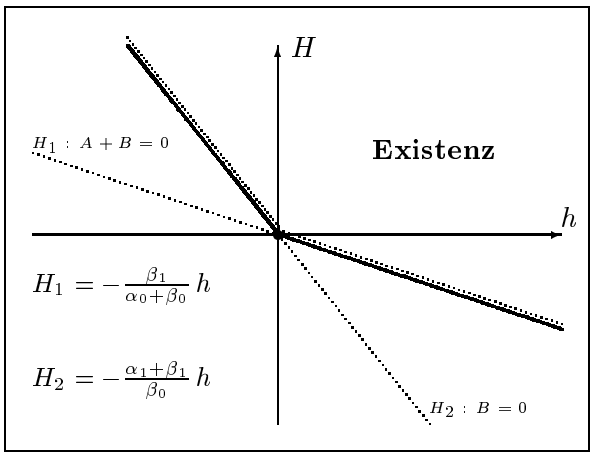


**Fig.4:** Der Existenzbereich von pr–Lösungen zur Aufgabe (7.7)

# Kapitel 3

# Die Prinzipien der Funktionalanalysis

In der Funktionalanalysis nehmen im wesentlichen vier Sätze – man nennt sie auch die Prinzipien der Funktionalanalysis – eine zentrale Stellung ein, mit deren Hilfe eine Reihe von Resultaten über Abbildungen gewonnen werden können. Diese Sätze sind der Satz von Banach–Steinhaus ("Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit"), der Satz vom inversen Operator ("Prinzip von der offenen Abbildung"), der Satz vom abgeschlossenen Graphen sowie die Fortsetzungs– und Trennungssätze von Hahn–Banach.

## 3.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und der Kategoriensatz von Baire

Eine wesentliche Rolle spielt der folgende Begriff einer **mageren** Menge:

**Definition 3.1** *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.*

- *$A$ heiße* **dicht** $:\Leftrightarrow \quad \overline{A} = X$ (vgl. Def.1.10)
- *$A$ heiße* **nirgendsdicht** $:\Leftrightarrow$ *$\overline{A}$ enthält keine inneren Punkte: $\overline{A} \cap A^o = \emptyset$*
- *$A$ heiße* **mager** *oder von* **erster Kategorie** $:\Leftrightarrow$ *$A$ ist abzählbare Vereinigung nirgendsdichter Mengen*
- *$A$ heiße von* **zweiter Kategorie** $:\Leftrightarrow$ *$A$ ist nichtmager.*

**Folgerung 3.1** (a) *Sei $A$ nirgendsdicht. Dann ist $(\overline{A})^c \subset X$ dicht.*

Denn andernfalls gäbe es einen Punkt $x \in \overline{A}$ , welcher nicht Berührpunkt von $(\overline{A})^c$ wäre. Das heißt, es gäbe eine Umgebung $U(x)$ von $x$ mit $U(x) \subset \overline{A}$. Somit wäre $x$ ein innerer Punkt von $\overline{A}$, im Widerspruch zur Definition 3.1. □

(b) *Ist $A$ nirgendsdicht, so gilt dies auch für $\overline{A}$.*

Dies ist trivial, denn $B := \overline{A}$ enthält keine inneren Punkte, was nun auch auf $\overline{B} = B$ zutrifft. □

(c) *Ist $A$ mager, so ist auch jede Teilmenge $B \subset A$ mager.*

(d) *Sind $A_k$, $k \in \mathbf{N}$, magere Mengen, so ist auch ihre Vereinigung $A := \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$ mager.*

Denn jedes $A_k$ ist abzählbare Vereinigung nirgendsdichter Teilmengen $B_{kj}$: $A_k = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} B_{kj}$, und dies trifft auch auf $A = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \bigcup_{j\in\mathbf{N}} B_{kj}$ zu. □

Ein wichtiges beweistheoretisches Hilfsmittel ist der BAIREsche Kategoriensatz. Er besagt im wesentlichen, daß ein vollständiger metrischer Raum nichtmager ist. Man kann durch Komplementbildung oder durch Negation dieser Aussage mehrere Versionen formulieren.

**Satz 3.1 (BAIREscher Kategoriensatz)**
*Es sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:*

(a) *Ist $\{A_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ eine Familie von offenen und dichten Teilmengen, so ist auch $A := \bigcap_{k\in\mathbf{N}} A_k$ dicht in $X$.*

(b) *$X$ ist (als Teilmenge von sich selbst) von zweiter Kategorie, also nichtmager.*

(c) *Ist $\{A_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen und enthält $V := \bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k$ eine offene $\epsilon$–Kugel, so enthält $A_k$ für wenigstens ein $k \in \mathbf{N}$ eine offene $\delta$–Kugel.*

*Beweis:* (a) Wir betrachten eine beliebige offene $\epsilon_0$–Kugel $B_{\epsilon_0}(x_0) \subset X$. Die Menge $B_{\epsilon_0/2}(x_0) \cap A_1$ ist dann offen und dicht in $B_{\epsilon_0/2}(x_0)$ und enthält somit eine weitere offene $\epsilon_1$–Kugel $B_{\epsilon_1}(x_1)$ mit $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0/2$. Wird diese Konstruktion fortgesetzt, so entsteht eine Folge offener Kugeln

$$B_{\epsilon_k}(x_k) \subset B_{\epsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \cap A_k, \quad 0 < \epsilon_k < \frac{1}{2}\,\epsilon_{k-1}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ der Kugelmittelpunkte ist eine CAUCHY–Folge und deshalb konvergent: $x_k \to x \in X$. Wir haben für $j > k$:

$$d(x_k, x) \le d(x_j, x_k) + d(x_j, x) < \frac{1}{2}\,\epsilon_k + d(x_j, x) \to \frac{1}{2}\,\epsilon_k \;\; (j \to \infty),$$

und deshalb $x \in B_{\epsilon_k}(x_k)$ sowie $x \in A_k \;\forall\, k \in \mathbf{N}$. Wir folgern $x \in B_{\epsilon_0}(x_0)$ und $x \in A$. Da nun $B_{\epsilon_0}(x_0)$ beliebig wählbar war, kann also jeder Punkt $x_0 \in X$ beliebig genau durch ein $x \in A$ approximiert werden. Somit gilt $\overline{A} = X$.

(b) Wir zeigen diese Behauptung durch Komplementbildung und nehmen dazu an, $X$ sei mager und es sei $\{B_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ eine Familie nirgendsdichter Teilmengen mit $X = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_k$. Gemäß Folgerung 3.1(a) ist $A_k := (\overline{B_k})^c$ offen und dicht in $X$, so daß wegen (a) auch der Durchschnitt $A := \bigcap_{k\in\mathbf{N}} A_k$ in $X$ dicht ist. Andererseits resultiert aus den Formeln (1.1), Abschnitt 0.1, von DE MORGAN:

$$X = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_k \subset \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \overline{B_k} = \Big( \bigcap_{k\in\mathbf{N}} (\overline{B_k})^c \Big)^c = X \setminus A, \tag{1.1}$$

was nur für $A = \emptyset$ möglich wäre, im Widerspruch zu $\overline{A} = X$. Also ist $X$ nichtmager.

(c) Die Vereinigungsmenge $V := \bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_k$ einer Familie nirgendsdichter Teilmengen $B_k \subset X$ enthält keine inneren Punkte. Andernfalls gäbe es ein $x \in V$ und dazu eine offene $\epsilon$–Kugel $B_\epsilon(x) \subset V$.

Wir hätten für $A := \bigcap_{k\in\mathbf{N}} (\overline{B_k})^c$ gemäß (1.1) die Eigenschaft $B_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$. Also wäre $x \in X$ kein Berührpunkt von $A$, im Widerspruch zu $\overline{A} = X$.

Nun nehmen wir im Widerspruch zur Behauptung (c) des Satzes an, jedes $A_k$ der gegebenen Familie $\{A_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ sei nirgendsdicht. Es existieren keine inneren Punkte. Wie soeben gezeigt, kann dann auch die Vereinigungsmenge $V$ keine inneren Punkte besitzen. Dies widerspricht der gestellten Voraussetzung. □

**Folgerung 3.2** *Ist $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, so ist das Komplement $V^c$ einer mageren Teilmenge $V \subset X$ nichtmager.*

Denn wäre $V^c$ ebenfalls mager, so wäre die Vereinigung $V \cup V^c = X$ gemäß Folgerung 3.1(d) mager, im Widerspruch zu Satz 3.1(b). □

Eine wichtige Konsequenz aus dem Baireschen Kategoriensatz ist das folgende Theorem von Banach–Steinhaus:

**Satz 3.2 (Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit)**
*Sei $X$ ein Banach–Raum und $Y$ ein normierter Raum, und die Menge $M \subset B(X, Y)$ sei punktweise beschränkt:*

$$\boxed{\forall\, x \in X \;\; \exists\, K = K(x) \,:\, \|Tx\|_Y \le K \quad \forall\, T \in M.} \tag{1.2}$$

*Dann ist die Menge $M$ gleichmäßig beschränkt:*

$$\boxed{\exists\, C < \infty \,:\, \|T\|_{X\to Y} \le C \quad \forall\, T \in M.} \tag{1.3}$$

*Beweis:* Für jedes $k \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$A_k := \{x \in X \,:\, \|Tx\|_Y \le k \;\; \forall\, T \in M\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildung $X \ni x \mapsto Tx \mapsto \|Tx\|_Y \in \overline{\mathbf{R}_+}$ ist die Menge $\{x \in X \,:\, \|Tx\|_Y \le k\}$ für jedes feste $T \in M$ abgeschlossen und somit auch $A_k$ als Durchschnitt dieser Mengen. Darüber hinaus muß wegen (1.2) die Relation $X = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k$ gelten, das heißt es existiert gemäß Satz 3.1(c) für wenigstens ein $k \in \mathbf{N}$ eine offene Kugel $B_{2\delta}(x_0) \subset A_k$. Somit gilt $\|Tx\|_Y \le k \;\; \forall\, x \in B_{2\delta}(x_0) \;\; \forall\, T \in M$. Betrachten wir nun $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$, so resultiert

$$\|Tx\|_Y = \frac{1}{\delta}\,\|T(\delta x)\|_Y = \frac{1}{\delta}\,\|T(\delta x + x_0 - x_0)\|_Y \le \frac{1}{\delta}\,\|T(\delta x + x_0)\|_Y + \frac{1}{\delta}\,\|Tx_0\|_Y \le \frac{k}{\delta} + \frac{k}{\delta},$$

also $\|T\|_{X\to Y} \le \frac{2k}{\delta} \;\; \forall\, T \in M$. □

## 3.2 Das Prinzip von der offenen Abbildung

Eine Abbildung $T : X \to Y$ ist gemäß Definition 1.6 offen, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Die Frage nach einem prüfbaren Kriterium für die Offenheit von $T$ beantworten wir im Falle linearer Abbildungen zwischen BANACH–Räumen mit dem folgenden Satz.

**Satz 3.3 (Prinzip von der offenen Abbildung)**
*Seien $X, Y$ BANACH–Räume, und die Abbildung $T \in B(X,Y)$ sei surjektiv. Dann ist $T$ offen.*

*Beweis:* Dieser verwendet ebenfalls den BAIREschen Kategoriensatz. Wir argumentieren in drei Schritten.

(i) *Das abgeschlossene Bild $\overline{T(U_\epsilon)}$ jeder offenen $\epsilon$–Kugel $U_\epsilon := B_\epsilon(0) \subset X$ enthält eine offene $\delta$–Kugel $V_\delta := B_\delta(0) \subset Y$, $\delta = \delta(\epsilon)$:* Dazu fixieren wir ein $\epsilon > 0$ und setzen $kU_\epsilon := \{kx : x \in U_\epsilon\}$. Es gilt $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} kU_\epsilon$, und somit wegen der Surjektivität von $T$

$$Y = T(X) = T\Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} kU_\epsilon\Big) = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} kT(U_\epsilon) = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} k\overline{T(U_\epsilon)}.$$

Gemäß Satz 3.1(c) existiert für wenigstens ein $k \in \mathbf{N}$ eine offene $\tilde\delta$–Kugel $B_{\tilde\delta}(\tilde y) \subset k\overline{T(U_\epsilon)}$. Für $\delta := \tilde\delta/k$ und $y := \tilde y/k$ gilt nun $B_\delta(y) \subset \overline{T(U_\epsilon)}$. Nun beachten wir, daß in einem normierten Raum die offene $r$–Kugel $B_r(0)$ darstellbar ist als Differenz der offenen $\frac{r}{2}$–Kugel $Q := B_{r/2}(x_0)$ mit sich selbst:

$$Q - Q := \{x - y : x, y \in Q\} = B_r(0).$$

Wegen $\|x - y\| \le \|x - x_0\| + \|y - x_0\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\ \ \forall\ x, y \in Q$ gilt trivialerweise die Inklusion $Q - Q \subset B_r(0)$. Ist andererseits $z \in B_r(0)$ und setzen wir $x := x_0 + \frac{1}{2}z,\ y := x_0 - \frac{1}{2}z$, so ergeben sich $x, y \in Q$ sowie $z = x - y \in Q - Q$. Also gilt auch $B_r(0) \subset Q - Q$. Nach dieser Nebenbetrachtung werde nun speziell $Q := B_{\epsilon/2}(0) \subset X$ gesetzt und die Kugel $B_{\delta/2}(y) \subset \overline{T(Q)}$ nach obiger Vorschrift konstruiert. Dann folgt aus der Linearität von $T$ die behauptete Eigenschaft

$$\overline{T(U_\epsilon)} = \overline{T(Q) - T(Q)} \supset \overline{T(Q)} - \overline{T(Q)} \supset B_{\delta/2}(y) - B_{\delta/2}(y) = B_\delta(0).$$

(ii) *Der Punkt 0 ist innerer Punkt von $T(U_\epsilon)$:* Wir wählen eine Folge $(\epsilon_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}_+$ mit $\epsilon_0 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty$. Für $U_k := B_{\epsilon_k}(0)$ existiert nach (i) eine offene Kugel $V_k := B_{\delta_k}(0) \subset \overline{T(U_k)}$. Da notwendig $\epsilon_k \to 0$ gilt, ergibt sich aus der Stetigkeit von $T$ auch $\delta_k \to 0$. Wir konstruieren zu beliebigem $y \in V_0$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ gemäß folgender Vorschrift:

$$\begin{aligned} y \in V_0 \quad &\Rightarrow \quad y \in \overline{T(U_0)} \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in U_0 \,:\, \|y - Tx_0\|_Y < \delta_1, \\ y - Tx_0 \in V_1 \quad &\Rightarrow \quad y - Tx_0 \in \overline{T(U_1)} \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_1 \in U_1 \,:\, \|y - Tx_0 - Tx_1\|_Y < \delta_2, \end{aligned}$$

usw. Auf diese Weise erhält man im $k$–ten Schritt:

$$\exists\, x_k \in U_k \,:\, \Big\|y - T\Big(\sum_{j=0}^{k} x_j\Big)\Big\|_Y < \delta_{k+1}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert wegen $\|x_k\|_X < \epsilon_k$; der Grenzwert $x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ erfüllt $\|x\|_X < 2\epsilon_0$ sowie $y = Tx$. Wir haben auf diese Weise zu jedem $\epsilon_0 > 0$ ein $\delta_0$ konstruiert mit $B_{\delta_0}(0) \subset T(B_{2\epsilon_0}(0))$.

Damit ist (ii) gezeigt.

(iii) *Für $U \subset X$ offen ist $T(U) \subset Y$ offen:* Denn mit jedem Punkt $x \in U$ liegt auch eine offene $\epsilon$–Kugel $B_\epsilon(x) = x + B_\epsilon(0) =: x + U_\epsilon$ in $U$. Gemäß (ii) ist 0 innerer Punkt von $T(U_\epsilon)$, also $Tx$ innerer Punkt von $T(x + U_\epsilon) \subset T(U)$. □

Als unmittelbare Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung erhalten wir das Banachsche Lemma vom inversen Operator:

**Satz 3.4 (vom inversen Operator)**
*Seien $X, Y$ Banach–Räume und $T \in B(X, Y)$ ein bijektiver Operator. Dann existiert die stetige Inverse $T^{-1} \in B(Y, X)$.*

*Beweis:* Da $T$ gemäß Satz 3.3 eine offene Abbildung ist, muß $T$ nach Definition 1.7 ein Homöomorphismus sein. □

---

## 3.3 Abgeschlossene Operatoren und der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Für beliebige Mengen $X, Y$ und für $T : X \to Y$ definieren wir:

**Definition 3.2** *Die Punktmenge*

$$\boxed{G(T) := \{(x, Tx) \,:\, x \in X\} \subset X \times Y} \tag{3.1}$$

*heiße der* **Graph** *von $T$.*

**Folgerung 3.3** (a) *Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, so ist $X \times Y$ selbst normierter Raum unter der Norm*

$$\boxed{\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad \forall\ (x, y) \in X \times Y.} \tag{3.2}$$

*$X \times Y$ ist ein Banach–Raum, sofern $X, Y$ Banach–Räume sind.*

(b) *Sind $X, Y$ Vektorräume über $\mathbf{K}$ und ist $T : X \to Y$ linear, so ist $G(T) \subset X \times Y$ ein Unterraum.*

Denn aus $(x_j, y_j) \in G(T)$ folgt $y_j = Tx_j$ sowie für alle $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$:

$$\lambda\,(x_1, Tx_1) + \mu\,(x_2, Tx_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda T x_1 + \mu T x_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, T(\lambda x_1 + \mu x_2)) \in G(T).$$

Bei linearen Abbildungen $T$ zwischen Vektorräumen $X, Y$ sei immer ein Unterraum $D(T) \subset X$ als Definitionsbereich vorausgesetzt. Dann ist auch der Bildbereich $R(T) \subset Y$ ein Unterraum.

**Definition 3.3** *Seien $X, Y$ normierte Räume.*

- *Eine lineare Abbildung $T$ mit Definitionsbereich $D(T) \subset X$ und Bildbereich $R(T) \subset Y$ heiße (graphen–)*$\mathbf{abgeschlossen} :\Leftrightarrow$ *Der Graph $G(T) \subset X \times Y$ von $T$ ist abgeschlossen*
- $$\boxed{C(X,Y) := \{T : X \supset D(T) \to Y \ : \ T \text{ ist linear und abgeschlossen}\}.}$$

**Satz 3.5** *Seien $X, Y$ normierte Räume. Genau dann ist $T \in C(X,Y)$, wenn gilt:*

$$\boxed{\forall\, (x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset D(T) \ : \ (x_k \to x \in X \wedge Tx_k \to y \in Y) \ \Rightarrow \ x \in D(T) \wedge Tx = y.} \tag{3.3}$$

*Beweis:* Diese Aussage folgt unmittelbar aus Satz 1.4 über die Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle einer Menge. □

**BSP. (3.3.1)** Wir setzen $X = Y := (C([0,2\pi]), \|\cdot\|_\infty)$ und haben somit einen Banach–Raum vorliegen. Der lineare Operator $T : D(T) \to X$ mit $D(T) := C^1([0,2\pi]) \subset X$ sei der **Ableitungsoperator**

$$D(T) \ni x \mapsto Tx := x' \in X.$$

Offenbar ist dieser Operator nicht beschränkt, also auch nicht stetig: Zum Beispiel gilt für $x_k(t) := \sin kt$, $k \in \mathbf{N}$ :

$$x_k \in D(T), \qquad \|x_k\|_\infty = \max_{t\in[0,2\pi]} |\sin kt| = 1, \qquad \|Tx_k\|_\infty = \max_{t\in[0,2\pi]} |k\cos kt| = k \to \infty.$$

Hingegen ist $T$ abgeschlossen. Denn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset D(T)$ mit

$$\|x_k - x\|_\infty = \max_{t\in[0,2\pi]} |x_k(t) - x(t)| \to 0, \qquad \|x_k' - y\|_\infty = \max_{t\in[0,2\pi]} |x_k'(t) - y(t)| \to 0$$

folgt $x, y \in X$ sowie wegen

$$x_k(t) = x_k(0) + \int_0^t x_k'(s)\, ds, \quad t \in [0,2\pi]$$

infolge der gleichmäßigen Konvergenz auch

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \left| x_k(t) - x(0) - \int_0^t y(s)\, ds \right| \le |x_k(0) - x(0)| + 2\pi \, \|x_k' - y\|_\infty \to 0.$$

Somit gilt $x(t) = x(0) + \int\limits_0^t y(s)\, ds$, woraus $x \in D(T)$ und $Tx = x' = y$, also (3.3) folgt.

Wir beweisen nun, daß ein abgeschlossener Operator stetig ist, wenn sein Definitionsbereich der ganze Banach–Raum ist.

**Satz 3.6 (vom abgeschlossenen Graphen)**
*Seien $X, Y$ Banach–Räume. Dann gilt für eine lineare Abbildung $T : X \to Y$:*

$$\boxed{T \in B(X,Y) \ \Leftrightarrow \ D(T) = X \text{ und } T \in C(X,Y).}$$

*Beweis:* "$\Rightarrow$" Diese Richtung ist trivial. Denn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ mit $x_k \to x$ hat man wegen der Stetigkeit von $T$ auch $Tx_k \to Tx$. Also gilt (3.3) und somit $T \in C(X,Y)$.

"$\Leftarrow$" Nach Vorgabe sei also $G(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$. Wir definieren die Projektion $\pi : G(T) \to X$ durch die Vorschrift

$$\pi(x,Tx) := x \quad \forall\ (x,Tx) \in G(T).$$

Dann ist $\pi$ offenbar linear, bijektiv und wegen

$$\|\pi(x,Tx)\|_X = \|x\|_X \le \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x,Tx)\|_{X\times Y} \quad \Rightarrow \quad \|\pi\|_{\{X\times Y\to X\}} \le 1$$

auch stetig. Als Folge von Satz 3.4 ist $\pi^{-1}$ ebenfalls stetig:

$$0 \le \|\pi^{-1}x\|_{X\times Y} = \|(x,Tx)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|Tx\|_Y \le \|\pi^{-1}\|_{\{X\to X\times Y\}}\|x\|_X.$$

Wir erhalten somit $\|T\|_{X\to Y} \le \|\pi^{-1}\|_{\{X\to X\times Y\}} - 1$, was zu zeigen war. □

**Folgerung 3.4** *Seien $X, Y$* Banach*–Räume.*

(a) *Ist $T \in C(X,Y)$ bijektiv, so existiert $T^{-1} \in B(Y,X)$.*

Denn der inverse Operator $T^{-1}$ existiert als abgeschlossener linearer Operator auf $D(T^{-1}) = Y$: Für $(y_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset Y$ mit $y_k \to y \in Y$ und $x_k := T^{-1}y_k \to x \in X$ erhalten wir nämlich $x \in D(T)$ sowie $y = Tx$ aus (3.3). Äquivalent dazu ist $y \in D(T^{-1})$ und $x = T^{-1}y$. Somit gilt $T^{-1} \in C(Y,X)$, und die Behauptung folgt nun aus Satz 3.6. □

(b) *$T \in C(X,Y)$ und $B \in B(X,Y)$ implizieren $T + \lambda B \in C(X,Y)$ $\forall\ \lambda \in \mathbf{K}$.*

(c) *$T \in C(X,Y)$, $B \in B(X,Y)$ und $T + \lambda B$ injektiv implizieren $(T + \lambda B)^{-1} \in C(Y,X)$.*

Diese Aussagen können leicht unter Verwendung der Definition 3.2 verifiziert werden. □

Wir betrachten jetzt *Sesquilinearformen* auf einem normierten Raum.

**Definition 3.4** *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbf{K}$.*

- *Eine Abbildung $a(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbf{K}$ heiße* **Sesquilinearform** *auf $X$, wenn für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ und $x, y, z \in X$ gilt:*

$$a(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\, a(x,z) + \mu\, a(y,z), \quad a(x, \lambda y + \mu z) = \bar\lambda\, a(x,y) + \bar\mu\, a(x,z)$$

- *Eine Sesquilinearform $a(\cdot,\cdot)$ auf $X$ heiße* **beschränkt** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\exists\, c < \infty\ :\ |a(x,y)| \le c\, \|x\|_X \|y\|_X \quad \forall\, x, y \in X.}$$

*In diesem Fall ist die Zahl*

$$\|a\| := \sup_{\{0\neq x,y\in X\}} \frac{|a(x,y)|}{\|x\|_X \|y\|_X} \le c$$

*wohldefiniert, und sie heißt die* **Norm** *der Sesquilinearform*

- *Eine Sesquilinearform $a(\cdot,\cdot)$ auf $X$ heiße* **definit** $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\exists\, \gamma > 0 \,:\, |a(x,x)| \geq \gamma \cdot \|x\|_X^2 \quad \forall\, x \in X.}$$

**BSP. (3.3.2)** Ist $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein HILBERT–Raum, so ist das Skalarprodukt $a(x,y) := \langle x, y\rangle$ eine beschränkte und definite Sesquilinearform auf $X$.

Als ein Analogon zum Darstellungssatz von FRÉCHET–RIESZ erhalten wir:

**Satz 3.7 (Darstellungssatz von LAX–MILGRAM)**
*Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein HILBERT–Raum und $a(\cdot,\cdot)$ eine beschränkte Sesquilinearform auf $X$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt genau ein Paar von Operatoren $S, T \in B(X)$ mit*

$$\boxed{a(x,y) = \langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall\, x, y \in X.} \tag{3.4}$$

(b) *Ist $a(\cdot,\cdot)$ darüber hinaus definit, so sind die Operatoren $S, T$ bijektiv, und zu jedem beschränkten linearen Funktional $\ell \in X^*$ gibt es genau ein $y \in X$ mit*

$$\boxed{a(x,y) = \ell(x) \quad \forall\, x \in X.} \tag{3.5}$$

*Beweis:* (a) Wir zeigen hier nur die Existenz des Operators $T$ mit den geforderten Eigenschaften. Die Argumentation für $S$ verläuft ganz analog. Zu festem $y \in X$ ist $\ell_y(x) := a(x,y)$ ein beschränktes lineares Funktional auf $X$, auf das der Satz 2.12 von FRÉCHET–RIESZ zutrifft:

$$\exists!\, v_y \in X \,:\, a(x,y) = \ell_y(x) = \langle x, v_y\rangle =: \langle x, Ty\rangle \quad \forall x \in X.$$

Die eindeutige Zuordnungsvorschrift $X \ni y \mapsto v_y := Ty \in X$ induziert eine Abbildung $T : X \to X$, deren Linearität mit einem Standardargument gezeigt werden kann. Die Beschränktheit von $T$ folgt aus

$$\|Ty\|_X^2 = \langle Ty, Ty\rangle = a(Ty, y) \leq \|a\| \cdot \|Ty\|_X \|y\|_X \quad \forall\, y \in X.$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei angenommen, ein weiterer Operator $\tilde{T} \in B(X)$ leiste ebenfalls das in (3.4) Verlangte. Dann wäre $\langle x, Ty - \tilde{T}y\rangle = 0\ \forall\, x, y \in X$, also $Ty - \tilde{T}y \in X^\perp = \{0\}\ \forall\, y \in X$.

(b) Ist die Sesquilinearform überdies definit, so gilt ja

$$|a(x,x)| = |\langle x, Tx\rangle| \geq \gamma \cdot \|x\|_X^2 \quad \forall\, x \in X. \tag{3.6}$$

Wendet man die Ungleichung von CAUCHY–SCHWARZ auf das Skalarprodukt an, so resultiert

$$\gamma \cdot \|x\|_X \leq \|Tx\|_X\ \forall\, x \in X, \quad \text{äquivalent:} \quad \|T^{-1}y\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\,\|y\|_X\ \forall\, y \in R(T),$$

denn wegen der ersten Ungleichung ist $T : X \to R(T)$ bijektiv. Wegen der zweiten Ungleichung ist $T^{-1} : R(T) \to X$ stetig. Also muß $R(T)$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $X$ selbst abgeschlossen sein (Satz 1.2). Wäre nun $R(T) \subsetneq X$, so gäbe es gemäß Folgerung 2.8(b) ein $0 \neq z_0 \perp R(T)$, und somit wäre

$$0 = \langle z_0, Tz_0\rangle \overset{(3.6)}{\geq} \gamma \cdot \|z_0\|_X^2, \quad \text{also} \quad z_0 = 0.$$

Dieser Widerspruch löst sich nur für $R(T) = X$. Wir haben die Bijektivität von $T$ gezeigt. Bestimmen wir schließlich zu $\ell \in X^*$ das gemäß Satz 2.12 eindeutig existierende Element $v \in X$ mit $\ell(x) = \langle x, v\rangle \ \forall\ x \in X$, so gibt es dazu genau ein Element $y \in X$ mit $Ty = v$. Die behauptete Darstellung folgt nun aus

$$\ell(x) = \langle x, v\rangle = \langle x, Ty\rangle = a(x, y) \quad \forall\, x \in X.$$

Hiermit ist alles bewiesen. □

Eine Verallgemeinerung des LAX–MILGRAM–Satzes bietet sich in der folgenden Form an.

**Satz 3.8** *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ HILBERT–Räume mit induzierten Normen $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_X$. Sei $V \subset X$ dicht und stetig eingebettet:*

$$\text{(i)} \quad \overline{V}^{\|\cdot\|_X} = X, \qquad \text{(ii)} \quad \exists\, C < \infty : \|x\|_X \le C\,\|x\|_V \quad \forall\, x \in V. \tag{3.7}$$

*Ferner sei $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbf{K}$ eine beschränkte und definite Sesquilinearform. Dann existiert genau ein bijektiver Operator $A_0 \in C(V, X)$ mit $D(A_0)$ dicht in $V$ und*

$$\boxed{a(x, v) = \langle x, A_0 v\rangle_X \quad \forall\, x \in V \ \forall\, v \in D(A_0).} \tag{3.8}$$

*Beweis:* Zunächst folgt aus (3.7) für jedes feste $y \in X$:

$$|\ell_y(x)| := |\langle x, y\rangle_X| \le \|x\|_X \|y\|_X \le C\,\|y\|_X \|x\|_V \quad \forall\, x \in V.$$

Also gilt $\ell_y \in V^*$, d.h. es existiert gemäß Satz 3.7(b) genau ein $v \in V$ mit

$$\ell_y(x) = \langle x, y\rangle_X = a(x, v) \overset{(3.4)}{=} \langle Sx, v\rangle_V =: a(x, By) \quad \forall\, x \in V. \tag{3.9}$$

Für den durch die Zuordnungsvorschrift $X \ni y \mapsto v =: By \in V$ eindeutig induzierten Operator $B : X \to V$ zeigt man wieder mit Standardargumenten die Linearität. Des weiteren gilt $\overline{R(B)} = V$, denn andernfalls gäbe es nach Folgerung 2.8(b) ein Element $0 \neq z_0 \perp \overline{R(B)}$ und wegen der Bijektivität von $S : V \to V$ ein $0 \neq x_0 \in V$ mit $z_0 = Sx_0$ und

$$0 = \langle z_0, v\rangle_V = \langle Sx_0, v\rangle_V \overset{(3.4)}{=} a(x_0, v) \quad \forall\, v \in \overline{R(B)}.$$

Nun ist das Element $v := Bx_0 \in R(B)$ für $x_0 \in V$ wohldefiniert. Mit dieser Spezialisierung folgt deshalb

$$0 = \langle z_0, Bx_0\rangle_V = a(x_0, Bx_0) \overset{(3.9)}{=} \langle x_0, x_0\rangle_X = \|x_0\|_X^2,$$

und somit $x_0 = 0 = z_0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $R(B)$ dicht in $V$. Der Operator $B$ ist beschränkt: Denn wegen

$$\gamma \cdot \|By\|_V^2 \le |a(By, By)| = |\langle By, y\rangle_X| \le \|By\|_X \|y\|_X \overset{(3.7)}{\le} C\,\|By\|_V \|y\|_X \quad \forall\, y \in X$$

gilt $\|B\|_{X\to V} \le C/\gamma$. Darüber hinaus ist $B \in B(X, V)$ injektiv: Wäre nämlich $Bu = By$ für $u \neq y$, so hätten wir

$$0 = a(x, Bu - By) = \langle x, u - y\rangle_X \ \forall\, x \in V, \text{ also } u - y \in V^\perp = (\overline{V}^{\|\cdot\|_X})^\perp = X^\perp = \{0\}.$$

Der stetige und bijektive Operator $B : X \to R(B)$ hat nun gemäß Folgerung 3.4(c) eine Inverse $A_0 := B^{-1} \in C(V, X)$ mit $D(A_0) = R(B)$ dicht in $V$, und es gilt die geforderte Relation $a(x, v) = \langle x, A_0 v\rangle_X \ \forall\, x \in V \ \forall\, v \in D(A_0)$. □

## 3.4 Die Hahn–Banach–Sätze

Die Sätze von Hahn–Banach befassen sich mit der Existenz stetiger linearer Funktionale $\ell \in X^*$. Man kennt zwei Typenklassen: Die Fortsetzungssätze garantieren die stetige Fortsetzbarkeit von Funktionalen, die nur auf einem Unterraum definiert sind. Die Trennungssätze sichern die Existenz von Funktionalen, die auf disjunkten konvexen Mengen verschiedene Funktionswerte annehmen.

Für das Folgende spielt der Begriff des *sublinearen* Funktionals eine wesentliche Rolle. Dabei sei vermerkt, daß jeder **C**–Vektorraum trivialerweise auch ein **R**–Vektorraum ist.

**Definition 3.5** *Sei $X$ ein Vektorraum über dem Körper* **K**. *Ein Funktional $p : X \to \mathbf{R}$ heiße* **sublinear** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\text{(i)} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \forall\, \lambda \geq 0 \ \forall\, x \in X, \qquad \text{(ii)} \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \forall\, x, y \in X.}$$

**BSP. (3.4.1)** Nach Definition 2.1 ist jede **Halbnorm** $p : X \to \mathbf{R}$ sublinear.

**Satz 3.9 (von Hahn–Banach)**
*Sei $X$ ein* **reeller** *Vektorraum, $M \subset X$ ein Unterraum und $p : X \to \mathbf{R}$ ein sublineares Funktional. Weiter sei $\ell : M \to \mathbf{R}$ ein lineares Funktional mit*

$$\boxed{\ell(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in M.} \tag{4.1}$$

*Dann existiert ein lineares Funktional $L : X \to \mathbf{R}$ mit*

$$\boxed{L|M = \ell \quad \textit{und} \quad -p(-x) \leq L(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in X.} \tag{4.2}$$

*Beweis:* Im Falle $M = X$ ist nichts zu beweisen. Sei also $M \subsetneq X$ angenommen. In einem ersten Beweisteil wählen wir nun ein $0 \neq x_0 \in X \setminus M$ und setzen

$$M_0 := \{x + \lambda x_0 \,:\, x \in M, \ \ \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $M_0 \subset X$ ein Unterraum ist mit $M \subsetneq M_0$. Nach Vorgabe haben wir für $x, y \in M$

$$\ell(x) + \ell(y) = \ell(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_0) + p(x_0 + y),$$

und somit auch

$$\ell(x) - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - \ell(y).$$

Die rechte Seite (RS) dieser Ungleichung ist unabhängig von $x$, die linke Seite (LS) unabhängig von $y$, so daß beide Seiten durch eine gemeinsame Zahl $\alpha$ getrennt werden können: $\text{LS} \leq \alpha \leq \text{RS}$. Wir erhalten daraus:

$$\ell(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \ \forall\, x \in M, \qquad \ell(y) + \alpha \leq p(y + x_0) \ \forall\, y \in M. \tag{4.3}$$

Durch $\ell_0(x + \lambda x_0) := \ell(x) + \lambda\alpha$ ist nun ein Funktional $\ell_0 : M_0 \to \mathbf{R}$ definiert, welches offenbar linear und eine Fortsetzung von $\ell$ ist: $\ell_0|M = \ell$. Für $\lambda > 0$ ersetzen wir $x$ in (4.3) durch $-\lambda^{-1}x$ und $y$ durch $\lambda^{-1}x$. Nach Multiplikation mit $\lambda$ resultiert dann für $z := x + \lambda x_0$:

$$-p(-z) \leq \ell_0(z) \leq p(z) \quad \forall\, z \in M_0.$$

Der zweite Beweisteil verwendet als wesentliches Argument das Lemma von ZORN (man vgl. zum Beispiel F. HIRZEBRUCH/W. SCHARLAU, Einführung in die Funktionalanalysis. BI–HTB 296a*, Mannheim 1971), welches aus dem Auswahl–Axiom folgt. Auf die grundlagentheoretischen Fragen im Zusammenhang mit dem Auswahl–Axiom kann hier nicht eingegangen werden.

**Definition 3.6** *Es sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Menge.*

- *Eine Relation "$\leq$" auf $\mathcal{F}$ heiße eine* **Halbordnung** $:\Leftrightarrow$ *Für alle $x, y, z \in \mathcal{F}$ gelten*

$$\boxed{\text{(H1)}\ \ x \leq x, \qquad \text{(H2)}\ \ (x \leq y \wedge y \leq z) \ \Rightarrow\ x \leq z, \qquad \text{(H3)}\ \ (x \leq y \wedge y \leq x) \ \Rightarrow\ x = y.}$$

- *Eine halbgeordnete Menge $(\mathcal{F}, \leq)$ heiße* **geordnet** $:\Leftrightarrow$ *Für alle $x, y \in \mathcal{F}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$*
- *Ein Element $x$ einer halbgeordneten Menge $(\mathcal{F}, \leq)$ heiße* **maximal** $:\Leftrightarrow\ \ (y \in \mathcal{F} \wedge x \leq y) \ \Rightarrow\ x = y$
- *Ist $G \subset \mathcal{F}$ Teilmenge der halbgeordneten Menge $(\mathcal{F}, \leq)$, so heiße $x \in \mathcal{F}$* **obere Schranke** *von $G$ $:\Leftrightarrow\ \ y \leq x\ \forall\, y \in G$.*

Nun gilt der folgende

**Satz 3.10 (Lemma von ZORN)**
*Gegeben sei eine nichtleere halbgeordnete Menge $(\mathcal{F}, \leq)$. Besitzt jede geordnete Teilmenge $G \subset \mathcal{F}$ eine obere Schranke, so besitzt $\mathcal{F}$ ein maximales Element.*

Wir bezeichnen nun im zweiten Beweisteil des Satzes 3.9 mit $\mathcal{F}$ die Menge aller Paare $(M^*, \ell^*)$ mit den Eigenschaften

$$M \subset M^* \subset X \text{ Unterraum}, \quad \ell^* : M^* \to \mathbf{R} \text{ linear}, \quad \ell^* | M = \ell, \quad \ell^*(x) \leq p(x)\ \forall\, x \in M^*.$$

Wir definieren auf $\mathcal{F}$ eine Halbordnung "$\leq$" durch die Vorschrift

$$(M^*, \ell^*) \leq (M^{**}, \ell^{**}) \ :\Leftrightarrow\ M^* \subset M^{**} \text{ und } \ell^{**}(x) = \ell^*(x)\ \forall\, x \in M^*.$$

Die Axiome (H1)–(H3) sind offenkundig erfüllt. Ist nun $G \subset \mathcal{F}$ eine geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$, so setzen wir $\tilde{M} := \bigcup_{(M^*, \ell^*) \in G} M^*$. Da zu jedem Punkt $x \in \tilde{M}$ ein Paar $(M^*, \ell^*) \in G$ existiert mit $x \in M^*$, ist eine Abbildung $\tilde{\ell} : \tilde{M} \to \mathbf{R}$ wohldefiniert, wenn wir setzen:

$$\tilde{\ell}(x) := \ell^*(x) \text{ für } x \in \tilde{M} \text{ und } (M^*, \ell^*) \in G \text{ mit } x \in M^*.$$

Nun ist $\tilde{M} \subset X$ ein Unterraum und $\tilde{\ell}$ ein lineares Funktional. Denn zu $x, y \in \tilde{M}$ gibt es Paare $(M^*, \ell^*), (M^{**}, \ell^{**}) \in G$ mit $x \in M^*$ und $y \in M^{**}$. Da $G$ geordnet ist, können wir ohne Einschränkung $(M^*, \ell^*) \leq (M^{**}, \ell^{**})$ annehmen. Es folgen $x, y \in M^{**}$ und somit auch $\lambda x + \mu y \in M^{**} \subset \tilde{M}\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, ferner

$$\tilde{\ell}(\lambda x + \mu y) = \ell^{**}(\lambda x + \mu y) = \lambda \ell^{**}(x) + \mu \ell^{**}(y) = \lambda \ell^*(x) + \mu \ell^{**}(y) = \lambda \tilde{\ell}(x) + \mu \tilde{\ell}(y).$$

Wegen $M \subset \tilde{M}$, $\tilde{\ell} | M = \ell$ und $\tilde{\ell}(x) \leq p(x)\ \forall\, x \in \tilde{M}$ gilt $(\tilde{M}, \tilde{\ell}) \in \mathcal{F}$. Des weiteren ist $(\tilde{M}, \tilde{\ell})$ eine obere Schranke von $G$, denn nach Konstruktion haben wir ja $M^* \subset \tilde{M}$ für jedes Paar $(M^*, \ell^*) \in G$ sowie $\tilde{\ell}(x) = \ell^*(x)\ \forall\, x \in M^*$. Nach dem Lemma von ZORN enthält $\mathcal{F}$ ein maximales Element $(M', \ell')$. Wäre $M' \subsetneq X$, so folgte aus der Konstruktion des ersten Beweisteils, daß $(M', \ell')$ nicht maximal wäre. Damit ist $L := \ell'$ das gesuchte Funktional, und die Abschätzung $L(x) \leq p(x)\ \forall\, x \in X$ führt auf $-p(-x) \leq -L(-x) = L(x) \leq p(x)$. Der Beweis ist vollständig. □

Die komplexe Vektorraum–Version des Satzes von HAHN–BANACH lautet:

**Satz 3.11** *Sei $X$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K}$, $M \subset X$ ein Unterraum und $p : X \to \mathbf{R}$ eine Halbnorm. Weiter sei $\ell : M \to \mathbf{K}$ ein lineares Funktional mit*

$$\boxed{|\ell(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in M.} \tag{4.4}$$

*Dann existiert ein lineares Funktional $L : X \to \mathbf{K}$ mit*

$$\boxed{L|M = \ell \quad \textit{und} \quad |L(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in X.} \tag{4.5}$$

*Beweis:* Gemäß BSP.(3.4.1) ist eine Halbnorm $p : X \to \mathbf{R}$ sublinear mit $p(x) \overset{(N2)}{=} p(-x)\ \forall\, x \in X$. Für $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ folgt daher die Behauptung aus Satz 3.9. Im Fall $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ definieren wir zu gegebenem $\ell : M \to \mathbf{C}$ mit $|\ell(x)| \leq p(x)\ \forall\, x \in M$ das Funktional $\ell_1(x) := \mathrm{Re}\,\ell(x)$. Weil für jede komplexe Zahl $z$ die Zerlegung $z = \mathrm{Re}\,(z) - i\mathrm{Re}\,(iz)$ gilt, erhalten wir

$$\ell(x) = \ell_1(x) - i\ell_1(ix) \quad \forall\, x \in M.$$

An dieser Zerlegung kann man erkennen, daß $\ell_1$ $\mathbf{R}$–linear ist und die Abschätzung $|\ell_1(x)| \leq p(x)\ \forall\ x \in M$ erfüllt. Gemäß Satz 3.9 besitzt $\ell_1$ eine $\mathbf{R}$–lineare Fortsetzung $L_1$ auf $X$ mit $|L_1(x)| \leq p(x)\ \forall\ x \in X$. Es sei $L(x) := L_1(x) - iL_1(ix)$ gesetzt. Dann ist $L$ $\mathbf{C}$–linear, es gilt $L|M = \ell$, und für jedes $x \in X$ gibt es eine Zahl $a \in \mathbf{C}$ mit $|a| = 1$ sowie mit

$$|L(x)| = aL(x) = L(ax) = L_1(ax) \leq p(ax) \overset{(N2)}{=} p(x).$$

Damit ist alles bewiesen. □

Satz 3.11 trifft insbesondere auf den Fall eines normierten Vektorraumes zu:

**Satz 3.12** *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbf{K}$ und $M \subset X$ ein Unterraum. Sei ferner $\ell : M \to \mathbf{K}$ stetig und linear. Dann existiert ein $L \in X^*$ mit*

$$\boxed{L|M = \ell \quad \textit{und} \quad \|L\|_{X\to\mathbf{K}} = \|\ell\|_{M\to\mathbf{K}}.} \tag{4.6}$$

*Beweis:* Das gemäß $p(x) := \|x\|_X\|\ell\|_{M\to\mathbf{K}}\ \forall\, x \in X$ definierte Funktional $p : X \to \mathbf{R}$ ist offenkundig eine Halbnorm, welche die Voraussetzung (4.4) erfüllt. Satz 3.11 ist anwendbar, und für die existierende Fortsetzung $L$ gilt wegen (4.5) $|L(x)| \leq \|x\|_X\|\ell\|_{M\to\mathbf{K}}\ \forall\ x \in X$. Daraus folgt $\|L\|_{X\to\mathbf{K}} \leq \|\ell\|_{M\to\mathbf{K}}$, während die umgekehrte Richtung $\|\ell\|_{M\to\mathbf{K}} \leq \|L\|_{X\to\mathbf{K}}$ trivial ist. □

Als wichtigste Folgerung aus dem Satz 3.12 ergibt sich der Existenznachweis eines stetigen linearen Funktionals der Norm 1, welches in einem vorgegebenen Punkt einen vorgeschriebenen Funktionswert annimmt.

**Satz 3.13** *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbf{K}$ und $0 \neq x_0 \in X$ ein fester Punkt. Dann existiert ein $L \in X^*$ mit*

$$\boxed{\|L\|_{X^*} = 1 \quad \textit{und} \quad L(x_0) = \|x_0\|_X.} \tag{4.7}$$

*Beweis:* Auf dem Unterraum $M := \text{span}\,\{x_0\} = \{\lambda x_0 \,:\, \lambda \in \mathbf{K}\} \subset X$ definieren wir das lineare Funktional $\ell : M \to \mathbf{K}$ gemäß $\ell(x) := \lambda \|x_0\|_X \;\forall\, x := \lambda x_0 \in M$. Dann gilt offenbar $|\ell(x)| = \|x\|_X \;\forall\, x \in X$ und somit $\|\ell\|_{M\to\mathbf{K}} = 1$ sowie $\ell(x_0) = \|x_0\|_X$. Nun folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.12. □

Uns interessiert jetzt die Frage, ob es zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ ein trennendes Fuktional $\ell \in X^*$ gibt mit $\ell(x) \neq \ell(y)$. Zur Vorbereitung einer Antwort beweisen wir zunächst die Existenz eines sublinearen Funktionals $p(x)$ mit den im HAHN–BANACH–Satz geforderten Eigenschaften.

**Satz 3.14** *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbf{K}$ und $A, B \subset X$ nichtleere konvexe Teilmengen mit $A$ offen. Ist $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ beliebig, so setzen wir für $x_0 := b_0 - a_0$:*

$$\boxed{C := \{a - b + x_0 \,:\, a \in A \wedge b \in B\} \subset X.} \tag{4.8}$$

*Dann ist $C$ offen und konvex, es gilt $0 \in C$ und es existiert ein sublineares Funktional $p : X \to \mathbf{R}$ mit*

$$\boxed{p(x) < 1 \;\forall\, x \in C \quad \textit{und} \quad p(x) \geq 1 \;\forall\, x \in C^c.} \tag{4.9}$$

*Beweis:* Für $a := a_0$ und $b := b_0$ gilt offenbar $0 = x = a - b + x_0 \in C$. Sind $x, \tilde{x} \in C$, so gibt es $a, \tilde{a} \in A$ und $b, \tilde{b} \in B$ mit $x = a - b + x_0$ und $\tilde{x} = \tilde{a} - \tilde{b} + x_0$. Da $A, B$ konvexe Mengen sind, haben wir für jedes $\lambda \in (0,1)$ stets $a_\lambda := (1-\lambda)a + \lambda\tilde{a} \in A$ sowie $b_\lambda := (1-\lambda)b + \lambda\tilde{b} \in B$. Daher folgt auch $(1-\lambda)x + \lambda\tilde{x} = a_\lambda - b_\lambda + x_0 \in C$, also die Konvexität der Menge $C$. Schließlich zeigen wir noch ihre Offenheit und betrachten dazu einen festen Punkt $x = a - b + x_0 \in C$. Zu $a \in A$ existiert nun eine offene $\epsilon$–Kugel $B_\epsilon(a) \subset A$ und wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, daß die offene Kugel $B_\epsilon(x) = -b + x_0 + B_\epsilon(a)$ ganz in $C$ liegt. Zu beliebigem $\tilde{x} \in B_\epsilon(x)$ existiert aber ein $\tilde{a} \in B_\epsilon(a) \subset A$ mit $\tilde{x} = \tilde{a} - b + x_0 = x + \tilde{a} - a$, was augenscheinlich $\tilde{x} \in C$ sowie $\|\tilde{x} - x\|_X = \|\tilde{a} - a\|_X < \epsilon$ bedeutet. Jetzt sei zu festem $x \in X$ der Halbstrahl $\{\lambda x \,:\, \lambda \geq 0\}$ betrachtet. Ist er nicht ganz in $C$ enthalten, so trifft er den Rand der Menge $C$ wegen ihrer Konvexität zum ersten Mal in einem Punkt $x^*$, ohne dann wieder einen inneren Punkt von $C$ zu passieren. Setzen wir

$$p(x) := \begin{cases} \|x\|_X / \|x^*\|_X, & \text{falls } x^* \in \partial C \text{ existiert,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.10}$$

so hat das Funktional $p : X \to \mathbf{R}$ bereits die geforderten Eigenschaften (4.9). Für $x \in C^c$ gilt offenbar $\|x\|_X \geq \|x^*\|_X$, also $p(x) \geq 1$, während für $x \in C$ entweder $\|x\|_X < \|x^*\|_X$ und somit $p(x) < 1$ gilt oder $p(x) = 0$, falls $x^*$ nicht existiert. Die Homogenität des Funktionals, nämlich

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, \lambda \geq 0, \tag{4.11}$$

ist direkt an (4.10) ablesbar. Die Sublinearität ist gesichert, wenn wir die Dreiecksungleichung gezeigt haben. Dazu fixieren wir $x, y \in X$ und bestimmen zu beliebigem $\epsilon > 0$ Zahlen $s, t > 0$ mit $p(x) = s - \epsilon,\; p(y) = t - \epsilon$. Wegen $p(x) < s$ und $p(y) < t$ gelten $\frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in C$. Setzen wir noch $\lambda := \frac{s}{s+t} < 1$, so ergibt sich aus der Konvexität von $C$

$$\frac{x+y}{s+t} = \lambda \frac{x}{s} + (1-\lambda)\frac{y}{t} \in C,$$

und mit (4.11)

$$p\Big(\frac{x+y}{s+t}\Big) < 1, \quad \text{also} \quad p(x+y) < s+t = p(x)+p(y)+2\epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

Für $\epsilon \to 0+$ liefert das die Subadditivität. □

Nun sind wir in der Lage, die angesprochene Trennungseigenschaft zu beweisen.

**Satz 3.15 (Trennungssatz von HAHN–BANACH)**
*Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbf{K}$ und $A, B \subset X$ nichtleere disjunkte und konvexe Teilmengen mit $A$ offen. Dann gibt es ein Funktional $L \in X^*$ und eine Zahl $\gamma \in \mathbf{R}$ mit*

$$\boxed{\operatorname{Re} L(a) < \gamma \le \operatorname{Re} L(b) \quad \forall\, a \in A\ \forall\, b \in B.} \tag{4.12}$$

*Beweis:* Wir hatten im Beweis von Satz 3.11 gezeigt, wie der Fall des $\mathbf{C}$–Vektorraums auf den Fall des $\mathbf{R}$–Vektorraums zurückgeführt werden kann. Deshalb genügt es hier, vom Spezialfall $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ auszugehen. Wir definieren $x_0 \in X$, $C \subset X$ und $p : X \to \mathbf{R}$ wie in Satz 3.14. Es sei des weiteren $M := \operatorname{span}\{x_0\} = \{\lambda x_0 \,:\, \lambda \in \mathbf{R}\}$ sowie $\ell(\lambda x_0) := \lambda$ gesetzt. Dann erfüllt das lineare Funktional $\ell : M \to \mathbf{R}$ die Bedingung (4.1): Wegen $A \cap B = \emptyset$ ist $x_0 \in C^c$, so daß $p(x_0) \ge 1$, also auch

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda \le \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0) \quad \forall\, \lambda \ge 0$$

gilt. Wegen $p \ge 0$ ist diese Ungleichung für $\lambda < 0$ trivial. Gemäß Satz 3.9 gibt es eine Fortsetzung $L : X \to \mathbf{R}$ von $\ell$ mit $-p(-x) \le L(x) = -L(-x) \le p(x)\ \forall\, x \in X$. Betrachten wir $x \in C$, so folgt $L \le 1$. Hingegen folgt $-1 \le L$ für $-x \in C$, also $|L(x)| \le 1\ \forall\, x \in C$. Nun enthält $C$ ja gemäß Satz 3.14 eine offene $\epsilon$–Kugel $B_\epsilon(0)$; das heißt es gilt

$$\|L\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X < 1} |L(x)| = \sup_{\|x\|_X < \epsilon} \frac{1}{\epsilon}\,|L(x)| \le \frac{1}{\epsilon},$$

also $L \in X^*$. Für $a \in A$ und $b \in B$ folgt noch mit $\ell(x_0) = 1 = L(x_0)$:

$$L(a) - L(b) + 1 = L(a - b + x_0) \le p(a - b + x_0) < 1,$$

und daher $L(a) < L(b)$. Das Funktional $L$ ist nichtkonstant und daher eine offene Abbildung: Es gibt ein $x \in X$ mit $L(x) \ne 0$, was $L(\operatorname{span}\{x\}) = \mathbf{R}$ impliziert. $L$ ist surjektiv und läßt sich gemäß Satz 3.12 zu einem surjektiven Funktional $\tilde{L} \in \tilde{X}^*$ auf die Vervollständigung $\tilde{X}$ von $X$ fortsetzen. $\tilde{L}$ ist nun wegen Satz 3.3 offen; insbesondere wird die offene Menge $A \subset X$ in eine offene Menge $\tilde{L}(A) = L(A) \subset \mathbf{R}$ abgebildet. Die Zahl $\gamma := \sup\{L(A)\} \le \inf\{L(B)\}$ leistet das in (4.12) Verlangte. □

Eine brauchbare Variante des Trennungssatzes von HAHN–BANACH lautet:

**Satz 3.16** *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbf{K}$ und $A, B \subset X$ nichtleere konvexe Teilmengen mit positivem Abstand*

$$\boxed{\operatorname{dist}(A,B) := \inf_{a\in A, b\in B} \|a - b\|_X = \delta > 0.} \tag{4.13}$$

*Dann gibt es ein Funktional $L \in X^*$ mit $L(A) \cap L(B) = \emptyset$.*

*Beweis:* Für $\epsilon := \frac{\delta}{2} > 0$ ist die Menge $A_\epsilon := \bigcup_{x_0 \in A} B_\epsilon(x_0)$ als Vereinigung offener Kugeln selber offen und sogar konvex: Zu jedem Paar $x, y \in A_\epsilon$ gibt es nämlich Mittelpunkte $x_0, y_0 \in A$ mit $x \in B_\epsilon(x_0)$, $y \in B_\epsilon(y_0)$. Für $\lambda \in (0,1)$ setzen wir $z_\lambda := (1-\lambda)x + \lambda y$ sowie $z_{0\lambda} := (1-\lambda)x_0 + \lambda y_0$. Offenbar ist $z_{0\lambda} \in A$ und wegen

$$\|z_\lambda - z_{0\lambda}\|_X = \|(1-\lambda)(x-x_0) + \lambda(y-y_0)\|_X < (1-\lambda)\epsilon + \lambda\epsilon = \epsilon$$

gilt $z_\lambda \in B_\epsilon(z_{0\lambda})$, also $z_\lambda \in A_\epsilon$. Als Folge von $A_\epsilon \cap B = \emptyset$ existiert gemäß Satz 3.15 ein Funktional $L \in X^*$ mit den geforderten Eigenschaften. □

**Folgerung 3.5** *In einem normierten Raum $X$ gibt es zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ ein trennendes Funktional $\ell \in X^*$ mit $\ell(B_\epsilon(x)) \cap \ell(B_\epsilon(y)) = \emptyset$, wenn $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\|x-y\|_X$ gewählt wird.*

---

## 3.5 Der Bidualraum und schwache Topologien

Ist $X$ ein normierter Raum über $\mathbf{K}$, so ist der Dualraum $X^*$ stets ein Banach–Raum (Folgerung 2.3). Es macht also einen Sinn, den Dualraum von $X^*$ zu betrachten:

**Definition 3.7** *Sei $X$ normierter Raum über $\mathbf{K}$ und $X^*$ der Banach–Raum der stetigen linearen Funktionale auf $X$.*

- *Der Dualraum von $X^*$ heiße* **Bidualraum**, *bezeichnet mit $X^{**}$*
- *Auf $X \times X^*$ wird durch formale Setzung*

$$\boxed{(x,\ell) := \ell(x) \in \mathbf{K} \quad \forall\, x \in X \;\forall\, \ell \in X^*} \tag{5.1}$$

*eine Bilinearform $(\cdot,\cdot) : X \times X^* \to \mathbf{K}$ induziert. Diese heiße* **Dualitätsabbildung**.

Qualitativ liefert die Einführung der Dualitätsabbildung keinen neuen Aspekt; sie erlaubt lediglich eine andere Interpretation der linearen Funktionale: So wie $\ell$ auf $x$ wirkt, so wirkt auch $x$ auf $\ell$. Darüber hinaus erinnert die Setzung (5.1) an den Darstellungssatz 2.12 von Fréchet–Riesz.
Jedes $x$ erzeugt jetzt vermöge

$$\boxed{X^* \ni \ell \mapsto (x,\ell) \in \mathbf{K}} \tag{5.2}$$

eine lineare Abbildung $(x,\cdot) : X^* \to \mathbf{K}$, die wegen

$$|(x,\ell)| = |\ell(x)| \le \|\ell\|_{X^*}\|x\|_X \quad \forall\, \ell \in X^* \tag{5.3}$$

stetig ist. Somit gilt $(x,\cdot) \in X^{**}$ $\forall\, x \in X$, oder anders: Jedes $x \in X$ kann vermöge $(x,\cdot) =: I(x)$ mit einem $I(x) \in X^{**}$ identifiziert werden.

**Satz 3.17** *Die Abbildung $I : X \to X^{**}$ ist eine lineare Isometrie, d.h. es gilt*

$$\boxed{\|x\|_X = \|I(x)\|_{X^{**}} := \sup_{\{\ell \in X^*, \|\ell\|_{X^*}=1\}} |(x,\ell)| \quad \forall\, x \in X.} \tag{5.4}$$

*Beweis:* Die Linearität von $I$ ist augenscheinlich, und wegen (5.3) haben wir bereits $\|I(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung verwenden wir Satz 3.13. Zu festem $0 \neq x \in X$ gibt es ein $L \in X^*$ mit $\|L\|_{X^*} = 1$ und $L(x) = \|x\|_X$. Daher gilt

$$\|I(x)\|_{X^{**}} \geq |(x,L)| = |L(x)| = \|x\|_X.$$

Somit haben wir die Isometrie $\|I(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ gezeigt. □

Wir definieren jetzt eine neue Topologie auf $X$, indem wir mit Hilfe der stetigen linearen Funktionale eine lokale Basis in jedem Punkt $x \in X$ erklären (vgl. Bemerkung 1.3).

**Definition 3.8** *Sei $X$ ein* Banach*–Raum und $X^*$ sein Dualraum. Für jedes $\ell \in X^*$ und $\epsilon > 0$ sei*

$$\boxed{V_{\ell,\epsilon}(0) := \{y \in X \,:\, |\ell(y)| < \epsilon\}}$$

*gesetzt sowie $V_{\ell,\epsilon}(x) := x + V_{\ell,\epsilon}(0)$. Dann ist das System $\{V_{\ell,\epsilon}(x)\}_{\ell \in X^*, \epsilon > 0}$ von Teilmengen $V_{\ell,\epsilon}(x) \subset X$ gemäß* Satz 1.5 *die lokale Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$, und $\mathcal{T}$ heiße die* **schwache Topologie** *von $X$.*

**Folgerung 3.6** (a) *Jede der Mengen $V_{\ell,\epsilon}(x)$ ist offen in der schwachen Topologie.*

Denn sei ein $y \in V_{\ell,\epsilon}(x)$ fixiert und dazu $\rho := |\ell(y) - \ell(x)| < \epsilon$ gesetzt. Wird nun $0 < r \leq \epsilon - \rho$ gewählt, so haben wir bereits $V_{\ell,r}(y) \subset V_{\ell,\epsilon}(x)$ vorliegen, denn es gilt

$$\forall\, z \in V_{\ell,r}(y) \,:\, |\ell(z) - \ell(x)| \leq |\ell(z) - \ell(y)| + |\ell(y) - \ell(x)| < r + \rho \leq \epsilon. \tag{5.5}$$

(b) *Jede der Mengen $V_{\ell,\epsilon}(x)$ ist auch offen in der Normtopologie.*

Für $y \in V_{\ell,\epsilon}(x)$ setzen wir $0 < \rho < \epsilon$ wie in (a) fest, wählen jedoch $r > 0$ gemäß $r\,\|\ell\|_{X^*} \leq \epsilon - \rho$. Dann folgt $B_r(y) := \{z \,:\, \|z - y\|_X < r\} \subset V_{\ell,\epsilon}(x)$, denn es gilt nun anstelle von (5.5):

$$\forall\, z \in B_r(y) \,:\, |\ell(z) - \ell(x)| \leq |\ell(z) - \ell(y)| + |\ell(y) - \ell(x)| \leq \rho + \|\ell\|_{X^*}\|z - y\|_X < \rho + r\,\|\ell\|_{X^*} \leq \epsilon.$$

(c) *Gemäß* Bemerkung 1.4 *bilden die endlichen Durchschnitte* $\bigcap_{1 \leq i,j \leq N} V_{\ell_i,\epsilon_j}(x)$ *eine* **Umgebungsbasis** *des Punktes $x \in X$.*

Wir zeigen weitere Eigenschaften der schwachen Topologie im folgenden Satz auf.

**Satz 3.18** *Sei $X$ ein* Banach*–Raum. Dann gilt*

(a) *In der schwachen Topologie sind alle Funktionale $\ell \in X^*$ noch stetig. Die schwache Topologie ist insbesondere gröber als die Normtopologie.*

(b) *Die schwache Topologie erfüllt das Trennungsaxiom.*

(c) *Genau dann konvergiert eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ *in der schwachen Topologie zum Grenzwert* $x \in X$ *(in Zeichen:* $x_k \rightharpoonup x$*), wenn gilt:*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \ell(x_k) = \ell(x) \quad \forall\, \ell \in X^*.} \tag{5.6}$$

*Beweis:* (a) Sei $\ell \in X^*$ und gelte $\ell(x) = a \in \mathbf{K}$. Die offene $\epsilon$–Kugel $B_\epsilon(a) \subset \mathbf{K}$ hat als Urbildmenge unter $\ell$ die Menge $\{y \in X : |\ell(y) - \ell(x)| < \epsilon\}$, und diese ist gerade die offene Menge $V_{\ell,\epsilon}(x)$.

(b) Seien $x, y \in X$ verschiedene Punkte. Dann gibt es nach Folgerung 3.5 ein trennendes Funktional $\ell \in X^*$ mit $\ell(x) \neq \ell(y)$. Für jedes $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\,|\ell(x-y)|$ gilt nun $V_{\ell,\epsilon}(x) \cap V_{\ell,\epsilon}(y) = \emptyset$.

(c) Konvergenz $x_k \rightharpoonup x$ liegt genau dann vor, wenn in jedem der endlichen Schnitte $\bigcap\limits_{1\le i,j\le N} V_{\ell_i,\epsilon_j}(x)$ fast alle $x_k$ liegen. Das ist der Fall, wenn $|\ell_i(x_k - x)| < \epsilon_j \;\forall\, k \ge N = N(i,j)$ gilt, also genau für $\ell(x_k - x) \to 0 \;\forall\, \ell \in X^*$. □

**BSP. (3.5.1)** **Schwache Konvergenz im** HILBERT**–Raum.** In einem HILBERT–Raum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sind die stetigen linearen Funktionale auf Grund des Darstellungssatzes 2.12 von FRÉCHET–RIESZ genau die Skalarprodukte $\langle\cdot, y\rangle$, $y \in X$. Das heißt, schwache Konvergenz einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ zum Grenzwert $x \in X$ ist genau die Konvergenz der Folge $\langle x_k - x, y\rangle \to 0$:

$$\boxed{(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X \wedge x_k \rightharpoonup x \;\Leftrightarrow\; \langle x_k - x, y\rangle \to 0 \;\forall\, y \in X.} \tag{5.7}$$

**BSP. (3.5.2)** **Normkonvergenz** (= starke Konvergenz) **impliziert schwache Konvergenz:** Denn für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ mit $x_k \to x \in X$ folgt aus

$$|\ell(x_k - x)| \le \|\ell\|_{X^*}\|x_k - x\|_X \to 0 \quad \forall\, \ell \in X^*$$

die schwache Konvergenz $x_k \rightharpoonup x$. Daß die Umkehrung in einem unendlichdimensionalen BANACH–Raum i.a. falsch ist, zeigen wir mit dem folgenden einfachen Beispiel. Wir betrachten wiederum den BANACH–Raum der Folgen $\ell^p$, $1 < p < \infty$, und seinen Dualraum $\ell^q$, $q = p/(p-1)$, vgl. die Beispiele BSP.(2.1.1) und BSP.(2.3.3). Für die Folge der Standardbasisvektoren $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $e_k(i) = \delta_{ik}$, $i,k \in \mathbf{N}$, gilt ja $\|e_k\|_{\ell^p} = 1$ sowie $\|e_j - e_k\|_{\ell^p} = \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |e_j(i) - e_k(i)|^p\Big)^{1/p} = 2^{1/p}$ für $j \neq k$. Also kann $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ keine CAUCHY–Folge sein und auch nicht in der Normtopologie konvergieren. Hingegen gilt für jedes $y \in \ell^q$ wegen $\big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y(i)|^q\big)^{1/q} < \infty$ notwendig $\lim\limits_{i\to\infty} y(i) = 0$. Für das von $y$ erzeugte Funktional $f_y$ (vgl. (3.13) in Abschnitt 2.3) gilt dann

$$f_y(e_k) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)e_k(i) = y(k) \to 0 \quad \forall\, y \in \ell^q.$$

Somit haben wir $e_k \rightharpoonup 0$.

Schwach konvergente Folgen sind beschränkt. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 3.19** *Sei* $X$ *ein normierter Raum. Dann gilt für jede schwach konvergente Folge* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ *mit* $x_k \rightharpoonup x$*:*

$$\boxed{\exists\, C < \infty : \|x_k\|_X \le C \;\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \textit{und} \quad \|x\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X,} \tag{5.8}$$

*d.h. die Norm ist* **schwach unterhalbstetig**.

*Beweis:* Nach Voraussetzung gilt $\lim_{k\to\infty} \ell(x_k) = \ell(x) \ \forall\ \ell \in X^*$. Da konvergente Zahlenfolgen bekanntlich beschränkt sind, ist die Menge $\{I(x_k)\}_{k\in\mathbf{N}} \subset X^{**} = B(X^*, \mathbf{K})$ punktweise beschränkt: Für jedes $\ell \in X^*$ gibt es eine Zahl $K$ mit

$$|I(x_k)\ell| = |(x_k, \ell)| = |\ell(x_k)| \leq K \quad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Also gibt es nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit eine Zahl $C < \infty$ mit

$$\|I(x_k)\|_{X^{**}} \overset{(5.4)}{=} \|x_k\|_X \leq C \quad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Zum Beweis der zweiten Aussage nehmen wir $x \neq 0$ an, denn für $x = 0$ ist die Aussage trivial. Der Satz 3.13 liefert die Existenz eines $L \in X^*$ mit $\|L\|_{X^*} = 1$ und $L(x) = \|x\|_X$, und es folgt

$$\|x\|_X = L(x) = \lim_{k\to\infty} L(x_k) \leq \|L\|_{X^*} \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X.$$

Das war zu zeigen. □

Eine bemerkenswerte, aber nicht verwunderliche Aussage ist, daß Abbildungen $T \in B(X, Y)$ auch in den schwachen Topologien der Räume $X$ und $Y$ stetig sind.

**Satz 3.20** *Seien $X, Y$ normierte Räume und sei $T \in B(X, Y)$. Dann ist $T$ stetig bezüglich der schwachen Topologien von $X$ und $Y$.*

*Beweis:* Für beliebige Abbildungen $f : X \to Y$ hatten wir ja in (1.2), Abschnitt 0.1, behauptet, daß auf jeder Mengenfamilie $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset Y$ die folgenden Relationen gelten:

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).$$

Deswegen brauchen wir nur zu zeigen, daß die Urbilder der offenen Mengen $U_{\ell,\epsilon}(y) \subset Y$ des Erzeugendensystems der schwachen Topologie $\mathcal{T}_Y$ schwach offen in $X$ sind. Sei also für $\ell \in Y^*$ und $y \in Y$ $a := \ell(y) \in \mathbf{K}$ gesetzt. Wir hatten bereits im Beweis von Satz 3.18 die Relation $U_{\ell,\epsilon}(y) = \ell^{-1}(B_\epsilon(a))$ hergestellt, worin $B_\epsilon(a) \subset \mathbf{K}$ die offene $\epsilon$–Kugel in $\mathbf{K}$ um $a$ bezeichnet. Nun ist $\ell \circ T \in X^*$, also stetig und somit gemäß Satz 3.18 auch schwach stetig. Folglich ist

$$T^{-1}(U_{\ell,\epsilon}(y)) = T^{-1}(\ell^{-1}(B_\epsilon(a))) = (\ell \circ T)^{-1}(B_\epsilon(a))$$

schwach offen in $X$. □

Durch Einbettung des Raumes $X$ in einen Teilraum von $X^{**}$, die wir vermöge der linearen Isometrie $I : X \to X^{**},\ x \mapsto I(x) := (x, \cdot)$ vorgenommen hatten, wird neben der Normtopologie und der schwachen Topologie eine weitere Topologie auf $X^*$ erklärbar.

**Definition 3.9** *Sei $X$ ein normierter Raum und $X^*$ sein Dualraum. Für jedes $x \in X$ und $\epsilon > 0$ sei*

$$\boxed{V_{x,\epsilon}(0) := \{f \in X^* \,:\, |f(x)| < \epsilon\}}$$

*gesetzt sowie $V_{x,\epsilon}(\ell) := \ell + V_{x,\epsilon}(0)$. Dann ist das System $\{V_{x,\epsilon}(\ell)\}_{x\in X,\epsilon>0}$ von Teilmengen $V_{x,\epsilon}(\ell) \subset X^*$ gemäß* Satz 1.5 *die lokale Basis einer Topologie $\mathcal{T}^*$ auf $X^*$, und $\mathcal{T}^*$ heiße die* **schwach* Topologie** *von $X^*$. Die endlichen Schnitte $\bigcap_{1\leq i,j\leq N} V_{x_i,\epsilon_j}(\ell)$ bilden eine Umgebungsbasis des Punktes $\ell \in X^*$ dieser Topologie.*

**Bemerkung 3.1** Auf $X^*$ ist ebenso eine schwache Topologie im Sinne der Definition 3.8 erklärt, die jedoch von einer lokalen Basis

$$V_{u,\epsilon}(0) := \{f \in X^* \,:\, |u(f)| < \epsilon\}, \quad u \in X^{**},\ \epsilon > 0$$

als Erzeugendensystem ausgeht. In Definition 3.9 wird jedoch nur auf die Teilmenge $I(X) \subset X^{**}$ zur Erzeugung der lokalen Basis zurückgegriffen, so daß die schwach$^*$ Topologie gröber sein muß als die schwache Topologie auf $X^*$.

Ganz analog zum Satz 3.18 erhalten wir:

**Satz 3.21** *Sei $X$ ein normierter Raum. Dann gilt*

(a) *In der schwach$^*$ Topologie sind alle Funktionale $I(x) \in X^{**}$ noch stetig.*

(b) *Die schwach$^*$ Topologie erfüllt das Trennungsaxiom.*

(c) *Genau dann konvergiert eine Folge $(\ell_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X^*$ in der schwach$^*$ Topologie zum Grenzwert $\ell \in X^*$ (in Zeichen: $\ell_k \overset{*}{\rightharpoonup} \ell$), wenn gilt:*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \ell_k(x) = \ell(x) \quad \forall\, x \in X.} \tag{5.9}$$

**(Folgerung:** *Schwach$^*$ Konvergenz ist* **punktweise Konvergenz.)**

**Definition 3.10** *Sei $X$ ein* BANACH*–Raum.*

- *$X$ heiße* **reflexiv** $:\Leftrightarrow$ *Die kanonische Einbettung $I : X \to X^{**}$ ist bijektiv, also gemäß* Satz 3.17 *ein isometrischer Isomorphismus. In diesem Fall sind schwach$^*$ und schwache Topologie auf $X^*$ identisch.*

**BSP. (3.5.3)** Jeder HILBERT–Raum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist reflexiv. Denn vermöge Satz 2.12(b) gibt es eine antilineare Isometrie $T : X \to X^*$. Somit ist $T^2 : X \to X^{**}$ ein isometrischer Isomorphismus.

**BSP. (3.5.4)** Die Folgenräume $\ell^p$ sind für $1 < p < \infty$ reflexiv. Denn wegen Satz 2.8 gelten ja isometrische Isomorphien $\ell^{p*} \cong \ell^q$, $\ell^{q*} \cong \ell^p$.

**BSP. (3.5.5)** Den Unterschied zwischen schwacher und schwach$^*$ Topologie erkennt man am Beispiel der Räume $\ell^1, \ell^\infty$ und $c_0(\mathbf{N})$. Gemäß Satz 2.8 ist $\ell^1$ der Dualraum von $c_0(\mathbf{N})$ und $\ell^\infty$ der Dualraum von $\ell^1$, genauer $c_0(\mathbf{N})^* \cong \ell^1$, $\ell^{1*} \cong \ell^\infty$. Der Raum $\ell^1$ kann also nicht reflexiv sein.
Wir betrachten auf $X^* := \ell^1$ die schwach$^*$ und die schwache Topologie. Für die Folge $(e_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X^*$ der Standardbasisvektoren $e_k(i) = \delta_{ik}$ und für jedes $x \in X := c_0(\mathbf{N})$ gilt wegen $\lim\limits_{i\to\infty} x(i) = 0$:

$$e_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e_k(i)x(i) = x(k) \to 0,$$

also $e_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$. Wird hingegen $u := (1)_{i\in\mathbf{N}} \in X^{**} = \ell^\infty$ gewählt, so finden wir

$$u(e_k) = \sum_{i=1}^{\infty} u(i)e_k(i) = 1. \tag{5.10}$$

Wäre die Folge $(e_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X^*$ schwach konvergent zum Grenzwert $e \in X^*$, würde also $u(e_k) \to u(e)\ \forall\ u \in X^{**}$ gelten, so müßte der Grenzwert $e$ mit dem Grenzwert $e_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ übereinstimmen. Das hieße $e = 0 = u(e)$, im Widerspruch zu (5.10). Die Folge $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ist zwar schwach* nicht aber schwach konvergent.

---

## 3.6 Folgenkompaktheit und schwach* Topologie

Eine nichttriviale Aussage ist, daß die abgeschlossene Einheitskugel $B_1^*(0) \subset X^*$ für einen separablen BANACH–Raum $X$ schwach* folgenkompakt ist. Wir bereiten diese Aussage mit dem folgenden Ergebnis vor.

**Satz 3.22** *Seien $X$ ein* BANACH*–Raum und $(\ell_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X^*$ eine Folge. Genau dann gilt $\ell_k \overset{*}{\rightharpoonup} \ell \in X^*$, wenn die beiden folgenden Bedingungen* (a) *und* (b) *erfüllt sind:*

(a) $\exists\ M < \infty\ :\ \|\ell_k\|_{X^*} \le M\ \forall\ k \in \mathbf{N}$.

(b) $(\ell_k(x))_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$ *ist* CAUCHY*–Folge für jedes $x$ in einer dichten Teilmenge $A \subset X$.*

*Beweis:* Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit "⇒": Wir haben gemäß Satz 3.21 die schwach* Konvergenz $\ell_k \overset{*}{\rightharpoonup} \ell$ genau dann, wenn $\ell_k(x) \to \ell(x)\ \forall\ x \in X$ vorliegt. Somit gilt insbesondere (b), und die Folge $(\ell_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ ist für jedes $x \in X$ beschränkt. Satz 3.2 vom Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit liefert dann auch (a).

Zum Beweis der Hinlänglichkeit "⇐" vermerken wir zunächst, daß für jedes $x \in A$ der punktweise Limes $\ell_k(x) \to a =: \ell(x) \in \mathbf{K}$ existiert. Wir zeigen die Fortsetzbarkeit von $\ell$ auf den Unterraum $U := \operatorname{span} A$. Dazu betrachten wir $y := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j \in U$, für welches gilt

$$\ell_k(y) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \ell_k(x_j) \to \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \ell(x_j).$$

Wird also $\ell(y) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \ell(x_j)$ gesetzt, so ist $\ell : U \to \mathbf{K}$ linear, es gilt $\ell_k(x) \to \ell(x)\ \forall\ x \in U$, und wegen (a) ist

$$|\ell(x)| \le \lim_{k\to\infty} \|\ell_k(x)\|_{X^*} \|x\|_X \le M\,\|x\|_X \quad \forall\ x \in U,$$

also $\|\ell\|_{U\to\mathbf{K}} \le M$. Da $U$ dicht in $X$ ist, existiert gemäß Satz 2.7 eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\tilde{\ell} \in X^*$ mit $\tilde{\ell}|U = \ell$ und $\|\tilde{\ell}\|_{X^*} = \|\ell\|_{U\to\mathbf{K}} \le M$. Nun muß noch $\ell_k \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\ell}$ gezeigt werden. Dazu betrachten wir $y \in X \setminus U$ und bestimmen ein $x \in A$ sowie eine Zahl $N = N(\epsilon)$ mit $\|y - x\|_X < \epsilon$ und $|\ell_k(x) - \ell(x)| < \epsilon\ \forall\ k \ge N$. Für diese $k$ ergibt sich aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |\ell_k(y) - \tilde{\ell}(y)| &\le |\ell_k(y) - \ell_k(x)| + |\ell_k(x) - \tilde{\ell}(x)| + |\tilde{\ell}(x) - \tilde{\ell}(y)| \le (\|\ell_k\|_{X^*} + \|\tilde{\ell}\|_{X^*})\|x - y\|_X + \epsilon \\ &\le (2M+1)\epsilon. \end{aligned}$$

Wir haben, wie behauptet $\ell_k \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\ell}$. □

Wir sind nun in der Lage, das angekündigte Ergebnis über die schwach* Folgenkompaktheit von $B_1(0) \subset X^*$ zu zeigen.

**Satz 3.23** *Sei $X$ ein separabler* BANACH*–Raum und $(\ell_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X^*$ mit $\|\ell_k\|_{X^*} \leq M \ \forall\, k \in \mathbf{N}$ gegeben. Dann enthält $(\ell_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine schwach* konvergente Teilfolge.*

*Beweis:* Da $X$ separabel ist, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $A \subset X$. Wendet man das Prinzip der Auswahl einer Diagonalfolge (BSP.(2.3.6)) an, so kann erreicht werden, daß eine Teilfolge $(\ell_k(x))_{k\in\mathbf{N}'} \subset \mathbf{K}$ für jedes $x \in A$ CAUCHY–Folge ist. Die Behauptung ergibt sich jetzt aus Satz 3.22. □

**Folgerung 3.7** (a) *Sei $X$ ein separabler* BANACH*–Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B_1^*(0) \subset X^*$ schwach* folgenkompakt.*

Denn für $\ell_k \in B_1^*(0)$ gilt ja $\|\ell_k\|_{X^*} \leq 1$, so daß die Behauptung aus Satz 3.23 folgt. □

(b) *Sei $X$ ein reflexiver separabler* BANACH*–Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B_1^*(0) \subset X^*$ schwach folgenkompakt.*

Denn für den reflexiven BANACH–Raum $X$ fallen schwache und schwach* Topologie auf $X^*$ zusammen. □

Ohne Beweis zitieren wir hier den folgenden Satz (man vgl. zum Beispiel F.HIRZEBRUCH/W.SCHARLAU: Einführung in die Funktionalanalysis. BI–HTB 296a*, dort Satz 13.9):

**Satz 3.24** *Sei $X$ ein normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B_1^*(0) \subset X^*$ kompakt in der schwach* Topologie.*

Dieser Satz ist allgemeingültiger als die oben bewiesene Aussage Folgerung 3.7(a), weil die Separabilität des Raumes nicht gefordert wird. Auf die schwach* Folgenkompaktheit kann aus diesem Satz nicht geschlossen werden, weil die schwach* Topologie i.a. das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt.

Wir zitieren hier aus Referenzgründen ebenfalls ohne Beweis den folgenden Satz über die Reflexivität von Teilräumen (siehe z.B. obiges Zitat F. HIRZEBRUCH/W. SCHARLAU: Lemma 14.2)

**Satz 3.25** *Sei $X$ ein reflexiver* BANACH*–Raum und $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist $M$ reflexiv.*

Wir zeigen nun mit diesem Resultat, daß die abgeschlossene Einheitskugel $B_1^*(0) \subset X$ eines reflexiven BANACH–Raumes $X$ schwach folgenkompakt ist. Das heißt, jede normbeschränkte Folge $\|x_k\|_X \leq 1$ enthält eine schwach konvergente Teilfolge $x_k \rightharpoonup x \in X$ ($N' \ni k \to \infty$). Dazu beweisen wir vorbereitend:

**Satz 3.26** (a) *Sei $X$ ein reflexiver* BANACH*–Raum. Dann ist auch $X^*$ reflexiv.*

(b) *Sei $X$ ein normierter Raum und $X^*$ separabel bezüglich der Normtopologie. Dann ist auch $X$ separabel bezüglich der Normtopologie.*

*Beweis:* (a) Wegen der gemäß Definition 3.10 bestehenden isometrischen Isomorphie $X \cong X^{**}$ müssen offenbar auch $X^*$ und $X^{***}$ isometrisch isomorph sein: $X^* \cong X^{***}$.

(b) Sei $M := \{\ell_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset X^*$ eine dichte Teilmenge und gelte ohne Einschränkung $0 \notin M$. Wir setzen $f_k := \ell_k / \|\ell_k\|_{X^*}$ sowie $M_0 := \{f_k\}_{k\in\mathbf{N}}$. Somit folgt $\overline{M_0} = B_1^*(0) \subset X^*$, und zu jedem $k \in \mathbf{N}$ kann ein $x_k \in X$ mit $\|x_k\|_X = 1$ sowie $|f_k(x_k)| \geq \frac{1}{2}$ gewählt werden. Der Unterraum $A := \operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbf{N}\}$

ist nun dicht in $X$. Um dies einzusehen, nehmen wir $\overline{A} \subsetneq X$ an. Dann existiert ein $x_0 \in X \setminus \overline{A}$ mit $\|x_0\|_X = 1$ und $\delta := \operatorname{dist}(x_0, \overline{A}) > 0$. Wir setzen $M_1 := \overline{A} \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$ und definieren $\ell \in M_1^*$ gemäß

$$\ell(x) := \lambda\delta \quad \forall\, x = y + \lambda x_0 \,:\, y \in \overline{A},\ \lambda \in \mathbf{K}.$$

Es folgt $\ell|\overline{A} = 0$ sowie

$$|\ell(x)| = |\lambda| \inf_{z\in\overline{A}} \|z - x_0\|_X \le \|y + \lambda x_0\|_X = \|x\|_X \quad \forall\, x \in M_1,$$

also $\|\ell\|_{M_1\to\mathbf{K}} \le 1$. Wegen Satz 3.12 können wir das Funktional $\ell/\|\ell\|_{M_1\to\mathbf{K}}$ fortsetzen zu einem $L \in X^*$ mit $L|\overline{A} = 0$ und $\|L\|_{X^*} = 1$. Zu $L$ gibt es einen Index $N \in \mathbf{N}$ mit $\|L - f_N\|_{X^*} < \frac{1}{2}$. Aus $f_N(x_N) = (f_N - L)(x_N) + L(x_N)$ ergibt sich wegen $L(x_N) = 0$ der Widerspruch

$$\frac{1}{2} \le |f_N(x_N)| \le |(f_N - L)(x_N)| \le \|f_N - L\|_{X^*} < \frac{1}{2}.$$

Somit ist $\overline{A} = X$, und die gesuchte dichte Menge in $X$ ist dann:

$$\operatorname{span}_{\mathbf{Q}}\{x_k \,:\, k \in \mathbf{N}\} := \Big\{ \sum_{j=1}^{N} (\alpha_j + i\beta_j)\, x_j \,:\, \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{Q},\ N \in \mathbf{N} \Big\}.$$

Wir haben alles bewiesen. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem angekündigten Ergebnis über die schwache Folgenkompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel in reflexiven BANACH–Räumen.

**Satz 3.27** *Sei $X$ ein reflexiver* BANACH*–Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B_1^*(0) \subset X$ schwach folgenkompakt:*

$$\boxed{\forall\, (x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset B_1^*(0)\ \exists\ \textit{Teilfolge}\ \mathbf{N}' \subset \mathbf{N}\ \exists\, x \in X \,:\, \lim_{k\in\mathbf{N}'} \ell(x_k) = \ell(x)\ \ \forall\, \ell \in X^*.}$$

*Beweis:* Sei $X$ und somit auch $X^{**}$ zunächst separabel. Nach Satz 3.26 ist dann auch $X^*$ separabel und reflexiv. Wegen Folgerung 3.7(b) muß die abgeschlossene Einheitskugel $B_1^*(0) \subset X^{**}$ schwach folgenkompakt sein, und dies gilt wegen der isometrischen Isomorphie $X \cong X^{**}$ auch für $B_1^*(0) \subset X$.

Im allgemeinen Fall sei $M$ der abgeschlossene Unterraum $M := \overline{\operatorname{span}\{x_k \,:\, k \in \mathbf{N}\}}$, wenn die Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset B_1^*(0) \subset X$ vorgegeben ist. Dann ist $M$ separabel und gemäß Satz 3.25 reflexiv. Nach dem oben Gesagten ist $M$ schwach folgenkompakt. □

---

## 3.7 Der Satz von BANACH–SAKS

In einem BANACH–Raum kann eine schwach konvergente Folge durch Konvexkombination zu einer stark konvergenten Folge rearrangiert werden. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 3.28 (von BANACH–SAKS)**
*Sei $X$ ein* BANACH*–Raum und $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ schwach konvergent gegen $x \in X$: $x_k \rightharpoonup x$. Dann gibt es eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ aus konvexen Linearkombinationen der Menge $S := \{x_1, x_2, \ldots\}$ mit $y_k \to x$.*

*Beweis:* Die konvexe Hülle $\mathrm{co}\,(S)$ der Menge $S$ ist gemäß Folgerung 2.10(b) konvex. Wäre $x$ kein Berührpunkt von $\mathrm{co}\,(S)$ bezüglich der Normtopologie, so wäre $\delta := \mathrm{dist}\,(x, \mathrm{co}\,(S)) > 0$. Auf die beiden Mengen $\mathrm{co}\,(S)$ und $B_{\delta/2}(x)$ wenden wir den Trennungssatz 3.16 an: Es gibt ein $L \in X^*$ mit $L(\mathrm{co}\,(S)) \cap L(B_{\delta/2}(0)) = \emptyset$. Wegen $x_k \in \mathrm{co}\,(S)$ kann nunmehr nicht $L(x_k) \to L(x)$ gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung $x_k \rightharpoonup x$. □

**BSP. (3.7.1)** Satz 3.28 wird falsch, wenn schwache Konvergenz durch schwach* Konvergenz ersetzt wird. Wir betrachten als Beispiel den nichtreflexiven BANACH–Raum $X := c_0(\mathbf{N})$ mit seinem Dual $X^* = \ell^1$. Für die Folge $(e_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X^*$ der Standardbasisvektoren gilt ja gemäß BSP.(3.5.5) die schwach* Konvergenz $e_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, aber es ist $\|y_k\|_{\ell^1} = 1$ für jede konvexe Linearkombination $y_k$ der $e_k$. Es kann $y_k \to 0$ für solche $y_k$ nicht gelten.

**BSP. (3.7.2)** In einem HILBERT–Raum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist eine schwach konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ auch normkonvergent zum selben Grenzwert $x \in X$, wenn $\|x_k\|_X \to \|x\|_X$ gilt. Denn aus $\langle x_k, y\rangle \to \langle x, y\rangle \ \forall\, y \in X$ folgt ja

$$\|x_k - x\|_X^2 = \langle x_k - x, x_k - x\rangle = \|x_k\|_X^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x_k, x\rangle + \|x\|_X^2 \to \|x\|_X^2 - 2\|x\|_X^2 + \|x\|_X^2 = 0.$$

**Bemerkung 3.2** In ihrer Arbeit "*Sur la convergence forte dans les champs $L^p$*", Studia Math. **2** (1930), pp.51–57, haben S. BANACH/S. SAKS die folgende Version des Satzes 3.28 bewiesen:

**Satz 3.29** *Sei $X$ einer der* BANACH*-Räume $L^p(0,1)$ oder $\ell^p$, $1 < p < \infty$, und sei $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ schwach konvergent gegen $x \in X$. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j\in\mathbf{N}}$, so daß die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{k_j}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ normkonvergent gegen $x$ ist.*

Es ist bekannt, daß dieser Satz zum Beispiel im Raum $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ nicht gilt, während er in jedem HILBERT–Raum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wahr ist. Mit den Funktionenräumen $L^p$ werden wir uns im nächsten Kapitel auseinandersetzen.

# Kapitel 4

# Die Lebesgue–Räume $L^p(\Omega)$

## 4.1 Maße

Ein wichtiger Grundbegriff der Integrationstheorie ist der Begriff des **Maßes**. Dieser Begriff verallgemeinert den aus der elementargeometrischen Anschauung gewonnenen Begriff des *Volumens* (bzw. der *Fläche* oder der *Länge*) im euklidischen Vektorraum $\mathbf{R}^n$. Wir empfehlen hier, sich nochmals die Grundbegriffe der elementaren Mengenlehre aus Abschnitt 0.1 in Erinnerung zu rufen. Für das Folgende spielt der Begriff der *Mengenalgebra* eine zentrale Rolle.

**Definition 4.1** *Ein System von Teilmengen $\mathcal{A}$ einer nichtleeren Menge $\Omega$ heiße eine* **Mengenalgebra** *über $\Omega$ :$\Leftrightarrow$*

$$\boxed{\text{(A1) } \Omega \in \mathcal{A}, \qquad \text{(A2) } A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}, \qquad \text{(A3) } A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{A}.}$$

Wir werden zeigen, daß in einer Mengenalgebra die üblichen Mengenoperationen uneingeschränkt durchführbar sind. Dazu sei daran erinnert, daß auf einem Mengensystem $A_k \in \mathcal{P}(\Omega),\ k \in I$, die DE MORGANschen Formeln gelten:

$$\boxed{\Big(\bigcap_{k\in I} A_k\Big)^c = \bigcup_{k\in I} A_k^c, \qquad \Big(\bigcup_{k\in I} A_k\Big)^c = \bigcap_{k\in I} A_k^c.} \tag{1.1}$$

**Satz 4.1** *Ist $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra über $\Omega$, so gilt stets:*

$$\boxed{\text{(a) } \emptyset \in \mathcal{A}, \qquad \text{(b) } A \cap B \in \mathcal{A} \ \forall\, A, B \in \mathcal{A}, \qquad \text{(c) } A \setminus B \in \mathcal{A} \ \forall\, A, B \in \mathcal{A}.}$$

(d) *Für jede* **endliche** *Indexmenge $I \subset \mathbf{N}$ gilt*

$$\boxed{A_k \in \mathcal{A}\ \forall\, k \in I \;\Rightarrow\; \Big(\bigcup_{k\in I} A_k\Big) \in \mathcal{A}, \quad \Big(\bigcap_{k\in I} A_k\Big) \in \mathcal{A}.}$$

*Beweis:* Aussage (a) folgt wegen $\emptyset = \Omega^c$ aus (A1) und (A2). Aussage (b) folgt auf Grund der Identität $A \cap B \overset{(1.1)}{=} (A^c \cup B^c)^c$ mit den Axiomen (A2) und (A3). Aussage (c) ergibt sich wegen

$A \setminus B \overset{(\mathrm{Ko})}{=} A \cap B^c$ aus (A2) und (b). Schließlich erhält man die erste Aussage in (d) induktiv aus (A3), während die zweite Aussage mit (A2) aus (1.1) folgt. □

In der Aussage (d) ist die **Endlichkeit** der Indexmenge $I$ **wesentlich**. Für $I = \mathbf{N}$ wird (d) i.a. falsch. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll:

**Definition 4.2** *Eine Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über $\Omega$ heiße eine* $\sigma$**–Algebra** *über $\Omega$* $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{(\mathrm{A4}) \quad A_k \in \mathcal{A} \ \forall\, k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \in \mathcal{A}.} \tag{1.2}$$

Wegen (1.1) gilt in einer $\sigma$–Algebra stets auch

$$\boxed{A_k \in \mathcal{A} \ \forall\, k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \in \mathcal{A}.} \tag{1.3}$$

**BSP. (4.1.1)** Für eine beliebige Menge $\Omega$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ stets eine $\sigma$–Algebra.

---

Auf einer $\sigma$–Algebra $\mathcal{A}$ über $\Omega$ ist nun ein *Maßbegriff* erklärbar.

**Definition 4.3** *Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$–Algebra über $\Omega$.*

- *Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heiße ein* **positives** $\sigma$**–additives Maß** (*kurz: ein* **Maß**) *auf $\mathcal{A}$* $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{(\mathrm{M1}) \ \mu(A) \geq 0 \ \forall\, A \in \mathcal{A},} \qquad \textbf{Positivität}$$

$$\boxed{(\mathrm{M2}) \ \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ \forall\, A_k \in \mathcal{A} \ \textit{mit} \ A_j \cap A_k = \emptyset \ \textit{für} \ j \neq k} \quad \sigma\textbf{–Additivität}$$

- *Jedes $A \in \mathcal{A}$ heiße eine* $\mu$**–meßbare** *Menge.*

Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, werden wir die $\mu$–meßbaren Mengen kurz **meßbar** nennen. Um Trivialitäten zu vermeiden, gelte $\mu(A) < \infty$ für wenigstens ein $A \in \mathcal{A}$. Aus (M2) folgt dann wegen $A = \emptyset \cup A$:

$$\boxed{\mu(\emptyset) = 0.} \tag{1.4}$$

**Definition 4.4** *Eine $\sigma$–Algebra $\mathcal{A}$ über $\Omega$ zusammen mit einem Maß $\mu$ bildet einen* **Maßraum** $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

- *Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heiße* **vollständig**, *wenn gilt:*

$$\boxed{(\mathrm{M3}) \ N \in \mathcal{A} \ \textit{mit} \ \mu(N) = 0 \ \textit{und} \ A \subset N \ \Rightarrow \ A \in \mathcal{A}} \qquad \textbf{Vollständigkeit}$$

- *Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heiße $\sigma$–***finit**, *wenn $\mu$ ein $\sigma$–***finites Maß** *ist, das heißt, wenn gilt:*

$$\boxed{\text{(M4)}\ \exists\ \textit{Teilsystem}\ \Omega_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbf{N}\ :\ \mu(\Omega_k) < \infty\ \textit{und}\ \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k\Big) = \Omega} \quad \sigma\textbf{–Finitheit}$$

- *Insbesondere heiße ein Maß $\mu$* **endlich**, *wenn $\mu(\Omega) < \infty$ gilt.*

Beim Rechnen mit dem Funktionswert $\infty$ eines Maßes geht man von folgenden Vereinbarungen aus, die für jede Zahl $r \geq 0$ gelten sollen:

$$r < \infty, \quad r + \infty = \infty, \quad \infty \leq \infty, \quad \infty + \infty = \infty.$$

---

In einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gelten die folgenden Aussagen für nicht disjunkte Teilmengen:

**Satz 4.2** *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt stets:*

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)\ \forall\ A, B \in \mathcal{A}$.

(b) $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$. **Monotonie**

(c) $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A)\ \forall\ A \in \mathcal{A}$, *sofern $\mu$ endlich ist.*

*Beweis:* (a) Mit der Setzung $C := A \cap B$ gelten die beiden disjunkten Zerlegungen

$$A \cup B = A \cup (B \setminus C), \qquad C \cup (B \setminus C) = B,$$

auf die das Maßaxiom (M2) zutrifft:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus C), \qquad \mu(C) + \mu(B \setminus C) = \mu(B).$$

Addition beider Gleichungen liefert nach Kürzung von $\mu(B \setminus C)$ die behauptete Relation.

(b) Aus (M1) und (M2) folgt unter Verwendung der disjunkten Zerlegung $B = A \cup (B \setminus A)$ schon

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(c) Klar, wegen $\Omega = A \cup A^c$ gilt $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c)$. □

Die folgenden Beispiele geben gebräuchliche Maße der Analysis an.

**BSP. (4.1.2)** **Diskretes Maß.** Es seien $\Omega := \mathbf{N}$ und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\mathbf{N})$. Versehen mit dem Maß

$$\mu(A) := \operatorname{card} A = \text{Anzahl der Elemente von } A, \quad A \in \mathcal{A},$$

ist $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu)$ ein vollständiger $\sigma$–finiter Maßraum.

**BSP. (4.1.3)** DIRAC**–Maß.** Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Sei ferner $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Für jedes feste $x \in \Omega$ ist ein endliches Maß in der folgenden Weise definiert:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1\ :\ x \in A, \\ 0\ :\ \text{sonst}, \end{cases} \qquad A \in \mathcal{A}.$$

---

## 4.2 Das LEBESGUE–Maß auf $\mathbf{R}^n$

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion eines $\sigma$–finiten Maßes über dem euklidischen Vektorraum $\mathbf{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,:\, x_j \in \mathbf{R},\ j = 1, 2, \ldots, n\}$. Wir gehen dabei von der elementargeometrischen Tatsache aus, daß jedem beschränkten (offenen, abgeschlossenen oder halboffenen) Intervall $I \subset \mathbf{R}$ mit Anfangspunkt $a$ und Endpunkt $b \geq a$ $(a, b \in \mathbf{R})$, ein **Längenmaß** $\lambda(I) := b - a \geq 0$ zugeordnet ist. Insbesondere werden die leere Menge $\emptyset = (a, a)$ und die einpunktige Menge $\{a\} = [a, a]$ als Intervalle bezeichnet. Für $n > 1$ und $a, b \in \mathbf{R}^n$ setzen wir

$$a \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad a_j \leq b_j \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, n.$$

**Definition 4.5** *Intervalle in* $\mathbf{R}^n$*:*

- *Ein* **Intervall** $I := I_{a,b} \subset \mathbf{R}^n$, $a \leq b$, *ist das cartesische Produkt* $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ *von* $n$ *Intervallen* $I_j \subset \mathbf{R}$, *wobei* $I_j$ *Anfangs– und Endpunkt* $a_j$ *bzw.* $b_j$ *besitze*

- *Ein* **offenes** (*bzw.* **abgeschlossenes**) *Intervall* $I_{a,b} \subset \mathbf{R}^n$ *ist die Menge*

  $$I_{a,b} := \{x \,:\, a_j < x_j < b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\} \quad (bzw.\ \{x \,:\, a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}).$$

Wir setzen

$$\mathcal{J} := \{I = I_{a,b} \subset \mathbf{R}^n \,:\, a, b \in \mathbf{R}^n \ \wedge\ a \leq b\}, \qquad \mathcal{J}_0 := \{I \in \mathcal{J} \,:\, I \text{ offenes Intervall}\},$$

und definieren eine Abbildung $\lambda : \mathcal{J} \to [0,\ \infty)$ durch das elementargeometrische **Quadervolumen**

$$\boxed{\lambda(I) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j), \qquad I = I_{a,b} \in \mathcal{J}.} \tag{2.1}$$

Es gilt insbesondere $\lambda(I) = 0$, falls $I = \emptyset$ oder falls $a_j = b_j$ wenigstens für einen Index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Beliebige Teilmengen $A \subset \mathbf{R}^n$ können durch abzählbar viele Intervalle überdeckt werden:

$$\boxed{A \subset \mathbf{R}^n \quad \Rightarrow \quad \exists\ (I_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{J} \,:\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.} \tag{2.2}$$

Diese Elementareigenschaft des $\mathbf{R}^n$ macht folgende Definition sinnvoll:

**Definition 4.6** *Die Abbildung* $m^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, \infty]$ *mit*

$$\boxed{m^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) \,:\, I_k \in \mathcal{J}, k \in \mathbf{N} \ \wedge\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Big\}, \qquad A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n),}$$

*heiße* **äußeres** LEBESGUE–**Maß** *auf* $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$.

Wir fordern hier nicht, daß die Intervalle $I_k \in \mathcal{J}$ der Überdeckung (2.2) paarweise disjunkt sind. Da jedes Intervall $I \in \mathcal{J}$ sich selbst überdeckt, gilt trivialerweise $m^*(I) \leq \lambda(I)$ und allgemeiner $m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k)$, falls für $A$ die Überdeckung (2.2) vorliegt. Wir werden weiter unten in Satz 4.8 sogar zeigen:

$$\boxed{m^*(I) = \lambda(I) \ \forall\ I \in \mathcal{J}.} \tag{2.3}$$

Das äußere LEBESGUE–Maß $m^*$ erfüllt im allgemeinen nicht das Maßaxiom (M2) der $\sigma$–Additivität; es ist jedoch **subadditiv** und **monoton**:

**Satz 4.3** *Für das äußere* LEBESGUE–*Maß* $m^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, \infty]$ *gelten:*

(a) $A_k \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n),\ k \in \mathbf{N} \ \Rightarrow\ m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k).$ **Subadditivität**

(b) $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ *und* $A \subset B \ \Rightarrow\ m^*(A) \leq m^*(B).$ **Monotonie**

(c) $m^*(A)$ *ändert sich nicht bei Beschränkung der* Def. 4.6 *auf offene Intervalle* $I_k \in \mathcal{J}_0$.

(d) *Zu jeder Teilmenge* $A \subset \mathbf{R}^n$ *und jeder Zahl* $\epsilon > 0$ *existiert eine offene Menge* $G \supset A$ *mit*

$$\boxed{m^*(G) < m^*(A) + \epsilon.} \tag{2.4}$$

*Beweis:* (a) Es sei $\epsilon > 0$ fest. Dann existieren zu jedem Index $k \in \mathbf{N}$ gemäß Definition 4.6 Intervalle $I_{jk} \in \mathcal{J}, j \in \mathbf{N}$, mit

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{jk}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_{jk}) < m^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Da die Menge $\{I_{jk} : j \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{N}\}$ abzählbar ist, stellt nun $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{jk}$ eine abzählbare Überdeckung der Menge $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ dar, und es folgt aus Definition 4.6:

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_{jk}) < \sum_{k=1}^{\infty} \Big(m^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig wählbar war, folgt daraus schon die behauptete Subadditivität.

(b) Auf Grund der disjunkten Zerlegung $B = A \cup (B \setminus A)$ existiert sicher zu jeder Überdeckung $B \subset \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I_k$, $I_k \in \mathcal{J}$, eine Teilüberdeckung $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ mit $A \subset \bigcup_{k \in \mathbf{N}'} I_k$. Deshalb folgt aus Def. 4.6:

$$m^*(B) = \inf\Big\{ \sum_{k \in \mathbf{N}} \lambda(I_k) : I_k \in \mathcal{J}, k \in \mathbf{N} \ \wedge\ B \subset \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I_k \Big\} \geq \inf\Big\{ \sum_{k \in \mathbf{N}'} \lambda(I_k) \Big\} \geq m^*(A).$$

(c) Durch die Einschränkung auf offene Intervalle kann das Infimum in Definition 4.6 offenbar nicht verkleinert werden. Andererseits kann für festes $\epsilon > 0$ zu jedem Intervall $I_k \in \mathcal{J}$ stets ein offenes Intervall $I_k' \in \mathcal{J}_0$ gefunden werden mit $I_k \subset I_k'$ und $\lambda(I_k') - \lambda(I_k) < \epsilon\, 2^{-k}$. Daraus folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k') - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda(I_k') - \lambda(I_k)) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k') - \epsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) - \epsilon,$$

und somit nach Addition von $\epsilon$ auf allen Seiten der obigen Ungleichungskette unter Verwendung der Definition 4.6:

$$m^*(A) + \epsilon \geq \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k') \Big\} \geq m^*(A).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig wählbar war, folgt daraus schon die behauptete Aussage.

(d) Sei $\epsilon > 0$ wiederum fest. Wegen (c) existieren dann gemäß Definition 4.6 offene Intervalle $I_k \in \mathcal{J}_0$, $k \in \mathbf{N}$, mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k =: G, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < m^*(A) + \epsilon.$$

Nun ist $G$ eine offene Teilmenge, und aus (a) folgern wir noch

$$m^*(G) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < m^*(A) + \epsilon.$$

Das war zu zeigen. □

---

Für die nächste Definition beachten wir, daß die Differenz $A \setminus B = A \cap B^c$ auch dann sinnvoll erklärt ist, wenn $B \not\subset A$ gilt.

**Definition 4.7** *Eine Menge $A \subset \mathbf{R}^n$ heiße* **meßbar** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A) \ \forall\, I \in \mathcal{J}.} \tag{2.5}$$

*Eine* **Nullmenge** $N \subset \mathbf{R}^n$ *ist eine Menge mit* $m^*(N) = 0$.

Wir zeigen nun in mehreren Schritten, daß das äußere LEBESGUE–Maß $m^*$ zusammen mit der Menge

$$\boxed{\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \,:\, A \text{ meßbar}\}}$$

einen vollständigen $\sigma$–finiten Maßraum $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m^*)$ bildet. Die Einschränkung $m := m^*|\mathcal{A}$ von $m^*$ auf $\mathcal{A}$ heißt dann LEBESGUE–**Maß** in $\mathbf{R}^n$. Wir beginnen mit folgender Hilfsaussage:

**Satz 4.4** *Es sei $A \in \mathcal{A}$ fest. Dann gilt für jede (meßbare oder nicht meßbare) Teilmenge $B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$:*

$$\boxed{m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A).} \tag{2.6}$$

*Beweis:* Es sei $\epsilon > 0$ fest, und es sei $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k \in \mathcal{J}$, eine Überdeckung von $B$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < m^*(B) + \epsilon.$$

Es gilt $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$, und somit

$$\begin{aligned} m^*(B) &\overset{\text{Satz 4.3(a)}}{\leq} m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A) \\ &\overset{\text{Satz 4.3(b)}}{\leq} m^*\Big((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \cap A\Big) + m^*\Big((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \setminus A\Big) \\ &\overset{\text{Satz 4.3(a)}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} (m^*(I_k \cap A) + m^*(I_k \setminus A)) \overset{(2.5)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < m^*(B) + \epsilon. \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig wählbar war, folgt hieraus schon die Gleichung (2.6). □

**Folgerung 4.1** *Zu jeder meßbaren Menge $A \in \mathcal{A}$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $G \supset A$ mit $m^*(G \setminus A) < \epsilon$.*

Denn wird in (2.6) die offene Teilmenge $B := G \supset A$ so gewählt, daß (2.4) gilt, so erhält man

$$m^*(A) + m^*(G \setminus A) = m^*(G) < m^*(A) + \epsilon.$$

Kürzung von $m^*(A)$ auf beiden Ungleichungsseiten liefert die Behauptung. □

Weitere Eigenschaften von $m^*$ sind im folgenden Satz aufgelistet.

**Satz 4.5** (a) $m^*$ *ist* **additiv** *auf endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter meßbarer Mengen.*

(b) $A \subset \mathbf{R}^n$ *ist meßbar* $\Leftrightarrow$ $A^c$ *ist meßbar.*

(c) *Sind $A, B \in \mathcal{A}$, also meßbar, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$.*

*Beweis:* (a) Wir betrachten paarweise disjunkte Mengen $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Für je zwei disjunkte Mengen $A \in \mathcal{A}$ und $G \subset \mathbf{R}^n$ folgt aus (2.6), indem wir dort $B := A \cup G$ setzen:

$$m^*(A \cup G) = m^*(A) + m^*(G).$$

Hieraus ergibt sich induktiv:

$$\begin{aligned} m^*(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r) &= m^*(A_1) + m^*(A_2 \cup \cdots \cup A_r) \\ &= m^*(A_1) + m^*(A_2) + m^*(A_3 \cup \cdots \cup A_r) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= m^*(A_1) + m^*(A_2) + \cdots + m^*(A_r). \end{aligned}$$

(b) Wegen $I \setminus A = I \cap A^c$ und $I \cap A = I \setminus A^c$ gehen die Mengen $A$ und $A^c$ symmetrisch in (2.5) ein.

(c) Die disjunkte Zerlegung $I = (I \cap (A \cup B)) \cup (I \setminus (A \cup B))$ gilt für jedes $I \in \mathcal{J}$, wobei wir haben:

$$\begin{aligned} I \setminus (A \cup B) &= I \cap (A \cup B)^c = I \cap A^c \cap B^c = (I \setminus A) \setminus B, \\ I \cap (A \cup B) &= I \cap (A \cup A^c) \cap (A \cup B) = I \cap (A \cup (A^c \cap B)) \\ &= (I \cap A) \cup (I \cap A^c \cap B) = ((I \cap A) \cap (B \cup B^c)) \cup ((I \setminus A) \cap B) \\ &= ((I \cap A) \cap B) \cup ((I \cap A) \setminus B) \cup ((I \setminus A) \cap B). \end{aligned}$$

Somit folgt aus der Subadditivität von $m^*$:

$$\begin{aligned} m^*(I) &\leq m^*(I \cap (A \cup B)) + m^*(I \setminus (A \cup B)) \\ &\leq m^*((I \cap A) \cap B)) + m^*((I \cap A) \setminus B)) + m^*((I \setminus A) \cap B)) + m^*((I \setminus A) \setminus B)) \\ &\overset{(2.6)}{=} m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A) = m^*(I). \end{aligned}$$

Also gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$ gemäß Definition 4.7. Wegen $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ ergibt sich unter Verwendung von (b) nun auch $A \cap B \in \mathcal{A}$. □

**Folgerung 4.2** (a) $\mathbf{R}^n$ *ist meßbar,* $\mathbf{R}^n \in \mathcal{A}$.

Denn wird in (2.5) $A := \mathbf{R}^n$ gesetzt, so folgt wegen $I \cap \mathbf{R}^n = I$ und $I \setminus \mathbf{R}^n = \emptyset$ die Gleichheit

$$m^*(I) = m^*(I \cap \mathbf{R}^n) + m^*(I \setminus \mathbf{R}^n) \ \forall\, I \in \mathcal{J}.$$

(b) $\mathcal{A}$ *ist eine Mengenalgebra über* $\mathbf{R}^n$.

Denn wegen Satz 4.5(b und c) sind auch die Axiome (A2) und (A3) erfüllt. □

Im nächsten Satz wird gezeigt, daß $\mathcal{A}$ eine $\sigma$–Algebra ist, auf der das äußere LEBESGUE–Maß $m^*$ $\sigma$–additiv ist.

**Satz 4.6** *Auf der Mengenalgebra* $\mathcal{A}$ *über* $\mathbf{R}^n$ *gilt das Axiom* (A4)*, und* $m^* : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *ist ein positives* $\sigma$*–additives Maß.*

*Beweis:* Die meßbaren Mengen $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbf{N}$, seien paarweise disjunkt. Wir setzen $B_r := \bigcup_{k=1}^{r} A_k$ sowie $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Aus der Subadditivität von $m^*$ ergibt sich

$$m^*(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k),$$

und wegen $B \supset B_r$ folgt aus den Sätzen 4.3(b) und 4.5(a)

$$m^*(B) \geq m^*(B_r) = \sum_{k=1}^{r} m^*(A_k) \ \forall\, r \in \mathbf{N},$$

also schließlich die $\sigma$–Additivität (M2), nämlich $m^*(B) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$. Die Positivität (M1) ist gemäß Definition sichergestellt.
Es bleibt die Meßbarkeit der Menge $B$ zu zeigen. Wegen $B_r \subset B$ gilt ja für jedes Intervall $I \in \mathcal{J}$ die Inklusion $I \setminus B = I \cap B^c \subset I \cap B_r^c$, und somit

$$\begin{aligned} m^*(I) &\leq m^*(I \cap B) + m^*(I \setminus B) \leq m^*(I \cap B_r) + m^*(I \cap (B \setminus B_r)) + m^*(I \setminus B_r) \\ &\leq m^*(I) + \sum_{k=r+1}^{\infty} m^*(I \cap A_k). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir die Identität $I \cap (B \setminus B_r) = I \cap \Big( \bigcup_{k=r+1}^{\infty} A_k \Big) = \bigcup_{k=r+1}^{\infty} (I \cap A_k)$ verwendet.

Nun konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(I \cap A_k)$, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{r} m^*(I \cap A_k) = m^*\Big(I \cap (\bigcup_{k=1}^{r} A_k)\Big) \leq m^*(I) < \infty \ \forall\, r \in \mathbf{N}.$$

Demzufolge existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $r \in \mathbf{N}$ mit $\sum_{k=r+1}^{\infty} m^*(I \cap A_k) < \epsilon$, und wir erschließen

$$m^*(I) \leq m^*(I \cap B) + m^*(I \setminus B) < m^*(I) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig wählbar war, folgt daraus die Meßbarkeit von $B$.
Sind die Mengen $A_k$ nicht paarweise disjunkt, so setzen wir

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k$$

mit $A'_1 := A_1$, $A'_2 := A_2 \setminus A_1$, $A'_3 := (A_3 \setminus A_2) \setminus A_1$, usw. Die Mengen $A'_k$ sind dann meßbar und paarweise disjunkt; die Meßbarkeit von $B$ folgt wie gezeigt. Es gilt also das Axiom (A4). □

**Folgerung 4.3** *Das Tripel* $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m^*)$ *bildet einen* **Maßraum**.

Die Meßbarkeit von Nullmengen wird im nächsten Satz gezeigt. Daraus erschließt man die Vollständigkeit des Maßraumes $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m^*)$.

**Satz 4.7** (a) *Die Nullmengen* $N \subset \mathbf{R}^n$ *sind meßbar.*
(b) *Der Maßraum* $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m^*)$ *ist vollständig.*

*Beweis:* (a) Die Teilmenge $N \subset \mathbf{R}^n$ erfülle $m^*(N) = 0$. Verwenden wir für $I \in \mathcal{J}$ die disjunkte Zerlegung $I = (I \cap N) \cup (I \setminus N)$ mit $I \cap N \subset N$ und $I \setminus N \subset I$, so erhalten wir auf Grund der Monotonie, Satz 4.3(b):

$$m^*(I) \leq m^*(I \cap N) + m^*(I \setminus N) \leq m^*(N) + m^*(I) = m^*(I).$$

Dies bedeutet Meßbarkeit von $N$ gemäß Definition 4.7.

(b) Für festes $N \in \mathcal{A}$ mit $m^*(N) = 0$ und für jede Teilmenge $A \subset N$ gilt wiederum wegen der Monotonie $m^*(A) \leq m^*(N) = 0$. Also ist $A$ gemäß (a) meßbar, und wir haben das Axiom der Vollständigkeit (M3) bewiesen. □

Es bleibt noch die $\sigma$–Finitheit des Maßraumes $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m^*)$ zu zeigen. In einem ersten Schritt wird die Meßbarkeit von Intervallen bewiesen:

**Satz 4.8** *Jedes (beschränkte oder unbeschränkte) Intervall* $B \subset \mathbf{R}^n$ *ist meßbar, und es gilt* $m^*(B) = \lambda(B)$ *für beschränkte Intervalle.*

*Beweis:* Zunächst sei $B$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall. Gemäß Satz 4.3(c) finden wir zu festem $\epsilon > 0$ stets eine Folge offener Intervalle $I_k \in \mathcal{J}_0$, $k \in \mathbf{N}$, mit $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $m^*(B) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) - \epsilon$. Da $B$ kompakt ist, überdecken nach dem Satz von HEINE–BOREL bereits endlich viele Intervalle die Menge $B$: $B \subset \bigcup_{k \in \mathbf{N}'} I_k$, $\operatorname{card} \mathbf{N}' < \infty$. Da $B$ ein Intervall ist, ergibt sich nun aus Definition 4.6:

$$m^*(B) \le \lambda(B) \le \lambda\Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}'} I_k\Big) \le \sum_{k\in\mathbf{N}'} \lambda(I_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < m^*(B) + \epsilon.$$

Hier haben wir die elementargeometrische Tatsache benutzt, daß das Quadervolumen $\lambda(I_{a,b})$ auf endlich vielen Intervallen bereits subadditiv und monoton ist. Weil nun $\epsilon > 0$ beliebig wählbar war, folgern wir bereits $m^*(B) = \lambda(B)$.

Eine weitere elementargeometrische Tatsache ist die Additivität des Quadervolumens für disjunkte Intervalle

$$J_1, J_2 \in \mathcal{J} \text{ und } J_1 \cap J_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \lambda(J_1 \cup J_2) = \lambda(J_1) + \lambda(J_2). \tag{2.7}$$

Trivialerweise gilt auch die Ungleichung $m^*(J_i) \le \lambda(J_i)$, $i = 1, 2$. Wir verwenden diese Eigenschaften im nächsten Schritt, in welchem $B \subset \mathbf{R}^n$ ein beliebiges Intervall sei. Wir fixieren ein $I \in \mathcal{J}$. Dann existiert zu festem $\epsilon > 0$ stets eine Folge $I_k \in \mathcal{J}$ mit $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $m^*(I) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) - \epsilon$. Wir verwenden die disjunkten Zerlegungen $I = (I \cap B) \cup (I \setminus B)$, ferner $I_k = (I_k \cap B) \cup (I_k \setminus B) =: J_{1k} \cup J_{2k}$ für jedes $k \in \mathbf{N}$ mit $J_{1k}, J_{2k} \in \mathcal{J}$, und erschließen aus der Subadditivität und der Monotonie von $m^*$:

$$\left.\begin{aligned} m^*(I) &\le m^*(I \cap B) + m^*(I \setminus B) \\ &\le m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cap B)\Big) + m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \setminus B)\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(m^*(J_{1k}) + m^*(J_{2k})\right) \\ &\overset{(2.7)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_{1k} \cup J_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < m^*(I) + \epsilon. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Da aber $\epsilon > 0$ beliebig wählbar war, ergibt sich gemäß Definition 4.7 die Meßbarkeit von $B$.

Weiterhin sei $I \in \mathcal{J}$ ein fixiertes Intervall. Dann existiert zu $\epsilon > 0$ sicher ein kompaktes Intervall $B \in \mathcal{J}$ mit $B \subset I$ und $\lambda(I) \le \lambda(B) + \epsilon$. Wegen $B = I \cap B$ und $m^*(B) = \lambda(B)$ resultiert mit derselben Rechnung wie in (2.8):

$$m^*(I) \le \lambda(I) \le \lambda(B) + \epsilon = m^*(B) + \epsilon \le m^*(I \cap B) + m^*(I \setminus B) + \epsilon \overset{(2.8)}{=} m^*(I) + \epsilon.$$

Somit folgt schließlich auch $m^*(I) = \lambda(I)$ $\forall\, I \in \mathcal{J}$. □

**Folgerung 4.4** (a) *Im euklidischen Vektorraum $\mathbf{R}^n$ sind (beschränkte oder unbeschränkte) offene bzw. halboffene bzw. abgeschlossene Intervalle meßbar.*

Dies folgt aus Satz 4.8. □

(b) *Der Maßraum $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m^*)$ ist* **$\sigma$–finit**.

Denn für $I_k := (-k, k)$ ist $\Omega_k := I_k \times I_k \times \cdots \times I_k$, $k \in \mathbf{N}$, ein beschränktes offenes Intervall mit $\lambda(\Omega_k) = m^*(\Omega_k) = (2k)^n$. Also gilt wegen $\mathbf{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ das Axiom (M4). □

Die Frage nach der Meßbarkeit weiterer Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ beantworten wir im folgenden Satz, dem wir die Definition von BOREL–Mengen vorausschicken.

**Definition 4.8** *Es bezeichne* $\mathcal{O} := \{\Omega \subset \mathbf{R}^n : \Omega \text{ offen}\}$ *die Menge der* **offenen** *Teilmengen des* $\mathbf{R}^n$.

- *Eine Menge* $B \subset \mathbf{R}^n$ *heiße* BOREL–MENGE, *wenn* $B$ *durch abzählbar viele Mengenoperationen auf* $\mathcal{O}$ *entstanden ist. Als Mengenoperationen sind jeweils nur Vereinigung, Durchschnitt oder Komplement zulässig.*

**Satz 4.9** (a) *Eine offene Menge* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *ist die Vereinigung einer Folge von offenen Intervallen.*

(b) *Jede* BOREL*–Menge ist meßbar.*

*Beweis:* (a) Es bezeichne $\mathcal{J}_{0,\mathbf{Q}}$ die Teilmenge derjenigen offenen Intervalle $I = I_{a,b} \in \mathcal{J}_0$, deren Eckpunkte $a_j, b_j$ rationale Zahlen sind, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Wegen der Abzählbarkeit von $\mathbf{Q}$ ist auch $\mathcal{J}_{0,\mathbf{Q}}$ eine abzählbare Menge. Ist $\Omega \in \mathcal{O}$ gegeben, so existiert zu jedem $x \in \Omega$ sicher ein $I \in \mathcal{J}_0$ mit $x \in I \subset \Omega$. Da $\mathbf{Q}$ dicht in $\mathbf{R}$ liegt, existiert dann auch ein $J \in \mathcal{J}_{0,\mathbf{Q}}$ mit $x \in J \subset I$. Gelte

$$\Omega^* := \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{0,\mathbf{Q}} \wedge J \subset \Omega} J,$$

so haben wir $x \in \Omega^*$ gezeigt, also $\Omega \subset \Omega^*$. Andererseits gilt trivialerweise $\Omega^* \subset \Omega$ nach Konstruktion.

(b) Die offenen Intervalle sind gemäß Satz 4.8 meßbar und somit wegen (a) und (A4) auch jede offene Menge $\Omega \in \mathcal{O}$. Satz 4.5(a und b) liefert nun die Meßbarkeit jeder BOREL–Menge. □

**Bemerkung 4.1** (a) Die Familie der BOREL–Mengen ist die kleinste $\sigma$–Algebra, die alle offenen Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ enthält.

(b) Die offenen und die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ sind meßbar.

Wir zeigen schließlich eine Invarianz–Eigenschaft des LEBESGUE–Maßes, nämlich die Invarianz gegenüber Translationen und Rotationen einer meßbaren Menge.

**Satz 4.10** *Kongruente Teilmengen* $A, B \in \mathcal{A}$ *haben dasselbe* LEBESGUE*–Maß.*

*Beweis:* Ist $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine Translation, so folgt aus elementargeometrischer Überlegung $\lambda(\tau I) = \lambda(I)\ \forall\, I \in \mathcal{J}$. Sei also zu festem $\epsilon > 0$ eine Folge $I_k \in \mathcal{J}$ mit $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $m^*(A) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) - \epsilon$ gewählt. Dann gilt sicher

$$B := \tau A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \tau I_k, \qquad m^*(B) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\tau I_k) - \epsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) - \epsilon \geq m^*(A) - \epsilon.$$

Nun war $\epsilon > 0$ beliebig wählbar, und es folgt $m^*(B) \geq m^*(A)$. Da auch $\tau^{-1}$ eine Translation ist, gilt mit gleicher Argumentation $m^*(A) = m^*(\tau^{-1}\tau A) = m^*(\tau^{-1}B) \geq m^*(B)$, also $m^*(A) = m^*(B)$. Ist $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine nichtsinguläre lineare Abbildung, so gilt

$$m^*(\tau A) = |\det \tau| \cdot m^*(A),$$

(siehe z.B. [Craven], Prop. 6.2.4.). Da Rotationen $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ orthogonale Matrizen sind, gilt $\det \tau = \pm 1$ und *a fortiori* $m^*(B) = m^*(\tau A) = m^*(A)$. □

---

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnitts im folgenden Satz zusammen:

**Satz 4.11** *Es existiert eine $\sigma$–Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmenmgen des $\mathbf{R}^n$ und ein positives $\sigma$–additives Maß $m$ auf $\mathcal{A}$, welches* LEBESGUE–**Maß** *genannt wird, mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Jede offene Menge und somit jede* BOREL–*Menge gehört zu $\mathcal{A}$.*

(b) *Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $G \supset A$ mit $m(G \setminus A) < \epsilon$.*

(c) *Wenn $N \in \mathcal{A}$ mit $m(N) = 0$ und $A \subset N$ gegeben sind, so folgt $A \in \mathcal{A}$ und $m(A) = 0$.*

(d) *Für $a, b \in \mathbf{R}^n$ mit $a \leq b$ und $I_{a,b} := \{x : a_j \overset{<}{(=)} x_j \overset{<}{(=)} b_j \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}$ gilt $I_{a,b} \in \mathcal{A}$ sowie*

$$m(I_{a,b}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

(e) *$m$ ist invariant gegenüber Translationen und Rotationen, d.h.: Für $x \in \mathbf{R}^n$ und $A \in \mathcal{A}$ gilt $m(A) = m(x + A)$. Ist $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine orthogonale Matrix, so gilt $m(A) = m(B)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ und $B := \{y : y = Qx,\ x \in A\}$.*

(f) *$(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m)$ ist ein vollständiger $\sigma$–finiter Maßraum.*

*Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen* LEBESGUE–**meßbare Mengen**. *Mengen $N \in \mathcal{A}$ mit $m(N) = 0$ heißen* **Nullmengen**.

**Bemerkung 4.2** Den Nullmengen kommt in der Theorie eine besondere Bedeutung zu. Satz 4.11(c) besagt, daß jede Teilmenge einer Nullmenge wiederum eine Nullmenge ist. Aus dem Axiom (M2) der $\sigma$–Additivität folgt, daß die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Demzufolge ist jede **abzählbare** Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ eine Nullmenge.

**Definition 4.9** *Eine Eigenschaft $(E(x))$ gelte auf einer Menge $A \subset \mathbf{R}^n$* **fast überall** *(f.ü.):*

$$(E(x)) : x \in A \quad f.ü.,$$

*wenn es eine Nullmenge $N \subset A$ gibt, so daß $(E(x))$ für alle $x \in A \setminus N$ gilt.*

---

## 4.3 Meßbare Funktionen und der Satz von EGOROFF

Die Aussagen dieses Abschnitts gelten für jeden vollständigen $\sigma$–finiten Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, insbesondere also für den durch das LEBESGUE–Maß induzierten Maßraum $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m)$.

**Definition 4.10** *Es seien $A \in \mathcal{A}$ eine meßbare Menge und $f : A \to \overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ eine Funktion. Genau dann heiße $f$* **meßbar**, *wenn die* **Niveaumengen** *$\{x : f(x) > a\}$ zu jedem Niveau $a \in \mathbf{R}$ meßbar sind.*

**Bemerkung 4.3** Die Schreibweise der Niveaumengen wird wesentlich vereinfacht, wenn für Teilmengen $G \subset \overline{\mathbf{R}}$ die Bezeichnung

$$\boxed{f^{-1}(G) := \{x \,:\, f(x) \in G\}}$$

eingeführt wird. Meßbarkeit von $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ liegt also genau dann vor, wenn $f^{-1}(a, +\infty]$ für jedes $a \in \mathbf{R}$ meßbar ist. Wir rufen nochmals die folgenden Identitäten aus (1.2), Abschnitt 0.1 in Erinnerung, die für jede Mengenfamilie $\{G_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ gelten:

$$\left.\begin{aligned} f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(G_\lambda), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(G_\lambda), \\ f^{-1}(G_1 \setminus G_2) = f^{-1}(G_1) \setminus f^{-1}(G_2). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

**Satz 4.12** *Für $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mit $A \in \mathcal{A}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$f$ ist meßbar,*

(b) *$f^{-1}(I)$ ist meßbar für jedes offene Intervall $I \subset \mathbf{R}$ und für $I = \{\infty\}$,*

(c) *$f^{-1}[a, +\infty]$ ist meßbar für jedes $a \in \mathbf{R}$,*

(d) *$f^{-1}[-\infty, a)$ ist meßbar für jedes $a \in \mathbf{R}$,*

(e) *$f^{-1}[-\infty, a]$ ist meßbar für jedes $a \in \mathbf{R}$.*

*Beweis:* (i) Wir zeigen zunächst die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (c). Diese folgt aber wegen (3.1) aus den Relationen

$$f^{-1}[a, +\infty] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}(a - \frac{1}{k}, +\infty], \qquad f^{-1}(a, +\infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}[a + \frac{1}{k}, +\infty], \qquad a \in \mathbf{R},$$

und aus der Eigenschaft (A4) der $\sigma$–Algebra $\mathcal{A}$.

(ii) Wir zeigen die Implikation (a) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (b). Zunächst folgt die Meßbarkeit von $f^{-1}\{\infty\}$ unter Verwendung von (3.1) aus (c):

$$f^{-1}\{\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}[k, +\infty].$$

Weiter gilt wegen $(a, b) = (a, +\infty] \setminus [b, +\infty]$ auch noch

$$f^{-1}(a, b) = f^{-1}(a, +\infty] \setminus f^{-1}[b, +\infty].$$

(iii) Wir zeigen die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a). Zu $a \in \mathbf{R}$ sei $r \in \mathbf{Z}$ so gewählt, daß $r \le a < r + 1$ gilt. Dann folgt die behauptete Implikation aus

$$f^{-1}(a, +\infty] = f^{-1}\{\infty\} \cup f^{-1}(a, r + 2) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(r + k, r + 2 + k)\Big).$$

(iv) Da die Mengen $f^{-1}(a, +\infty]$ und $f^{-1}[-\infty, a]$ bzw. $f^{-1}[a, +\infty]$ und $f^{-1}[-\infty, a)$ (bezüglich $A$) komplementär sind, folgen die Äquivalenzen (a) $\Leftrightarrow$ (e) und (c) $\Leftrightarrow$ (d) aus der Äquivalenz

$$B \text{ meßbar} \quad \Leftrightarrow \quad A \setminus B \text{ meßbar},$$

die für jede Teilmenge $B \subset A$ der meßbaren Menge $A$ gilt. Klar, jede meßbare Menge $B$ impliziert $A, B \in \mathcal{A}$ und somit auch $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Ist umgekehrt $A \cap B^c$ meßbar, so auch $A \setminus (A \cap B^c) = B$.□

Für die nachfolgenden Überlegungen ist der Begriff der *Treppenfunktion* wichtig.

**Definition 4.11** *Seien $A_j \in \mathcal{A}$ meßbare Mengen und $a_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, gegebene Zahlen. Dann heiße*

$$\boxed{s(x) := \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x), \qquad x \in \Omega,} \tag{3.2}$$

*eine* **Treppenfunktion**.

**Bemerkung 4.4** (a) Die Mengen $A_j \in \mathcal{A}$ brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein. Soll jedoch eine Treppenfunktion $s(x)$ auf der Menge $A_j$ genau den Funktionswert $a_j$ annehmen, so muß $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ vorausgesetzt werden. Durch eventuellen Übergang zu den paarweise disjunkten Mengen $A_1' := A_1$, $A_2' := A_2 \setminus A_1$, $A_3' := (A_3 \setminus A_2) \setminus A_1$ usw. und entsprechender Modifikation der $a_j$ ist diese Voraussetzung stets erfüllbar.

(b) Eine Treppenfunktion (3.2) hat höchstens $2^r + 1$ Niveaumengen, nämlich die Mengen $\emptyset$, $\Omega$ sowie die $2^r - 1$ Mengen, die sich durch Vereinigung der $A_j$ bilden lassen. Da jede dieser Niveaumengen meßbar ist, muß eine Treppenfunktion stets meßbar sein.

Eine meßbare Funktion ist der punktweise Limes einer Folge von Treppenfunktionen:

**Satz 4.13** (a) *Zu jeder meßbaren nichtnegativen Funktion $f \geq 0$ gibt es eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ von Treppenfunktionen mit*

$$\boxed{0 \leq s_k(x) \leq s_{k+1}(x) \to f(x) \ \ (k \to \infty), \qquad \textit{punktweise für alle } x.} \tag{3.3}$$

*Die Konvergenz* (3.3) *heiße* **monotone Konvergenz**, *bezeichnet mit $(s_k) \uparrow f$.*

(b) *Jede meßbare Funktion ist der punktweise Limes einer Folge von Treppenfunktionen.*

*Beweis:* (a) Wir betrachten auf der Menge $A \in \mathcal{A}$ die meßbare Funktion $f : A \to [0, \infty]$ und setzen für $k \in \mathbf{N}$ und $j := 1, 2, 3, \ldots, k \cdot 2^k$:

$$s_k(x) := \begin{cases} (j-1)2^{-k} & : \ x \in A_j := \{x \in A \, : \, (j-1)2^{-k} \leq f(x) < j \cdot 2^{-k}\}, \\ k & : \ x \in A_0 := \{x \in A \, : \, k \leq f(x)\}. \end{cases}$$

Da die Funktion $f$ meßbar ist, muß die Differenz $A_j = B_{j-1} \setminus B_j$ der beiden Niveaumengen $B_i := f^{-1}[i \cdot 2^{-k}, +\infty]$ für $i = j-1, j$ ebenfalls meßbar sein. Also ist $s_k$ eine Treppenfunktion. Sei nun $x \in A$ fixiert. Gilt $s_k(x) = (j-1)2^{-k}$, so folgt entweder $s_{k+1}(x) = (2j-2)2^{-(k+1)}$ oder $s_{k+1}(x) = (2j-1)2^{-(k+1)}$. Im Falle $s_k(x) = k$ gilt entweder $s_{k+1}(x) = k$ oder $= (k+1)$ oder $= j \cdot 2^{k-1}$ für einen Index $j > k \cdot 2^{k+1}$. Stets folgt also $s_{k+1}(x) \geq s_k(x)$. Weiterhin haben wir für $k \geq f(x)$:

$$0 \leq f(x) - s_k(x) \begin{cases} = 0 & : \ k = f(x), \\ < j \cdot 2^{-k} - s_k(x) \leq 2^{-k} \to 0 & : \ x \in A_j \ \wedge \ f(x) < k \to \infty. \end{cases}$$

Daraus folgt bereits die monotone Konvergenz $(s_k) \uparrow f$, punktweise für jedes $x \in A$.

(b) Ist aber $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ eine beliebige meßbare Funktion, so definieren wir

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \qquad f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}, \quad x \in A.$$

Es folgt $f = f^+ - f^-$ mit nichtnegativen Funktionen $f^+, f^-$. Diese sind meßbar, denn es gilt für jedes Intervall $I := (a, +\infty]$, $a \in \mathbf{R}$:

$$(f^+)^{-1}(I) = \begin{cases} A & : \ 0 \in I, \\ f^{-1}(I) & : \ 0 \notin I. \end{cases}$$

Ganz analog erhält man die Meßbarkeit der Funktion $f^-$. Gemäß (a) sind $f^+$ und $f^-$ jeweils die punktweisen Limites von Treppenfunktionen, und dies gilt dann auch für $f$. □

Grenzwerte von Folgen meßbarer Funktionen sind wieder meßbar. Das ist unter anderem der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 4.14** *Gegeben sei eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ meßbarer Funktionen. Dann gilt:*

(a) *Die Funktionen* $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}} f_k$, $\inf\limits_{k\in\mathbf{N}} f_k$, $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$, $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ *sind meßbar.*

(b) *Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ punktweise f.ü., so ist ihr Limes meßbar.*

*Beweis:* (a) Gelte $g(x) := \sup\limits_{k\in\mathbf{N}} f_k(x)$. Dann sind die Niveaumengen

$$g^{-1}[a, +\infty] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}[a, +\infty]$$

für jedes $a \in \mathbf{R}$ wegen (1.3) meßbar. Also ist $g$ meßbar. Mit gleichem Argument folgt auch die Meßbarkeit von $\inf\limits_{k\in\mathbf{N}} f_k$.

Wir setzen nun $g_k(x) := \sup\limits_{r\geq k} f_r(x)$. Die Funktion $g_k$ ist nach dem soeben Gezeigten meßbar. Darüber hinaus ist die Folge $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ monoton nicht steigend. Deshalb gilt

$$\inf_{k\in\mathbf{N}} g_k = \lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} (\sup_{r\geq k} f_r) = \limsup_{k\to\infty} f_k.$$

Wie oben gezeigt, ist die linke Seite meßbar und somit auch die rechte. Ganz analog zeigt man die Meßbarkeit von $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$.

(b) Mit $A \in \mathcal{A}$ und $f : A \to \mathbf{R}$ gelte $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in A \setminus N$ und $\mu(N) = 0$. Wir setzen $B := A \setminus N$ sowie $f_B := f|B$. Die Menge $B$ ist meßbar, und wegen

$$f_B = \lim_{k\to\infty} f_k = \limsup_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k$$

folgt aus (a) die Meßbarkeit von $f_B$. Wir setzen $g := f - f_B$. Dann sind die Niveaumengen $(g^+)^{-1}(a, +\infty]$, $(g^-)^{-1}(a, +\infty]$ als Teilmengen von $N$ für jedes $a \geq 0$ meßbar. Ebenso sind die Mengen $(g^+)^{-1}[0, +\infty] = B \cup N^+$, $(g^-)^{-1}[0, +\infty] = B \cup N^-$ wegen $N^\pm \subset N$ meßbar. Also sind $g^+$ und $g^-$ meßbar. Die Summe zweier meßbarer Funktionen ist wiederum meßbar. Das werden wir unter anderem im nächsten Satz zeigen. Daraus erhalten wir nun die Meßbarkeit der Funktionen $g = g^+ - g^-$ und $f = g + f_B$. □

Algebraische Verknüpfungen meßbarer Funktionen sind wieder meßbar. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 4.15** *Sind $f$ und $g$ meßbare Funktionen, so trifft dies auch auf folgende Funktionen zu:*

$$f^+, \quad f^-, \quad f+g, \quad |f|^p \text{ mit } p \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{sign}(g), \quad fg, \quad f/g, \quad \max\{f,g\}, \quad \min\{f,g\}.$$

*Beweis:* Die Meßbarkeit von $f^+$ und $f^-$ wurde bereits in Satz 4.13 gezeigt. Ebenso folgt aus Satz 4.13, daß $f$ und $g$ Grenzwerte von Folgen $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ bzw. $(t_k)_{k\in\mathbf{N}}$ von Treppenfunktionen sind. Da $s_k + t_k$ wiederum eine Treppenfunktion ist, ergibt sich die Meßbarkeit von $f+g = \lim\limits_{k\to\infty}(s_k+t_k)$ aus Satz 4.14(a).

Die Meßbarkeit der Funktion $|f|^p$ ist für $p=0$ trivial. Für $p \neq 0$ und für beliebiges $b>0$ gilt

$$(|f|^p)^{-1}(b,+\infty] = (f^{-1}(b^{1/p},+\infty]) \cup (f^{-1}[-\infty,-b^{1/p})).$$

Da die beiden Mengen auf der rechten Seite meßbar sind, resultiert bereits die behauptete Meßbarkeit von $|f|^p$.

Die Niveaumengen $\{x \in A : \operatorname{sign}(g(x)) > a\}$ sind genau die Mengen $A$, $\emptyset$, $g^{-1}[0,+\infty]$ und $g^{-1}(0,+\infty]$. Diese sind jeweils meßbar.

Die Meßbarkeit von $fg$ resultiert aus der oben gezeigten Meßbarkeit der Funktionen $f \pm g$ und $f^2$ unter Verwendung der Zerlegung

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2.$$

Wegen $1/g = |g|^{-1} \cdot \operatorname{sign}(g)$ ist die Funktion $1/g$ nach dem bisher Gezeigten meßbar. Somit ist auch $f/g = f \cdot (1/g)$ meßbar.

Wir haben schließlich wegen

$$\max\{f,g\} = f + (g-f)^+, \qquad \min\{f,g\} = f + (g-f)^-$$

die noch ausstehende Meßbarkeit der beiden letzten Funktionen in der Behauptung. □

Ist auf der Grundmenge $\Omega$ eine Topologie erklärt, so können wir **stetige Funktionen** $f : A \to \mathbf{R}$ betrachten. Diese sind meßbar, sofern in der Mengenalgebra $\mathcal{A}$ das System $\mathcal{T}$ der offenen Teilmengen von $\Omega$ enthalten ist.

**Satz 4.16** (a) *In der Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über dem topologischen Raum $\Omega$ sei das System $\mathcal{T}$ der offenen Teilmengen von $\Omega$ enthalten. Es sei $A \in \mathcal{A}$ fest. Ist $f : A \to \mathbf{R}$ stetig, so ist $f$ auch meßbar.*

(b) *Ist $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ stetig und ist jede Komponente $f_j : A \to \mathbf{R}$ der Vektorfunktion $\vec{f} := (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$ meßbar, so ist auch die Funktion $(g \circ \vec{f})(x) := g(\vec{f}(x))$ meßbar.*

**Bemerkung 4.5** Die Aussage von Satz 4.16(a) gilt insbesondere für den LEBESGUEschen Maßraum $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m)$.

*Beweis:* (a) Wegen der Stetigkeit von $f$ sind die Urbildmengen $U := f^{-1}(I)$ der offenen Intervalle $I \subset \mathbf{R}$ offen in der Relativtopologie von $A$. Das heißt, für ein $B \in \mathcal{T}$ gilt $U = B \cap A$, und diese Menge ist meßbar. Aus Satz 4.12(b) folgt dann die Meßbarkeit von $f$.

(b) Jedes offene Intervall $I \subset \mathbf{R}$ hat wegen der Stetigkeit von $g$ eine offene Urbildmenge $G := g^{-1}(I) \subset \mathbf{R}^m$. Diese ist gemäß Satz 4.9(a) die Vereinigung einer Folge offener Intervalle $I_k \subset \mathbf{R}^m$:

$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Jedes Intervall $I_k$ ist das cartesische Produkt von offenen Intervallen $I_k^1 \times I_k^2 \times \cdots \times I_k^m$. Wir haben

$$(g \circ \vec{f})(x) \in I \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f}(x) \in g^{-1}(I) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in \vec{f}^{\,-1}\Big( \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \vec{f}^{\,-1}(I_k)$$

sowie

$$x \in \vec{f}^{\,-1}(I_k) \quad \Leftrightarrow \quad x \in f_j^{-1}(I_k^j) \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, m \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{j=1}^{m} f_j^{-1}(I_k^j).$$

Satz 4.12(b) liefert nun die Meßbarkeit der Niveaumenge

$$(g \circ \vec{f})^{-1}(I) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big( \bigcap_{j=1}^{m} f_j^{-1}(I_k^j) \Big),$$

und somit die Meßbarkeit der Funktion $g \circ \vec{f}$. □

Die Stetigkeitsvoraussetzung in Satz 4.16(a) kann abgeschwächt werden zur Stetigkeit f.ü.:

**Folgerung 4.5** *Die Meßbarkeitsaussage von* Satz 4.16(a) *bleibt wahr, wenn $f : A \to \mathbf{R}$ nur fast überall stetig ist (d.h. stetig mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subset A$).*

*Beweis:* Wir setzen $B := A \setminus N$ sowie $f_B := f|B$. Da $f_B$ stetig und $B$ meßbar ist, liefert Satz 4.16(a) die Meßbarkeit von $f_B$. Wir setzen $g := f - f_B$. Dann folgt wie im Beweis von Satz 4.14(b) die Meßbarkeit der Funktion $g$ und somit *a fortiori* die Meßbarkeit von $f = g + f_B$. □

Abschließend beweisen wir den Satz von EGOROFF. Dieser besagt, daß konvergente Folgen meßbarer Funktionen auf der meßbaren Menge $A \in \mathcal{A}$ "näherungsweise" gleichmäßig konvergieren, sofern $\mu(A) < \infty$ gilt. Wir bereiten den Satz mit einem Resultat über expandierende Folgen von Teilmengen der $\sigma$–Algebra $\mathcal{A}$ vor.

**Satz 4.17 (Expansionssatz)**
*Eine Folge $A_k \in \mathcal{A}$ heiße* **expandierend**, *falls $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt. Für eine expandierende Folge gilt stets*

$$\boxed{\mu\Big( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).} \tag{3.4}$$

*Beweis:* Das Ergebnis ist trivial, wenn $\mu(A_k) = \infty$ für einen Indizes $k$ gilt. Also nehmen wir $\mu(A_k) < \infty \ \forall\, k \in \mathbf{N}$ an. Wir setzen

$$B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \Big( \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k) \Big).$$

Aus der $\sigma$–Additivität von $\mu$ ergibt sich:

$$\mu(B) = \mu(A_1) + \lim_{r \to \infty} \sum_{k=1}^{r} \mu(A_{k+1} \setminus A_k).$$

Da $A_k$ und $A_{k+1} \setminus A_k$ disjunkte Mengen sind, folgern wir $\mu(A_{k+1} \setminus A_k) = \mu(A_{k+1}) - \mu(A_k)$. Mit der obigen Summe haben wir die spezielle Form einer Teleskopsumme vorliegen, und diese Beobachtung ergibt bereits die behauptete Relation $\mu(B) = \lim_{r \to \infty} \mu(A_r)$. □

**Satz 4.18** (EGOROFF)
*Gegeben seien $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ sowie Funktionen $f_k, f : A \to \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, wobei jedes $f_k$ meßbar sei. Dann sind äquivalent:*

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in A \;\; f.ü.$

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f \quad \mu$*–gleichmäßig, das heißt:*

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, A_\epsilon \in \mathcal{A} \,:\, \mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon \;\wedge\; \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in A_\epsilon} |f_k(x) - f(x)| = 0.} \tag{3.5}$$

*Beweis:* Wir zeigen zuerst die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b). Gemäß Satz 4.14(b) ist $f$ meßbar. Sei $\epsilon > 0$ fest und bezeichne $N \subset A$ diejenige Nullmenge, auf der (a) nicht gilt. Weiter sei $B := A \setminus N$ gesetzt. Dann folgt $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\ \forall\, x \in B$. Für $k, r \in \mathbf{N}$ betrachten wir die meßbaren Mengen

$$A_{k,r} := \bigcap_{j=k}^{\infty} \{x \in B \,:\, |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{r}\}.$$

Für jedes feste $r$ haben wir

$$A_{k,r} \subset A_{k+1,r}, \qquad B := \Big( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,r} \Big) \in \mathcal{A},$$

so daß der Expansionssatz 4.17 anwendbar ist:

$$\mu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_{k,r}) < \infty.$$

Deshalb existiert jeweils ein $k_r \in \mathbf{N}$ mit

$$0 \le \mu(B \setminus A_{k_r,r}) = \mu(B) - \mu(A_{k_r,r}) < \frac{\epsilon}{2^r}.$$

Die meßbare Menge $A_\epsilon := \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} A_{k_r,r}$ hat jetzt bereits die geforderte Maßeigenschaft

$$\mu(A \setminus A_\epsilon) = \mu((B \cup N) \setminus A_\epsilon) = \mu(N \cup (B \setminus A_\epsilon)) = \mu(N) + \mu\Big( \bigcup_{r=1}^{\infty} (B \setminus A_{k_r,r}) \Big) \le \sum_{r=1}^{\infty} \mu(B \setminus A_{k_r,r}) < \epsilon.$$

Darüber hinaus gilt wegen $A_\epsilon \subset A_{k_r,r}$ für jeden Index $j \ge k_r$:

$$\sup_{x\in A_\epsilon} |f_j(x) - f(x)| \le \sup_{x\in A_{k_r,r}} |f_j(x) - f(x)| \le \frac{1}{r},$$

woraus schon die behauptete gleichmäßige Konvergenz folgt.

Um die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) zu beweisen, setzen wir $B := \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} A_{1/r}$. Wegen $A_{1/r} \subset B$ erschließen wir aus der Monotonie des Maßes

$$0 \le \mu(A \setminus B) \le \mu(A \setminus A_{1/r}) < \frac{1}{r} \to 0 \;\; (r \to \infty).$$

Die Menge $N := A \setminus B$ ist also eine Nullmenge und aus (3.5) resultiert noch

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0 \;\; \forall\, x \in B.$$

Somit ist alles bewiesen. □

## 4.4 Das LEBESGUE–Integral

In diesem Abschnitt wird wiederum die Vorgabe eines vollständigen $\sigma$–finiten Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vorausgesetzt. Insbesondere kann der LEBESGUEsche Maßraum $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m)$ als Basis dienen. Die folgende Definition ist grundlegend.

**Definition 4.12** *Es sei $A \in \mathcal{A}$ fest. Für jede Treppenfunktion $s : \Omega \to [0, \infty)$ vom Typ*

$$\boxed{s(x) := \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x), \qquad a_j > 0, \;\; A_j \in \mathcal{A},} \tag{4.1}$$

*setzen wir*

$$\boxed{\int_A s \, d\mu := \sum_{j=1}^{r} a_j \mu(A \cap A_j).} \tag{4.2}$$

*Ist $f : A \to [0, \infty)$ meßbar und nichtnegativ, so setzen wir*

$$\boxed{\int_A f \, d\mu := \sup_{s \le f} \int_A s \, d\mu,} \tag{4.3}$$

*wobei das Supremum über alle Treppenfunktionen $s(x)$ vom Typ (4.1) mit $s(x) \le f(x) \;\forall\, x \in A$ zu bilden ist. (Man beachte, daß in (4.2) und (4.3) auch Werte $+\infty$ zulässig sind.)*

In der folgenden Definition wird der Begriff der *integrierbaren* Funktion eingeführt.

**Definition 4.13** *Gegeben seien eine feste Menge $A \in \mathcal{A}$ und eine meßbare Funktion $f : A \to \mathbf{R}$. Unter Verwendung von $f^{\pm}(x) := \max\{0, \pm f(x)\} \ge 0$ setzen wir*

$$\boxed{\int_A f \, d\mu := \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu,} \tag{4.4}$$

*sofern mindestens eines der beiden Integrale auf der rechten Seite endlich ist. In diesem Fall sagen wir, das* **Integral von $f$ existiert** *mit Werten in $\overline{\mathbf{R}}$. Andernfalls ist $\int_A f \, d\mu$ nicht definiert. Sind beide Integrale in (4.4) endlich, so heiße $f$* **integrierbar** *und der Ausdruck $\int_A f \, d\mu$ das* LEBESGUE–**Integral** *von $f$. Es bezeichne $L^1(A)$ die Klasse der integrierbaren Funktionen auf $A$.* 'Integrierbar' *impliziert vereinbarungsgemäß stets auch* 'meßbar'.

Nachfolgend werden wir elementare Eigenschaften des LEBESGUE–Integrals diskutieren.

**Satz 4.19** *Seien $A \in \mathcal{A}$ eine meßbare Menge und $f, g : A \to [0, \infty)$ meßbare nichtnegative Funktionen.*

(a) *Falls $f(x) \le g(x) \;\forall\, x \in A$, so gilt*

$$\boxed{\int_A f \, d\mu \le \int_A g \, d\mu.} \qquad \textbf{Monotonie} \tag{4.5}$$

*Dies bleibt auch für Funktionen $f, g \in L^1(A)$ richtig.*

(b) *Für jede meßbare Teilmenge $B \subset A$ gilt*

$$\boxed{\int_B f\,d\mu = \int_A \chi_B \cdot f\,d\mu.} \tag{4.6}$$

*Dies bleibt auch für Funktionen $f \in L^1(A)$ richtig.*

(c) *Für jede Zahl $a \in \mathbf{R}$ gilt*

$$\boxed{\int_A af\,d\mu = a\int_A f\,d\mu.} \tag{4.7}$$

*Dies bleibt auch für Funktionen $f \in L^1(A)$ richtig.*

(d) *Falls $\mu(A) < \infty$ und $a \le f(x) \le b\ \forall\, x \in A$, so folgt*

$$\boxed{a\,\mu(A) \le \int_A f\,d\mu \le b\,\mu(A).} \tag{4.8}$$

*Dies bleibt ebenfalls für Funktionen $f \in L^1(A)$ richtig.*

*Beweis:* (a) Seien $f, g$ zunächst nichtnegativ. Für jede Treppenfunktion $s$ vom Typ (4.1) mit $s \le f$ folgt dann $s(x) \le g(x)\ \forall\, x \in A$, also auch $\int_A s\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$, wobei (4.3) verwendet wurde. Somit gilt

$$\int_A f\,d\mu = \sup_{s \le f} \int_A s\,d\mu \le \int_A g\,d\mu.$$

Sind $f, g$ jedoch integrierbar, so ergeben sich aus $f \le g$ die Ungleichungen $f^+ \le g^+$ und $g^- \le f^-$, also auch $\int_A f^+\,d\mu \le \int_A g^+\,d\mu$ und $\int_A g^-\,d\mu \le \int_A f^-\,d\mu$. Da alle Terme endlich sind, erhalten wir aus (4.4):

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu \le \int_A g^+\,d\mu - \int_A g^-\,d\mu = \int_A g\,d\mu.$$

(b) Ist $f$ meßbar und nichtnegativ, so ist die Funktion

$$\chi_B(x)f(x) = \begin{cases} f(x) & : \ x \in B, \\ 0 & : \ x \in A \setminus B \end{cases}$$

ebenfalls meßbar und nichtnegativ. Aus (4.3) erhält man sofort

$$\int_B f\,d\mu = \sup_{(s \le f \text{ auf } B)} \int_B s\,d\mu = \sup_{(s \le \chi_B f \text{ auf } A)} \int_B s\,d\mu = \sup_{(s \le \chi_B f)} \int_A s\,d\mu = \int_A \chi_B \cdot f\,d\mu.$$

Gilt hingegen $f \in L^1(A)$, so sind die beiden Integrale $\int_A f^+\,d\mu$ und $\int_A f^-\,d\mu$ endlich. Wegen (4.5) und wegen $0 \le \chi_B \cdot f^\pm = (\chi_B \cdot f)^\pm \le f^\pm$ sind nun auch die beiden Integrale $\int_A (\chi_B \cdot f)^+\,d\mu$ und $\int_A (\chi_B \cdot f)^-\,d\mu$ endlich, und es gilt unter Verwendung des soeben Bewiesenen:

$$\int_A \chi_B \cdot f\,d\mu = \int_A \chi_B \cdot f^+\,d\mu - \int_A \chi_B \cdot f^-\,d\mu = \int_B f^+\,d\mu - \int_B f^-\,d\mu = \int_B f\,d\mu.$$

(c) Für $a = 0$ ist nichts zu zeigen. Für Treppenfunktionen $s$ vom Typ (4.1) gilt trivialerweise wegen (4.2):

$$\int_A as\,d\mu = a\int_A s\,d\mu, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Für $a > 0$ ersetzen wir in (4.3) und (4.4) Funktion $f$ durch $af$, um daraus die Behauptung zu folgern. Für $a < 0$ haben wir schließlich $(af)^+ = -af^-$ sowie $(af)^- = -af^+$ und somit gemäß (4.4)

$$\int_A af\,d\mu = \int_A (-a)f^-\,d\mu - \int_A (-a)f^+\,d\mu = (-a)\Big(\int_A f^-\,d\mu - \int_A f^+\,d\mu\Big) = a\int_A f\,d\mu.$$

Dies gilt insbesondere für $f = f^+$, da dann die Integrale mit dem Integranden $f^- = 0$ endlich sind (nämlich Null).

(d) Die Funktion $s := \chi_A$ ist eine spezielle Treppenfunktion vom Typ (4.1), und für diese gilt gemäß (4.2):

$$\int_A \chi_A\,d\mu = \int_A 1\,d\mu = \mu(A) < \infty.$$

Setzen wir nun $h(x) := a\,\chi_A(x)$, $g(x) := b\,\chi_A(x)$, so resultiert $h(x) \le f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in A$. Unter Verwendung von (4.5) und (4.8) ergibt sich deshalb

$$a\,\mu(A) = a\int_A \chi_A\,d\mu = \int_A h\,d\mu \le \int_A f\,d\mu \le \int_A g\,d\mu = b\int_A \chi_A\,d\mu = b\,\mu(A),$$

was zu zeigen war. □

Weitere Eigenschaften des LEBESGUE–Integrals können mit dem Satz über monotone Konvergenz gezeigt werden, den wir durch das folgende Ergebnis vorbereiten.

**Satz 4.20** *Es sei $B_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbf{N}$, eine expandierende Folge meßbarer Mengen; ferner sei $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Dann gilt für jede Treppenfunktion $s$ vom Typ* (4.1)*:*

$$\boxed{\int_A s\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} s\,d\mu.} \tag{4.9}$$

*Beweis:* Für $s(x) := \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x)$ gilt nach Definition

$$\int_{B_k} s\,d\mu = \sum_{j=1}^{r} a_j \mu(B_k \cap A_j).$$

Für jedes $j = 1, 2, \ldots, r$ ist die Folge der meßbaren Mengen $A_{k,j} := B_k \cap A_j$ expandierend, und es gilt $A \cap A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,j}$. Deshalb folgt aus dem Expansionssatz 4.17

$$\mu(A \cap A_j) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_{k,j}), \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

und somit die behauptete Relation (4.9). □

**Satz 4.21 (Monotone Konvergenz)**
*Auf der meßbaren Menge $A \in \mathcal{A}$ sei eine monoton wachsende Folge $f_k : A \to [0, \infty)$ meßbarer nichtnegativer Funktionen gegeben. Dann gilt*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu = \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k)\,d\mu.} \tag{4.10}$$

*Beweis:* Gemäß dem Hauptsatz über monotone Konvergenz reeller Zahlenfolgen existiert für jedes $x \in A$ der punktweise Limes

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in [0,\infty],$$

und dieser ist wegen Satz 4.14(b) meßbar. Die Folge $\left(\int_A f_k\,d\mu\right)_{k\in\mathbf{N}}$ ist wegen (4.5) monoton nichtfallend, und dies begründet die Existenz von $\int_A f\,d\mu$ auf $[0,\infty]$. Weiter gilt offenkundig $\int_A f_k\,d\mu \le \int_A f\,d\mu$, also auch $\lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,d\mu \le \int_A f\,d\mu$. Nun fixieren wir eine Zahl $a \in (0,1)$ und betrachten eine Treppenfunktion $s$ vom Typ (4.1) mit $0 \le s \le f$. Die Folge der meßbaren Mengen

$$B_k := \{x \in A\,:\, f_k(x) \ge a\,s(x)\}, \qquad k \in \mathbf{N},$$

ist expandierend. Es gilt

$$\int_A f\,d\mu \ge \int_A f_k\,d\mu \overset{(4.5)}{\ge} \int_A \chi_{B_k}\cdot f_k\,d\mu \overset{(4.6)}{=} \int_{B_k} f_k\,d\mu \overset{(4.5)}{\ge} \int_{B_k} a\,s\,d\mu \overset{(4.7)}{=} a\int_{B_k} s\,d\mu,$$

und weiter wegen $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ unter Verwendung von Satz 4.20:

$$\int_A f\,d\mu \ge \lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,d\mu \ge a\lim_{k\to\infty}\int_{B_k} s\,d\mu = a\int_A s\,d\mu.$$

Für jedes $\epsilon > 0$ kann $s$ gemäß (4.3) so gewählt werden, daß $\int_A s\,d\mu > \int_A f\,d\mu - \epsilon$ gilt. Demgemäß haben wir

$$\int_A f\,d\mu \ge \lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,d\mu > a\int_A f\,d\mu - a\epsilon,$$

und für $a \to 1$ sowie $\epsilon \to 0$ erhält man daraus die Behauptung. □

Eine Variante des Satzes 4.21 und gleichzeitig das Analogon zum bekannten Hauptsatz über die monotone Konvergenz von reellen Zahlenfolgen ist der folgende Konvergenzsatz von Beppo Levi:

**Satz 4.22** (B. Levi)
*Gegeben seien eine meßbare Menge $A \in \mathcal{A}$ und eine monotone Folge reeller Funktionen $f_k \in L^1(A)$. Ist die Integralfolge $\left(\int_A f_k\,d\mu\right)_{k\in\mathbf{N}}$ beschränkt, so existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $x \in A$ f.ü. mit $f \in L^1(A)$, und es gilt*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,d\mu = \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k)\,d\mu = \int_A f\,d\mu.} \tag{4.11}$$

*Beweis:* Es darf ohne Einschränkung angenommen werden, daß die Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ monoton wächst; ansonsten werden wir zur Folge $(-f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ übergehen. Des weiteren dürfen wir $f_k \ge 0\ \forall\, k \in \mathbf{N}$ annehmen. Andernfalls betrachten wir die Folge $(f_k - f_1)_{k\in\mathbf{N}}$. Unter diesen Prämissen ist die Integralfolge $\left(\int_A f_k\,d\mu\right)_{k\in\mathbf{N}}$ monoton steigend und voraussetzungsgemäß beschränkt, also konvergent. Aus dem voranstehenden Satz 4.21 folgt bereits

$$0 \le \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k)\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,d\mu < \infty. \tag{4.12}$$

Angenommen, es gäbe keine Funktion $f$ mit der angegebenen Eigenschaft. Da der Grenzwert $\overline{f}(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ wegen der Monotonie für jedes feste $x \in A$ existiert und wegen Satz 4.14(a) meßbar ist, wäre dann die meßbare Teilmenge $B := \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} \{x \in A : \overline{f}(x) > n\}$ keine Nullmenge, und wir hätten

$$\int_A (\lim_{k\to\infty} f_k)\, d\mu = \int_A \overline{f}\, d\mu \geq \int_B \overline{f}\, d\mu \geq n\cdot\mu(B) \to +\infty \;\; (n\to\infty),$$

im Widerspruch zu (4.12). Also muß außerhalb einer Nullmenge der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \in \mathbf{R}$ existieren. □

Das hier eingeführte LEBESGUE–Integral ist *linear*, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 4.23 (Linearität des LEBESGUE–Integrals)**
*Gegeben seien eine meßbare Menge $A \in \mathcal{A}$ sowie meßbare nichtnegative Funktionen $f, g : A \to [0,\infty)$. Dann gilt für jedes Paar nichtnegativer Zahlen $a \geq 0, b \geq 0$:*

$$\boxed{\int_A (a\,f + b\,g)\, d\mu = a\int_A f\, d\mu + b\int_A g\, d\mu.} \tag{4.13}$$

*Dies bleibt auch richtig für Funktionen $f, g \in L^1(A)$ und beliebige Zahlen $a, b \in \mathbf{R}$.*

*Beweis:* (a) Zunächst seien $f, g : A \to [0,\infty)$ Treppenfunktionen vom Typ (4.1), also $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{p} a_j\chi_{A_j}(x)$ bzw. $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{r} b_k\chi_{B_k}(x)$. Wir können wegen Bemerkung 4.4 ohne Einschränkung annehmen, daß die meßbaren Mengen der Familien $\{A_j : 1 \leq j \leq p\}$ bzw. $\{B_k : 1 \leq k \leq r\}$ jeweils paarweise disjunkt sind. Unter eventueller Hinzunahme der beiden Mengen

$$A_0 := A \setminus \bigcup_{j=1}^{p} A_j, \qquad B_0 := A \setminus \bigcup_{k=1}^{r} B_k$$

und Addition der Summanden $a_0\,\chi_{A_0}(x)$ bzw. $b_0\,\chi_{B_0}(x)$, $a_0 := b_0 := 0$, zu $f(x)$ bzw. $g(x)$ darf sogar $\bigcup\limits_{j=0}^{p} A_j = A = \bigcup\limits_{k=0}^{r} B_k$ vorausgesetzt werden. Da nun $f+g$ den Funktionswert $a_j + b_k$ auf $A_j \cap B_k$ annimmt, gilt

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)\, d\mu &= \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{r} (a_j + b_k)\mu(A\cap(A_j\cap B_k)) \\ &= \sum_{j=0}^{p} a_j \sum_{k=0}^{r} \mu((A\cap A_j)\cap B_k) + \sum_{k=0}^{r} b_k \sum_{j=0}^{p} \mu((A\cap B_k)\cap A_j).\end{aligned}$$

Die Mengen $(A\cap A_j)\cap B_k \subset B_k$, $k = 0, 1, \ldots, r$, sind paarweise disjunkt und Gleiches gilt für $(A\cap B_k)\cap A_j$, $j = 0, 1, \ldots, p$. Es resultiert also aus der Additivität des Maßes

$$\sum_{k=0}^{r} \mu((A\cap A_j)\cap B_k) = \mu\Big((A\cap A_j)\cap \bigcup_{k=0}^{r} B_k\Big) = \mu(A\cap A_j),$$

und Analoges ergibt sich für die zweite Summe. Somit folgt

$$\int_A (f+g)\, d\mu = \sum_{j=0}^{p} a_j\mu(A\cap A_j) + \sum_{k=0}^{r} b_k\mu(A\cap B_k) = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu.$$

(b) Sind hingegen $f, g : A \to [0, \infty)$ meßbare nichtnegative Funktionen, so existieren gemäß Satz 4.13(a) Folgen $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $(t_k)_{k\in\mathbf{N}}$ nichtnegativer Treppenfunktionen mit $(s_k) \uparrow f$ und $(t_k) \uparrow g$. Wegen (a) gilt dann unter Verwendung von Satz 4.21:

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)\,d\mu &= \int_A \lim_{k\to\infty}(s_k+t_k)\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\Big(\int_A s_k\,d\mu + \int_A t_k\,d\mu\Big)\\ &= \int_A (\lim_{k\to\infty} s_k)\,d\mu + \int_A (\lim_{k\to\infty} t_k)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu.\end{aligned}$$

(c) Für integrierbare Funktionen $f, g : A \to \mathbf{R}$ gilt aber

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

und somit $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. Hier stehen auf jeder Gleichungsseite meßbare nichtnegative Funktionen. Bei Erweiterung von (b) auf drei Summanden ergibt sich daraus

$$\int_A (f+g)^+\,d\mu + \int_A f^-\,d\mu + \int_A g^-\,d\mu = \int_A (f+g)^-\,d\mu + \int_A f^+\,d\mu + \int_A g^+\,d\mu.$$

Alle Summanden sind endlich, und demzufolge haben wir auch

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)\,d\mu &= \int_A (f+g)^+\,d\mu - \int_A (f+g)^-\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu + \int_A g^+\,d\mu - \int_A g^-\,d\mu\\ &= \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu.\end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun durch Kombination dieses Ergebnisses mit Satz 4.19(c). □

**Satz 4.24** *Das* LEBESGUE*–Integral besitzt folgende Eigenschaften:*

(a) *Gegeben seien ein Paar disjunkter Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ sowie eine auf $A$ und $B$ meßbare nichtnegative Funktion $f$. Dann gilt*

$$\boxed{\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.} \qquad \textbf{Additivität} \quad (4.14)$$

*Dies bleibt auch für Funktionen $f \in L^1(A) \cap L^1(B)$ richtig.*

(b) *Sei $A \in \mathcal{A}$ fest. Genau dann ist die Funktion $f$ auf $A$ integrierbar, wenn $f$ auf $A$ meßbar und $|f|$ integrierbar sind. Es gilt dann*

$$\boxed{\Big|\int_A f\,d\mu\Big| \le \int_A |f|\,d\mu.} \qquad \textbf{Absolutwert} \quad (4.15)$$

(c) *Seien $A, B \subset A$ meßbar und $f$ auf $A$ integrierbar. Dann ist $f$ auch auf $B$ integrierbar.*

(d) *Es sei $f$ meßbar und nichtnegativ auf $A \in \mathcal{A}$. Genau dann gilt $\int_A f\,d\mu = 0$, wenn $f(x) = 0$, $x \in A$ f.ü. ist.*

*Beweis:* (a) Für alle $x \in A \cup B$ gilt $\chi_A(x) + \chi_B(x) = 1$ und somit

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,d\mu &= \int_{A\cup B} (\chi_A \cdot f + \chi_B \cdot f)\,d\mu \overset{(4.13)}{=} \int_{A\cup B} \chi_A \cdot f\,d\mu + \int_{A\cup B} \chi_B \cdot f\,d\mu \\ &\overset{(4.6)}{=} \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.\end{aligned}$$

(b) Ist $f$ integrierbar, so ist $f$ meßbar und beide Integrale $\int_A f^+\,d\mu, \int_A f^-\,d\mu$ sind endlich. Wegen $|f| = f^+ + f^-$ folgt dann aus der Linearität des Integrals

$$\int_A |f|\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu + \int_A f^-\,d\mu < \infty.$$

Sind umgekehrt $f$ meßbar und $|f|$ integrierbar, so folgt wegen $f^\pm \le |f|$ gemäß (4.5): $\int_A f^\pm\,d\mu < \infty$. Somit ist $f$ integrierbar, und es gilt

$$\Big|\int_A f\,d\mu\Big| = \Big|\int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu\Big| \le \int_A f^+\,d\mu + \int_A f^-\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu.$$

(c) Wir haben

$$\int_B |f|\,d\mu \overset{(4.6)}{=} \int_A \chi_B \cdot |f|\,d\mu \overset{(4.5)}{\le} \int_A |f|\,d\mu \overset{\text{(b)}}{<} \infty,$$

so daß $f$ nach Aussage (b) auf $B$ integrierbar ist.

(d) Sei zunächst $\int_A f\,d\mu = 0$. Wir setzen

$$A_k := \{x \in A : f(x) > \frac{1}{k}\},\ k \in \mathbf{N}, \qquad N := \{x \in A : f(x) > 0\}.$$

Die Folge der meßbaren Mengen $A_k$ ist expandierend und erfüllt $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Also folgt aus dem Expansionssatz $\mu(N) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Wäre $\mu(N) > 0$, so gäbe es sicher einen Index $r \in \mathbf{N}$ mit $\mu(A_r) > 0$. Da $s(x) := r^{-1}\chi_{A_r}(x)$ eine Treppenfunktion mit der Eigenschaft $s \le f$ ist, erhielten wir

$$\int_A f\,d\mu \overset{(4.5)}{\ge} \int_A r^{-1}\chi_{A_r}\,d\mu = \frac{1}{r}\,\mu(A_r) > 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist umgekehrt $f(x) = 0$ für alle $x \in A \setminus N =: B$, so folgt aus (4.14):

$$\int_A f\,d\mu = \int_{B\cup N} f\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \int_N f\,d\mu = \int_N f\,d\mu.$$

Wir können gemäß Satz 4.13(a) zu $f : N \to [0,\infty)$ eine Folge $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ nichtnegativer Treppenfunktionen mit $(s_k) \uparrow f$ bestimmen. Gilt die Darstellung $s_k(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x)$, so haben wir wegen $\mu(N) = 0$:

$$\int_N s_k\,d\mu = \sum_{j=1}^{r} a_j \mu(N \cap A_j) = 0.$$

Dies führt mit Hilfe von (4.10) auf die behauptete Relation

$$\int_N f\,d\mu = \int_N (\lim_{k\to\infty} s_k)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_N s_k\,d\mu = 0.$$

Der Satz ist vollständig bewiesen. □

**Bemerkung 4.6** (a) Für **komplexwertige** Funktionen $f : A \to \mathbf{C}$, $f = u + iv$, setzen wir

$$\boxed{\int_A f\,d\mu := \int_A u\,d\mu + i\int_A v\,d\mu.} \tag{4.16}$$

$f$ ist genau dann integrierbar, wenn die reellen Funktionen $u, v$ jeweils für sich integrierbar sind.

(b) Für **vektorwertige** Funktionen $\vec{f} : A \to \mathbf{R}^m$, $\vec{f}(x) := (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))^T$, setzen wir

$$\boxed{\int_A \vec{f}\,d\mu := \Big(\int_A f_1\,d\mu, \int_A f_2\,d\mu, \ldots, \int_A f_m\,d\mu\Big)^T.} \tag{4.17}$$

$\vec{f}$ ist genau dann integrierbar, wenn die skalaren Komponentenfunktionen $f_j : A \to \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, jeweils für sich integrierbar sind.

(c) Die klassische LEIBNIZsche Schreibweise

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{bzw.} \int_\Omega f(x)\,dx, \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n \text{ meßbar},$$

werden wir ausschließlich in Verbindung mit dem LEBESGUE–Maß $\mu = m$ in $\mathbf{R}^n$ verwenden, wobei anstelle von $dm$ die Notation $dx$ gebräuchlich ist. Der Wert des Integrals $\int_I f(x)\,dx$ ist für jedes der Intervalle $I := [a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder $[a, b]$ jeweils derselbe, da das LEBESGUE–Maß einer einpunktigen Menge Null ist.

(d) Gegeben seien ein Intervall $I \subset \mathbf{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : I \to \mathbf{R}$. Seien $(I_k)_{k\in\mathbf{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} m(I_k) = 0$ eine Folge von Teilintervallen $I_k \subset I$ und $a \in \Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k\Big) \subset I$ ein fester Punkt. Dann gilt

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(I_k)} \int_{I_k} f(x)\,dx = f(a).} \tag{4.18}$$

In der Tat, da $f$ stetig im Punkt $a$ ist, existiert zu jeder Vorgabe $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon)$ mit $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$. Gilt nun $I_k \subset \{x \in I : x_j \in [a_j - \delta, a_j + \delta],\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, so resultiert wegen (4.8)

$$(f(a) - \epsilon)m(I_k) \le \int_{I_k} f(x)\,dx \le (f(a) + \epsilon)m(I_k)$$

und somit die behauptete Relation (4.18).

(e) Wir betrachten (4.18) im Sonderfall $n = 1$. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ folgt nun in jedem Punkt $x \in (a, b)$:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{m[x, x+h]}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \overset{(4.18)}{=} f(x).$$

Das heißt, ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, so kann das LEBESGUE–Integral von $f$ wie ein klassisches RIEMANN–Integral berechnet werden:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).} \tag{4.19}$$

## 4.5 Das Lemma von FATOU und der LEBESGUEsche Satz von der dominierten Konvergenz

Die für Anwendungen wichtigsten Eigenschaften des LEBESGUE–Integrals sind Aussagen über die Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration. Der Satz 4.21 über die monotone Konvergenz ist ein Vertreter dieses Typs von Aussagen. Wir gehen nach wie vor von einem vollständigen $\sigma$–finiten Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ aus. Zwei weitere Aussagen über die Vertauschbarkeit von Limesrelationen bereiten wir mit dem folgenden Satz vor:

**Satz 4.25 (Majorantenkriterium)**
*Gegeben seien eine meßbare Menge $A \in \mathcal{A}$, eine meßbare Funktion $f : A \to \mathbf{R}$ sowie eine Funktion $g \in L^1(A)$ mit $|f(x)| \le g(x)$, $x \in A$ f.ü. Dann gilt auch $f \in L^1(A)$.*

*Beweis:* Ohne Einschränkung kann $g \ge 0$ angenommen werden. Nach Voraussetzung ist die Menge $N := \{x \in A : g(x) < |f(x)|\}$ eine Nullmenge. Wir betrachten die Funktionen $f^{\pm}(x) := \max\{0, \pm f(x)\}$, $x \in A$. Diese sind nichtnegativ und gemäß Satz 4.15 meßbar, ferner erfüllen sie $f = f^+ - f^-$ sowie $|f| = f^+ + f^-$. Wegen Satz 4.13(a) existieren monoton steigende Folgen $(s_k^{\pm})_{k\in\mathbf{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^{\pm}(x) = f^{\pm}(x)$ punktweise für jedes $x \in A$. Wir zeigen die Integrierbarkeit jeder der Funktionen $s_k^{\pm}$. Die Funktion $s_k^+$ nehme zum Beispiel auf den paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, jeweils den Funktionswert $a_j > 0$ an. Es gelte $A_j \subset A$. Nach Voraussetzung ist $a_j = s_k^+(x) \le f^+(x) \le |f(x)| \le g(x)$ $\forall\, x \in A_j \setminus N$. Somit folgt wegen $\mu(A_j \cap N) \le \mu(N) = 0$ unter Verwendung von (4.5):

$$0 \quad \le \quad a_j\,\mu(A_j) = a_j\,\mu((A_j \cap N) \cup (A_j \setminus N)) = a_j\,\mu(A_j \setminus N) = \int_{A_j\setminus N} a_j\,d\mu$$

$$\overset{(4.5)}{\le} \quad \int_{A_j\setminus N} g\,d\mu \overset{(4.14)}{\le} \int_A g\,d\mu < \infty.$$

Es resultiert deshalb

$$0 \le \int_A s_k^+\,d\mu = \sum_{j=1}^{r} a_j\,\mu(A_j) \le \sum_{j=1}^{r} \int_{A_j\setminus N} g\,d\mu \overset{(4.14)}{\le} \int_A g\,d\mu < \infty \;\forall k \in \mathbf{N},$$

und eine analoge Abschätzung gilt für $s_k^-$. Wegen Satz 4.19(a) ist die Integralfolge $\left(\int_A s_k^{\pm}\,d\mu\right)_{k\in\mathbf{N}}$ monoton steigend und somit konvergent, da sie nach oben beschränkt ist. Nun können wir aus Satz 4.21 folgern:

$$0 \le \int_A f^{\pm}\,d\mu = \int_A (\lim_{k\to\infty} s_k^{\pm})\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A s_k^{\pm}\,d\mu \le \int_A g\,d\mu.$$

Das heißt, die Integrale $\int_A f^{\pm}\,d\mu$ sind beide endlich, so daß sich die Integrierbarkeit von $f$ gemäß Definition 4.13 ergibt. □

Im nächsten Satz wird die Integrierbarkeit der Grenzfunktion einer fast überall konvergenten Folge meßbarer Funktionen festgestellt.

**Satz 4.26 (Lemma von FATOU)**
*Gegeben seien eine meßbare Menge $A \in \mathcal{A}$ sowie eine Folge $f_k : A \to [0, \infty)$ meßbarer nichtnegativer Funktionen. Dann gilt*

$$\boxed{\int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k)\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu.} \tag{5.1}$$

*Gibt es darüber hinaus eine Zahl $M$ mit $\int_A f_k\,d\mu \le M < \infty\ \forall\ k \in \mathbf{N}$ und konvergiert $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $x \in A$ f.ü., so gilt $f \in L^1(A)$ sowie*

$$\boxed{\int_A f\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu.} \tag{5.2}$$

*Beweis:* (a) Für $k \in \mathbf{N}$ und $x \in A$ setzen wir $g_k(x) := \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \ldots\}$. Dann ist $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine monoton wachsende Folge meßbarer nichtnegativer Funktionen mit der Eigenschaft

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\ \forall\ x \in A.$$

Daher resultiert aus Satz 4.21:

$$\int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k)\,d\mu = \int_A (\lim_{k\to\infty} g_k)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A g_k\,d\mu.$$

Nach Konstruktion gilt $g_k(x) \le f_k(x)$ für alle $x \in A$ und jedes $k \in \mathbf{N}$. Satz 4.19(a) liefert nun

$$\int_A g_k\,d\mu \le \int_A f_k\,d\mu\ \forall\ k \in \mathbf{N},$$

und daraus resultiert die behauptete Ungleichung

$$\int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A g_k\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu.$$

(b) Es sei $0 \le g(x) := \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)\ \forall\ x \in A$ gesetzt. Dann ist $g$ meßbar und wegen (5.1) auch integrierbar, denn es gilt

$$0 \le \int_A g\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu \le M < \infty. \tag{5.3}$$

Nun haben wir $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) = g(x)$, $x \in A$ f.ü. Da $f$ bereits meßbar ist (Satz 4.14(a)), gilt nach dem Majorantenkriterium $f \in L^1(A)$. Ferner erhalten wir aus Satz 4.24(d)

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu \overset{(5.3)}{\le} \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu,$$

und das ist die behauptete Ungleichung (5.2). □

**Bemerkung 4.7** (a) Mit ganz analoger Argumentation zeigt man auch für Folgen $f_k : A \to (-\infty, 0]$ meßbarer nichtpositiver Funktionen

$$\boxed{\int_A (\limsup_{k\to\infty} f_k)\,d\mu \ge \limsup_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu} \tag{5.4}$$

bzw.

$$\boxed{\int_A f\,d\mu \ge \limsup_{k\to\infty} \int_A f_k\,d\mu} \tag{5.5}$$

bei Konvergenz $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $x \in A$ f.ü., sofern eine Zahl $M$ existiert mit $\int_A f_k\,d\mu \ge M > -\infty\ \forall\ k \in \mathbf{N}$.

(b) Satz 4.26 bleibt richtig, wenn die Voraussetzung der Nichtnegativität abgeschwächt wird zu $f_k(x) \geq 0,\ x \in A$ *f.ü.*

In der Tat, in der Zerlegung $f_k = f_k^+ - f_k^-$ mit $f_k^\pm(x) := \max\{0, \pm f_k(x)\}$, $x \in A$, sind $f_k^+$ und $f_k^-$ jeweils meßbare, auf ganz $A$ nichtnegative Funktionen. Wegen Satz 4.24(d) gilt $\int_A f_k^-\, d\mu = 0$, denn wir haben ja $f_k^-(x) = 0,\ x \in A$ *f.ü.* Des weiteren folgern wir unter Verwendung von Satz 4.23:

$$\int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k)\, d\mu + \int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k^-)\, d\mu = \int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k + \liminf_{k\to\infty} f_k^-)\, d\mu$$

$$\leq \int_A (\liminf_{k\to\infty}(f_k + f_k^-))\, d\mu = \int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k^+)\, d\mu \overset{(5.1)}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k^+\, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu.$$

Daraus ergibt sich sofort die Ungleichung (5.1).

Ansonsten wird Satz 4.26 i.a. falsch, wenn die Funktionen $f_k$ beliebige positive und negative Werte annehmen. Gibt es jedoch eine meßbare Funktion $g : A \to [0, \infty)$ mit $|f_k(x)| \leq g(x),\ x \in A$ *f.ü.* und für alle $k \in \mathbf{N}$, so kann das Lemma von FATOU auf die Funktionsfolge $\tilde{f}_k := g + f_k$ angewendet werden.

**Satz 4.27 (LEBESGUEscher Satz von der dominierten Konvergenz)**
*Es seien eine meßbare Menge $A \in \mathcal{A}$ und eine Folge meßbarer Funktionen $f_k : A \to \mathbf{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),\ x \in A$ f.ü. gegeben. Ferner existiere eine integrierbare Funktion $g$ mit*

$$|f_k(x)| \leq g(x),\ x \in A \text{ f.ü.}, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.6}$$

*Dann ist $f$ auf $A$ integrierbar, und es gilt*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu = \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k)\, d\mu = \int_A f\, d\mu.} \tag{5.7}$$

*Beweis:* Die Funktion $f$ ist gemäß Satz 4.14(b) meßbar. Die Funktionen $f$ und $f_k,\ k \in \mathbf{N}$, sind wegen Satz 4.25 integrierbar, denn infolge von (5.6) gilt ja auch $|f(x)| \leq g(x),\ x \in A$ *f.ü.* Nun sind die Funktionen $\tilde{f}_k := g + f_k$ integrierbar und nichtnegativ f.ü., so daß mit obiger Bemerkung 4.7(b) aus dem Lemma von FATOU die Ungleichung

$$\int_A (\liminf_{k\to\infty} \tilde{f}_k)\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A \tilde{f}_k\, d\mu = \int_A g\, d\mu + \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu$$

folgt. Verwenden wir noch Satz 4.23, so haben wir

$$\int_A g\, d\mu + \int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k)\, d\mu = \int_A (\liminf_{k\to\infty} \tilde{f}_k)\, d\mu,$$

und somit schließlich

$$\int_A (\liminf_{k\to\infty} f_k)\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu.$$

Ganz analog zeigt man unter Verwendung von (5.4) durch Betrachten der fast überall nichtpositiven Funktionen $f_k - g$ die Ungleichung

$$\int_A (\limsup_{k\to\infty} f_k)\, d\mu \geq \limsup_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu.$$

In der Zusammenfassung ergibt sich

$$\liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu \geq \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k)\, d\mu \geq \limsup_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu,$$

und daraus folgt schon die behauptete Gleichung (5.7). □

## 4.6 Die Absolutstetigkeit des LEBESGUE–Integrals

Wir gehen in diesem Abschnitt wiederum von der Vorgabe eines vollständigen $\sigma$–finiten Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ aus. Wir zeigen, daß jede nichtnegative Funktion $f \in L^1(\Omega)$ einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mit einem endlichen Maß $\nu$ erzeugt. Wir erinnern zunächst daran, daß für jede meßbare nichtnegative Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$ durch

$$\boxed{\nu(A) := \int_A f \, d\mu = \int_\Omega \chi_A \cdot f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},} \tag{6.1}$$

eine Abbildung $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ wohldefiniert ist.

**Satz 4.28** *Die Abbildung $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ sei für eine gegebene nichtnegative Funktion $f \in L^1(\Omega)$ gemäß (6.1) definiert. Dann ist $\nu$ ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$.*

*Beweis:* Aus dem Majorantenkriterium Satz 4.25 folgt wegen

$$0 \le (\chi_A \cdot f)(x) \le f(x) \quad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, A \in \mathcal{A},$$

daß die Funktion $\chi_A \cdot f$ integrierbar ist. Darüber hinaus gilt

$$0 \le \nu(A) = \int_A f \, d\mu \le \int_\Omega f \, d\mu = \nu(\Omega) < \infty.$$

Also erfüllt $\nu$ die Positivitätsbedingung (M1), und $\nu$ ist endlich. Um die $\sigma$–Additivität zu zeigen, seien zunächst $A$, $B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gegeben. Dann folgt aus Satz 4.24(a):

$$\nu(A \cup B) = \int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu = \nu(A) + \nu(B). \tag{6.2}$$

Nun sei eine Folge $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbf{N}$, mit $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ gegeben. Wir setzen $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ sowie $B_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ für $k \in \mathbf{N}$. Die Funktionen $\chi_{B_k} \cdot f : A \to [0, \infty)$ bilden eine monoton steigende Folge integrierbarer nichtnegativer Funktionen mit dem Grenzwert $\chi_A \cdot f$. Deshalb erhalten wir aus Satz 4.21:

$$\begin{aligned} \nu(A) \quad &= \quad \int_A f \, d\mu = \int_\Omega \chi_A \cdot f \, d\mu = \int_\Omega \big( \lim_{k \to \infty} \chi_{B_k} \cdot f \big) \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \chi_{B_k} \cdot f \, d\mu \\ &\overset{(6.2)}{=} \quad \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega \chi_{A_j} \cdot f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j). \end{aligned}$$

Also gilt auch das Maßaxiom (M2) der $\sigma$–Additivität. □

Wir wenden (M2) in der folgenden Weise an. Es seien zu nichtnegativem $f \in L^1(\Omega)$ meßbare Mengen $A_j \in \mathcal{A}$ gemäß $A_j := \{x \in \Omega : j - 1 \le f(x) < j\}$, $j \in \mathbf{N}$ gegeben. Dann gilt $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ sowie $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Es trifft (M2) zu:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \nu(\Omega) = \int_\Omega f \, d\mu < \infty.$$

Somit muß zu jeder Vorgabe $\epsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\epsilon)$ existieren mit $\sum_{j=N+1}^{\infty} \nu(A_j) < \frac{\epsilon}{2}$. Setzen wir nun $E := \bigcup_{j=N+1}^{\infty} A_j = \{x \in \Omega : f(x) \geq N\}$, so ist $E$ meßbar mit der Eigenschaft

$$\int_E f\, d\mu = \nu\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \nu(A_j) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir betrachten schließlich zu $\delta := \frac{\epsilon}{2N}$ eine beliebige meßbare Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \delta$. Dann folgt aus Satz 4.19(d) unter Beachtung von $f < N$ auf $E^c$:

$$\nu(B) = \int_B f\, d\mu = \int_{E^c \cap B} f\, d\mu + \int_{E \cap B} f\, d\mu \leq N\, \mu(B) + \frac{\epsilon}{2} < N\, \delta + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Wir haben somit die folgende Aussage gezeigt:

**Satz 4.29** *Für jede nichtnegative Funktion $f \in L^1(\Omega)$ gilt*

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon; f) > 0\ :\ \int_B f\, d\mu < \epsilon \quad \forall\, B \in \mathcal{A}\ \textit{mit}\ \mu(B) < \delta.} \tag{6.3}$$

**Bemerkung 4.8** (a) Die Eigenschaft (6.3) wird häufig die **Absolutstetigkeit** des LEBESGUE–Integrals genannt.

(b) Ganz analog gilt für jede meßbare Menge $A \in \mathcal{A}$ und jedes $f \in L^1(A)$:

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon; f) > 0\ :\ \int_B |f|\, d\mu < \epsilon \quad \forall\, B \in \mathcal{A} \text{ mit } B \subset A \text{ und } \mu(B) < \delta.} \tag{6.4}$$

---

## 4.7 Die Sätze von FUBINI und LUSIN

In diesem Abschnitt vervollständigen wir die Eigenschaften von meßbaren Funktionen mit zwei Aussagen, die wir hier nicht beweisen wollen. In der ersten Aussage wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen die Vertauschbarkeit von Integrationsreihenfolgen erlaubt ist. Wir beschränken uns auf den einfachen Fall des LEBESGUE–Maßes $\mu$ im euklidischen Vektorraum $\mathbf{R}^d$.

**Satz 4.30 (von FUBINI)**
*Sei $f : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{K}$ eine meßbare Funktion, $f = f(x, y)$. Sofern wenigstens eines der folgenden Integrale existiert und endlich ist*

$$I_1 := \int_{\mathbf{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dx\, dy, \quad I_2 := \int_{\mathbf{R}^m} \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |f(x,y)|\, dx \Big)\, dy, \quad I_3 := \int_{\mathbf{R}^n} \Big( \int_{\mathbf{R}^m} |f(x,y)|\, dy \Big)\, dx,$$

*gelten die folgenden Eigenschaften:*

(a) $\quad f(\cdot, y) \in L^1(\mathbf{R}^n), \quad y \in \mathbf{R}^m$ f.ü.,

(b) $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbf{R}^m), \quad x \in \mathbf{R}^n$ f.ü.,

(c) $\int_{\mathbf{R}^n} f(x,\cdot)\,dx \in L^1(\mathbf{R}^m)$,

(d) $\int_{\mathbf{R}^m} f(\cdot,y)\,dy \in L^1(\mathbf{R}^n)$,

(e) $I_1 = I_2 = I_3$,

(f) $\int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}^m} \Big( \int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} \Big( \int_{\mathbf{R}^m} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$

**Bemerkung 4.9** Ist $f$ nur auf einer meßbaren Menge $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+m}$ definiert, so ersetze man die Funktion $f(x,y)$ in Satz 4.30 überall durch $\tilde{f}(x,y) := f(x,y) \cdot \chi_\Omega(x,y)$, worin $\chi_\Omega$ die charakteristische Funktion von $\Omega$ sei.

In der nächsten Aussage wird gezeigt, daß eine meßbare Funktion außerhalb einer Menge beliebig kleinen Maßes stetig ist.

**Satz 4.31 (von LUSIN)**
*Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ offen mit $\mu(\Omega) < \infty$. Sei ferner $f : \Omega \to \mathbf{K}$ meßbar und $f(x) = 0 \;\forall\, x \in \Omega^c$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ mit*

$$\boxed{\sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \le \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \quad \text{und} \quad \mu(\{x \in \Omega \,:\, f(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon.} \tag{7.1}$$

---

## 4.8 Die Funktionenräume $L^p(\Omega)$

Nachfolgend bezeichne $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet, und es sei $X := \{f : \Omega \to \mathbf{K} \,:\, f \text{ meßbar}\}$ gesetzt. Dann ist $X$ ein Vektorraum über $\mathbf{K}$. Wir erklären auf $X$ eine *Äquivalenzrelation* gemäß

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x), \quad x \in \Omega \text{ f.ü.}$$

Diese induziert auf $X$ eine Zerlegung in Klassen $[f]$ äquivalenter meßbarer Funktionen. Jeweils zwei Vertreter $f, g \in [f]$ derselben Äquivalenzklasse unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge. Es bezeichne $\tilde{X}$ den so konstruierten Vektorraum der Äquivalenzklassen. Anstelle von $[f] \in \tilde{X}$ schreiben wir einfacher $f \in \tilde{X}$ und meinen damit einen beliebigen Vertreter $f \in [f]$.

**Definition 4.14** *Sei $f \in \tilde{X}$ gegeben.*

- *Eine Zahl $c \ge 0$ heiße eine* **wesentliche Schranke** *von $f$ $:\Leftrightarrow$*

$$\boxed{\exists\, N \subset \Omega \text{ Nullmenge} \,:\, |f(x)| \le c \quad \forall\, x \in \Omega \setminus N}$$

- *$f$ heiße* **wesentlich beschränkt**, *wenn der folgende Ausdruck endlich ist:*

$$\boxed{\operatorname{ess.sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf\{c \geq 0 \,:\, c \text{ ist wesentl. Schranke von } f\} = \inf_N \sup_{x\in\Omega\setminus N} |f(x)|.}$$

*Dabei wird im letzten Ausdruck das Infimum über alle Nullmengen $N \subset \Omega$ gebildet.*

Wir betrachten jetzt die folgenden Unterräume von $\tilde{X}$:

**Definition 4.15** *Es gelte für $1 \leq p < \infty$:*

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &:= \Big\{ f \in \tilde{X} \,:\, \|f\|_{p;\Omega} := \Big( \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}, \\ L^p_{loc}(\Omega) &:= \Big\{ f \in \tilde{X} \,:\, \int_{\Omega_0} |f(x)|^p \, dx < \infty \;\; \forall\, \Omega_0 \subset\subset \Omega,\ \Omega_0 \text{ meßbar} \Big\}, \\ L^\infty(\Omega) &:= \Big\{ f \in \tilde{X} \,:\, \|f\|_{\infty;\Omega} := \operatorname{ess.sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß hier Banach–Räume vorliegen, beweisen wir vorbereitend den folgenden

**Satz 4.32** (a) *Für jedes Paar konjugierter Exponenten $p, q$ mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und für $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ gilt:*

$$\boxed{\text{(i)}\;\; fg \in L^1(\Omega), \qquad \text{(ii)}\;\; \|fg\|_{1;\Omega} \leq \|f\|_{p;\Omega} \cdot \|g\|_{q;\Omega} \quad \text{(Hölder–Ungleichung)}} \tag{8.1}$$

(b) *Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f, g \in L^p(\Omega)$ gilt:*

$$\boxed{\|f+g\|_{p;\Omega} \leq \|f\|_{p;\Omega} + \|g\|_{p;\Omega} \quad \text{(Minkowski–Ungleichung)}} \tag{8.2}$$

*Beweis:* (a) Das Produkt $fg$ ist wegen Satz 4.15 meßbar. Nach dem Majorantenkriterium Satz 4.25 genügt es, $|fg|$ durch eine integrierbare Funktion abzuschätzen. Dazu setzen wir in der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung (2.2), Abschnitt 0.2, die Zahl $\epsilon = 1$ sowie $a := |f(x)|$, $b := |g(x)|$ und erhalten

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q.$$

Es ergibt sich wegen des Monotoniesatzes 4.19(a) sofort $fg \in L^1(\Omega)$. Speziell für $\|f\|_{p;\Omega} = 1 = \|g\|_{q;\Omega}$ resultiert darüber hinaus

$$\|fg\|_{1;\Omega} = \int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \leq \frac{1}{p} \|f\|^p_{p;\Omega} + \|g\|^q_{q;\Omega} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{8.3}$$

Für $f = 0$ und/oder $g = 0$ ist die Ungleichung (8.1) trivial. Für $f \neq 0 \neq g$ setzen wir $u := f/\|f\|_{p;\Omega}$, $v := g/\|g\|_{q;\Omega}$ und erhalten aus (8.3)

$$\frac{1}{\|f\|_{p;\Omega} \cdot \|g\|_{q;\Omega}} \|fg\|_{1;\Omega} = \|uv\|_{1;\Omega} \leq 1,$$

was uns direkt auf die Hölder–Ungleichung führt.

(b) Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind unmittelbar aus den Definitionen abzuleiten. Wir setzen $1 < p < \infty$ voraus und argumentieren wie im Beweis von Satz 2.1(b). Für $f, g \in L^p(\Omega)$ sind $f + g$ und $|f + g|^p$ meßbar (Satz 4.15), und es resultiert aus der $\Delta$–Ungleichung des Betrages $|\cdot|$:

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \leq (|f(x)| + |g(x)|)\, |f(x) + g(x)|^{p-1}.$$

Integration über $\Omega$ und Anwenden der Ungleichung (8.1) auf der rechten Seite liefert unter Berücksichtigung von $q = p/(p-1)$:

$$\|f + g\|_{p;\Omega}^p \leq (\|f\|_{p;\Omega} + \|g\|_{p;\Omega})\, \|f + g\|_{p;\Omega}^{p-1}.$$

Für $\|f + g\|_{p;\Omega} \neq 0$ ergibt sich daraus die MINKOWSKI–Ungleichung (8.2) nach Division durch $\|f + g\|_{p;\Omega}^{p-1}$. Für $\|f + g\|_{p;\Omega} = 0$ ist die Ungleichung (8.2) aber trivial. □

Nun erschließen wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts.

**Satz 4.33** *Die Räume $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{p;\Omega})$ sind für $1 \leq p \leq \infty$* BANACH*–Räume.*

*Beweis:* Die MINKOWSKI–Ungleichung (8.2) zeigt, daß $L^p(\Omega)$ ein Vektorraum über $\mathbf{K}$ ist. Wegen (8.2) und Satz 4.24(d) gelten die Normaxiome (N1)–(N3), wobei es wesentlich ist, daß Funktionen miteinander identifiziert werden, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Wir müssen die Vollständigkeit zeigen und betrachten zunächst den Fall $1 \leq p < \infty$. Sei $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine CAUCHY–Folge. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\epsilon)$ mit $\|f_j - f_k\|_{p;\Omega} \leq \epsilon \;\forall\, j, k \geq N$. Wählen wir speziell $\epsilon := 2^{-i}$, $i \in \mathbf{N}$, so finden wir ein $k_i$ mit $\|f_{k_i+1} - f_{k_i}\|_{p;\Omega} \leq 2^{-i}$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die so konstruierte Teilfolge $(f_{k_i})_{i\in\mathbf{N}}$ wieder mit $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ und haben dann

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{p;\Omega} \leq 2^{-k} \quad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Die Funktionen $g_m(x) := \sum_{k=1}^{m} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$, $m \in \mathbf{N}$, genügen der Abschätzung

$$\|g_m\|_{p;\Omega} \leq \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \leq 1 \quad \forall\, m \in \mathbf{N},$$

was sich durch wiederholte Anwendung der $\Delta$–Ungleichung (8.2) ergibt. Die Folge $(g_m^p)_{m\in\mathbf{N}} \subset L^1(\Omega)$ ist monoton mit beschränkter Integralfolge $\left(\int_\Omega g_m^p(x)\,dx\right)_{m\in\mathbf{N}}$. Somit liefert der Satz 4.22 von B. LEVI die Existenz einer Funktion $g$ mit $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$, $x \in \Omega$ f.ü. und $g^p \in L^1(\Omega)$ sowie

$$\int_\Omega g^p(x)\,dx = \int_\Omega (\lim_{m\to\infty} g_m^p(x))\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega g_m^p(x)\,dx \leq 1.$$

Es folgt $g(x) < \infty$, $x \in \Omega$ f.ü., und somit auch die absolute Konvergenz der Teleskopreihe

$$f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) =: f(x), \quad x \in \Omega \text{ f.ü.}$$

nach dem Majorantenkriterium für Zahlenreihen. Wird jetzt das Lemma von FATOU (Satz 4.26) angewendet, so gilt für jedes $\epsilon > 0$ und für hinreichend große Zahlen $j, k \in \mathbf{N}$:

$$\int_\Omega |f(x) - f_k(x)|^p\,dx = \int_\Omega (\lim_{j\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)|^p)\,dx \leq \lim_{j\to\infty} \|f_j - f_k\|_{p;\Omega}^p \leq \epsilon.$$

Hieraus folgt $\|f - f_k\|_{p;\Omega}^p \leq \epsilon$, also die Konvergenz $f_k \to f$ in $L^p(\Omega)$ sowie $f - f_k \in L^p(\Omega)$ und somit auch $f = (f - f_k) + f_k \in L^p(\Omega)$. Für die gegebene CAUCHY–Folge haben wir eine in $L^p(\Omega)$ konvergente Teilfolge konstruiert. Im Beweis zur Folgerung 1.5 haben wir gezeigt, daß dann auch die ganze Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Für $p = \infty$ argumentieren wir in der folgenden Weise: Zu gegebener CAUCHY–Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ existiert eine Nullmenge $N \subset \Omega$ mit

$$|f_k(x)| \leq \|f_k\|_{\infty;\Omega}, \qquad |f_j(x) - f_k(x)| \leq \|f_j - f_k\|_{\infty;\Omega} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus N \ \forall\, j,k \in \mathbf{N}.$$

Hier haben wir benutzt, daß die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder Nullmenge ist (Bemerkung 4.2). Auf $\Omega \setminus N$ liegt somit gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{j,k\to\infty} \sup_{x\in\Omega\setminus N} |f_j(x) - f_k(x)| = 0$$

vor, und daraus ergibt sich mit den Standardargumenten der gleichmäßigen Konvergenz die Existenz des Grenzwertes $f_k \to f \in L^\infty(\Omega)$. □

Im Sonderfall $p = 2$ liegt ein HILBERT–Raum vor:

**Satz 4.34** *Versehen mit den Skalarprodukt*

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f,g \in L^2(\Omega),}$$

*ist* $(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein* HILBERT*–Raum.*

Hat $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Maß $\mu(\Omega) < \infty$, so gelten die folgenden Einbettungssätze, die bei unbeschränktem Maß falsch sind, wie bereits einfache Beispiele zeigen:

**Satz 4.35** *Sei* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *ein Gebiet mit* $\mu(\Omega) < \infty$. *Dann gilt:*

(a) *Für* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *ist die Einbettung* $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *stetig mit*

$$\boxed{\|f\|_{p;\Omega} \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{q;\Omega} \quad \forall\, f \in L^q(\Omega).} \tag{8.4}$$

(b) *Aus* $f \in L^p(\Omega)$ *für alle* $1 \leq p < \infty$ *und* $\|f\|_{p;\Omega} \leq K$ *folgt* $f \in L^\infty(\Omega)$ *und* $\|f\|_{\infty;\Omega} \leq K$.

*Beweis:* (a) Wir wenden die HÖLDER–Ungleichung (8.1) auf das Produkt $1 \cdot |f|^p$ an:

$$\|f\|_{p;\Omega}^p = \int_\Omega 1 \cdot |f(x)|^p\,dx \leq \|1\|_{q/(q-p);\Omega} \cdot \|f\|_{q;\Omega}^p \quad \forall\, f \in L^q(\Omega).$$

Zieht man die $p$–te Wurzel, so ergibt sich die behauptete Ungleichung.

(b) Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K = 1$ annehmen; ansonsten gehen wir zur Funktion $\frac{1}{K} f$ über. Angenommen, es gelte $\|f\|_{\infty;\Omega} \geq 1+\epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Wir betrachten die meßbare Niveaumenge $A := \{x \in \Omega : |f(x)| \in [1+\frac{\epsilon}{2}, \infty]\}$. Wäre $\mu(A) = 0$, so wäre $|f(x)| < 1+\frac{\epsilon}{2}$ $\forall\, x \in \Omega\setminus A$. Es folgte $\|f\|_{\infty;\Omega} \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}$, im Widerspruch zur Annahme. Nun haben wir wegen $\mu(A) > 0$

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx \geq \int_A |f(x)|^p\,dx \geq \mu(A)\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^p$$

und somit auch $\|f\|_{p;\Omega} \geq (1 + \frac{\epsilon}{2})\,(\mu(A))^{1/p}$. Für hinreichend großes $p$ gilt $\mu(A) > (\frac{2}{2+\epsilon})^p$, woraus dann der Widerspruch $\|f\|_{p;\Omega} > 1$ folgt. □

## 4.9 Dichte Unterräume von $L^p(\Omega)$ und der FRIEDRICHS-sche Mollifier

Die zentrale Aussage dieses Abschnitts lautet, daß der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ der Testfunktionen dicht liegt in jedem der Räume $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Das heißt, jede Funktion $f \in L^p(\Omega)$ kann in der $L^p$–Norm beliebig genau durch Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ approximiert werden. Diese Aussage wird für $p = \infty$ falsch. Wir zeigen zunächst in einem vorbereitenden Schritt die Approximierbarkeit von $f \in L^p(\Omega)$ durch $C_0^0(\Omega)$–Funktionen.

**Satz 4.36** *Für Gebiete $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ und für jedes $1 \le p < \infty$ gilt:*

(a) *$C_0^0(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$.*

(b) *$L^p(\Omega)$ ist separabel.*

*Beweis:* (a) Es sei $f \in L^p(\Omega)$ fest gewählt. Wir setzen für festes $p \in [1, \infty)$ jeweils $\Omega_j := \Omega \cap B_j(0)$ sowie $f_j := \chi_{\Omega_j} \cdot |f|^p$, $j \in \mathbf{N}$. Auf die Folge $(f_j)_{j \in \mathbf{N}} \subset L^1(\Omega)$ trifft der Satz 4.21 von der monotonen Konvergenz zu:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_j} |f(x)|^p \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x) \, dx = \int_\Omega (\lim_{j\to\infty} f_j(x)) \, dx = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx = \|f\|_{p;\Omega}^p.$$

Daher existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $j = j(\epsilon)$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{p;\Omega} < \frac{\epsilon}{3}$, wobei $\tilde{f} := \chi_{\Omega_j} \cdot f$ gelte. Sei ferner

$$\tilde{f}_k(x) := \begin{cases} \tilde{f}(x) & : |\tilde{f}(x)| \le k, \\ 0 & : \text{sonst}, \end{cases} \qquad k \in \mathbf{N},$$

gesetzt. Die Folge der Niveaumengen $A_k := \{x \in \Omega : |\tilde{f}(x)| > k\}$ erfüllt $\mu(A_k) \to 0$ $(k \to \infty)$, denn es gilt ja wegen $|\tilde{f}|^p \in L^1(\Omega)$:

$$\|\tilde{f}\|_{p;\Omega}^p = \int_\Omega |\tilde{f}(x)|^p \, dx \ge \int_{A_k} |\tilde{f}(x)|^p \, dx \ge k^p \cdot \mu(A_k).$$

Also folgt aus der Absolutstetigkeit (Satz 4.29) des LEBESGUE–Integrals:

$$\int_\Omega |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_k(x)|^p \, dx = \int_{A_k} |\tilde{f}(x)|^p \, dx \to 0 \ (k \to \infty).$$

Das heißt, zur obigen Vorgabe $\epsilon > 0$ gibt es ein $k = k(\epsilon)$ derart, daß die Funktion $g(x) := \tilde{f}_k(x)$ der Abschätzung $\|\tilde{f} - g\|_{p;\Omega} < \frac{\epsilon}{3}$ genügt. Mit Hilfe des Satzes 4.31 von LUSIN erschließen wir ferner die Existenz einer Funktion $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ mit $\|\varphi\|_{\infty;\Omega} \le k$ und

$$\mu(\{x \in \Omega : g(x) \ne \varphi(x)\}) < \left(\frac{\epsilon}{6k}\right)^p.$$

Aus der $\Delta$–Ungleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_{p;\Omega} &\le \|f - \tilde{f}\|_{p;\Omega} + \|\tilde{f} - g\|_{p;\Omega} + \|g - \varphi\|_{p;\Omega} \\ &< \frac{2\epsilon}{3} + \|g - \varphi\|_{\infty;\Omega} \cdot \mu(\{x \in \Omega : g(x) \ne \varphi(x)\})^{1/p} < \frac{2\epsilon}{3} + 2k \, \frac{\epsilon}{6k} = \epsilon, \end{aligned}$$

und somit die behauptete Dichtheit von $C_0^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.

(b) Diese Aussage beweist man unter Zuhilfenahme des Approximationssatzes von WEIERSTRASS, der besagt, daß der Polynomring $\mathbf{Q}[x]$ aller Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht ist in $C(K)$ für jedes Kompaktum $K \subset \mathbf{R}^n$. Wir können eine Überdeckung $\Omega \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} K_k$ durch kompakte Teilmengen $K_k \subset \Omega$ angeben; zum Beispiel leisten die Mengen

$$K_k := \{x \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{k}\} \cap B_k^*(0), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{9.1}$$

das Verlangte. Wir setzen $\mathbf{Q}_k[x] := \{P \cdot \chi_{K_k} \,:\, P \in \mathbf{Q}[x]\}$. Nun existiert wegen (a) zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ und zu $\epsilon > 0$ ein $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ mit $\|f - \varphi\|_{p;\Omega} < \frac{\epsilon}{2}$. Weiter gibt es zu $\varphi$ ein $k \in \mathbf{N}$ und ein $P_k \in \mathbf{Q}_k[x]$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_k$ und $\|\varphi - P_k\|_{\infty;K_k} < \frac{\epsilon}{2}\,\mu(K_k)^{-1/p}$. Aus der $\Delta$–Ungleichung erhalten wir dann

$$\|f - P_k\|_{p;\Omega} \le \|f - \varphi\|_{p;\Omega} + \|\varphi - P_k\|_{p;K_k} < \frac{\epsilon}{2} + \|\varphi - P_k\|_{\infty;K_k} \cdot \mu(K_k)^{1/p} = \epsilon.$$

Da $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{Q}_k[x]$ abzählbar ist, haben wir schon die Separabilität von $L^p(\Omega)$ bewiesen. □

Die Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ zeigen wir jetzt mit Hilfe des Satzes 4.36 durch ein *Glättungsverfahren*, welches den FRIEDRICHSschen **Glättungsoperator** (= Mollifier) verwendet. Hierzu benötigen wir eine Funktion $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ mit den Eigenschaften (i) $\omega \ge 0$, (ii) $\omega(x) = 0 \;\forall\; |x| > 1$ und (iii) $\int_{\mathbf{R}^n} \omega(x)\,dx = 1$. Eine solche Funktion ist zum Beispiel gegeben durch

$$\omega(x) := \begin{cases} c \cdot \exp\Big(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\Big) & : \; |x| < 1, \\ 0 & : \; \text{sonst.} \end{cases} \tag{9.2}$$

Die Konstante $c > 0$ wird so gewählt, daß die Normierungsbedingung (iii) erfüllt ist. Die partiellen Ableitungen von $\omega$ sind von der Form $D^\rho\omega(x) = \omega(x) \cdot R_\rho(x)$ mit einer rationalen Funktion $R_\rho$, die nur für $|x| = 1$ singulär wird. Ihre Singularitäten werden aber durch das exponentielle Abklingverhalten $\omega(x) \to 0$ für $0 \le |x| \to 1-$ kompensiert. Es ergibt sich deshalb $\omega \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sowie $\operatorname{supp}\omega = B_1^*(0)$. Vermöge der homothetischen Transformation

$$\omega_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\,\omega\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big), \quad \epsilon > 0, \;\; x \in \mathbf{R}^n, \tag{9.3}$$

erreicht man $\omega_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp}\omega_\epsilon = B_\epsilon^*(0)$ und $\int_{\mathbf{R}^n} \omega_\epsilon(x)\,dx = 1$ für jedes $\epsilon > 0$.

**Definition 4.16** *Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ und für meßbares $K \subset \mathbf{R}^n$ mit $K \subset\subset \Omega$ sei ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ so gewählt, daß $\overline{K} \subset \Omega_0$ gelte. Wir setzen $\epsilon_0 := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega_0) > 0$ sowie für $\omega_\epsilon$ aus (9.3) und für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*

$$\boxed{(J_\epsilon f)(x) := \int\limits_\Omega \omega_\epsilon(x-y)\,f(y)\,dy = \epsilon^{-n} \int\limits_{B_\epsilon(x)} \omega\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)\,f(y)\,dy, \;\; x \in \overline{K}, \;\; 0 < \epsilon < \epsilon_0.} \tag{9.4}$$

*Dann heiße die durch (9.4) induzierte Familie $\{J_\epsilon\}_{0<\epsilon<\epsilon_0}$ die* **Familie der Glättungsoperatoren** *oder* **Mollifier**. *Mit der Variablentransformation $z := \epsilon^{-1}(x-y)$ erreicht man die äquivalente Darstellung*

$$\boxed{(J_\epsilon f)(x) = \int\limits_{B_1(0)} \omega(z)\,f(x-\epsilon z)\,dz, \quad x \in \overline{K}, \;\; 0 < \epsilon < \epsilon_0.} \tag{9.5}$$

Der Mollifier hat die folgenden Eigenschaften:

**Satz 4.37** (a) *Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} f \subset\subset \Omega$ gilt $J_\epsilon f \in C_0^\infty(\Omega)$ für alle $0 < \epsilon < \epsilon_0$.*

(b) *Falls $\varphi \in C(\Omega)$, so gilt $\|J_\epsilon \varphi - \varphi\|_{p;K} \to 0$ $(\epsilon \to 0+)$ für alle $1 \le p \le \infty$.*

(c) *Falls $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, so gilt $J_\epsilon f \in L^p(K)$ sowie $\|J_\epsilon f\|_{p;K} \le \|f\|_{p;\Omega_0}$ für $1 \le p < \infty$. Des weiteren gilt*

$$\|J_\epsilon f - f\|_{p;K} \to 0 \quad (\epsilon \to 0+).$$

*Beweis:* (a) Wir setzen in Def. 4.16 $K := \operatorname{supp} f$ und ersehen aus der Darstellung (9.5) sofort $(J_\epsilon f)(x) = 0 \ \forall\ x \in \Omega_0^c$ und $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Also gilt $\operatorname{supp}(J_\epsilon f) \subset \Omega_0$. Den Nachweis von $D^\rho J_\epsilon f \in C^\infty(\Omega)$ bewerkstelligen wir wieder exemplarisch für $\rho := e_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ im Sinne einer vollständigen Induktion. Mit $D_i^+$ bezeichnen wir wie im Beweis von Satz 2.16 den Differenzenquotienten im Punkt $x \in \Omega_0$. Für hinreichend kleines $h > 0$ gilt

$$(D_i^+ J_\epsilon f)(x) = \int\limits_K \frac{1}{h} \left(\omega_\epsilon(x + h\, e_i - y) - \omega_\epsilon(x - y)\right) f(y)\, dy.$$

Der Mittelwertsatz zeigt, daß der Differenzenquotient von $\omega_\epsilon$ gleichmäßig durch eine Konstante $M$ beschränkt ist, so daß $M \cdot |f|$ eine integrable Majorante des obigen Integranden ist. Deshalb folgern wir in Limes $h \to 0+$ aus dem LEBESGUEschen Satz 4.27 von der dominierten Konvergenz:

$$(D_i J_\epsilon f)(x) = \int\limits_K D_i \omega_\epsilon(x - y)\, f(y)\, dy, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Die Stetigkeit bezüglich $x$ ergibt sich ganz analog, und die vollständige Behauptung erschließt man durch Induktion.

(b) Auf dem Kompaktum $\overline{\Omega_0}$ ist $\varphi$ gleichmäßig stetig: $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \eta$ für $|x - y| < \delta = \delta(\eta)$ und $x, y \in \overline{\Omega_0}$. Für jede Wahl von $\epsilon > 0$ mit $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_0, \delta, \eta\}$ folgt wegen (9.5) und wegen $\int_{B_1(0)} \omega(z)\, dz = 1$:

$$\|J_\epsilon \varphi - \varphi\|_{p;K} = \begin{cases} \Big( \displaystyle\int\limits_K \Big| \int\limits_{B_1(0)} \omega(z)(\varphi(x - \epsilon z) - \varphi(x))\, dz \Big|^p\, dx \Big)^{1/p} \le \eta \cdot \mu(K)^{1/p} & : \ p \in [1, \infty), \\ \displaystyle\sup_{x \in K} \Big| \int\limits_{B_1(0)} \omega(z)(\varphi(x - \epsilon z) - \varphi(x))\, dz \Big| \le \eta & : \ p = \infty. \end{cases} \tag{9.6}$$

Nun folgt im Limes $\eta \to 0+$ die Behauptung.

(c) Zunächst gilt $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ als Folge von Satz 4.35. Ist $q := p/(p-1)$ der zu $p \in [1, \infty)$ konjugierte Exponent, so ergibt sich wegen (9.5) aus der HÖLDERschen Ungleichung:

$$|(J_\epsilon f)(x)|^p \le \Big( \int\limits_{B_1(0)} \omega(z)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} |f(x - \epsilon\, z)|\, dz \Big)^p \le \Big( \int\limits_{B_1(0)} \omega(z) |f(x - \epsilon\, z)|^p\, dz \Big) \Big( \int\limits_{B_1(0)} \omega(z)\, dz \Big)^{p/q},$$

wobei der letzte Faktor gleich 1 ist. Integration über $x \in K$ liefert unter Verwendung des Satzes von FUBINI:

$$\|J_\epsilon f\|_{p;K}^p \le \int\limits_{B_1(0)} \omega(z) \Big( \int\limits_K |f(x - \epsilon\, z)|^p\, dx \Big)\, dz \le \int\limits_{B_1(0)} \omega(z) \Big( \int\limits_{\Omega_0} |f(y)|^p\, dy \Big)\, dz = \|f\|_{p;\Omega_0} < \infty. \tag{9.7}$$

Wegen $f \in L^p(\Omega_0)$ bestimmen wir nun $\varphi \in C_0^0(\Omega_0)$ gemäß Satz 4.36(a) so, daß zu $\tilde{\eta} > 0$ die Ungleichung $\|f - \varphi\|_{p;\Omega_0} < \frac{\tilde{\eta}}{3}$ gilt. Weiter wählen wir in (9.6) $\eta > 0$ so, daß $\eta \cdot \mu(K)^{1/p} < \frac{\tilde{\eta}}{3}$ gilt. Dann folgt zusammen mit (9.7) für hinreichend kleines $\epsilon$:

$$\|J_\epsilon f - f\|_{p;K} \le \|J_\epsilon f - J_\epsilon \varphi\|_{p;K} + \|J_\epsilon \varphi - \varphi\|_{p;K} + \|\varphi - f\|_{p;K} \le 2\,\|\varphi - f\|_{p;\Omega_0} + \frac{\tilde{\eta}}{3} < \tilde{\eta}.$$

Wir haben alles bewiesen. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir das folgende Dichtheitsresultat beweisen.

**Satz 4.38** *$C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.*

*Beweis:* Zu $f \in L^p(\Omega)$ und zu $\eta > 0$ existiert gemäß Satz 4.36(a) ein $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ mit $\|f - \varphi\|_{p;\Omega} < \frac{\eta}{2}$. Gemäß Satz 4.37(a) ist $J_\epsilon \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, und wir können wegen Satz 4.37(c) $\epsilon > 0$ so wählen, daß $\operatorname{supp} J_\epsilon \varphi \subset K \subset\subset \Omega$ sowie $\|J_\epsilon \varphi - \varphi\|_{p;K} = \|J_\epsilon \varphi - \varphi\|_{p;\Omega} < \frac{\eta}{2}$ gelten. Daraus ergibt sich

$$\|f - J_\epsilon \varphi\|_{p;\Omega} \le \|f - \varphi\|_{p;\Omega} + \|\varphi - J_\epsilon \varphi\|_{p;\Omega} < \eta,$$

und das ist die behauptete Dichtheit. □

---

## 4.10 Maßkonvergenz

Um allgemein zu bleiben, setzen wir in diesem Abschnitt die Vorgabe eines vollständigen $\sigma$–finiten Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ voraus. Insbesondere wird der LEBESGUEsche Maßraum $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}, m)$ miteinbezogen. Der folgende Konvergenzbegriff für Folgen meßbarer Funktionen ist schwächer als der Begriff der punktweisen Konvergenz f.ü.

**Definition 4.17** *Sei $A \in \mathcal{A}$ eine meßbare Menge. Eine Folge $f_k : A \to \mathbf{K}$ meßbarer Funktionen heiße* **maßkonvergent** *gegen eine meßbare Funktion $f : A \to \mathbf{K}$ $:\Leftrightarrow$*

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon) : \mu(\{x \in A : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon \quad \forall\, k \ge N.} \tag{10.1}$$

Die punktweise Konvergenz f.ü. impliziert stets Maßkonvergenz:

**Satz 4.39** *Ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ meßbarer Funktionen auf $A \in \mathcal{A}$ punktweise f.ü. konvergent gegen $f : A \to \mathbf{K}$, so ist die Folge auch maßkonvergent zum selben Grenzwert.*

*Beweis:* Wegen Satz 4.14(b) ist $f$ meßbar, und aus dem Satz 4.18 von EGOROFF folgt zu jedem $\epsilon > 0$ die Existenz einer Menge $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$ sowie $f_k \to f$ gleichmäßig auf $A_\epsilon$. Das heißt, wir finden eine Zahl $N = N(\epsilon)$ mit $|f_k(x) - f(x)| \le \epsilon\ \forall\, k \ge N\ \forall\, x \in A_\epsilon$, und dies ist die Aussage (10.1). □

Die Umkehrung dieses Satzes ist i.a. falsch, wie folgendes Beispiel lehrt.

**BSP. (4.10.1)** Im LEBESGUEschen Maßraum $(\mathbf{R}, \mathcal{A}, m)$ sei $A := (0,1)$ gesetzt. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_k(x) := \chi_{(j\cdot 2^{-i},(j+1)\cdot 2^{-i})}(x), \quad x \in A,\ \ k := 2^i + j,\ 0 \le j < 2^i,\ i \in \mathbf{N}_0.$$

Die ersten Funktionen dieser Folge lauten:

$$f_1(x) = 1 \ \forall\, x \in (0,1), \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 \ : \ x \in (0, \frac{1}{2}), \\ 0 \ : \ x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1 \ : \ x \in (\frac{1}{2}, 1), \\ 0 \ : \ x \in (0, \frac{1}{2}], \end{cases}$$

usw. Die Menge $N := \{2^{-i} \ : \ i \in \mathbf{N}\} \subset A$ ist eine Nullmenge. Für jedes $x \in A \setminus N$ gibt es eine unendliche Teilfolge $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}$ mit $f_k(x) = 1 \ \forall\, k \in \mathbf{N}_1$ und gleichermaßen eine unendliche Teilfolge $\mathbf{N}_2 \subset \mathbf{N}$ mit $f_k(x) = 0 \ \forall\, k \in \mathbf{N}_2$. Also kann $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ auf $A \setminus N$ nicht punktweise konvergieren. Hingegen liegt Maßkonvergenz vor: Zu $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $N(\epsilon)$ mit $f_k(x) = 0 \ \forall\, k \geq N(\epsilon)$ außerhalb des Intervalles $I_\epsilon := (j \cdot 2^{-i}, (j+1) \cdot 2^{-i})$ der Länge $m(I_\epsilon) = 2^{-i} < \epsilon$.

Hingegen konvergiert eine Teilfolge punktweise f.ü.

**Satz 4.40** *Ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ meßbarer Funktionen auf $A \in \mathcal{A}$ maßkonvergent gegen die meßbare Funktion $f : A \to \mathbf{K}$, so gilt für eine Teilfolge $f_{k_j}(x) \to f(x)$, $x \in A$ f.ü.*

*Beweis:* Wegen (10.1) finden wir sicher einen Index $k_1$ mit $\mu(A_1 := \{x \in A \ : \ |f_{k_1}(x) - f(x)| > 1\}) < 2^{-1}$. Weiter finden wir nun einen Index $k_2 > k_1$ mit $\mu(A_2 := \{x \in A \ : \ |f_{k_2}(x) - f(x)| > \frac{1}{2}\}) < 2^{-2}$. Allgemein finden wir eine Teilfolge $k_1 < k_2 < \cdots < k_j \cdots$ mit

$$\mu\Big(A_j := \{x \in A \ : \ |f_{k_j}(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\}\Big) < 2^{-j} \quad \forall\, j \in \mathbf{N}.$$

Wir zeigen $f_{k_j}(x) \to f(x)$, $x \in A$ f.ü. Dazu wählen wir für $\epsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\epsilon)$ so, daß $\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} 2^{-j} < \epsilon$ gilt. Dann folgt $\mu\Big(B_N := \bigcup\limits_{j=N+1}^{\infty} A_j\Big) < \epsilon$ sowie $B_N \supset B_{N+1} \supset \cdots$. Für jedes $x \in B_N^c$ ergibt sich aber $|f_{k_j}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \ \forall\, j \geq N$, so daß gleichmäßige Konvergenz $f_{k_j} \to f$ auf $B_N^c$ vorliegt. Der Satz 4.18 von EGOROFF liefert in dieser Situation die behauptete punktweise Konvergenz f.ü. □

Wir betrachten nun den Spezialfall des LEBESGUE–Maßes in $\mathbf{R}^n$.

**Satz 4.41** *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und gelte $f_k \to f$ in $L^p(\Omega)$ für ein $p \in [1, \infty]$. Dann folgt $f_k \to f$ dem Maße nach und darüber hinaus für eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbf{N}}$ auch $f_{k_j}(x) \to f(x)$, $x \in \Omega$ f.ü.*

*Beweis:* Die punktweise Konvergenz f.ü. erhalten wir aus Satz 4.40, sofern die Maßkonvergenz gezeigt ist. Für letztere genügt es, den Fall $p = 1$ zu betrachten, denn es gilt ja $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ für beschränkte Mengen $\Omega$. Betrachten wir zu $f_k \in L^1(\Omega)$ und $j \in \mathbf{N}$ die paarweise disjunkten Mengen

$$A_{0,k} := \{x \in \Omega \ : \ |f_k(x) - f(x)| \geq 1\}, \quad A_{j,k} := \{x \in \Omega \ : \ \frac{1}{j+1} \leq |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{j}\},$$

so ist sicher $\Omega = \bigcup\limits_{j\in\mathbf{N}_0} A_{j,k}$ und

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k(x) - f(x)|\, dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{A_{j,k}} |f_k(x) - f(x)|\, dx \geq \frac{1}{i+1} \lim_{k\to\infty} \mu(A_{i,k}) \geq 0 \quad \forall\, i \in \mathbf{N}_0.$$

Hieraus erschließt man bereits die Maßkonvergenz (10.1). □

## 4.11 Der Dualraum von $L^p(\Omega)$

In Satz 2.8 haben wir gezeigt, daß der Dualraum des Folgenraumes $\ell^p$ durch eine isometrische Isomorphie mit dem Raum $\ell^q$ verbunden ist: $\ell^{p*} \cong \ell^q$ für $1 \leq p < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir wollen hier ein ähnliches Resultat für die Räume $L^p(\Omega)$ zeigen, was allerdings technisch aufwendiger ist. Bei dem in der Literatur am häufigsten beschriebenen Weg zum Nachweis von $L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ wird das Theorem von RADON–NIKODYM verwendet, welches eine Aussage über die Darstellbarkeit von absolut–stetigen signierten endlichen Maßen eines vollständigen $\sigma$–finiten Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ trifft. Wir verweisen zum Beispiel auf B.D. CRAVEN, Lebesgue Measure & Integral. Pitman Publishing, Boston 1982 oder C. GOFFMAN/G. PEDRICK, First Course in Functional Analysis. Prentice–Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1965. Wir werden den maßtheoretischen Weg hier nicht beschreiten, sondern den Zugang über die Theorie der gleichmäßig konvexen Räume wählen, wie er zum Beispiel in F. HIRZEBRUCH/W. SCHARLAU, Einführung in die Funktionalanalysis. BI–HTB 296a*, Mannheim 1971, beschrieben wird. Bei diesem Zugang werden vier *Parallelogramm–Ungleichungen* verwendet, die mit elementaren Mitteln der Analysis beweisbar sind. Wir verzichten auf deren Beweis und verweisen auf F. HIRZEBRUCH/W. SCHARLAU, l.c., §17 und R.A. ADAMS, Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975, pp.34–38.

**Satz 4.42 (Ungleichungen von CLARKSON)**
*Für ein Paar konjugierter Exponenten $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und für jedes Funktionenpaar $f, g \in L^p(\Omega)$ gelten:*

(a) *Falls $1 < p \leq 2$, dann*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}, \tag{11.1}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \geq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p. \tag{11.2}$$

(b) *Falls $2 \leq p < \infty$, dann*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p, \tag{11.3}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \geq \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}. \tag{11.4}$$

Mit dem folgenden Begriff der gleichmäßigen Konvexität wird eine spezielle Eigenschaft von normierten Räumen charakterisiert.

**Definition 4.18** *Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ heiße* **gleichmäßig konvex** $:\Leftrightarrow$ *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ mit*

$$\boxed{\left(x, y \in X \wedge \|x\|_X = 1 = \|y\|_X \wedge \|x - y\|_X \geq \epsilon\right) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X \leq 1 - \delta.} \tag{11.5}$$

Anschaulich bedeutet die Bedingung (11.5), daß die Einheitskugel in $X$ *strikt* konvex ist: Für je zwei Punkte $x, y$ auf der Einheitssphäre liegt der Streckenmittelpunkt $\frac{x+y}{2}$ in der offenen Einheitskugel. Es kann allgemein gezeigt werden, daß jeder gleichmäßig konvexe BANACH–Raum reflexiv ist. Dies ist die Aussage des Satzes von MILMAN (vgl. F. HIRZEBRUCH/W. SCHARLAU, l.c., §18), die wir hier jedoch nicht verwenden, obwohl die Räume $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, gleichmäßig konvex sind:

**Satz 4.43** *Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex.*

*Beweis:* Es seien $f, g \in L^p(\Omega)$ mit $\|f\|_p = 1 = \|g\|_p$ und $\|f - g\|_p \geq \epsilon$ zu $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann folgt für $1 < p \leq 2$ aus (11.1):

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^q \leq 1 - 2^{-q}\epsilon^q,$$

sowie für $2 \leq p < \infty$ aus (11.3):

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \leq 1 - 2^{-p}\epsilon^p.$$

Hierbei ist $\epsilon > 0$ jeweils so einzuschränken, daß die rechten Ungleichungsseiten positiv sind. Setzen wir $\delta := 1 - (1 - 2^{-q}\epsilon^q)^{1/q}$ bzw. $\delta := 1 - (1 - 2^{-p}\epsilon^p)^{1/p}$, so resultiert daraus bereits die behauptete gleichmäßige Konvexität. □

Beziehen wir für ein Paar konjugierter Exponenten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Grenzfälle $p = 1$, $q = \infty$ und $p = \infty$, $q = 1$ mit ein, so wird durch die Vorschrift

$$\ell_g(f) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \qquad f \in L^p(\Omega),$$

für jedes $g \in L^q(\Omega)$ ein stetiges lineares Funktional $\ell_g \in L^p(\Omega)^*$ induziert. Denn es folgt ja aus der HÖLDER–Ungleichung (8.1):

$$|\ell_g(f)| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

was auch offensichtlich die Grenzfälle $p = 1$, $q = \infty$ und $p = \infty$, $q = 1$ mit einschließt. Die Stetigkeit von $\ell_g$ ist damit gewährleistet, während die Linearität offenkundig ist. Es erhebt sich die Frage, für welche $p$ die Abbildung $L^q(\Omega) \ni g \mapsto \ell_g \in L^p(\Omega)^*$ surjektiv ist. Wir beweisen:

**Satz 4.44 (RIESZscher Darstellungssatz für $L^p(\Omega)^*$)**
*Für festes $1 \leq p < \infty$ sei $\ell \in L^p(\Omega)^*$ gegeben. Dann existiert für $q := p/(p-1)$ genau ein $g \in L^q(\Omega)$ mit*

$$\boxed{\ell(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \quad \forall\, f \in L^p(\Omega).} \tag{11.6}$$

*Darüber hinaus gilt $\|g\|_q = \|\ell\|_{L^p(\Omega)^*}$, also $L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)$.*

Wir bereiten den Beweis dieses Satzes durch das folgende Hilfsresultat vor:

**Satz 4.45** *Für festes $1 < p < \infty$ und für $\ell_1, \ell_2 \in L^p(\Omega)^*$ mit $\|\ell_1\|_{L^p(\Omega)^*} = 1 = \|\ell_2\|_{L^p(\Omega)^*}$ existiere ein $u \in L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_p = 1$ und $\ell_1(u) = 1 = \ell_2(u)$. Dann folgt $\ell_1 = \ell_2$.*

*Beweis:* Andernfalls existiert ein $f \in L^p(\Omega)$ mit $\ell_1(f) \neq \ell_2(f)$. Für $\lambda := -(\ell_1(f)+\ell_2(f))/(\ell_1(f)-\ell_2(f))$ und $\mu := 2/(\ell_1(f)-\ell_2(f))$ erreicht man durch die Substitution $v := \lambda u + \mu f$:

$$\ell_1(v) - \ell_2(v) = 2, \qquad \ell_1(v) = 1, \qquad \ell_2(v) = -1.$$

Nach Voraussetzung gilt ja $\|\ell_1\|_{L^p(\Omega)^*} = 1 = \|\ell_2\|_{L^p(\Omega)^*}$, so daß wegen $\ell_1(u+tv) = 1+t,\ \ell_2(u-tv) = 1+t\ \forall\, t>0$ folgen muß:

$$\|u+tv\|_p \geq 1+t, \qquad \|u-tv\|_p \geq 1+t, \quad t>0.$$

Für $1 < p \leq 2$ resultiert deshalb aus (11.2):

$$\begin{aligned} 1 + t^p \|v\|_p^p &= \Big\| \frac{(u+tv)+(u-tv)}{2} \Big\|_p^p + \Big\| \frac{(u+tv)-(u-tv)}{2} \Big\|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u+tv\|_p^p + \frac{1}{2}\|u-tv\|_p^p \geq (1+t)^p, \end{aligned}$$

und für $2 \leq p < \infty$ erhält man aus (11.4):

$$\begin{aligned} 1 + t^q \|v\|_p^q &= \Big\| \frac{(u+tv)+(u-tv)}{2} \Big\|_p^q + \Big\| \frac{(u+tv)-(u-tv)}{2} \Big\|_p^q \\ &\geq \Big(\frac{1}{2}\|u+tv\|_p^p + \frac{1}{2}\|u-tv\|_p^p\Big)^{q-1} \geq (1+t)^q. \end{aligned}$$

Da keine der beiden Ungleichungen für alle $t > 0$ richtig sein kann, muß notwendigerweise die Prämisse $\ell_1(f) \neq \ell_2(f)$ falsch gewesen sein. Es gilt im Gegenteil die behauptete Eindeutigkeit $\ell_1 = \ell_2$. □

*Beweis* von Satz 4.44: Wir zeigen in einem ersten Schritt die Behauptung für Indizes $1 < p < \infty$. Den Fall $p = 1$ behandeln wir anschließend durch Grenzwertbildung $p \to 1+$. Es sei $\ell \in L^p(\Omega)^*$ mit $\|\ell\|_{L^p(\Omega)^*} = 1$ vorgegeben. Nach Definition der Norm existiert eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset L^p(\Omega)$ mit $\|u_k\|_p = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} |\ell(u_k)| = 1$. Indem wir $u_k$ mit der komplexen Zahl $\alpha_k := e^{-i\arg \ell(u_k)}$ multiplizieren, können wir stets $\ell(u_k) \geq 0$ und $\ell(u_k) \to 1$ erreichen. Durch eventuelles Fortlassen endlich vieler Folgenglieder darf sogar $\ell(u_k) > \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden. Wir zeigen, daß die so modifizierte Folge $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine CAUCHY–Folge ist. Denn andernfalls gibt es ein $\epsilon > 0$ und Teilfolgen $j_i \to \infty$, $k_i \to \infty$ mit $\|u_{j_i} - u_{k_i}\|_p \geq \epsilon\ \forall\, i \in \mathbf{N}$. Aus der Bedingung (11.5) der gleichmäßigen Konvexität erhalten wir $\|\frac{1}{2}(u_{j_i}+u_{k_i})\|_p \leq 1-\delta\ \forall\, i \in \mathbf{N}$ mit festem $\delta > 0$. Daher gilt

$$1 \geq \ell\Big(\frac{u_{j_i}+u_{k_i}}{\|u_{j_i}+u_{k_i}\|_p}\Big) = \Big\|\frac{u_{j_i}+u_{k_i}}{2}\Big\|_p^{-1} \cdot \ell\Big(\frac{u_{j_i}+u_{k_i}}{2}\Big) \geq \frac{1}{1-\delta}\cdot\frac{1}{2}\,(\ell(u_{j_i})+\ell(u_{k_i})).$$

Für $i \to \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen $\frac{1}{1-\delta} > 1$, und dies steht im Widerspruch zur linken Ungleichungsseite. Also ist $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine CAUCHY–Folge und als solche normkonvergent gegen ein Element $u \in L^p(\Omega)$. Wir haben ferner $\|u\|_p = 1$ und $\ell(u) = 1$ wegen der Stetigkeit von $\ell$. Wir setzen nun

$$\ell_1(f) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \quad \forall\, f \in L^p(\Omega)$$

mit $g := |u|^{p-2}\bar{u} \in L^q(\Omega)$. Offenbar ist $\ell_1(u) = \|u\|_p^p = \|g\|_q^q = 1$ und somit $\|\ell_1\|_{L^p(\Omega)^*} = 1$. Deshalb folgt aus Satz 4.45 $\ell = \ell_1$, und wir haben die Darstellung (11.6) bewiesen. Darüber hinaus ist die

Abbildung $L^p(\Omega)^* \ni \ell \mapsto g \in L^q(\Omega)$ auf der Menge der beschränkten linearen Funktionale mit $\|\ell\|_{L^p(\Omega)^*} = 1$ eine Isometrie. Für $\ell \neq 0$ kann durch Normierung stets $\|\ell\|_{L^p(\Omega)^*} = 1$ erreicht werden, und für $\ell = 0$ leistet $g = 0$ das Verlangte. Weil wir umgekehrt schon gezeigt hatten, daß jedes $g \in L^q(\Omega)$ ein $\ell_g \in L^p(\Omega)^*$ erzeugt, haben wir die isometrische Isomorphie $L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)$ bereits für $p > 1$ bewiesen.

Im zweiten Schritt behandeln wir den Fall $p = 1$. Auch in diesem Fall genügt es, eine Darstellung der beschränkten linearen Funktionale $\ell \in L^1(\Omega)^*$ mit $\|\ell\|_{L^1(\Omega)^*} = 1$ anzugeben. Zunächst gelte $\mu(\Omega) < \infty$. Aus Satz 4.35 folgt dann die Inklusion $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ für alle $p > 1$ sowie

$$|\ell(f)| \leq \|f\|_1 \leq (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p =: M(p) \cdot \|f\|_p \quad \forall\, f \in L^p(\Omega).$$

Es gilt also $\ell \in L^p(\Omega)^* \ \forall\ p \geq 1$, und wir haben gemäß dem ersten Schritt eine Darstellung $g_p \in L^q(\Omega)$ mit $\|g_p\|_q \leq M(p)$ und

$$\ell_p(f) = \int_\Omega f(x) g_p(x)\, dx \quad \forall\, f \in L^p(\Omega).$$

Sind $p_1, p_2 > 1$ zwei Indizes, so gilt sicher für jedes $f \in L^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega f(x) g_{p_1}(x)\, dx = \int_\Omega f(x) g_{p_2}(x)\, dx.$$

Wird speziell $f(x) := \operatorname{sign}(g_{p_1}(x) - g_{p_2}(x))$ gesetzt, so folgt $f \in L^\infty(\Omega)$ sowie $\int\limits_\Omega |g_{p_1}(x) - g_{p_2}(x)|\, dx = 0$, also $g_{p_1}(x) = g_{p_2}(x)$, $x \in \Omega$ f.ü. Das heißt, die Funktion $g$ hängt überhaupt nicht vom Index $p$ ab, und die Anwendung von Satz 4.35(b) liefert $g \in L^\infty(\Omega)$ sowie

$$\|g\|_\infty \leq \lim_{p \to 1+} M(p) = 1.$$

Da $L^p(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ dicht liegt und da $|\ell_p(f)| \leq \|f\|_1$ gilt, kann $\ell_p$ unter Beibehaltung seiner Norm stetig auf $L^1(\Omega)$ fortgesetzt werden. Die Fortsetzung ist eindeutig, also gleich $\ell$. Wir haben die Darstellung (11.6) bewiesen:

$$\ell(f) = \int_\Omega f(x) g(x)\, dx \quad \forall\, f \in L^1(\Omega).$$

Ist $\mu(\Omega)$ nicht endlich, so nehmen wir eine Zerlegung des Gebietes $\Omega$ in abzählbar viele meßbare disjunkte Teilmengen von endlichem Maß vor. Das obige Ergebnis trifft dann auf jede dieser Teilmengen zu. □

Wir erkennen an der Darstellung (11.6), daß die *Dualitätsabbildung* $(\cdot,\cdot) : L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^* \to \mathbf{K}$ die Form

$$\boxed{(f, \ell) = \ell(f) = \int_\Omega f(x) g(x)\, dx, \qquad f \in L^p(\Omega), \quad g \in L^q(\Omega)} \tag{11.7}$$

hat. Daraus ergibt sich unmittelbar:

**Satz 4.46** *Die Räume $L^p(\Omega)$ sind reflexiv für $1 < p < \infty$.*

Ähnlich wie im Fall der Folgenräume $\ell^{\infty *} \supsetneq \ell^1$ gilt auch hier $L^\infty(\Omega)^* \supsetneq L^1(\Omega)$. Um dies zu zeigen, konstruieren wir ein beschränktes lineares Funktional $\tilde{\delta} \in L^\infty(\Omega)^*$, welches nicht in der Form (11.6) durch eine Dichtefunktion $g \in L^1(\Omega)$ dargestellt werden kann. Dazu setzen wir $\delta_x(f) := f(x)$ für jedes $x \in \Omega$. Für $f \in UCB(\Omega)$ ist $\delta_x(f)$ offenbar wohldefiniert, und es gilt $|\delta_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|_{\infty;\Omega} < \infty$. Der Fortsetzungssatz 3.12 von HAHN–BANACH garantiert nun die Existenz einer stetigen Fortsetzung $\tilde{\delta} \in L^\infty(\Omega)^*$ von $\delta_x$ auf $L^\infty(\Omega)$. Die Annahme, es gebe ein $g \in L^1(\Omega)$ mit $\tilde{\delta}(f) = \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx \;\forall\; f \in L^\infty(\Omega)$, werden wir im Rahmen der Distributionentheorie zu einem Widerspruch führen.

In den reflexiven Räumen $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, sind gemäß Definition 3.10 schwache und schwach* Topologie identisch. Die schwache Konvergenz einer Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset L^p(\Omega)$ kann deshalb in der folgenden Weise charakterisiert werden:

**Satz 4.47** *Gegeben sei eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Genau dann gilt $f_k \rightharpoonup f \in L^p(\Omega)$, wenn $\|f_k\|_p \le M \;\forall\, k \in \mathbf{N}$ mit einer Konstanten $M < \infty$ und wenn*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).} \tag{11.8}$$

*Beweis:* Wir setzen für $q := p/(p-1)$

$$\ell_k(g) := \int_\Omega f_k(x)g(x)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}, \qquad \ell(g) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \quad \forall\, g \in L^q(\Omega).$$

Dann gilt $f_k \rightharpoonup f \in L^p(\Omega)$ wegen Satz 4.44 genau für $\ell_k \rightharpoonup \ell$. Wegen Satz 3.22 und wegen der Reflexivität von $L^q(\Omega)$ ist dies genau dann der Fall, wenn $\|\ell_k\|_{L^q(\Omega)^*} \le M \;\forall\, k \in \mathbf{N}$ gilt und wenn die Folge $(\ell_k(\varphi))_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$ CAUCHY–Folge (also konvergent) ist für alle $\varphi$ in einer dichten Teilmenge $A \subset L^q(\Omega)$. Gemäß Satz 4.38 erfüllt $A := C_0^\infty(\Omega)$ diese Dichtheitsbedingung. Also gilt (11.8). Aus der Isometriebedingung $\|\ell_k\|_{L^q(\Omega)^*} = \|f_k\|_p$ von Satz 4.44 resultiert dann auch die Normbeschränktheit $\|f_k\|_p \le M$. □

**BSP. (4.11.1)** Wir betrachten $n = 1$, $\Omega := (0,T)$ für ein $T > 0$ und $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Die Folge der $T$–periodischen trigonometrischen Funktionen $f_k(x) := \sin(k\omega x)$, $k \in \mathbf{N}$, erfüllt $f_k \in L^2(\Omega)$, ferner $\|f_k\|_2 = \sqrt{T/2} < \infty \;\forall\, k \in \mathbf{N}$ sowie wegen $\sin(k\omega x) = -\frac{1}{k\omega}\frac{d}{dx}\cos(k\omega x)$ auch

$$\int_0^T f_k(x)\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{k\omega}\int_0^T \Big(\frac{d}{dx}\cos(k\omega x)\Big)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{k\omega}\int_0^T \cos(k\omega x)\varphi'(x)\,dx \to 0 \;\;\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Somit gilt $f_k \rightharpoonup 0$ nach Satz 4.47. Hingegen konvergiert $f_k$ weder punktweise f.ü. noch dem Maße nach gegen die Nullfunktion. Der Begriff der schwachen Konvergenz in $L^2(\Omega)$ ist also in der Tat – schwach.

# Kapitel 5

# Die Sobolev–Räume $W^{m,p}(\Omega)$

## 5.1 Das Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet und bezeichne $L^1_{loc}(\Omega)$ wie in Definition 4.15 den Raum der meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbf{K}$, die auf jeder meßbaren Menge $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ integrierbar sind. Ferner bezeichne $\chi_A$ die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \Omega$, $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ sonst.

**Satz 5.1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**
*Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ gelte*

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).} \tag{1.1}$$

*Dann ist $f = 0$ f.ü. in $\Omega$.*

*Beweis:* Für $\psi \in C_0^0(\Omega)$ und hinreichend kleines $\epsilon > 0$ hat der Mollifier $J_\epsilon\psi$ gemäß Satz 4.37 die Eigenschaften $J_\epsilon\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \|\psi - J_\epsilon\psi\|_{\infty;K} = 0$ für jede meßbare Teilmenge $K \subset\subset \Omega$. Insbesondere können wir $K$ so wählen, daß $\operatorname{supp}\psi \subset K$ und auch $\operatorname{supp} J_\epsilon\psi \subset K$ für $0 < \epsilon \le \epsilon_0$ und für geeignetes $\epsilon_0 > 0$ gelten. Dann folgt aus (1.1) $\int\limits_\Omega f(x)(J_\epsilon\psi)(x)\,dx = 0\ \ \forall\ 0 < \epsilon \le \epsilon_0$, und somit auch

$$0 \le \Big|\int_\Omega f(x)\psi(x)\,dx\Big| \le \lim_{\epsilon\to 0+} \Big|\int_K f(x)(\psi(x) - (J_\epsilon\psi)(x))\,dx\Big| \le \lim_{\epsilon\to 0+} \|\psi - J_\epsilon\psi\|_{\infty;K} \cdot \int_K |f(x)|\,dx = 0.$$

Also gilt $\int\limits_\Omega f(x)\psi(x)\,dx = 0\ \ \forall\ \psi \in C_0^0(\Omega)$.

Nun sei $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ offen mit $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ beliebig gewählt. Wegen $\int\limits_{\Omega_0} |f(x)|\,dx < \infty$ existiert gemäß Satz 4.29 ein $\delta > 0$ derart, daß $\int\limits_A |f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{2}$ für jede meßbare Teilmenge $A \subset \Omega_0$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt. Der Satz 4.31 von Lusin garantiert in dieser Situation die Existenz einer Funktion $\psi \in C_0^0(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega_0$ und $|\psi(x)| \le 1$ für $x \in \Omega$ sowie $\mu(A) < \delta$, wobei gesetzt werde:

$$A := \{x \in \Omega\ :\ \psi(x) \ne \chi_{\Omega_0}(x) \cdot \operatorname{csign}(\bar f(x))\}, \qquad \operatorname{csign} z := \begin{cases} z/|z| & :\ z \ne 0, \\ 0 & :\ z = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} |f(x)|\,dx &= \int_\Omega f(x)\,\chi_{\Omega_0}(x)\,\mathrm{csign}\,(\bar f(x))\,dx \\ &= \int_\Omega f(x)\psi(x)\,dx + \int_\Omega f(x)\,(\chi_{\Omega_0}(x)\,\mathrm{csign}\,(\bar f(x)) - \psi(x))\,dx \\ &\le 2\int_A |f(x)|\,dx < \epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt schon $f(x) = 0,\ x \in \Omega_0$ *f.ü.* und somit auch f.ü. in $\Omega$. □

Im Fall *reellwertiger* Funktionen gelten die folgenden Varianten des Fundamentallemmas.

**Satz 5.2** *Es sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine reelle Funktion.*

(a) *Falls*

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \ge 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\ \textit{mit}\ \varphi \ge 0,} \tag{1.2}$$

*so gilt $f \ge 0$ f.ü. in $\Omega$.*

(b) *Falls*

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \ge 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),} \tag{1.3}$$

*so gilt $f = 0$ f.ü. in $\Omega$.*

*Beweis:* (a) Zunächst zeigen wir, daß mit (1.2) auch

$$\int_A f(x)\varphi(x)\,dx \ge 0 \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \ge 0 \tag{1.4}$$

für jede meßbare Menge $A \subset \Omega$ gilt. Wir beweisen diese Behauptung in einem ersten Schritt für jede offene Menge $G \subset \Omega$. In der Tat, zu festem $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi \ge 0$ betrachten wir den Mollifier $\varphi_\epsilon := J_\epsilon(\chi_G\,\varphi)$. Für diesen gilt $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\varphi_\epsilon \ge 0$ sowie $\|\chi_G\,\varphi - \varphi_\epsilon\|_{\infty;K} \to 0$ $(\epsilon \to 0+)$, wenn wir die meßbare Menge $K \subset\subset \Omega$ so gewählt haben, daß $\mathrm{supp}\,(\chi_G\,\varphi) \subset K$ und $\mathrm{supp}\,\varphi_\epsilon \subset K$ für $0 < \epsilon \le \epsilon_0$ bei geeigneter Wahl von $\epsilon_0 > 0$ gelten. Unter Verwendung von (1.2) erhält man:

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega f(x)\,\chi_G(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,(\chi_G(x)\,\varphi(x) - \varphi_\epsilon(x))\,dx + \int_\Omega f(x)\varphi_\epsilon(x)\,dx \\ &\ge -\|f\|_{1;K}\cdot\|\chi_G\cdot\varphi - \varphi_\epsilon\|_{\infty;K} \to 0\ (\epsilon \to 0+).\end{aligned}$$

Also gilt (1.4) für jede offene Menge $G \subset \Omega$. Nun nehmen wir an, es gebe eine meßbare Menge $A \subset \Omega$ und ein $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi \ge 0$ derart, daß im Gegensatz zu (1.4)

$$\int_A f(x)\varphi(x)\,dx =: -\epsilon < 0$$

gilt. Die meßbare Menge $K \subset\subset \Omega$ wird so gewählt, daß $\mathrm{supp}\,\varphi \subset K$ gilt. Dann gibt es wegen Satz 4.11(b) eine offene Menge $G \supset A$ mit $\mu(G \setminus A) < \frac{\epsilon}{2\,\|f\|_{1;K}\cdot\|\varphi\|_{\infty;K}}$, und es folgt im Widerspruch zur eben gezeigten Relation

$$\int_G f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{G\setminus A} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_A f(x)\varphi(x)\,dx < \frac{\epsilon}{2} - \epsilon = -\frac{\epsilon}{2} < 0.$$

Also gilt (1.4).

Indem wir nun $f^{\pm}(x) := \max\{0, \pm f(x)\} \geq 0$ setzen, haben wir $f = f^+ - f^-$, und somit wegen (1.4)

$$0 \leq \int_A f^-(x)\varphi(x)\,dx \leq \int_A f^+(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0 \tag{1.5}$$

und für jede meßbare Teilmenge $A \subset \Omega$. Wäre $f^- > 0$ auf einer meßbaren Menge $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) > 0$, so wäre $f^+ = 0$ auf $A$. Aus (1.5) folgte

$$\int_A f^-(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \chi_A(x)\, f^-(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0,$$

was gemäß Satz 5.1 nur für $f^- = 0$ f.ü. in $A$ möglich ist. Deshalb gilt $f = f^+ \geq 0$ f.ü. in $\Omega$.

(b) Diese Behauptung folgt direkt aus Satz 5.1, denn indem wir in (1.3) $\varphi$ durch $-\varphi$ ersetzen, erhalten wir die Bedingung (1.1). □

---

## 5.2 Verallgemeinerte Ableitungen

In vielen anwendungsrelevanten Fällen ist der Begriff der klassischen Ableitung einer Funktion zu eng gefaßt. Ein einfaches Beispiel soll diesen Sachverhalt erläutern.

**BSP. (5.2.1)** Die Funktion $f(x) := |x|$ ist auf ganz $\mathbf{R}$ *nahezu* differenzierbar: Die Setzung $f'(x) := \operatorname{sign} x,\ x \in \mathbf{R}$, deckt den tatsächlichen Sachverhalt der klassischen Ableitung mit Ausnahme des Punktes $x = 0$ korrekt ab. In $x = 0$ ist ja eine klassische Ableitung von $f(x)$ nicht erklärt. Hingegen bleibt der Fundamentalsatz der Differential– und Integralrechnung richtig: Es gilt

$$|x| = \int_0^x \operatorname{sign} s\, ds \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Trotzdem ist Vorsicht geboten. Wiederholt man die Argumentation für $g(x) := \operatorname{sign} x$, so wäre die Setzung $g'(x) := 0,\ x \in \mathbf{R}$, außerhalb $x = 0$ wieder konsistent mit der klassischen Ableitung, aber wegen $\operatorname{sign} x \neq \int_0^x 0\, ds$ inkonsistent mit dem Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung.

**BSP. (5.2.2)** In beliebiger Raumdimension $n \in \mathbf{N}$ kann der Begriff der $\rho$–ten klassischen Ableitung mit der Formel der partiellen Integration anders gefaßt werden. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet und $f \in C^{|\rho|}(\Omega)$ gegeben. Dann gilt nämlich

$$\int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx = (-1)^{|\rho|} \int_\Omega (D^\rho f)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Um dies einzusehen, halten wir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ fest und wählen ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0$ und $\operatorname{supp} D^\rho\varphi \subset \Omega_0$. Wegen der Kompaktheit von $\overline{\Omega_0}$ kann $\Omega_0$ durch endlich viele achsenparallele Quader $Q_j$ mit paarweise disjunktem Inneren so überdeckt werden, daß $\Omega_0 \subset \bigcup_{j=1}^N Q_j \subset \Omega$ gilt. Auf jedem Quader $Q_j$ ist die partielle Integration nach jeder der Achsenrichtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gemäß den bekannten Formeln möglich. Da $\varphi$ mit allen seinen Ableitungen auf dem Rand des

Polyeders $\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ verschwindet, treten keine "ausintegrierten" Anteile auf, und es folgt nach $\rho$–maliger partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{N}\int_{Q_j} f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N}(-1)^{|\rho|}\int_{Q_j}(D^\rho f)(x)\varphi(x)\,dx \\ &= (-1)^{|\rho|}\int_\Omega (D^\rho f)(x)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Wegen des Zusammenhangs (2.1) kann eine Funktion $f_\rho \in C(\Omega)$ also auch dann eine $\rho$–te klassische Ableitung von $f \in C^{|\rho|}(\Omega)$ genannt werden, wenn gilt:

$$\boxed{\int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx = (-1)^{|\rho|}\int_\Omega f_\rho(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).} \tag{2.2}$$

Die Integrale in (2.2) sind auch noch unter der weitaus schwächeren Bedingung $f,\, f_\rho \in L^1_{loc}(\Omega)$ wohldefiniert, und diese Beobachtung gibt Anlaß zu folgender

**Definition 5.1** *Für gegebene Funktionen $f,\, f_\rho \in L^1_{loc}(\Omega)$ heiße $f_\rho$ eine $\rho$–te* **schwache Ableitung** *von $f$ in $\Omega$, in Zeichen: $f_\rho = w\text{–}D^\rho f$, wenn die Relation (2.2) gilt.*

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit von schwachen Ableitungen im Falle ihrer Existenz.

**Satz 5.3** (a) *Hat $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine $\rho$–te schwache Ableitung $w\text{–}D^\rho f \in L^1_{loc}(\Omega)$, so ist diese eindeutig f.ü. in $\Omega$.*

(b) *Hat $f \in C^{|\rho|}(\Omega)$ die klassische $\rho$–te Ableitung $D^\rho f \in C(\Omega)$, so gilt $D^\rho f = w\text{–}D^\rho f$ in $\Omega$.*

*Beweis:* (a) Sind $f_\rho,\, g_\rho \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\rho$–te schwache Ableitungen von $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, so haben wir gemäß (2.2)

$$0 = \int_\Omega (f_\rho(x) - g_\rho(x))\varphi(x)\,dx \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Satz 5.1 liefert nun $f_\rho = g_\rho$ f.ü. in $\Omega$. Die Aussage (b) folgt unmittelbar aus BSP.(5.2.2). □

**BSP. (5.2.3)** Wir betrachten nochmals BSP.(5.2.1), nun unter dem Aspekt der schwachen Ableitung. Dazu setzen wir $n = 1,\ \Omega := (-1,1)$ sowie $f(x) := |x|$. Offenbar gilt $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, und durch partielle Integration folgt für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{-1}^{0}(-x)\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx - 0\cdot\varphi(0) - 1\cdot\varphi(-1) - \int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx + 1\cdot\varphi(1) - 0\cdot\varphi(0) \\ &= -\int_{-1}^{1}\operatorname{sign} x\,\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{sign}(\cdot) \in L^1_{loc}(\Omega)$ gilt also nach Definition 5.1: $\operatorname{sign} x = w\text{-}\frac{d}{dx} f(x)$. Eine zweite schwache Ableitung von $|x|$ existiert hingegen nicht. Denn durch partielle Integration folgt

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, \varphi'(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} \varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} \varphi'(x)\, dx = -2\varphi(0).$$

Es gibt keine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit

$$2\varphi(0) = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wäre dies der Fall, so würde die spezielle Wahl $\varphi_\epsilon(x) := \omega(\frac{x}{\epsilon})$, $\epsilon > 0$ hinreichend klein, mit der Funktion $\omega$ aus (9.2), Abschnitt 4.9, auf die widersprüchliche Bedingung

$$0 < |2\varphi_\epsilon(0)| = \frac{2c}{e} = c\Big|\int_{|x|<\epsilon} g(x) e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-|x|^2}}\, dx\Big| \le \max_{|x|\le\epsilon} e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-|x|^2}} \cdot c \int_{|x|<\epsilon} |g(x)|\, dx \to 0 \;\; (\epsilon \to 0+)$$

führen.

**BSP. (5.2.4)** Wir betrachten $n = 2$, $\Omega := B_1(0)$ sowie die Funktion $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, die im Punkt $x = 0$ eine nichtdifferenzierbare Singularität aufweist. Führen wir ebene Polarkoordinaten $(r\cos\psi, r\sin\psi)$ ein, so resultiert

$$\int_\Omega f_\alpha(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 r^{\alpha+1}\, dr,$$

also $f_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ für jedes $\alpha > -2$. Wegen Satz 5.2(b) ist $f_\alpha$ in der Menge $\Omega \setminus \{0\}$ schwach differenzierbar mit dem Gradienten $\nabla f_\alpha(x) = \alpha r^{\alpha-2}\vec{x}$. Durch partielle Integration ergibt sich für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, wenn wir $0 < \epsilon < 1$ betrachten:

$$\int_{\Omega\setminus B_\epsilon(0)} f_\alpha(x)(\nabla\varphi)(x)\, dx = -\int_{\Omega\setminus B_\epsilon(0)} (\nabla f_\alpha)(x)\varphi(x)\, dx + \int_{\partial B_\epsilon(0)} \vec{n} f_\alpha(x)\varphi(x)\, ds.$$

Darin bezeichnet $\vec{n}$ den Einheitsnormalenvektor im Punkt $x \in \partial B_\epsilon(0)$, der in das Innere von $B_\epsilon(0)$ weist. Die (vektorwertigen) Bereichsintegrale besitzen komponentenweise für $\alpha > -1$ die integrablen Majoranten $|f_\alpha D_j\varphi|$ bzw. $|(D_j f_\alpha)\varphi|$ mit $j = 1, 2$, so daß nach dem LEBESGUEschen Satz 4.27 von der dominierten Konvergenz der Limes $\epsilon \to 0+$ vollzogen werden darf. Das Randintegral schätzen wir ab, indem wir Polarkoordinaten auf der Kreislinie $\partial B_\epsilon(0)$ einführen:

$$\Big|\int_{\partial B_\epsilon(0)} \vec{n}\, f_\alpha(x)\varphi(x)\, ds\Big| \le \|\varphi\|_{\infty;\Omega} \cdot \int_0^{2\pi} \epsilon^\alpha \cdot \epsilon\, d\psi = 2\pi\epsilon^{\alpha+1}\|\varphi\|_{\infty;\Omega} \to 0 \;\; (\epsilon \to 0+).$$

Daraus ergibt sich

$$\int_\Omega f_\alpha(x)(\nabla\varphi)(x)\, dx = -\int_\Omega (\nabla f_\alpha)(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \qquad \alpha > -1,$$

das heißt, $f_\alpha$ ist schwach differenzierbar in $\Omega$ für jedes $\alpha > -1$.

Der hier eingeführte Begriff der schwachen Ableitung ist der aus der *Distributionentheorie* von L. SCHWARTZ resultiertende Begriff der *distributionellen Ableitung* (eingeschränkt auf den Fall *regulärer Distributionen*). Eine mehr intuitive Definition eines verallgemeinerten Ableitungsbegriffes wurde bereits vor L. SCHWARTZ von S.L. SOBOLEV eingeführt.

**Definition 5.2** *Für gegebene Funktionen $f$, $f_\rho \in L^p_{loc}(\Omega)$ heiße $f_\rho$ eine $\rho$–te* **starke $L^p$–Ableitung** *von $f$ in $\Omega$, in Zeichen $f_\rho = s\text{–}D^\rho f$, wenn für jedes Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ gilt:*

$$\boxed{\exists\, (\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \overline{C}^{|\rho|}(\Omega_0) \,:\, \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - f\|_{p;\Omega_0} = 0 = \lim_{k\to\infty} \|D^\rho\varphi_k - f_\rho\|_{p;\Omega_0}.} \tag{2.3}$$

Der folgende Satz zeigt, daß schwache Ableitungen und starke $L^p$–Ableitungen nicht unterschieden werden müssen.

**Satz 5.4** *Sind $f$, $f_\rho \in L^p_{loc}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$ gegeben, so gilt $f_\rho = s\text{–}D^\rho f$ genau für $f_\rho = w\text{–}D^\rho f$.*

*Beweis:* (a) Wir zeigen zunächst die Implikation (2.3) $\Rightarrow$ (2.2) und fixieren dazu $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir wählen ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ so, daß $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0$ und $\operatorname{supp} D^\rho\varphi \subset \Omega_0$ gelten. Für die Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \overline{C}^{|\rho|}(\Omega_0)$ aus (2.3) ergibt sich dann unter Verwendung von BSP.(5.2.2):

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx &= \int_{\Omega_0} f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_0}\varphi_k(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx \\ &= (-1)^{|\rho|}\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_0}(D^\rho\varphi_k)(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\rho|}\int_{\Omega_0} f_\rho(x)\varphi(x)\,dx,\end{aligned}$$

also (2.2).

(b) Nun zeigen wir die Implikation (2.2) $\Rightarrow$ (2.3) und fixieren dazu ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Wir wählen $\epsilon_0 > 0$ so, daß $\Omega_{\epsilon_0} := \bigcup\limits_{x\in\overline{\Omega_0}} B_{\epsilon_0}(x) \subset \Omega$ gilt. Sodann setzen wir $\epsilon_k := \epsilon_0/k$ und betrachten den Mollifier $\varphi_k(x) := (J_{\epsilon_k} f)(x)$, $k \in \mathbf{N}$. Dieser erfüllt $\varphi_k \in \overline{C}^\infty(\Omega_0)$ und $\|\varphi_k - f\|_{p;\Omega_0} = \|J_{\epsilon_k} f - f\|_{p;\Omega_0} \to 0$ gemäß Satz 4.37(c). Aus der Darstellung (9.4), Abschnitt 4.9, ergibt sich ferner punktweise für $x \in \Omega_0$:

$$\begin{aligned}(D^\rho J_{\epsilon_k} f)(x) &= \epsilon_k^{-n}\int_\Omega f(y) D^\rho_{(x)}\omega\Big(\frac{x-y}{\epsilon_k}\Big)\,dy = (-1)^{|\rho|}\epsilon_k^{-n}\int_\Omega f(y) D^\rho_{(y)}\omega\Big(\frac{x-y}{\epsilon_k}\Big)\,dy \\ &\overset{(2.2)}{=} \epsilon_k^{-n}\int_\Omega f_\rho(y)\omega\Big(\frac{x-y}{\epsilon_k}\Big)\,dy = (J_{\epsilon_k} f_\rho)(x).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Hier haben wir die Eigenschaft $\omega\Big(\frac{x-\cdot}{\epsilon_k}\Big) \in C_0^\infty(\Omega)$ benutzt, die für jedes $x \in \Omega_0$ gilt. Nun verwenden wir abermals Satz 4.37(c) und erhalten

$$\|D^\rho\varphi_k - f_\rho\|_{p;\Omega_0} = \|J_{\epsilon_k} f_\rho - f_\rho\|_{p;\Omega_0} \to 0 \;\; (k\to\infty),$$

also die behauptete Relation (2.3). □

In Zukunft werden wir für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ nicht zwischen der $\rho$–ten schwachen Ableitung $w\text{–}D^\rho f$ und der $\rho$–ten starken $L^p$–Ableitung $s\text{–}D^\rho f$ unterscheiden müssen. Wir nennen $f_\rho := D^\rho f \in L^1_{loc}(\Omega)$ die $\rho$–te **verallgemeinerte Ableitung** von $f$ in $\Omega$, wenn eine der Bedingungen (2.2) oder (2.3) erüllt ist.

Abschließend stellen wir einige Rechenregeln für verallgemeinerte Ableitungen zusammen.

**Folgerung 5.1** (a) *Besitzt $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ in $\Omega$ eine $\rho$–te verallgemeinerte Ableitung $D^\rho f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , so ist $f$ auch in jedem Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega$ von der Ordnung $\rho$ im verallgemeinerten Sinn differenzierbar mit gleicher verallgemeinerter Ableitung $D^\rho f$.*

Dies ist trivial: Man betrachte (2.2) für Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0) \subset C_0^\infty(\Omega)$. □

(b) *Besitzt $D^\rho f \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine verallgemeinerte Ableitung $D^\sigma(D^\rho f)$, so existiert die $(\rho+\sigma)$–te verallgemeinerte Ableitung mit $D^{\rho+\sigma} f = D^\sigma(D^\rho f)$.*

Klar, aus den beiden Relationen

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx &= (-1)^{|\rho|}\int_\Omega (D^\rho f)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\\ \int_\Omega (D^\rho f)(x)(D^\sigma\psi)(x)\,dx &= (-1)^{|\sigma|}\int_\Omega D^\sigma(D^\rho f)(x)\psi(x)\,dx \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega)\end{aligned}$$

erhalten wir durch Setzung von $\varphi := D^\sigma\psi$:

$$\int_\Omega f(x)(D^{\rho+\sigma}\psi)(x)\,dx = (-1)^{|\rho+\sigma|}\int_\Omega D^\sigma(D^\rho f)(x)\psi(x)\,dx \quad \forall\,\psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(c) *Die verallgemeinerte Differentiation ist eine lineare Operation im Vektorraum der im verallgemeinerten Sinne differenzierbaren Funktionen.*

Dies ist wegen der Linearität der Integrale in (2.2) klar. □

---

## 5.3 SOBOLEV–Räume $W^{m,p}(\Omega)$ und ihre grundlegenden Eigenschaften

In diesem Abschnitt bezeichnet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ wieder ein Gebiet. Weil wir nachfolgend Unterräume von $L^p(\Omega)$ betrachten werden, erinnern wir an die Vereinbarung aus Abschnitt 4.8, nach der mit $L^p(\Omega)$ der Vektorraum von *Äquivalenzklassen* all derjenigen Funktionen bezeichnet wird, die sich höchstens auf Nullmengen voneinander unterscheiden. Des weiteren sei vermerkt, daß für $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, stets auch $f \in L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ gilt. Insofern können Funktionen $f \in L^p(\Omega)$ $\rho$–te verallgemeinerte Ableitungen besitzen, wobei im Fall $p = \infty$ die $\rho$–te schwache Ableitung im Sinne von Definition 5.1 gemeint ist. Mit dieser Vorbemerkung ist die folgende Definition motiviert.

**Definition 5.3** *Es gelte für $m \in \mathbf{N}_0$ und für $1 \le p \le \infty$:*

$$\boxed{W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \,:\, \forall\, |\rho| \le m \text{ besitzt } f \text{ eine verallg. Ableitung } D^\rho f \in L^p(\Omega)\}.}$$

*Die so erklärten Vektorräume über $\mathbf{K}$ heißen* SOBOLEV–**Räume** *der Ordnung $m$ zur $p$–ten Potenz.*

*Auf $W^{m,p}(\Omega)$ sind die folgenden* SOBOLEV–**Normen** *sinnvoll definiert:*

$$\boxed{\begin{array}{lllll} \|f\|_{m,p;\Omega} & := & \|f\|_{m,p} & := & \Big(\sum\limits_{|\rho|\le m} \|D^\rho f\|_{p;\Omega}^p\Big)^{1/p}, \quad f \in W^{m,p}(\Omega), \quad 1 \le p < \infty, \\ \|f\|_{m,\infty;\Omega} & := & \|f\|_{m,\infty} & := & \max\limits_{|\rho|\le m} \|D^\rho f\|_{\infty;\Omega}, \qquad\quad f \in W^{m,\infty}(\Omega). \end{array}} \tag{3.1}$$

Offenbar gilt $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Aus den Norm–Eigenschaften der $L^p$–Normen $\|\cdot\|_{p;\Omega}$ erschließt man ohne Schwierigkeit, daß die SOBOLEV–Normen (3.1) die Normaxiome (N1) – (N3) erfüllen. Wir haben deshalb:

**Satz 5.5** *Die Räume $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ sind für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ und für $1 \le p \le \infty$* BANACH–*Räume. Insbesondere ist $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ ein* HILBERT–*Raum mit Skalarprodukt*

$$\boxed{\langle f, g\rangle_m := \sum_{|\rho|\le m} \int_\Omega (D^\rho f)(x)\overline{(D^\rho g)}(x)\, dx, \qquad f, g \in H^m(\Omega).} \tag{3.2}$$

*Beweis:* Ist $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ eine CAUCHY–Folge, so ist auch $(D^\rho f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset L^p(\Omega)$ für jedes $|\rho| \le m$ eine CAUCHY–Folge, also konvergent gegen einen Grenzwert $f_\rho \in L^p(\Omega)$. Wir haben $f_\rho = w\text{–}D^\rho f$ zu zeigen und beachten dazu die Gültigkeit der Relationen

$$\int_\Omega f_k(x)(D^\rho\varphi)(x)\, dx = (-1)^{|\rho|}\int_\Omega (D^\rho f_k)(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad |\rho| \le m, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{3.3}$$

Fixieren wir ein $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und wählen ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0$ und $\operatorname{supp} D^\rho\varphi \subset \Omega_0$, so erhalten wir aus Satz 4.35(a) $D^\rho f_k \to f_\rho$ in $L^1(\Omega_0)$. Somit resultiert durch Limesbildung in (3.3):

$$\int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\, dx = (-1)^{|\rho|}\int_\Omega f_\rho(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad |\rho| \le m.$$

Gemäß (2.2) gilt dann $f_\rho = w\text{–}D^\rho f$, also $f_k \to f$ in $W^{m,p}(\Omega)$.

Die Sesquilinearform (3.2) hat die erforderlichen Eigenschaften eines Skalarproduktes, was leicht überprüft werden kann. Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm $\|f\|_m := \sqrt{\langle f, f\rangle_m}$ ist genau die SOBOLEV–Norm $\|f\|_{m,2}$, bezüglich welcher der Raum $H^m(\Omega)$ wie soeben gezeigt vollständig – also HILBERT–Raum – ist. □

Entscheidende Einsicht in die Struktur der SOBOLEV–Funktionen $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, gewinnt man, indem man ihre Approximierbarkeit durch Funktionen des Vektorraumes $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ nachweist. Da letztere stetige klassische Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen, übertragen sich viele ihrer Eigenschaften auf die SOBOLEV–Funktionen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die Existenz einer *Zerlegung der Eins*, die wir durch folgendes Resultat über *Abschneidefunktionen* vorbereiten:

**Satz 5.6** *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge. Dann gibt es eine* **Abschneidefunktion** *$\tau : \Omega \to \mathbf{R}$ bezüglich $\{K, \Omega\}$ mit den Eigenschaften*

$$\boxed{\text{(i) } \tau \in C_0^\infty(\Omega), \qquad \text{(ii) } 0 \le \tau \le 1, \qquad \text{(iii) } \tau(x) = 1 \ \forall\, x \in K.}$$

*Setzen wir $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, so kann die Funktion $\tau$ sogar so bestimmt werden, daß*

$$|D^\rho\tau(x)| \le c \cdot \delta^{-|\rho|} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus K \ \ \forall\, |\rho| \ge 1$$

*mit einer von $\Omega$, $K$ und $\delta$ unabhängigen Konstanten $c = c_\rho$ gilt.*

*Beweis:* Da $K$ kompakt ist, gilt $\delta > 0$. Die meßbare Menge $K^* := \overline{\bigcup_{x\in K} B_{\delta/2}(x)} \subset \Omega$ ist kompakt, und ihr Abstand sowohl zu $\partial\Omega$ als auch zu $\partial K$ beträgt $\delta/2$. Der Mollifier

$$\tau(x) := (J_{\delta/4}\chi_{K^*})(x) := \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{K^*}(y)\omega\Big(\frac{x-y}{\delta/4}\Big)\,\frac{dy}{(\delta/4)^n} = \int_{K^*} \omega\Big(\frac{x-y}{\delta/4}\Big)\,\frac{dy}{(\delta/4)^n}$$

hat offenkundig die geforderten Eigenschaften (i) – (iii). Darüber hinaus folgt für $x \in \Omega \setminus K$ durch Substitution von $z := (x-y)/(\delta/4)$:

$$\begin{aligned} |D^\rho\tau(x)| &\le \int_{K^*} \Big|R_\rho\Big(\frac{x-y}{\delta/4}\Big)\Big|\,\omega\Big(\frac{x-y}{\delta/4}\Big)\,\frac{dy}{(\delta/4)^n}\cdot(\frac{\delta}{4})^{-|\rho|} \\ &\le \int_{B_1(0)} |R_\rho(z)|\,\omega(z)\,dz\cdot(\frac{\delta}{4})^{-|\rho|} =: c_\rho\cdot\delta^{-|\rho|}, \end{aligned}$$

wobei $R_\rho(z)$ diejenige rationale Funktion ist, für die $D^\rho\omega(z) = R_\rho(z)\cdot\omega(z)$ gilt und wobei $c_\rho$ von $\rho$, nicht aber von $\Omega$, $K$ und $\delta$ abhängt. □

Nun sind wir in der Lage, das folgende Ergebnis zu beweisen.

**Satz 5.7 (Endliche Zerlegung der Eins)**
*Es sei $K \subset \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $\{\Omega_k\}_{1\le k\le N}$ eine endliche Überdeckung von $K$ mit offenen Teilmengen $\Omega_k \subset\subset \mathbf{R}^n$. Dann gibt es Funktionen $\psi_k : \Omega_k \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le N$, mit den Eigenschaften*

$$\boxed{\text{(i) } \psi_k \in C_0^\infty(\Omega_k), \qquad \text{(ii) } 0 \le \psi_k \le 1, \qquad \text{(iii) } \sum_{k=1}^N \psi_k(x) = 1 \ \forall\, x \in K.}$$

*Beweis:* Wir legen um jeden Punkt $x \in K$ eine Umgebung $U_x$ mit $U_x \subset\subset \Omega_k$ für ein $k \in \{1,2,\dots,N\}$. Die Familie $\{U_x\}_{x\in K}$ ist eine offene Überdeckung von $K$; sie enthält also wegen der Kompaktheit von $K$ eine endliche Teilüberdeckung: Es existiert eine endliche Menge $\Sigma \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{x\in\Sigma} U_x$. Wir setzen

$$\Sigma_k := \{x \in \Sigma : U_x \subset\subset \Omega_k\}, \quad V_k := \bigcup_{x\in\Sigma_k} U_x, \quad K_k := \overline{V_k}, \quad 1 \le k \le N.$$

Die Mengen $K_k \subset \Omega_k$ sind kompakt, und es gilt $K \subset \bigcup_{1\le k\le N} V_k$. Gemäß Satz 5.6 gibt es Abschneidefunktionen $\tau_k \in C_0^\infty(\Omega_k)$ bezüglich $\{K_k, \Omega_k\}$, $1 \le k \le N$, mit

$$0 \le \tau_k \le 1, \quad \tau_k = 1 \text{ auf } K_k, \quad \psi(x) := \sum_{k=1}^N \tau_k(x) \ge 1 \ \forall\, x \in K.$$

Die letzte Eigenschaft folgt aus der Tatsache, daß es ja zu $x \in K$ wenigstens ein $k$ gibt mit $x \in K_k$ und $\tau_k(x) = 1$. Setzen wir nun $K^* := \bigcup_{1\le k\le N} \operatorname{supp}\tau_k \supset K$, so gibt es eine offene Menge $\Omega_0 \subset\subset \mathbf{R}^n$ mit $K \subset \Omega_0 \subset \overline{\Omega_0} \subset K^*$. Für eine Abschneidefunktion $\tau \in C_0^\infty(\Omega_0)$ bezüglich $\{K, \Omega_0\}$ definieren wir schließlich

$$\psi_k(x) := \begin{cases} \tau_k(x)\cdot\tau(x)/\psi(x) & : \ x \in K^*, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ leisten das in (i) – (iii) Verlangte. □

Die LEIBNIZsche Differentiationsregel für Produkte von Funktionen überträgt sich auf SOBOLEV–Funktionen. Wir verwenden dabei auf der Menge $\mathbf{N}_0^n$ der Multiindizes die Halbordnung $\rho \leq \sigma \ :\Leftrightarrow \ \rho_j \leq \sigma_j \ \forall\, 1 \leq j \leq n$ sowie den *Multinomialkoeffizienten*

$$\binom{\sigma}{\rho} := \prod_{j=1}^{n} \binom{\sigma_j}{\rho_j}.$$

Es gilt nun:

**Satz 5.8** *Seien $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $f \in W^{m,p}(\Omega)$ gegeben. Dann folgt $\psi f \in W^{m,p}(\Omega)$ sowie*

$$\boxed{D^\sigma(\psi f) = \sum_{\rho \leq \sigma} \binom{\sigma}{\rho} (D^\rho \psi) \cdot (D^{\sigma-\rho} f) \quad \forall\, |\sigma| \leq m.} \tag{3.4}$$

*Beweis:* Wir beweisen die Formel (3.4) nur für $|\sigma| = 1$, da der allgemeine Fall dann durch vollständige Induktion folgt. Sei also $D^\sigma = D_k$, $1 \leq k \leq n$. Wegen (2.2) gilt für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi(x) f(x) (D_k \varphi)(x)\, dx &= \int_\Omega f(x)(D_k(\psi\varphi)(x) - (D_k\psi)(x)\varphi(x))\, dx \\
&= -\int_\Omega (D_k f)(x)\psi(x)\varphi(x)\, dx - \int_\Omega f(x)(D_k\psi)(x)\varphi(x)\, dx \\
&= -\int_\Omega ((D_k\psi)(x) f(x) + \psi(x)(D_k f)(x))\varphi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

also $D_k(\psi f) = (D_k\psi)\, f + \psi\, (D_k f)$ im verallgemeinerten Sinn. Weil $\psi$ und $D_k\psi$ in $\Omega$ beschränkt sind, haben wir schließlich auch $\psi f \in W^{1,p}(\Omega)$. □

Wie in Satz 4.37 gezeigt wurde, glättet der Mollifier eine $L^p_{loc}$–Funktion $f$ zu einer $C_0^\infty$–Funktion, die von beliebiger $L^p$–Genauigkeit das gegebene $f$ approximiert. Diese Approximationseigenschaft überträgt sich auf Funktionen $f \in W^{m,p}(\Omega)$.

**Satz 5.9** *Seien $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, und $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ gegeben. Dann gilt*

$$\|J_\epsilon f - f\|_{m,p;\Omega_0} \to 0 \ \ (\epsilon \to 0+).$$

*Beweis:* Sei $f \in W^{m,p}(\Omega)$ fixiert und sei $\epsilon_0 > 0$ so gewählt, daß $\bigcup\limits_{x \in \overline{\Omega_0}} B_{\epsilon_0}(x) \subset \Omega$ gilt. Für $0 < \epsilon < \epsilon_0$ erhält man punktweise für alle $x \in \Omega_0$ wie in (2.4):

$$(D^\rho J_\epsilon f)(x) = (J_\epsilon D^\rho f)(x) \quad \forall\, |\rho| \leq m.$$

Somit folgt wegen $D^\rho f \in L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ aus Satz 4.37(c) die Konvergenz $\|D^\rho J_\epsilon f - D^\rho f\|_{p;\Omega_0} \to 0$ $(\epsilon \to 0+)$ für $|\rho| \leq m$, also auch $\|J_\epsilon f - f\|_{m,p;\Omega} \to 0$ $(\epsilon \to 0+)$ nach Definition (3.1) der SOBOLEV–Norm. □

Neben den SOBOLEV–Räumen $W^{m,p}(\Omega)$ wurden über eine lange Zeitperiode auch die Funktionenräume

$$\boxed{H^{m,p}(\Omega) := \overline{\{f \in C^m(\Omega) \,:\, \|f\|_{m,p} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{m,p}}}$$

untersucht, wobei die Vervollständigung in der SOBOLEV–Norm (3.1) gemeint ist. Man glaubte in dieser Zeitperiode, daß Gleichheit $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ nur für Gebiete $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ mit hinreichend glatter Randmannigfaltigkeit $\partial\Omega$ gelte. Erst im Jahre 1964 haben N. MEYERS/J. SERRIN, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51**, pp.1055–1056, der Konfusion ein Ende bereitet, indem sie die obige Gleichheit unabhängig von jeglicher Randregularität gezeigt haben. Deren Resultat kann wie folgt formuliert werden:

**Satz 5.10** (MEYERS & SERRIN)
*Für $1 \le p < \infty$ ist $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.*

*Beweis:* Werden die offenen und beschränkten Mengen

$$\Omega_k := \{x \in \Omega \,:\, \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \text{ und } |x| < k\}, \quad k \in \mathbf{N},$$

betrachtet, so gilt offenbar $\Omega = \bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} \Omega_k$. Wir bilden mit diesen Mengen die ringförmigen Gebiete

$$U_k := \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c, \quad k \in \mathbf{N}, \quad \Omega_0 := \Omega_{-1} := \emptyset.$$

Dann folgt $\Omega \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} U_k$. Ganz analog zur endlichen Zerlegung der Eins in Satz 5.7 gibt es Funktionen $\psi_k : U_k \to \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, mit den Eigenschaften

$$\psi_k \in C_0^\infty(U_k), \qquad 0 \le \psi_k \le 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1 \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Nun sei $f \in W^{m,p}(\Omega)$. Für jedes $k \in \mathbf{N}$ gilt $\mathrm{supp}\,(\psi_k f) \subset U_k$, und wegen $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ haben wir $\psi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$ gemäß Satz 5.8. Sei $\eta > 0$ fixiert und sei $\epsilon_k > 0$ hinreichen klein, so daß $\mathrm{supp}\,(J_{\epsilon_k}\psi_k f) \subset U_k$ erfüllt ist. Wegen Satz 5.9 dürfen wir sogar

$$\|J_{\epsilon_k}(\psi_k f) - \psi_k f\|_{m,p;\Omega} = \|J_{\epsilon_k}(\psi_k f) - \psi_k f\|_{m,p;U_k} < \frac{\eta}{2^k}, \quad k \in \mathbf{N},$$

voraussetzen. Nun sei $\varphi(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} (J_{\epsilon_k}\psi_k f)(x)$ gesetzt. Auf jeder Teilmenge $K \subset\subset \Omega$ treten nur endlich viele nichtverschwindende Summanden auf. Deshalb ist $\varphi$ wohldefiniert, und es folgt $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Für Punkte $x \in \Omega_k$ gilt nach Konstruktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(x) f(x), \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{k+2} (J_{\epsilon_j}\psi_j f)(x),$$

und somit unabhängig von $k \in \mathbf{N}$ auch

$$\|f - \varphi\|_{m,p;\Omega_k} \le \sum_{j=1}^{k+2} \|J_{\epsilon_j}(\psi_j f) - \psi_j f\|_{m,p;\Omega} < \eta.$$

Wenden wir schließlich auf die Funktionenfolge $(\chi_{\Omega_k}|D^\rho(f-\varphi)|^p)_{k\in\mathbf{N}}$ den Satz 4.21 von der monotonen Konvergenz an, so erhalten wir das gewünschte Ergebnis $\|f-\varphi\|_{m,p;\Omega} \le \eta$. □

**BSP. (5.3.1)** Satz 5.10 ist für $p=\infty$ falsch, wie folgendes Beispiel lehrt. Wir betrachten $n=1$, $\Omega := (-1,1)$ und $f(x) := |x|$. Wir haben in BSP.(5.2.3) die Eigenschaften $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und $w\text{-}\frac{d}{dx} f(x) = \operatorname{sign} x$ gezeigt. Hingegen gilt $f \notin H^{1,\infty}(\Omega)$. Denn für $\epsilon < \frac{1}{2}$ gibt es keine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ mit $\sup\limits_{x\in\Omega} |\varphi'(x) - \operatorname{sign} x| < \epsilon$. Klar, andernfalls finden wir wegen der Stetigkeit von $\varphi'$ zu $\epsilon < \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ mit $|\varphi'(\delta) - \varphi'(0)| < \frac{1}{2} - \epsilon$. Setzen wir $h(x) := \varphi'(x) - \operatorname{sign} x$, so ist $h(\delta) = \varphi'(\delta) - 1$ sowie $h(0) = \varphi'(0)$ und $\|h\|_\infty < \epsilon$. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{2} - \epsilon > |\varphi'(\delta) - \varphi'(0)| = |1 + h(\delta) - h(0)| \ge 1 - 2\|h\|_\infty > 1 - 2\epsilon,$$

also $\epsilon > \frac{1}{2}$, im Widerspruch zur Prämisse $\epsilon < \frac{1}{2}$.

---

## 5.4 Produkt– und Kettenregel für SOBOLEV–Funktionen

Daß SOBOLEV–Räume $W^{m,p}(\Omega)$ unter dem gewöhnlichen Funktionenprodukt $fg$ keine BANACH–Algebren bilden, erkennt man bereits an dem einfachen Beispiel $n=1$, $m=0$, $p=1$ und $\Omega := (-1,1)$. Die Funktionen $f(x) := g(x) := |x|^{-1/2}$ sind über $\Omega$ integrierbar mit $\|f\|_{1;\Omega} = 4$, während ihr Produkt $(fg)(x) = |x|^{-1}$ keinesfalls integrierbar ist. Insofern kann die klassische Produktregel für die Ableitung des Produktes $fg$ zweier differenzierbarer Funktionen $f, g$ nicht einfach auf SOBOLEV–Funktionen übertragen werden. Es gilt jedoch:

**Satz 5.11 (Produktregel)**
*Für $f, g \in H^1(\Omega)$ ist $fg \in W^{1,1}(\Omega)$, und wir haben*

$$\boxed{\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g).} \tag{4.1}$$

*Beweis:* Wegen Satz 5.10 gibt es Folgen $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}, (g_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ mit $\|f_k - f\|_{1,2;\Omega} \to 0, \|g_k - g\|_{1,2;\Omega} \to 0$ $(k\to\infty)$. Da konvergente Folgen generell normbeschränkt sind, erhalten wir unter Verwendung der HÖLDER–Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|(\nabla f)\cdot g - (\nabla f_k)\cdot g_k\|_{1;\Omega} &\le \|(\nabla(f-f_k))\cdot g\|_{1;\Omega} + \|(\nabla f_k)\cdot(g-g_k)\|_{1;\Omega} \\
&\le \|\nabla(f-f_k)\|_{2;\Omega}\cdot\|g\|_{2;\Omega} + \|f_k\|_{1,2;\Omega}\cdot\|g-g_k\|_{2;\Omega} \\
&\le C(\|f-f_k\|_{1,2;\Omega} + \|g-g_k\|_{2;\Omega}) \to 0 \ (k\to\infty),
\end{aligned}$$

also $(\nabla f_k)\cdot g_k \to (\nabla f)\cdot g$ in $L^1(\Omega)$. Ganz analog zeigt man $f_k\cdot(\nabla g_k) \to f\cdot(\nabla g)$ sowie $f_k g_k \to fg$ in $L^1(\Omega)$. Wir können in der Identität

$$\int_\Omega f_k(x)g_k(x)(\nabla\varphi)(x)\,dx = -\int_\Omega (\nabla f_k)(x)g_k(x)\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f_k(x)(\nabla g_k)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

den Limes $k \to \infty$ vollziehen und erhalten danach gemäß (2.2) die Differentiationsregel $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$ sowie $\nabla(fg) \in L^1(\Omega)$. □

Im Gegensatz zur klassischen Kettenregel für das Kompositum $g \circ f$ benötigt man bei ihrer Verallgemeinerung auf SOBOLEV–Funktionen nicht nur die Differenzierbarkeit beider Funktionen $f$ und $g$, sondern darüber hinaus auch die Beschränktheit der ersten Ableitung der äußeren Funktion $g$.

**Satz 5.12 (Kettenregel)**
*Die Funktion $g \in C^1(\mathbf{R})$ habe eine beschränkte erste Ableitung $|g'(t)| \le M \ \forall\, t \in \mathbf{R}$. Es gelte ferner eine der beiden Voraussetzungen*

$$g(0) = 0 \quad \textit{oder} \quad \mu(\Omega) < \infty.$$

*Dann ist für jede reelle Funktion $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, auch $g \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$, und es gilt*

$$\boxed{\nabla(g \circ f) = (g' \circ f) \cdot \nabla f.}$$

*Beweis:* Da $g'$ stetig und $f$ meßbar ist, muß gemäß Satz 4.16(b) auch das Kompositum $g' \circ f$ meßbar sein. Weil $g'$ beschränkt ist, folgt daraus $g' \circ f \in L^\infty(\Omega)$ sowie $(g' \circ f) \cdot \nabla f \in L^p(\Omega)$ wegen der Voraussetzung $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Der Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung liefert

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)\, ds \quad \forall\, t \in \mathbf{R}.$$

Verwenden wir die vorausgesetzte Beschränktheit von $g'$, so resultiert offenkundig $|g \circ f| \le |g(0)| + M\,|f|$, und somit auch

$$\|g \circ f\|_{p;\Omega} \le \begin{cases} M\,\|f\|_{p;\Omega} < \infty & : \ g(0) = 0, \\ (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}} |g(0)| + M\,\|f\|_{p;\Omega} < \infty & : \ \mu(\Omega) < \infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

In jedem Fall haben wir $g \circ f \in L^p(\Omega)$. Wir müssen noch zeigen, daß die schwache Ableitung $\nabla(g \circ f)$ mit $(g' \circ f) \cdot \nabla f$ übereinstimmt. Dazu sei wiederum eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $\|f_k - f\|_{1,p;\Omega} \to 0$ gewählt. Um zu zeigen, daß in der Gleichung

$$\int_\Omega (g' \circ f_k)(x)(\nabla f_k)(x)\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega (g \circ f_k)(x)(\nabla\varphi)(x)\, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.3}$$

der Grenzübergang $k \to \infty$ durchgeführt werden darf, reicht es aus, die $L^1(\Omega_0)$–Konvergenz der Folgen $(g \circ f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ und $((g' \circ f_k) \cdot \nabla f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ für jedes Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ zu begründen. Denn wegen $\operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega$ kann dann stets ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0$ und $\operatorname{supp}(\nabla\varphi) \subset \Omega_0$ gewählt werden, so daß wir $\Omega$ in (4.3) durch $\Omega_0$ ersetzen dürfen. Nun ergibt sich aber aus Satz 4.35(a)

$$\|g \circ f_k - g \circ f\|_{1;\Omega_0} \le c\,\|g \circ f_k - g \circ f\|_{p;\Omega_0} \overset{(4.2)}{\le} cM\,\|f_k - f\|_{p;\Omega_0} \to 0 \ (k \to \infty),$$

und hieraus resultiert die gewünschte Konvergenz für die rechte Seite von (4.3). Für die linke Seite gilt hingegen wegen $|g' \circ f_k| \le M$ und wegen der Dreiecksungleichung die Beziehung

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_0} |(g' \circ f_k)(x)(\nabla f_k)(x) - (g' \circ f)(x)(\nabla f)(x)|\, dx \\ &\le M \int_{\Omega_0} |(\nabla f_k)(x) - (\nabla f)(x)|\, dx + \int_{\Omega_0} |(g' \circ f_k)(x) - (g' \circ f)(x)| \cdot |(\nabla f)(x)|\, dx. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wegen $f_k \to f$ in $L^p(\Omega_0)$ gilt gemäß Satz 4.41 punktweise $f_{k_j}(x) \to f(x)$, $x \in \Omega_0$ *f.ü.* für eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbf{N}}$. Da $g'$ stetig ist, folgt somit auch $(g' \circ f_{k_j})(x) \to (g' \circ f)(x)$, $x \in \Omega_0$ *f.ü.* Da wir von vorneherein mit der Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbf{N}}$ hätten starten können, dürfen wir nun annehmen, daß der Integrand im zweiten Integral auf der rechten Seite von (4.4) punktweise f.ü. gegen Null strebt. Da dieser Integrand die integrable Majorante $2M\,|\nabla f|$ besitzt, resultiert schließlich aus dem LEBESGUEschen Satz von der dominierten Konvergenz, daß die rechte Seite von (4.4) gegen Null konvergiert. Daher muß die linke Seite von (4.3) gegen $\int\limits_{\Omega_0} (g' \circ f)(x)(\nabla f)(x)\varphi(x)\,dx$ streben, d.h. es muß die behauptete Ableitungsregel $\nabla(g \circ f) = (g' \circ f) \cdot \nabla f$ gelten. □

Wir zeigen schließlich noch die Differenzierbarkeit der Funktionen $f^{\pm}(x) := \max\{0, \pm f(x)\}$ sowie der Funktion $|f|$, wobei $f \in W^{1,p}(\Omega)$ reellwertig vorausgesetzt sei.

**Satz 5.13** *Für reelles $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, haben wir auch $f^+$, $f^-$, $|f| \in W^{1,p}(\Omega)$, und es gilt:*

$$\boxed{\nabla f^+ = \begin{cases} \nabla f & : f > 0, \\ 0 & : f \le 0, \end{cases} \qquad \nabla f^- = \begin{cases} 0 & : f \ge 0, \\ -\nabla f & : f < 0, \end{cases} \qquad \nabla |f| = \begin{cases} \nabla f & : f > 0, \\ 0 & : f = 0, \\ -\nabla f & : f < 0. \end{cases}} \tag{4.5}$$

*Beweis:* Wegen $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$ folgt alles, wenn wir die Behauptung nur für $f^+$ bewiesen haben. Dazu betrachten wir zu festem $\epsilon > 0$ die Funktion

$$g_\epsilon(t) := \begin{cases} (t^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon & : t > 0, \\ 0 & : t \le 0. \end{cases}$$

Wir haben $g_\epsilon \in C^1(\mathbf{R})$, $|g_\epsilon'| \le 1$, $g(0) = 0$, und somit wegen Satz 5.12:

$$\nabla(g_\epsilon \circ f) = \frac{f}{(f^2 + \epsilon^2)^{1/2}}\,\nabla f, \quad f \in W^{1,p}(\Omega) \text{ und } f > 0.$$

Für festes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ existieren auf $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}\varphi$, $\operatorname{supp}\nabla\varphi \subset \Omega_0$ integrable Majoranten

$$|(g_\epsilon \circ f) \cdot \nabla\varphi| \le c\, f^+ \le c\,|f|, \quad |\nabla(g_\epsilon \circ f) \cdot \varphi| \le c\,|\nabla f|_{|f>0}.$$

Deshalb können wir mit dem LEBESGUEschen Satz von der dominierten Konvergenz in

$$\int_\Omega (g_\epsilon \circ f)(x)(\nabla\varphi)(x)\,dx = -\int_\Omega (\nabla(g_\epsilon \circ f))(x)\varphi(x)\,dx$$

unter der Nebenbedingung $f > 0$ zum Grenzwert $\epsilon \to 0+$ übergehen und erhalten

$$\int\limits_\Omega f^+(x)(\nabla\varphi)(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega\cap\{x\,:\,f(x)>0\}} (\nabla f)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dies beweist nun (4.5) für die Funktion $f^+$. □

# Kapitel 6

# Fortsetzungs– und Einbettungssätze

## 6.1 Geometrische Gebietseigenschaften

Hier und in den folgenden Abschnitten wird stets vorausgesetzt, daß $\Omega \subset \mathbf{R}$ ein **beschränktes** Gebiet sei. In diesem Fall liegt der Rand $\partial\Omega$ von $\Omega$ ganz im Endlichen. Zahlreiche Eigenschaften von SOBOLEV–Funktionen – insbesondere Einbettungseigenschaften – hängen von gewissen Regularitätsbedingungen an das Gebiet $\Omega$ ab. Solche Bedingungen werden in der Regel in Form von geometrischen Eigenschaften angegeben, die zum Teil Glattheitsforderungen an den Rand $\partial\Omega$ miteinbeziehen. Wir werden in diesem Abschnitt einige der bekannten Eigenschaften diskutieren. Wir beginnen mit einer *Regularitätsbedingung* an den Rand.

**Definition 6.1** *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ gehöre zur Klasse $C^m$, $m \in \mathbf{N}$, in Zeichen $\Omega \in C^m$, wenn es ein endliches System $\{U_j\}_{1\le j\le N} \subset \mathbf{R}^n$ von offenen Teilmengen $U_j$ und zugehörige Abbildungen $g_j : \overline{U_j} \to \overline{B_1(0)}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j$ *und* $U_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset \ \forall\ 1 \le j \le N$.

(ii) $g_j \in \overline{C}^m(U_j)$ *und* $g_j$ *bijektiv sowie* $\det\left[\frac{\partial(g_{j1},\ldots,g_{jn})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right] \neq 0 \ \forall\ x \in \overline{U_j},\ 1 \le j \le N$.

(iii) *Für jedes* $j = 1, 2, \ldots, N$ *gilt*

$$g_j(U_j \cap \Omega) \subset B_1^+(0), \quad g_j(U_j \cap \overline{\Omega}^c) \subset B_1^-(0), \quad g_j(U_j \cap \partial\Omega) \subset \{y \in \mathbf{R}^n \,:\, y_n = 0\},$$

*wobei die Schnitte der offenen 1–Kugel $B_1(0)$ in den Halbräumen $H^+ := \{y \in \mathbf{R}^n \,:\, y_n > 0\}$ bzw. $H^- := \{y \in \mathbf{R}^n \,:\, y_n < 0\}$ mit $B_1^{\pm}(0)$ bezeichnet wurden.*

**Bemerkung 6.1** (a) Unter den Voraussetzungen von Definition 6.1 existieren die Umkehrabbildungen $g_j^{-1} \in \overline{C}^m(B_1(0))$ der Funktionen $y = g_j(x)$. Da die zugeordnete Funktionalmatrix $\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ auf $\overline{U_j}$ nichtsingulär ist, muß es Konstanten $c_j$, $C_j > 0$ geben mit

$$0 < c_j \le \Big|\det\Big[\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\Big]\Big|, \ \Big|\det\Big[\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\Big]^{-1}\Big| \le C_j \quad \forall\ x \in \overline{U_j}. \tag{1.1}$$

(b) Wegen der Überdeckungseigenschaft (i) gibt es ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ mit

$$\overline{\Omega} \subset \Omega_0 \cup \Big( \bigcup_{j=1}^{N} U_j \Big).$$

Den Begriff der LIPSCHITZ–stetigen Funktion $f : \Omega \to \mathbf{R}$ hatten wir bereits in Definition 1.18 geprägt. Eine solche Funktion genügt der Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall\, x, y \in \Omega$$

mit einer LIPSCHITZ–Konstanten L unabhängig von $x$ und $y$. Den Unterraum von $C(\Omega)$ derjenigen Funktionen, die in $\Omega$ LIPSCHITZ–stetig sind, bezeichnen wir mit $C^{0,1}(\Omega)$, und ganz analog ist $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ erklärt.

In der folgenden Definition wird ein Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ in der Form $x = (x', x_n)$ mit $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ geschrieben. Dementsprechend bezeichnet $B'_\epsilon(0)$ die offene $\epsilon$–Kugel in $\mathbf{R}^{n-1}$ mit Mittelpunkt $0 \in \mathbf{R}^{n-1}$. Wir vermerken außerdem, daß eine Drehung des Standardkoordinatensystems des $\mathbf{R}^n$ stets durch eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbf{R}^{(n,n)}$ bewerkstelligt werden kann. Die Addition eines konstanten Vektors $x \in \mathbf{R}^n$ bewirkt eine Translation, so daß die affine Transformation $\xi := Qy - x$, $y \in \mathbf{R}^n$, eine Verschiebung des Koordinatensystems in den festen Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ mit anschließender Drehung bewirkt.

Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ besitze nun lokal einen LIPSCHITZ–Rand $\partial\Omega$, wenn es zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U_x \subset \mathbf{R}^n$ derart gibt, daß die Menge $U_x \cap \partial\Omega$ der Graph einer LIPSCHITZ–stetigen Funktion ist. Wir präzisieren dieses Statement wie folgt:

**Definition 6.2** *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ heiße ein* **strenges LIPSCHITZ–Gebiet**, *wenn es positive Zahlen $L$, $\delta$ gibt mit folgenden Eigenschaften: Zu jedem Randpunkt $x \in \partial\Omega$ kann ein lokales Koordinatensystem $\xi = (\xi', \xi_n)$ durch eventuelle Drehung und Translation der Standardkoordinaten so bestimmt werden, daß für eine Umgebung $U_x \subset \mathbf{R}^n$ des Punktes $x$ und für eine LIPSCHITZ–Abbildung $g : B'_\delta(0) \to \mathbf{R}$ mit der LIPSCHITZ–Konstanten $L$ die folgende Darstellung von $U_x \cap \partial\Omega$ gilt:*

(i) $\xi' = y', \quad \xi_n = g(y') + y_n \;\; \forall\; y' \in B'_\delta(0).$

(ii) *Es bestehen die folgenden Zuordnungen:*

$$\xi \in \begin{cases} U_x \cap \partial\Omega & \Leftrightarrow \; y_n = 0, \\ U_x \cap \Omega & \Leftrightarrow \; y_n > 0, \\ U_x \cap \overline{\Omega}^c & \Leftrightarrow \; y_n < 0. \end{cases}$$

Wir geben eine weitere geometrische Charakterisierung von beschränkten Gebieten an. Dabei bezeichnen wir für einen festen Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ eine Menge $C_x$ als **beschränkten Kegel mit Eckpunkt** $x$, wenn es in $\mathbf{R}^n$ offene Kugeln $B_R(x)$ und $B_r(z)$ gibt mit

$$x \notin \overline{B_r(z)}, \quad C_x = B_R(x) \cap \{(1-\lambda)x + \lambda\, y \;:\; y \in B_r(z) \;\wedge\; \lambda > 0\}.$$

**Folgerung 6.1** *$C_x \subset \mathbf{R}^n$ ist nichtleer, beschränkt und offen.*

Klar, wegen $x \notin \overline{B_r(z)}$ gilt $|z-x| > 0$. Setzen wir $\lambda := \frac{R}{2|z-x|} > 0$, so gehört der Punkt $u := (1-\lambda)x + \lambda z$ wegen $|u-x| = \lambda\,|z-x| = \frac{R}{2}$ zu $C_x$. Also ist die Menge $C_x$ nichtleer. Sie ist darüber hinaus beschränkt, da sie ganz im Innern der Kugel $B_R(x)$ liegt. Um $C_x$ offen zu zeigen, fixieren wir $u \in C_x$. Dann gibt es Elemente $y \in B_r(z)$ und $\lambda > 0$ mit $u = (1-\lambda)x + \lambda y$, und es gilt $|u-x| =: \rho < R$. Wir setzen $|y-z| =: \delta < r$ und definieren $\epsilon := \min\{r-\delta, \frac{R-\rho}{2}\} > 0$. Es folgt $B_\epsilon(y) \subset B_r(z)$, und wir zeigen $B_{\lambda\cdot\epsilon}(u) = (1-\lambda)x + \lambda\, B_\epsilon(y) \subset C_x$. In der Tat, für $\tilde{y} \in B_\epsilon(y)$ und $\tilde{u} := (1-\lambda)x + \lambda\tilde{y} = u + \lambda(\tilde{y}-y)$ gilt $|\tilde{u}-u| = \lambda|\tilde{y}-y| < \lambda\cdot\epsilon$, also $\tilde{u} \in B_{\lambda\cdot\epsilon}(u)$ sowie wegen $|\tilde{u}-x| \le |\tilde{u}-u| + |u-x| < R-\rho+\rho = R$ auch $\tilde{u} \in B_R(0)$ und somit $B_{\lambda\cdot\epsilon}(u) \subset C_x$. □

**Definition 6.3** *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ besitze die* **Kegeleigenschaft**, *wenn es einen beschränkten Kegel $C \subset \mathbf{R}^n$ derart gibt, daß jeder Punkt $x \in \Omega$ der Eckpunkt eines zu $C$ kongruenten Kegels $C_x \subset \Omega$ ist, (d.h. $C_x$ geht ausschließlich durch Rotation und Translation aus $C$ hervor).*

**BSP. (6.1.1)** Ist $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein **Polygongebiet** mit der Eigenschaft, daß alle inneren Winkel kleiner als $2\pi$ sind, so ist $\Omega$ strenges LIPSCHITZ–Gebiet. Denn ist $x \in \partial\Omega$ ein Eckpunkt, so kann das Koordinatensystem $(x_1, x_2)$ so gedreht und verschoben werden, daß der Punkt $x$ in den Ursprung des Koordinatensystems fällt und daß der Rand $\partial\Omega$ in einer Umgebung von $x$ die Darstellung $x_2 = g(x_1) = |x_1|\,\tan[\frac{\pi-\varphi_x}{2}]$ hat, wenn $0 < \varphi_x < 2\pi$ der Innenwinkel im Eckpunkt $x$ ist. Man erhält $L$ als Maximum von $|\tan[\frac{\pi-\varphi_x}{2}]|$, genommen über alle Eckpunkte $x$. Besitzt das Polygongebiet $\Omega$ einspringende Ecken mit Innenwinkel $2\pi$, so ist es zwar kein strenges LIPSCHITZ–Gebiet mehr, aber es besitzt noch die Kegeleigenschaft.

---

## 6.2 Approximation von $W^{m,p}$–Funktionen durch Funktionen aus $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

Im Satz 5.10 von MEYERS & SERRIN haben wir gezeigt, daß der Unterraum $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ ist für $1 \le p < \infty$. In diesem Abschnitt behandeln wir die Frage, ob der Raum $\overline{C}^k(\Omega)$ für $k \ge m$ ebenfalls dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ ist, wenn $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ wieder als beschränktes Gebiet vorausgesetzt wird. Daß die Antwort nichttrivial sein muß, zeigt folgendes

**BSP. (6.2.1)**

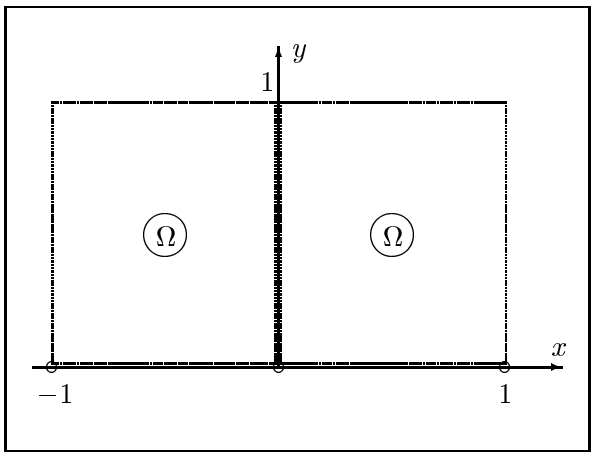


**Fig.5:** Bereich mit einspringender Ecke

Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, 0 < |x| < 1,\ 0 < y < 1\}$. Daß wir es hier nicht mit einem Gebiet (wegen des fehlenden Zusammenhangs) zu tun haben, ist nicht so sehr entscheidend. Entscheidend ist die Tatsache, daß $\Omega$ auf **beiden** Seiten des Randteils $\Gamma \subset \partial\Omega$ liegt, wie die obige Skizze belegt. Die meßbare Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 \,:\, x > 0, \\ 0 \,:\, x < 0, \end{cases} \qquad 0 < y < 1,$$

erfüllt offenbar $\|f\|_{p;\Omega} = 1$. Es gilt $\nabla f = 0$ in $\Omega$ und somit $f \in W^{1,p}(\Omega)$, denn für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ haben wir:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,y)(D_x\varphi)(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \Big( \int_0^1 (D_x\varphi)(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int_0^1 (\varphi(1,y) - \varphi(0,y))\,dy = 0, \\ \int_\Omega f(x,y)(D_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \Big( \int_0^1 (D_y\varphi)(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_0^1 (\varphi(x,1) - \varphi(x,0))\,dx = 0. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun, daß es für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ keine Funktion $g \in \overline{C}^1(\Omega)$ gibt mit $\|f - g\|_{1,p;\Omega} < \epsilon$. Für ein solches $g$ hätte die Ableitung $D_x g$ gemäß Folgerung 2.9 eine eindeutige gleichmäßig stetige und beschränkte Fortsetzung auf ganz $\overline{\Omega}$. Diese Fortsetzung würde insbesondere stetig durch $\Gamma$ hindurchgehen. Es genügt, für $p = 1$ daraus einen Widerspruch abzuleiten. Sei zu diesem Zweck $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ fixiert und sei also $\|f - g\|_{1,1;\Omega} < \epsilon$ angenommen. Wegen $D_x f = 0$ gelten dann $\|f - g\|_{1;\Omega} < \epsilon$ und $\|D_x g\|_{1;\Omega} < \epsilon$, also

$$\begin{aligned} \epsilon &> \|f - g\|_{1;\Omega} = \int_\Omega |f(x,y) - g(x,y)|\,dx\,dy = \int_0^1 \Big( \int_{-1}^0 |g(x,y)|dx + \int_0^1 |1 - g(x,y)|\,dx \Big)\,dy \\ &= \int_0^1 \Big( \int_0^1 (|1 - g(x,y)| + |g(-x,y)|)\,dx \Big)\,dy \geq \int_0^1 \Big( \int_0^1 (1 - |g(x,y) - g(-x,y)|)\,dx \Big)\,dy \\ &\geq 1 - \int_0^1 \int_0^1 \Big| \int_{-x}^x (D_x g)(s,y)\,ds \Big|\,dx\,dy \geq 1 - \int_0^1 \int_{-1}^1 |(D_x g)(x,y)|\,ds\,dy = 1 - \|D_x g\|_{1;\Omega} \\ &> 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Hieraus resultiert $2\epsilon > 1$, im Widerspruch zur Prämisse $\epsilon < \frac{1}{2}$.

Liegt ein strenges LIPSCHITZ–Gebiet $\Omega$ vor, so ist $\overline{C}^k(\Omega)$ für $k \geq m$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$. Wir zeigen sogar das stärkere Resultat, daß die Einschränkungen von $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$–Funktionen auf $\Omega$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ liegen.

**Satz 6.1** *Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein strenges* LIPSCHITZ*–Gebiet. Dann ist die Einschränkung auf $\Omega$ des Funktionenraumes $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.*

*Beweis:* Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, kann der Rand $\partial\Omega$ durch endlich viele Umgebungen $U_k \subset \mathbf{R}^n$, $1 \leq k \leq N$, überdeckt werden, so daß jedes $U_k$ die in Definition 6.2 geforderten Eigenschaften besitzt. Darüber hinaus finden wir gemäß Bemerkung 6.1(b) ein Gebiet $U_0 \subset\subset \Omega$ derart, daß $\bigcup_{k=0}^N U_k$ eine offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$ ist. Gemäß dem Satz 5.7 von der endlichen Zerlegung der Eins gibt es Funktionen $\psi_k \in C_0^\infty(U_k)$ mit $0 \leq \psi_k \leq 1$ und $\sum_{k=0}^N \psi_k(x) = 1 \ \forall\ x \in \overline{\Omega}$. Ist $f \in W^{m,p}(\Omega)$ fixiert, so müssen wir nun für $f_k := f \cdot \psi_k$ die Existenz eines $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ nachweisen mit

$\|f_k - \varphi_k\|_{m,p;\Omega} < \frac{\epsilon}{N+1}$. Setzen wir anschließend $\varphi(x) := \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x)$, so folgt dann die Behauptung aus der Dreiecksungleichung.

Für $k = 0$ hat die Funktion $f_0$ kompakten Träger in $\Omega_0$, und die behauptete Abschätzung folgt aus Satz 5.9.

Für $k \geq 1$ können wir davon ausgehen, daß das Koordinatensystem die in Definition 6.2 geforderte Form hat. Das heißt, Punkte $x \in U_k \cap \partial\Omega$ sind durch $x_n = g_k(x')$ charakterisiert, und Punkte $x \in U_k \cap \Omega$ durch $x_n > g_k(x')$. Vermöge der Transformation $y := x + t \cdot e_n$, $t > 0$, werden alle Punkte der Menge $U_k \cap \overline{\Omega}^c$ mit $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < t$ in Punkte $y \in \Omega$ abgebildet. Setzen wir also $f_{k,t}(x) := f_k(x + t \cdot e_n)$, $t > 0$, so integriert der Mollifier

$$(J_\eta f_{k,t})(x) := \eta^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} f_{k,t}(z)\omega(\frac{x-z}{\eta})\,dz = \eta^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(z + t \cdot e_n)\omega(\frac{x-z}{\eta})\,dz, \quad \eta < t, \;\; x \in \Omega,$$

ausschließlich über Punkte $z + t \cdot e_n$, die ganz in $\Omega$ liegen. Da die Funktion $f_k$ dort eine $W^{m,p}$–Funktion ist, erhalten wir aus Satz 5.9 für die geglättete Funktion $J_\eta f_{k,t} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ die Konvergenz $\|J_\eta f_{k,t} - f_{k,t}\|_{m,p;\Omega} \to 0$ $(\eta \to 0+)$. Nun müssen wir noch $\|f_{k,t} - f_k\|_{m,p;\Omega} \to 0$ $(t \to 0+)$ zeigen. Setzen wir $v := D^\rho f_k$ für festes $|\rho| \leq m$, so genügt es also,

$$\lim_{t \to 0+} \|v_t - v\|_{p;\Omega} = 0, \quad v \in L^p(\Omega),$$

zu beweisen. Dazu halten wir $\epsilon > 0$ fest und bestimmen bei festem $\delta > 0$ zu $\Omega_\delta := \bigcup_{x \in \Omega} B_\delta(x) \supset \Omega$ die Funktion $\psi \in C_0^0(\Omega)$ gemäß Satz 4.36(a) so, daß $\|v - \psi\|_{p;\Omega_\delta} < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Die Funktion $\psi$ ist auf der kompakten Menge $K := \operatorname{supp}\psi$ gleichmäßig stetig; sie erfüllt also

$$\|\psi_t - \psi\|_{p;\Omega_\delta} \leq \sup_{x \in K} |\psi(x + t \cdot e_n) - \psi(x)| \cdot (\mu(K))^{\frac{1}{p}} \to 0 \; (t \to 0+).$$

Wir sehen $\|\psi_t - \psi\|_{p;\Omega_\delta} < \frac{\epsilon}{3}$ für genügend kleines $t$, und somit wegen $\|\psi_t - v_t\|_{p;\Omega_\delta} = \|\psi - v\|_{p;\Omega_\delta}$, sofern nur $t < \delta$ ist:

$$\|v_t - v\|_{p;\Omega} \leq \|v_t - v\|_{p;\Omega_\delta} \leq \|v_t - \psi_t\|_{p;\Omega_\delta} + \|\psi_t - \psi\|_{p;\Omega_\delta} + \|\psi - v\|_{p;\Omega_\delta} < \epsilon.$$

Der Beweis ist vollständig. □

---

## 6.3 Koordinatentransformation und Fortsetzung von SOBOLEV–Funktionen

Wir zeigen in diesem Abschnitt zunächst, daß die bekannten Regeln bei Koordinatentransformationen klassischer Bereichsintegrale auch für das LEBESGUE–Integral ihre Gültigkeit behalten. Daraus ergeben sich für SOBOLEV–Funktionen Transformationsregeln bei Übergang zu neuen Koordinaten. Für eine differenzierbare Funktion $x = g(y)$ bezeichne $J_g(y)$ nachfolgend die JACOBI–Matrix im Punkte $y$:

$$J_g(y) := \frac{\partial(g_1(y), \ldots, g_n(y))}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} =: \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\Big|_{x=g(y)}.$$

Sind $\Omega$, $\Omega^* \subset \mathbf{R}^n$ beschränkte Gebiete, so heiße eine Abbildung $g : \Omega \to \Omega^*$ für festes $m \in \mathbf{N}$ ein $C^m$–**Diffeomorphismus**, wenn gilt:

$$\text{(i) } g \in (\overline{C}^m(\Omega))^n, \qquad \text{(ii) } g \text{ bijektiv}, \qquad \text{(iii) } \det J_g(y) \neq 0 \ \forall\, y \in \overline{\Omega}.$$

Die inverse Funktion $g^{-1} : \Omega^* \to \Omega$ ist dann auch ein $C^m$–Diffeomorphismus, für den ja bekanntlich $J_{g^{-1}}(x) = (J_g(y))^{-1}$ mit $x = g(y)$ gilt. Nach Bemerkung 6.1 müssen deshalb Konstanten $c, C > 0$ existieren mit

$$0 < c \leq |\det J_g(y)|, \ |\det J_{g^{-1}}(x)| \leq C \quad \forall\, y \in \overline{\Omega} \quad \forall\, x \in \overline{\Omega^*}. \tag{3.1}$$

Einer meßbaren Funktion $f : \Omega^* \to \mathbf{K}$ ordnen wir vermöge

$$(Af)(y) := f(g(y)), \quad y \in \Omega, \tag{3.2}$$

die meßbare Funktion $Af = f \circ g : \Omega \to \mathbf{K}$ zu. Es ist klar, daß die hierdurch induzierte Abbildung $A$ linear ist. Gilt speziell $f \in L^p(\Omega^*)$, so liefert die Transformationsregel für Bereichsintegrale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} |f(x)|^p \, dx &= \int_{\Omega} |(Af)(y)|^p |\det J_g(y)| \, dy, \\ \int_{\Omega} |(Af)(y)|^p \, dy &= \int_{\Omega^*} |f(x)|^p |\det J_{g^{-1}}(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Vermöge (3.1) resultiert daraus eine Abschätzung

$$c_1 \|f\|_{p;\Omega^*} \leq \|Af\|_{p;\Omega} \leq c_2 \|f\|_{p;\Omega^*} \quad \forall\, f \in L^p(\Omega^*),$$

und somit liegt für $1 \leq p < \infty$ eine bijektive Abbildung $A \in B(L^p(\Omega^*), L^p(\Omega))$ vor. Ein ähnliches Resultat gilt für SOBOLEV–Räume:

**Satz 6.2** *Seien $\Omega$, $\Omega^* \subset \mathbf{R}^n$ beschränkte Gebiete und sei $g : \Omega \to \Omega^*$ ein $C^m$–Diffeomorphismus. Dann ist die gemäß (3.2) definierte Abbildung $A : W^{m,p}(\Omega^*) \to W^{m,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ beschränkt und bijektiv; d.h. es gilt*

$$c_1 \|f\|_{m,p;\Omega^*} \leq \|Af\|_{m,p;\Omega} \leq c_2 \|f\|_{m,p;\Omega^*} \quad \forall\, f \in W^{m,p}(\Omega^*),$$

*und die verallgemeinerten Ableitungen von $Af := f \circ g$ berechnen sich nach der Kettenregel.*

*Beweis:* Zu zeigen ist die Abschätzung $\|Af\|_{m,p;\Omega} \leq c \|f\|_{m,p;\Omega^*}$ $\forall\, f \in W^{m,p}(\Omega^*)$, worin die Konstante $c$ nur von der Transformation $g$ und nicht von $f$ abhängt. Die umgekehrte Richtung ergibt sich, wenn $g$ durch $g^{-1}$ ersetzt wird.

Zu $f \in W^{m,p}(\Omega^*)$ sei $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset C^\infty(\Omega^*) \cap W^{m,p}(\Omega^*)$ die gemäß Satz 5.10 existierende Folge mit $\|f_k - f\|_{m,p;\Omega^*} \to 0$. Die Kettenregel liefert für $1 \leq i \leq n$ und für das Argument $x = g(y)$:

$$D_{y_i}(Af_k)(y) = D_{y_i}(f_k \circ g)(y) = \sum_{j=1}^{n} (D_{y_i} g_j)(y)(D_{x_j} f_k)(x) = \sum_{j=1}^{n} (D_{y_i} g_j)(y)(A(D_{x_j} f_k))(y), \quad y \in \Omega.$$

Wegen $g_j \in \overline{C}^m(\Omega)$ kann diese Identität weiter differenziert werden. Man erhält durch Induktion allgemein

$$D_y^\rho(Af_k)(y) = \sum_{0\le|\sigma|\le|\rho|} M_{\rho\sigma}(y)(A(D_x^\sigma f_k))(y), \quad y \in \Omega, \quad |\rho| \le m, \tag{3.3}$$

mit einer stetigen und beschränkten Funktion $M_{\rho\sigma}$, die nur aus Ableitungen von $g$ besteht. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ergibt sich durch partielle Integration

$$(-1)^{|\rho|}\int_\Omega (Af_k)(y)(D_y^\rho\varphi)(y)\,dy = \sum_{0\le|\sigma|\le|\rho|}\int_\Omega M_{\rho\sigma}(y)(A(D_x^\sigma f_k))(y)\varphi(y)\,dy, \tag{3.4}$$

oder durch Transformation auf $\Omega^*$:

$$\begin{aligned}(-1)^{|\rho|}&\int_{\Omega^*} f_k(x)(D_y^\rho\varphi)(g^{-1}(x))|\det J_{g^{-1}}(x)|\,dx\\ &= \sum_{0\le|\sigma|\le|\rho|}\int_{\Omega^*}(D_x^\sigma f_k)(x)M_{\rho\sigma}(g^{-1}(x))\varphi(g^{-1}(x))|\det J_{g^{-1}}(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $D^\sigma f_k \to D^\sigma f$ in $L^p(\Omega^*)$ $\forall\,|\sigma| \le m$, und wegen der Beschränktheit von $\Omega^*$ auch in $L^1(\Omega^*)$. Deshalb können wir zum Grenzwert $k \to \infty$ übergehen, und es ergibt sich (3.3) mit $f_k$ ersetzt durch $f$. Auf diese Weise haben wir bereits die Kettenregel für Funktionen $f \in W^{m,p}(\Omega^*)$ bewiesen. Des weiteren folgt aus der Beschränktheit der Funktionen $M_{\rho\sigma}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D_y^\rho(Af)(y)|^p\,dy &= \int_\Omega \Big|\sum_{0\le|\sigma|\le|\rho|} M_{\rho\sigma}(y)(A(D^\sigma f))(y)\Big|^p\,dy\\ &\le c\cdot\max_{|\sigma|\le|\rho|}\int_\Omega |A(D_x^\sigma f)(y)|^p\,dy = c\cdot\max_{|\sigma|\le|\rho|}\int_{\Omega^*}|(D_x^\sigma f)(x)|^p|\det J_{g^{-1}}(x)|\,dx\\ &\le c^*\cdot\max_{|\sigma|\le|\rho|}\int_{\Omega^*}|(D_x^\sigma f)(x)|^p\,dx \le c^*\cdot\|f\|^p_{m,p;\Omega^*}.\end{aligned}$$

Die Summation über alle Multiindizes $|\rho| \le m$ vervollständigt nun den Beweis. □

Für $1 \le p < \infty$ ist $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ dicht, wie wir in Satz 4.38 gezeigt haben. Da gleichzeitig auch $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ gilt, stellt sich hier ebenfalls die Frage der Dichtheit für die Sobolev–Räume $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Wir wissen jedoch durch den Satz von Meyers & Serrin, daß bereits $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ ist. Deshalb wird der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Sobolev–Norm im allgemeinen auf einen echten Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$ führen.

**Definition 6.4** *Für $m \in \mathbf{N}$ und $1 \le p < \infty$ bezeichne $W_0^{m,p}(\Omega)$ den Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Sobolev–Norm $\|\cdot\|_{m,p;\Omega}$.*

Wir werden auf die Rolle der Räume $W_0^{m,p}(\Omega)$ noch detaillierter eingehen. Vorab beweisen wir einen *Fortsetzungssatz*, der zeigt, daß man bei ausreichender Randregularität eine Sobolev–Funktion auf ein größeres Gebiet fortsetzen kann.

**Satz 6.3** *Für festes $m \in \mathbf{N}$ gelte $\Omega \in C^m$. Es sei ferner $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Omega \subset\subset \Omega_0$. Dann existiert eine von $0 \le k \le m$ und $1 \le p < \infty$ unabhängige beschränkte*

*lineare Abbildung* $E : W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega_0)$ *mit*

(i) $Ef|\Omega = f \quad \forall\, f \in W^{k,p}(\Omega)$, (Fortsetzungseigenschaft)

(ii) $\|Ef\|_{k,p;\Omega_0} \le c \cdot \|f\|_{k,p;\Omega} \quad \forall\, f \in W^{k,p}(\Omega)$. (Stetigkeit)

*Die Konstante* $c$ *ist unabhängig von* $k$ *und* $f$.

*Beweis:* Wir führen den recht technischen Beweis in mehreren Schritten.

(a) Die wesentliche Beweisidee zeigt man am Halbraumfall $\Omega := \mathbf{R}^n_+ := \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$. Wir betrachten hier nur Funktionen $f \in \overline{C}^m(\mathbf{R}^n_+)$. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1} \in \mathbf{R}$ die eindeutigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-j)^k \lambda_j = 1, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{3.5}$$

Für $x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n$ und $f \in \overline{C}^m(\mathbf{R}^n_+)$ definieren wir durch Spiegelung an der Hyperebene $x_n = 0$ Fortsetzungen $Ef$ und $E_\rho f$, $|\rho| \le m$, auf ganz $\mathbf{R}^n$ gemäß

$$(Ef)(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x_n > 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} \lambda_j \, f(x', -jx_n) & : \ x_n \le 0, \end{cases}$$

$$(E_\rho f)(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x_n > 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} (-j)^{\rho_n} \lambda_j \, f(x', -jx_n) & : \ x_n \le 0. \end{cases}$$

Man erkennt an (3.5), daß $Ef \in C^m(\mathbf{R}^n)$ gilt sowie

$$D^\rho(Ef)(x) = E_\rho(D^\rho f)(x) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n, \ \ |\rho| \le m.$$

Darüber hinaus sind $E$ und $E_\rho$ linear, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} |D^\rho(Ef)(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbf{R}^n_+} |(D^\rho f)(x)|^p \, dx + \int_{\mathbf{R}^n_-} \Big| \sum_{j=1}^{m+1} (-j)^{\rho_n} \lambda_j (D^\rho f)(x', -jx_n) \Big|^p \, dx \\ &\le C(m, p, \rho) \int_{\mathbf{R}^n_+} |(D^\rho f)(x)|^p \, dx. \end{aligned}$$

Es resultiert eine Abschätzung

$$\|D^\rho(Ef)\|_{p;\mathbf{R}^n} \le c \, \|D^\rho f\|_{p;\mathbf{R}^n_+} \quad \forall\, |\rho| \le m, \tag{3.6}$$

wobei die Konstante $c$ nur von $m$ und $p$ abhängt.

(b) Nun sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Omega \in C^m$. Gemäß Definition 6.1 existiert dann eine offene Überdeckung von $\partial\Omega$ mit Umgebungen $U_j \subset \mathbf{R}^n$ und zugehörigen Abbildungen $g_j \in \overline{C}^m(U_j)$, $g_j : \overline{U_j} \to \overline{B_1(0)} \ \ \forall\ 1 \le j \le N$. Wegen der Kompaktheit von $\overline{\Omega}$ finden wir gemäß Bemerkung 6.1 ein $U_0 \subset\subset \Omega$ und eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ mit $\overline{\Omega} \subset K^o \subset K \subset \tilde{\Omega} :=$

$\bigcup_{0\le j\le N} U_j$. Der Satz 5.7 von der endlichen Zerlegung der Eins liefert die Existenz von Funktionen $\psi_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit $0 \le \psi_j \le 1$ und $\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) = 1 \ \forall\ x \in K$. Es sei $f \in \overline{C}^m(\Omega)$ fixiert. Für festes $1 \le j \le N$ ist $f\psi_j \in \overline{C}^m(U_j \cap \Omega)$ wohldefiniert. Vermöge $f_j := (f\psi_j) \circ g_j$ entsteht eine Funktion $f_j \in \overline{C}^m(B_1^+(0))$, deren Träger ganz in der offenen 1–Kugel $B_1(0) \subset \mathbf{R}^n$ liegt. Deshalb können wir $f_j$ über die Halbkugel $B_1^+(0)$ hinaus durch Null zu einer Funktion $f_j^0 \in \overline{C}^m(\mathbf{R}^n_+)$ fortsetzen. Gemäß (a) gibt es dann eine Fortsetzung $Ef_j^0 \in C^m(\mathbf{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(Ef_j^0) \subset B_1(0)$. Also erhalten wir bei Restriktion auf $B_1(0)$ wieder $Ef_j^0 = Ef_j \in C_0^m(B_1(0))$, und es gilt dort die Abschätzung (3.6):

$$\|D^\rho(Ef_j)\|_{p;B_1(0)} \le c\,\|D^\rho f\|_{p;B_1^+(0)} \quad \forall\ |\rho| \le m. \tag{3.7}$$

Mit der inversen Transformation $\varphi_j := (Ef_j) \circ g_j^{-1}$ haben wir jetzt eine Fortsetzung $E(f\psi_j) := \varphi_j \in C_0^m(U_j)$ konstruiert, die auf $U_j \cap \Omega$ mit $f\psi_j$ übereinstimmt. Infolge von Satz 6.2 gilt dann auch:

$$\|D^\rho(Ef\psi_j)\|_{p;U_j} \le c_2\|D^\rho(Ef_j)\|_{p;B_1(0)} \le c\cdot c_2\|D^\rho f\|_{p;B_1^+(0)} \le \tilde{c}\,\|D^\rho f\|_{p;U_j\cap\Omega} \quad \forall\ |\rho| \le m. \tag{3.8}$$

Mit $(Ef)(x) := \sum_{j=1}^{N} (Ef\psi_j)(x) + (f\psi_0)(x)$ ist nun ein Fortsetzungsoperator $E : \overline{C}^m(\Omega) \to C_0^m(\tilde{\Omega})$ erklärt, der wegen (3.8) der folgenden Abschätzung genügt:

$$\|Ef\|_{k,p;\tilde{\Omega}} \le c\,\|f\|_{k,p;\Omega} \quad \forall\ f \in \overline{C}^m(\Omega),\ \ 0 \le k \le m,\ \ 1 \le p < \infty. \tag{3.9}$$

(c) Ist $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ ein allgemeines beschränktes Gebiet mit $\Omega \subset\subset \Omega_0$, so multiplizieren wir $Ef$ mit der Abschneidefunktion $\tau \in C_0^\infty(\Omega_0)$ bezüglich $\{\overline{\Omega}, \Omega_0\}$ aus Satz 5.6. Dann haben wir einen neuen Fortsetzungsoperator

$$E : \overline{C}^m(\Omega) \to C_0^m(\Omega_0), \quad \|Ef\|_{k,p;\Omega_0} \le c\,\|f\|_{k,p;\Omega} \quad \forall\ f \in \overline{C}^m(\Omega),\ \ 0 \le k \le m,\ \ 1 \le p < \infty, \tag{3.10}$$

mit einer Konstanten $c$ abhängig von $m$, $\|g_j\|_{m,\infty}$, $\|\psi_j\|_{m,\infty}$ und $\|\tau\|_{m,\infty}$, nicht aber von $f$ und $k$.

(d) Schließlich benutzen wir die Tatsache, daß $\Omega \in C^m$ insbesondere ein strenges LIPSCHITZ–Gebiet ist. Deshalb ist $\overline{C}^m(\Omega)$ gemäß Satz 6.1 ein dichter Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ für $0 \le k \le m$, und $E : \overline{C}^m(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega_0)$ ist wegen (3.10) stetig. Satz 2.7 garantiert in dieser Situation die Existenz einer stetigen Fortsetzung $E : W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega_0)$, die die Abschätzung (3.10) mit gleicher Konstanten $c$ erfüllt. □

---

## 6.4 Einbettungen von $W^{m,p}(\Omega)$

Die Untersuchungen von *stetigen Einbettungen* der Räume $W^{m,p}(\Omega)$ in andere Funktionenräume – insbesondere in $L^q(\Omega)$ – wurden von S.L. SOBOLEV initiiert und später von zahlreichen anderen Autoren weiter verallgemeinert. Dennoch faßt man auch heute noch alle derartigen Einbettungen unter dem Sammelnamen *Sobolevsche Einbettungssätze* zusammen. Die meisten Einbettungsresultate gelten für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, die lediglich die Kegeleigenschaft besitzen. Aus beweistechnischen Gründen werden wir hier etwas mehr Regularität für das Gebiet $\Omega$ voraussetzen. Wir zeigen:

**Satz 6.4** (S.L. SOBOLEV)
*Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit der Regularität $\Omega \in C^1$. Dann gelten die stetigen Einbettungen*

$$\boxed{W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-mp)}(\Omega) \quad \forall\, mp < n, \quad m \in \mathbf{N}.} \tag{4.1}$$

**Bemerkung 6.2** (a) Dieser Satz bleibt richtig, wenn $\Omega$ nur die *Kegeleigenschaft* besitzt. Der entsprechende Beweis wird in R.A. ADAMS, Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975, Part V geführt.

(b) Es genügt, die Aussage (4.1) nur für den Fall $m = 1$ zu beweisen, also die Stetigkeit der folgenden Einbettung zu zeigen:

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-p)}(\Omega) \quad \forall\, 1 \le p < n.} \tag{4.2}$$

Die Implikation (4.2) $\Rightarrow$ (4.1) beweisen wir nun durch vollständige Induktion nach $m$. Setzen wir $q_m := np/(n-mp)$, so haben wir also die Stetigkeit der Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_m}(\Omega)$ unter der Einschränkung $mp < n$ zu zeigen. Diese Aussage soll wegen (4.2) bereits für $m = 1$ gelten. Somit haben wir eine *Induktionsverankerung* geschaffen.

*Vererbung:* Sei angenommen, die Einbettung $W^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_{m-1}}(\Omega)$ mit $q_{m-1} = np/(n-mp+p)$ sei unter der Einschränkung $(m-1)p < n$ bereits stetig. Für $f \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $mp < n$ gilt dann $f,\, D_j f \in W^{m-1,p}(\Omega)\ \forall\ 1 \le j \le n$, also nach Induktionsvoraussetzung auch $f,\, D_j f \in L^{q_{m-1}}(\Omega)$ und somit $f \in W^{1,q_{m-1}}(\Omega)$. Die vorausgesetzte Stetigkeit der Einbettung $W^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_{m-1}}(\Omega)$ impliziert die Existenz einer Konstanten $C$ mit

$$\|f\|_{q_{m-1};\Omega} \le C\,\|f\|_{m-1,p;\Omega} \le C\,\|f\|_{m,p;\Omega}, \quad \|D_j f\|_{q_{m-1};\Omega} \le C\,\|D_j f\|_{m-1,p;\Omega} \le C\,\|f\|_{m,p;\Omega}$$

für $1 \le j \le n$. Dies führt mit einer neuen Konstanten $C_1$ auf

$$\|f\|_{1,q_{m-1};\Omega} \le C_1 \|f\|_{m,p;\Omega} \quad \forall\, f \in W^{m,p}(\Omega). \tag{4.3}$$

Wegen der Einschränkung $mp < n$ gilt $q_{m-1} < n$, und wir haben gemäß (4.2) die stetige Einbettung $W^{1,q_{m-1}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ vorliegen mit dem Exponenten

$$r = \frac{nq_{m-1}}{n - q_{m-1}} = \frac{np}{n-mp} = q_m.$$

Also gibt es eine Einbettungskonstante $C_2$ mit

$$\|f\|_{q_m;\Omega} \le C_2 \|f\|_{1,q_{m-1};\Omega} \overset{(4.3)}{\le} C_3 \|f\|_{m,p;\Omega} \quad \forall\, f \in W^{m,p}(\Omega). \tag{4.4}$$

Dies beweist die Stetigkeit der Einbettung (4.1). □

(c) Eine SOBOLEV–Funktion $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ist im Fall $mp = n \ge 2$ i.a. unbeschränkt, wie das nachfolgende Beispiel lehrt. Hingegen wird der Beweis von (4.2) zeigen, daß im Falle $p = n = 1$ die Einbettung

$$\boxed{W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)} \tag{4.5}$$

stetig ist.

**BSP. (6.4.1)** Wir betrachten in $\mathbf{R}^2$ als Gebiet $\Omega$ die offene $\epsilon$–Kugel $B_\epsilon(0)$ mit Radius $0 < \epsilon < 1$. Die radiale Funktion $f(x) := \ln(|\ln|x||)$ ist für $x = 0$ offenbar unbeschränkt. Da $f$ radial ist, haben wir ferner $(\nabla f)(x) = \frac{\partial f}{\partial r}(x) \cdot e_r$ mit $r = |x|$, also wegen $r < 1$:

$$|\nabla f(x)| = |D_r \ln|\ln r|| = |D_r \ln(-\ln r)| = |r \cdot \ln r|^{-1}, \quad 0 < r < 1.$$

Es folgt unter Verwendung von Polarkoordinaten:

$$\int_\Omega |(\nabla f)(x)|^2 \, dx = 2\pi \int_0^\epsilon |r \cdot \ln r|^{-2} r \, dr = 2\pi \int_0^\epsilon \frac{dr}{r \cdot (\ln r)^2} = \frac{2\pi}{|\ln \epsilon|} < \infty.$$

Das heißt, wir haben eine Funktion $f \in W^{1,2}(\Omega)$ mit der Parameterkonstellation $p = n = 2$ vorliegen, die keine $L^\infty$–Funktion ist. Die Einbettung (4.2) kann i.a. nicht auf den Grenzfall $p = n$ erweitert werden.

*Beweis von Satz* 6.4: Wegen Satz 6.3 gibt es einen Fortsetzungsoperator $E : W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega_0)$ mit

$$\|Ef\|_{k,p;\Omega_0} \le c \, \|f\|_{k,p;\Omega} \quad \forall \, f \in W^{k,p}(\Omega), \quad k = 0, 1 \text{ und } 1 \le p < \infty, \tag{4.6}$$

für ein beschränktes Gebiet $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ mit $\Omega \subset\subset \Omega_0$. Sei zunächst angenommen, der Einbettungssatz (4.2) sei für den Raum $W_0^{1,p}(\Omega_0)$ bewiesen. Die Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega_0) \hookrightarrow L^q(\Omega_0)$ ist dann stetig für $q := np/(n-p)$ mit $1 \le p < n$, und es existiert eine Konstante $c_1$ mit

$$\|f\|_{q;\Omega_0} \le c_1 \|f\|_{1,p;\Omega_0} \quad \forall \, W_0^{1,p}(\Omega_0). \tag{4.7}$$

Auf der Teilmenge $\Omega \subset\subset \Omega_0$ hat $f$ eine kleinere $L^q$–Norm, so daß unter Verwendung von (4.6) gilt:

$$\|f\|_{q;\Omega} \le \|Ef\|_{q;\Omega_0} \le c_1 \|Ef\|_{1,p;\Omega_0} \overset{(4.6)}{\le} c_2 \|f\|_{1,p;\Omega} \quad \forall \, f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Dies ist schon die behauptete Stetigkeit der Einbettung (4.2), und wir brauchen nur noch die Gültigkeit von (4.7) zu beweisen. Dazu genügt es, die Stetigkeit der Einbettung $Id : C_0^\infty(\Omega) \to L^q(\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbf{R}^n$ ohne weitere Regularitätsforderung zu zeigen. Da $C_0^\infty(\Omega)$ ein dichter Unterraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$ ist, ergibt sich dann das gewünschte Resultat aus dem Fortsetzungssatz 2.7.

In einem ersten Schritt zeigen wir für $q_1 := n/(n-1)$ die Ungleichung

$$\|f\|_{q_1;\Omega} \le \sqrt{n^{-1}} \cdot \|\nabla f\|_{1;\Omega} \quad \forall \, f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.8}$$

Der Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung liefert nämlich

$$|f(x)| \le \int_{-\infty}^{x_j} |D_j f(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_n)| \, dy_j,$$

und somit (4.5) für $n = 1$. Weil wir $n \ge 2$ annehmen dürfen und weil die obige Abschätzung für jedes $1 \le j \le n$ richtig ist, resultiert

$$|f(x)|^{q_1} \le \Big( \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |D_j f(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_n)| \, dy_j \Big)^{1/(n-1)} =: \Big( \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j') \Big)^{1/(n-1)}$$

mit $x_j' := (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_n)$. Wir integrieren diese Ungleichung bezüglich $x_1$. Auf der rechten Seite hängen nur die $n-1$ Faktoren $\psi_2, \ldots, \psi_n$ von $x_1$ ab. Man beweist durch vollständige

Induktion nach $n \geq 2$ die Gültigkeit der **verallgemeinerten** HÖLDER**–Ungleichung** für $n-1$ Faktoren, nämlich

$$\int [\psi_2(x_2') \cdot \psi_3(x_3') \cdots \psi_n(x_n')]^{1/(n-1)}\, dx_1 \leq \prod_{j=2}^{n} \Big( \int \psi_j(x_j')\, dx_1 \Big)^{1/(n-1)} = \Big( \prod_{j=2}^{n} \int \psi_j(x_j')\, dx_1 \Big)^{1/(n-1)}.$$

Iterieren wir dieses Verfahren bezüglich der Variablen $x_2, x_3, \ldots, x_n$, so erhalten wir schließlich unter Zuhilfenahme der Ungleichung vom arithmetisch–geometrischen Mittel:

$$\|f\|_{q_1;\Omega} \leq \Big( \prod_{j=1}^{n} \int_\Omega |D_j f(x)|\, dx \Big)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} |D_j f(x)|\, dx \leq \frac{1}{n} \int_\Omega \sqrt{n}\, |(\nabla f)(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla f\|_{1;\Omega}.$$

Das ist die behauptete Abschätzung (4.8), und wir haben die Richtigkeit der Einbettung (4.7) für $p = 1$ bewiesen.

Im zweiten Schritt betrachten wir $1 < p < n$ und ersetzen $|f|$ in der obigen Ungleichung durch $|f|^t$, $t > 1$. Unter Beachtung von Satz 5.13 erhalten wir $|\nabla |f|| \leq |\nabla f|$ für reelle Funktionen $f$, was aber auch im Komplexen richtig bleibt. Deshalb gilt für das Paar konjugierter Exponenten $p^{-1} + p'^{-1} = 1$:

$$\| |f|^t \|_{q_1;\Omega} \leq \frac{t}{\sqrt{n}} \int_\Omega |f(x)|^{t-1} |(\nabla f)(x)|\, dx \leq \frac{t}{\sqrt{n}} \| |f|^{t-1} \|_{p';\Omega} \cdot \|\nabla f\|_{p;\Omega}.$$

Nun wählen wir $t$ so, daß die Terme $\| |f|^t \|_{q_1;\Omega}$ und $\| |f|^{t-1} \|_{p';\Omega}$ von gleicher Ordnung in $f$ sind:

$$\frac{tn}{n-1} = \frac{(t-1)p}{p-1} \quad \text{und somit} \quad t = \frac{p(n-1)}{n-p}, \quad tq_1 = \frac{np}{n-p} = q = (q_1^{-1} - p'^{-1})^{-1}.$$

Dies beweist schließlich die Richtigkeit der Einbettung (4.7) mit $c_1 := t/\sqrt{n}$. □

Für viele Belange der angewandten Analysis sind schwächere Aussagen als die des SOBOLEVschen Einbettungssatzes ausreichend. Eine Reihe solcher Aussagen sind als POINCARÉ–Ungleichungen bekannt, die ohne Regularitätsbedingungen an das Gebiet $\Omega$ gezeigt werden können.

**Satz 6.5 (POINCARÉ–Ungleichung)**
*Für $1 \leq q \leq np/(n-p)$, $1 \leq p < n$ und für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ gilt*

$$\boxed{\|f\|_{q;\Omega} \leq c\, \|\nabla f\|_{p;\Omega} \quad \forall\, f \in W_0^{1,p}(\Omega),} \tag{4.9}$$

*wobei die Konstante $c$ im Fall $q < np/(n-p)$ von $\mu(\Omega)$ abhängt.*

*Beweis:* Wir haben oben im Beweis von Satz 6.4 die Abschätzung

$$\|f\|_{np/(n-p);\Omega} \leq \frac{p(n-1)}{\sqrt{n}\,(n-p)} \|\nabla f\|_{p;\Omega} \quad \forall\, f \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{4.10}$$

gezeigt. Also gilt (4.9) im Falle $q = np/(n-p)$. Im Falle $q < np/(n-p)$ verwenden wir Satz 4.35(a):

$$\|f\|_{q;\Omega} \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_{np/(n-p);\Omega}.$$

Zusammen mit (4.10) erhalten wir (4.9), wobei $c := \frac{p(n-1)}{\sqrt{n}\,(n-p)}\,(\mu(\Omega))^{\frac{1}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$. □

Wir wollen jetzt die Frage beantworten, ob stetige Einbettungen $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ existieren können. Dazu muß vorab geklärt werden, mit welcher Topologie der Vektorraum $C(\Omega)$ zu versehen ist, damit ein Stetigkeitsbegriff für die Einbettung $Id : W^{1,p}(\Omega) \to C(\Omega)$ korrekt formuliert werden kann. Eine solche Einbettung wird tatsächlich in den folgenden Unterraum von $C(\Omega)$ zielen:

$$\boxed{CB(\Omega) := \{f \in C(\Omega) \,:\, f \text{ beschränkt}\}.}$$

Wir haben in völliger Analogie – auch beweismäßig – zu Satz 2.15:

**Satz 6.6** *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Der Raum $CB(\Omega)$, versehen mit der Norm*

$$\boxed{\|f\|_{\infty;\Omega} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, \quad f \in CB(\Omega),}$$

*ist ein* Banach*–Raum.*

Anders als Funktionen in $UCB(\Omega)$ kann eine Funktion $f \in CB(\Omega)$ im allgemeinen nicht in eindeutiger Weise stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden, wie bereits das Beispiel der Funktion $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ zeigt, für welches $f \in CB(0,1)$ gilt.

**Satz 6.7 (Einbettungssatz von** Morrey**)**
*Besitzt das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ die Kegeleigenschaft, so ist die folgende Einbettung stetig:*

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow CB(\Omega) \quad \forall\, p > n.} \tag{4.11}$$

*Das heißt, es gilt für $p > n$ mit einer Einbettungskonstanten $c > 0$:*

$$\boxed{\|f\|_{\infty;\Omega} \le c\,\|f\|_{1,p;\Omega} \quad \forall\, f \in W^{1,p}(\Omega).} \tag{4.12}$$

*Hat das Gebiet darüber hinaus die Regularität $\Omega \in C^1$, so ist sogar die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \overline{C}(\Omega)$ stetig.*

*Beweis:* Da der Unterraum $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gemäß Satz 5.10 dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ ist, genügt es offenbar, die Stetigkeit des Einbettungsoperators $Id : C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \to CB(\Omega)$ zu zeigen. Aus Satz 2.7 ergibt sich dann die behauptete Stetigkeit der Einbettung (4.11).

Wir zeigen also (4.12) für $f \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Ohne Einschränkung sei $0 \in \Omega$ angenommen. Sei $C_0 \subset \Omega$ der Kegel mit Eckpunkt 0 aus der Definition 6.3. Bezeichnet für $B_1(0) \subset \mathbf{R}^n$ der Rand $\partial B_1(0) =: S_1(0)$ die Einheitssphäre, so kann der Kegel $C_0$ unter Verwendung von Polarkoordinaten $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$ in der Form

$$C_0 = \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, 0 < r < R < 1,\ \ \omega \in S \subset S_1(0)\}$$

dargestellt werden. Aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung folgt

$$f(0) = -\int_0^r (D_r f)(t,\omega)\,dt + f(r,\omega),$$

und somit die Abschätzung

$$|f(0)| \le \int_0^R |(D_r f)(t,\omega)|\, dt + |f(r,\omega)| \quad \forall\, (r,\omega) \in C_0.$$

Integration dieser Ungleichung über $r \in (0,R)$ und $\omega \in S$ liefert dann:

$$R\,\mu(S)\,|f(0)| \le R \int\limits_{\omega\in S}\int\limits_0^R |(D_r f)(r,\omega)|\, dr\, d\omega + \int\limits_{\omega\in S}\int\limits_0^R |f(r,\omega)|\, dr\, d\omega.$$

Wir dividieren durch $R\,\mu(S)$ und wenden die HÖLDER–Ungleichung mit konjugierten Exponenten $p,\ q = p/(p-1)$ an:

$$\begin{aligned} |f(0)| &\le \frac{1}{R\,\mu(S)} \int\limits_{\omega\in S}\int\limits_0^R \Big[|(D_r f)(r,\omega)| + |f(r,\omega)|\Big]\, r^{\frac{n-1}{p}} \cdot r^{-\frac{n-1}{p}}\, dr\, d\omega \\ &\le \frac{1}{R\,\mu(S)} \Big( \int\limits_{\omega\in S}\int\limits_0^R \Big[|(D_r f)(r,\omega)| + |f(r,\omega)|\Big]^p r^{n-1}\, dr\, d\omega\Big)^{1/p} \Big( \int\limits_{\omega\in S}\int\limits_0^R r^{-\frac{n-1}{p-1}}\, dr\, d\omega\Big)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Wegen $p > n \ge 1$ haben wir $0 \le \frac{n-1}{p-1} < 1$, und der zweite Faktor auf der rechten Seite ist endlich. Berücksichtigen wir noch

$$\int_{C_0} u(x)\, dx = \int\limits_{\omega\in S}\int\limits_0^R u(r,\omega)\, r^{n-1}\, dr\, d\omega,$$

so erschließen wir aus der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$|f(0)| \le \frac{c}{2}\,(\|D_r f\|_{p;C_0} + \|f\|_{p;C_0}) \le c\,\|f\|_{1,p;\Omega}.$$

Da wir dieselbe Rechnung nicht nur für den Punkt $x = 0$, sondern für jeden Punkt $x \in \Omega$ durchführen können, ergibt sich die behauptete Ungleichung (4.12).

Hat das Gebiet die Regularität $\Omega \in C^1$, und wählen wir eine hinreichend große Kugel $\Omega_0 := B_R(0)$ mit $\Omega \subset\subset \Omega_0$, so hat $\Omega_0$ die Kegeleigenschaft. Gemäß Satz 6.3 existiert zu $f \in W^{1,p}(\Omega)$ eine Fortsetzung $Ef \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$, und nach dem bereits Bewiesenen gilt $Ef \in CB(\Omega_0)$ für $p > n$ sowie

$$\|Ef\|_{\infty;\Omega_0} \le c\,\|Ef\|_{1,p;\Omega_0} \overset{\text{Satz 6.3}}{\le} c_1\|f\|_{1,p;\Omega}. \tag{4.13}$$

Auf dem Kompaktum $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$ ist dann $Ef$ insbesondere gleichmäßig stetig und beschränkt, und dies trifft wegen $Ef|\Omega = f$ auch auf $f : \Omega \to \mathbf{K}$ zu. Also gilt $f \in \overline{C}(\Omega)$, und wegen $\|f\|_{\infty;\Omega} \le \|Ef\|_{\infty;\Omega_0}$ folgt aus der obigen Ungleichung (4.13) die Stetigkeit der Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \overline{C}(\Omega)$. □

**Bemerkung 6.3** Wie in Satz 2.16 zeigt man für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, daß die Räume

$$\boxed{CB^m(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega)\ :\ D^\rho f \in CB(\Omega)\ \forall\ |\rho| \le m\}}$$

unter der Norm

$$\|f\|_{m,\infty;\Omega} := \max_{0\le|\rho|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\rho f(x)|$$

Banach–Räume sind. Mit dem Induktionsargument aus Bemerkung 6.2(b) kann deshalb unter der Voraussetzung, daß $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit der Kegeleigenschaft ist, auch die Stetigkeit der folgenden Einbettung gezeigt werden:

$$\boxed{W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow CB^m(\Omega) \quad \forall\, 0 \le m < k - \frac{n}{p}.} \tag{4.14}$$

Den Sonderfall $k = 1$ haben wir soeben bewiesen.

---

## 6.5 Der Satz von Rellich–Kondrachov

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, in welcher Zielmenge $X(\Omega)$ Einbettungen von Sobolev–Räumen $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$ kompakt sind. Eine wesentliche Idee bei der Beantwortung dieser Frage besteht darin, die gemäß Satz 6.3 existierende stetige Fortsetzung $E : W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega_0)$, $0 \le k \le m$, zu verwenden, wobei das beschränkte Gebiet $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ nur der Bedingung $\Omega \subset\subset \Omega_0$ genüge. Hat man sodann die Kompaktheit einer Einbettung $Id : W_0^{m,p}(\Omega_0) \to X(\Omega_0)$ nachgewiesen, so wird gemäß Satz 2.9 vermöge $W^{m,p}(\Omega) \overset{E}{\to} W_0^{m,p}(\Omega_0) \overset{Id}{\to} X(\Omega_0)$ eine kompakte lineare Abbildung $Id \circ E : W^{m,p}(\Omega) \to X(\Omega_0)$ induziert. Die Restriktion $Id_\Omega : X(\Omega_0) \to X(\Omega)$ wird in den hier relevanten Funktionenräumen (nämlich den Räumen $L^q(\Omega)$ bzw. $\overline{C}^m(\Omega)$) wieder stetig sein, so daß die Kette $W^{m,p}(\Omega) \overset{Id\circ E}{\to} X(\Omega_0) \overset{Id_\Omega}{\to} X(\Omega)$ letztendlich eine kompakte Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$ definiert. Das Hauptaugenmerk wird deshalb der Kompaktheit von Einbettungen $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$ für Gebiete $\Omega \subset\subset \mathbf{R}^n$ zu gelten haben. Wir zeigen:

**Satz 6.8** (Rellich–Kondrachov)
*Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist die folgende Einbettung kompakt:*

$$\boxed{W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \forall\, q < np/(n-p) \text{ und } p < n.} \tag{5.1}$$

*Beweis:* Wir zeigen die Behauptung zunächst für $p = q = 1$. Ist $M \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ eine beschränkte Menge, also $\|f\|_{1,1;\Omega} \le C \ \forall\, f \in M$, so haben wir die Praekompaktheit (= relative Kompaktheit; siehe Bemerkung 1.6) von $M \subset L^1(\Omega)$ zu zeigen. Wir definieren für festes $\epsilon > 0$ die Menge $M_\epsilon := \{f_\epsilon : f \in M\}$, worin $f_\epsilon := J_\epsilon f$ den Mollifier von $f \in M$ bezeichnet, und zeigen in einem ersten Schritt die relative Kompaktheit der Menge $M_\epsilon \subset L^1(\Omega)$. In der Tat, mit der Darstellung (9.4) des Mollifiers aus Abschnitt 4.9 haben wir

$$|f_\epsilon(x)| = \Big| \int_\Omega \omega_\epsilon(x-z) f(z)\, dz \Big| \le c(\epsilon)\, \|f\|_{1;\Omega} \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{5.2}$$

Wegen $\|f\|_{1;\Omega} \le C$ ist die Menge $M_\epsilon$ in $C(\overline{\Omega})$ also gleichmäßig beschränkt. Darüber hinaus ist sie auch gleichgradig stetig: Die $C^\infty$–Funktion $\omega_\epsilon$ ist auf dem Kompaktum $\overline{\Omega}$ gleichmäßig stetig; zu jedem $\eta > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\eta)$ mit

$$|\omega_\epsilon(x-z) - \omega_\epsilon(y-z)| < \eta \quad \forall\, z \in \overline{\Omega} \quad \forall\, x, y \in \overline{\Omega} : |x-y| \le \delta.$$

Für die so gewählten Zahlen $\eta$, $\delta$ und für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x-y| \le \delta$ folgt dann aus der Darstellung (5.2):

$$|f_\epsilon(x) - f_\epsilon(y)| \le \int_\Omega |\omega_\epsilon(x-z) - \omega_\epsilon(y-z)| \cdot |f(z)|\, dz < \eta \, \|f\|_{1;\Omega} \le \eta\, C \quad \forall\, f \in M.$$

Nun ist die Menge $M_\epsilon$ in $C(\overline{\Omega})$ nach dem Satz 2.14 von ARZELA–ASCOLI relativ kompakt. Da die Einbettung $C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ stetig ist: $\|f\|_{1;\Omega} \le \mu(\Omega)\, \|f\|_{\infty;\Omega}$ $\forall\ f \in C(\overline{\Omega})$, muß $M_\epsilon$ dann auch in $L^1(\Omega)$ relativ kompakt sein.

Wir zeigen in einem zweiten Schritt die Abschätzung

$$\|\varphi - J_\epsilon \varphi\|_{1;\Omega} \le \epsilon\, \|\nabla \varphi\|_{1;\Omega} \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.3}$$

Dazu fixieren wir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und verwenden für den Mollifier $J_\epsilon \varphi$ die Darstellung (9.5) aus Abschnitt 4.9. Indem wir Polarkoordinaten $r := |z|$, $\psi := \frac{z}{|z|}$ einführen und den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\varphi(x) - \varphi(x - \epsilon\, z) = -\int_0^{\epsilon\,|z|} D_r \varphi(x - r\,\psi)\, dr \tag{5.4}$$

anwenden, erhalten wir

$$|\varphi(x) - (J_\epsilon \varphi)(x)| \le \int\limits_{|z|\le 1} \omega(z) |\varphi(x) - \varphi(x - \epsilon\, z)|\, dz \le \int\limits_{|z|\le 1} \omega(z) \int\limits_0^{\epsilon\,|z|} |D_r \varphi(x - r\,\psi)|\, dr\, dz.$$

Durch Integration über $x \in \Omega$ resultiert unter Verwendung des Satzes von FUBINI:

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega |\varphi(x) - (J_\epsilon \varphi)(x)|\, dx &\le \int\limits_{|z|\le 1} \omega(z) \int\limits_0^\epsilon \int\limits_\Omega |D_r \varphi(x - r\,\psi)|\, dx\, dr\, dz \\ &\le \int\limits_{|z|\le 1} \omega(z) \int\limits_0^\epsilon \int\limits_{\mathbf{R}^n} |D_r \varphi(x - r\,\psi)|\, dx\, dr\, dz. \end{aligned}$$

Das innere Integral hängt nun nicht mehr von $r\,\psi$ ab (man substituiere $y := x - r\,\psi$) und kann durch $\|\nabla \varphi\|_{1;\Omega}$ majorisiert werden. Daraus ergibt sich die behauptete Abschätzung (5.3).

Im nächsten Schritt zeigen wir, daß sich die Abschätzung (5.3) auf Funktionen aus $M$ vererbt. Denn zu festem $f \in M$ und jedem $\eta > 0$ gibt es eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f - \varphi\|_{1,1;\Omega} < \eta$. Aus Satz 4.37(c) folgt $\|J_\epsilon(\varphi - f)\|_{1;\Omega} < \eta$, und somit auch

$$\begin{aligned} \|f - J_\epsilon f\|_{1;\Omega} &\le \|f - \varphi\|_{1;\Omega} + \|\varphi - J_\epsilon \varphi\|_{1;\Omega} + \|J_\epsilon(\varphi - f)\|_{1;\Omega} \\ &< 2\eta + \epsilon\, \|\nabla \varphi\|_{1;\Omega} \le 2\eta + \epsilon\, (\|\nabla(\varphi - f)\|_{1;\Omega} + \|\nabla f\|_{1;\Omega}) \\ &< 2\eta + \epsilon\, (\eta + C). \end{aligned}$$

Im Limes $\eta \to 0+$ ergibt sich daraus

$$\|f - J_\epsilon f\|_{1;\Omega} \le \epsilon\, C \quad \forall\, f \in M. \tag{5.5}$$

Der folgende Schritt wird die behauptete Praekompaktheit von $M$ in $L^1(\Omega)$ darlegen. Aus der Praekompaktheit von $M_\epsilon$ in $L^1(\Omega)$ erschließen wir zunächst die Existenz einer Zahl $N = N(\epsilon)$ und

von Elementen $f_{1\epsilon}, f_{2\epsilon}, \ldots, f_{N\epsilon} \in M_\epsilon$ mit $M_\epsilon \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(f_{j\epsilon})$. Die $\epsilon$–Kugeln $B_\epsilon(f_{j\epsilon})$ sind dabei in der $L^1$–Norm offen. Wegen $f_{j\epsilon} = J_\epsilon f_j$ und wegen (5.5) gilt für $f \in M_\epsilon \cap B_\epsilon(f_{j\epsilon})$:

$$\|f - f_j\|_{1;\Omega} \leq \|f - f_{j\epsilon}\|_{1;\Omega} + \|f_{j\epsilon} - f_j\|_{1;\Omega} < \epsilon + \epsilon\, C,$$

also $M_\epsilon \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{\epsilon(1+C)}(f_j)$, worin $f_j \in M$ gilt. Für ein beliebiges $f \in M$ muß es also wegen $J_\epsilon f \in M_\epsilon$ einen Index $1 \leq j \leq N$ geben mit $J_\epsilon f \in B_{\epsilon(1+C)}(f_j)$. Unter abermaliger Verwendung von (5.5) zeigt man mit der $\Delta$–Ungleichung $f \in B_{\epsilon(1+2C)}(f_j)$, und somit

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{\epsilon(1+2C)}(f_j).$$

Das ist bereits die Praekompaktheit von $M$ in $L^1(\Omega)$.

Im letzten Schritt verallgemeinern wir auf Exponenten $1 < q < np/(n-p)$ und $1 < p < n$. Wir verwenden die HÖLDER–Ungleichung mit Exponent $\lambda > 1$:

$$\|f\|_{q;\Omega} = \Big( \int\limits_\Omega |f(x)|^{\frac{1}{\lambda}} \cdot |f(x)|^{q-\frac{1}{\lambda}}\, dx \Big)^{1/q} \leq \Big( \int\limits_\Omega |f(x)|\, dx \Big)^{\frac{1}{\lambda q}} \cdot \Big( \int\limits_\Omega |f(x)|^{\frac{\lambda q - 1}{\lambda - 1}}\, dx \Big)^{\frac{\lambda - 1}{\lambda q}}.$$

Wählt man $\lambda$ gemäß

$$\frac{\lambda q - 1}{\lambda - 1} = \frac{np}{n-p},$$

und setzt man $t := \frac{1}{\lambda q}$, so folgt $0 < t < 1$ sowie aus obiger Ungleichung

$$\|f\|_{q;\Omega} \leq \|f\|_{1;\Omega}^{t} \cdot \|f\|_{np/(n-p);\Omega}^{1-t} \overset{(4.7)}{\leq} c\, \|f\|_{1;\Omega}^{t} \cdot \|f\|_{1,p;\Omega}^{1-t}. \tag{5.6}$$

Wenn also $M$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ durch $C$ beschränkt ist, so wegen Satz 4.35(i) auch in $W_0^{1,1}(\Omega)$: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach dem oben Bewiesenen endlich viele Elemente $f_1, f_2, \ldots, f_N \in M$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(f_j) \subset L^1(\Omega)$. Aus der Ungleichung (5.6) resultiert für $f \in M \cap B_\epsilon(f_j) \subset L^1(\Omega)$:

$$\|f - f_j\|_{q;\Omega} < c\,(2C)^{1-t}\, \epsilon^t =: c_1\, \epsilon^t.$$

Daher gilt $M \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{c_1 \epsilon^t}(f_j) \subset L^q(\Omega)$, und wir haben die Behauptung bewiesen. □

Hat das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ die Regularitätseigenschaft $\Omega \in C^1$, so ist die Fortsetzung $E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega_0)$ auf ein beschränktes Gebiet $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ mit $\Omega \subset\subset \Omega_0$ gemäß Satz 6.3 stetig. Da die Restriktion $Id_\Omega : L^q(\Omega_0) \to L^q(\Omega)$ wegen $\|f\|_{q;\Omega} \leq \|f\|_{q;\Omega_0}\ \forall\ f \in L^q(\Omega_0)$ ebenfalls stetig ist, erhalten wir aus dem Vorspann zu diesem Abschnitt das folgende Kompaktheitsresultat:

**Satz 6.9** *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit der Regularität $\Omega \in C^1$. Dann ist die folgende Einbettung kompakt:*

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\, q < np/(n-p)\ \textit{und}\ p < n.} \tag{5.7}$$

**Folgerung 6.2** (a) *Für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ist auch die folgende Einbettung kompakt:*

$$\boxed{W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \forall\, q < np/(n-mp) \ \textit{und}\ mp < n.} \tag{5.8}$$

Klar, wir brauchen dies nur für $m > 1$ zu zeigen. Ist $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ eine beschränkte Folge, so ist jede der Folgen $(D^\rho f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ mit $|\rho| \le m-1$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. Wegen der bewiesenen Kompaktheit der Einbettung (5.1) gibt es zunächst eine Teilfolge $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{N}$ derart, daß $(f_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ in $L^{q_1}(\Omega)$ konvergiert, wenn $q_1 < np/(n-p)$ und $p < n$ gelten. Durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}_0$ konvergiert dann auch $(D_1 f_k)_{k\in\mathbf{N}_1}$ in $L^{q_1}(\Omega)$. Induktiv zeigt man auf diese Weise die Existenz einer Teilfolge $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ mit der Eigenschaft, daß $(D^\rho f_k)_{k\in\mathbf{N}'}$ für alle $|\rho| \le m-1$ in $L^{q_1}(\Omega)$ konvergiert. Mit dem Standardargument aus dem Beweis von Satz 5.5 erhält man also die Existenz einer Funktion $f \in L^{q_1}(\Omega)$, welche $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} D^\rho f_k = D^\rho f \in L^{q_1}(\Omega)$ für alle $|\rho| \le m-1$ erfüllt. Es folgt somit $f \in W_0^{m-1,q_1}(\Omega)$; das heißt, die Einbettung $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m-1,q_1}(\Omega)$ ist kompakt. Im Sinne einer vollständigen Induktion sei nun angenommen, die Einbettung $W_0^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_{m-1}}(\Omega)$ sei bereits für $q_{m-1} < np/(n+p-mp)$ und $(m-1)p < n$ kompakt. Setzen wir $mp < n$ voraus, so ist $(m-1)p < n$ erfüllt. Ferner gilt $q_1 < \frac{np}{n-p} < \frac{np}{n-(m-1)p}$. Also können wir in der Einbettung $W_0^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_{m-1}}(\Omega)$ den speziellen Exponenten $p := q_1$ wählen. Dann folgt

$$q := q_{m-1} < \frac{nq_1}{n-(m-1)q_1} = \frac{np}{n-mp},$$

und wir haben die Kompaktheit der Einbettung (5.8) gezeigt. □

(b) *Für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ mit der Regularität $\Omega \in C^m$ ist die folgende Einbettung kompakt:*

$$\boxed{W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \forall\, q < np/(n-mp) \ \textit{und}\ mp < n.} \tag{5.9}$$

Dies folgt aus Satz 6.3 und (5.8). □

Wir untersuchen jetzt die Frage, ob es kompakte Einbettungen $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$ auch für $mp > n$ gibt. Zu diesem Zweck definieren wir Räume Hölder–stetiger Funktionen gemäß

**Definition 6.5** *Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, für ein festes $0 < \lambda \le 1$ und für $m \in \mathbf{N}_0$ sei $\overline{C}^{m,\lambda}(\Omega)$ derjenige Unterraum von Funktionen $f \in \overline{C}^m(\Omega)$, deren $\rho$–te Ableitungen einer* Hölder*–Bedingung mit Exponent $\lambda$ genügen:*

$$\boxed{\forall\, |\rho| \le m \ \exists\, K_\rho < \infty \,:\, \frac{|D^\rho f(x) - D^\rho f(y)|}{|x-y|^\lambda} \le K_\rho \quad \forall\, x,y \in \Omega \,:\, x \ne y.} \tag{5.10}$$

*Auf dem Vektorraum $\overline{C}^{m,\lambda}(\Omega)$ ist durch die folgende Vorschrift eine* **Norm** *erklärt:*

$$\boxed{\|f\|_{m,\lambda;\Omega} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \max_{0\le|\rho|\le m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\ne y}} \frac{|D^\rho f(x) - D^\rho f(y)|}{|x-y|^\lambda} \quad \forall\, f \in \overline{C}^{m,\lambda}(\Omega).} \tag{5.11}$$

Wir vermerken hier ohne Beweis, daß $(\overline{C}^{m,\lambda}(\Omega), \|\cdot\|_{m,\lambda;\Omega})$ ein BANACH–Raum ist. Ist $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, so ist $\overline{\Omega}$ ein kompakter metrischer Raum, und es gilt der Satz von ARZELA–ASCOLI in $C(\overline{\Omega}) = \overline{C}^0(\Omega)$. Wir haben deshalb:

**Satz 6.10** *Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ist die folgende Einbettung kompakt:*

$$\boxed{\overline{C}^{m,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow \overline{C}^m(\Omega) \ \forall\, m \in \mathbf{N}_0.} \tag{5.12}$$

*Beweis:* Ist $M \subset \overline{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ eine beschränkte Menge: $\|f\|_{0,\lambda;\Omega} \le C \ \forall\, f \in M$, so ist $M$ wegen (5.11) ganz offensichtlich auch in $C(\overline{\Omega})$ beschränkt. Die Menge $M$ ist sogar gleichgradig stetig: Zu $\epsilon > 0$ wählen wir $\delta = \delta(\epsilon)$ gemäß $\delta := (\epsilon/C)^{1/\lambda}$. Dann folgt für $x, y \in \Omega$ mit $|x-y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\lambda} \cdot |x-y|^\lambda \overset{(5.11)}{\le} \|f\|_{0,\lambda;\Omega} \cdot \delta^\lambda \le C\,\delta^\lambda = \epsilon \quad \forall\, f \in M.$$

Der Satz 2.14 von ARZELA–ASCOLI liefert nun die relative Kompaktheit der Menge $M \subset C(\overline{\Omega})$, also die Kompaktheit der Einbettung (5.12) im Fall $m = 0$. Gilt $m \ge 1$ und ist $M \subset \overline{C}^{m,\lambda}(\Omega)$ beschränkt, so ist $M$ auch in $\overline{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ beschränkt. Nach dem soeben Bewiesenen gibt es eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ mit $f_k \to f$ in $C(\overline{\Omega})$. Da auch $(D_1 f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ in $\overline{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ beschränkt ist, gilt für eine Teilfolge $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}$ die Konvergenz $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}_1} D_1 f_k = f_1$ in $C(\overline{\Omega})$. Nach einem bekannten Kriterium von WEIERSTRASS folgt $f_1 = D_1 f$. Induktiv beweist man so die Existenz einer Teilfolge $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ mit $\lim\limits_{k\in\mathbf{N}'} D^\rho f_k = D^\rho f$ in $C(\overline{\Omega})$ für alle $|\rho| \le m$; d.h. die Einbettung (5.12) ist kompakt. □

Wir werden nun zeigen, daß der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ stetig in $\overline{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ eingebettet ist, wenn $p > n$ und $\lambda := 1 - \frac{n}{p}$ gelten. Vorbereitend beweisen wir für Testfunktionen zwei Ungleichungen.

**Satz 6.11** *Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann gibt es für $p > n$ Konstanten $C = C(n,p)$ und $K = K(n,p,\Omega)$ mit*

$$\|\varphi\|_{\infty;\Omega} \ \le\ C \cdot (\mu(\Omega))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\, \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega} \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{5.13}$$

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \ \le\ K \cdot \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega} \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.14}$$

*Beweis:* Wir zeigen zunächst (5.13) und verwenden dazu bei festem $\epsilon > 0$ die Identität (5.4) im Limes $|z| \to \infty$ sowie die Definition der Richtungsableitung

$$D_r\varphi(x - r\psi) = \langle (\nabla\varphi)(x-r\psi), -\psi\rangle = -\langle (\nabla\varphi)(x-z), z\rangle \cdot \frac{1}{|z|}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Die resultierende Beziehung

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \langle (\nabla\varphi)(x-z), z\rangle \cdot \frac{1}{r}\, dr, \quad r := |z|, \quad x \in \Omega,$$

integrieren wir über alle $|\psi| = 1$. Der Oberflächeninhalt der 1–Sphäre in $\mathbf{R}^n$ ist die Zahl $\omega_n := 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$, und es gilt $dz = r^{n-1} dr\, d\psi$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^\infty \int_{|\psi|=1} \langle (\nabla\varphi)(x-z), z\rangle \cdot \frac{1}{|z|^n}\, r^{n-1}\, dr\, d\psi = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\langle (\nabla\varphi)(x-z), z\rangle}{|z|^n}\, dz, \quad x \in \Omega.$$

Mit der Substitution $y := x - z$ resultiert daraus die Abschätzung

$$|\varphi(x)| \le \frac{1}{\omega_n} \int_\Omega |(\nabla\varphi)(y)| \cdot |x-y|^{1-n}\, dy \le \frac{1}{\omega_n} \Big( \int_\Omega |x-y|^{p(1-n)/(p-1)}\, dy \Big)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega}, \qquad (5.15)$$

wobei wir die HÖLDER–Ungleichung mit konjugierten Exponenten $p > n$, $q = p/(p-1)$ angewendet haben. Wählen wir jetzt $R > 0$ so, daß $\mu(\Omega) = \mu(B_R(x)) = R^n \omega_n / n$ gilt, so erhalten wir für das Integral auf der rechten Seite in (5.15):

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x-y|^{p(1-n)/(p-1)}\, dy &\le \int_{B_R(x)} |x-y|^{p(1-n)/(p-1)}\, dy \\ &= \int_0^R \int_{|\psi|=1} r^{(n-1)\left(1-\frac{p}{p-1}\right)}\, dr\, d\psi = \frac{p-1}{p-n} \left(R^{1-\frac{n}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}} \omega_n. \end{aligned}$$

Einsetzen in (5.15) führt mit einer Konstanten $C = C(n,p,\omega_n)$ auf die Abschätzung

$$|\varphi(x)| \le C\, (\mu(\Omega))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\, \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega} \quad \forall\, x \in \Omega,$$

woraus durch Bildung des Supremums über $x \in \Omega$ die Ungleichung (5.13) folgt.

Zum Beweis der Ungleichung (5.14) fixieren wir ein beliebiges $\delta_0 > 0$ und definieren $\Omega_{\delta_0} := \bigcup\limits_{x\in\Omega} B_{\delta_0}(x)$. Dann gilt $\Omega \subset\subset \Omega_{\delta_0}$, und indem wir jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ über ihren Träger hinaus durch Null fortsetzen, dürfen wir sicher $\varphi \in \overline{C}^\infty(\Omega_{\delta_0})$ annehmen. Sei nun für $x \in \Omega$ und für $0 < \delta \le \delta_0$ die offene Kugel $B_\delta(x)$ betrachtet. Wir setzen $|B_\delta| := \mu(B_\delta(x)) = \delta^n \omega_n / n$ sowie $\xi(t) := x + t\,(z-x)$ für $z \in B_\delta(x)$. Dann gilt für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\varphi(x) - \varphi(z) = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\, \varphi(\xi(t))\, dt = \int_0^1 \langle (\nabla\varphi)(\xi(t)), x-z\rangle\, dt.$$

Die Substitution $\xi := x + t\,(z-x)$, $d\xi = t^n\, dz$, $\xi \in B_{t\,\delta}(x)$, führt zu folgender Relation:

$$\begin{aligned} \Big|\varphi(x) - \frac{1}{|B_\delta|} \int_{B_\delta(x)} \varphi(z)\, dz\Big| &\le \frac{1}{|B_\delta|} \int_{B_\delta(x)} |\varphi(x) - \varphi(z)|\, dz \le \frac{1}{|B_\delta|} \int_0^1 \int_{B_\delta(x)} |(\nabla\varphi)(\xi(t))| \cdot |x-z|\, dz\, dt \\ &\le \frac{1}{|B_\delta|} \int_0^1 t^{-(n+1)} \int_{B_{t\delta}(x)} |(\nabla\varphi)(\xi)| \cdot |\xi - x|\, d\xi\, dt \\ &\le \frac{1}{|B_\delta|} \int_0^1 t^{-(n+1)} \Big( \int_{B_{t\delta}(x)} |\xi-x|^{p/(p-1)}\, d\xi\Big)^{(p-1)/p} dt \cdot \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega}. \end{aligned}$$

Hier wurde wiederum die HÖLDER–Ungleichung mit konjugierten Exponenten $p > n$, $q = p/(p-1)$ angewendet. Durch Einführung von Polarkoordinaten berechnet man

$$\Big( \int_{B_{t\delta}(x)} |\xi-x|^{p/(p-1)}\, d\xi\Big)^{(p-1)/p} = \Big(\frac{p}{p-1} + n\Big)^{-\frac{p-1}{p}} (t\delta)^{1+\frac{n}{p}\,(p-1)}\, \omega_n^{\frac{p-1}{p}},$$

und folglich mit der Konstanten

$$K = K(n,p,\omega_n) := n\left(\frac{p}{p-1}+n\right)^{-\frac{p-1}{p}} \omega_n^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}}\,dt < \infty$$

die Abschätzung

$$|\varphi(x)-\varphi_B| \le \delta^{1-\frac{n}{p}}\, K\, \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega}, \quad \varphi_B := \frac{1}{|B_\delta|}\int\limits_{B_\delta(x)} \varphi(z)\,dz.$$

Für $y \in \partial B_\delta(x) \cap \Omega$ gilt daher

$$|\varphi(x)-\varphi_B| \le |x-y|^{1-\frac{n}{p}}\, K\, \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega},$$

und ganz analog berechnet man auch

$$|\varphi(y)-\varphi_B| \le |x-y|^{1-\frac{n}{p}}\, K\, \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega}.$$

Beide Relationen zusammen liefern über die $\Delta$–Ungleichung

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le |x-y|^{1-\frac{n}{p}}\, 2K\, \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega}, \quad x \in \Omega, \quad y \in B_{\delta_0}(x) \cap \Omega.$$

Gilt aber $|x-y| \ge \delta_0$, so haben wir gemäß (5.13)

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le |\varphi(x)| + |\varphi(y)| \le |x-y|^{1-\frac{n}{p}}\, \delta_0^{-\left(1-\frac{n}{p}\right)}\, 2C\,(\mu(\Omega))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\, \|\nabla\varphi\|_{p;\Omega},$$

und wir erhalten die behauptete Abschätzung (5.14). □

Nach diesen Vorbereitungen können wir das folgende Einbettungsresultat zeigen:

**Satz 6.12** *Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ und für $p > n$ ist die Einbettung*

$$\boxed{\text{(i) } W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \overline{C}^{0,\lambda}(\Omega) \text{ mit } \lambda := 1-\tfrac{n}{p} \text{ stetig}, \quad \text{(ii) } W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \text{ kompakt.}} \tag{5.16}$$

*Beweis:* Klar, da die Aussage (ii) aus (i) und Satz 6.10 folgt, brauchen wir nur (i) zu beweisen. Wegen (5.11), (5.13) und (5.14) gilt mit dem angegebenen Exponenten $\lambda := 1-\frac{n}{p}$:

$$\|\varphi\|_{0,\lambda;\Omega} \le c\,\|\nabla\varphi\|_{p;\Omega} \le c\,\|\varphi\|_{1,p;\Omega} \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.17}$$

Ein beliebiges $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ist der Limes einer Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ im Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$. Als CAUCHY–Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$ genügt sie dann wegen (5.17) der Relation

$$\|\varphi_k-\varphi_j\|_{0,\lambda;\Omega} \le c\,\|\varphi_k-\varphi_j\|_{1,p;\Omega} \to 0 \ (j,k\to\infty).$$

Das heißt, $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ist CAUCHY–Folge auch in $\overline{C}^{0,\lambda}(\Omega)$, und wegen der Vollständigkeit dieses Raumes muß sie dann in $\overline{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ gegen $f$ konvergieren. Also kann die Ungleichung (5.17) auf Funktionen $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fortgesetzt werden, was die Gültigkeit der Behauptung (i) beweist. □

## 6.6 Ein Spursatz

Das Studium von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ist eng verknüpft mit der Frage, welches Verhalten SOBOLEV–Funktionen $f \in W^{m,p}(\Omega)$ – die ja zunächst nur im Gebiet $\Omega$ erklärt sind – auf dem Rand $\partial\Omega$ haben. Auf den ersten Blick scheint diese Frage nicht vereinbar zu sein mit dem Charakter von SOBOLEV–Funktionen, denn diese sind nur modulo Nullmengen wohldefiniert. Der Widerspruch löst sich, wenn wir beispielsweise wie in Satz 6.12 eine stetige Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ vorliegen haben. Es ist klar, daß in diesem Fall die Restriktion $f|\partial\Omega$ einer Funktion $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ zum BANACH–Raum $C(\partial\Omega)$ gehört. Allgemeiner erzeugt jedes $f \in \overline{C}^m(\Omega)$ eine **Spur** $Tf := f|\partial\Omega \in C^m(\partial\Omega)$, wenn ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ der Regularität $\Omega \in C^m$ vorliegt. An dieser Stelle sei nur näherungsweise angedeutet, daß der Raum $C^m(\partial\Omega)$ lokal das homöomorphe Bild des BANACH–Raumes $\overline{C}^m(\mathbf{R}^{n-1})$ ist, wobei der Homöorphismus mit Hilfe der Überdeckung $\{U_j\}_{1\le j\le N}$ aus Definition 6.1 und den dort angegebenen $C^m$–Diffeomorphismen $g_j$ wie im Beweis des Fortsetzungssatzes 6.3 konstruiert werden kann. Für den so erklärten **Spuroperator** $T : \overline{C}^m(\Omega) \to C^m(\partial\Omega)$ werden wir die Abschätzung

$$\|Tf\|_{m-1,q;\partial\Omega} \le c\,\|f\|_{m,p;\Omega} \quad \forall\, q \le (n-1)p/(n-mp) \text{ und } mp < n \tag{6.1}$$

beweisen. Eine einfache Folgerung aus Satz 6.3 ist die Dichtheit des Raumes $\overline{C}^m(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ für Gebiete $\Omega \in C^m$, so daß der Spuroperator $T$ mit Satz 2.7 nun eindeutig auf den Raum $W^{m,p}(\Omega)$ fortgesetzt werden kann.

In der Tat, jedes $f \in W^{m,p}(\Omega)$ hat gemäß Satz 6.3 eine Fortsetzung $Ef \in W_0^{m,p}(\Omega_0)$ in ein beschränktes Gebiet $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ mit $\Omega \subset\subset \Omega_0$. Nach Definition 6.4 ist der Raum $C_0^\infty(\Omega_0)$ dicht in $W_0^{m,p}(\Omega_0)$. Das heißt, zu jeder Vorgabe $\epsilon > 0$ existiert ein $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega_0)$ mit $\|\varphi_\epsilon - Ef\|_{m,p;\Omega_0} < \epsilon$. Die Restriktion $\tilde{\varphi}_\epsilon := \varphi_\epsilon|\Omega$ ist sicher in $\overline{C}^m(\Omega)$, und es folgt $\|\tilde{\varphi}_\epsilon - f\|_{m,p;\Omega} \le \|\varphi_\epsilon - Ef\|_{m,p;\Omega_0} < \epsilon$, also die behauptete Dichtheit.

Zum *Beweis* von (6.1) gehen wir ganz analog wie im Beweis des Fortsetzungssatzes 6.3 vor. Es ist klar, daß die Behauptung wegen Satz 4.35(a) nur für den Grenzfall $q = (n-1)p/(n-mp)$ bewiesen werden muß. Der entscheidende Beweisschritt erfolgt bereits bei Betrachtung des Halbraumfalls $\Omega := \mathbf{R}^n_+ := \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n \,:\, x_n > 0\}$. Für festes $f \in \overline{C}^m(\mathbf{R}^n_+)$ folgt aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$f(x',0) = -\int_0^{x_n} D_n f(x',t)\,dt + f(x',x_n), \quad x_n \ge 0.$$

Mit einfacher Abschätzung und anschließender Integration über $0 \le x_n \le 1$ resultiert

$$|f(x',0)| \le \int_0^1\int_0^{x_n} |D_n f(x',t)|\,dt\,dx_n + \int_0^1 |f(x',x_n)|\,dx_n \le \int_0^1 (|D_n f(x',x_n)| + |f(x',x_n)|)\,dx_n.$$

Integrieren wir nun über $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, so ergibt sich

$$\|f\|_{1;\mathbf{R}^{n-1}} \le \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (|D_n f(x',x_n)| + |f(x',x_n)|)\,dx'\,dx_n \le \|f\|_{1;\mathbf{R}^n_+} + \|\nabla f\|_{1;\mathbf{R}^n_+}.$$

Mit denselben Schritten wie im Beweisteil (b) von Satz 6.3 zeigt man hiermit die Gültigkeit von

$$\|f\|_{1;\partial\Omega} \le \|f\|_{1;\Omega} + \|\nabla f\|_{1;\Omega} \quad \forall\, f \in \overline{C}^m(\Omega). \tag{6.2}$$

Ähnlich wie im Beweis des Satzes 6.4 ersetzen wir in dieser Abschätzung die Funktion $|f|$ durch $|f|^t$, $t > 1$. Sei $1 < p < n$ angenommen, so resultiert für $p' := p/(p-1)$:

$$\| |f|^t \|_{1;\partial\Omega} \le \int_\Omega |f(x)|^t \, dx + t \int_\Omega |f(x)|^{t-1} |(\nabla f)(x)| \, dx \le c \, \|f\|_{t;\Omega}^t + c \, \| |f|^{t-1} \|_{p';\Omega} \cdot \|\nabla f\|_{p;\Omega}. \quad (6.3)$$

Nun wählen wir $t$ so, daß die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{(t-1)p'}(\Omega)$ stetig ist. Gemäß Satz 6.4 trifft dies zu für

$$\frac{(t-1)p}{p-1} \stackrel{!}{=} \frac{np}{n-p} =: q, \text{ also für } t = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1.$$

Dann folgt aus (6.3) und der Einbettungsabschätzung $\|f\|_{q;\Omega} \le c_1 \|f\|_{1,p;\Omega}$:

$$\|f\|_{t;\partial\Omega}^t \le c \, \|f\|_{t;\Omega}^t + c_2 \|f\|_{1,p;\Omega}^{t-1} \cdot \|\nabla f\|_{p;\Omega} \le c_3 \|f\|_{1,p;\Omega}^t.$$

Hiermit ist die Abschätzung (6.1) im Fall $m = 1$ bewiesen. Den allgemeinen Fall beweist man nun mit einem Induktionsargument wie in Folgerung 6.2(a), indem das obige Resultat auf $D^\rho f$ mit $|\rho| \le m-1$ angewendet wird. □

Die Sonderfälle $mp = n$ und $mp > n$ können ebenfalls miteinbezogen werden; wir verzichten hier auf einen Beweis. Es resultiert insgesamt der folgende

**Satz 6.13 (Spursatz)**
*Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit der Regularität $\Omega \in C^m, m \ge 1$. Dann gibt es für $1 \le p < \infty$ einen stetigen linearen Spuroperator $T : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m-1,q}(\partial\Omega)$ mit*

$$q \begin{cases} \le (n-1)p/(n-mp) & : \ mp < n, \\ < \infty & : \ mp = n, \\ = \infty & : \ mp > n, \end{cases}$$

*und $T : \overline{C}^m(\Omega) \to C^m(\partial\Omega)$; $Tf = f|\partial\Omega \ \forall \ f \in \overline{C}^m(\Omega)$.*

**Bemerkung 6.4** (a) Auf dem dichten Unterraum $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt sicher $D^\rho T\varphi = (D^\rho\varphi)|\partial\Omega = 0 \ \forall \ |\rho| \le m-1$. Zu $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ eine Folge mit $\|f - \varphi_k\|_{m,p;\Omega} \to 0$. Dann ergibt sich aus (6.1)

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{m-1,q;\partial\Omega} &= \Big| \|Tf\|_{m-1,q;\partial\Omega} - \|T\varphi_k\|_{m-1,q;\partial\Omega} \Big| \le \|T(f-\varphi_k)\|_{m-1,q;\partial\Omega} \\ &\le \|f - \varphi_k\|_{m,p;\Omega} \to 0. \end{aligned}$$

Das heißt, es gilt $Tf = 0 \ \forall \ f \in W_0^{m,p}(\Omega)$, also $W_0^{m,p}(\Omega) \subset \operatorname{Kern} T$.

(b) Man kann auch die Umkehrung dieser Aussage zeigen: Ist $f \in W^{m,p}(\Omega)$ gegeben und gilt $Tf = 0$ in $W^{m-1,q}(\partial\Omega)$, so folgt $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$, also $\operatorname{Kern} T = W_0^{m,p}(\Omega)$. Ein Beweis für diese Tatsache wird in R.A. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975; dort Theorem 7.55 erbracht. Wir folgern, daß der Raum $W_0^{m,p}(\Omega)$ genau diejenigen Funktionen $f \in W^{m,p}(\Omega)$ enthält, für die alle verallgemeinerten Ableitungen $D^\rho f$, $0 \le |\rho| \le m-1$, auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwinden, sofern das Gebiet die Regularität $\Omega \in C^m$ besitzt.

# Kapitel 7

# Die Fourier–Transformation

## 7.1 Lokalkonvexe topologische Vektorräume

In diesem Abschnitt bezeichnet $X$ stets einen Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} := \mathbf{C}$. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X$, so machen wir von der folgenden Begriffsbildung Gebrauch:

**Definition 7.1** *Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heiße ein* **topologischer Vektorraum** *über $\mathbf{K}$, wenn die beiden folgenden Abbildungen stetig bezüglich $\mathcal{T}$ sind:*

$$\text{“}+\text{”} : \begin{cases} X \times X \to X, \\ (x, y) \mapsto x + y, \end{cases} \qquad \text{“}\cdot\text{”} : \begin{cases} \mathbf{K} \times X \to X, \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x. \end{cases}$$

Wir werden nachfolgend topologische Vektorräume mittels Familien von Halbnormen konstruieren. Jeder normierte Vektorraum $X$ über $\mathbf{K}$ ist ein Beispiel eines topologischen Vektorraums. Wie wir in Folgerung 2.1(c) gesehen haben, genügte es in diesem Fall, eine *Nullumgebungsbasis* $\{V_\epsilon(0)\}_{\epsilon>0}$ anzugeben, die dann die Normtopologie $\mathcal{T}$ auf $X$ in eindeutiger Weise festgelegt hat: Die Umgebungsbasen jedes anderen Punktes $0 \neq x \in X$ ergaben sich durch Translation $V_\epsilon(x) := x + V_\epsilon(0) = \{x + y : y \in V_\epsilon(0)\}$, so daß die Topologie eines normierten Raumes $X$ in jedem Punkt $x \in X$ gleich aussah. Als Nullumgebungsbasis konnte das System der offenen $\epsilon$–Kugeln $B_\epsilon(0)$ gewählt werden.

Die Vorgehensweise wird bei einem allgemeinen topologischen Vektorraum $X$ ähnlich sein. Die Angabe einer Nullumgebungsbasis wird bereits die Topologie $\mathcal{T}$ des gesamten Raumes $X$ in eindeutiger Weise festlegen.

Wie wir bereits in Definition 2.1 erklärt haben, ist eine **Halbnorm** auf dem Vektorraum $X$ ein Funktional $p : X \to \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{(i)} & p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) \ \forall\, \lambda \in \mathbf{K} \ \forall\, x \in X, & \text{(Homogenität)} \\ \text{(ii)} & p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \forall\, x, y \in X. & \text{(Subadditivität)} \end{array}} \tag{1.1}$$

Wir fassen weitere Eigenschaften einer Halbnorm in dem folgenden Satz zusammen.

**Satz 7.1** *Sei $p : X \to \mathbf{R}$ eine Halbnorm auf dem Vektorraum $X$. Dann gelten:*

(a) $p(0) = 0$.

(b) $p(x - y) \geq |p(x) - p(y)| \ \forall\, x, y \in X$ *und* $p(x) \geq 0 \ \forall\, x \in X$.

*Beweis:* (a) Diese Aussage folgt mit $\lambda = 0$ sofort aus der Homogenität der Halbnorm $p$.

(b) Aus der Subadditivität von $p$ ergibt sich $p(x-y)+p(y) \geq p(x)$ und somit $p(x-y) \geq p(x)-p(y)$. Andererseits gilt mit gleicher Schlußweise auch $p(x-y) = |-1| \cdot p(y-x) \geq p(y)-p(x)$, und daraus folgt bereits $p(x-y) \geq |p(x)-p(y)|$. Für $y = 0$ resultiert unter Verwendung von (a) schließlich noch $p(x) \geq 0$. □

In einem Vektorraum $X$ ist der Begriff der **Konvexität** einer Teilmenge $A \subset X$ sinnvoll erklärbar. Dies haben wir in Definition 2.14 gezeigt. Darüber hinaus gelten noch die folgenden Begriffe:

**Definition 7.2** (a) *Eine Teilmenge $A \subset X$ heiße*

- **absorbierend** $:\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X \;\exists\, \lambda > 0 \,:\, x \in \lambda A := \{\lambda y \,:\, y \in A\}$,
- **balanciert** $:\Leftrightarrow \quad (x \in A \,\wedge\, |\lambda| \leq 1 \;\Rightarrow\; \lambda x \in A)$.

(b) *Ein topologischer Vektorraum $X$ heiße* **lokalkonvex**, *wenn er eine Nullumgebungsbasis aus konvexen, absorbierenden und balancierten offenen Mengen besitzt.*

Die Konstruktion lokalkonvexer Topologien $\mathcal{T}$ auf einem gegebenen Vektorraum $X$ geschieht in vielen Fällen mittels Familien von Halbnormen. Entscheidend für dieses Vorgehen sind die folgenden Aussagen:

**Satz 7.2** *Sei $p : X \to \mathbf{R}$ eine Halbnorm, $c > 0$ eine feste Zahl und $A := \{x \in X \,:\, p(x) < c\}$. Dann gelten:*

(a) *$0 \in A$ und $A$ ist konvex.*

(b) *$A$ ist absorbierend.*

(c) *$A$ ist balanciert.*

(d) $p(x) = \inf\{\lambda c \,:\, \lambda > 0 \,\wedge\, x \in \lambda A\} \;\forall\, x \in X$.

*Beweis:* (a) Klar, $0 \in A$ gilt wegen $p(0) = 0$, was wir in Satz 7.1(a) gezeigt haben. Zum Nachweis der Konvexität fixieren wir $x, y \in A$ und erhalten wegen (1.1):

$$\forall\, \lambda \in (0,1) \,:\, p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda)\, p(y) < \lambda c + (1-\lambda)c = c,$$

also $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

(b) Wir verwenden die Homogenität von $p$: Wird die Zahl $\lambda > 0$ zu gegebenem $x \in X$ gemäß $\lambda > \frac{1}{c}\, p(x) \geq 0$ gewählt, so ergibt sich wieder aus (1.1):

$$p\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) = \frac{1}{\lambda}\, p(x) < c,$$

also $x \in \lambda A$.

(c) Diese Aussage ist wegen der Homogenität von $p$ trivial.

(d) Für festes $x \in X$ sind die folgenden Mengen offensichtlich gleich:

$$\{\lambda > 0 \,:\, x \in \lambda A\} = \{\lambda > 0 \,:\, p(x/\lambda) < c\} = \{\lambda > 0 \,:\, p(x) < \lambda c\}.$$

Somit gilt auch Gleichheit ihrer Infima, wobei in der letzten Menge das Infimum für $\lambda c = p(x)$ angenommen wird. Daraus folgt die behauptete Gleichung $p(x) = \inf\{\lambda c \,:\, \lambda > 0 \,\wedge\, x \in \lambda A\}$. □

**Definition 7.3** *Ist $A \subset X$ eine konvexe, absorbierende und balancierte Teilmenge, so heiße*

$$\boxed{p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 \,:\, x \in \lambda\, A\}, \quad x \in X,} \tag{1.2}$$

*ihr* MINKOWSKI–**Funktional**.

Die Erzeugung einer lokalkonvexen HAUSDORFF–Topologie durch eine Familie $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Halbnormen wird mit folgender Eigenschaft sichergestellt:

**Definition 7.4** *Eine Familie $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Halbnormen auf $X$ mit beliebiger Indexmenge $\Lambda \neq \emptyset$ heiße* **separierend** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall\, x \in X \setminus \{0\}\ \exists\, \lambda \in \Lambda \,:\, p_\lambda(x) \neq 0.} \tag{1.3}$$

Wir haben nun als Hauptergebnis dieses Abschnitts:

**Satz 7.3** *Gegeben seien ein Vektorraum $X$ über $\mathbf{K}$ und eine Familie $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ separierender Halbnormen auf $X$. Sei ferner $V_{\lambda,\epsilon}(0) := \{y \in X \,:\, p_\lambda(y) < \epsilon\}$ für $\lambda \in \Lambda$ und $\epsilon > 0$ gesetzt und gelte $V_{\lambda,\epsilon}(x) := x + V_{\lambda,\epsilon}(0)$ für $x \in X$. Dann bildet das System $\{V_{\lambda,\epsilon}(x)\}_{\lambda\in\Lambda,\epsilon>0}$ von Teilmengen $V_{\lambda,\epsilon}(x) \subset X$ die lokale Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$, in welcher jedes $p_\lambda$ stetig ist und in welcher $X$ ein lokalkonvexer* HAUSDORFF*–Raum ist.*

*Beweis:* Gemäß Satz 1.5 ist das aus der lokalen Basis $\{V_{\lambda,\epsilon}(x)\}_{\lambda\in\Lambda,\epsilon>0}$ resultierende System der offenen Teilmengen $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X$. In dieser Topologie ist jede der Mengen $V_{\lambda,\epsilon}(x)$ selbst offen: Sei nämlich $y \in V_{\lambda,\epsilon}(x)$ fixiert und dazu $\rho := p_\lambda(y - x) < \epsilon$ gesetzt. Wird nun $0 < r \leq \epsilon - \rho$ gewählt, so folgt

$$\forall\, z \in V_{\lambda,r}(y) \,:\, p_\lambda(z - x) = p_\lambda(z - y + y - x) \leq p_\lambda(z - y) + p_\lambda(y - x) < r + \rho \leq \epsilon - \rho + \rho = \epsilon,$$

also $V_{\lambda,r}(y) \subset V_{\lambda,\epsilon}(x)$. Somit ist jede der Mengen $V_{\lambda,\epsilon}(x)$ offen in der Topologie $\mathcal{T}$, und gemäß Bemerkung 1.4 bilden die endlichen Durchschnitte

$$\bigcap_{1\leq j,k\leq N} V_{\lambda_j,\epsilon_k}(0), \quad \lambda_j \in \Lambda,\ \epsilon_k > 0,$$

eine Nullumgebungsbasis. In der Relativtopologie des $\overline{\mathbf{R}_+}$ sind die Intervalle $[0,\epsilon)$ offen. Ihre Urbilder $p_\lambda^{-1}[0,\epsilon)$ unter der Abbildung $p_\lambda$ sind gerade die offenen Mengen $V_{\lambda,\epsilon}(0) \subset X$, so daß also jedes $p_\lambda$ im Punkte $x_0 := 0$ bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ stetig ist. Die Stetigkeit in einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$ erhält man aus der Ungleichung $|p_\lambda(x) - p_\lambda(x_0)| \leq p_\lambda(x - x_0)$.

Jede der Mengen $V_{\lambda,\epsilon}(0)$ ist gemäß Satz 7.2 konvex, absorbierend und balanciert. Des weiteren gilt $0 \in V_{\lambda,\epsilon}(0)$. Der (endliche) Durchschnitt solcher Mengen enthält die Null und ist wieder konvex (Folgerung 2.10(c)), absorbierend und balanciert, wobei sich die beiden letzten Eigenschaften leicht aus Definition 7.2 ergeben. Somit ist $\mathcal{T}$ eine lokalkonvexe Topologie auf $X$.

Um die Gültigkeit des HAUSDORFFschen Trennungsaxioms (T) aus Definition 1.1 zu verifizieren, genügt es, zu jedem $0 \neq x \in X$ die Existenz von Umgebungen $V_{\lambda_0,\epsilon_0}(0)$, $V_{\lambda_1,\epsilon_1}(x)$ mit $V_{\lambda_0,\epsilon_0}(0) \cap V_{\lambda_1,\epsilon_1}(x) = \emptyset$ nachzuweisen. Wegen (1.3) existiert ein $\lambda \in \Lambda$ mit $p_\lambda(x) := 2\epsilon > 0$. Wählen wir $\lambda_0 := \lambda_1 := \lambda$ und $\epsilon_0 := \epsilon_1 := \epsilon$, so gilt bereits die Trennungseigenschaft $V_{\lambda,\epsilon}(0) \cap V_{\lambda,\epsilon}(x) = \emptyset$. Denn andernfalls gäbe es in dieser Schnittmenge ein $y \in X$, welches wegen $y \in V_{\lambda,\epsilon}(x)$ die Bedingung

$y = x + z = x - (-z)$ für ein Element $z \in V_{\lambda,\epsilon}(0)$ erfüllen müßte. Aus Satz 7.1(b) folgte dann $p_\lambda(y) \geq p_\lambda(x) - p_\lambda(-z) \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$, im Widerspruch zur Bedingung $p_\lambda(y) < \epsilon$, die sich aus $y \in V_{\lambda,\epsilon}(0)$ ergibt.

Um die Stetigkeit der Addition $(x, y) \mapsto x+y$ zu zeigen, beachten wir die Inklusion $V_{\lambda,\epsilon}(0)+V_{\lambda,\epsilon}(0) \subset V_{\lambda,2\epsilon}(0)$. Denn für $x, y \in V_{\lambda,\epsilon}(0)$ gilt ja

$$p_\lambda(x + y) \leq p_\lambda(x) + p_\lambda(y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

also $x + y \in V_{\lambda,2\epsilon}(0)$. Zur Umgebung $V_{\lambda,2\epsilon}(x + y)$ des Bildpunktes $x + y \in X$ gibt es demnach bezüglich der Produkttopologie eine Umgebung $V_{\lambda,\epsilon}(x) \times V_{\lambda,\epsilon}(y)$ des Urbildes $(x, y) \in X \times X$, die unter $'' + ''$ in $V_{\lambda,2\epsilon}(x + y)$ abgebildet wird:

$$V_{\lambda,\epsilon}(x) + V_{\lambda,\epsilon}(y) = x + V_{\lambda,\epsilon}(0) + y + V_{\lambda,\epsilon}(0) = (x + y) + V_{\lambda,\epsilon}(0) + V_{\lambda,\epsilon}(0) \subset (x + y) + V_{\lambda,2\epsilon}(0).$$

Dies ist eine äquivalente Formulierung der Stetigkeit der Abbildung $'' + '' : X \times X \to X$.

Der Nachweis der Stetigkeit von $'' \cdot '' : \mathbf{K} \times X \to X$ verläuft ganz analog: Für $V_{\lambda,\epsilon}(0)$ und $\alpha \in \mathbf{K}$ mit $0 < |\alpha| < r$ gilt

$$\alpha\, V_{\lambda,\epsilon}(0) = \{\alpha\, y \,:\, p_\lambda(y) < \epsilon\} = \{z \,:\, p_\lambda(z) < |\alpha|\, \epsilon\} = V_{\lambda,|\alpha|\epsilon}(0) \subset V_{\lambda,r\epsilon}(0).$$

Somit ist $B_r(0) \times V_{\lambda,\epsilon}(0)$ eine Umgebung des Urbildes $(0, 0) \in \mathbf{K} \times X$, die unter $'' \cdot ''$ in die Umgebung $V_{\lambda,r\epsilon}(0)$ abgebildet wird. Das heißt, die Abbildung $'' \cdot '' : \mathbf{K} \times X \to X$ ist stetig im Punkt $(0, 0)$. Für $0 \neq \mu \in \mathbf{K}$ und $0 \neq x \in X$ sowie für festes $\epsilon > 0$ zeigen wir die Existenz einer Zahl $r > 0$ derart, daß

$$\alpha\,(x + V_{\lambda,\epsilon}(0)) \subset \mu x + V_{\lambda,3|\mu|\epsilon}(0) \quad \forall\, \alpha \in B_r(\mu) \subset \mathbf{K} \tag{1.4}$$

gilt. Damit wäre dann $B_r(\mu) \times V_{\lambda,\epsilon}(x)$ eine Umgebung des Urbildes $(\mu, x) \in \mathbf{K} \times X$, die unter $'' \cdot ''$ in die Umgebung $V_{\lambda,3|\mu|\epsilon}(\mu x)$ des Bildpunktes $\mu \cdot x \in X$ abgebildet wird. Äquivalent mit (1.4) ist die Inklusion

$$(\alpha - \mu)x + \alpha\, V_{\lambda,\epsilon}(0) \subset V_{\lambda,3|\mu|\epsilon}(0) \quad \forall\, \alpha \in B_r(\mu) \subset \mathbf{K}. \tag{1.5}$$

Da $A := V_{\lambda,|\mu|\epsilon}(0) \subset X$ absorbierend ist, gibt es zu dem fixierten $x \in X$ eine Zahl $\beta > 0$ mit $\frac{x}{\beta} \in A$. Nun sei $0 < r \leq \min\{|\mu|, 1/\beta\}$ gewählt. Weil $A$ balanciert ist, ergibt sich wegen $\frac{x}{\beta} \in A$ und wegen $|\alpha - \mu|\beta < r\beta \leq 1$ auch $(\alpha - \mu)x \in A\ \forall\, \alpha \in B_r(\mu)$. Das heißt, wir haben

$$(\alpha - \mu)x + \alpha\, V_{\lambda,\epsilon}(0) \subset A + (\alpha - \mu)\, V_{\lambda,\epsilon}(0) + \mu\, V_{\lambda,\epsilon}(0) \subset A + V_{\lambda,r\epsilon}(0) + A \subset A + A + A \subset V_{\lambda,3|\mu|\epsilon}(0),$$

und dies ist die behauptete Inklusion (1.5). Somit ist $(X, \mathcal{T})$ in der Tat ein topologischer Vektorraum mit einer lokalkonvexen HAUSDORFF–Topologie. □

Wir zeigen umgekehrt, daß jeder lokalkonvexe Vektorraum $X$ durch eine Familie von Halbnormen topologisiert ist.

**Satz 7.4** (a) *Sei $X$ ein Vektorraum und $A \subset X$ eine konvexe, absorbierende und balancierte Teilmenge. Dann ist ihr* MINKOWSKI*–Funktional $p_A(x)$ eine Halbnorm.*

(b) *Jeder lokalkonvexe Vektorraum $X$ ist durch eine Familie von Halbnormen topologisiert. Die erforderlichen Halbnormen sind die* MINKOWSKI*–Funktionale der konvexen, absorbierenden und balancierten offenen Mengen, die die Nullumgebungsbasis von $X$ definieren.*

*Beweis:* Wir brauchen offenbar nur (a) zu beweisen. Weil $A$ absorbierend ist, existiert zu jedem $x \in X$ mindestens ein $\lambda > 0$ mit $\frac{x}{\lambda} \in A$. Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\frac{\lambda}{\lambda+\epsilon} < 1$, und da $A$ balanciert ist, resultiert also $\frac{x}{\lambda+\epsilon} \in A \ \forall\, \epsilon > 0$. Das Infimum aller solcher $\lambda > 0$ ist gemäß Definition 7.3 gerade das MINKOWSKI–Funktional $p_A(x)$. Somit ergibt sich

$$\frac{x}{p_A(x)+\epsilon} \in A, \quad \frac{y}{p_A(y)+\epsilon} \in A \quad \forall\, x, y \in X \ \forall\, \epsilon > 0.$$

Setzen wir $\lambda := p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon > 0$ und $\mu := (p_A(y)+\epsilon)/\lambda$, so folgt aus der Konvexität von $A$:

$$(1-\mu)\,\frac{x}{p_A(x)+\epsilon} + \mu\,\frac{y}{p_A(y)+\epsilon} = \frac{x+y}{\lambda} \in A.$$

Da das Infimum aller solcher $\lambda > 0$ gerade $p_A(x+y)$ ist, erschließen wir $p_A(x+y) \le p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon \ \forall\, \epsilon > 0$, woraus im Limes $\epsilon \to 0+$ die Subadditivität von $p_A(x)$ folgt. Die Homogenität ergibt sich, weil $A$ balanciert ist: Für $0 \neq \lambda \in \mathbf{K}$ setzen wir $\psi := \lambda/|\lambda|$. Dann gilt $|\psi| = 1$, und es folgt

$$\begin{aligned} |\lambda|\, p_A(x) &= \inf\{|\lambda|\mu > 0 : \frac{x}{\mu} \in A\} = \inf\{\sigma > 0 : \frac{|\lambda|}{\sigma}\, x \in A\} = \inf\{\sigma > 0 : \frac{|\lambda|\psi}{\sigma}\, x \in A\} \\ &= p_A(\lambda x). \end{aligned}$$

Dies beweist die Halbnormeigenschaft von $p_A(x)$. □

---

## 7.2 Beispiele lokalkonvexer Vektorräume

In diesem Abschnitt bezeichnet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ stets ein Gebiet.

**BSP. (7.2.1)** **Der Raum $\mathcal{E}^m(\Omega)$.** Auf dem Vektorraum $C^m(\Omega)$, $0 \le m \le \infty$, wird vermöge

$$\boxed{p_{K,r}(f) := \max_{0 \le |\rho| \le r} \sup_{x \in K} |D^\rho f(x)|, \quad f \in C^m(\Omega), \ \ K \subset \Omega \text{ kompakt}, \ \ m \ge r \in \mathbf{N}_0} \tag{2.1}$$

eine Familie von Halbnormen definiert, die offenbar separierend ist: Für $f \neq 0$ gilt $f(x) \neq 0$ mindestens in einem Punkt $x \in \Omega$ und somit auch $p_{K,r}(f) \neq 0$ auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$, die $x$ enthält. Aus Satz 7.3 folgt nun sofort:

**Satz 7.5** *Die durch* (2.1) *definierte Familie* $\{p_{K,r}\}_{K \subset \Omega, 0 \le r \le m}$ *von separierenden Halbnormen erzeugt auf dem Vektorraum* $C^m(\Omega)$, $0 \le m \le \infty$, *eine lokalkonvexe Topologie* $\mathcal{T}$. *Versehen mit dieser Topologie ist* $C^m(\Omega)$ *ein lokalkonvexer* HAUSDORFF*–Raum, der mit* $\mathcal{E}^m(\Omega)$ *bezeichnet wird. Konvergenz einer Folge* $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$ *gegen einen Grenzwert* $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ *ist genau die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen* $K \subset \Omega$*:*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \sup_{x \in K} |D^\rho f_k(x) - D^\rho f(x)| \quad \forall\, |\rho| \le m \ \forall\, K \subset \Omega \text{ kompakt}.} \tag{2.2}$$

**Folgerung 7.1** (a) *Die auf* $\mathcal{E}^m(\Omega)$ *definierte lokalkonvexe Topologie* $\mathcal{T}$ *erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{T}$ durch eine **abzählbare** Nullumgebungsbasis erzeugt wird. Dazu betrachten wir eine Ausschöpfung $\{K_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ von $\Omega$ mit kompakten Teilmengen $K_j \subset \Omega$:

$$K_j \subset K_{j+1}^o \;\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad \Omega = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} K_j.$$

Die abzählbare Familie $\{p_{K_j,r}\}_{j\in\mathbf{N},0\le r\le m}$ separierender Halbnormen vom Typ (2.1) erzeugt nun eine lokalkonvexe HAUSDORFF–Topologie $\mathcal{T}_1$ auf $\mathcal{E}^m(\Omega)$ mit einer abzählbaren Nullumgebungsbasis $V_{j,r,i}(0) := \{g \in \mathcal{E}^m(\Omega) : p_{K_j,r}(g) < i^{-1}\}$, $j \in \mathbf{N}$, $r \in \{0,1,\ldots,m\}$, $i \in \mathbf{N}$. Wir zeigen die Gleichheit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$ beider Topologien. In der Tat, weil jedes $K_j$ in der Gesamtheit aller kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$ enthalten ist, muß $\mathcal{T}_1$ sicher gröber als $\mathcal{T}$ sein: $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$. Wir zeigen umgekehrt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$, das heißt, jede bezüglich $\mathcal{T}$ offene Teilmenge $A \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$ ist auch offen bezüglich $\mathcal{T}_1$. Zu jedem inneren Punkt $f \in A$ gibt es nämlich eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, ein $r \le m$ und ein $\epsilon_i := i^{-1} > 0$ mit $V_{K,r,i}(f) := \{g \in \mathcal{E}^m(\Omega) : p_{K,r}(g-f) < \epsilon_i\} \subset A$. Zu $K$ existiert eine endliche Überdeckung $K \subset K_0 := \bigcup_{k=1}^{N} K_{j_k}$. Die Umgebungen $V_{k,r,i}(f) := \{g \in \mathcal{E}^m(\Omega) : p_{K_{j_k},r}(g-f) < e_i\}$ erfüllen offenbar

$$U := \bigcap_{k=1}^{N} V_{k,r,i}(f) \subset V_{K,r,i}(f),$$

denn für jedes $g \in U$ gilt $\max\limits_{0\le|\rho|\le r} \sup\limits_{x\in K_0} |D^\rho(g-f)(x)| < \epsilon_i$ und somit auch $p_{K,r}(g-f) < \epsilon_i$. Da $U$ bezüglich $\mathcal{T}_1$ offen ist, muß $f$ auch in der Topologie $\mathcal{T}_1$ innerer Punkt von $A$ sein, also offen bezüglich $\mathcal{T}_1$ sein. □

(b) *Die abzählbare Familie* $\{p_{K_j,r}\}_{j\in\mathbf{N},0\le r\le m}$ *der Halbnormen induziert eine* **Metrik** *auf dem lokalkonvexen* HAUSDORFF*–Raum* $\mathcal{E}^m(\Omega)$.

Jede der Halbnormen $p_{K_j,r}(f)$ erfüllt wegen ihrer Subadditivität die Dreiecksungleichung, und dies gilt dann gemäß (D5) in BSP.(1.2.1) auch für

$$d_{j,r}(f,g) := \frac{p_{K_j,r}(f-g)}{1+p_{K_j,r}(f-g)}, \quad f,g \in \mathcal{E}^m(\Omega),\;\; j \in \mathbf{N},\;\; 0 \le r \le m.$$

Wir zeigen die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für

$$d_j(f,g) := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{2^r}\, d_{j,r}(f,g), \quad j \in \mathbf{N}. \tag{2.3}$$

In der Tat, für jedes Tripel $f,g,h \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ gilt

$$d_j(f,h) \le \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{2^r}\left(d_{j,r}(f,g) + d_{j,r}(g,h)\right) = d_j(f,g) + d_j(g,h).$$

Wegen $d_{j,r}(f,g) \le 1$ liegt auch im Fall $m \to \infty$ Konvergenz der Reihe (2.3) vor. Ganz analog zeigt man, daß

$$\boxed{d(f,g) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\, \frac{d_j(f,g)}{1+d_j(f,g)}, \quad f,g \in \mathcal{E}^m(\Omega),} \tag{2.4}$$

ebenfalls die Dreiecksungleichung erfüllt. Darüber hinaus ist $d(f,g)$ offenkundig symmetrisch und definit: Denn $d(f,g) = 0$ impliziert $d_j(f,g) = 0\;\forall\, j \in \mathbf{N}$, also auch $d_{j,r}(f,g) = 0$ und somit schließlich $p_{K_j,r}(f-g) = 0\;\forall\, j \in \mathbf{N}\;\forall\, 0 \le r \le m$. Wegen $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} K_j$ folgt daraus $D^\rho(f-g)(x) = 0\;\forall\, x \in \Omega\;\forall\, 0 \le |\rho| \le m$ und folglich $f = g$. Da $d(f,g)$ die Metrikaxiome (M1) – (M3) erfüllt, liegt mit (2.4) die behauptete Metrik auf $\mathcal{E}^m(\Omega)$ vor. □

(c) *Die durch die Metrik* (2.4) *auf* $\mathcal{E}^m(\Omega)$ *induzierte metrische Topologie ist genau die lokalkonvexe Topologie* $\mathcal{T}$.

Da $\mathcal{E}^m(\Omega)$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, genügt es offenbar, die Folgenkonvergenz in der Topologie $\mathcal{T}_1$ und der metrischen Topologie zu vergleichen. Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$ in der Topologie $\mathcal{T}_1$ gegen $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} p_{K_j,r}(f_k - f) = 0, \text{ also auch } \lim_{k\to\infty} d_{j,r}(f_k, f) = 0 \quad \forall\, j \in \mathbf{N}\ \forall\, 0 \le r \le m.$$

Da die Reihen (2.3) und (2.4) gleichmäßig bezüglich $k$ konvergieren ( $\sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r}$ ist jeweils Majorante), können wir einen gliedweisen Grenzübergang durchführen:

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \lim_{k\to\infty} d_j(f_k, f) \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{2^r} \lim_{k\to\infty} p_{K_j,r}(f_k - f) = 0.$$

Liegt umgekehrt die metrische Konvergenz $\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0$ vor, so folgt wegen

$$\frac{1}{2^r} \frac{p_{K_j,r}(f_k - f)}{1 + p_{K_j,r}(f_k - f)} \cdot \frac{1}{2^j\big(1 + d_j(f_k, f)\big)} \le \frac{1}{2^j} \frac{d_j(f_k, f)}{1 + d_j(f_k, f)} \le d(f_k, f) \quad \forall\, j \in \mathbf{N}\ \forall\, 0 \le r \le m$$

auch $\lim_{k\to\infty} p_{K_j,r}(f_k - f) = 0\ \forall\, j \in \mathbf{N}\ \forall\, 0 \le r \le m$. □

Wie wir gezeigt haben, ist der lokalkonvexe HAUSDORFF–Raum $\mathcal{E}^m(\Omega)$ **metrisierbar**, da seine Topologie durch eine abzählbare Familie separierender Halbnormen erzeugt wird. Dieser Sachverhalt ist auch für allgemeine lokalkonvexe HAUSDORFF–Räume $X$ richtig: Wird die Topologie von $X$ durch eine abzählbare Familie $\{p_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ separierender Halbnormen erzeugt, so ist $X$ metrisierbar. Eine Metrik, die die lokalkonvexe Topologie erzeugt, kann beispielsweise wie folgt erklärt werden:

$$d(x, y) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)} \quad \forall\, x, y \in X, \qquad a_j > 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1. \tag{2.5}$$

**Definition 7.5** *Ein metrisierbarer lokalkonvexer Vektorraum $X$ heiße* FRÉCHET–RAUM, *wenn $X$ vollständig ist.*

**Satz 7.6** *Für $0 \le m \le \infty$ ist $\mathcal{E}^m(\Omega)$ ein* FRÉCHET*-Raum.*

*Beweis:* Ist $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$ eine CAUCHY–Folge, so gilt $\lim_{i,k\to\infty} d(f_i, f_k) = 0$ oder wegen Folgerung 7.1(c) äquivalent:

$$\lim_{i,k\to\infty} \max_{0\le|\rho|\le r} \sup_{x\in K} |D^\rho(f_i - f_k)(x)| = 0 \quad \forall\, K \subset \Omega \text{ kompakt } \forall\, r \le m.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz auf jedem Kompaktum folgt die Existenz von Funktionen $f_\rho \in C(\Omega)$ mit $\lim_{k\to\infty} D^\rho f_k(x) = f_\rho(x)\ \forall\, |\rho| \le m$ gleichmäßig auf $K$. Ein Standardergebnis der klassischen Analysis liefert dann $D^\rho f_0(x) = f_\rho(x)\ \forall\, x \in \Omega$ und somit $f_0 \in \mathcal{E}^m(\Omega)$. □

---

**BSP. (7.2.2)** **Der SCHWARTZ–Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.** Das ist der $\mathbf{K}$–Vektorraum

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) := \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |x^\sigma D^\rho \varphi(x)| < \infty \quad \forall\, \rho, \sigma \in \mathbf{N}_0^n\Big\}.} \tag{2.6}$$

Die Elemente von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ heißen **temperierte Funktionen**. Jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ist temperiert, und demgemäß gilt $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$ jeweils mit echter Inklusion. Denn einerseits gehört die Funktion $\varphi(x) := \exp(-|x|^2)$ zwar zu $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; sie hat aber keinen kompakten Träger. Und andererseits liegt jedes Polynom $P(x)$ in $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, nicht aber in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

**Satz 7.7** *Die auf dem Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ definierte Familie von Halbnormen*

$$\boxed{p_{\rho\sigma}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |x^\sigma D^\rho \varphi(x)|, \quad \rho,\sigma \in \mathbf{N}_0^n, \;\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),} \tag{2.7}$$

*erzeugt eine lokalkonvexe Topologie. Versehen mit dieser Topologie ist $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ein lokalkonvexer* HAUSDORFF*–Raum. Konvergenz einer Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gegen einen Grenzwert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ist genau die polynomial gewichtete gleichmäßige Konvergenz*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi \;\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty} p_{\rho\sigma}(\varphi_k - \varphi) = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |x^\sigma (D^\rho\varphi_k(x) - D^\rho\varphi(x))| = 0 \;\; \forall\, \rho,\sigma \in \mathbf{N}_0^n.} \tag{2.8}$$

*Beweis:* Die Halbnorm–Familie (2.7) ist offenbar separierend. Gilt nämlich $\varphi \neq 0$, so auch $p_{\rho\sigma}(\varphi) \neq 0$ mindestens für $|\rho| = 0$. Der Rest folgt aus Satz 7.3. □

Da die Halbnorm–Familie (2.7) abzählbar ist, wird vermöge

$$\boxed{d(\varphi,\psi) := \sum_{|\rho|,|\sigma|\geq 0} a_{\rho\sigma} \frac{p_{\rho\sigma}(\varphi-\psi)}{1+p_{\rho\sigma}(\varphi-\psi)}, \quad \varphi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad a_{\rho\sigma} > 0 \text{ und } \sum_{|\rho|,|\sigma|\geq 0} a_{\rho\sigma} = 1,} \tag{2.9}$$

eine **Metrik** auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ induziert. Somit ist der Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ metrisierbar:

**Satz 7.8** *Versehen mit der in* Satz 7.7 *eingeführten lokalkonvexen Topologie ist $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ein* FRÉCHET*–Raum.*

*Beweis:* Die Vollständigkeit von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ zeigt man wegen der gleichmäßigen Konvergenz ganz analog wie in Satz 7.6. □

Anstelle der Halbnorm–Familie (2.7) betrachten wir

$$\boxed{p_{j,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \Big((1+|x|^2)^{j/2} \sum_{|\rho|\leq m} |D^\rho\varphi(x)|\Big), \quad j,m \in \mathbf{N}_0, \;\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).} \tag{2.10}$$

Wir werden zeigen, daß durch die Halbnorm–Familie (2.10) dieselbe lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ erzeugt wird wie durch (2.7). Vorab beweisen wir das folgende Hilfsresultat.

**Satz 7.9** *Für jedes $j \in \mathbf{N}_0$ gibt es Konstanten $A_j$, $B_j > 0$ mit*

$$\boxed{A_j\,(1+|x|^2)^j \leq \sum_{|\rho|\leq j} x^{2\rho} \leq B_j\,(1+|x|^2)^j \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n.} \tag{2.11}$$

*Beweis:* Für $j = 0$ wird diese Relation mit $A_0 = B_0 = 1$ erfüllt. Wir nehmen nun $j \geq 1$ an und betrachten zunächst die Raumdimension $n = 1$. Unter Verwendung der binomischen Formel ergibt sich

$$(1+x^2)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{2k} \quad \begin{cases} \geq \sum\limits_{\rho=0}^{j} x^{2\rho}, \\ \leq \max\limits_{0\leq k\leq j} \binom{j}{k} \sum\limits_{\rho=0}^{j} x^{2\rho}, \end{cases}$$

sodaß $A_j^{-1} := \max\limits_{0\le k\le j}\binom{j}{k}$ und $B_j := 1$ das Verlangte leisten. Im Fall der Raumdimension $n = 2$ erschließen wir mit $x = (x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}(1+|x|^2)^j &= \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(x_1^2+x_2^2)^k = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_1^{2i}\,x_2^{2(k-i)}\\ &\le A_j^{-1}\sum_{k=0}^{j}\sum_{i=0}^{k}x_1^{2i}\,x_2^{2(k-i)} = A_j^{-1}\sum_{k=0}^{j}\sum_{\rho_1+\rho_2=k}x_1^{2\rho_1}\,x_2^{2\rho_2} = A_j^{-1}\sum_{|\rho|\le j}x^{2\rho}\end{aligned}$$

mit $A_j^{-1} := \max\limits_{0\le i\le k\le j}\binom{j}{k}\binom{k}{i}$. Ganz analog zeigt man mit $B_j^{-1} := \min\limits_{0\le i\le k\le j}\binom{j}{k}\binom{k}{i} = 1$ die Abschätzung $(1+|x|^2)^j \ge B_j^{-1}\sum\limits_{|\rho|\le j}x^{2\rho}$. Den allgemeinen Fall erschließt man mit vollständiger Induktion nach $n$. □

**Satz 7.10** *Die beiden Halbnorm–Familien* (2.7) *und* (2.10) *erzeugen auf* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *dieselbe lokalkonvexe* HAUSDORFF*–Topologie.*

*Beweis:* Da beide Halbnorm–Familien abzählbar sind, genügt es die Gleichheit der durch sie auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ erzeugten metrischen Strukturen zu zeigen. Das ist genau der Fall, wenn in beiden Strukturen dieselbe Folgenkonvergenz vorliegt. Nehmen wir also an, es liege für eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ die Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} p_{\rho\sigma}(\varphi_k) = 0 \quad \forall\,\rho,\sigma \in \mathbf{N}_0^n$$

vor. Beachten wir

$$|x^\sigma|^2 = |x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_n^{\sigma_n}|^2 = x^{2\sigma}, \quad \Big(\sum_{|\sigma|\le j}|x^\sigma|^2\Big)^{1/2} \le \sum_{|\sigma|\le j}|x^\sigma|, \tag{2.12}$$

so folgt aus (2.11) für alle $j, m \in \mathbf{N}_0$:

$$p_{j,m}(\varphi_k) \le \sqrt{A_j}\sum_{|\sigma|\le j}\sum_{|\rho|\le m}\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\big|x^\sigma D^\rho\varphi_k(x)\big| = \sqrt{A_j}\sum_{|\sigma|\le j}\sum_{|\rho|\le m}p_{\rho\sigma}(\varphi_k) \to 0 \ \ (k\to\infty).$$

Haben wir andererseits die Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} p_{j,m}(\varphi_k) = 0 \quad \forall\, j, m \in \mathbf{N}_0$$

vorliegen, so ergibt sich aus (2.11) für jedes Multiindexpaar $\rho, \sigma \in \mathbf{N}_0$ mit $|\rho| = m$, $|\sigma| = j$ die Beziehung

$$\begin{aligned}p_{\rho\sigma}(\varphi_k) &= \sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\sigma D^\rho\varphi_k(x)| \le \sup_{x\in\mathbf{R}^n}\Big[\Big(\sum_{|\alpha|\le j}|x^\alpha|^2\Big)^{1/2}\sum_{|\beta|\le m}|D^\beta\varphi_k(x)|\Big]\\ &\le \sqrt{B_j}\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\Big((1+|x|^2)^{j/2}\sum_{|\beta|\le m}|D^\beta\varphi_k(x)|\Big) = \sqrt{B_j}\,p_{j,m}(\varphi_k) \to 0 \ \ (k\to\infty).\end{aligned}$$

Somit ist die Gleichheit beider Folgenkonvergenzen bewiesen. □

Für $1 \le p \le \infty$ gehört jede Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ offenbar auch zu $L^p(\mathbf{R}^n)$. Dies ist im Fall $p = \infty$ klar, denn es gilt ja

$$\|\varphi\|_\infty = p_{0,0}(\varphi) < \infty \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

Bezeichnet $\omega_n := 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ wieder den Oberflächeninhalt der 1–Sphäre im $\mathbf{R}^n$, so ergibt sich im Fall $1 \le p < \infty$ bei Verwendung von Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p &= \Big(\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \le p_{j,0}(\varphi)\Big(\int_{\mathbf{R}^n}\frac{dx}{(1+|x|^2)^{jp/2}}\Big)^{1/p}\\ &\le p_{j,0}(\varphi)\,\omega_n^{1/p}\Big(\int_0^\infty\frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r^2)^{jp/2}}\Big)^{1/p} < \infty \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n),\end{aligned}$$

sofern wir $j > n/p$ wählen. Es folgt:

**Satz 7.11** (a) *Für $1 \le p < \infty$ ist $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbf{R}^n)$.*

(b) *In der lokalkonvexen Topologie von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ist $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.*

*Beweis:* (a) Diese Behauptung folgt aus der Inklusion $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset L^p(\mathbf{R}^n)$ und aus Satz 4.38.

(b) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ fest und sei $\tau \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ eine Abschneidefunktion mit $\tau(x) = 1 \ \forall\ x \in \overline{B_1(0)}$. Wir setzen $f_\epsilon(x) := f(x)\tau(\epsilon\, x) \ \forall\ x \in \mathbf{R}^n$ und haben somit $f_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \ \forall\ \epsilon > 0$. Mit Hilfe der LEIBNIZschen Ableitungsregel aus Satz 5.8 erhalten wir nun

$$\begin{aligned} D^\rho\big(f_\epsilon(x) - f(x)\big) &= D^\rho\big(f(x)(\tau(\epsilon x) - 1)\big) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \le \rho \\ \sigma \ne \rho}} \binom{\rho}{\sigma} \big(D^\sigma f\big)(x) \cdot \epsilon^{|\rho-\sigma|} \big(D^{\rho-\sigma}\tau(y)\big)\big|_{y=\epsilon x} + \big(D^\rho f\big)(x) \cdot \big(\tau(\epsilon x) - 1\big). \end{aligned}$$

Hieran erkennt man $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} p_{\rho\sigma}(f_\epsilon - f) = 0 \ \forall\ \rho, \sigma \in \mathbf{N}_0^n$. □

---

**BSP. (7.2.3)** **Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$.** Für eine beliebig fixierte kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ betrachten wir den $\mathbf{K}$–Vektorraum

$$\boxed{\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \,:\, \operatorname{supp}\varphi \subset K\},} \tag{2.13}$$

auf dem durch die Vorschrift

$$\boxed{p_{K,m}(\varphi) := \max_{0 \le |\rho| \le m} \sup_{x \in K} |D^\rho \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad m \in \mathbf{N}_0,} \tag{2.14}$$

eine Halbnorm–Familie erklärt ist. Man erkennt analog zu BSP.(7.2.1), daß die Halbnorm–Familie (2.14) separierend ist. Da sie (bei festem $K$) gleichzeitig abzählbar ist, erzeugt sie wiederum einen metrisierbaren lokalkonvexen HAUSDORFF–Raum. Als Metrik kann das Funktional

$$\boxed{d(\varphi, \psi) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, \frac{p_{K,m}(\varphi - \psi)}{1 + p_{K,m}(\varphi - \psi)}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad a_m > 0 \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} a_m = 1,} \tag{2.15}$$

gewählt werden. Die so erzeugte Topologie ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, und wir erhalten in Analogie zu Satz 7.6:

**Satz 7.12** *Die auf dem Vektorraum $\mathcal{D}_K(\Omega)$ für kompaktes $K \subset \Omega$ definierte Halbnorm–Familie* (2.14) *erzeugt eine lokalkonvexe Topologie. Versehen mit dieser Topologie ist $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ein* FRÉCHET*–Raum. Konvergenz einer Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ gegen einen Grenzwert $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ ist genau die gleichmäßige Konvergenz aller Ableitungen auf dem Kompaktum $K$:*

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi \ \Leftrightarrow \ \lim_{k \to \infty} p_{K,m}(\varphi_k - \varphi) = \lim_{k \to \infty} \max_{0 \le |\rho| \le m} \sup_{x \in K} |D^\rho(\varphi_k - \varphi)(x)| = 0 \ \forall\ m \in \mathbf{N}_0.} \tag{2.16}$$

Um schließlich auch den $\mathbf{K}$–Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ lokalkonvex zu topologisieren, beachten wir zunächst, daß für kompaktes $K \subset \Omega$ algebraisch die Gleichheit $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup\limits_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega)$ gilt.

**Definition 7.6** *Eine konvexe, absorbierende und balancierte Teilmenge $U \subset C_0^\infty(\Omega)$ heiße* **offene Nullumgebung** *genau dann, wenn $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ in der Topologie von $\mathcal{D}_K(\Omega)$ eine offene Nullumgebung ist. Das System aller solcher Teilmengen $U \subset C_0^\infty(\Omega)$ bildet die Nullumgebungsbasis einer lokalkonvexen Topologie auf $C_0^\infty(\Omega)$. Versehen mit dieser Topologie ist $C_0^\infty(\Omega)$ ein lokalkonvexer Vektorraum, der mit $\mathcal{D}(\Omega)$ bezeichnet wird und der darüber hinaus der* **induktive Limes** *der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$ genannt wird.*

**Bemerkung 7.1** (a) Wird aus jedem der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt, eine konvexe, absorbierende und balancierte Nullumgebung $U_K$ genommen und $S := \bigcup\limits_{K \subset \Omega} U_K$ gesetzt, so ist die konvexe Hülle

$$U := \operatorname{co}(S) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \,:\, \varphi \text{ ist konvexe LK aus je endlich vielen } \varphi_k \in S\}$$

konvex, absorbierend und balanciert, was einfach nachgerechnet werden kann. Die Schnitte $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ sind konvexe, absorbierende und balancierte Nullumgebungen von $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Das System aller solcher Teilmengen $U$ bei beliebiger Wahl der $U_K$ mit den oben genannten Eigenschaften bildet eine lokale Basis für die lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) In der so eingeführten Topologie ist $\mathcal{D}(\Omega)$ *nicht* metrisierbar, also kein FRÉCHET–Raum.

Wir zeigen eine Charakterisierung der lokalkonvexen Topologie auf $C_0^\infty(\Omega)$ durch einen Konvergenzbegriff:

**Satz 7.13** *Eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann gegen den Grenzwert $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, wenn gilt:*

(a) *Es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ mit* $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K \;\; \forall\, k \in \mathbf{N}$,

(b) $\lim\limits_{k \to \infty} \sup\limits_{x \in K} |D^\rho \varphi_k(x) - D^\rho \varphi(x)| = 0 \;\; \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n$.

*Beweis:* Wegen der Linearität des Konvergenzbegriffes genügt es, den Fall $\varphi = 0$ zu betrachten (andernfalls ersetzen wir $\varphi_k$ durch $\varphi_k - \varphi$). Wir beweisen (a) durch eine Widerspruchsannahme: Es gebe eine Punktfolge $(x_j)_{j \in \mathbf{N}} \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in $\Omega$ und dazu eine Teilfolge $(\varphi_{k_j})_{j \in \mathbf{N}} \subset (\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $\varphi_{k_j}(x_j) \neq 0$. Da sich die Folge der $x_j$ in $\Omega$ nicht häuft, können wir eine Ausschöpfung $\Omega = \bigcup\limits_{j \in \mathbf{N}} K_j$ von $\Omega$ mit kompakten Teilmengen $K_j \subset \Omega$ derart bestimmen, daß gilt:

$$K_j \subset K_{j+1}^o, \quad x_j \in V_j := K_j \setminus K_{j-1} \quad \forall\, j \in \mathbf{N}, \;\; K_0 := \emptyset.$$

Wir setzen nun

$$p(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} 2 \cdot \sup_{x \in V_j} \left|\varphi(x)/\varphi_{k_j}(x_j)\right|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann wird durch

$$U := \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \,:\, p(\varphi) < 1\}$$

eine Nullumgebung von $\mathcal{D}(\Omega)$ definiert, denn jedes kompakte $K \subset \Omega$ wird durch höchstens endlich viele der Mengen $V_j$ überdeckt: $K \subset \bigcup\limits_{j \in \Lambda_K} V_j$ mit $\operatorname{card} \Lambda_K < \infty$. Also sind die Schnitte $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ die Nullumgebungen

$$U_K = \Big\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \,:\, \sum_{j \in \Lambda_K} 2 \cdot \sup_{x \in V_j} \left|\varphi(x)/\varphi_{k_j}(x_j)\right| < 1\Big\}.$$

Wegen $p(\varphi_{k_j}) \geq 2$ enthält aber $U$ keines der Elemente $\varphi_{k_j}$, im Widerspruch zur Konvergenzvoraussetzung $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k = 0$. Somit ist (a) bewiesen, und die Konvergenz $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi$ ist genau die gleichmäßige Konvergenz (2.16) in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Daraus ergibt sich (b). □

Da in den lokalkonvexen Vektorräumen $X := \mathcal{E}^m(\Omega)$ und $X := \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ das erste Abzählbarkeitsaxiom gilt, ist eine Abbildung $f : X \to Y$, $Y$ ein topologischer Raum, gemäß Satz 1.3 genau dann stetig, wenn $f$ folgenstetig ist. Diese Aussage bleibt auch für den lokalkonvexen Vektorraum $X := \mathcal{D}(\Omega)$ richtig, obwohl dieser nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt:

**Satz 7.14** *Eine Abbildung $f : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$, $Y$ ein topologischer Raum, ist genau dann stetig, wenn $f$ folgenstetig ist.*

*Beweis:* Die Implikation "Stetigkeit $\Rightarrow$ Folgenstetigkeit" wurde in Satz 1.3 unabhängig vom ersten Abzählbarkeitsaxiom bewiesen und bleibt hier gültig. Zum Beweis der Implikation "Folgenstetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit" genügt es, die Stetigkeit der Einschränkung $f\big|\mathcal{D}_K(\Omega)$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$ zu zeigen. Denn wegen Satz 7.13 ist ja die Konvergenz $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$ einer Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ äquivalent mit der Konvergenz $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$. Nun ist $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ein FRÉCHET–Raum, auf dem das erste Abzählbarkeitsaxiom gilt. Somit erhalten wir die behauptete Implikation aus Satz 1.3. □

**Satz 7.15** *Jede der folgenden Einbettungen* (a), (b) *und* (c) *ist stetig:*

$$\text{(a)}\quad Id_{1,\Omega} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad \text{(b)}\quad Id_{2,\Omega} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{E}^\infty(\Omega), \quad \text{(c)}\quad Id_3 : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n).$$

*Beweis:* Es genügt also wegen Satz 7.14, die Folgenstetigkeit der obigen Einbettungen nachzuweisen.

(a) $Id_{1,\Omega}$ ist folgenstetig, wenn jede der Einschränkungen $Id_{1,\Omega}\big|\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt, folgenstetig ist. Letzteres ist aber klar, denn es gilt ja mit (2.7) und (2.14) für alle $\rho, \sigma \in \mathbf{N}_0^n$:

$$p_{\rho\sigma}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |x^\sigma D^\rho \varphi(x)| \le \sup_{x\in K} |x^\sigma| \cdot \max_{0\le|\alpha|\le|\rho|} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| =: C_\sigma \cdot p_{K,|\rho|}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

(b) Auch hier genügt es, die Folgenstetigkeit von $Id_{2,\Omega}\big|\mathcal{D}_K(\Omega)$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$ zu zeigen. Dies ist aber trivial, weil die beiden Halbnorm–Familien (2.1) und (2.14) dieselben sind.

(c) Aus (2.1) und (2.10) resultiert

$$p_{K,r}(\varphi) = \max_{0\le|\rho|\le r} \sup_{x\in K} |D^\rho \varphi(x)| \le \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \Big( \sum_{|\rho|\le r} |D^\rho \varphi(x)| \Big) = p_{0,r}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

und jedes kompakte $K \subset \mathbf{R}^n$. Daraus ergibt sich die Folgenstetigkeit von $Id_3$. □

---

## 7.3 Die FOURIER–Transformation temperierter Funktionen

Zu den wichtigen Instrumenten der Analysis gehört die FOURIER–Transformation, mit deren Hilfe einige Prozesse der Analysis wie Differentiation und (Faltungs–) Integration algebraisiert werden können. Integraltransformationen sind im allgemeinen nur dann sinnvoll einsetzbar, wenn ihre Umkehrtransformation beherrscht wird. Somit kommt es insbesondere auf die geeignete Wahl von Funktionenräumen an, welche einerseits reichhaltig (und somit für die Analysis interessant) sein müssen, auf denen aber andererseits die zu verwendende Integraltransformation bijektiv ist. Wir werden zeigen, daß diese Eigenschaften bei der FOURIER–Transformation auf den FRÉCHET–Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ zutreffen.

**Definition 7.7** *Für Punkte* $x,\ \xi \in \mathbf{R}^n$ *bezeichne* $\langle x,\xi\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j$ *das Standard–Skalarprodukt im* $\mathbf{R}^n$*, und für festes* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *heiße der Ausdruck*

$$\boxed{\hat{\varphi}(\xi) := (\mathcal{F}\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx} \tag{3.1}$$

*das* FOURIER–**Integral** *von* $\varphi$ *bei* $\xi \in \mathbf{R}^n$.

**Bemerkung 7.2** (a) Wir nehmen in diesem Abschnitt stets an, daß der Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ die durch die Halbnorm–Familie $\{p_{j,m}\}_{j,m\in\mathbf{N}_0}$ aus (2.10) erzeugte lokalkonvexe Topologie trägt. Wegen $|e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}| = 1$ folgt gemäß BSP.(7.2.2) für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$:

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \le p_{n+1,0}(\varphi)\cdot(2\pi)^{-n/2}\omega_n\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} =: C_n\,p_{n+1,0}(\varphi) < \infty\ \forall\,\xi\in\mathbf{R}^n, \tag{3.2}$$

und somit die Existenz des uneigentlichen RIEMANN–Integrals (3.1) in jedem Punkt $\xi \in \mathbf{R}^n$.
(b) Andere in der Literatur gebräuchliche Definitionen des FOURIER–Integrals von $\varphi$ bei $\xi$ sind auch

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx,\quad \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx,\quad \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i\,\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx,$$

oder entsprechende Versionen mit dem Vorzeichen "+" im Exponenten anstelle von "−".

**Definition 7.8** *Die durch die Zuordnungsvorschrift* (3.1) *induzierte Abbildung* $\mathbf{R}^n \ni \xi \mapsto \hat{\varphi}(\xi)$ *heiße die* FOURIER–*Transformierte der Funktion* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$*, und der lineare Integraloperator* $\mathcal{F}$ *mit* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto \hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ *heiße die* FOURIER–**Transformation** *auf dem Raum* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Wir stellen in dem folgenden Satz die wichtigsten Abbildungseigenschaften der FOURIER–Transformation zusammen.

**Satz 7.16** *Für* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *und jedes Paar von Multiindizes* $\rho,\ \sigma \in \mathbf{N}_0^n$ *gelten:*

$$\text{(a)}\ \ D^\sigma\hat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\sigma|}(x^\sigma\varphi)\hat{}\,(\xi),\quad \text{(b)}\ \ (D^\rho\varphi)\hat{}\,(\xi) = i^{|\rho|}\xi^\rho\hat{\varphi}(\xi),\quad \text{(c)}\ \ \hat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

*Beweis:* Wegen der in $\xi \in \mathbf{R}^n$ gleichmäßigen Konvergenz des FOURIER–Integrals (3.1) dürfen Integration und Differentiation in den folgenden Rechnungen vertauscht werden.
(a) Unter Berücksichtigung von $D_\xi^\sigma e^{-i\,\langle x,\xi\rangle} = (-i)^{|\sigma|}x^\sigma e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} D^\sigma\hat{\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} D_\xi^\sigma e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx = (-i)^{|\sigma|}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}x^\sigma\varphi(x)\,dx \\ &= (-i)^{|\sigma|}(x^\sigma\varphi)\hat{}\,(\xi)\quad \forall\,\xi\in\mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

(b) Aus $p_{j,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n}((1+|x|^2)^{j/2}\sum_{|\rho|\le m}|D^\rho\varphi(x)|) < \infty\ \forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ folgt notwendig

$$\lim_{|x|\to\infty}|D^\rho\varphi(x)| = 0\ \forall\,\rho\in\mathbf{N}_0^n.$$

Mittels partieller Integration erhält man deshalb:

$$\begin{aligned}(D^\rho\varphi)\hat{}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}(D_x^\rho\varphi)(x)\,dx = (-1)^{|\rho|}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} D_x^\rho e^{-i\,\langle x,\xi\rangle}\cdot\varphi(x)\,dx\\ &= i^{|\rho|}\xi^\rho\hat{\varphi}(\xi)\quad\forall\,\xi\in\mathbf{R}^n.\end{aligned}$$

(c) Gemäß (a) gilt sicher $\hat{\varphi}\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Wir haben somit noch $p_{\sigma\rho}(\hat{\varphi})<\infty\ \forall\,\rho,\sigma\in\mathbf{N}_0^n$ zu zeigen. Dazu verwenden wir die Ableitungsregeln (a) und (b):

$$i^{|\rho|}\xi^\rho(D^\sigma\hat{\varphi})(\xi)\overset{\text{(a)}}{=}(-i)^{|\sigma|}i^{|\rho|}\xi^\rho(x^\sigma\varphi)\hat{}(\xi)\overset{\text{(b)}}{=}(-i)^{|\sigma|}(D^\rho(x^\sigma\varphi))\hat{}(\xi).$$

Vermöge der LEIBNIZschen Ableitungsregel aus Satz 5.8 ergibt sich

$$D^\rho(x^\sigma\varphi(x))=\sum_{\alpha\le\rho}\binom{\rho}{\alpha}(D^\alpha x^\sigma)\cdot(D^{\rho-\alpha}\varphi)(x).$$

Verwenden wir hier die CAUCHY–SCHWARZ–Ungleichung und die Relation (2.11), so erhalten wir für geeignet gewähltes $C_{\rho\sigma}$:

$$|D^\rho(x^\sigma\varphi(x))|\le C_{\rho\sigma}\Big(\sum_{|\alpha|\le|\sigma|}x^{2\alpha}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|\beta|\le|\rho|}|D^\beta\varphi(x)|^2\Big)^{1/2}\le C_{\rho\sigma}\,B_{|\sigma|}\,(1+|x|^2)^{|\sigma|/2}\sum_{|\beta|\le|\rho|}|D^\beta\varphi(x)|.$$

Also gilt mit (3.2)

$$p_{\sigma\rho}(\hat{\varphi})=\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n}|\xi^\rho D^\sigma\hat{\varphi}(\xi)|\le C_{\rho\sigma}\,B_{|\sigma|}\,C_n\cdot p_{n+1+|\sigma|,|\rho|}(\varphi),\tag{3.3}$$

und dies beweist $\hat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. □

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 7.16 erhalten wir:

**Satz 7.17** *Die* FOURIER*–Transformation $\mathcal{F}$ ist eine stetige lineare Abbildung des Raumes $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in sich.*

*Beweis:* Wie wir in BSP.(7.2.3) bemerkt haben, brauchen wir nur die Folgenstetigkeit von $\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ im Punkte $\varphi=0$ zu zeigen. Diese ergibt sich aber unmittelbar aus (3.3): Für $\varphi_k\overset{\mathcal{S}}{\to}0$ gilt ja $p_{j,m}(\varphi_k)\to0$, und somit wegen der Äquivalenz der beiden Halbnorm–Familien (2.7) und (2.10):

$$p_{\sigma\rho}(\mathcal{F}\varphi_k)\le C\,p_{n+1+|\sigma|,|\rho|}(\varphi_k)\to0\quad\forall\,\rho,\,\sigma\in\mathbf{N}_0^n.$$

Dies beweist schon die behauptete Stetigkeit. □

Das Problem der Umkehrung der FOURIER–Transformation lösen wir in mehreren Teilschritten. In einem ersten Schritt zeigen wir, daß die Funktion $\varphi(x):=\exp\big(-\frac{1}{2}\,|x|^2\big)$ ein Fixpunkt von $\mathcal{F}$ ist. Dabei verwenden wir die Identität

$$1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\,(t+is)^2}\,dt\quad\forall\,s\in\mathbf{R},\tag{3.4}$$

die man mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln beweist.

**Satz 7.18** *Für die Funktion* $\varphi(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right)$ *gilt* $\hat{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi)\ \forall\ \xi \in \mathbf{R}^n$.

*Beweis:* Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$q(x,\xi) := i\,\langle x,\xi\rangle + \frac{1}{2}|x|^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{2}x_j^2 + ix_j\xi_j\Big) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}(x_j+i\xi_j)^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2,$$

und somit

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-q(x,\xi)}\,dx = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\xi_j)^2}\,dt\Big) \overset{(3.4)}{=} \varphi(\xi)\ \forall\ \xi\in\mathbf{R}^n.$$

Also gilt die Fixpunktgleichung $\mathcal{F}\varphi = \varphi$. □

Im nächsten Schritt belegen wir die Gültigkeit der PARSEVALschen Formel.

**Satz 7.19 (PARSEVALsche Formel)**
*Für jedes Paar* $\varphi,\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *gilt*

$$\boxed{\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx.} \tag{3.5}$$

*Beweis:* Dieser erfolgt unter Verwendung des Vertauschungssatzes 4.30 von FUBINI:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\,d\xi &= \int_{\mathbf{R}^n_\xi}\Big((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n_x} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx\Big)\psi(\xi)\,d\xi\\ &\overset{\text{S.4.30}}{=} \int_{\mathbf{R}^n_x}\varphi(x)\Big((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n_\xi} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\psi(\xi)\,d\xi\Big)\,dx\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Dies ist bereits die behauptete PARSEVAL–Formel (3.5). □

Wir zeigen nun, wie sich Verschiebung und Dilatation des Argumentes unter der FOURIER–Transformation verhalten. Dazu bezeichne für $h \in \mathbf{R}^n$ und $0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$:

$$\tau_h:\begin{cases}\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbf{R}^n),\\ \varphi(x)\mapsto(\tau_h\varphi)(x) := \varphi(x-h),\end{cases}\qquad \delta_\lambda:\begin{cases}\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbf{R}^n),\\ \varphi(x)\mapsto(\delta_\lambda\varphi)(x) := \varphi(\lambda x).\end{cases}$$

Das folgende Resultat beweist man durch einfache Substitution der Argumente, wobei die Transformationsregel

$$dy = \Big|\det\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\Big|\,dx = |\lambda|^n\,dx$$

bei der Koordinatentransformation $y := \lambda x$ zu beachten ist.

**Satz 7.20** *Für* $h \in \mathbf{R}^n$, $0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$ *und für jedes* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *gilt:*

(a) $(\tau_h\varphi)\hat{}\,(\xi) = e^{-i\langle h,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)$. (*Verschiebungssatz*)

(b) $(e^{i\langle h,x\rangle}\varphi)\hat{}(\xi) = (\tau_h\hat{\varphi})(\xi) = \hat{\varphi}(\xi - h)$. (*Dämpfungssatz*)

(c) $(\delta_\lambda\varphi)\hat{}(\xi) = |\lambda|^{-n}(\delta_{1/\lambda}\hat{\varphi})(\xi) = |\lambda|^{-n}\hat{\varphi}(\frac{\xi}{\lambda})$. (*Ähnlichkeitssatz*)

Schließlich ergibt sich aus dem LEBESGUEschen Satz 4.27 von der dominierten Konvergenz:

**Satz 7.21** *Für $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ und $\epsilon > 0$ seien*

$$J := \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx \quad \textit{und} \quad J_\epsilon := \int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|x|^2}\,dx$$

*gesetzt. Dann gilt* $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} J_\epsilon = J$.

*Beweis:* Die Funktion $|f(x)|$ ist eine integrable Majorante des Integranden von $J_\epsilon$, so daß die behauptete Relation aus dem oben zitierten Satz 4.27 folgt. □

Wir sind nun in der Lage, das Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen, nämlich:

**Satz 7.22 (FOURIERscher Integralsatz für $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$)**
*Es gilt*

$$\boxed{\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\ \ \forall\ x \in \mathbf{R}^n.} \tag{3.6}$$

*Beweis:* Wir halten im Folgenden $x \in \mathbf{R}^n$ fest und setzen

$$J(x) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi, \quad J_\epsilon(x) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|\xi|^2}\,d\xi.$$

Die Funktion $f(\xi) := e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)$ erfüllt dann die Bedingungen von Satz 7.21, aus dem sich $J(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} J_\epsilon(x)$ ergibt. Somit ist (3.6) genau dann wahr, wenn wir $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} J_\epsilon(x) = \varphi(x)$ gezeigt haben. Zu diesem Zweck sei $\psi_x(\xi) := e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|\xi|^2}$ gesetzt. Es gilt $\psi_x \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, und aus der PARSEVALschen Formel (3.5) folgt

$$J_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\psi_x(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\hat{\psi}_x(y)\,dy.$$

Mit Satz 7.20(b) und (c) berechnet man

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_x(y) &= (e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\frac{1}{2}|\epsilon\xi|^2})\hat{}(y) = (e^{-\frac{1}{2}|\epsilon\xi|^2})\hat{}(y-x) = \epsilon^{-n}(e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2})\hat{}(\frac{y-x}{\epsilon})\\ &= \epsilon^{-n}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big|\frac{y-x}{\epsilon}\Big|^2\Big],\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus Satz 7.18 folgt. Nach Durchführung der Variablentransformation $z := (y-x)/\epsilon$ ergibt sich unter Verwendung des LEBESGUEschen Lemmas von der dominierten Konvergenz:

$$\lim_{\epsilon\to 0+} J_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n/2}\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x+\epsilon z)\,e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\,dz = \varphi(x)\,(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\,dz.$$

Der letzte Ausdruck ist das FOURIER–Integral der Funktion $\exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$ bei $\xi = 0$, welches gemäß Satz 7.18 den Wert 1 hat. Nun war $x \in \mathbf{R}^n$ beliebig wählbar, so daß die behauptete Relation (3.6) tatsächlich bewiesen ist. □

Setzen wir für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ und $\xi \in \mathbf{R}^n$

$$\boxed{\check{\varphi}(\xi) := (\mathcal{F}^*\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \varphi(x)\, dx,} \tag{3.7}$$

so erhalten wir durch Anwenden der Regeln der Konjugation in jedem Punkt $\xi \in \mathbf{R}^n$:

$$\text{(i)}\ \ (\mathcal{F}^*\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi) = (\overline{\mathcal{F}\overline{\varphi}})(\xi), \qquad \text{(ii)}\ \ (\overline{\mathcal{F}^*\varphi})(\xi) = (\mathcal{F}\overline{\varphi})(\xi). \tag{3.8}$$

Mit Satz 7.17 ergibt sich deshalb, daß $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ eine stetige lineare Abbildung ist. Dieser Sachverhalt begründet den folgenden Satz:

**Satz 7.23** *Die* FOURIER*–Transformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ist ein Isomorphismus. Die zu $\mathcal{F}$ inverse Abbildung ist gerade die Abbildung $\mathcal{F}^*$ aus* (3.7)*: $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.*

*Beweis:* Wir brauchen offenbar nur die Bijektivität von $\mathcal{F}$ sowie die Identität $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id = \mathcal{F}\mathcal{F}^*$ zu zeigen.

(a) $\mathcal{F}$ ist injektiv: Denn für $\varphi$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ mit $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$ folgt aus (3.6) $\varphi = \mathcal{F}^*\hat{\varphi} = \mathcal{F}^*\hat{\psi} = \psi$.

(b) $\mathcal{F}$ ist surjektiv: Denn sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gegeben. Dann ist $\varphi := \mathcal{F}^*\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ Urbild von $\psi$ unter $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\mathcal{F}^*\psi \overset{(3.8\text{i})}{=} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}\overline{\psi}}) \overset{(3.8\text{ii})}{=} (\overline{\mathcal{F}^*\mathcal{F}\overline{\psi}}) \overset{(3.6)}{=} \overline{\overline{\psi}} = \psi. \tag{3.9}$$

(c) Wie in (3.9) gezeigt gilt $\mathcal{F}\mathcal{F}^*\psi = \psi\ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, während aus (3.6) die Identität $\mathcal{F}^*\mathcal{F}\varphi = \varphi\ \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ folgt. Somit haben wir schließlich noch $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ gezeigt. □

**Definition 7.9** *Die durch die Zuordnungsvorschrift* (3.7) *induzierte Abbildung $\mathbf{R}^n \ni \xi \mapsto \check{\varphi}(\xi)$ heiße die* **inverse** FOURIER**–Transformierte** *der Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, und der lineare Integraloperator $\mathcal{F}^{-1} := \mathcal{F}^*$ mit $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto \check{\varphi} = \mathcal{F}^*\varphi$ heiße die* **inverse** FOURIER**–Transformation** *auf dem Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.*

**Bemerkung 7.3** (a) Aus (3.8i) ergibt sich $(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi)$ und somit $(\mathcal{F}^2\varphi)(-x) = \varphi(x)$. Daraus folgt $\mathcal{F}^4 = Id$ und insbesondere $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$.

(b) Wegen $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ sind $\hat{\varphi}$ und $\check{\varphi}$ auch für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ sinnvoll erklärt. Der Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ ist aber nicht *stabil* unter der FOURIER–Tranformation: Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt stets $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, und $\hat{\varphi}$ kann *niemals* kompakten Träger haben. Als Beispiel betrachten wir eine Funktion $f \in L^1(\mathbf{R})$ mit Träger im Intervall $[a, b]$. Ihre FOURIER–Transformierte

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\,x\xi} f(x)\, dx$$

läßt sich analytisch zu einer *ganzen Funktion* auf $\mathbf{C}$ fortsetzen:

$$\hat{f}(\xi + i\eta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\,x(\xi+i\eta)} f(x)\, dx, \quad \zeta := \xi + i\eta \in \mathbf{C}.$$

Hätte $\hat{f}$ kompakten Träger, so müßte die Funktion $\hat{f}(\zeta)$ im Endlichen Nullstellen besitzen, was ihrer Ganzheit widerspricht (sofern nicht $\hat{f} = 0$ gilt).

Eine Kombination der PARSEVALschen Formel (3.5) mit der Beziehung

$$\psi = \mathcal{F}^*\mathcal{F}\psi = \mathcal{F}^*\hat{\psi} \overset{(3.8\mathrm{i})}{=} \overline{(\mathcal{F}\overline{\hat{\psi}})}$$

liefert für jedes Funktionenpaar $\varphi,\, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)(\mathcal{F}\overline{\hat{\psi}})(x)\,dx \overset{(3.5)}{=} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}}(\xi)\,d\xi.$$

Da rechts und links jeweils die Skalarprodukte des HILBERT–Raumes $L^2(\mathbf{R}^n)$ stehen (vgl. Satz 4.34), erhalten wir:

**Satz 7.24 (PARSEVALsche Gleichung)**
*Für $\varphi,\, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}}(\xi)\,d\xi = \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle.} \tag{3.10}$$

*Das heißt, wird der dichte Unterraum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset L^2(\mathbf{R}^n)$ über die induzierte $L^2$–Norm $\|\cdot\|_2$ topologisiert, so ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in dieser Normtopologie ein isometrischer Isomorphismus:*

$$\boxed{\|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_2 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).} \tag{3.11}$$

*Beweis:* Setzen wir in (3.10) $\varphi = \psi$, so folgt nach Bildung der Quadratwurzeln bereits die Gleichung $\|\varphi\|_2 = \|\mathcal{F}\varphi\|_2$. Wenn wir hier $\varphi$ durch $\psi := \mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ersetzen, ergibt sich schließlich auch noch $\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$. □

---

## 7.4 Die FOURIER–PLANCHEREL–Transformation

In Satz 7.11(a) haben wir gezeigt, daß der Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbf{R}^n)$ ist. Darüber hinaus folgern wir aus Satz 7.24 die Stetigkeit der linearen Abbildungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ auf dem mit der $L^2$–Topologie versehenen Unterraum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Somit existieren gemäß Satz 2.7 eindeutige Fortsetzungen $\tilde{\mathcal{F}},\, \tilde{\mathcal{F}}^* \in B(L^2(\mathbf{R}^n))$ mit $\tilde{\mathcal{F}}|\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{F}$ und $\tilde{\mathcal{F}}^*|\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{F}^*$. Diese sind wegen (3.11) wiederum Isometrien:

$$\boxed{\|\tilde{\mathcal{F}}f\|_2 = \|f\|_2 = \|\tilde{\mathcal{F}}^*f\|_2 \quad \forall\, f \in L^2(\mathbf{R}^n).} \tag{4.1}$$

Daß aus diesem Sachverhalt auch die Bijektivität von $\tilde{\mathcal{F}}$ und der Zusammenhang $\tilde{\mathcal{F}}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}^*$ folgen, erkennt man so: Zu $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ sei eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = f$ gewählt. Da $\tilde{\mathcal{F}}$ und $\tilde{\mathcal{F}}^*$ stetig und linear sind, ergibt sich nun aus der Beziehung $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = Id|\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{F}^*\mathcal{F}$:

$$\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{F}}^*f = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{F}}^*\varphi_k = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}\mathcal{F}^*\varphi_k = f = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}^*\mathcal{F}\varphi_k = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mathcal{F}}^*\tilde{\mathcal{F}}\varphi_k = \tilde{\mathcal{F}}^*\tilde{\mathcal{F}}f.$$

**Satz 7.25** *Die beiden Integraloperatoren* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *der* FOURIER–*Transformation können in eindeutiger Weise fortgesetzt werden zu linearen isometrischen Abbildungen* $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{F}}^* : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$, *für die der Zusammenhang* $\tilde{\mathcal{F}}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}^*$ *besteht. Somit ist* $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ *ein isometrischer Isomorphismus, für den die Relationen* (4.1) *gelten.*

**Definition 7.10** *Der bijektive isometrische Operator* $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ *heiße die* FOURIER–PLANCHEREL–*Transformation (FPT) oder kurz die* $L^2$–FOURIER–*Transformation.*

Das FOURIER–Integral einer Funktion $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ kann im Gegensatz zu Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ nicht mehr in jedem Punkt $\xi \in \mathbf{R}^n$ in der Form (3.1) erklärt werden. Die aus der HÖLDER–Ungleichung resultierende Abschätzung

$$|\hat{f}(\xi)| \le (2\pi)^{-n/2} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|x|<k} |e^{-i\langle x,\xi\rangle}| \cdot |f(x)|\, dx \le (2\pi)^{-n/2} \lim_{k\to\infty} \sqrt{\mu(B_k(0))} \cdot \|f\|_2 = \infty \quad (4.2)$$

gibt keinerlei Anlaß, die Darstellbarkeit der FP–Transformierten $\tilde{\mathcal{F}}f$ durch das Integral (3.1) anzunehmen. Hingegen existiert

$$\boxed{\hat{f}_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x|<k} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n), \;\; k \in \mathbf{N},} \quad (4.3)$$

in jedem Punkt $\xi \in \mathbf{R}^n$. Denn wegen $\mu(B_k(0)) = n^{-1}\omega_n k^n$ folgt aus (4.2) die Abschätzung

$$|\hat{f}_k(\xi)| \le (2\pi)^{-n/2} \sqrt{n^{-1}\omega_n k^n} \cdot \|f\|_2 < \infty \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n. \quad (4.4)$$

Darüber hinaus kann die gleichmäßige Stetigkeit der Funktionen $\hat{f}_k$ sehr einfach verifiziert werden, so daß sich $\hat{f}_k \in UCB(\mathbf{R}^n)$ $\forall\, k \in \mathbf{N}$ ergibt. Dies gilt in gleicher Weise für die Funktionen

$$\boxed{\check{f}_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x|<k} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n), \;\; k \in \mathbf{N},} \quad (4.5)$$

wie man aus dem Zusammenhang $\check{f}_k(\xi) = \hat{f}_k(-\xi)$ $\forall\, \xi \in \mathbf{R}^n$ erkennt. Wir zeigen nun den folgenden Satz über die Darstellbarkeit der $L^2$–FOURIER–Transformation.

**Satz 7.26 (von PLANCHEREL)**
*Für* $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *und* $k \in \mathbf{N}$ *seien* $\hat{f}_k$ *und* $\check{f}_k$ *gemäß* (4.3) *bzw.* (4.5) *erklärt. Dann gilt* $\hat{f}_k,\ \check{f}_k \in UCB(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ $\forall\, k \in \mathbf{N}$ *sowie*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k - \tilde{\mathcal{F}}f\|_2 = 0 = \lim_{k\to\infty} \|\check{f}_k - \tilde{\mathcal{F}}^* f\|_2.} \quad (4.6)$$

*Beweis:* Es genügt, wenn die Behauptungen des Satzes für $\hat{f}_k$ gezeigt werden, weil sich die Aussagen für $\check{f}_k$ dann aus der Relation $\check{f}_k(\xi) = \hat{f}_k(-\xi)$ ergeben. Für festes $k \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$g_k(x) := \begin{cases} f(x) & : \ |x| < k, \\ 0 & : \ |x| \ge k. \end{cases}$$

Es folgt offenbar $g_k \in L^2(\mathbf{R}^n)\ \forall\, k \in \mathbf{N}$ sowie mit Hilfe des LEBESGUEschen Satzes 4.27 von der dominierten Konvergenz:

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_2^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} (1 - \chi_{B_k(0)}(x)) \cdot |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{k\to\infty} (1 - \chi_{B_k(0)}(x)) \cdot |f(x)|^2\, dx = 0.$$

Hier haben wir berücksichtigt, daß $|f(x)|^2$ eine integrable Majorante des Integranden ist. Da $\tilde{\mathcal{F}}$ linear ist, erhalten wir nun aus (4.1):

$$\lim_{k\to\infty} \|\tilde{\mathcal{F}} g_k - \tilde{\mathcal{F}} f\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_2 = 0.$$

Somit genügt es, die Gleichheit $\tilde{\mathcal{F}} g_k =: \hat{g}_k = \hat{f}_k\ \forall\, k \in \mathbf{N}$ zu beweisen. Die PARSEVAL–Formel (3.5) kann unter Verwendung des $L^2$–Skalarproduktes in der Form

$$\langle \hat{\varphi}, \overline{\psi} \rangle = \langle \varphi, \overline{\hat{\psi}} \rangle \quad \forall\, \varphi,\, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

geschrieben werden, und wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$ läßt sie sich in eindeutiger Weise fortsetzen zu

$$\langle \hat{\varphi}, \overline{g} \rangle = \langle \varphi, \overline{\hat{g}} \rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\ \forall\, g \in L^2(\mathbf{R}^n).$$

Wird hier speziell $g := g_k$ eingesetzt, so resultiert unter Verwendung des Vertauschungssatzes 4.30 von FUBINI:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \overline{\hat{g}}_k \rangle &= \langle \hat{\varphi}, \overline{g}_k \rangle = \int\limits_{|x|<k} \Big( (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n_\xi} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle} \varphi(\xi)\, d\xi \Big) f(x)\, dx \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^n_\xi} \varphi(\xi) \Big( (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x|<k} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx \Big)\, d\xi = \langle \varphi, \overline{\hat{f}}_k \rangle \quad \forall\, k \in \mathbf{N}\ \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\int_{\mathbf{R}^n} (\hat{g}_k(\xi) - \hat{f}_k(\xi))\, \varphi(\xi)\, d\,\xi = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

und wegen $\hat{g}_k,\ \hat{f}_k \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ erhalten wir dann aus Satz 5.1 die behauptete Gleichheit $\hat{g}_k(\xi) = \hat{f}_k(\xi),\ \xi \in \mathbf{R}^n$ f.ü. □

Der Fall der Raumdimension $n = 1$ gestattet noch eine besondere Form des Darstellungssatzes von PLANCHEREL:

**Satz 7.27** *Für $f \in L^2(\mathbf{R})$ und für fast alle $\xi \in \mathbf{R}$ gilt*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{F}} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-ix\xi}}{ix} f(x)\, dx, \quad \tilde{\mathcal{F}}^* f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi} - 1}{ix} f(x)\, dx,} \tag{4.7}$$

*wobei die Ableitungen wenigstens im verallgemeinerten Sinn existieren.*

*Beweis:* Es genügt wiederum, nur die erste der beiden Darstellungen (4.7) zu beweisen. Für $f \in L^2(\mathbf{R})$ sei $\hat{f}_k \in UCB(\mathbf{R})$ wie in (4.3) definiert. Integration über $(0, \xi)$ liefert unter Verwendung des

Vertauschungssatzes von FUBINI für jedes $\xi \in \mathbf{R}$:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\xi \hat{f}_k(s)\,ds &= \int_0^\xi \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{k} e^{-ixs} f(x)\,dx\Big)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{k} \Big(\int_0^\xi e^{-ixs}\,ds\Big) f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{k} \frac{1-e^{-ix\xi}}{ix} f(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Wir zeigen für $g_\xi(x) := (1-e^{-ix\xi})/(ix)$ die Eigenschaft $g_\xi \in L^2(\mathbf{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\xi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1-\cos(x\xi))}{x^2}\,dx = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{x\xi}{2}\right)}{x^2}\,dx \le 2\xi^2 \int_0^1 dx + 8\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty.$$

Die HÖLDER–Ungleichung liefert somit $g_\xi f \in L^1(\mathbf{R})\ \forall\,\xi \in \mathbf{R}$, und demzufolge gilt unter Verwendung des LEBESGUEschen Satzes von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} g_\xi(x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k\to\infty} \chi_{[-k,k]}(x)\cdot g_\xi(x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\xi(x) f(x)\,dx \quad \forall\,\xi \in \mathbf{R}.$$

Auf der anderen Seite erhalten wir aus Satz 7.26

$$\lim_{k\to\infty} \Big| \int_0^\xi (\hat{f}_k(s) - \tilde{\mathcal{F}} f(s))\,ds \Big| \le \sqrt{|\xi|} \lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k - \tilde{\mathcal{F}} f\|_2 = 0.$$

Wegen Gleichung (4.8) resultiert daraus

$$\int_0^\xi \tilde{\mathcal{F}} f(s)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\xi(x) f(x)\,dx \quad \forall\,\xi \in \mathbf{R}.$$

Auf Grund der Absolutstetigkeit des linken Integrals müssen beide Seiten der obigen Gleichung $L^1_{loc}$–Funktionen sein. Deshalb gilt die folgende Identität, die man mittels partieller Integration beweist:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\xi)\Big(\int_0^\xi \tilde{\mathcal{F}} f(s)\,ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\xi(x) f(x)\,dx\Big)\,d\xi \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{F}} f(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\xi(x) f(x)\,dx\Big)\varphi'(\xi)\,d\xi \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Somit folgt aus der Definition 5.1 verallgemeinerter Ableitungen

$$\tilde{\mathcal{F}} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-ix\xi}}{ix} f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^n \ \text{ f.ü.},$$

wie wir behauptet hatten. □

## 7.5 Die $L^1$–FOURIER–Transformation

Wie im Beweis von Satz 7.16 gezeigt wurde, gilt $\lim\limits_{|x|\to\infty} |D^\rho\varphi(x)| = 0$ für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ und jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$. Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ sind somit beschränkt, und dasselbe gilt für ihren Gradienten: $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n} |\nabla\varphi(x)| =: M < \infty$. Aus der Abschätzung (3.21) in Satz 1.13, nämlich $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le M\,|x-y|\ \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$ ergibt sich die gleichmäßige Stetigkeit von $\varphi$; es gilt also

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset UCB(\mathbf{R}^n).} \tag{5.1}$$

Wir haben in Satz 2.15 gezeigt, daß $UCB(\mathbf{R}^n)$ versehen mit der Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ ein BANACH–Raum ist. Die Integraloperatoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ der FOURIER–Transformation sind nun wegen Satz 7.17 und wegen (5.1) als lineare Abbildungen $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to UCB(\mathbf{R}^n)$ wohldefiniert und sogar stetig, wenn der dichte Unterraum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset L^1(\mathbf{R}^n)$ über die induzierte $\|\cdot\|_1$–Norm topologisiert wird:

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_\infty = \|\mathcal{F}^*\varphi\|_\infty \le (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} |\varphi(x)|\,dx = (2\pi)^{-n/2}\,\|\varphi\|_1 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n). \tag{5.2}$$

Dieser Sachverhalt gibt Anlaß, die FOURIER–Transformation wiederum über einen Fortsetzungsprozeß auf den BANACH–Raum $L^1(\mathbf{R}^n)$ zu transportieren. Aus dem Fortsetzungssatz 2.7 und aus (5.2) leitet man das folgende Ergebnis ab:

**Satz 7.28** *Die beiden Integraloperatoren $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ der* FOURIER– *Transformation können in eindeutiger Weise zu stetigen linearen Abbildungen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1^* : L^1(\mathbf{R}^n) \to UCB(\mathbf{R}^n)$ fortgesetzt werden, für die die Darstellung*

$$\boxed{(\mathcal{F}_1 f)(\xi) = (\mathcal{F}_1^* f)(-\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\,\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx \ \ \forall\ f \in L^1(\mathbf{R}^n)\ \ \forall\ \xi \in \mathbf{R}^n} \tag{5.3}$$

*sowie die folgende Abschätzung gilt:*

$$\boxed{\|\mathcal{F}_1 f\|_\infty = \|\mathcal{F}_1^* f\|_\infty \le (2\pi)^{-n/2}\,\|f\|_1 \quad \forall\ f \in L^1(\mathbf{R}^n).} \tag{5.4}$$

Da der BANACH–Raum $UCB(\mathbf{R}^n)$ die konstante Funktion $f = 1$ enthält, gilt $UCB(\mathbf{R}^n) \not\subset L^1(\mathbf{R}^n)$. Deshalb liegt hier **nicht** wie bei der FPT ein Zusammenhang $\mathcal{F}_1^{-1} = \mathcal{F}_1^*$ vor. An dieser Tatsache ändert auch das folgende Ergebnis nichts:

**Satz 7.29 (RIEMANN–LEBESGUE–Lemma)**
*Für den vermöge*

$$\boxed{UCB_0(\mathbf{R}^n) := \{f \in UCB(\mathbf{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\}}$$

*definierten abgeschlossenen Unterraum von $(UCB(\mathbf{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ gilt*

$$\boxed{\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_1^* : L^1(\mathbf{R}^n) \to UCB_0(\mathbf{R}^n) \quad \textit{stetig und linear.}} \tag{5.5}$$

*Beweis:* Da anstelle von (5.1) sogar die schärfere Aussage $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset UCB_0(\mathbf{R}^n)$ gilt, haben wir die Abbildungseigenschaft $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to UCB_0(\mathbf{R}^n)$. Als abgeschlossener Unterraum eines BANACH–Raumes ist $(UCB_0(\mathbf{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ selbst ein BANACH–Raum. Die Behauptung folgt nun aus dem Fortsetzungssatz 2.7. □

**BSP. (7.5.1)** Die Funktion $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ gehört zu $UCB_0(\mathbf{R})$, denn wir haben ja

$$|f(x)| \le 1, \quad \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0, \quad f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \to 0 \text{ für } x \to 0 \text{ und } |x| \to \infty.$$

Daraus folgt $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f'(x)| =: M < \infty$, und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert $|f(x) - f(y)| \le M\,|x-y|\ \forall\, x, y \in \mathbf{R}$, also die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $f$. Bekanntlich ist aber $f \notin L^1(\mathbf{R})$ und somit $UCB_0(\mathbf{R}) \not\subset L^1(\mathbf{R})$.

**Definition 7.11** *Der stetige lineare Operator $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbf{R}^n) \to UCB_0(\mathbf{R}^n)$ heiße die $L^1$–*FOURIER*–Transformation, und analog $\mathcal{F}_1^* : L^1(\mathbf{R}^n) \to UCB_0(\mathbf{R}^n)$ die $L^1$–*FOURIER*–Cotransformation.*

Da das Produkt zweier $L^1$–Funktionen i.a. nicht integrierbar ist, kann es eine PARSEVAL–Gleichung für die $L^1$–FOURIER–Transformation nicht geben. Hingegen läßt sich die PARSEVAL–Formel (3.5) auf $L^1(\mathbf{R}^n)$ fortsetzen, denn für $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ und $\hat f := \mathcal{F}_1 f$, $\hat g := \mathcal{F}_1 g$ aus $UCB_0(\mathbf{R}^n)$ existieren ja die Integrale

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^n} \hat f(\xi) g(\xi)\, d\xi\Big| \le \|\hat f\|_\infty \cdot \|g\|_1 < \infty, \quad \Big|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\hat g(x)\, dx\Big| \le \|f\|_1 \cdot \|\hat g\|_\infty < \infty.$$

Diese und einige weitere offensichtliche Eigenschaften der $L^1$–FOURIER–Transformation sind in dem folgenden Satz zusammengestellt, in welchem die Schreibweise $\hat f := \mathcal{F}_1 f$ usw. adaptiert wird.

**Satz 7.30** *Für $h \in \mathbf{R}^n$, $0 \ne \lambda \in \mathbf{R}$ und für jedes $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ gilt:*

(a) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \hat f(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\hat g(x)\, dx.$ (PARSEVAL*–Formel*)

(b) $(\tau_h f)\hat{}\,(\xi) = e^{-i\langle h,\xi\rangle}\hat f(\xi)\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.$ (*Verschiebungssatz*)

(c) $(e^{i\langle h,x\rangle} f)\hat{}\,(\xi) = (\tau_h \hat f)(\xi) = \hat f(\xi - h)\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.$ (*Dämpfungssatz*)

(d) $(\delta_\lambda f)\hat{}\,(\xi) = |\lambda|^{-n}(\delta_{1/\lambda}\hat f)(\xi) = |\lambda|^{-n}\hat f(\frac{\xi}{\lambda})\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.$ (*Ähnlichkeitssatz*)

(e) *Setzen wir*

$$\boxed{\overline{C}_0^m(\mathbf{R}^n) := \{f \in C^m(\mathbf{R}^n)\ :\ D^\rho f \in UCB_0(\mathbf{R}^n)\ \forall\ |\rho| \le m\},}$$

*so folgt für $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ mit $|x|^m f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ und $m \in \mathbf{N}$ fest: $\hat f \in \overline{C}_0^m(\mathbf{R}^n)$ sowie*

$$\boxed{(D^\rho \hat f)(\xi) = (-i)^{|\rho|}(x^\rho f)\hat{}\,(\xi)\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n\ \forall\ |\rho| \le m.}$$

(f) *Für $f \in W^{m,1}(\mathbf{R}^n)$ gilt $\xi^\rho \hat{f} \in UCB_0(\mathbf{R}^n)$ und*

$$\boxed{(D^\rho f)\hat{}(\xi) = i^{|\rho|}\xi^\rho \hat{f}(\xi) \ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n \ \forall\, |\rho| \le m.}$$

**BSP. (7.5.2)** Für $a > 0$ setzen wir

$$f_a(x) := \chi_{(-a,a)}(x) := \begin{cases} 1 \ : \ x \in (-a,a), \\ 0 \ : \ x \in \mathbf{R} \text{ sonst.} \end{cases} \tag{5.6}$$

Wir haben offenkundig $f_a \in L^1(\mathbf{R})$ und somit

$$\hat{f}_a(\xi) = (\mathcal{F}_1 f_a)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a\xi}{\xi} \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.$$

In Übereinstimmung mit BSP.(7.5.1) haben wir $\hat{f}_a \in UCB_0(\mathbf{R})$ und $\hat{f}_a \notin L^1(\mathbf{R})$. Deshalb kann die Rücktransformation nicht mit Hilfe der $L^1$–FOURIER–Cotransformation $\mathcal{F}_1^*$ erfolgen. Das allgemeine Problem der $L^1$–Rücktransformation werden wir in Abschnitt 7.7 behandeln.

**BSP. (7.5.3)** Für die Funktion $f_a \in L^1(\mathbf{R})$ aus (5.6) gilt gleichzeitig auch $f_a \in L^2(\mathbf{R})$ und somit $\hat{f}_a = \tilde{\mathcal{F}} f_a \in L^2(\mathbf{R})$. Dies folgt auch ohne Verwendung des Satzes 7.25 direkt aus der Existenz des Standardintegrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha\xi}{\xi^2}\, d\xi = 2\alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2(|\alpha|\xi)}{(|\alpha|\xi)^2}\, d\xi = 2|\alpha| \int_0^\infty \frac{\sin^2 s}{s^2}\, ds = \pi|\alpha| \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}. \tag{5.7}$$

Wir können daher die Rücktransformation mit Hilfe der Formel (4.7) aus Satz 7.27 bewerkstelligen. Der Einfachheit halber setzen wir $g(x) := \frac{\sin ax}{x}$. Indem wir in (4.7) die Zerlegung $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty}$ vornehmen und im ersten Integral die Substitution $x \mapsto -x$ durchführen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathcal{F}}^* g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \Big\{ \int_0^\infty \frac{\sin ax}{ix^2} \left(1 - e^{-ix\xi}\right) dx + \int_0^\infty \frac{\sin ax}{ix^2} \left(e^{ix\xi} - 1\right) dx \Big\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty \frac{\sin(ax) \cdot \sin(x\xi)}{x^2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \Big[ \sin^2\left((a+\xi)\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left((a-\xi)\frac{x}{2}\right) \Big] dx \\
&\overset{(5.7)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\xi} (|a+\xi| - |a-\xi|),
\end{aligned}$$

wobei die Additionstheoreme der Sinus–Funktion verwendet wurden. Wegen

$$\frac{d}{d\xi}|a+\xi| = \begin{cases} 1 \ : \ \xi > -a, \\ -1 \ : \ \xi < -a, \\ \nexists \ : \ \xi = -a, \end{cases} \qquad \frac{d}{d\xi}|a-\xi| = \begin{cases} 1 \ : \ \xi > a, \\ -1 \ : \ \xi < a, \\ \nexists \ : \ \xi = a \end{cases}$$

folgt schließlich

$$(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\hat{f}_a)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\tilde{\mathcal{F}}^* g)(\xi) = \begin{cases} 0 : \xi > a, \\ 1 : \xi \in (-a,a), \\ 0 : \xi < -a, \\ \nexists : \xi = \pm a \end{cases} = \chi_{(-a,a)}(\xi) = f_a(\xi) \quad \xi \in \mathbf{R} \text{ f.ü.}$$

**BSP. (7.5.4)** $L^p$**–FOURIER–Tranformation für** $1 < p < 2$**.** Für $p > 2$ ist eine FOURIER–Transformation im klassischen Funktionensinn nicht mehr definierbar. Im Bereich $1 < p < 2$ kann aber eine $L^p$–FOURIER–Transformation durch Interpolation der beiden bisher behandelten Transformationen $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbf{R}^n) \to UCB_0(\mathbf{R}^n)$ und $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ sinnvoll erklärt werden. Wir zerlegen eine Funktion $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ gemäß

$$f = f_1 + f_2, \quad f_2(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in \mathbf{R}^n \text{ und } |f(x)| \le 1, \\ 0 & : x \text{ sonst.} \end{cases}$$

Da die Punktmenge $\{x \in \mathbf{R}^n : f_2(x) = f(x)\}$ eine endliche Vereinigung von Niveaumengen der Funktion $f$ ist, müssen $f_1$ und $f_2$ beide meßbar sein.

**Folgerung 7.2** (a) *Es gelten* $f_1,\ f_2 \in L^p(\mathbf{R}^n)$.

Wegen $f_1 = f - f_2$ brauchen wir dies nur für $f_2$ zu zeigen. Da $f_2$ meßbar ist genügt es, die $L^p$–Integrierbarkeit mit dem Majorantenkriterium festzustellen. Nach Definition haben wir aber $|f_2(x)|^p \le |f(x)|^p$, $x \in \mathbf{R}^n$ f.ü., und die Behauptung folgt nun aus Satz 4.25. □

(b) *Für* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < 2$ *gilt* $f_1 \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *und* $f_2 \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Wegen $|f_1(x)| > 1$ haben wir $|f_1(x)| \le |f_1(x)|^p$. Somit folgt unter Verwendung von (a) die Abschätzung $\|f_1\|_1 \le \|f_1\|_p^p < \infty$. Ganz analog ergibt sich aus $|f_2(x)| \le 1$ die Abschätzung $|f_2(x)|^2 \le |f_2(x)|^p$, die auf $\|f_2\|_2 \le \|f_2\|_p^{p/2} < \infty$ führt. □

(c) *Die* $L^p$*–*FOURIER*–Transformierte* $\hat{f}$ *einer Funktion* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *ist für* $1 < p < 2$ *gemäß* $\hat{f} := \mathcal{F}_1 f_1 + \tilde{\mathcal{F}} f_2$ *erklärt.*

Das Problem der Darstellbarkeit von $\hat{f}$ wird wie bei der FPT gelöst. Wir zitieren hier ohne Beweis (vgl. M. REED/B. SIMON, Methods of Modern Mathematical Physics, vol. II: Fourier Analysis, Selfadjointness. Academic Press, New York–San Francisco–London 1975; dort Theorem IX.8):

**Satz 7.31 (**HAUSDORFF–YOUNG)
*Für festes* $1 < p < 2$ *und* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *setzen wir*

$$\hat{f}_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|<k} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \ \ k \in \mathbf{N}.$$

*Dann existiert* $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}_1 f_1(\xi) + \tilde{\mathcal{F}} f_2(\xi)$ *für fast alle* $\xi \in \mathbf{R}^n$ *mit* $\hat{f} \in L^q(\mathbf{R}^n)$, $q := p/(p-1)$. *Es gilt ferner* $\lim\limits_{k\to\infty} \|\hat{f}_k - \hat{f}\|_q = 0$ *sowie*

$$\boxed{\|\hat{f}\|_q \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{p}-1\right)} \|f\|_p.}$$

## 7.6 Die Faltung

Die folgenden Integrale sind im LEBESGUEschen Sinn zu verstehen.

**Definition 7.12** *Es seien $f, g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ gegeben. Falls das Integral*

$$\boxed{h(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy} \tag{6.1}$$

*bei $x := x_0 \in \mathbf{R}^n$ existiert, so heiße $h(x_0)$ das* **Faltungsintegral** *von $f$ und $g$ bei $x_0$. Existiert $h(x)$ wenigstens für fast alle $x \in \mathbf{R}^n$, so heiße $h(x) =: (f * g)(x)$ die* **Faltung** *von $f$ und $g$.*

Der Funktionenraum $L^1(\mathbf{R}^n)$ ist unter der *punktweisen* Multiplikation nicht abgeschlossen, wie folgendes Beispiel lehrt: Die Funktion $f(x) := \frac{1}{|x|^{n/2}}\, e^{-|x|}$ erfüllt ja $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, denn es gilt

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,dx = \omega_n \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}-1} e^{-r}\,dr < \infty, \qquad \omega_n := 2\pi^{n/2}/\Gamma(\tfrac{n}{2}).$$

Hingegen ist das punktweise Produkt $f(x) \cdot f(x) = f^2(x)$ nicht integrierbar:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f^2(x)\,dx = \omega_n \int_0^\infty \frac{1}{r}\, e^{-2r}\,dr = \infty.$$

Unter der Faltung ist $L^1(\mathbf{R}^n)$ jedoch abgeschlossen:

**Satz 7.32** *Für $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ gilt $h := f * g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ sowie $\|h\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.*

*Beweis:* Auf $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_y$ betrachten wir das Produktmaß $\mu(A\times B) := \mu_x(A)\cdot\mu_y(B)$ für $A\times B \subset \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_y$. Eine meßbare reellwertige Funktion $f : \mathbf{R}^n_y \to \mathbf{R}$ ist auch als Funktion $(x, y) \mapsto f(y)$ meßbar, denn wir haben $\{(x, y) \in \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_y \,:\, f(y) > a\} = \mathbf{R}^n_x \times (f^{-1}(a, +\infty])\ \forall\, a \in \mathbf{R}$. Ist $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ meßbar, so ist auch die Funktion $(x, y) \mapsto g(x - y)$ meßbar, denn es gilt ja $\{(x, y) \in \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_y \,:\, g(x - y) > a\} = \{(x, y) \,:\, x \in y + g^{-1}(a, +\infty]\}\ \forall\, a \in \mathbf{R}$. Als Produkt zweier meßbarer Funktionen ist somit auch $\varphi(x, y) := f(y)g(x - y)$ auf $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_y$ meßbar. Im Fall komplexwertiger Funktionen zeigt man die Meßbarkeit getrennt für Real– und Imaginärteil ganz analog. Das iterierte Integral

$$I := \int_{\mathbf{R}^n_y} \Big( \int_{\mathbf{R}^n_x} |\varphi(x, y)|\,dx \Big)\,dy \overset{z:=x-y}{=} \int_{\mathbf{R}^n_y} |f(y)| \Big( \int_{\mathbf{R}^n_z} |g(z)|\,dz \Big)\,dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty$$

existiert mit endlichem Wert, so daß der Satz 4.30 von FUBINI nicht nur die Eigenschaft $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ liefert, sondern auch die Abschätzung

$$\|h\|_1 = \int_{\mathbf{R}^n_x} |(f * g)(x)|\,dx \le \int_{\mathbf{R}^n_x} \Big( \int_{\mathbf{R}^n_y} |\varphi(x, y)|\,dy \Big)\,dx = I = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Dies war die Behauptung. □

Im folgenden Satz wird gezeigt, daß die Faltung die meisten algebraischen Eigenschaften eines gewöhnlichen Produktes besitzt. Weil die Beweise unmittelbar aus der Definition 7.12 folgen, verzichten wir auf deren Wiedergabe.

**Satz 7.33** *Für $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ und jedes $\lambda \in \mathbf{K}$ gelten:*

(a) $f * (\lambda\, g) = (\lambda\, f) * g = \lambda\,(f * g)$. (*Assoziativität mit Skalaren*)

(b) $f * (g + h) = f * g + f * h$. (*Distributivität*)

(c) $f * g = g * f$. (*Kommutativität*)

(d) $f * (g * h) = (f * g) * h = f * g * h$. (*Assoziativität mit $L^1$–Funktionen*)

Der Satz zeigt, daß der Vektorraum $L^1(\mathbf{R}^n)$ zusammen mit den zwei algebraischen Operationen "+" und "$*$" eine *kommutative Algebra* bildet, die allerdings kein neutrales Element bezüglich "$*$" besitzt. Dies wird später noch zu begründen sein, vgl. Folgerung 7.3(b).

Die Faltung ist auch für Funktionen $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$ erklärbar:

**Satz 7.34** (W.H. YOUNG)
*Für jedes Exponentenpaar $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 =: \frac{1}{r} \ge 0$ und für $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$ gilt:*

$$\boxed{h := f * g \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \textit{und} \quad \|h\|_r \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.}$$

*Beweis:* (a) Im Fall $p = \infty$ müssen $q = 1$ und $r = \infty$ gelten, und es ergibt sich

$$\|h\|_\infty \le \operatorname{ess.}\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x-y)|\, dy \le \|f\|_\infty \int_{\mathbf{R}^n} |g(z)|\, dz = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

Ganz analog behandelt man den Fall $p = 1$, $q = r = \infty$.

(b) Für $1 < p, q < \infty$ und $r = \infty$ liegt ein Paar konjugierter Exponenten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vor. Somit folgt aus der HÖLDER–Ungleichung:

$$\|h\|_\infty \le \operatorname{ess.}\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|\cdot|g(x-y)|\, dy \le \|f\|_p \operatorname{ess.}\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |g(x-y)|^q\, dy\Big)^{1/q} \overset{z:=x-y}{=} \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(c) Im allgemeinen Fall $1 \le p, q, r < \infty$ haben wir stets $p, q \le r$, und es folgt aus der HÖLDER–Ungleichung durch geeignete Wahl von Paaren konjugierter Exponenten:

$$\begin{aligned}
|h(x)|^r &\le \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} |g(x-y)|\, dy\Big)^r && \Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1\Big)\\
&\le \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^{\frac{q}{a}} |g(x-y)|^q\, dy\Big)^{\frac{r}{q}} \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^{\frac{c}{b}}\, dy\Big)^{\frac{r}{c}} && \Big(\frac{1}{q}+\frac{1}{c} = 1\Big)\\
&\le \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^{\frac{r}{a}} |g(x-y)|^q\, dy\Big) \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |g(z)|^q\, dz\Big)^{\frac{r}{qd}} \Big( \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^{\frac{c}{b}}\, dy\Big)^{\frac{r}{c}}. && \Big(\frac{q}{r}+\frac{1}{d} = 1\Big)
\end{aligned}$$

Wird diese Ungleichungskette über $x \in \mathbf{R}^n$ integriert, so ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge im drittletzten Integral unter Verwendung der Nebenbedingung $\frac{r}{a} \overset{!}{=} p \overset{!}{=} \frac{c}{b}$:

$$\|h\|_r^r \le \|f\|_p^{p(1+\frac{r}{c})} \cdot \|g\|_q^{q(1+\frac{r}{qd})}. \tag{6.2}$$

Die Nebenbedingungen führen zur eindeutigen Bestimmung der Konstanten, nämlich

$$a = \frac{r}{p}, \quad b = \frac{q}{p(q-1)}, \quad c = \frac{q}{q-1}, \quad d = \frac{r}{r-q}.$$

Verwenden wir noch die Gleichung $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=1$, so ergibt sich

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=p\Big(1+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\Big)=1, \quad p\left(1+\frac{r}{c}\right)=p\Big(1+r-\frac{r}{q}\Big)=r, \quad q\left(1+\frac{r}{qd}\right)=r.$$

Mit diesen Werten erhalten wir aus (6.2) die behauptete Ungleichung $\|h\|_r \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. □

---

Der in Definition 4.16 eingeführte *Mollifier* $\{J_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ ist nichts anderes als der Integraloperator der Faltung, wobei der eine Faktor des Faltungsproduktes fixiert ist: $J_\epsilon f = \omega_\epsilon * f =: f_\epsilon$, $\epsilon > 0$. Hierin ist die Funktionenfamilie $\{\omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ gemäß (9.3), Abschnitt 4.9 vorgegeben. Aus Satz 4.37 folgt insbesondere $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)\ \forall\ f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ sowie im Falle $1 \le p < \infty$:

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \|f_\epsilon - f\|_{p;\mathbf{R}^n} = 0. \tag{6.3}$$

Es ist berechtigt, nach der Glättungseigenschaft der Faltung für allgemeinere Familien von Kernfunktionen $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ zu fragen.

**Definition 7.13** *Eine Familie von Kernfunktionen* $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0} \subset L^1(\mathbf{R}^n)$ *heiße* **zulässig**, *wenn gilt:*

(K1) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} |K_\epsilon(x)|\,dx \le C < \infty\ \forall\ \epsilon > 0,$

(K2) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} K_\epsilon(x)\,dx = 1\ \forall\ \epsilon > 0,$

(K3) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|\ge\delta} |K_\epsilon(x)|\,dx = 0\ \forall\ \delta > 0.$

Die Existenz von Familien zulässiger Kernfunktionen ist durch folgenden Satz sichergestellt.

**Satz 7.35** *Gegeben sei eine Funktion* $K \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *mit* $\int_{\mathbf{R}^n} K(x)\,dx = 1$. *Dann ist die durch*

$$\boxed{K_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\,K(\frac{x}{\epsilon}), \quad \epsilon > 0} \tag{6.4}$$

*definierte Familie von Kernfunktionen zulässig.*

*Beweis:* Dieser erfolgt im wesentlichen mit Hilfe der Substitution $y := \epsilon^{-1}\,x,\ dy = \epsilon^{-n}\,dx$, aus der sich sofort (K1) und (K2) ergeben:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |K_\epsilon(x)|\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} |K(y)|\,dy = \|K\|_1 < \infty, \quad \int_{\mathbf{R}^n} K_\epsilon(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} K(y)\,dy = 1.$$

Die Eigenschaft (K3) zeigt man mit dem LEBESGUEschen Satz 4.27 von der dominierten Konvergenz:

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|\ge\delta} |K_\epsilon(x)|\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|y|\ge\delta\epsilon^{-1}} |K(y)|\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} \big(\lim_{\epsilon\to 0+} \chi_{\{|y|\ge\delta\epsilon^{-1}\}}(y)\big)\cdot|K(y)|\,dy = 0\ \forall\ \delta > 0.$$

Hiermit ist alles bewiesen. □

Wir bereiten das Hauptergebnis dieses Abschnitts, nämlich den allgemeinen Approximationssatz, mit einer Aussage über die Stetigkeit des Shifts $f(\cdot) \mapsto f(\cdot - y)$ vor.

**Satz 7.36** *Für festes $1 \le p < \infty$ und für $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\lim_{|y|\to 0+} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p = 0.} \tag{6.5}$$

*Beweis:* Sei zunächst $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ angenommen und sei $A := \operatorname{supp} f \subset\subset \mathbf{R}^n$ gesetzt. Auf dem Kompaktum $A_\epsilon := \overline{\bigcup_{x\in A} B_\epsilon(x)}$, $\epsilon > 0$ fest, gilt für jedes $|y| < \epsilon$ unter Beachtung von Satz 1.13

$$\max_{x\in A_\epsilon} |f(x-y) - f(x)| \le \sup_{\xi\in\mathbf{R}^n} |\nabla f(\xi)| \cdot |y| \to 0 \ \ (|y| \to 0+),$$

und somit auch

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p = \Big( \int_{A_\epsilon} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} \le (\mu(A_\epsilon))^{1/p} \max_{x\in A_\epsilon} |f(x-y) - f(x)| \to 0.$$

Ist nun $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, so finden wir gemäß Satz 4.38 zu vorgegebenem $\eta > 0$ ein $f_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ mit $\|f - f_\eta\|_p \le \eta$. Mit dem soeben Bewiesenen folgt dann unter Verwendung der $\Delta$–Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\le \limsup_{|y|\to 0+} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \\ &\le \limsup_{|y|\to 0+} \big( \|f(\cdot - y) - f_\eta(\cdot - y)\|_p + \|f_\eta(\cdot - y) - f_\eta(\cdot)\|_p + \|f_\eta(\cdot) - f(\cdot)\|_p \big) \le 2\eta. \end{aligned}$$

Da $\eta > 0$ beliebig war, ergibt sich daraus schon die behauptete Relation (6.5). □

**Satz 7.37 (Allgemeiner Approximationssatz)**
*Für eine Familie $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0} \subset L^1(\mathbf{R}^n)$ zulässiger Kernfunktionen und für $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ setzen wir $f_\epsilon := K_\epsilon * f$. Dann gilt $f_\epsilon \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $\forall\, \epsilon > 0$, und im Fall $1 \le p < \infty$ folgt*

$$\boxed{\lim_{\epsilon\to 0+} \|f_\epsilon - f\|_p = 0.} \tag{6.6}$$

*Beweis:* Die Eigenschaft $f_\epsilon \in L^p(\mathbf{R}^n)$ ergibt sich wegen $K_\epsilon \in L^1(\mathbf{R}^n)$ aus Satz 7.34. Nun setzen wir $q := p/(p-1)$ (wobei auch der Grenzfall $q = \infty$ zugelassen ist) und wenden die HÖLDER–Ungleichung sowie den Vertauschungssatz 4.30 von FUBINI an:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n_x} |f_\epsilon(x) - f(x)|^p \, dx &\le \int_{\mathbf{R}^n_x} \Big( \int_{\mathbf{R}^n_y} |f(x-y) - f(x)| \cdot |K_\epsilon(y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \, dy \Big)^p dx \\ &\le \Big( \int_{\mathbf{R}^n_y} \Big[ \int_{\mathbf{R}^n_x} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \Big] |K_\epsilon(y)| \, dy \Big) \Big( \int_{\mathbf{R}^n_y} |K_\epsilon(y)| \, dy \Big)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist wegen (K1) durch $C^{p/q}$ beschränkt. Aus der Zerlegung

$$\mathbf{R}^n_y = \{y \,:\, |y| < \delta\} \cup \{y \,:\, |y| \ge \delta\}$$

und aus (6.5) resultiert nun, wenn wir zu $\eta > 0$ die Zahl $\delta > 0$ gemäß $\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p < \eta \ \forall\, |y| < \delta$ wählen:

$$\|f_\epsilon - f\|_p \le 2C^{1/q} \, \|f\|_p \Big( \int_{|y|\ge\delta} |K_\epsilon(y)| \, dy \Big)^{1/p} + \eta\, C \overset{(\mathrm{K3})}{\to} \eta\, C \ \ (\epsilon \to 0+).$$

Weil $\eta > 0$ beliebig war, ergibt sich daraus die behauptete Relation (6.6). □

---

Wegen Satz 4.41 konvergiert mit der Folge $(f_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^p(\mathbf{R}^n)$ auf jedem beschränkten Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbf{R}^n$ jeweils auch eine *Teilfolge* punktweise fast überall gegen $f$. Diese Aussage läßt sich verschärfen, es gilt sogar $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} f_\epsilon(x) = f(x),\ x \in \mathbf{R}^n\ f.ü.$ Wir bereiten einen entsprechenden Beweis mit einer Folgerung aus der Absolut–Stetigkeit des LEBESGUE–Integrals vor:

**Satz 7.38** *Für $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} f(y)\,dy = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \ \ f.ü.} \tag{6.7}$$

*Beweis:* Gemäß Bemerkung 4.6(d) wird die Relation (6.7) für eine stetige Funktion $\varphi \in C(\mathbf{R}^n)$ in allen Punkten $x \in \mathbf{R}^n$ erfüllt. Zu jedem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ und jedem $\eta > 0$ gibt es gemäß Satz 4.36(a) ein $\varphi_\eta \in C_0^0(\Omega)$ mit $\|f - \varphi_\eta\|_{1;\Omega} < \eta/2$, und es gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \Big|\varphi_\eta(x) - \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\eta(y)\,dy\Big| = 0 \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{6.8}$$

Verwenden wir auf einem Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ den LEBESGUEschen Satz 4.27 von der dominierten Konvergenz sowie FUBINI's Vertauschungssatz 4.30, so haben wir unter Beachtung von (6.8) für $\epsilon < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0} \lim_{\epsilon\to 0+} \Big|f(x) - \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} f(y)\,dy\Big|\,dx \\
&\quad\le \int_{\Omega_0} |f(x) - \varphi_\eta(x)|\,dx + \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(0))} \int_{z\in B_\epsilon(0)} \int_{\Omega_0} |\varphi_\eta(x+z) - f(x+z)|\,dx\,dz \\
&\quad\le \frac{\eta}{2} + \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(0))} \int_{z\in B_\epsilon(0)} dz \int_{\Omega} |\varphi_\eta(y) - f(y)|\,dy \le \eta.
\end{aligned}$$

Da $\eta > 0$ beliebig wählbar war, ergibt sich

$$\int_{\Omega_0} \lim_{\epsilon\to 0+} \Big|f(x) - \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} f(y)\,dy\Big|\,dx = 0$$

auf jedem Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \mathbf{R}^n$, und somit wegen Satz 4.24(d) die behauptete Relation (6.7). □

In der folgenden Definition verschärfen wir die Eigenschaft (6.7):

**Definition 7.14** *Ein Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ heiße ein* LEBESGUE–**Punkt** *der Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{K}$, wenn gilt*

$$\boxed{\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0.} \tag{6.9}$$

Jeder Stetigkeitspunkt von $f$ ist offenbar ein LEBESGUE–Punkt. Darüber hinaus gilt sogar:

**Satz 7.39** *Für $1 \le p < \infty$ und für jedes $f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n)$ sind fast alle Punkte $x \in \mathbf{R}^n$* LEBESGUE–*Punkte von $f$.*

*Beweis:* Wir nehmen an, $f$ sei reell. Ansonsten zerlegen wir $f$ gemäß $f = u + iv$ in Real– und Imaginärteil und führen die folgenden Betrachtungen getrennt für $u$ und $v$ durch. Wir erhalten zunächst für jede rationale Zahl $r \in \mathbf{Q}$ aus (6.7):

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} |f(y) - r|\, dy = |f(x) - r|, \quad x \in \mathbf{R}^n \;\; f.ü. \tag{6.10}$$

Wird mit $N_r \subset \mathbf{R}^n$ diejenige Menge bezeichnet, auf der die Gleichheit (6.10) *nicht* erreicht wird, so ist $N_r$ eine Nullmenge, und dasselbe trifft auf die Menge $N := \bigcup_{r\in\mathbf{Q}} N_r$ zu. Nun zeigen wir, daß jeder Punkt $x \in \mathbf{R}^n \setminus N$ ein LEBESGUE–Punkt von $f$ ist. Denn wegen der Dichtheit $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ gibt es zu jedem $\eta > 0$ und zu $x \in \mathbf{R}^n \setminus N$ ein $r \in \mathbf{Q}$ mit $|f(x) - r| < \eta/2$, und es gilt gemäß (6.10):

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\qquad \le \limsup_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \Big( \int_{B_\epsilon(x)} |f(y) - r|\, dy + \int_{B_\epsilon(x)} |r - f(x)|\, dy \Big) \\
&\qquad \le \limsup_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} |f(y) - r|\, dy + \frac{\eta}{2} = |f(x) - r| + \frac{\eta}{2} < \eta.
\end{aligned}$$

Also ist $x$ ein LEBESGUE–Punkt von $f$. □

Nun zeigen wir in Ergänzung zum allgemeinen Approximationssatz 7.37 die folgende Aussage über die punktweise Konvergenz fast überall.

**Satz 7.40** *Die meßbare Funktion $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ erfülle mit einer Konstanten $C < \infty$*

$$|K(y)| \le \frac{C}{(1 + |y|^2)^{(n+1)/2}} \;\; \forall\, y \in \mathbf{R}^n \quad \textit{sowie} \quad \int_{\mathbf{R}^n} K(y)\, dy = 1. \tag{6.11}$$

*Dann folgt für $1 \le p < \infty$ und für jedes $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ die punktweise Konvergenz*

$$\boxed{\lim_{\epsilon\to 0+} f_\epsilon(x) := \lim_{\epsilon\to 0+} (f * K_\epsilon)(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \;\; f.ü.} \tag{6.12}$$

*Beweis:* Wegen Satz 7.39 genügt es offenbar, die Relation (6.12) in jedem LEBESGUE–Punkt der Funktion $f$ zu beweisen. Wir notieren zunächst als Folgerung aus (6.11) die Abschätzung

$$|K_\epsilon(y)| = |\epsilon^{-n} K(\frac{y}{\epsilon})| \le \frac{\epsilon C}{(\epsilon^2 + |y|^2)^{(n+1)/2}}. \tag{6.13}$$

Ist nun $x \in \mathbf{R}^n$ ein LEBESGUE–Punkt von $f$, so betrachten wir die Zerlegung

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| \le \int_{\mathbf{R}^n} |f(x - y) - f(x)| \cdot |K_\epsilon(y)|\, dy = \int_{|y|<\epsilon} \cdots\, dy + \int_{|y|\ge\epsilon} \cdots\, dy =: I_1 + I_2.$$

Als erstes folgt aus (6.9) und (6.13) die Konvergenz

$$I_1 \le \frac{C}{\epsilon^n} \int_{|y|<\epsilon} |f(x - y) - f(x)|\, dy = \frac{C\omega_n}{n} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))} \int_{B_\epsilon(x)} |f(z) - f(x)|\, dz \to 0 \;\; (\epsilon \to 0+).$$

Hingegen gilt mit $C_1 := C/\sqrt{2^{n+1}}$ die aus (6.13) folgende Abschätzung

$$I_2 \leq \epsilon\, C_1 \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{|f(x-y)-f(x)|}{|y|^{n+1}}\, dy.$$

Wir setzen für $t > 0$

$$F(t) := \int_{|y|<t} |f(x-y)-f(x)|\, dy = \frac{\omega_n t^n}{n} \frac{1}{\mu(B_t(x))} \int_{B_t(x)} |f(z)-f(x)|\, dz,$$

und erhalten dann aus (6.9) $t^{-n}F(t) \to 0$ für $t \to 0+$. Ist also $\eta > 0$ beliebig gewählt, so existiert ein $T > 0$ mit

$$\left.\begin{aligned} &F(t) \leq \eta\, t^n \;\; \forall\, t \in [0,T], \\ &\epsilon \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{|f(x-y)-f(x)|}{|y|^{n+1}}\, dy = \epsilon \int_{\epsilon\leq|y|<T} \cdots\, dy + \epsilon \int_{|y|\geq T} \cdots\, dy =: I_{21} + I_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

Wir haben auf Grund der HÖLDERschen Ungleichung für $q := p/(p-1)$:

$$I_{22} \leq \epsilon |f(x)| \int_{|y|\geq T} |y|^{-(n+1)}\, dy + \begin{cases} \epsilon\, \|f\|_p \Big( \displaystyle\int_{|y|\geq T} |y|^{-q(n+1)}\, dy \Big)^{1/q} & : \; p > 1, \\ \epsilon\, \|f\|_1 T^{-(n+1)} & : \; p = 1. \end{cases}$$

In jedem Fall ergibt sich $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} I_{22} = 0$. Zur Vereinfachung des Integrals $I_{21}$ führen wir Polarkoordinaten $r := |y|,\ \psi := \frac{y}{|y|}$ für $y \neq 0$ ein und erhalten unter Verwendung von

$$\frac{dF}{dt}(t) = t^{n-1} \int_{\psi\in S_1(0)} |f(x-y)-f(x)|\, d\psi$$

die folgende Beziehung:

$$I_{21} = \epsilon \int_{r=\epsilon}^{T} \frac{1}{r^2} \int_{\psi\in S_1(0)} |f(x-y)-f(x)|\, d\psi\, dr = \epsilon \int_{\epsilon}^{T} \frac{dF}{dr}(r)\, \frac{dr}{r^{n+1}}.$$

Indem wir partielle Integration durchführen und (6.14) beachten, erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_{21} &= \epsilon\, \frac{F(T)}{T^{n+1}} - \frac{F(\epsilon)}{\epsilon^n} + \epsilon(n+1) \int_\epsilon^T \frac{F(r)}{r^{n+2}}\, dr \leq \epsilon\, \frac{F(T)}{T^{n+1}} + \epsilon(n+1)\eta \int_\epsilon^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &\leq \epsilon\, \frac{F(T)}{T^{n+1}} + \eta(n+1). \end{aligned}$$

Da $\eta > 0$ beliebig wählbar war, erhalten wir schließlich auch $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} I_{21} = 0$. □

---

Die Faltung wird unter der FOURIER–Transformation algebraisiert, sofern das Faltungsprodukt selbst und auch seine Faktoren FOURIER–transformierbar sind. Dies ist für temperierte Funktionen immer der Fall:

**Satz 7.41 (Faltungssatz)**
*Für jedes feste $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ist die Abbildung $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto \varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ stetig und linear, und es gilt*

$$\boxed{(\varphi\psi)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(\xi), \quad (\varphi * \psi)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}(\xi)\cdot\hat{\psi}(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.} \tag{6.15}$$

*Beweis:* Es seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ fest gewählt. Für $y \in \mathbf{R}^n$ setzen wir $\psi_y(x) := e^{i\langle x,y\rangle}\overline{\psi}(x)$. Es gilt $\varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Des weiteren folgt aus der PARSEVAL–Gleichung (3.10) $\langle \varphi, \psi_y\rangle = \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}_y\rangle$ mit

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi_y\rangle &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle}\varphi(x)\psi(x)\,dx = (2\pi)^{n/2}(\varphi\psi)\hat{}(y),\\
\langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}_y\rangle &= \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\Big(\overline{(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\xi-y\rangle}\overline{\psi}(x)\,dx}\Big)\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(y-\xi)\,d\xi\\
&= (\hat{\varphi} * \hat{\psi})(y).
\end{aligned}$$

Also gilt $(\varphi\psi)\hat{} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ sowie $(\varphi\psi)\hat{} = (2\pi)^{-n/2}(\hat{\varphi} * \hat{\psi})$. Werden hierin $\varphi$ und $\psi$ durch $\check{\varphi}$ bzw. $\check{\psi}$ ersetzt, so ergibt sich nach Multiplikation mit $(2\pi)^{n/2}$:

$$\varphi * \psi = (2\pi)^{n/2}(\check{\varphi}\check{\psi})\hat{} = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(\check{\psi}\mathcal{F}^*\varphi). \tag{6.16}$$

Da $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gemäß Satz 7.17 stetig und linear sind, ergibt sich aus (6.16) bereits die behauptete Stetigkeit der linearen Abbildung $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto \varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Setzen wir schließlich die Identität

$$(\check{\varphi}\check{\psi})\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\check{\varphi}(x)\check{\psi}(x)\,dx \overset{x\mapsto -x}{=} (\hat{\varphi}\hat{\psi})\check{}(\xi)$$

in (6.16) ein, so erhalten wir unter Verwendung von Satz 7.22 noch $(\varphi * \psi)\hat{} = (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}\hat{\psi}$. □

**Folgerung 7.3** (a) *Für $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ haben wir $f * g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ gemäß* Satz 7.32. *Somit gilt ein Faltungssatz für die $L^1$–*FOURIER*–Transformation in der Form*

$$\boxed{\mathcal{F}_1(f * g) \in UCB_0(\mathbf{R}^n) \text{ und } \mathcal{F}_1(f * g)(\xi) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}_1 f)(\xi)\cdot(\mathcal{F}_1 g)(\xi) \ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.} \tag{6.17}$$

Hingegen ist die Relation $(fg)\hat{} = (2\pi)^{-n/2}(\hat{f} * \hat{g})$ im allgemeinen falsch, da das Produkt $fg$ nicht integrierbar sein muß. □

(b) *Die Faltung in $L^1(\mathbf{R}^n)$ hat kein neutrales Element.*

Denn andernfalls gäbe es ein $e \in L^1(\mathbf{R}^n)$ mit $f = e * f \ \forall\, f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Aus (6.17) folgte dann $\hat{f} = (2\pi)^{n/2}\hat{e}\hat{f}$, was sicher nur für $\hat{e} = (2\pi)^{-n/2} \notin UCB_0(\mathbf{R}^n)$ gelten kann. Dies wäre ein Widerspruch zum Satz 7.29 von RIEMANN–LEBESGUE. □

(c) *Für $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ haben wir $fg \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Somit gilt ein Faltungssatz für die $L^2$–*FOURIER*–Transformation in der Form*

$$\boxed{\mathcal{F}_1(fg) \in UCB_0(\mathbf{R}^n) \text{ und } \mathcal{F}_1(fg)(\xi) = (2\pi)^{-n/2}(\tilde{\mathcal{F}}f * \tilde{\mathcal{F}}g)(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n \ \ f.ü.} \tag{6.18}$$

Hingegen ist die Relation $(f * g)\hat{} = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{g}$ im allgemeinen falsch, weil gemäß Satz 7.34 $f * g \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ gilt und eine FOURIER–Transformierte für $L^\infty$–Funktionen im klassischen Funktionensinn nicht erkärt ist. □

(d) *Für $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ und $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ haben wir $f * g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ gemäß* Satz 7.34. *Somit gilt ein Faltungssatz in der Form*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{F}}(f * g) \in L^2(\mathbf{R}^n) \text{ und } \tilde{\mathcal{F}}(f * g)(\xi) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}_1 f)(\xi) \cdot (\tilde{\mathcal{F}} g)(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n \quad f.ü.} \tag{6.19}$$

Hingegen ist die Faltung $\hat{f} * \hat{g}$ wegen $\hat{f} \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ und $\hat{g} \in L^2(\mathbf{R}^n)$ im allgemeinen nicht erklärt. □

---

## 7.7 Der FOURIERsche Integralsatz in $L^1(\mathbf{R}^n)$

In Satz 7.29 haben wir gezeigt, daß $\hat{f} := \mathcal{F}_1 f \in UCB_0(\mathbf{R}^n)$ für jedes $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ gilt. Leider kann die Rücktransformation wegen $UCB_0(\mathbf{R}^n) \not\subset L^1(\mathbf{R}^n)$ nicht mit Hilfe der FOURIER–Cotransformation $\mathcal{F}_1^*$ bewerkstelligt werden, da $\mathcal{F}_1^* \hat{f}$ i.a. nicht erklärt ist. Betrachten wir jedoch anstelle von $\hat{f}$ beispielsweise die *gewichtete Funktion* $\hat{f}_\epsilon(\xi) := e^{-\epsilon^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi)$, so gilt nun $\hat{f}_\epsilon \in L^1(\mathbf{R}^n)$ $\forall\, \epsilon > 0$, und das inverse FOURIER–Integral

$$I_\epsilon(x) := (\mathcal{F}_1^* \hat{f}_\epsilon)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}_\epsilon(\xi)\, d\xi$$

definiert eine Funktion $I_\epsilon \in UCB_0(\mathbf{R}^n)$. Es besteht die berechtigte Hoffnung, daß in geeigneter Topologie die Konvergenz $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} I_\epsilon = f$ erfolgt, denn mit dieser Vorgehensweise hatten wir bereits den FOURIERschen Integralsatz 7.22 in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ begründet. Zur Vorbereitung eines entsprechenden Beweises definieren wir:

**Definition 7.15** *Für gegebenes $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ ist die Integralfamilie $S(R) := \int_{|x|<R} f(x)\, dx$, $R > 0$ wohldefiniert. Falls der Limes $I := \lim\limits_{R \to \infty} S(R)$ in $\mathbf{C}$ existiert, so heiße das Integral $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx$* **sphärisch konvergent** *zum Grenzwert $I$.*

**BSP. (7.7.1)** Für $n = 1$ und $a \neq 0$ sei $f(x) := ax$ gesetzt. Wir haben offenbar $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ sowie $S(R) = \int_{-R}^{R} ax\, dx = 0$ $\forall\, R > 0$. Somit ist $\int_{\mathbf{R}} f(x)\, dx$ sphärisch konvergent zum Grenzwert 0, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ nicht existiert.

Wir verallgemeinern den Begriff der sphärischen Konvergenz in der folgenden Weise:

**Definition 7.16** *Gegeben seien eine Funktion $H : \overline{\mathbf{R}_+} \to \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften*

(H1) $H \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+)$,

(H2) $H(0) = 1$, *$H$ ist stetig in $[0, \eta]$ für ein $\eta > 0$,*

(H3) $\lim\limits_{t \to \infty} H(t) = 0$.

(a) *Existiert für* $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ *die Integralfamilie*

$$I_\epsilon(f) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, H(\epsilon|x|)\, dx \quad \forall\, \epsilon > 0, \tag{7.1}$$

*so heiße* $I_\epsilon(f)$ *der* **sphärische** $H$**–Mittelwert** *von* $f$.

(b) *Existiert der Limes* $I := \lim\limits_{\epsilon\to 0+} I_\epsilon(f)$ *in* $\mathbf{C}$, *so heiße das Integral* $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ **sphärisch** $H$**–summierbar** *zum Grenzwert* $I$.

**Bemerkung 7.4** Wird mit $BV(\overline{\mathbf{R}_+})$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \overline{\mathbf{R}_+} \to \mathbf{C}$ von *beschränkter Totalvariation* $V(f) := \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{Var}\,(f;[0,t]) < \infty$ bezeichnet, so kann die Bedingung (H1) abgeschwächt werden zu

(H1)' $$H \in L^1(\mathbf{R}_+) \cap BV(\overline{\mathbf{R}_+}).$$

**BSP. (7.7.2)** Die Funktionen

$$\text{(i) } H(t) := e^{-t},\ \ t \ge 0, \qquad \text{(ii) } H(t) := e^{-t^2},\ \ t \ge 0$$

erfüllen die Bedingungen (H1) – (H3). Ist das Integral $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ sphärisch $H$–summierbar zum Grenzwert $I$, so spricht man im Fall (i) von sphärischer Abel–Poisson–Summierbarkeit und im Fall (ii) von sphärischer Gauss–Weierstrass–Summierbarkeit.

**BSP. (7.7.3)** Die Funktion

$$H(t) := \begin{cases} 1 \ : \ 0 \le t \le 1, \\ 0 \ : \ t > 1 \end{cases}$$

erfüllt (H1)' – (H3), und wir haben

$$I_\epsilon(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, H(\epsilon|x|)\, dx = \int_{|x|<\epsilon^{-1}} f(x)\,dx = S(\epsilon^{-1}).$$

Für diese Funktion fallen die Begriffe der sphärischen Konvergenz und der sphärischen $H$–Summierbarkeit zusammen.

Die Aussage von BSP.(7.7.3) gilt allgemeiner:

**Satz 7.42** *Für* $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ *sei das Integral* $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ *sphärisch konvergent zum Grenzwert* $I := \lim\limits_{R\to\infty} S(R)$. *Dann ist* $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ *auch sphärisch* $H$*–summierbar zum selben Grenzwert* $I$.

*Beweis:* Wir verwenden Polarkoordinaten $r := |x|$, $\psi := \frac{x}{|x|}$ für $x \ne 0$ und erhalten einerseits für jedes $R > 0$:

$$S(R) = \int\limits_{|x|<R} f(x)\,dx = \int\limits_{r=0}^{R} \Big( \int\limits_{\psi\in S_1(0)} f(x)\,d\psi\Big) r^{n-1}\,dr, \quad dS = \Big( \int\limits_{\psi\in S_1(0)} f(x)\,d\psi\Big) R^{n-1}\,dR.$$

Andererseits haben wir für jedes feste $T > 0$:

$$\int\limits_{|x|<T} f(x)\, H(\epsilon|x|)\, dx = \int\limits_{R=0}^{T} H(\epsilon R)\Big( \int\limits_{\psi\in S_1(0)} f(x)\, d\psi\Big) R^{n-1}\, dR = \int\limits_{0}^{T} H(\epsilon R)\frac{dS(R)}{dR}\, dR.$$

Das letzte Integral formen wir unter Berücksichtigung von $S(0) = 0$ durch partielle Integration um in

$$S(T)H(\epsilon T) - \epsilon \int_0^T S(R)\, H'(\epsilon R)\, dR \to -\epsilon \int_0^\infty S(R)\, H'(\epsilon R)\, dR \quad (T \to +\infty).$$

Hierbei haben wir die Bedingungen (H1) und (H3) verwendet sowie die Beschränktheit $|S(R)| \leq M \ \forall\ R > 0$, die ja wegen der Konvergenz $S(R) \to I$ gegeben ist. Mit der Substitution $t := \epsilon R$ resultiert nun:

$$I_\epsilon(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, H(\epsilon|x|)\, dx = -\int_0^\infty S(\frac{t}{\epsilon})\, H'(t)\, dt.$$

Der Integrand im letzten Integral hat die integrable Majorante $M|H'(t)|$. Wir dürfen somit den LEBESGUEschen Satz 4.27 von der dominierten Konvergenz anwenden:

$$\lim_{\epsilon\to 0+} I_\epsilon(f) = -\int_0^\infty \lim_{\epsilon\to 0+} S(\frac{t}{\epsilon})\, H'(t)\, dt = -I\cdot\int_0^\infty H'(t)\, dt = I\,(H(0) - H(\infty)) = I.$$

Dies war zu zeigen. □

Wir benötigen drei weitere Vorbereitungsschritte zum Beweis des FOURIERschen Integralsatzes. Zunächst zeigen wir

**Satz 7.43** *Die Funktion $H : \overline{\mathbf{R}_+} \to \mathbf{R}$ erfülle die Bedingungen* (H1) – (H3) *sowie zusätzlich*

(H4) $H \circ |\cdot| \in L^1(\mathbf{R}^n)$, d.h. $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} |H(|x|)|\, dx = \omega_n \int_0^\infty r^{n-1}|H(r)|\, dr < \infty.$

*Seien ferner $K$, $K_\epsilon \in UCB_0(\mathbf{R}^n)$ gemäß*

$$K(x) := (2\pi)^{-n/2}(H\circ|\cdot|)\hat{}\,(x), \qquad K_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}K(\frac{x}{\epsilon})\ \forall\ x\in\mathbf{R}^n\ \forall\ \epsilon > 0$$

*definiert. Dann gilt für jedes $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$:*

$$\boxed{(I_\epsilon f)(x) := \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} H(\epsilon|\xi|)\, d\xi = (2\pi)^{n/2}(f * K_\epsilon)(x)\ \forall\ x\in\mathbf{R}^n\ \forall\ \epsilon > 0.} \tag{7.2}$$

*Beweis:* Aus dem Verschiebungssatz 7.30(b) folgt $(\tau_{-x}f)\hat{}\,(\xi) = e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)$, und mit Hilfe der PARSEVAL–Formel 7.30(a) sowie dem Ähnlichkeitssatz 7.30(d) erhalten wir:

$$\begin{aligned}(I_\epsilon f)(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\,(H(\epsilon|\xi|))\hat{}\,(y)\, dy = (2\pi)^{n/2}\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\epsilon^{-n}K(\frac{y}{\epsilon})\, dy\\ &\overset{z:=-y}{=} (2\pi)^{n/2}\int_{\mathbf{R}^n} f(x-z)K_\epsilon(z)\, dz = (2\pi)^{n/2}(f*K_\epsilon)(x).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Tatsache verwendet, daß die $L^1$–FOURIER–Transformierte $\hat{g}$ einer *radialen* Funktion $g := h\circ|\cdot| \in L^1(\mathbf{R}^n)$ wieder radial ist. Um dies einzusehen, nehmen wir im FOURIER–Integral von $g$ die Zerlegung $x = (x_1, x')$, $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ vor:

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \Big( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\langle x,\xi\rangle} h(\sqrt{x_1^2 + |x'|^2}\,)\, dx_1\Big)\, dx'.$$

Bei festgehaltenem $0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n$ drehen wir das $x$–Koordinatensystem derart, daß der Standardbasisvektor $-e_1$ in die $\xi$–Richtung fällt: $\xi = -|\xi|e_1$ und $\langle x, \xi\rangle = -x_1|\xi|$. Wir erhalten danach unter Verwendung von $(n-1)$-dimensionalen Polarkoordinaten $\rho := |x'|$, $\psi := \frac{x'}{|x'|}$ für $x' \neq 0$:

$$\hat{g}(\xi) = \omega_{n-1}(2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \Big( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_1|\xi|} h(\sqrt{x_1^2+\rho^2}\,)\, dx_1 \Big) \rho^{n-2}\, d\rho.$$

Führen wir hier ebene Polarkoordinaten $x_1 =: r\cos\varphi$, $\rho =: r\sin\varphi$, $r > 0$, $0 < \varphi < \pi$ ein, so finden wir

$$\hat{g}(\xi) = \omega_{n-1}(2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \Big( \int_0^\pi e^{ir|\xi|\cos\varphi} \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi \Big) h(r) r^{n-1}\, dr, \tag{7.3}$$

wobei das innere Integral in der folgenden Weise mit der BESSEL–Funktion $J_p(t), p := \frac{n-2}{2}$ verknüpft ist:

$$\int_0^\pi e^{it\cos\varphi} \sin^k\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{2^k\pi}\,\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{t^k}}\, J_{k/2}(t) \quad t \in \mathbf{R},\ \ k \in \mathbf{N}_0.$$

Man erkennt aber bereits an der Identität (7.3), daß $\hat{g}$ eine radiale Funktion ist. □

**Satz 7.44** *Die meßbare Funktion $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ erfülle mit einer Konstanten $C < \infty$*

$$|K(y)| \leq \frac{C}{(1+|y|^2)^{(n+1)/2}} \ \ \forall\, y \in \mathbf{R}^n \quad \textit{sowie} \quad \int_{\mathbf{R}^n} K(y)\, dy = 1. \tag{7.4}$$

*Dann folgt für jedes $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ mit $f_\epsilon := f * K_\epsilon$:*

$$\text{(i)} \ \lim_{\epsilon\to 0+} \|f_\epsilon - f\|_1 = 0, \qquad \text{(ii)} \ \lim_{\epsilon\to 0+} f_\epsilon(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \ \ f.ü.$$

*Beweis:* Wegen (7.4) gilt

$$\int_{\mathbf{R}^n} |K(y)|\, dy \leq C\,\omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}\, dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} < \infty,$$

also $K \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Die Behauptung (i) folgt nun aus Satz 7.35 und dem allgemeinen Approximationssatz 7.37, während sich die Behauptung (ii) aus Satz 7.40 ergibt. □

**Satz 7.45** *Die Funktion $H : \overline{\mathbf{R}_+} \to \mathbf{R}$ erfülle die Bedingungen* (H1) – (H4) *sowie zusätzlich*

(H5) $|K(\xi)| := (2\pi)^{-n/2} |(H \circ |\cdot|)\hat{}\,(\xi)| \leq \dfrac{C}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}} \ \ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n,$

(H6) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} K(\xi)\, d\xi = 1.$

*Dann folgt für jedes $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ mit $f_\epsilon := f * K_\epsilon$:*

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(i)} \ \lim_{\epsilon\to 0+} \|f_\epsilon - f\|_1 = 0, \\ &\text{(ii)} \ \lim_{\epsilon\to 0+} f_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} H(\epsilon|\xi|)\, d\xi = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \ \ f.ü. \end{aligned}} \tag{7.5}$$

*Beweis:* Dieser folgt unmittelbar aus Satz 7.44 in Verbindung mit (7.2). □

Wir sind nun in der Lage, das Hauptergebnis dieses Abschnitts zu beweisen, nämlich den folgenden

**Satz 7.46 (FOURIERscher Integralsatz für $L^1(\mathbf{R}^n)$)**
*Für jedes $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ist das inverse FOURIER–Integral*

$$(\mathcal{F}^* \hat{f})(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

*sphärisch GAUSS–WEIERSTRASS summierbar zum Grenzwert $f(x)$, und zwar sowohl in der $L^1$–Norm als auch punktweise für fast alle $x \in \mathbf{R}^n$.*

*Beweis:* Gemäß BSP.(7.7.2) ist die sphärische GAUSS–WEIERSTRASS–Summierbarkeit genau die sphärische $H$–Summierbarkeit mit der Funktion $H(t) := e^{-t^2}$, $t \geq 0$. Es wurde bereits früher bemerkt, daß $H(t)$ schon die Bedingungen (H1) – (H3) erfüllt. Zum Nachweis von (H4) berechnen wir

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = \Big( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \Big)^n = \pi^{n/2} < \infty.$$

Die Bedingung (H5) ergibt sich in folgender Weise aus Satz 7.18, wobei $C < \infty$ eine geeignet zu wählende Konstante ist:

$$0 \leq K(\xi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle\sqrt{2}\,x,\xi/\sqrt{2}\rangle} e^{-\frac{1}{2}|\sqrt{2}\,x|^2}\, dx \overset{y:=\sqrt{2}\,x}{=} 2^{-n/2}(2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|\xi|^2} \leq \frac{C}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}}.$$

Schließlich ist (H6) zu verifizieren:

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(\xi)\, d\xi = 2^{-n/2}(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|\xi/\sqrt{2}|^2}\, d\xi \overset{y:=\xi/\sqrt{2}}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}\, dy \overset{(3.4)}{=} 1.$$

Nun folgen die Behauptungen unmittelbar aus Satz 7.45 (i) und (ii). □

Die $L^1$–FOURIER–Transformation ist injektiv. Dies ergibt sich als Folgerung aus Satz 7.46.

**Satz 7.47** *Für $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ gelte $(\mathcal{F}_1 f)(\xi) =: \hat{f}(\xi) = 0 \ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n$. Dann folgt $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ f.ü.*

*Beweis:* Aus Satz 7.45(ii) erhalten wir

$$0 = f_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} H(\epsilon|\xi|)\, d\xi \to f(x) \ \ (\epsilon \to 0+), \quad x \in \mathbf{R}^n \ \text{ f.ü.},$$

wobei gemäß Satz 7.46 $H(t) := e^{-t^2}$, $t \geq 0$ zu setzen ist. Somit ist die Injektivität bewiesen. □

**Folgerung 7.4** (a) *Existiert für $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ der Grenzwert*

$$\lim_{R\to\infty} S_R(x) := (2\pi)^{-n/2} \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi =: S(x) \tag{7.6}$$

*im Punkt $x \in \mathbf{R}^n$, so gilt $S(x) = f(x)$, sofern $x$ ein LEBESGUE–Punkt von $f$ ist, was für fast alle $x \in \mathbf{R}^n$ zutrifft.*

Dies ist eine Konsequenz aus den Sätzen 7.39, 7.42 und 7.46. □

(b) *Ist $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ stetig im Punkt $x_0 \in \mathbf{R}^n$ und existiert der Grenzwert $S(x_0) = \lim\limits_{R\to\infty} S_R(x_0)$, so gilt $f(x_0) = S(x_0)$.*

Klar, da jeder Stetigkeitspunkt von $f$ ein LEBESGUE–Punkt ist, folgt diese Aussage direkt aus (a). □

(c) *Für* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *gelte auch* $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$. *Dann folgt*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} e^{i\,\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbf{R}^n \;\; f.\ddot{u}.$$

Denn die Eigenschaft $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ sichert die sphärische Konvergenz (7.6), so daß die Behauptung aus (a) folgt. □

(d) *Für* $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^n)$ *und* $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *gilt*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} e^{i\,\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad \forall\; x \in \mathbf{R}^n.$$

Dies ergibt sich aus den beiden Aussagen (b) und (c). □

# Kapitel 8

# Distributionen

## 8.1 Definition von Distributionen und Beispiele

Die Behandlung von Problemen linearer partieller Differentialgleichungen ist im Rahmen des klassischen Funktionsbegriffes manchmal nicht mehr adäquat durchführbar. Wir haben dies bereits in Abschnitt 5.2 aufgezeigt, wo wir in einem ersten Schritt den Begriff der verallgemeinerten Ableitung eingeführt haben. In einem nächsten Schritt werden wir den Funktionsbegriff so verallgemeinern, daß der Prozeß der Differentiation von beliebiger Ordnung zu einer einfachen Standardoperation der Analysis wird.

Nachfolgend bezeichne $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ stets eine offene Teilmenge, und es sei $\mathcal{D}(\Omega)$ der in BSP.(7.2.3) definierte lokalkonvexe topologische Vektorraum der Testfunktionen über $\Omega$.

**Definition 8.1** *Der* $\mathbf{K}$*–Vektorraum der stetigen linearen Funktionale über* $C_0^\infty(\Omega)$*, d.h. der topologische Dualraum von* $\mathcal{D}(\Omega)$*:*

$$\boxed{\mathcal{D}'(\Omega) := \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K} \ : \ T \text{ stetig und linear}\}}$$

*heiße* **Raum der Distributionen**. *Jedes Element* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *heiße eine* **Distribution**.

Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichne $T(\varphi)$ den Funktionswert von $T$ bei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. In Anlehnung an Definition 3.7 wird gelegentlich auch $T(\varphi) = (\varphi, T)$ geschrieben. Wegen Satz 7.14 gilt also genau dann $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wenn $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ ein Funktional ist mit den beiden Eigenschaften

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i) } T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi) \ \ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \ \ \forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), & \text{(Linearität)} \\ \text{(ii) } \lim\limits_{k\to\infty} |T(\varphi_k)| = 0 \text{ für jede Folge } (\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0. & \text{(Stetigkeit)} \end{array}} \tag{1.1}$$

Dabei ist eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ gemäß Satz 7.13 genau dann konvergent zum Grenzwert 0 (in Zeichen $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$), wenn eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ existiert mit $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K \ \forall\, k \in \mathbf{N}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\rho \varphi_k(x)| = 0 \quad \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n. \tag{1.2}$$

Eine andere Charakterisierung von Distributionen geben wir in dem folgenden Satz unter Heranziehung der Halbnorm–Familie (2.14) aus Abschnitt 7.2:

**Satz 8.1** *Ein lineares Funktional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ ist genau dann eine Distribution, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ Zahlen $C < \infty$ und $m = m(K) \in \mathbf{N}_0$ gibt mit*

$$\boxed{|T(\varphi)| \leq C \cdot p_{K,m}(\varphi) = C \cdot \max_{0 \leq |\rho| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\rho \varphi(x)| \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).} \tag{1.3}$$

*Beweis:* Wir zeigen zunächst die Hinlänglichkeit von (1.3) und betrachten dazu eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ mit $\varphi_k \in \mathcal{D}_K(\Omega)\ \forall\, k \in \mathbf{N}$ und der Eigenschaft (1.2). Insbesondere haben wir wegen (1.3)

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} |T(\varphi_k)| \leq C \cdot \lim_{k \to \infty} p_{K,m}(\varphi_k) = 0,$$

und dies impliziert bereits die Stetigkeit von $T$. Zum Beweis der Notwendigkeit von (1.3) nehmen wir im Sinne eines Widerspruchsbeweises an, es gebe eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, C < \infty\ \forall\, m \in \mathbf{N}_0\ \exists\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)\ :\ |T(\varphi)| > C \cdot p_{K,m}(\varphi).$$

Wir setzen $C = m =: k \in \mathbf{N}$ und erhalten durch eventuelle Normierung eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ mit $1 = |T(\varphi_k)| > k \cdot p_{K,k}(\varphi_k)\ \forall\, k \in \mathbf{N}$, also

$$\frac{1}{k} > p_{K,k}(\varphi_k) \geq p_{K,m}(\varphi_k) \quad \forall\, m \leq k \in \mathbf{N}.$$

Dies liefert $\lim_{k \to \infty} p_{K,m}(\varphi_k) = 0\ \forall\, m \in \mathbf{N}_0$, oder gemäß Satz 7.12 äquivalent $\varphi_k \overset{\mathcal{D}_K}{\to} 0$. Somit wäre nach (1.2) auch $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ gegeben, und aus der Stetigkeit von $T$ folgte $T(\varphi_k) \to 0$, im Widerspruch zu $|T(\varphi_k)| = 1$. □

Satz 8.1 gibt eine Charakterisierung der Stetigkeit eines linearen Funktionals $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ über seine *Folgenstetigkeit* im Punkt 0. Es erhebt sich die berechtigte Frage, ob in Analogie zum BANACHraum–Fall Stetigkeit von $T$ äquivalent ist mit der Eigenschaft, daß $T$ beschränkt ist auf beschränkten Teilmengen, man vergleiche dazu Satz 2.4. Dabei ist der Begriff der Beschränktheit einer Teilmenge eines topologischen Vektorraumes $X$ wie folgt erklärt:

**Definition 8.2** *Eine Teilmenge $M$ eines topologischen Vektorraumes $X$ heiße* **beschränkt**, *wenn $M$ von jeder Nullumgebung $U \subset X$ absorbiert wird:*

$$\boxed{\forall\, U \subset X,\ \textit{Nullumgebung}\ \exists\, \lambda > 0\ :\ M \subset \lambda U := \{\lambda x\ :\ x \in U\}.}$$

Stetigkeit einer linearen Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen impliziert immer auch ihre Beschränktheit im folgenden Sinn:

**Satz 8.2** *Seien $X, Y$ topologische Vektorräume und $T : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung. Dann bildet $T$ beschränkte Mengen von $X$ in beschränkte Mengen von $Y$ ab.*

*Beweis:* Sei $M \subset X$ eine beschränkte Teilmenge und $V \subset Y$ eine Nullumgebung. Da $T$ stetig ist, gibt es eine Nullumgebung $U \subset X$ mit $T(U) \subset V$. Sei $\lambda > 0$ so bestimmt, daß $M \subset \lambda U$ gilt. Dann folgt $T(M) \subset T(\lambda U) = \lambda T(U) \subset \lambda V$. Also ist $T(U) \subset Y$ eine beschränkte Menge. □

Die Antwort auf die Frage, ob aus der Beschränktheit der Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ auch ihre Stetigkeit folgt, bereiten wir mit dem folgenden Satz vor:

**Satz 8.3** *Sei $M \subset \mathcal{D}(\Omega)$ eine beschränkte Menge. Dann existiert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & \operatorname{supp}\varphi \subset K \ \ \forall\, \varphi \in M, \\ \text{(b)} & \sup\limits_{\varphi\in M}\sup\limits_{x\in K} |D^\rho\varphi(x)| < \infty \ \ \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n. \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

*Beweis:* Zum Beweis von (a) nehmen wir im Gegensatz an, es gebe eine Folge $\left(\varphi_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ und eine Punktfolge $\left(x_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \subset \Omega$ mit den Eigenschaften (i) $\left(x_k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ hat keinen Häufungspunkt in $\Omega$ und (ii) $\varphi_k(x_k) \neq 0 \ \forall\, k \in \mathbf{N}$. Setzen wir

$$p(\varphi) := \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left|\varphi(x_k)/\varphi_k(x_k)\right|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.5}$$

so ist $p$ auf jedem der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$ eine stetige Halbnorm, denn in jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ sind nur endlich viele Punkte $x_k$ enthalten, so daß die Reihe (1.5) für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ nur aus endlich vielen Summanden besteht. Somit wird durch

$$U_\epsilon(0) := \{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \,:\, p(\varphi) < \epsilon\}$$

für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ defininiert. Nach Definition 7.6 ist dann $V_\epsilon(0) := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,:\, p(\varphi) < \epsilon\}$ eine offene Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$. Also ist $p$ stetig bei $0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, da die Urbilder offener Mengen unter $p$ offen sind. Infolge der Translationseigenschaft $V_\epsilon(\varphi) = \varphi + V_\epsilon(0)$ muß $p$ nun stetig in jedem Punkt $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sein. Aus Satz 8.2 folgt, daß $p$ auf der beschränkten Menge $M \subset \mathcal{D}(\Omega)$ beschränkt ist, was im Widerspruch zu $p(\varphi_k) \geq k \ \forall\, k \in \mathbf{N}$ steht. Dies belegt die Richtigkeit der Aussage (a). Wir nehmen jetzt an, es gelte (a), nicht aber (b). Dann existiert ein Multiindex $\rho_0 \in \mathbf{N}_0^n$ und eine Folge $\left(\varphi_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ mit $\sup\limits_{x\in K}\left|D^{\rho_0}\varphi_k(x)\right| > k \ \forall\, k \in \mathbf{N}$. Definieren wir die stetige Halbnorm

$$p(\varphi) := \sup_{x\in K}\left|D^{\rho_0}\varphi(x)\right|, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

so gilt offenbar $p(\varphi_k) > k$, so daß die Teilmenge $\{\varphi_k \,:\, k \in \mathbf{N}\} \subset M$ nicht in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ beschränkt sein kann und somit auch nicht in $\mathcal{D}(\Omega)$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. □

Nun sind wir in der Lage, das angekündigte Resultat zu beweisen.

**Satz 8.4** *Ein lineares Funktional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ ist genau dann eine Distribution, wenn $T$ auf jeder beschränkten Teilmenge $M \subset \mathcal{D}(\Omega)$ beschränkt ist.*

*Beweis:* Ist $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so ist $T$ insbesondere stetig und linear. Gemäß Satz 8.2 bildet dann $T$ jede beschränkte Teilmenge $M \subset \mathcal{D}(\Omega)$ in eine beschränkte Teilmenge $T(M) \subset \mathbf{K}$ ab. Bildet $T$ umgekehrt jedes beschränkte $M \subset \mathcal{D}(\Omega)$ in eine beschränkte Teilmenge $T(M) \subset \mathbf{K}$ ab, so heißt dies wegen (1.4), daß $T$ auf den beschränkten Teilmengen des FRÉCHET–Raumes $\mathcal{D}_K(\Omega)$ beschränkt ist. Da $\mathcal{D}_K(\Omega)$ unter der Metrik $d(\varphi,\psi)$ aus (2.15), Abschnitt 7.2 ein vollständiger metrischer Raum ist, gehen wir jetzt von einer Nullfolge $\varphi_k \overset{\mathcal{D}_K}{\to} 0$ aus und zeigen die Stetigkeit der Einschränkung $T|\mathcal{D}_K(\Omega)$ bei 0. Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} d(\varphi_k, 0) = 0$ können Zahlen $n_k \in \mathbf{N}$ so bestimmt werden, daß gilt:

$$n_k = \begin{cases} \text{größte ganze Zahl} \leq 1/\sqrt{d(\varphi_k,0)} & : \ \varphi_k \neq 0, \\ k & : \ \varphi_k = 0. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} n_k d(\varphi_k, 0) = 0 \quad \text{und somit auch} \quad \lim_{k\to\infty} d(n_k\varphi_k, 0) = 0,$$

wegen $d(n_k\varphi_k, 0) = d(\varphi_k + \varphi_k + \cdots + \varphi_k, 0) \leq n_k d(\varphi_k, 0)$ gemäß der Dreiecksungleichung. Da in einem metrischen Raum konvergente Folgen beschränkt sind, muß insbesondere die Nullfolge $\left(n_k\varphi_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$

beschränkt sein. Diese wird nach Voraussetzung unter $T$ in die beschränkte Folge $\left(n_k T(\varphi_k)\right)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$ abgebildet, und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} |T(\varphi_k)| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{n_k}\, T(n_k\varphi_k)\right| = 0.$$

Mithin ist $T|\mathcal{D}_K(\Omega)$ bei 0 stetig, also auch stetig auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$, woraus die Stetigkeit von $T$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ folgt.□

Definition 8.1 setzt bereits implizit voraus, daß $\mathcal{D}'(\Omega)$ die algebraische Struktur eines Vektorraums trägt. Eine Topologisierung ist in vielfältiger Weise möglich und auch in der Literatur zu finden. Für die meisten Belange in den Anwendungen genügt es jedoch, die aus der schwach* Topologie resultierende **punktweise Konvergenz** auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ zu betrachten:

**Definition 8.3** *Eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ von Distributionen heiße konvergent zum Grenzwert $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (in Zeichen $T_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} T$), wenn gilt:*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{1.6}$$

Mit diesem Konvergenzbegriff sind wir bereits in der Lage, die Folgenabgeschlossenheit des Raumes $\mathcal{D}'(\Omega)$ zu zeigen. In den Beweis des folgenden Satzes geht das Banach–Steinhaus–Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 5.2) ein, welches im allgemeineren Rahmen für Fréchet–Räume $X$ und normierte Vektorräume $Y$ gilt (man vergleiche K. Yosida, Functional Analysis, 4. Edition. Die Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarstellungen, Bd. 123. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1974; dort Thm. 1, Chapt. II.1.).

**Satz 8.5** *Gegeben sei eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, für die der Grenzwert*

$$\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) =: T(\varphi) \in \mathbf{K}$$

*für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existiert. Dann gilt $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

*Beweis:* Mit einem Standardargument kann gezeigt werden, daß $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ linear ist. Zum Beweis der Stetigkeit fixieren wir eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$. Wegen (1.3) definiert jedes $T_k$ auf dem Fréchet–Raum $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ein stetiges lineares Funktional $T_k|\mathcal{D}_K(\Omega)$. Aus der eingangs erwähnten Verallgemeinerung des Banach–Steinhaus–Satzes folgern wir, daß $T$ auf den beschränkten Teilmengen von $\mathcal{D}_K(\Omega)$ beschränkt sein muß. Wegen Satz 8.4 ist $T$ dann stetig, also eine Distribution. □

**BSP. (8.1.1)** **Maße auf $\Omega$.** Ganz analog wie der $\mathbf{K}$–Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ kann auch $C_0^0(\Omega)$ lokalkonvex topologisiert werden. Dazu werden die Unterräume

$$\mathcal{D}_K^0(\Omega) := \{\varphi \in C_0^0(\Omega) \,:\, \mathrm{supp}\,\varphi \subset K\}, \quad K \subset \Omega \text{ kompakt},$$

betrachtet. Jeder dieser Räume ist unter der Norm

$$p_K(\varphi) := \sup_{x\in K} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K^0(\Omega), \tag{1.7}$$

ein Banach–Raum. $C_0^0(\Omega)$, als induktiver Limes der Banach–Räume $\mathcal{D}_K^0(\Omega)$ betrachtet, ist dann ein lokalkonvexer Vektorraum. Ohne die Argumente aus BSP.(7.2.3) wiederholen zu wollen, definieren wir im Sinne von Satz 7.13:

**Definition 8.4** *Eine Folge* $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C_0^0(\Omega)$ *heiße konvergent zum Grenzwert* $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ *(in Zeichen* $\varphi_k \overset{C_0^0}{\to} \varphi$*), wenn gilt:*

(a) *Es existiert eine kompakte Teilmenge* $K \subset \Omega$ *mit* $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K \ \forall\, k \in \mathbf{N}$,

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| = 0.$

**Definition 8.5** *Der topologische Dualraum von* $C_0^0(\Omega)$*, nämlich*

$$\boxed{\mathcal{C}'(\Omega) := \{\mu : C_0^0(\Omega) \to \mathbf{K} \,:\, \mu \text{ stetig und linear}\},}$$

*heiße der Raum der* **Maße auf** $\Omega$*. Jedes Element* $\mu \in \mathcal{C}'(\Omega)$ *heiße ein* **Maß** *auf* $\Omega$*.*

Ein lineares Funktional $\mu : C_0^0(\Omega) \to \mathbf{K}$ ist mit anderen Worten genau dann ein Maß auf $\Omega$, wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty} |\mu(\varphi_k)| = 0 \quad \text{für jede Folge } (\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C_0^0(\Omega) \text{ mit } \varphi_k \overset{C_0^0}{\to} 0. \tag{1.8}$$

**Folgerung 8.1** (a) *Jedes Maß* $\mu$ *auf* $\Omega$ *ist eine Distribution, d.h. es gilt* $\mathcal{C}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Denn wegen $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^0(\Omega)$ ist jedes $\mu \in \mathcal{C}'(\Omega)$ ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Darüber hinaus impliziert die Konvergenz $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ einer Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ wegen (1.2) und Definition 8.4 auch die Konvergenz $\varphi_k \overset{C_0^0}{\to} 0$. Somit gilt gemäß (1.8):

$$\lim_{k\to\infty} |\mu(\varphi_k)| = 0 \quad \text{für jede Folge } (\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0,$$

und dies bedeutet bereits $\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$. □

(b) *Wird auf* $\mathcal{C}'(\Omega)$ *die punktweise Konvergenz der schwach* Topologie eingeführt:*

$$\boxed{\mathcal{C}'(\Omega) \ni \mu_k \overset{\mathcal{C}'}{\to} \mu \in \mathcal{C}'(\Omega) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \mu_k(\varphi) = \mu(\varphi) \ \forall\, \varphi \in C_0^0(\Omega),}$$

*so ist die Einbettung* $\mathcal{C}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ *sogar folgenstetig.*

Dies ist trivial, denn $\mu_k \overset{\mathcal{C}'}{\to} \mu$ impliziert $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(\varphi) = \mu(\varphi)\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^0(\Omega)$, und somit auch $\mu_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} \mu$. Die Einbettung $Id : \mathcal{C}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ ist also folgenstetig. □

**Bemerkung 8.1** Der Funktionswert $\mu(\varphi)$ eines Maßes $\mu \in \mathcal{C}'(\Omega)$ bei $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ wird häufig das **Integral** von $\varphi$ bezüglich des Maßes $\mu$ genannt:

$$\mu(\varphi) =: \int_\Omega \varphi \, d\mu. \tag{1.9}$$

Da $C_0^0(\Omega)$ in verschiedenen Funktionenräumen dicht enthalten ist, kann das Integral (1.9) durch Fortsetzung von $\mu$ auch für allgemeinere Funktionsklassen erklärt werden.

**BSP. (8.1.2)** **Reguläre Distributionen.** Für jedes $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ist das LEBESGUE–Integral

$$\mu_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^0(\Omega) \tag{1.10}$$

wohldefiniert, also $\mu_f : C_0^0(\Omega) \to \mathbf{K}$ ein lineares Funktional. Darüber hinaus gilt für jede Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset C_0^0(\Omega)$ mit $\varphi_k \overset{C_0^0}{\to} 0$:

$$0 \le \limsup_{k\to\infty} |\mu_f(\varphi_k)| \le \int_K |f(x)|\,dx \cdot \limsup_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |\varphi_k(x)| = 0,$$

wobei die kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gemäß Definition 8.4 zu wählen ist. Somit ist $\mu_f$ ein Maß auf $\Omega$ und folglich eine Distribution.

**Definition 8.6** *Das durch die Vorschrift* (1.10) *für jedes* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *definierte Maß* $\mu_f$ *auf* $\Omega$ *heiße* **reguläre Distribution** *oder* **Distribution vom Funktionstyp**. *Die Funktion* $f$ *heiße die* **Dichte** *von* $\mu_f$.

**Folgerung 8.2** (a) *Die Zuordnung* $L^1_{loc}(\Omega) \ni f \mapsto \mu_f \in \mathcal{C}'(\Omega)$ *ist injektiv, so daß* $L^1_{loc}(\Omega)$ *in eindeutiger Weise mit einem Unterraum von* $\mathcal{C}'(\Omega)$ *identifiziert werden kann. Dieser heiße der Raum der* **absolutstetigen Maße** *auf* $\Omega$.

Denn wegen (1.10) folgt im Fall $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\mu_f = \mu_g$:

$$\int_\Omega \big(f(x) - g(x)\big)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^0(\Omega),$$

also $f = g$ f.ü. in $\Omega$ wegen Satz 5.1. □

(b) *Wegen* $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ $\forall\ p \in [1,\infty]$ *definiert jedes* $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, *eine reguläre Distribution* $\mu_f$, *und diese ist ein Maß auf* $\Omega$.

**Bemerkung 8.2** Häufig wird die reguläre Distribution $\mu_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit ihrer Dichte $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ identifiziert.

**BSP. (8.1.3)** **Singuläre Distributionen.** Jede nicht reguläre Distribution heiße eine **singuläre Distribution**. Die Existenz singulärer Distributionen wird unter anderem durch folgendes Beispiel sichergestellt.

**Definition 8.7 (Dirac–Maß)**
*Für* $x_0 \in \Omega$ *setzen wir*

$$\boxed{\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0) \quad \forall\, \varphi \in C_0^0(\Omega).} \tag{1.11}$$

*Dann ist durch* $\delta_{x_0} \in \mathcal{C}'(\Omega)$ *ein Maß auf* $\Omega$ *definiert, welches das* **Dirac–Maß** *oder das* **Dirac–Punktfunktional** *im Punkt* $x_0$ *heißt.*

Daß die Abbildung $\delta_{x_0} : C_0^0(\Omega) \to \mathbf{K}$ linear ist, erkennt man sofort an der Definition (1.11). Ihre Stetigkeit ergibt sich unmittelbar aus

$$\lim_{k\to\infty} \big|\delta_{x_0}(\varphi_k)\big| = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k(x_0)| \le \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |\varphi_k(x)| = 0 \quad \text{für } \big(\varphi_k\big)_{k\in\mathbf{N}} \subset C_0^0(\Omega) \text{ mit } \varphi_k \overset{C_0^0}{\to} 0.$$

**Folgerung 8.3** $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *ist eine singuläre Distribution.*

Denn andernfalls gäbe es ein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit

$$\varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^0(\Omega).$$

Diese Aussage wurde aber bereits in BSP.(5.2.3) zum Widerspruch geführt. □

**Bemerkung 8.3** Im Sprachgebrauch einiger Physiker und Ingenieure wird $\delta_{x_0}$ häufig als DIRACsche *Deltafunktion* bezeichnet und die Schreibweise

$$\text{(i) } \varphi(x_0) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\delta(x-x_0)\,dx, \quad \text{(ii) } 1 = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x-x_0)\,dx, \quad \text{(iii) } \delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & : x \neq x_0, \\ +\infty & : x = x_0 \end{cases}$$

verwendet. Dies ist in mathematischer Terminologie inkorrekt, da (ii) und (iii) im klassischen Funktionssinn widersprüchlich sind. Denn die Eigenschaft (iii) hätte ein LEBESGUE–Integral

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(x-x_0)\,dx = 0$$

zur Folge. Eine Rechtfertigung für die Symbolik (i) – (iii) ergibt sich aber in folgender Weise: Wir betrachten exemplarisch den Fall $n = 1$ und führen die Dichtefunktionen

$$f_\epsilon(x-x_0) := \frac{1}{\pi}\,\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-x_0)^2} \overset{\epsilon\to 0+}{\to} \begin{cases} 0 & : x \neq x_0, \\ +\infty & : x = x_0 \end{cases}$$

ein. Es folgt $f_\epsilon \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ und $\int_{\mathbf{R}} f_\epsilon(x-x_0)\,dx = 1 \;\forall\, \epsilon > 0$. Somit sind die beiden Eigenschaften (ii) und (iii) für die zugeordnete Familie $\{\mu_{f_\epsilon}\}_{\epsilon>0} \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ regulärer Distributionen motiviert. Zur Motivation der Eigenschaft (i) betrachten wir für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ die folgende Identität, die sich durch partielle Integration ergibt:

$$\mu_{f_\epsilon}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_\epsilon(x-x_0)\,dx = \int_0^\infty (\varphi(x_0+x) + \varphi(x_0-x)) f_\epsilon(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,(\varphi(x_0+x) + \varphi(x_0-x))\arctan\,(\frac{x}{\epsilon})\Big|_0^\infty - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\varphi'(x_0+x) - \varphi'(x_0-x))\arctan\,(\frac{x}{\epsilon})\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\varphi'(x_0+x) - \varphi'(x_0-x))\arctan\,(\frac{x}{\epsilon})\,dx.$$

Im Limes $\epsilon \to 0+$ resultiert daraus unter Verwendung des LEBESGUEschen Satzes 4.27 von der dominierten Konvergenz:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0+} \mu_{f_\epsilon}(\varphi) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\varphi'(x_0+x) - \varphi'(x_0-x)) \lim_{\epsilon\to 0+} \arctan\,(\frac{x}{\epsilon})\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty (\varphi'(x_0+x) - \varphi'(x_0-x))\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\,(\varphi(x_0+x) + \varphi(x_0-x))\Big|_0^\infty = \varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi), \end{aligned}$$

also $\mu_{f_\epsilon} \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta_{x_0}$ für $\epsilon \to 0+$.

## 8.2 Differentiation von Distributionen

Eine der zentralen Eigenschaften von Distributionen ist die Tatsache, daß die Differentiation auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ eine stetige Operation ist. Wir motivieren die formale Definition der distributionellen Ableitung durch folgendes Beispiel.

**BSP. (8.2.1)** Für $f \in C_0^\infty(\Omega)$ und jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$ gilt $D^\rho f \in C_0^\infty(\Omega)$. Als $L^1_{loc}$–Funktionen erzeugen also $f$ und $D^\rho f$ gemäß BSP.(8.1.2) reguläre Distributionen $\mu_f$, $\mu_{D^\rho f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, für die folgender Zusammenhang besteht, der sich wie in BSP.(5.2.2) für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ durch partielle Integration ergibt:

$$\mu_{D^\rho f}(\varphi) = \int_\Omega (D^\rho f)(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\rho|}\int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx = (-1)^{|\rho|}(\mu_f \circ D^\rho)(\varphi). \tag{2.1}$$

Wir behaupten $\mu_f \circ D^\rho \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Zunächst ist die Linearität der Abbildung $\mu_f \circ D^\rho : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ wegen der Linearität von $D^\rho : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ und von $\mu_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ klar. Die Stetigkeit ergibt sich aus Satz 8.1 wie folgt: Setzen wir $K := \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega$ und $m := |\rho|$, so gilt die Bedingung (1.3), nämlich

$$|(\mu_f \circ D^\rho)(\varphi)| \le \int_K |f(x)| \cdot |D^\rho\varphi(x)|\,dx \le \|f\|_{1;K} \cdot p_{K,m}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Die Identifikation der Distribution $\mu_f$ mit ihrer Dichte $f$ rechtfertigt die formale Setzung $D^\rho\mu_f := \mu_{D^\rho f}$, so daß wir aus (2.1) den folgenden Zusammenhang ersehen:

$$\boxed{D^\rho\mu_f = (-1)^{|\rho|}\mu_f \circ D^\rho.} \tag{2.2}$$

Wir betten den Zusammenhang (2.2) mit folgender Definition in einen allgemeineren Rahmen ein.

**Definition 8.8** *Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und für jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$ ist die $\rho$–te* **distributionelle Ableitung** *von $T$ die folgende Distribution $D^\rho T$:*

$$\boxed{D^\rho T := (-1)^{|\rho|}T \circ D^\rho, \quad \textit{also} \quad (D^\rho T)(\varphi) := (-1)^{|\rho|}T(D^\rho\varphi)\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{2.3}$$

Aus dieser Definition und dem Konvergenzbegriff auf dem Distributionenraum $\mathcal{D}'(\Omega)$ deduzieren wir:

**Satz 8.6** *Die Abbildung $D^\rho : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ ist für jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$ folgenstetig und linear:*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} D^\rho T_k = D^\rho T \quad \textit{für jede Folge } (T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega) \textit{ mit } T_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} T.}$$

*Beweis:* Für festes $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt die Ungleichung (1.3), aus der wir wegen (2.3) für jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$ die folgende Abschätzung erschließen:

$$|D^\rho T(\varphi)| = |T(D^\rho\varphi)| \le C \cdot p_{K,m+|\rho|}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Somit gilt $D^\rho T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gemäß Satz 8.1. Da die Linearität der Abbildung $D^\rho : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ klar ist, haben wir nur noch ihre Folgenstetigkeit zu zeigen. Wegen $D^\rho\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ergibt sich aber aus der Vorgabe einer Folge $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $T_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} T$:

$$D^\rho T_k(\varphi) = (-1)^{|\rho|} T_k(D^\rho\varphi) \to (-1)^{|\rho|} T(D^\rho\varphi) = D^\rho T(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

also $D^\rho T_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} D^\rho T$. □

**BSP. (8.2.2)** Besitzt $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine $\rho$–te verallgemeinerte Ableitung $D^\rho f =: f_\rho \in L^1_{loc}(\Omega)$, so ist diese genau die $\rho$–te distributionelle Ableitung von $f$ im Sinne der Identifikation von regulären Distributionen mit ihrer Dichte. Denn es folgt ja aus (2.2), Abschnitt 5.2:

$$\begin{aligned}(-1)^{|\rho|}(D^\rho\mu_f)(\varphi) &\overset{(2.3)}{=} \mu_f(D^\rho\varphi) = \int_\Omega f(x)(D^\rho\varphi)(x)\,dx = (-1)^{|\rho|}\int_\Omega f_\rho(x)\varphi(x)\,dx \\ &= (-1)^{|\rho|}\mu_{D^\rho f}(\varphi)\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

Speziell für $f \in C^{|\rho|}(\Omega)$ fällt dann gemäß Satz 5.3(b) die $\rho$–te klassische Ableitung $D^\rho f \in C(\Omega)$ mit der $\rho$–ten distributionellen Ableitung im obigen Sinn zusammen. Das heißt, der Begriff der distributionellen Ableitung ist eine Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs.

**BSP. (8.2.3)** **Die Heaviside–Funktion.** Das ist die Funktion $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit

$$H(x) := \begin{cases} 1 & : \ x \geq 0, \\ 0 & : \ x < 0. \end{cases}$$

Wegen $H \in L^\infty(\mathbf{R})$ definiert $H$ eine reguläre Distribution $\mu_H \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, deren distributionelle Ableitung folgendermaßen berechnet wird:

$$D\mu_H(\varphi) = -\mu_H(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \delta(\varphi) \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Die reguläre Distribution $\mu_H$ besitzt als distributionelle Ableitung die singuläre Distribution $D\mu_H = \delta$. Während $\mu_H$ und $D\mu_H = \delta$ noch Maße auf $\mathbf{R}$ sind, also zur Klasse $\mathcal{C}'(\mathbf{R})$ gehören, ist dies für die höheren Ableitungen nicht mehr richtig: Für $m > 1$ haben wir

$$D^m\mu_H(\varphi) = D^{m-1}\delta(\varphi) = (-1)^{m-1}\delta(\varphi^{(m-1)}) = (-1)^{m-1}\varphi^{(m-1)}(0).$$

Diese Identität ist nicht mehr für alle $\varphi \in C^0_0(\mathbf{R})$ erklärbar, so daß mit $D^m\delta$, $m \geq 1$, **kein** Maß auf $\mathbf{R}$ vorliegt, wohl aber eine singuläre Distribution.

**BSP. (8.2.4)** **Lokal stückweise stetig differenzierbare Funktionen.** Gegeben sei eine Punktfolge $(x_j)_{j\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{R}$ mit $x_j < x_{j+1}$ und $\lim\limits_{|j|\to\infty} |x_j| = \infty$. Sei ferner $f \in C^m(x_j, x_{j+1})\ \forall\, j \in \mathbf{Z}$ so, daß die $k$–te klassische Ableitung $f^{(k)}$, $0 \leq k \leq m$, in jedem Punkt $x_j$ einen rechts– und linksseitigen Funktionenlimes $f^{(k)}(x_j \pm 0)$ besitzt. Der **Sprung** von $f^{(k)}$ bei $x_j$ ist die Zahl

$$s_j^{(k)} := f^{(k)}(x_j + 0) - f^{(k)}(x_j - 0), \quad (s\text{: "saltus"}). \tag{2.4}$$

Da $f^{(k)} \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ gilt, erzeugt $f^{(k)}$ eine reguläre Distribution $\mu_{f^{(k)}}$. Ebenso erzeugt $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ ein reguläre Distribution $\mu_f$. Wir interessieren uns für den Zusammenhang zwischen der $k$–ten

distributionellen Ableitung $D^k\mu_f$ und $\mu_{f^{(k)}}$. Dazu berechnen wir in einem ersten Schritt:

$$\begin{aligned} D\mu_f(\varphi) &= -\mu_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\big(f(x_j+0)\varphi(x_j) - f(x_{j+1}-0)\varphi(x_{j+1})\big) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(0)}\varphi(x_j) + \mu_{f'}(\varphi) = \Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(0)}\delta_{x_j} + \mu_{f'}\Big)(\varphi) \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Es resultiert also

$$\boxed{D\mu_f = \mu_{f'} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(0)}\delta_{x_j}, \quad \text{konventionell:} \quad Df = f' + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(0)}\delta(x-x_j).} \tag{2.5}$$

Durch schrittweises Vorgehen kann allgemein gezeigt werden:

$$D^k\mu_f = \mu_{f^{(k)}} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(k-1)}\delta_{x_j} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(k-2)}D\delta_{x_j} + \cdots + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(0)}D^{k-1}\delta_{x_j}. \tag{2.6}$$

**BSP. (8.2.5)** **Pseudo–Funktionen.** Wir betrachten hier speziell die $L^1_{loc}$–Funktion $f(x) := \ln|x|$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, die die reguläre Distribution $\mu_f\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ erzeugt. Zur Berechnung ihrer distributionellen Ableitung $D\mu_f$ gehen wir folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned} D\mu_f(\varphi) &= -\mu_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|\ge\epsilon}\ln|x|\varphi'(x)\,dx \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\epsilon}^{\infty}\ln x(\varphi'(x)+\varphi'(-x))\,dx \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \lim_{\epsilon\to 0+}\Big(\ln\epsilon(\varphi(\epsilon)-\varphi(-\epsilon)) + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx\Big), \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Gemäß dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung haben wir

$$\varphi(x)-\varphi(-x) = 2x\cdot\varphi'(\xi), \quad \xi\in(-x,x), \tag{2.7}$$

und somit wegen $\epsilon\ln\epsilon\to 0$ $(\epsilon\to 0+)$:

$$D\mu_f(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx =: \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Die Bezeichnung "Pf" steht für *partie finie* (endlicher Anteil) und wurde von J. Hadamard eingeführt. Andererseits resultiert bei Verwendung des Cauchy–Hauptwertes eines Integrals:

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|\ge\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx =: \mathop{\mathrm{H}}\!\!\!\!\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

wobei die Bezeichnung "vp" für *valeur principale* (Hauptwert) steht. Wir haben also

$$D\mu_f(\varphi) = \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}),$$

und dafür führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$\boxed{D\ln|x| = \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x} = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x},} \tag{2.8}$$

genannt die **Pseudo–Funktion** $\frac{1}{x}$ oder der **Hauptwert** von $\frac{1}{x}$.

**Bemerkung 8.4** Wegen (2.7) ist die Abbildung $\varphi \mapsto \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ zwar über $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ stetig, nicht aber über $C_0^0(\mathbf{R})$. Deshalb ist $D\ln|x|$ **kein** Maß auf $\mathbf{R}$, also eine singuläre Distribution.

**BSP. (8.2.6)** **Verallgemeinerter Greensscher Integralsatz.** Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein *beschränktes* Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand $\partial\Omega$, der in jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine eindeutig definierte *äußere* Einheitsnormale $\vec{n}(x)$ besitze. Für Funktionen $u, v \in C^2(\Omega) \cap \overline{C}^1(\Omega)$ gilt die klassische erste Greensche Formel

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx + \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle\,dx = \int_{\partial\Omega} u(x)(D_n v)(x)\,dS \tag{2.9}$$

mit dem Laplace–Operator $\Delta := \sum_{j=1}^{n} D_j^2$ und der Richtungsableitung

$$(D_n v)(x) := \lim_{\Omega \ni y \to x} \langle \nabla v(y), \vec{n}(x)\rangle, \quad x \in \partial\Omega.$$

Setzen wir nun $f \in C^2(\Omega) \cap \overline{C}^1(\Omega)$ außerhalb von $\overline{\Omega}$ durch 0 fort, so erzeugt $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ eine reguläre Distribution $\mu_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Indem wir die Identität (2.9) einmal mit $u := f$, $v := \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ und zum anderen mit $v := f$, $u := \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ aufschreiben und die beiden resultierenden Gleichungen voneinander abziehen, erhalten wir

$$(\Delta\mu_f)(\varphi) = \mu_{\Delta f}(\varphi) + \int_{\partial\Omega} f(x)(D_n\varphi)(x)\,dS - \int_{\partial\Omega} (D_n f)(x)\varphi(x)\,dS \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \tag{2.10}$$

Man nennt (2.10) den *verallgemeinerten* Greens*chen Integralsatz.*

---

## 8.3 Distributionen mit kompaktem Träger

Zum Verständnis des Trägerbegriffs einer Distribution ist es erforderlich, das Verhalten von Distributionen bei Einschränkung auf offene Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ zu erläutern.

**Definition 8.9** *Seien $\Omega$, $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ offene Teilmengen mit $\Omega \subset \Omega_0$. Zu gegebenem $T \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ heiße $T_\Omega$ die* **Einschränkung** *von $T$ auf $\Omega$, wenn gilt:*

$$\boxed{T_\Omega(\varphi) = T(\varphi_0) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{3.1}$$

*Dabei bezeichnet $\varphi_0$ die Fortsetzung von $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ auf $\Omega_0$ durch 0.*

**Bemerkung 8.5** (a) Ist $\Omega$ in $\Omega_0$ dicht enthalten, so können zwei *verschiedene* Distributionen aus $\mathcal{D}'(\Omega_0)$ im Gegensatz zum Fall stetiger Funktionen *dieselbe* Einschränkung auf $\Omega$ haben.

Denn ist beispielsweise $x_0 \in \Omega_0$ und $\Omega := \Omega_0 \backslash \{x_0\}$, so haben die Nulldistribution $T = 0$ und das DIRAC–Maß $\delta_{x_0}$ dieselbe Einschränkung auf $\Omega$.

(b) Nicht jede Distribution aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist die Einschränkung einer Distribution aus $\mathcal{D}'(\Omega_0)$ auf $\Omega$.

Als Gegenbeispiel betrachten wir $\Omega_0 := \mathbf{R}$ und $\Omega := \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Die Funktion $f(x) := e^{-1/x}$, $x \in \Omega$, ist eine $L^1_{loc}$–Funktion und erzeugt als solche eine reguläre Distribution $\mu_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diese ist jedoch keine Einschränkung einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ auf $\Omega$.

Ein Kriterium über die "Wiedererkennung" einer Distribution an Hand ihrer Einschränkung vermittelt der folgende

**Satz 8.7** *Gegeben seien eine offene Menge $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ und ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum $X$ von Funktionen über $\Omega$ mit stetiger Einbettung*

$$\boxed{\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow X.} \tag{3.2}$$

*Dann ist die Einschränkung $T := \tilde{T}|\mathcal{D}(\Omega)$ jedes stetigen linearen Funktionals $\tilde{T} : X \to \mathbf{K}$ eine Distribution: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

*Beweis:* Klar, da $\tilde{T}$ auch auf dem Unterraum $\mathcal{D}(\Omega) \subset X$ linear ist, liegt mit $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ ein lineares Funktional vor. Ist $Id_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}(\Omega) \to X$ der Einbettungsoperator der Einbettung (3.2), so gilt $T = \tilde{T} \circ Id_{\mathcal{D}}$, und diese Abbildung ist als Hintereinanderausführung zweier stetiger Abbildungen selbst stetig. Somit gilt $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. □

**Definition 8.10** *Seien $\Omega, \Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ offene Teilmengen mit $\Omega \subset \Omega_0$. Ist die Einschränkung $T_\Omega$ von $T \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ auf $\Omega$ die Nulldistribution: $T_\Omega(\varphi) = T(\varphi) = 0 \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, so sagen wir, $T$* **verschwindet auf** *$\Omega$.*

Für Distributionen gilt das folgende *Lokalisierungsprinzip:*

**Satz 8.8** *Gegeben sei ein System $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0} \subset \mathbf{R}^n$ beschränkter und offener Teilmengen der offenen Menge $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$. Verschwindet $T \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ auf jedem $\Omega_\lambda$, so auch auf $\Omega := \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda_0} \Omega_\lambda$.*

*Beweis:* Wir betrachten $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wegen $K := \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega$ gibt es eine endliche Teilmenge $\Lambda \subset \Lambda_0$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$. Wir bestimmen gemäß Satz 5.7 eine endliche Zerlegung der Eins $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ für die kompakte Teilmenge $K$ mit $\psi_\lambda \in C_0^\infty(\Omega_\lambda)$ und $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x) = 1 \ \forall\ x \in K$. Wegen $\varphi\psi_\lambda \in \mathcal{D}(\Omega_\lambda)$ gilt nach Voraussetzung $T(\varphi\psi_\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda$, und somit auch

$$T(\varphi) = \sum_{\lambda\in\Lambda} T(\varphi\psi_\lambda) = 0.$$

Also verschwindet $T$ auf $\Omega$. □

**Folgerung 8.4** *Für das System* $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0} \subset \mathbf{R}^n$ *beschränkter und offener Teilmengen der offenen Menge* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *gelte* $\Omega = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} \Omega_\lambda$. *Stimmen die Einschränkungen zweier Distributionen* $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *auf jedem* $\Omega_\lambda$ *überein, so folgt* $T_1 = T_2$.

Denn $T := T_1 - T_2$ verschwindet auf jedem $\Omega_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_0$, so daß $T$ gemäß Satz 8.8 die Nulldistribution sein muß. □

Wir sind nun in der Lage, den **Träger** einer Distribution $T$ in befriedigender Weise zu definieren.

**Definition 8.11** *Es sei* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Die Menge*

$$\boxed{\operatorname{supp} T := \{x \in \overline{\Omega} \,:\, \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \cap B_\epsilon(x)) \;\; \textit{mit} \;\; T(\varphi) \neq 0\}} \tag{3.3}$$

*heiße der* **Träger** *von* $T$. *Gilt* $\operatorname{supp} T \subset\subset \Omega$, *so habe die Distribution* $T$ *einen* **kompakten Träger** *in* $\Omega$.

**Folgerung 8.5** (a) *Das Komplement* $(\operatorname{supp} T)^c = \mathbf{R}^n \setminus \operatorname{supp} T$ *ist offen.*

Wegen $\operatorname{supp} T \subset \overline{\Omega}$ gilt sicher $\big(\overline{\Omega}\big)^c \subset (\operatorname{supp} T)^c$, und diese Teilmenge ist bereits offen. Sei hingegen $x \in (\operatorname{supp} T)^c \cap \overline{\Omega}$. Dann gibt es wegen (3.3) ein $\epsilon > 0$ mit $T(\varphi) = 0 \;\forall\, \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\epsilon(x)\big)$. Die nichtleere Menge $U := \Omega \cap B_\epsilon(x)$ ist eine Umgebung von $x$. Wir zeigen, daß jeder Punkt $y \in U$ in $(\operatorname{supp} T)^c$ liegt. Dann haben wir bereits die Behauptung bewiesen. In der Tat, weil $U$ offen ist, gibt es zu jedem $y \in U$ eine offene $\delta$–Kugel $B_\delta(y) \subset U$, und für diese gilt $T(\varphi) = 0 \;\forall\, \varphi \in \mathcal{D}\big(B_\delta(y)\big)$. Also ist $y \in (\operatorname{supp} T)^c$. □

(b) $\operatorname{supp} T \subset \mathbf{R}^n$ *ist abgeschlossen.*

Klar, denn $\operatorname{supp} T$ ist gemäß (a) das Komplement einer offenen Menge. □

(c) $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$ *für jedes* $x_0 \in \Omega$.

Denn ist $x \in \overline{\Omega}$ mit $x \neq x_0$ gegeben und setzen wir $\epsilon := |x - x_0|$, so gilt $x_0 \notin B_\epsilon(x)$. Folglich ist $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = 0 \;\forall\, \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\epsilon(x)\big)$, und somit $x \in (\operatorname{supp} \delta_{x_0})^c$. □

(d) *Ist* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *so gilt* $\operatorname{supp} \mu_f \subset \operatorname{supp} f$ *für die von* $f$ *erzeugte reguläre Distribution* $\mu_f$.

Gäbe es ein $x \in \operatorname{supp} \mu_f \subset \overline{\Omega}$ mit $x \in (\operatorname{supp} f)^c$, so existierte wegen der Offenheit von $(\operatorname{supp} f)^c$ auch eine offene $\delta$–Kugel $B_\delta(x)$ mit $f(y) = 0 \;\forall\, y \in B_\delta(x)$. Wir hätten dann

$$\mu_f(\varphi) = \int_\Omega f(y)\varphi(y)\,dy = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\delta(x)\big),$$

im Widerspruch zu (3.3). □

(e) *Gilt* $f \in C(\Omega)$, *so ist* $\operatorname{supp} \mu_f = \operatorname{supp} f$.

Wegen (d) brauchen wir nur noch $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} \mu_f$ zu zeigen und betrachten dazu einen beliebigen Punkt $x \in \operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$. Da $x$ Berührpunkt der wegen der vorausgesetzten Stetigkeit offenen Menge $O := \{y \in \Omega : \operatorname{Re} f(y) \neq 0\}$ ist, sind die Schnitte $B_\epsilon(x) \cap O$ für jedes $\epsilon > 0$ nichtleer und offen. Mit jedem Punkt $y$ liegt dann jeweils auch eine offene $\delta$–Kugel $B_\delta(y)$ in $B_\epsilon(x) \cap O$. Ist nun $\tau \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\epsilon(x)\big)$ die Abschneidefunktion bezüglich $\{\overline{B_{\delta/2}(y)}, B_\delta(y)\}$ aus Satz 5.6, so gilt offenbar

$$\mu_f(\tau) = \int\limits_{\operatorname{supp}\tau} f(y)\tau(y)\,dy \neq 0.$$

Somit haben wir auch $x \in \operatorname{supp} \mu_f$ gemäß (3.3), und die Behauptung (e) ist bewiesen. □

Wir zeigen nachfolgend, daß die stetigen linearen Funktionale auf dem in BSP.(7.2.1) eingeführten FRÉCHET–Raum $\mathcal{E}(\Omega) := \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ genau mit denjenigen Distributionen identifiziert werden können, die kompakten Träger in $\Omega$ haben. Wir bereiten einen entsprechenden Beweis mit mehreren Sätzen vor.

**Satz 8.9** *Eine Teilmenge $M \subset \mathcal{E}(\Omega)$ ist genau dann beschränkt, wenn gilt:*

$$\boxed{\forall\, K \subset \Omega \text{ kompakt } \forall\, r \in \mathbf{N}_0\ \exists\, C < \infty : \max_{0 \le |\rho| \le r} \sup_{x \in K} |D^\rho f(x)| \le C\ \forall\, f \in M.} \tag{3.4}$$

*Beweis:* Gemäß Definition 8.2 ist $M \subset \mathcal{E}(\Omega)$ genau dann beschränkt, wenn $M$ von jeder Nullumgebung $V_{K,r,\epsilon}(0) := \{f \in \mathcal{E}(\Omega) : p_{K,r}(f) < \epsilon\}$ absorbiert wird, wobei die Halbnorm–Familie $\{p_{K,r}\}_{K \subset\subset \Omega, r \in \mathbf{N}_0}$ durch (2.1), Abschnitt 7.2 definiert ist. Das heißt, zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$, jedem $r \in \mathbf{N}_0$ und zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $\lambda > 0$ mit $M \subset \lambda\, V_{K,r,\epsilon}(0)$, also mit

$$p_{K,r}(f) = \max_{0 \le |\rho| \le r} \sup_{x \in K} |D^\rho f(x)| < \lambda\epsilon \quad \forall\, f \in M.$$

Dies ist aber äquivalent mit (3.4). □

**Satz 8.10** *Ein lineares Funktional $T : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{K}$ ist genau dann stetig, wenn $T$ auf jeder beschränkten Teilmenge $M \subset \mathcal{E}(\Omega)$ beschränkt ist.*

*Beweis:* Ist $T$ stetig, so ist $T$ gemäß Satz 8.2 auch beschränkt auf jeder beschränkten Teilmenge $M \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Bildet $T$ umgekehrt jedes beschränkte $M \subset \mathcal{E}(\Omega)$ in eine beschränkte Teilmenge $T(M) \subset \mathbf{K}$ ab, so können wir die Argumente aus dem Beweis des Satzes 8.4 auf den FRÉCHET–Raum $\mathcal{E}(\Omega)$ übertragen und daraus die Stetigkeit von $T$ folgern. □

**Satz 8.11** *Gegeben sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger in $\Omega$. Dann existiert genau ein stetiges lineares Funktional $\tilde{T} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{K}$ mit $T = \tilde{T}|\mathcal{D}(\Omega)$ und mit $\tilde{T}(f) = 0$ für jedes $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, welches* $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ *erfüllt.*

*Beweis:* Die Menge $K := \operatorname{supp} T \subset\subset \Omega$ ist kompakt. Für $\delta < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ setzen wir $K_\delta := \overline{\bigcup_{x \in K} B_\delta(x)}$ und bestimmen eine Abschneidefunktion $\tau$ bezüglich $\{K_\delta, \Omega\}$ gemäß Satz 5.6. Wir setzen

$$\tilde{T}(f) := T(\tau f) \quad \forall\, f \in \mathcal{E}(\Omega),$$

und diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion $\tau$. Denn für jede weitere Abschneidefunktion $\tau_1$ bezüglich $\{K_{\tilde{\delta}}, \Omega\}$ gilt $(\tau - \tau_1)f \in \mathcal{D}(\Omega)$ sowie $(\tau - \tau_1)f = 0$ auf $K$. Daraus folgt $T(\tau f) - T(\tau_1 f) = T\big((\tau - \tau_1)f\big) = 0\ \forall\, f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Nun sei $M \subset \mathcal{E}(\Omega)$ eine beschränkte Menge. Mit Hilfe der LEIBNIZschen Differentiationsregel Satz 5.8 und mit (3.4) erkennt man, daß die Menge $\tau M := \{\tau f : f \in M\}$ eine beschränkte Teilmenge auch von $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Wegen Satz 8.4 ist somit $T(\tau M) = \tilde{T}(M) \subset \mathbf{K}$ beschränkt und folglich $\tilde{T} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{K}$ gemäß Satz 8.10 stetig. Betrachten wir noch $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ und wählen dazu eine Abschneidefunktion $\tau$ bezüglich $\{K_\delta, \Omega\}$ so, daß $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \tau = \emptyset$ gilt, so haben wir $\tilde{T}(f) = T(\tau f) = 0$. Um schließlich die Eindeutigkeit von $\tilde{T}$ zu beweisen, sei zu $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ die kompakte Teilmenge $K_1 \subset \Omega$ gemäß $K_1 := \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} T$ definiert. Sei $\tau$ eine Abschneidefunktion bezüglich $\{K_1, \Omega\}$. Setzen wir $f_0 := \tau f \in \mathcal{D}(\Omega)$ sowie $f_1 := (1 - \tau)f$, so gelten $f = f_0 + f_1$ und $\operatorname{supp} f_1 \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$. Wären $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$ zwei Fortsetzungen von $T$ mit den im Satz geforderten Eigenschaften, so hätten wir

$$\tilde{T}_1(f) - \tilde{T}_2(f) = \tilde{T}_1(f_0 + f_1) - \tilde{T}_2(f_0 + f_1) = \tilde{T}_1(f_0) - \tilde{T}_2(f_0) = T(f_0) - T(f_0) = 0\ \forall\, f \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Dies ist die behauptete Eindeutigkeit. □

In Umkehrung von Satz 8.11 gilt auch:

**Satz 8.12** *Gegeben sei ein stetiges lineares Funktional $\tilde{T} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{K}$. Dann ist die Restriktion $T := \tilde{T}|\mathcal{D}(\Omega)$ eine Distribution mit kompaktem Träger in $\Omega$.*

*Beweis:* Die Einbettung $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ ist wegen Satz 7.15(b) stetig. Somit folgt aus Satz 8.7 bereits $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, und wir brauchen nur noch die Kompaktheit des Trägers von $T$ zu zeigen. Dazu betrachten wir wie in Folgerung 7.1(a) eine Ausschöpfung $\{K_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ von $\Omega$ mit kompakten Teilmengen $K_j \subset \Omega$:

$$K_j \subset K_{j+1}^o \ \forall\, j \in \mathbf{N}, \qquad \Omega = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} K_j.$$

Wäre $\operatorname{supp} T$ nicht in $\Omega$ kompakt enthalten, so würde $T$ auf keiner der offenen Mengen $K_j^c := \Omega \setminus K_j$ verschwinden. Denn andernfalls gäbe es ein $K_N$ mit $K_N^c \subset (\operatorname{supp} T)^c$. Im Widerspruch zur Annahme hätten wir dann $\operatorname{supp} T \subset K_N$. Demzufolge existiert für jedes $k \in \mathbf{N}$ ein $\varphi_k \in \mathcal{D}(K_k^c)$ mit $T(\varphi_k) = 1$. Halten wir $j \in \mathbf{N}$ fest, so haben wir $K_j \cap K_k^c = \emptyset \ \forall\, k > j$ und somit

$$\lim_{k\to\infty} p_{K_j,m}(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \max_{0\le|\rho|\le m} \sup_{x\in K_j} \left|D^\rho \varphi_k(x)\right| = 0 \ \forall\, j \in \mathbf{N} \ \forall\, m \ge 0.$$

Gemäß Folgerung 7.1(a)–(c) bedeutet dies $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$, also auch $\lim\limits_{k\to\infty} |T(\varphi_k)| = \lim\limits_{k\to\infty} |\tilde{T}(\varphi_k)| = 0$, im Widerspruch zu $|T(\varphi_k)| = 1$. □

Zusammenfassend haben wir das folgende Ergebnis:

**Satz 8.13** *Die Menge aller Distributionen $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} T \subset\subset \Omega$ bildet genau den topologischen Dualraum $\mathcal{E}'(\Omega)$, das heißt den Raum der stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{E}(\Omega)$. Genau dann ist ein lineares Funktional $T : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{K}$ in $\mathcal{E}'(\Omega)$, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ und Zahlen $m \in \mathbf{N}_0$, $C < \infty$ gibt mit*

$$\boxed{|T(f)| \le C \cdot \max_{0\le|\rho|\le m} \sup_{x\in K} |D^\rho f(x)| \quad \forall\, f \in \mathcal{E}(\Omega).} \tag{3.5}$$

Abschließend zeigen wir noch, daß sich der kompakte Träger einer Distribution bei Differentiation nicht vergrößern kann.

**Satz 8.14** *Für $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ bezeichne $K := \operatorname{supp} T$ den kompakten Träger der Distribution $T$. Dann gilt $\operatorname{supp} D^\rho T \subset K$ für alle $\rho \in \mathbf{N}_0^n$.*

*Beweis:* Setzen wir $K^c := \Omega \setminus \operatorname{supp} T$, so gilt nach Voraussetzung $T(\varphi) = 0 \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(K^c)$, und somit auch für jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$:

$$\big(D^\rho T\big)(\varphi) = (-1)^{|\rho|} T(D^\rho \varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(K^c),$$

wobei wir die Gültigkeit von $D^\rho \varphi \in \mathcal{D}(K^c)$ verwendet haben. □

---

## 8.4 Elementare Operationen auf Distributionen

Distributionen zeichnen sich dadurch aus, daß man in vielen Fällen mit ihnen leichter rechnen kann als mit Funktionen. Wir hatten diese Feststellung bereits am Beispiel der Differentiation auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ getroffen. Eine weitere stetige Operation auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist die Multiplikation mit $C^\infty$–Funktionen.

**Definition 8.12** *Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und eine Funktion $a \in C^\infty(\Omega)$ sei das* **Produkt** *von $a$ mit $T$ wie folgt erklärt:*

$$\boxed{(aT)(\varphi) := T(a\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{4.1}$$

Wir haben nach dieser Definition für jedes $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und für die durch $f$ erzeugte reguläre Distribution $\mu_f$ sowie für jedes $a \in C^\infty(\Omega)$:

$$(a\mu_f)(\varphi) := \mu_f(a\varphi) = \int_\Omega f(x)a(x)\varphi(x)\,dx = \mu_{(af)}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Das Produkt $a\mu_f$ ist wieder eine (reguläre) Distribution.

Dieser Zusammenhang gilt allgemeiner:

**Satz 8.15** *Gegeben seien $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $a \in C^\infty(\Omega)$. Dann folgt:*

(a) *$aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$, und die Abbildung $\mathcal{D}'(\Omega) \ni T \mapsto aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist folgenstetig.*

(b) *Es gilt die* Leibnizsche *Differentiationsregel*

$$\boxed{D^\rho(aT) = \sum_{\sigma \le \rho} \binom{\rho}{\sigma} (D^\sigma a)(D^{\rho-\sigma}T) \quad \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n,} \tag{4.2}$$

*wobei der Multinomialkoeffizient $\binom{\rho}{\sigma}$ wie in* Satz 5.5 *erklärt ist.*

(c) $\operatorname{supp}(aT) = \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$.

*Beweis:* (a) Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt auch $a\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Man verifiziert ohne Schwierigkeit, daß aus $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ die Konvergenz $a\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ folgt. Somit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \big|aT(\varphi_k)\big| = \lim\limits_{k\to\infty} \big|T(a\varphi_k)\big| = 0$, und wir haben bereits $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gezeigt. Ist ferner eine Folge $\big(T_k\big)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $T_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gegeben, so folgt nun auch noch

$$\lim_{k\to\infty} \big|aT_k(\varphi) - aT(\varphi)\big| = \lim_{k\to\infty} \big|T_k(a\varphi) - T(a\varphi)\big| = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

also $aT_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} aT$. Dies belegt die Folgenstetigkeit der Abbildung $T \mapsto aT$.
(b) Für jeden Index $1 \le j \le n$ und jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ haben wir

$$\begin{aligned} \big(aD_jT\big)(\varphi) &\overset{(4.1)}{=} \big(D_jT\big)(a\varphi) = -T\big(D_j(a\varphi)\big) = -T(\varphi D_j a + aD_j\varphi) \\ &\overset{(4.1)}{=} -\big((D_ja)T\big)(\varphi) - (aT)(D_j\varphi) = -\big((D_ja)T\big)(\varphi) + D_j\big(aT\big)(\varphi). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Produktregel

$$D_j(aT) = (D_ja)T + a(D_jT), \tag{4.3}$$

und durch iterative Anwendung von (4.3) gewinnt man nun die behauptete Differentiationsregel (4.2).
(c) Wir zeigen zunächst die Inklusion $\operatorname{supp}(aT) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$. Dazu sei $x \in \operatorname{supp}(aT)$ vorgegeben, d.h.

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\epsilon(x)\big)\ :\ T(a\varphi) \neq 0. \tag{4.4}$$

Wäre $x \notin \operatorname{supp} a$, so gäbe es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset (\operatorname{supp} a)^c$, und wir hätten $a\varphi = 0$, also auch $T(a\varphi) = 0\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\delta(x)\big)$, im Widerspruch zu (4.4). Wäre andererseits $x \notin \operatorname{supp} T$, so gäbe es in gleicher Weise ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset (\operatorname{supp} T)^c$. Es wäre dann $a\varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\delta(x)\big)\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\delta(x)\big)$, und wir hätten gemäß (3.3) $T(a\varphi) = 0$, was ebenfalls (4.4) widerspricht. Somit folgt $x \in \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$. Zum Beweis der

Inklusion $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T \subset \operatorname{supp}(aT)$ betrachten wir $x \in \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$ und nehmen $x \in \big(\operatorname{supp}(aT)\big)^c$ an. Dann folgt aus (4.4) die Existenz einer Zahl $\delta > 0$ mit $T(a\varphi) = 0 \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\delta(x)\big)$. Wegen $x \in \operatorname{supp} T$ folgt daraus $a\varphi = 0 \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\delta(x)\big)$. Da $x \in \operatorname{supp} a$ ein Berührpunkt der offenen Menge $O := \{y \in \Omega : a(y) \neq 0\}$ ist, haben wir $B_\delta(x) \cap O \neq \emptyset$. Für eine Abschneidefunktion $\tau \in \mathcal{D}\big(\Omega \cap B_\delta(x)\big)$ mit $\tau = 1$ auf $\overline{B_\delta(x) \cap O}$ hätten wir den Widerspruch $a\tau \neq 0$. Somit folgt auch $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T \subset \operatorname{supp}(aT)$. □

Wir zeigen jetzt, daß die distributionelle Differentialgleichung $D^k T = 0$ im Falle $n = 1$ nur polynomiale Lösungen vom Grade $k-1$ besitzt.

**Satz 8.16** *Sei $I := (a,b)$ ein Intervall mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dann gilt:*

(a) *Die Gleichung $DT = 0$ besitzt nur die von der Konstanten $c$ erzeugte reguläre Distribution $T = \mu_c \in \mathcal{D}'(I)$ als Lösung.*

(b) *Jede Distribution $T \in \mathcal{D}'(I)$ mit $D^k T = 0$ ist ein Polynom vom Grade $k-1$.*

*Beweis:* (a) Klar, für $\mu_c \in \mathcal{D}'(I)$ gilt $D\mu_c(\varphi) = -c\int_a^b \varphi'(t)\,dt = c\big(\varphi(a) - \varphi(b)\big) = 0 \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(I)$. Nun sei umgekehrt $DT = 0$. Es sei $\omega \in \mathcal{D}(I)$ mit $\int_I \omega(t)\,dt = 1$ gegeben. Wir konstruieren zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ die Funktion

$$\psi(x) := \int_a^x \Big(\varphi(t) - \omega(t)\int_I \varphi(\tau)\,d\tau\Big)\,dt.$$

Dann gilt $\psi \in \mathcal{D}(I)$ sowie

$$0 = DT(\psi) = -T(\psi') = -T(\varphi) + T(\omega)\int_I \varphi(\tau)\,d\tau.$$

Setzen wir $c := T(\omega)$, so haben wir

$$T(\varphi) = c\int_I \varphi(\tau)\,d\tau = \mu_c(\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

(b) Die Differentialgleichung $D^2 T = 0$ führt nach (a) zu $DT = \mu_c$. Offensichtlich ist $T_1 := x\mu_c = \mu_{cx}$ eine Lösung, denn es gilt gemäß (4.3)

$$D(x\mu_c) = \mu_c + x(D\mu_c) \overset{\text{(a)}}{=} \mu_c.$$

Für jede weitere Lösung $T$ setzen wir $V := T - T_1$ und erhalten $DV = 0$, also $V = \mu_b$. Somit haben wir $T = T_1 + V = x\mu_c + \mu_b = \mu_{(cx+b)}$. Durch Iteration gewinnt man die im Satz behauptete Aussage. □

Im folgenden Satz werden diejenigen Distributionen charakterisiert, deren Träger aus genau einem Punkt besteht.

**Satz 8.17** *Seien $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $a \in \Omega$ mit $\operatorname{supp} T = \{a\}$ gegeben. Dann gibt es Zahlen $m \in \mathbf{N}_0$ und $a_\rho \in \mathbf{K}$ mit*

$$\boxed{T = \sum_{|\rho| \leq m} a_\rho D^\rho \delta_a.} \tag{4.5}$$

*Beweis:* Wegen $T \in \mathcal{E}(\Omega)$ existieren gemäß Satz 8.13 eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ mit $a \in K$ sowie Zahlen $m \in \mathbf{N}_0$ und $C < \infty$ mit

$$|T(f)| \leq C \cdot \max_{0 \leq |\rho| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\rho f(x)| \quad \forall\ f \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{4.6}$$

Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ an und setzen unter Verwendung der Glättungsfunktion $\omega$ aus (9.2), Abschnitt 4.9 für $\delta > 0$:

$$\psi_\delta(x) := \int\limits_{|y|>\delta} \omega_{\delta/2}(x-y)\,dy = \frac{2^n}{\delta^n} \int\limits_{|y|>\delta} \omega\Big(2\,\frac{x-y}{\delta}\Big)\,dy, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{4.7}$$

Dann gilt offenbar $0 \le \psi_\delta \le 1$, $\psi_\delta = 0$ auf $B_{\delta/2}(0)$ sowie $\psi_\delta(x) = 1$ für $|x| \ge 2\delta$. Wie im Beweis von Satz 5.6 gezeigt wurde, haben wir ferner

$$|D^\rho \psi_\delta(x)| \le c_\rho \delta^{-|\rho|} \quad (\delta \to 0+) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n \ \ \forall\, |\rho| \ge 1. \tag{4.8}$$

Hierin ist $c_\rho$ eine von $\delta$ unabhängige Konstante. Es sei jetzt $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $|\varphi(x)| \le C\,|x|^{m+1}$ gegeben, wobei $m$ dieselbe Zahl ist wie in (4.6). Es gilt nun $T(\varphi\psi_\delta) = 0$ wegen $\operatorname{supp} T = \{0\}$, und folglich auch

$$\big|T(\varphi)\big| = \big|T\big(\varphi(1-\psi_\delta)\big)\big|.$$

Unter Verwendung der LEIBNIZschen Differentiationsregel erhalten wir für jeden Multiindex $|\rho| \le m$:

$$\sup_{x\in\Omega} \big|D^\rho\big(\varphi(x)(1-\psi_\delta(x))\big)\big| \le C_1 \sum_{|\alpha|+|\beta|\le m} \sup_{|x|\le 2\delta} \big|D^\alpha\varphi(x)\big| \sup_{|x|\le 2\delta} \big|D^\beta\big(1-\psi_\delta(x)\big)\big|$$

für jedes $0 < \delta \le \delta_0$ bei fester Wahl von $\delta_0 > 0$. Unter den gestellten Hypothesen ist

$$\sup_{|x|\le 2\delta} \big|D^\alpha\varphi(x)\big| \le C_2\,\delta^{m+1-|\alpha|} \quad \text{und} \quad \sup_{|x|\le 2\delta} \big|D^\beta\big(1-\psi_\delta(x)\big)\big| \le C_3\,\delta^{-|\beta|},$$

so daß die Abschätzung (4.6) schließlich auf

$$\big|T(\varphi)\big| = \big|T\big(\varphi(1-\psi_\delta)\big)\big| \le C_4\,\delta, \qquad \delta \le \delta_0,$$

führt. Daraus folgt $T(\varphi) = 0$ für die nach obiger Vorschrift speziell gewählte Funktion $\varphi$. Ist hingegen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ beliebig und $\tau \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Abschneidefunktion bezüglich $\{\overline{B_\epsilon(0)}, \Omega\}$, so erhalten wir zunächst durch TAYLOR–Entwicklung von $\varphi$ bei $x = 0$:

$$\varphi(x) = \sum_{|\rho|\le m} a_\rho\big(D^\rho\varphi\big)(0)\,x^\rho + \varphi_1(x) =: \varphi_0(x) + \varphi_1(x).$$

Wir haben $\tau\varphi_0, \tau\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, und für den LAGRANGE–Rest $\varphi_1$ gilt die Abschätzung $|(\tau\varphi_1)(x)| \le K_1\,|x|^{m+1}$. Somit folgt $T(\tau\varphi_1) = 0$ sowie

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= T(\tau\varphi) = T(\tau\varphi_0) = \sum_{|\rho|\le m} a_\rho\big(D^\rho\varphi\big)(0)\,T(x^\rho\tau) =: \sum_{|\rho|\le m} b_\rho\big(D^\rho\varphi\big)(0) \\ &= \sum_{|\rho|\le m} b_\rho(-1)^{|\rho|}\big(D^\rho\delta\big)(\varphi). \end{aligned}$$

Daraus resultiert die Behauptung des Satzes. □

---

## 8.5 Tensorprodukte

Für lineare Abbildungen über geeignet gewählten Funktionenräumen ist häufig eine Hintereinanderausführung sinnvoll erklärt; wir erinnern an das Beispiel der BANACH–Algebra $B(X)$ über einem BANACH–Raum $X$. In diesem Abschnitt wollen wir die Frage nach der Hintereinanderausführung von Distributionen erörtern. Die folgenden Beispiele mögen der Motivation dienen.

**BSP. (8.5.1)** Für $p,q \in \mathbf{N}$ und für Funktionen $f \in L^1(\mathbf{R}^p)$, $g \in L^1(\mathbf{R}^q)$ sind $\mu_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ und $\mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$ reguläre Distributionen. Wir betrachten Funktionen $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ dergestalt, daß die Integrale

$$\mu_f(\varphi)(y) := \int_{\mathbf{R}^p} f(x)\varphi(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad \mu_g(\varphi)(x) := \int_{\mathbf{R}^q} g(y)\varphi(x,y)\,dy$$

wiederum Funktionen $\mu_f(\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q)$ bzw. $\mu_g(\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ liefern, was sicher der Fall ist, wenn $\varphi(x,y) = \psi(x)\cdot\tau(y)$ mit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ und $\tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q)$ gilt. Unter dieser Prämisse sind die Komposita $\mu_f \circ \mu_g$ und $\mu_g \circ \mu_f$ auf allen so gearteten Funktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ im Distributionensinn wohldefiniert. Ist andererseits $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ beliebig vorgegeben, so existiert wegen

$$\int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} |f(x)|\cdot|g(y)|\cdot|\varphi(x,y)|\,dx\,dy \le \|f\|_{1;\mathbf{R}^p}\cdot\|g\|_{1;\mathbf{R}^q}\cdot \sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^{p+q}} |\varphi(x,y)| < \infty \tag{5.1}$$

ein lineares Funktional $\mu_j \circ \mu_g : \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}) \to \mathbf{K}$, und aus dem FUBINIschen Vertauschungssatz 4.30 folgt

$$\begin{aligned}(\mu_f\circ\mu_g)(\varphi) &= \mu_f(\mu_g(\varphi)) = \int\limits_{\mathbf{R}^p} f(x)\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^q} g(y)\varphi(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^q} g(y)\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^p} f(x)\varphi(x,y)\,dx\Big)\,dy\\ &= (\mu_g\circ\mu_f)(\varphi) \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}).\end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^{p+q}$ analog zu (5.1):

$$|(\mu_f\circ\mu_g)(\varphi)| \le \|f\|_{1;\mathbf{R}^p}\cdot\|g\|_{1;\mathbf{R}^q}\cdot\sup_{(x,y)\in K}|\varphi(x,y)| = C\cdot p_{K,0}(\varphi) \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^{p+q}).$$

Aus dem Satz 8.1 erhalten wir, daß $\mu_f\circ\mu_g = \mu_g\circ\mu_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$ eine Distribution ist. Diese wird das **Tensorprodukt** der Distributionen $\mu_f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ und $\mu_g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q)$ genannt.

**BSP. (8.5.2)** Für $T =: T_x \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ und $\delta =: \delta_y \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$ ist wegen $\delta_y(\varphi(x,y)) = \varphi(x,0) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ sicher das lineare Funktional $T\circ\delta : \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}) \to \mathbf{K}$ wohldefiniert. Wegen Satz 8.1 gibt es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^{p+q}$ Zahlen $C < \infty$ und $m \in \mathbf{N}_0$ mit

$$\begin{aligned}|(T_x\circ\delta_y)(\varphi)| &= |T(\varphi(x,0))| \le C\cdot\max_{0\le|\rho|\le m}\sup_{x\in K\cap\mathbf{R}^p}|D_x^\rho\varphi(x,0)|\\ &\le C\cdot\max_{0\le|\rho|+|\sigma|\le m}\sup_{(x,y)\in K}|D_x^\rho D_y^\sigma\varphi(x,y)| \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^{p+q}).\end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum die Existenz des Tensorproduktes $T\circ\delta \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$ von $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ und $\delta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q)$. Da es zunächst unklar ist, ob auch mit $\delta\circ T$ eine Distribution vorliegt, können wir hier noch nicht wie in BSP.(8.5.1) die Kommutativität $T\circ\delta = \delta\circ T$ belegen.

Für eine Verallgemeinerung des Konzepts, welches den beiden Beispielen (8.5.1) und (8.5.2) zugrundeliegt, benötigen wir eine Aussage über die Funktionseigenschaften von $T_x(\varphi(x,\cdot))$ bzw. von $S_y(\varphi(\cdot,y))$ für Elemente $T = T_x \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ und $S = S_y \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$ sowie für $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$.

**Satz 8.18** *Es seien Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ und $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$ sowie eine Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ vorgegeben.*

(a) *Für $\psi(x) := S_y(\varphi(x,y))$ und $\tau(y) := T_x(\varphi(x,y))$ gelten $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ sowie $\tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q)$.*

(b) *Die folgenden Abbildungen sind linear und stetig:*

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}) \ni \varphi \mapsto \begin{cases} \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p), \\ \tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q). \end{cases}$$

*Beweis:* Wir brauchen die Aussagen offenbar nur für die Funktion $\psi$ zu beweisen und betrachten dazu ein festes $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$. Wird $x \in \mathbf{R}^p$ fixiert, so gilt sicher $\varphi(x,\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q)$. Somit ist $\psi(x) = S_y\big(\varphi(x,y)\big)$ wohldefiniert. Nun ist $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbf{R}^{p+q}$ beschränkt. Demzufolge gilt $\varphi(x,y) = 0$ für alle $|x| \geq R$ und alle $y \in \mathbf{R}^q$ bei geeigneter Wahl von $R > 0$. Es folgt also $\psi(x) = 0 \ \forall\ |x| \geq R$, das heißt $\psi$ hat beschränkten Träger in $\mathbf{R}^p$. Nun zeigen wir die Stetigkeit von $\psi$. Für jede Nullfolge $\big(h_k\big)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^p$, $|h_k| \to 0$, setzen wir $\varphi_k(x,y) := \varphi(x+h_k, y)$, $k \in \mathbf{N}$. Dann gilt $\varphi_k \overset{\mathcal{D}_{p+q}}{\to} \varphi$ und somit auch $\varphi_k(x,\cdot) \overset{\mathcal{D}_q}{\to} \varphi(x,\cdot)$ für jedes feste $x \in \mathbf{R}^p$. Wegen der Stetigkeit des Funktionals $S : \mathcal{D}(\mathbf{R}^q) \to \mathbf{K}$ ergibt sich daraus

$$\lim_{k\to\infty} \big|\psi(x+h_k) - \psi(x)\big| = \lim_{k\to\infty} \big|S_y\big(\varphi_k(x,y)\big) - S_y\big(\varphi(x,y)\big)\big| = 0 \quad \forall\ x \in \mathbf{R}^p.$$

Somit ist $\psi$ auf $\mathbf{R}^p$ stetig. Wir zeigen nun

$$\big(D^\rho\psi\big)(x) = S_y\big(D_x^\rho\varphi(x,y)\big) \quad \forall\ \rho \in \mathbf{N}_0^p \tag{5.2}$$

und betrachten dazu nur $\rho = (1,0,\ldots,0)$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt für $h_k := (\epsilon_k, 0, \ldots, 0)$, $0 < |\epsilon_k| \to 0$, und für reellwertiges $\varphi$ bei passend gewähltem $\vartheta \in (0,1)$:

$$\frac{1}{\epsilon_k}\big(\varphi(x+h_k,y) - \varphi(x,y)\big) = D^\rho\varphi(x+\vartheta h_k, y) =: \tilde\varphi_k(x,y), \quad \tilde\varphi_k \overset{\mathcal{D}_{p+q}}{\to} D^\rho\varphi.$$

Wird hier $x \in \mathbf{R}^p$ festgehalten, so ergibt sich wiederum $\tilde\varphi_k(x,\cdot) \overset{\mathcal{D}_q}{\to} D^\rho\varphi(x,\cdot)$, und durch Zerlegung eines beliebigen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ in Real– und Imaginärteil bleibt diese letzte Beziehung auch allgemein gültig. Es resultiert daraus

$$\lim_{k\to\infty} \big|\epsilon_k^{-1}\big(\psi(x+h_k) - \psi(x)\big) - D^\rho\psi(x)\big| = \lim_{k\to\infty} \big|S_y\big(\tilde\varphi_k(x,y)\big) - S_y\big(D_x^\rho\varphi(x,y)\big)\big| = 0 \quad \forall\ x \in \mathbf{R}^p.$$

Somit ist $\psi$ differenzierbar, und es gilt (5.2) für $\rho = (1,0,\ldots,0)$. Die Stetigkeit der Ableitung $D^\rho\psi$ prüft man genauso wie die Stetigkeit von $\psi$. Durch Iteration bestätigt man schließlich die Richtigkeit von (5.2) für jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^p$, und es resultiert $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$. Also ist (a) bewiesen.

Zum Beweis von (b) betrachten wir eine Folge $\big(\varphi_k\big)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ mit $\varphi_k \overset{\mathcal{D}_{p+q}}{\to} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$. Dann gibt es kompakte Teilmengen $K_x \subset \mathbf{R}^p$, $K_y \subset \mathbf{R}^q$ mit $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K_x \times K_y \ \forall\ k \in \mathbf{N}$. Wie in (a) gezeigt, erhalten wir daraus $\operatorname{supp}\psi_k \subset K_x$, wenn wir $\psi_k(x) := S_y\big(\varphi_k(x,y)\big)$ setzen. Wir nehmen an, daß *nicht* $\psi_k \overset{\mathcal{D}_p}{\to} \psi$ gilt. Dann existiert ein Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^p$, für den die Folge $\big(D^\rho\psi_k\big)_{k\in\mathbf{N}}$ auf $K_x$ nicht gleichmäßig gegen $D^\rho\psi$ konvergiert. Das heißt, es gibt ein $\epsilon > 0$, eine Teilfolge $\big(k_j\big)_{j\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}$ und eine Punktfolge $\big(x_j\big)_{j\in\mathbf{N}} \subset K_x$ mit

$$\big|D^\rho\psi_{k_j}(x_j) - D^\rho\psi(x_j)\big| \geq \epsilon \quad \forall\ j \in \mathbf{N}. \tag{5.3}$$

Da wegen der Kompaktheit von $K_x$ ein Häufungspunkt $x_0 \in K_x$ der Folge $\big(x_j\big)_{j\in\mathbf{N}}$ existieren muß, nehmen wir von vorneherein $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0$ an. Dann haben wir für jeden Multiindex $\sigma \in \mathbf{N}_0^{p+q}$:

$$\big|D^\sigma\varphi_{k_j}(x_j,y) - D^\sigma\varphi(x_0,y)\big| \leq \big|D^\sigma\varphi_{k_j}(x_j,y) - D^\sigma\varphi(x_j,y)\big| + \big|D^\sigma\varphi(x_j,y) - D^\sigma\varphi(x_0,y)\big|,$$

und diese Ungleichung liefert

$$D_x^\rho\varphi_{k_j}(x_j,\cdot) \overset{\mathcal{D}_q}{\to} D_x^\rho\varphi(x_0,\cdot) \quad \forall\ \rho \in \mathbf{N}_0^p.$$

Demzufolge gilt auch $D^\rho\psi_{k_j}(x_j) \overset{\mathcal{D}_q}{\to} D^\rho\psi(x_0)$, im Widerspruch zu (5.3). Der Satz ist nun vollständig bewiesen. □

Zur weiteren Vorbereitung benötigen wir einen Approximationssatz.

**Satz 8.19** *Für $p, q \in \mathbf{N}$ setzen wir*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{R}^{p+q}) := \operatorname{span}\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}) \,:\, \varphi(x,y) = \psi(x)\cdot\tau(y) \text{ mit } \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p),\ \tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q)\}.}$$

*Dann ist $\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{R}^{p+q})$ ein dichter Unterraum von $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$.*

*Beweis:* Es genügt, den Beweis des Satzes für $p = q = 1$ zu führen. Wir betrachten zu festem $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ das **singuläre** GAUSS–WEIERSTRASS–**Integral**

$$\Phi(x,y;t) := \begin{cases} \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}}\, d\xi\, d\eta & :\ t > 0, \\ \varphi(x,y) & :\ t = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Vermöge der Variablensubstitution $u := (\xi - x)/2\sqrt{t},\ v := (\eta - y)/2\sqrt{t},\ t > 0$, erhält man

$$\Phi(x,y;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\big(x + 2u\sqrt{t}, y + 2v\sqrt{t}\big) e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv, \qquad t > 0.$$

Verwenden wir die Relation (3.4) aus Abschnitt 7.3, so ersehen wir

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv = 1,$$

was auf die Beziehung

$$\begin{aligned} |\Phi(x,y;t) - \varphi(x,y)| &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big|\varphi\big(x + 2u\sqrt{t}, y + 2v\sqrt{t}\big) - \varphi(x,y)\big|\, e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv \\ &\le \frac{1}{\pi}\Big(\int\int_{\{u^2+v^2\ge R^2\}} + \int\int_{\{u^2+v^2<R^2\}}\Big) =: I_1(x,y;t) + I_2(x,y;t) \end{aligned}$$

führt. Da $\varphi$ auf $\mathbf{R}^2$ beschränkt ist, erhalten wir

$$\sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} I_1(x,y;t) \le \frac{2}{\pi}\,\|\varphi\|_{\infty;\mathbf{R}^2} \cdot \int\int_{\{u^2+v^2\ge R^2\}} e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv \to 0 \ \ (R \to +\infty),$$

gleichmäßig für alle $t > 0$. Das heißt, zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Zahl $R_0 > 0$ mit $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} I_1(x,y;t) < \epsilon$ $\forall\, R \ge R_0\ \forall\, t > 0$. Auf dem Bereich $u^2 + v^2 < R_0^2$ haben wir wegen Satz 1.3:

$$\big|\varphi\big(x + 2u\sqrt{t}, y + 2v\sqrt{t}\big) - \varphi(x,y)\big| \le \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2} \big|\nabla\varphi(\xi,\eta)\big| \cdot |(u,v)|\, 2\sqrt{t} \le M \cdot R_0 \cdot 2\sqrt{t}, \quad t > 0.$$

Somit folgt $\lim\limits_{t\to 0+} \sup\limits_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} I_2(x,y;t) = 0$ bei festgehaltenem $R = R_0$, und es ergibt sich schließlich

$$\lim_{t\to 0+} \sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} \big|\Phi(x,y;t) - \varphi(x,y)\big| = 0.$$

Des weiteren folgt wegen der Kompaktheit von $\operatorname{supp}\varphi$ durch partielle Integration:

$$D_x^j D_y^k \Phi(x,y;t) = \begin{cases} \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(D_\xi^j D_\eta^k \varphi\big)(\xi,\eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}}\, d\xi\, d\eta & :\ t > 0, \\ D_x^j D_y^k \varphi(x,y) & :\ t = 0. \end{cases}$$

Mit gleicher Argumentation wie zuvor zeigt man

$$\lim_{t\to 0+} \sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} \left| D_x^j D_y^k \Phi(x,y;t) - D_x^j D_y^k \varphi(x,y) \right| = 0 \quad \forall\, j,k \in \mathbf{N}_0. \tag{5.5}$$

Man erkennt ohne Schwierigkeit an der Darstellung (5.4), daß die Funktion $\Phi(x,y;t)$ für $t>0$ als holomorphe Funktion der Variablen $x,y$ auf $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ fortgesetzt werden kann und demzufolge für jedes $r>0$ eine auf $|x|\le r$, $|y|\le r$ absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\Phi(x,y;t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m} c_s(t) x^s y^{m-s}$$

besitzt, die wir gliedweise differenzieren dürfen:

$$D_x^j D_y^k \Phi(x,y;t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m} c_s(t)\big(D^j x^s\big)\big(D^k y^{m-s}\big) \quad \forall\, j,k\in\mathbf{N}_0.$$

Indem wir eine Nullfolge $\big(t_i\big)_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}_+$, $0<t_i\to 0$, betrachten und dazu die Polynomfolge

$$P_i(x,y) := \sum_{m=0}^{i}\sum_{s=0}^{m} c_s(t_i) x^s y^{m-s}, \quad i\in\mathbf{N},$$

definieren, erhalten wir auf jeder kompakten Teilmenge $K\subset\mathbf{R}^2$ gemäß (5.5) die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{(x,y)\in K} \left| D_x^j D_y^k P_i(x,y) - D_x^j D_y^k \varphi(x,y)\right| \le \lim_{i\to\infty} \sup_{(x,y)\in K} \sum_{m=i+1}^{\infty}\sum_{s=0}^{m} |c_s(t_i)|\cdot|D^j x^s|\cdot|D^k y^{m-s}| = 0.$$

Das heißt, es gilt $P_i \overset{\mathcal{E}}{\to} \varphi$. Nun wählen wir Abschneidefunktionen $\psi,\tau\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit der Eigenschaft $\psi(x)\tau(y)=1$ für $(x,y)\in\operatorname{supp}\varphi$. Dann haben wir

$$\varphi_i(x,y) := \psi(x)\tau(y)P_i(x,y) = \sum_{m=0}^{i}\sum_{s=0}^{m} c_s(t_i)\big(x^s\psi(x)\big)\cdot\big(y^{m-s}\tau(y)\big) \in \tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{R}^2)$$

sowie die Konvergenz $\varphi_i \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$. Dies beweist die Dichtheit von $\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{R}^2)$ in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$. □

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen, der uns die sinnvolle Definition des Tensorprodukts zweier beliebiger Distributionen ermöglichen wird.

**Satz 8.20** *Es seien $T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ und $S\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$ gegeben. Dann existiert genau eine Distribution $U\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$ mit*

$$\boxed{U(\psi(x)\tau(y)) = T_x(\psi(x))\cdot S_y(\tau(y)) \quad \forall\,\psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)\ \forall\,\tau\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^q)} \tag{5.6}$$

*sowie mit*

$$\boxed{U(\varphi(x,y)) = S_y[T_x(\varphi(x,y))] = T_x[S_y(\varphi(x,y))] \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}).} \tag{5.7}$$

*Beweis:* Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit von $U$ und nehmen dazu an, es gebe zwei Distributionen $U_1,U_2\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$ mit der Eigenschaft (5.6). Ist nun $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ gegeben, so finden wir gemäß Satz 8.19 eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}\subset\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{R}^{p+q})$ mit

$$\varphi_k(x,y) = \sum_{i+j=N_k} a_{ij}^{(k)} \psi_i^{(k)}(x)\tau_j^{(k)}(y), \quad \psi_i^{(k)}\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p),\ \tau_j^{(k)}\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^q), \qquad \varphi_k \overset{\mathcal{D}_{p+q}}{\to} \varphi.$$

Daraus erhalten wir wegen $U_1(\varphi_k) \overset{(5.6)}{=} U_2(\varphi_k)$:

$$U_1(\varphi) = \lim_{k\to\infty} U_1(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} U_2(\varphi_k) = U_2(\varphi).$$

Zum Beweis der Existenz einer Distribution $U$ mit der Eigenschaft (5.6) betrachten wir das gemäß Satz 8.18(a) wohldefinierte lineare Funktional $U : \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}) \to \mathbf{K}$ mit

$$U(\varphi(x,y)) := T_x[S_y(\varphi(x,y))], \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q}). \tag{5.8}$$

Für eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ mit $\varphi_k \overset{\mathcal{D}p+q}{\to} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ und $\psi_k(x) := S_y(\varphi_k(x,y))$ gilt $\psi_k \overset{\mathcal{D}_p}{\to} \psi := S_y(\varphi(\cdot,y))$ nach Satz 8.18(b), und somit

$$U(\varphi_k) = T(\psi_k) \to T(\psi) = U(\varphi).$$

Dies beweist $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$, und speziell für $\varphi(x,y) := \psi(x)\cdot\tau(y)$ folgt

$$U(\varphi(x,y)) = T_x[\psi(x)S_y(\tau(y))] = T_x(\psi(x))\cdot S_y(\tau(y)).$$

Bei Vertauschung der Rollen von $S$ und $T$ in (5.8) gelangen wir zum selben Resultat (5.6), was wegen der Eindeutigkeit von $U$ schließlich die Identität (5.7) impliziert. □

**Definition 8.13** *Es seien $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ und $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$ gegebene Distributionen. Die durch* Satz 8.20 *eindeutig bestimmte Distribution $U := T\circ S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$ heiße das* **Tensorprodukt** *von $T$ und $S$, bezeichnet mit $U = T \otimes S$. Das Tensorprodukt ist* **kommutativ***:*

$$\boxed{T_x \otimes S_y = S_y \otimes T_x.}$$

Wir stellen in dem folgenden Satz die wichtigsten Eigenschaften des Tensorproduktes zusammen.

**Satz 8.21** *Für Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$ und $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^r)$ gelten:*

(a) $(T \otimes S) \otimes U = T \otimes (S \otimes U)$. *(Assoziativität)*

(b) $D^\rho_x(T_x \otimes S_y) = (D^\rho T_x) \otimes S_y \quad \forall \rho \in \mathbf{N}^p_0$.

(c) *Die lineare Abbildung $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^p) \ni T \mapsto T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$ ist folgenstetig.*

(d) $\operatorname{supp}(T \otimes S) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^{p+q} : x \in \operatorname{supp} T \wedge y \in \operatorname{supp} S\} = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$.

*Beweis:* (a) Die Assoziativität ergibt sich ohne Schwierigkeit aus (5.7).

(b) Unter Verwendung von (5.2) erhält man für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ und für $\rho \in \mathbf{N}^p_0$:

$$\begin{aligned}(D^\rho_x(T_x \otimes S_y))(\varphi) &= (-1)^{|\rho|}(T_x \otimes S_y)(D^\rho_x\varphi(x,y)) = (-1)^{|\rho|}T_x[D^\rho S_y(\varphi(x,y))] \\ &= (D^\rho T_x)[S_y(\varphi(x,y))] = ((D^\rho T_x)\otimes S_y)(\varphi(x,y)).\end{aligned}$$

(c) Ist $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ mit $T_k \overset{\mathcal{D}'_p}{\to} T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ gegeben, so folgt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q})$ wegen $\psi := S_y(\varphi(\cdot,y)) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$:

$$\lim_{k\to\infty}(T_k \otimes S)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T_k(\psi) = T(\psi) = (T\otimes S)(\varphi),$$

und somit die behauptete Stetigkeit.

(d) Wir fixieren $x_0 \in \operatorname{supp} T$ und $y_0 \in \operatorname{supp} S$. Dann existieren für jedes $\epsilon > 0$ Funktionen $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p \cap B_\epsilon(x_0))$ und $\tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q \cap B_\epsilon(y_0))$ mit $T(\psi) \neq 0 \neq S(\tau)$. Wegen $B_\epsilon(x_0) \times B_\epsilon(y_0) \subset B_{\sqrt{2}\epsilon}(x_0, y_0)$ haben wir $\psi\tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q} \cap B_{\sqrt{2}\epsilon}(x_0, y_0))$ sowie $(T \otimes S)(\psi\tau) = T(\psi)S(\tau) \neq 0$. Dies zeigt uns $(x_0, y_0) \in \operatorname{supp}(T \otimes S)$. Nun sei $x_0 \in (\operatorname{supp} T)^c$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $T(\psi) = 0 \ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p \cap B_\delta(x_0))$. Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{p+q} \cap B_\delta(x_0, y_0))$, so haben wir $T_x(\varphi(x, y)) = 0 \ \forall\ y \in \mathbf{R}^q$ und dementsprechend $(T \otimes S)(\varphi) = S_y[T_x(\varphi(x, y))] = 0$. Also folgt $(x_0, y_0) \in (\operatorname{supp}(T \otimes S))^c$, und analog argumentiert man mit $y_0 \in (\operatorname{supp} S)^c$. □

**BSP. (8.5.3)** In Erweiterung von BSP.(8.5.1) betrachten wir jetzt Funktionen $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^p)$ und $g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^q)$ mit den zugeordneten regulären Distributionen $\mu_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$ bzw. $\mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^q)$. Aus Satz 8.20 folgern wir die Existenz des Tensorproduktes $\mu_f \otimes \mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{p+q})$, für welches gemäß (5.6) gilt:

$$\begin{aligned}(\mu_f \otimes \mu_g)(\psi\tau) &= \int_{\mathbf{R}^p} f(x)\psi(x)\,dx \cdot \int_{\mathbf{R}^q} g(y)\tau(y)\,dy = \int \int_{\mathbf{R}^{p+q}} f(x)g(y)\psi(x)\tau(y)\,dx\,dy \\ &= \mu_{(f\otimes g)}(\psi\tau) \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)\ \forall\, \tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^q).\end{aligned}$$

Da $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ in $L^1_{loc}(\mathbf{R}^{p+q})$ liegt, ist $\mu_f \otimes \mu_g = \mu_{(f\otimes g)}$ wiederum eine reguläre Distribution.

---

## 8.6 Die Faltung von Distributionen

Wir werden nachfolgend das in Abschnitt 7.6 für Funktionen eingeführte Faltungsprodukt in sinnvoller Weise auf Teilklassen von Distributionen übertragen können. Wir betrachten vorbereitend die folgenden Beispiele, welche bereits die Problematik aufwerfen, die bei der Verallgemeinerung des Faltungskonzepts auftreten können.

**BSP. (8.6.1)** Für $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ definiert das Faltungsprodukt $h(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(x - y)\,dy$ gemäß Satz 7.32 eine Funktion $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Als solche erzeugt $h = f * g$ eine reguläre Distribution $\mu_{(f*g)} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, und es gilt auf Grund des FUBINIschen Vertauschungssatzes 4.30:

$$\begin{aligned}\mu_{(f*g)}(\varphi) &= \int\limits_{\mathbf{R}^n_z} \Big( \int\limits_{\mathbf{R}^n_x} f(x)g(z - x)\,dx\Big)\varphi(z)\,dz = \int\limits_{\mathbf{R}^n_x} f(x)\Big( \int\limits_{\mathbf{R}^n_z} g(z - x)\varphi(z)\,dz\Big)\,dx \\ &\overset{y:=z-x}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^n_x} f(x)\Big( \int\limits_{\mathbf{R}^n_y} g(y)\varphi(x + y)\,dy\Big)\,dx = (\mu_f \circ \mu_g)(\varphi(x + y)) \\ &= (\mu_f \otimes \mu_g)(\varphi(x + y)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

Aus Gründen der Bezeichnungskonsistenz ist es sinnvoll, die reguläre Distribution $\mu_{(f*g)} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ das **Faltungsprodukt** $\mu_f * \mu_g$ von $\mu_f$ und $\mu_g$ zu nennen:

$$\boxed{\mu_{(f*g)}(\varphi) =: (\mu_f * \mu_g)(\varphi) := (\mu_f \otimes \mu_g)(\varphi(x + y)) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).} \tag{6.1}$$

Es liegt auf der Hand, die Relation (6.1) als Definition des Faltungsproduktes auf beliebige Distributionen $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ zu übertragen:

$$\boxed{(T * S)(\varphi) := (T_x \otimes S_y)(\varphi(x+y)) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).} \tag{6.2}$$

Man stößt aber schnell auf Schwierigkeiten, denn es sind zum Beispiel für $f, g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ die regulären Distributionen $\mu_f, \mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ wohldefiniert und somit auch deren Tensorprodukt $\mu_f \otimes \mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$, wie in BSP.(8.5.3) gezeigt wurde. Die Faltung $h := f * g$ existiert im Funktionensinn hingegen im allgemeinen *nicht*, so daß die linke Seite in (6.1) überhaupt nicht definiert zu sein braucht. Der durch (6.1) scheinbar induzierte Widerspruch löst sich wie folgt: Das Tensorprodukt $\mu_f \otimes \mu_g$ ist als stetiges lineares Funktional über dem Funktionenraum $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$ definiert. Für Funktionen $\psi = \psi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ existiert jeweils ein Funktionswert $(\mu_f \otimes \mu_g)(\psi(x,y))$. Die Definition (6.1) erfordert die Setzung $\psi(x,y) := \varphi(x+y)$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, was aber keinesfalls bereits die Klasseneigenschaft $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$ impliziert. Denn wäre $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$, so hätten wir sicher

$$\sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^{2n}} ((1+|x|^2+|y|^2)^{k/2}|\varphi(x+y)|) < \infty \quad \forall\, k \in \mathbf{N}_0. \tag{6.3}$$

Wählen wir ein $x_0 \in \mathbf{R}^n$ so, daß $\varphi(x_0) \neq 0$ gilt und setzen wir

$$U := (\operatorname{span}\{x_0\})^\perp = \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, \langle x, x_0\rangle = 0\},$$

so gilt für jedes $x \in U$ und für $y := x_0 - x$ die Beziehung $|y|^2 = |x_0 - x|^2 = |x_0|^2 + |x|^2 - 2\langle x, x_0\rangle = |x_0|^2 + |x|^2$. Somit ist für $k \geq 1$:

$$(1+|x|^2+|y|^2)^{k/2}|\varphi(x+y)| = (1+2|x|^2+|x_0|^2)^{k/2}|\varphi(x_0)| \to \infty \quad (|x| \to \infty)$$

ein Widerspruch zu (6.3). Also folgt $\varphi(x+y) \notin \mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$, so daß das Tensorprodukt (6.1) auf der Funktion $\varphi(x+y)$ nicht erklärt sein muß.

**BSP. (8.6.2)** Für jedes $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ und für $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ existieren

$$\begin{aligned}
(T_x \otimes \delta_y)(\varphi(x+y)) &= T_x[\delta_y(\varphi(x+y))] = T_x(\varphi(x)) = T(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n),\\
(\delta_x \otimes T_y)(\varphi(x+y)) &= \delta_x[T_y(\varphi(x+y))] = T_y(\varphi(x+y))\Big|_{x=0} = T_y(\varphi(y)) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).
\end{aligned}$$

Somit haben wir gemäß (6.2)

$$\boxed{T * \delta = \delta * T = T \quad \forall\, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n).} \tag{6.4}$$

**BSP. (8.6.3)** Ist $g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} g =: K \subset\subset \mathbf{R}^n$ gegeben, so definiert das Integral

$$\mu_g(\varphi(x+y)) := \int_{\mathbf{R}^n} g(y)\varphi(x+y)\,dy \overset{z:=-y}{=} \int_{-K} \tilde{g}(z)\varphi(x-z)\,dz = (\tilde{g} * \varphi)(x) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$$

sicher eine $C^\infty$–Funktion $\tilde{g} * \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, wobei wir $\tilde{g}(z) := g(-z)$ gesetzt haben. Da $\tilde{g}$ und $\varphi$ kompakten Träger haben, gibt es Zahlen $R, \tilde{R} > 0$ mit $\tilde{g}(z) = 0 \;\forall\, |z| > \tilde{R}$ und $\varphi(y) = 0 \;\forall\, |y| > R$. Für $|x| > R + \tilde{R}$ und $|z| \leq \tilde{R}$ gilt $|x - z| \geq |x| - |z| > R + \tilde{R} - |z| > R$, und somit $\tilde{g}(z)\varphi(x-z) = 0$.

das heißt, $\tilde{g} * \varphi$ hat kompakten Träger innerhalb $|x| \leq R + \tilde{R}$, und wir erhalten $\tilde{g} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Somit ist auch

$$(T_x \otimes \mu_g)(\varphi(x+y)) \quad \forall\, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$$

erklärt, und vermöge (6.2) ist dies das Faltungsprodukt $T * \mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ von $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ und $\mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Nach diesen vorbereitenden Beispielen untersuchen wir in einem ersten Schritt die Faltung einer Distribution mit einer Funktion.

### 8.6.1 Die Faltung einer Distribution mit einer Funktion

Für Funktionen $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{K}$ setzen wir bei festem $x \in \mathbf{R}^n$

$$\varphi_x(y) := \varphi(x-y) \quad \forall\, y \in \mathbf{R}^n.$$

**Definition 8.14** *Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ heiße die Funktion*

$$\boxed{(T * \varphi)(x) := T(\varphi_x) = T_y(\varphi(x-y))} \tag{6.5}$$

*die* **Faltung** *der Distribution $T$ mit der Funktion $\varphi$.*

Wie das BSP.(8.6.3) zeigt, macht (6.5) mindestens für jede reguläre Distribution $T = \mu_g$ einen Sinn, wenn $g$ kompakten Träger $\operatorname{supp} g \subset\subset \mathbf{R}^n$ hat. Denn mit geringfügiger Änderung beweist man wie dort

$$\mu_g * \varphi = \mu_g(\varphi(\cdot - y)) = g * \varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(\mu_g * \varphi) \subset \operatorname{supp} g + \operatorname{supp} \varphi.$$

Wir haben allgemeiner:

**Satz 8.22** *Gegeben seien $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ sowie $\varphi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Dann gilt:*

(a) $T * \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *und* $D^\rho(T * \varphi) = (D^\rho T) * \varphi = T * D^\rho \varphi\ \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n$.

(b) $\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi := \{x + y \in \mathbf{R}^n\ :\ x \in \operatorname{supp} T \wedge y \in \operatorname{supp} \varphi\}$.

(c) $(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi) = T * (\psi * \varphi)$.

*Beweis:* (a) Betrachten wir eine Nullfolge $(h_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^n$, $|h_k| \to 0$, und setzen wir $\varphi_{x,k}(y) := \varphi(x + h_k - y)$, so folgt ganz wie im Beweis von Satz 8.18(a) die Konvergenz $\varphi_{x,k} \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi_x$ für jedes feste $x \in \mathbf{R}^n$, und somit wegen der Stetigkeit von $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{K}$ auch

$$\lim_{k\to\infty} |(T * \varphi)(x + h_k) - (T * \varphi)(x)| = \lim_{k\to\infty} |T(\varphi_{x,k}) - T(\varphi_x)| = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n.$$

Somit ist $T * \varphi$ stetig auf $\mathbf{R}^n$. Wiederholen wir die Argumente aus dem oben zitierten Beweis des Satzes 8.18(a), so erhalten wir wie in (5.2)

$$D^\rho(T * \varphi)(x) = T_y(D_x^\rho \varphi(x-y)) = (-1)^{|\rho|} T_y(D_y^\rho \varphi(x-y)) = (D^\rho T_y)(\varphi(x-y)) \quad \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n$$

sowie die Regularitätseigenschaft $T * \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

(b) Wir halten $x \in \mathbf{R}^n$ fest und betrachten die Distribution $\varphi_x(y)T$. Da $\varphi_x$ einen kompakten Träger $\operatorname{supp}\varphi_x \subset\subset \mathbf{R}^n$ hat, gilt für jede Abschneidefunktion $\tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ bezüglich $\{\operatorname{supp}\varphi_x, \mathbf{R}^n\}$ die Identität

$$(\varphi_x(y)T)(\tau(y)) = T_y(\tau(y)\cdot\varphi_x(y)) = T_y(\varphi(x-y)) = (T*\varphi)(x).$$

Deshalb haben $(T*\varphi)(x)$ und $\varphi_x(y)T$ denselben Träger. Trivialerweise gilt

$$\operatorname{supp}(\varphi_x(y)T) \subset \operatorname{supp}T. \tag{6.6}$$

Sei nun $y_0 \in (\operatorname{supp}\varphi_x)^c$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(y_0) \subset (\operatorname{supp}\varphi_x)^c$, das heißt mit $\varphi_x(y) = 0 \ \forall\, y \in B_\delta(y_0)$. Für jedes $\tau \in \mathcal{D}(B_\delta(y_0))$ erhalten wir deshalb

$$(\varphi_x(y)T)(\tau(y)) = T_y(\tau(y)\cdot\varphi_x(y)) = 0,$$

also $y_0 \notin \operatorname{supp}(\varphi_x(y)T)$. Mit (6.6) resultiert deshalb

$$\operatorname{supp}(\varphi_x(y)T) \subset \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, y \in \operatorname{supp}T \wedge x-y \in \operatorname{supp}\varphi\} = \{y+z \in \mathbf{R}^n \,:\, y \in \operatorname{supp}T \wedge z \in \operatorname{supp}\varphi\}.$$

(c) Wir zeigen die Behauptung im Fall $n = 1$. Die Verallgemeinerung auf beliebige Dimension $n \in \mathbf{N}$ liegt auf der Hand. Wir approximieren das Integral des Faltungsproduktes $(\varphi*\psi)(x) = (\psi*\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy$ bei äquidistanter Schrittweite $h > 0$ durch die RIEMANN–Summe

$$R_h(x) := h\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi(x-ph)\psi(ph),$$

wobei diese Summe wegen des kompakten Trägers von $\varphi$ bei festem $h > 0$ jeweils nur endlich viele Summanden aufweist. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbf{R}$ und für jedes $j \in \mathbf{N}_0$ gilt

$$D^j R_h(x) = h\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} (D^j\varphi)(x-ph)\psi(ph), \quad x \in K.$$

Setzen wir $h := 1/k$, $k \in \mathbf{N}$, so ergibt sich aus der Definition des RIEMANN–Integrals

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |D^j R_{1/k}(x) - D^j(\varphi*\psi)(x)| = 0 \quad \forall\, j \in \mathbf{N}_0,$$

und somit wegen $\operatorname{supp}R_{1/k} \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi$ die Konvergenz $R_{1/k} \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi*\psi$. Da $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{K}$ stetig und linear ist, folgt daraus

$$(T*(\varphi*\psi))(x) = \lim_{k\to\infty}(T*R_{1/k})(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{p=-\infty}^{\infty}(T*\varphi)(x-\frac{p}{k})\cdot\psi(\frac{p}{k}) = ((T*\varphi)*\psi)(x).$$

Der Satz ist vollständig bewiesen. □

An der Beweisführung des Satzes 8.22(a) sind nur geringfügige Änderungen vorzunehmen, wenn wir $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ voraussetzen. Für dieses Paar ist wiederum eine Faltung von $T$ mit $\varphi$ gemäß der Vorschrift (6.5) erklärt, und es gilt analog zu Satz 8.22:

**Satz 8.23** *Gegeben seien $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ sowie $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Dann gilt:*

(a) *$T*\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ und $D^\rho(T*\varphi) = (D^\rho T)*\varphi = T*D^\rho\varphi \ \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n$.*

(b) *$\operatorname{supp}(T*\varphi) \subset \operatorname{supp}T + \operatorname{supp}\varphi := \{x+y \in \mathbf{R}^n \,:\, x \in \operatorname{supp}T \wedge y \in \operatorname{supp}\varphi\}$.*

(c) $(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi) = T * (\psi * \varphi)$.

Wir zeigen nun, daß jede Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ in der schwach* Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ durch eine Funktionenfolge $(T * \omega_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$ beliebig genau approximiert werden kann. Dazu betrachten wir den Glättungskern $\omega$ aus (9.2), Abschnitt 4.9, für den wir wiederum $\omega_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\omega(\frac{x}{\epsilon})$, $\epsilon > 0$, setzen. Gemäß Satz 4.37(a) hat der Mollifier $\varphi_\epsilon := \varphi * \omega_\epsilon$ die folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_\epsilon = J_\epsilon\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \qquad \varphi_\epsilon = J_\epsilon\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \ \forall\, \varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n).$$

Wie in (2.4), Abschnitt 5.2 gezeigt wurde, gilt ferner

$$(D^\rho\varphi_\epsilon)(x) = D^\rho(J_\epsilon\varphi)(x) = (J_\epsilon D^\rho\varphi)(x),$$

und somit gemäß Satz 4.37(b)

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \sup_{x\in K} |(D^\rho\varphi_\epsilon)(x) - (D^\rho\varphi)(x)| = 0 \quad \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n \ \forall\, K \subset\subset \mathbf{R}^n \text{ kompakt.}$$

Des weiteren haben wir wegen $\operatorname{supp}\omega_\epsilon = \overline{B_\epsilon(0)} \subset \overline{B_{\epsilon_0}(0)}$ für $0 < \epsilon < \epsilon_0$ die Inklusion

$$\operatorname{supp}\varphi_\epsilon \subset \operatorname{supp}\varphi + \overline{B_{\epsilon_0}(0)},$$

so daß wir für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ die Konvergenz $\varphi_\epsilon \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$ bzw. für $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ die Konvergenz $\varphi_\epsilon \overset{\mathcal{E}}{\to} \varphi$ erhalten. Nach dieser Vorbetrachtung sind wir nun in der Lage, den folgenden Approximationssatz zu beweisen:

**Satz 8.24** *Für gegebenes $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ (bzw. für $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$) und für $\omega_\epsilon := \epsilon^{-n}\omega(\frac{x}{\epsilon})$ mit $\omega$ aus* (9.2), Abschnitt 4.9, *gilt*

$$\boxed{\lim_{\epsilon\to 0+} (T * \omega_\epsilon) = T \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \quad (\text{bzw. in } \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)),}$$

*wobei $T * \omega_\epsilon$ gemäß* Satz 8.22 *(bzw. gemäß* Satz 8.23*) in $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ liegt. Die Funktion $T * \omega_\epsilon$ heiße eine* **Regularisierung** *der Distribution $T$.*

*Beweis:* Wir betrachten hier nur den Fall $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Der Fall $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ wird ganz analog behandelt. Wir wählen ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ und setzen $\tilde\varphi(x) := \varphi(-x)$. Dann gilt gemäß (6.5)

$$T(\varphi) = (T * \tilde\varphi)(0), \tag{6.7}$$

und wir müssen die Relation

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \big((T * \omega_\epsilon) * \tilde\varphi\big)(0) = T(\varphi)$$

zeigen. Wegen Satz 8.22(c) haben wir $(T * \omega_\epsilon) * \tilde\varphi = T * (\tilde\varphi * \omega_\epsilon) = T * \tilde\varphi_\epsilon$, und es gilt nach (6.5):

$$(T * \tilde\varphi_\epsilon)(0) = T\big((\tilde\varphi_\epsilon)\tilde{}\big) \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

Wie bereits im Vorspann gezeigt wurde, gilt $(\tilde\varphi_\epsilon)\tilde{} \overset{\mathcal{D}}{\to} (\tilde\varphi)\tilde{} = \varphi$, und somit

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \big((T * \omega_\epsilon) * \tilde\varphi\big)(0) = T(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

Das war zu zeigen. □

Aus Satz 8.24 gewinnt man sofort die folgende Eindeutigkeitsaussage.

**Satz 8.25** *Es seien $T_1$, $T_2$ zwei Distributionen mit $T_1 * \varphi = T_2 * \varphi$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Dann gilt $T_1 = T_2$.*

*Beweis:* Da die Funktion $\omega_\epsilon$ aus Satz 8.24 die Eigenschaft $\omega_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ besitzt, gilt nach Voraussetzung $T_1 * \omega_\epsilon = T_2 * \omega_\epsilon$ $\forall\, \epsilon > 0$. Somit erhalten wir aus der Beziehung (6.7):

$$T_1(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0+} \big((T_1 * \omega_\epsilon) * \tilde\varphi\big)(0) = \lim_{\epsilon\to 0+} \big((T_2 * \omega_\epsilon) * \tilde\varphi\big)(0) = T_2(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n),$$

also $T_1 = T_2$. □

### 8.6.2 Die Faltung von Distributionen bei kompaktem Träger

Die Existenz des Faltungsproduktes zweier Distributionen, worin mindestens eine der beiden Distributionen kompakten Träger haben muß, beruht im wesentlichen auf folgendem Satz:

**Satz 8.26** *Es sei $L : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ eine stetige lineare Abbildung, welche mit dem Verschiebungsoperator $\tau_h$ kommutiert:*

$$\boxed{L\tau_h\varphi = \tau_h L\varphi \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).} \tag{6.8}$$

*Dabei gelte $(\tau_h\varphi)(x) := \varphi(x-h)$. Dann existiert genau eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ mit*

$$\boxed{L(\varphi) = T * \varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).}$$

*Ist umgekehrt $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ gegeben, so wird vermöge $L(\varphi) := T * \varphi$ eine stetige lineare Abbildung $L : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ mit der Kommutatoreigenschaft (6.8) induziert.*

*Beweis:* Wir setzen wie vorher $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Dann ist die Abbildung $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ offensichtlich stetig und linear, so daß durch die Abbildungsvorschrift $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto T(\tilde{\varphi}) := (L\varphi)(0) \in \mathbf{K}$ ein stetiges lineares Funktional $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ induziert wird. Wir haben wegen (6.7)

$$(L\varphi)(0) = T(\tilde{\varphi}) = (T * \varphi)(0).$$

Ersetzen wir hier $\varphi$ durch $\tau_{-h}\varphi$ und beachten die Kommutatoreigenschaft (6.8), so folgt

$$(L\varphi)(h) = (T * \tau_{-h}\varphi)(0) = T_y\big(\varphi(x+h-y)\big)\Big|_{x=0} = \tau_{-h}(T*\varphi)(0) = (T*\varphi)(h) \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n. \tag{6.9}$$

Die Eindeutigkeit ist klar, denn wären $T_1, T_2$ zwei Distributionen mit den verlangten Eigenschaften, so hätten wir

$$T_1 * \varphi = T_2 * \varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n),$$

also $T_1 = T_2$ gemäß Satz 8.25. Ist schließlich $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ fixiert, so gilt $L(\varphi) := T * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, wie in Satz 8.22(a) gezeigt wurde. Die Abbildung $L : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ ist offenkundig linear. Die Eigenschaft (6.8) ergibt sich aus (6.9), und für eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ mit $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$ gilt $\psi_k := T * \varphi_k \overset{\mathcal{E}}{\to} T * \varphi =: \psi$. Diese letzte Aussage beweist man wie in Satz 8.18(b) durch eine Widerspruchsannahme. Also besitzt $L$ auch die geforderte Stetigkeitseigenschaft. □

Wir sind jetzt in der Lage, die Faltung zweier Distributionen zu definieren, wenn mindestens eine der beiden Distributionen einen kompakten Träger besitzt. Dazu fixieren wir $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Dann ist gemäß Satz 8.23 durch $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto S * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ eine stetige lineare Abbildung mit $\operatorname{supp}(S*\varphi) \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \mathbf{R}^n$ definiert. Jedes $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ induziert nun vermöge $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto T * (S * \varphi) =: L(\varphi) \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ eine stetige lineare Abbildung $L : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, welche die Kommutatoreigenschaft (6.8) besitzt. Also existiert infolge von Satz 8.26 eine eindeutig bestimmte Distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ mit

$$U * \varphi = T * (S * \varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \tag{6.10}$$

Betrachten wir umgekehrt zuerst die Faltung $T * \varphi$, so ist gemäß Satz 8.22 durch $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto T * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ eine stetige lineare Abbildung erklärt, die ihrerseits vermöge $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto S * (T * \varphi) =: L_1(\varphi)$ auf eine lineare Abbildung $L_1 : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ führt, welche die Voraussetzungen von Satz 8.26 erfüllt. Dementsprechend existiert eine eindeutig bestimmte Distribution $U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ mit $U_1 * \varphi = S * (T * \varphi)\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Die folgende Definition macht nun einen Sinn.

**Definition 8.15** *Hat mindestens eine der beiden Distributionen $T, S$ einen kompakten Träger in $\mathbf{R}^n$, so heiße die durch (6.10) induzierte Distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ das* **Faltungsprodukt** *von $T$ mit $S$, bezeichnet mit $U = T * S$:*

$$\boxed{(T * S) * \varphi := T * (S * \varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).} \tag{6.11}$$

Die wichtigsten Eigenschaften des Faltungsproduktes fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

**Satz 8.27** *Es seien $R, S, T$ Distributionen, von denen mindestens $R$ und $S$ kompakten Träger haben. Dann gilt:*

(a) $T * S = S * T$.

(b) $\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$.

(c) $(T * S) * R = T * (S * R)$.

(d) $D^\rho(T * S) = (D^\rho T) * S = T * (D^\rho S) \quad \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n$.

*Beweis:* (a) Für jedes Paar $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ haben wir $\varphi * \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Verwenden wir Satz 8.22(c) und entsprechend Satz 8.23(c), so ergibt sich wegen der in Satz 7.33 gezeigten Assoziativität und der Kommutativität des Faltungsproduktes zweier Funktionen:

$$\begin{aligned}(T * S) * (\varphi * \psi) &= T * (S * (\varphi * \psi)) = T * ((S * \varphi) * \psi) = T * (\psi * (S * \varphi)) \\ &= (T * \psi) * (S * \varphi) = (S * \varphi) * (T * \psi) = S * (\varphi * (T * \psi)) \\ &= S * ((T * \psi) * \varphi) = (S * T) * (\psi * \varphi) = (S * T) * (\varphi * \psi).\end{aligned}$$

Vermöge Satz 8.25 erhalten wir daraus die Identität $T * S = S * T$.

(b) Wir wählen die Folge $(\omega_\epsilon)_{\epsilon>0}$ der Glättungskerne aus Satz 8.24, welche die Eigenschaften $\operatorname{supp}\omega_\epsilon = \overline{B_\epsilon(0)} \to \{0\}$ $(\epsilon \to 0+)$ sowie $S * \omega_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ haben. Aus Satz 8.22 ergibt sich

$$\operatorname{supp}(T * (S * \omega_\epsilon)) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp}(S * \omega_\epsilon) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S + \operatorname{supp}\omega_\epsilon.$$

Nun gilt gemäß Satz 8.24 $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} (T * S) * \omega_\epsilon = T * S$, also auch $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \operatorname{supp}(T * S * \omega_\epsilon) = \operatorname{supp}(T * S)$. Daraus erschließen wir die behauptete Inklusion.

(c) Die Assoziativität des Faltungsproduktes erhält man unmittelbar aus der Definition 8.15.

(d) Wir zeigen zunächst die Identität $D^\rho T = (D^\rho \delta) * T \;\; \forall\, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. In der Tat, wegen (6.4) und Satz 8.22(a) haben wir für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$:

$$(D^\rho T) * \varphi = T * (D^\rho \varphi) = (T * \delta) * (D^\rho \varphi) = T * (\delta * D^\rho \varphi) = (T * D^\rho \delta) * \varphi.$$

Aus Satz 8.25 ergibt sich somit $D^\rho T = T * (D^\rho \delta) = (D^\rho \delta) * T$. Unter Verwendung der bereits gezeigten Assoziativität und der Kommutativität des Faltungsproduktes resultiert schließlich:

$$\begin{aligned}D^\rho(T * S) &= (D^\rho \delta) * (T * S) = T * (D^\rho \delta * S) = T * (D^\rho S), \\ D^\rho(T * S) &= (D^\rho \delta * T) * S = (D^\rho T) * S.\end{aligned}$$

Beide Identitäten zusammen liefern die behauptete Relation. □

**BSP. (8.6.4)** Für $x_0 \in \mathbf{R}^n$ bezeichne $\delta_{x_0}$ das DIRAC–Punktfunktional im Punkte $x_0$. Wegen $\operatorname{supp}\delta_{x_0} = \{x_0\}$ gilt $\delta_{x_0} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, und das Faltungsprodukt $T * \delta_{x_0}$ ist gemäß Definition 8.15 für jedes $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ wohldefiniert. Unter Zuhilfenahme von (6.5) ergibt sich

$$\begin{aligned}((T * \delta_{x_0}) * \varphi)(x) &= (T * (\delta_{x_0} * \varphi)) = T * ((\delta_{x_0}(\varphi_x)) = T * (\tau_{x_0}\varphi) \\ &= T_y(\varphi(x - x_0 - y)) = \tau_{x_0}(T * \varphi)(x) =: ((\tau_{x_0}T) * \varphi)(x).\end{aligned}$$

In diesem Sinne haben wir

$$\boxed{T * \delta_{x_0} = \tau_{x_0}T \quad \forall\, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n).}$$

**BSP. (8.6.5)** Das Assoziativgesetz aus Satz 8.27(c) wird i.a. falsch, wenn nur noch eine der drei Distributionen $R, S, T$ kompakten Träger hat, obwohl beide Seite der Gleichung $(T * S) * R = T * (S * R)$ wohldefiniert sein können. Wir betrachten beispielsweise im Falle $n = 1$ die regulären Distributionen $T := \mu_f$, $R := \mu_H$, worin $f(x) := 1\ \forall\ x \in \mathbf{R}$ gelte und worin $H$ die HEAVISIDE–Funktion aus BSP.(8.2.3) sei. Es sei ferner $S := D\delta$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}T * S &= \mu_f * (D\delta) = (D\mu_f) * \delta = \mu_{Df} * \delta = 0, \qquad (T * S) * R = 0, \\ S * R &= (D\delta) * \mu_H = \delta * (D\mu_H) = \delta * \delta = \delta, \qquad T * (S * R) = \mu_f * \delta = \mu_f.\end{aligned}$$

Das in Satz 8.27(c) konstatierte Assoziativgesetz gilt hier *nicht*, denn von den drei Distributionen $\mu_f, \mu_H$ und $D\delta$ hat nur $D\delta$ einen kompakten Träger.

### 8.6.3 Distributionen mit konvolutivem Träger

Wie das BSP.(8.6.1) lehrt, kann das Faltungsprodukt zweier Distributionen auch dann erklärt sein, wenn keine der Distributionen einen kompakten Träger besitzt.

**Definition 8.16** *Die Träger zweier Distributionen $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ heißen* **konvolutiv**, *wenn gilt*

$$\boxed{\sup_{|x+y|\le R} |x| < \infty, \qquad \sup_{|x+y|\le R} |y| < \infty \quad \forall\ 0 \le R < \infty,} \tag{6.12}$$

*wobei $x, y$ alle Paare $(x, y) \in \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S \subset \mathbf{R}^{2n}$ durchlaufen darf.*

**BSP. (8.6.6)** Gegeben seien $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ und $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Dann gilt $\operatorname{supp} S \subset\subset \mathbf{R}^n$, und somit existiert eine Zahl $R_S > 0$ mit $|y| \le R_S\ \forall\ y \in \operatorname{supp} S$. Für jedes $x \in \operatorname{supp} T$ mit $|x + y| \le R < \infty$ ergibt sich dann aus der Dreiecksungleichung

$$|x| = |x + y - y| \le |x + y| + |y| \le R + R_S.$$

Es gilt also (6.12): Die Distributionen $S$ und $T$ haben konvolutiven Träger.

**BSP. (8.6.7)** Für $n = 1$ betrachten wir $T := S := \mu_H$, worin $H$ die HEAVISIDE–Funktion bezeichnet. Es gilt nach Folgerung 8.5(e) $\operatorname{supp}\mu_H = \operatorname{supp} H = [0, +\infty)$. Das heißt, $x, y \in \operatorname{supp}\mu_H$ sind jeweils nichtnegative Zahlen. Somit folgt aus $0 \le x+y = |x+y| \le R$ stets auch $0 \le x = |x| \le R$

und $0 \le y = |y| \le R$. Die Distributionen $S$ und $T$ haben konvolutiven Träger. Setzen wir hingegen $T := \mu_H$ sowie $S := \mu_{\tilde{H}}$ mit $\tilde{H}(x) := H(-x)$, so gilt nunmehr $\operatorname{supp}\mu_{\tilde{H}} = \operatorname{supp}\tilde{H} = (-\infty, 0]$. Für $x \in \operatorname{supp} T$ folgt $y := -x \in \operatorname{supp} S$ sowie $|x+y| = 0$, während $|x| = |y|$ unbeschränkt wachsen kann. Die Distributionen $S$ und $T$ haben *keinen* konvolutiven Träger.

Haben die Distributionen $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ konvolutiven Träger, so macht das Tensorprodukt in (6.2) einen Sinn:

$$(T_x \otimes S_y)(\varphi(x+y)) = T_x[S_y(\varphi(x+y))] \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

Um dies einzusehen, beweisen wir den folgenden

**Satz 8.28** *Gegeben seien Distributionen $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ sowie eine feste Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Dann hat die Distribution $U := \varphi(x+y)(T \otimes S) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$ kompakten Träger in $\mathbf{R}^{2n}$. Folglich gilt für jede Abschneidefunktion $\tau \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$ bezüglich $\{\operatorname{supp} U, \mathbf{R}^{2n}\}$ die Identität*

$$U(\tau) = (T_x \otimes S_y)(\tau(x,y) \cdot \varphi(x+y)) = (T_x \otimes S_y)(\varphi(x+y)).$$

*Beweis:* Für die Distribution $U = \varphi(x+y)(T \otimes S)$ gilt unter Verwendung von Satz 8.21:

$$\operatorname{supp} U \subset \operatorname{supp}(T \otimes S) = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S.$$

Betrachten wir $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^{2n}$ mit $x_0 + y_0 \in (\operatorname{supp}\varphi)^c$, so gibt es eine Zahl $\delta > 0$ mit $\varphi(x+y) = 0\ \forall\, x+y \in B_{2\delta}(x_0+y_0)$. Für Punkte $(x,y) \in \mathbf{R}^{2n}$ mit $|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 < \delta^2$ gilt auch $|x+y-(x_0+y_0)| \le |x-x_0| + |y-y_0| < \delta + \delta = 2\delta$, also $\varphi(x+y) = 0$. Folglich erfüllt jede Funktion $\tau \in \mathcal{D}\big(\mathbf{R}^{2n} \cap B_\delta(x_0, y_0)\big)$:

$$U(\tau) = 0, \quad \text{also} \quad (x_0, y_0) \notin \operatorname{supp} U.$$

Sind $x_0 + y_0 \in \operatorname{supp}\varphi$ und $x_0 \in (\operatorname{supp} T)^c$, so gibt es wiederum ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset (\operatorname{supp} T)^c$. Wählen wir $\tau \in \mathcal{D}\big(B_\delta(x_0)\big)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, so folgt

$$U\big(\tau(x)\cdot\psi(y)\big) = T_x\big[\tau(x) S_y\big(\varphi(x+y)\cdot\psi(y)\big)\big] = 0.$$

Wegen Satz 8.19 gilt also $(x_0, y_0) \notin \operatorname{supp} U$. Analog argumentiert man mit $y_0 \in (\operatorname{supp} S)^c$. Nun betrachten wir $x_0 + y_0 \in \operatorname{supp}\varphi$ mit $x_0 \in \operatorname{supp} T$ und $y_0 \in \operatorname{supp} S$. Dann gilt für ein von $x_0, y_0$ unabhängiges $R > 0$ die Schranke $|x_0 + y_0| \le R$, und es existieren gemäß (6.12) Konstanten $R_1, R_2$ mit $|x_0| \le R_1$ und $|y_0| \le R_2$ für alle solche Punkte $(x_0, y_0)$. Dies beweist die Kompaktheit von $\operatorname{supp} U$ in $\mathbf{R}^{2n}$. □

Wir nehmen die Relation (6.2) zum Anlaß, um die Faltung $T * S$ für Distributionen mit konvolutivem Träger zu definieren:

**Definition 8.17** *Es seien zwei Distributionen $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ mit konvolutivem Träger gegeben. Dann heiße die durch*

$$\boxed{(T * S)(\varphi) := (T_x \otimes S_y)(\varphi(x+y)) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)} \tag{6.13}$$

*induzierte lineare Abbildung $T * S : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{K}$ das* **Faltungsprodukt** *der Distributionen $S$ und $T$.*

Das so definierte Faltungsprodukt ist eine Erweiterung des Faltungsproduktes aus Definition 8.15. Denn hat eine der beiden Distributionen $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ einen kompakten Träger, so ist dieser gemäß BSP.(8.6.6) konvolutiv, und wir haben wegen (6.7) für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$:

$$\begin{aligned}(T * S)(\varphi) &= ((T * S) * \tilde{\varphi})(0) \overset{(6.11)}{=} (T * (S * \tilde{\varphi}))(0) \overset{(6.5)}{=} T * [S_y(\tilde{\varphi}(-y))] \\ &= T_x[S_y(\tilde{\varphi}(-x-y))] = T_x[S_y(\varphi(x+y))] = (T_x \otimes S_y)(\varphi(x+y)).\end{aligned}$$

Insofern teilt das Faltungsprodukt (6.13) mit dem Faltungsprodukt (6.11) die Eigenschaften aus Satz 8.27, die wir hier ohne Beweis auflisten (vgl. H. TRIEBEL, Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1972; dort § 13.)

**Satz 8.29** *Es seien $S, T$ Distributionen mit konvolutivem Träger. Dann haben wir für das durch* (6.13) *definierte Faltungsprodukt:*

(a) $T * S = S * T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

(b) $\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$.

(c) $D^\rho(T * S) = (D^\rho T) * S = T * (D^\rho S) \quad \forall\, \rho \in \mathbf{N}_0^n$.

(d) *Sind $U, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ Distributionen mit der Eigenschaft*

$$\sup_{|x+y+z|\le R} |x| < \infty, \qquad \sup_{|x+y+z|\le R} |y| < \infty, \qquad \sup_{|x+y+z|\le R} |z| < \infty \quad \forall\, 0 \le R < \infty,$$

*wobei $x, y, z$ alle Tripel $(x, y, z) \in \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} U$ durchlaufen dürfen, so gilt*

$$(T * S) * U = T * (S * U).$$

---

## 8.7 Temperierte Distributionen

Die Erweiterung der FOURIER–Transformation auf Distributionen erfordert die Einführung eines speziellen Distributionentyps, nämlich der *temperierten Distributionen*. Wie wir bereits in Bemerkung 7.3(b) ausgeführt haben, ist der Funktionenraum $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ nicht *stabil* unter der FOURIER–Transformation. Hingegen vermittelt die FOURIER–Transformation gemäß Satz 7.23 einen Isomorphismus des Raumes $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ auf sich. Dies ist der Grund dafür, daß wir nun die stetigen linearen Funktionale über dem lokalkonvexen HAUSDORFF–Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ betrachten werden.

**Definition 8.18** *Der $\mathbf{K}$–Vektorraum der stetigen linearen Funktionale über $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, das heißt der topologische Dualraum*

$$\boxed{\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) := \{T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{K} \,:\, T \text{ stetig und linear}\},}$$

*heiße Raum der* **temperierten Distributionen**. *Jedes Element $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ heiße eine* **temperierte Distribution**.

Der Name "Distribution" für die Elemente von $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ rechtfertigt sich auf Grund des folgenden Sachverhalts:

**Satz 8.30** *Es gilt*

$$\boxed{\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)}$$

*in folgendem Sinn: Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ gilt $T|\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, und für $S \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ mit $S \neq T$ hat man stets $S|\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \neq T|\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.*

*Beweis:* Die Einbettung $Id_1 : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ist, wie in Satz 7.15 gezeigt wurde, stetig und linear. Ebenso ist die Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{K}$ für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ stetig und linear, und dies gilt nun auch für das Kompositum

$$T \circ Id_1 : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \stackrel{Id_1}{\to} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \stackrel{T}{\to} \mathbf{K}, \quad \text{also } T \circ Id_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n).$$

Wegen $T \circ Id_1 = T|\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ haben wir bereits den ersten Teil der Behauptung bewiesen. Beim Beweis des zweiten Teils verwenden wir die Tatsache, daß der Raum $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ gemäß Satz 7.11(b) dicht in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ist. Demgemäß gibt es für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ mit $\varphi_k \stackrel{\mathcal{S}}{\to} \varphi$. Wäre also $S|\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) = T|\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, so ergäbe sich aus

$$S(\varphi) = \lim_{k\to\infty} S(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung $S \neq T$. □

Auf dem Vektorraum $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ führen wir wieder die schwach* Topologie ein, die von der Halbnorm–Familie

$$\boxed{p_\varphi(T) := |T(\varphi)|, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)} \tag{7.1}$$

erzeugt wird. Diese ist offenbar separierend. Wäre nämlich $T(\varphi) = 0 \ \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, so wäre $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ die Nulldistribution. Also muß es für jedes $0 \neq T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ ein $\varphi_T \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ geben mit $p_{\varphi_T}(T) = |T(\varphi_T)| \neq 0$. Die von der Halbnorm–Familie $\{p_\varphi\}_{\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)}$ auf $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ erzeugte lokalkonvexe Topologie ist somit HAUSDORFFsch. Die schwach* Konvergenz ist die punktweise Konvergenz:

**Definition 8.19** *Eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ temperierter Distributionen heiße konvergent zum Grenzwert $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ (in Zeichen: $T_k \stackrel{\mathcal{S}'}{\to} T$), wenn gilt*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).}$$

Wir erinnern daran, daß der Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in BSP.(7.2.2) durch die folgende Halbnorm–Familie lokalkonvex topologisiert wurde:

$$p_{j,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \Big((1+|x|^2)^{j/2} \sum_{|\rho|\le m} |D^\rho\varphi(x)|\Big), \quad j,m \in \mathbf{N}_0, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n). \tag{7.2}$$

Wir verwenden (7.2) zu folgender Charakterisierung von temperierten Distributionen:

**Satz 8.31** *Ein lineares Funktional $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{K}$ ist genau dann eine temperierte Distribution, wenn es Zahlen $C < \infty$ und $j, m \in \mathbf{N}_0$ gibt mit*

$$\boxed{|T(\varphi)| \le C \cdot p_{j,m}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).} \tag{7.3}$$

*Beweis:* Die Hinlänglichkeit von (7.3) ist trivial: Gilt nämlich $\varphi_k \overset{\mathcal{S}}{\to} 0$ für eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, so ist dies äquivalent mit $\lim\limits_{k\to\infty} p_{j,m}(\varphi_k) = 0 \ \forall\, j,m \in \mathbf{N}_0$. Aus (7.3) folgt deshalb

$$0 \le \lim_{k\to\infty} |T(\varphi_k)| \le C \cdot \lim_{k\to\infty} p_{j,m}(\varphi_k) = 0,$$

und dies impliziert bereits die Stetigkeit von $T$ auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Zum Beweis der Notwendigkeit von (7.3) nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, es gelte

$$\forall\, C < \infty \ \forall\, j,m \in \mathbf{N}_0 \ \exists\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \ : \ |T(\varphi)| > C \cdot p_{j,m}(\varphi).$$

Indem wir $C = j = m := k \in \mathbf{N}$ setzen, erhalten wir unter eventueller Normierung eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ mit $1 = |T(\varphi_k)| > k \cdot p_{k,k}(\varphi_k) \ \forall\, k \in \mathbf{N}$. Wegen der filtrierenden Eigenschaft der Halbnorm–Familie (7.2) folgt daraus

$$\frac{1}{k} > p_{k,k}(\varphi_k) \ge p_{j,m}(\varphi_k) \quad \forall\, j,m \le k.$$

Wir haben somit $\lim\limits_{k\to\infty} p_{j,m}(\varphi_k) = 0 \ \forall\, j,m \in \mathbf{N}_0$ oder äquivalent $\varphi_k \overset{\mathcal{S}}{\to} 0$. Da $T$ stetig ist, ergibt sich $T(\varphi_k) \to 0$, im Widerspruch zu $|T(\varphi_k)| = 1$. □

**BSP. (8.7.1)** Es gilt

$$\boxed{\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n),}$$

das heißt, die Einschränkung einer Distribution mit kompaktem Träger auf den Unterraum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ ist eine temperierte Distribution. In der Tat, die Einbettung $Id_3 : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ ist, wie in Satz 7.15(c) gezeigt wurde, stetig und linear. Ebenso ist die Abbildung $T : \mathcal{E}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{K}$ für gegebenes $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ stetig und linear, und somit auch das Kompositum beider Abbildungen

$$T \circ Id_3 : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \overset{Id_3}{\to} \mathcal{E}(\mathbf{R}^n) \overset{T}{\to} \mathbf{K}, \quad \text{also } T \circ Id_3 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n).$$

Es gilt $T|\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) = T \circ Id_3 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \ \forall\, T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$.

**BSP. (8.7.2)** Jedes $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, erzeugt genau eine reguläre Distribution $\mu_f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ vermöge

$$\boxed{\mu_f(\varphi) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).} \tag{7.4}$$

Denn wir haben im Falle $p = \infty$ die Abschätzung

$$|\mu_f(\varphi)| \le \|f\|_\infty \cdot \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^{(n+1)/2} \cdot |\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}\,dx \le \|f\|_\infty \cdot \omega_n \cdot \int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} \cdot p_{n+1,0}(\varphi) < \infty,$$

bzw. im Falle $1 \le p < \infty$ bei Verwendung der HÖLDER–Ungleichung mit $q := p/(p-1)$:

$$|\mu_f(\varphi)| \le \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| \frac{(1+|x|^2)^{k/2} \cdot |\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}}\,dx \le \|f\|_p \cdot \omega_n \cdot \Big( \int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r^2)^{kq/2}} \Big)^{1/q} p_{k,0}(\varphi) < \infty, \quad kq > n,$$

worin $\omega_n := 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ wieder den Inhalt der 1–Sphäre in $\mathbf{R}^n$ bezeichnet. In jedem Fall gilt eine Abschätzung in der Form

$$|\mu_f(\varphi)| \le C \cdot \|f\|_p \cdot p_{j,0}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

und somit resultiert gemäß Satz 8.31 die Aussage $\mu_f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, es seien $f, g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ mit $\mu_f = \mu_g$ gegeben. Dann ergibt sich

$$0 = \mu_f(\varphi) - \mu_g(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} (f(x) - g(x))\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

also $f = g$ *f.ü.* vermöge des Fundamentallemmas der Variationsrechnung.

Die Zuordnung $L^p(\mathbf{R}^n) \ni f \mapsto \mu_f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ induziert einen (algebraischen) Isomorphismus zwischen $L^p(\mathbf{R}^n)$ und einem Unterraum von $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, so daß gelegentlich die regulären Distributionen $\mu_f$ mit ihrer Dichte $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ identifiziert werden.

**BSP. (8.7.3)** Funktionen $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ können im allgemeinen keiner temperierten Distribution zugeordnet werden, da das Integral (7.4) nicht für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ existieren muß. Als Beispiel betrachten wir für $n = 1$ die Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ mit $f(x) := e^{2x^2}$. Die Funktion $\varphi(x) := e^{-x^2}$ gehört zu $\mathcal{S}(\mathbf{R})$; das Integral

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\, dx$$

existiert hingegen nicht.

**BSP. (8.7.4)** Auf dem Unterraum $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ ist die Differentiation $D^\rho$ wieder eine lineare Operation. Wir zeigen, daß der Unterraum $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ unter dieser Operation sogar abgeschlossen ist. Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ und jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$ gilt nämlich $D^\rho\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Somit ist gemäß

$$(D^\rho T)(\varphi) := (-1)^{|\rho|} T(D^\rho\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

für jedes $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ ein lineares Fuktional $D^\rho T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{K}$ wohldefiniert, welches wegen (7.3) der folgenden Abschätzung genügt:

$$|(D^\rho T)(\varphi)| = |T(D^\rho\varphi)| \le C \cdot p_{j,m}(D^\rho\varphi) \le p_{j,m+|\rho|}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

Gemäß Satz 8.21 gilt deshalb $D^\rho T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

Das **Produkt** $aT$ von $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ mit einer Funktion $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ist im allgemeinen *nicht* definiert. Wir sollten das Produkt $aT$ in Analogie zu (4.2) durch

$$(aT)(\varphi) := T(a\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \tag{7.5}$$

erklären. Wie aber das Beispiel $a(x) := e^{2|x|^2}$ und $\varphi(x) := e^{-|x|^2}$ lehrt, ist $a\varphi$ nicht immer eine temperierte Funktion, so daß die rechte Seite in (7.5) nicht erklärt zu sein braucht. Deshalb betrachten wir anstelle von $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ den folgenden Multiplikatoren–Raum:

**Definition 8.20** *Eine Funktion $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ heiße (bei $\infty$)* **langsam anwachsend**, *wenn es zu jedem Multiindex $\sigma \in \mathbf{N}_0^n$ Zahlen $C_\sigma < \infty$ und $j_\sigma \in \mathbf{N}_0$ gibt mit*

$$\boxed{|D^\sigma a(x)| \le C_\sigma \cdot (1 + |x|^2)^{j_\sigma/2} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n.} \tag{7.6}$$

*Die Menge der langsam anwachsenden Funktionen, versehen mit der üblichen algebraischen Struktur der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation mit Skalaren, fassen wir zusammen zum Vektorraum $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$.*

Der Index $M$ steht für "Multiplikator".

**BSP. (8.7.5)** In $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ liegen alle Polynome, aber auch Funktionen $x \mapsto f(x)$ wie

$$f(x) := \ln(1+|x|^2), \quad e^{i\lambda|x|^2}, \quad \sin(\lambda|x|^2), \quad \cos(\lambda|x|), \quad \frac{\sin(\lambda|x|)}{|x|}.$$

Darüber hinaus haben wir $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$.

Wir betrachten auf $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ die Halbnorm–Familie

$$\boxed{p_{\varphi,\sigma}(a) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\varphi(x)\cdot D^\sigma a(x)|, \quad \sigma \in \mathbf{N}_0^n, \ \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \ \ a \in \mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n).} \tag{7.7}$$

Für $a \neq 0$, $\varphi := e^{-|x|^2}$ und $|\sigma| = 0$ gilt sicher $p_{\varphi,\sigma}(a) \neq 0$. Deshalb erzeugt die separierende Halbnorm–Familie (7.7) auf $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ eine lokalkonvexe Topologie, die $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ zu einem lokalkonvexen HAUSDORFF–Raum macht. In völliger Analogie zum Satz 7.11(b) beweist man:

**Satz 8.32** *In der lokalkonvexen Topologie von $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ ist $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dicht in $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$.*

Nun sind wir in der Lage, das Produkt (7.5) sinnvoll zu erklären.

**Satz 8.33** (a) *Jede Funktion $a \in \mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ erzeugt eine reguläre Distribution $\mu_a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ vermöge*

$$\boxed{\mu_a(\varphi) := \int_{\mathbf{R}^n} a(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).} \tag{7.8}$$

(b) *Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ und $a \in \mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ ist das gemäß (7.5) definierte Produkt $aT$ aus $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, und die Abbildung $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \ni T \mapsto aT \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ ist folgenstetig.*

*Beweis:* (a) Wird in (7.6) $\sigma = 0$ gesetzt, so erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mu_a(\varphi)| &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |a(x)|\cdot|\varphi(x)|\,dx \leq C_0 \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^{(j_0+n+1)/2}|\varphi(x)|\,dx}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \\ &\leq C_0\cdot\omega_n\cdot\Big(\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}\Big)\cdot p_{j_0+n+1,0}(\varphi) \quad \forall\ \varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

Wegen Satz 8.31 ergibt sich daraus $\mu_a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

(b) Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ gilt (7.3) mit Zahlen $C < \infty$ und $j, m \in \mathbf{N}_0$. Es folgt unter Verwendung der LEIBNIZschen Differentiationsregel:

$$\begin{aligned} |T(a\varphi)| &\leq C\cdot p_{j,m}(a\varphi) = C\cdot\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\Big((1+|x|^2)^{j/2}\sum_{|\rho|\leq m}|D^\rho(a(x)\varphi(x))|\Big) \\ &\leq C\cdot\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\Big((1+|x|^2)^{j/2}\sum_{|\rho|\leq m}\sum_{\sigma\leq\rho}\Big|\binom{\rho}{\sigma}(D^\sigma a(x))(D^{\rho-\sigma}\varphi(x))\Big|\Big) \\ &\overset{(7.6)}{\leq} C_1\cdot\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\Big((1+|x|^2)^{j/2}\sum_{|\rho|\leq m}\sum_{\sigma\leq\rho}C_\sigma(1+|x|^2)^{j_\sigma/2}|D^{\rho-\sigma}\varphi(x)|\Big) \\ &\leq C_2\cdot p_{j+q,m}(\varphi) \quad \forall\ \varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

mit $q := \max\{j_\sigma : |\sigma| \le m\}$. Wir haben $aT \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, wiederum wegen Satz 8.31. Schließlich beweisen wir die behauptete Folgenstetigkeit. Wir beachten $a\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Für eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ mit $T_k \overset{\mathcal{S}'}{\to} T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ gilt $T_k(\varphi) \overset{\mathbf{K}}{\to} T(\varphi)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, also auch $(aT_k)(\varphi) = T_k(a\varphi) \overset{\mathbf{K}}{\to} T(a\varphi) = (aT)(\varphi)$. □

## 8.8 Die FOURIER–Transformation temperierter Distributionen

Die FOURIER–Transformation, die wir in Abschnitt 7.3 für Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ erklärt hatten, können wir auf Distributionen aus $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ übertragen. Darin besteht der eigentliche Sinn der Einführung der Räume $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ und $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Wir motivieren mit folgendem Beispiel die formale Definition einer distributionellen FOURIER–Transformation.

**BSP. (8.8.1)** Für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gilt gemäß Satz 7.16 auch $\hat\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, so daß beide Funktionen $\psi, \hat\psi$ nach BSP.(8.7.2) reguläre Distributionen $\mu_\psi, \mu_{\hat\psi} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ erzeugen. Der Zusammenhang zwischen $\mu_\psi$ und $\mu_{\hat\psi}$ resultiert aus der PARSEVALschen Formel (3.5), Satz 7.19:

$$\mu_{\hat\psi}(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat\psi(x)\varphi(x)\,dx \overset{(3.5)}{=} \int_{\mathbf{R}^n} \psi(\xi)\hat\varphi(\xi)\,d\xi = \mu_\psi(\hat\varphi) = (\mu_\psi \circ \mathcal{F})(\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n). \tag{8.1}$$

Die Identifikation der Distribution $\mu_\psi$ mit ihrer Dichte $\psi$ rechtfertigt eine formale Setzung $\mathcal{F}\mu_\psi := \mu_{\mathcal{F}\psi} = \mu_{\hat\psi}$, so daß aus (8.1) der folgende Zusammenhang ersichtlich wird:

$$\boxed{\mathcal{F}\mu_\psi = \mu_\psi \circ \mathcal{F}.} \tag{8.2}$$

Da die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gemäß Satz 7.17 in der lokalkonvexen Topologie des Raumes $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ linear und stetig ist, führt das Kompositum von $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ und $\mathcal{F}$ stets auf eine temperierte Distribution $T \circ \mathcal{F} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Deshalb läßt sich der Zusammenhang (8.2) mit folgender Definition in einen allgemeineren Rahmen einbetten:

**Definition 8.21** *Zu gegebenem $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ heiße die durch*

$$\boxed{\mathcal{F}T := T \circ \mathcal{F}, \quad \textit{also} \quad (\mathcal{F}T)(\varphi) := T(\mathcal{F}\varphi) = T(\hat\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)} \tag{8.3}$$

*definierte Distribution $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ die* FOURIER–**Transformierte** *von $T$. Entsprechend heiße $\mathcal{F}^*T := T \circ \mathcal{F}^* \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ die* **inverse** FOURIER–**Transformierte** *von $T$. Die so induzierten Abbildungen $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ (bzw. $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$) heißen (inverse)* **distributionelle** FOURIER–**Transformation** *oder (inverse)* FOURIER–**Transformation** *auf dem Raum $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.*

Der FOURIERsche Integralsatz 7.22 kann nun in der folgenden Weise verallgemeinert werden:

**Satz 8.34** *Die distributionelle* FOURIER–*Transformation $\mathcal{F}$ ist eine bijektive, folgenstetige und lineare Abbildung des Raumes $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ auf sich. Die zu $\mathcal{F}$ inverse Abbildung ist gerade $\mathcal{F}^*$:*

$$\boxed{\mathcal{F}\mathcal{F}^*T = \mathcal{F}^*\mathcal{F}T = T \quad \forall\ T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n).} \tag{8.4}$$

*Beweis:* Die Linearität der Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ folgt unmittelbar aus der Definition (8.3). Für $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ und $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ gilt nämlich:

$$\mathcal{F}(\alpha T + \beta S) = (\alpha T + \beta S) \circ \mathcal{F} = (\alpha T) \circ \mathcal{F} + (\beta S) \circ \mathcal{F} = \alpha(T \circ \mathcal{F}) + \beta(S \circ \mathcal{F}) = \alpha(\mathcal{F}T) + \beta(\mathcal{F}S).$$

Zum Nachweis der schwach* Stetigkeit betrachten wir eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ mit $T_k \overset{\mathcal{S}'}{\to} T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Dann gilt $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi)\ \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, und somit auch

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}T_k(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T_k(\hat{\varphi}) = T(\hat{\varphi}) = \mathcal{F}T(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

also $\mathcal{F}T_k \overset{\mathcal{S}'}{\to} \mathcal{F}T$. Ganz analog zeigt man die Linearität von $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ sowie die Folgenstetigkeit $\mathcal{F}^*T_k \overset{\mathcal{S}'}{\to} \mathcal{F}^*T$. Die Bijektivität resultiert schließlich aus der Relation

$$(\mathcal{F}^*\mathcal{F}T)(\varphi) = T(\mathcal{F}\mathcal{F}^*\varphi) = T(\varphi) = T(\mathcal{F}^*\mathcal{F}\varphi) = (\mathcal{F}\mathcal{F}^*T)(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\ \ \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n),$$

wobei Satz 7.23 verwendet wurde. Wir haben somit $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id = \mathcal{F}\mathcal{F}^*$ gezeigt, also $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. □

Das folgende Beispiel zeigt, daß die FOURIER–Transformierte einer singulären Distribution nicht mehr notwendig singulär sein muß:

**BSP. (8.8.2)** Die FOURIER–Transformierte des DIRAC–Punktfunktionals $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ ist eine reguläre Distribution mit der Dichtefunktion $f = const = (2\pi)^{-n/2} \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, das heißt $\mathcal{F}\delta = \mu_f$. Klar, $\delta$ hat den kompakten Träger $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$. Aus BSP.(8.7.1) ergibt sich deshalb $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Darüber hinaus gilt

$$(\mathcal{F}\delta)(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \delta\Big((2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx\Big) = \int_{\mathbf{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\varphi(x)\,dx = \mu_f(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

In Verallgemeinerung dieses Beispiels gilt sogar:

**Satz 8.35** *Seien $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ und $a \in \mathbf{R}^n$ mit $\operatorname{supp} T = \{a\}$ gegeben. Dann gibt es Zahlen $m \in \mathbf{N}_0$ und $a_\rho \in \mathbf{K}$ mit*

$$\boxed{\mathcal{F}T = \sum_{|\rho|\le m} a_\rho (2\pi)^{-n/2} i^{|\rho|} x^\rho e^{-i\langle a,x\rangle}\,\mu_1 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n),} \tag{8.5}$$

*worin $\mu_1 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ die reguläre Distribution $\mu_1(\varphi) := \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx$ mit der Dichte 1 darstellt.*

*Beweis:* Da die Funktion

$$a(x) := \sum_{|\rho|\le m} a_\rho (2\pi)^{-n/2} i^{|\rho|} x^\rho e^{-i\langle a,x\rangle}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

zur Klasse $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ gehört, definiert das Produkt $a\mu_1$ gemäß Satz 8.33(b) eine temperierte Distribution. Somit ist die rechte Seite von (8.5) wohldefiniert. Wegen Satz 8.17 hat $T$ eine Darstellung

$$T = \sum_{|\rho|\le m} a_\rho D^\rho \delta_a.$$

Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ergibt sich deshalb unter Verwendung Satz 7.17(a):

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{F}T\big)(\varphi) &= T(\mathcal{F}\varphi) = \sum_{|\rho|\le m} a_\rho D^\rho \delta_a(\hat{\varphi}) = \sum_{|\rho|\le m} (-1)^{|\rho|} a_\rho \delta_a(D^\rho \hat{\varphi}) \\ &= \sum_{|\rho|\le m} a_\rho i^{|\rho|} \delta_a\big((x^\rho \varphi)\hat{}\big) = \sum_{|\rho|\le m} a_\rho i^{|\rho|} \big(x^\rho \varphi\big)\hat{}(a) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \Big( \sum_{|\rho|\le m} a_\rho (2\pi)^{-n/2} i^{|\rho|} x^\rho e^{-i\,\langle a,x\rangle} \Big)\, \varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

Da die polynomialen Multiplikatoren $i^{|\rho|}x^\rho$ in der Klasse $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ liegen, zeigt es sich, daß man den Satz 7.16 ohne Schwierigkeit auf temperierte Distributionen übertragen kann:

**Satz 8.36** *Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ und für jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$ gilt:*

(a) $\mathcal{F}(D^\rho T) = i^{|\rho|} x^\rho (\mathcal{F}T)$ *und* $\mathcal{F}^*(D^\rho T) = (-i)^{|\rho|} x^\rho (\mathcal{F}^* T)$.

(b) $\mathcal{F}(x^\rho T) = i^{|\rho|} D^\rho (\mathcal{F}T)$ *und* $\mathcal{F}^*(x^\rho T) = (-i)^{|\rho|} D^\rho (\mathcal{F}^* T)$.

*Beweis:* Wir zeigen die behaupteten Relationen lediglich für $\mathcal{F}$. Ersetzt man anschließend $i$ überall durch $-i$, so resultieren daraus die entsprechenden Relationen für $\mathcal{F}^*$. Wir haben gemäß Satz 7.16 für jedes feste $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$:

$$\mathcal{F}(D^\rho T)(\varphi) = (D^\rho T)(\hat{\varphi}) = (-1)^{|\rho|} T(D^\rho \hat{\varphi}) = i^{|\rho|} T(\mathcal{F}(x^\rho \varphi)) = i^{|\rho|} x^\rho (\mathcal{F}T)(\varphi),$$

also die behauptete Relation (a), sowie

$$\mathcal{F}(x^\rho T)(\varphi) = (x^\rho T)(\hat{\varphi}) = T(x^\rho \hat{\varphi}) = (-i)^{|\rho|} T(\mathcal{F}(D^\rho \varphi)) = i^{|\rho|} D^\rho (\mathcal{F}T)(\varphi),$$

also (b). □

Wir bezeichnen wie früher mit $\tau_h$ für $h \in \mathbf{R}^n$ den Verschiebungsoperator

$$(\tau_h f)(x) := f(x-h).$$

Jede Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ erzeugt offenbar reguläre Distributionen $\mu_f$, $\mu_{\tau_h f} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, die in folgendem Zusammenhang zueinander stehen:

$$\mu_{\tau_h f}(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-h)\varphi(x)\, dx \overset{y:=x-h}{=} \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\varphi(y+h)\, dy = \mu_f(\tau_{-h}\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

Wir nehmen diesen Zusammenhang zum Anlaß zur Definition der *Verschiebung* einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$:

$$\boxed{\tau_h T := T \circ \tau_{-h}, \quad \text{also} \quad (\tau_h T)(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).} \tag{8.6}$$

Man erkennt unschwer, daß die Abbildung $\tau_{-h} : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ stetig und linear ist, so daß mit (8.6) eine Distribution $\tau_h T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ erklärt wird. Insbesondere gilt $\tau_h T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, und wir haben in Analogie zu Satz 7.20:

**Satz 8.37** *Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ und für jedes feste $h \in \mathbf{R}^n$ gilt*

$$\boxed{\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{-i\langle h,x\rangle}(\mathcal{F}T) \quad \textit{und} \quad \mathcal{F}(e^{-i\langle h,x\rangle}T) = \tau_{-h}(\mathcal{F}T).} \tag{8.7}$$

*Beweis:* Unter Verwendung der Definitionen (8.3) und (8.6) resultiert für jedes fest gewählte $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ aus Satz 7.20:

$$\mathcal{F}(\tau_h T)(\varphi) = (\tau_h T)(\hat{\varphi}) = T(\tau_{-h}\hat{\varphi}) = T((e^{-i\langle h,x\rangle}\varphi)\hat{}) = e^{-i\langle h,x\rangle}(\mathcal{F}T)(\varphi)$$

sowie

$$\mathcal{F}(e^{-i\langle h,x\rangle}T)(\varphi) = e^{-i\langle h,x\rangle}T(\hat{\varphi}) = T(e^{-i\langle h,x\rangle}\hat{\varphi}) = T((\tau_h\varphi)\hat{}) = \tau_{-h}(\mathcal{F}T)(\varphi).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung des Satzes. □

**BSP. (8.8.3)** Die charakteristische Funktion $\chi_R(x)$ der Sphäre $S_R(0) \subset \mathbf{R}^3$ vom Radius $R > 0$ ist zwar eine $L^\infty$–Funktion. Sie lebt aber nur auf einer Nullmenge und erzeugt deshalb eine singuläre temperierte Distribution, nämlich

$$V_R(\varphi) := \int\limits_{\mathbf{R}^3} \chi_R(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{|x|=R} \varphi(x)\,d\omega \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3),$$

worin mit $\omega$ das Oberflächenelement auf der Sphäre $S_R(0)$ bezeichnet wird. Die distributionelle FOURIER–Transformierte von $V_R$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}V_R)(\varphi) &= V_R(\hat{\varphi}) = \int\limits_{|x|=R} (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{\mathbf{R}^3_\xi} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(\xi)\,d\xi\,d\omega \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{\mathbf{R}^3_\xi} \varphi(\xi) \int\limits_{|x|=R} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,d\omega\,d\xi,\end{aligned}$$

wobei wir den Vertauschungssatz von FUBINI verwendet haben. Bei festgehaltenem $\xi \neq 0$ drehen wir das $x$–Koordinatensystem so, daß der Vektor $\xi$ den Nordpol des dreidimendionalen Polarkoordinatensystems $(r, \psi, \vartheta)$ durchstößt. Dann gilt für Punkte $x$ auf der Sphäre $S_R(0)$:

$$e^{-i\langle x,\xi\rangle} = e^{-iR|\xi|\cos\vartheta}, \quad d\omega = R^2 \sin\vartheta\,d\psi\,d\vartheta, \quad 0 \le \psi < 2\pi, \;\; 0 \le \vartheta \le \pi,$$

und somit

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}V_R)(\varphi) &= (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{\mathbf{R}^3_\xi} \varphi(\xi)R^2 \int\limits_{\psi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} e^{-iR|\xi|\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi\,d\xi \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbf{R}^3_\xi} \varphi(\xi)\frac{R}{i|\xi|}\left(e^{iR|\xi|} - e^{-iR|\xi|}\right)d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,R \int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}\varphi(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Da $\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}$ eine $L^\infty$–Funktion ist, erhalten wir schließlich die reguläre temperierte Distribution $\mathcal{F}V_R = \mu_f$, die von der Dichtefunktion

$$f(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,R\frac{\sin R|x|}{|x|}, \quad x \in \mathbf{R}^3,$$

erzeugt wird.

**BSP. (8.8.4)** SOBOLEV**–Räume** $H^s(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$. Die HILBERT–Räume $H^m(\mathbf{R}^n) = W^{m,2}(\mathbf{R}^n)$ haben wir für Exponenten $m \in \mathbf{N}_0$ in Abschnitt 5.3 eingeführt:

$$H^m(\mathbf{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbf{R}^n) \,:\, \forall\, |\rho| \le m \text{ besitzt } f \text{ eine verallg. Ableitung } D^\rho f \in L^2(\mathbf{R}^n)\}.$$

Da die FOURIER–PLANCHEREL–Transformation $\tilde{\mathcal{F}}$ gemäß Satz 7.25 eine bijektive isometrische Abbildung des Raumes $L^2(\mathbf{R}^n)$ auf sich vermittelt, können wir die Definition des SOBOLEV–Raumes $H^m(\mathbf{R}^n)$ auch mit Hilfe von $\tilde{\mathcal{F}}$ bewerkstelligen. Wir zeigen:

**Satz 8.38** *Für $m \in \mathbf{N}_0$ gilt*

$$\boxed{H^m(\mathbf{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbf{R}^n) \,:\, (1+|\xi|^2)^{m/2}\tilde{\mathcal{F}}f \in L^2(\mathbf{R}^n)\}.} \tag{8.8}$$

*Die Norm*

$$\boxed{|||f|||_m := \|(1+|\xi|^2)^{m/2}\tilde{\mathcal{F}}f\|_{2;\mathbf{R}^n}, \quad f \in H^m(\mathbf{R}^n),} \tag{8.9}$$

*und die* SOBOLEV*–Norm $\|f\|_{m,2}$ aus* (3.1), Abschnitt 5.3, *sind äquivalent.*

*Beweis:* Gemäß (2.12), Abschnitt 7.2, haben wir für jeden Multiindex $\rho \in \mathbf{N}_0^n$ und jedes $\xi \in \mathbf{R}^n$ die Identität $|\xi^\rho|^2 = \xi^{2\rho}$. Wir erhalten mit Hilfe der PARSEVAL–Gleichung (4.1) aus Abschnitt 7.4:

$$\begin{aligned}\|f\|_{m,2}^2 &= \sum_{|\rho|\le m} \|D^\rho f\|_{2;\mathbf{R}^n}^2 = \sum_{|\rho|\le m} \|\tilde{\mathcal{F}}(D^\rho f)\|_{2;\mathbf{R}^n}^2 = \sum_{|\rho|\le m} \|\xi^\rho(\tilde{\mathcal{F}}f)\|_{2;\mathbf{R}^n}^2 \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left|(\tilde{\mathcal{F}}f)(\xi)\right|^2 \sum_{|\rho|\le m} |\xi^\rho|^2\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \left|(\tilde{\mathcal{F}}f)(\xi)\right|^2 \sum_{|\rho|\le m} \xi^{2\rho}\, d\xi.\end{aligned}$$

Zur Abschätzung des letzten Integrals verwenden wir Satz 7.9:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left|(\tilde{\mathcal{F}}f)(\xi)\right|^2 \sum_{|\rho|\le m} \xi^{2\rho}\, d\xi \quad \begin{cases} \ge A_m \cdot \|(1+|\xi|^2)^{m/2}\tilde{\mathcal{F}}f\|_{2;\mathbf{R}^n}^2, \\ \le B_m \cdot \|(1+|\xi|^2)^{m/2}\tilde{\mathcal{F}}f\|_{2;\mathbf{R}^n}^2. \end{cases}$$

Somit resultiert

$$\sqrt{A_m}\cdot |||f|||_m \le \|f\|_{m,2} \le \sqrt{B_m}\cdot |||f|||_m,$$

und daraus erhält man die Behauptung des Satzes. □

**Bemerkung 8.6** Die Darstellung (8.8) zeigt, daß die Definition des SOBOLEV–Raumes $H_m(\mathbf{R}^n)$ **ableitungsfrei** erfolgen kann. Der augenscheinliche Vorteil dieser Darstellung besteht in der Tatsache, daß wir nicht auf ganzzahlige Exponenten $m \in \mathbf{N}_0$ fixiert sind. Wir können deshalb in (8.8) den Exponenten $m$ durch eine beliebige Zahl $s \in \mathbf{R}$ ersetzen. Es ist dabei allerdings zu beachten, daß wir uns nur noch für nichtnegatives $s \ge 0$ im Rahmen des klassischen Funktionsbegriffs bewegen. Denn für $\tilde{\mathcal{F}}f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ mit $(1+|\xi|^2)^{s/2}\tilde{\mathcal{F}}f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ erhalten wir:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |(\tilde{\mathcal{F}}f)(\xi)|^2\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^s |(\tilde{\mathcal{F}}f)(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^s}\, d\xi \overset{s\ge 0}{\le} \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |(\tilde{\mathcal{F}}f)(\xi)|^2\, d\xi < \infty,$$

also $\tilde{\mathcal{F}}f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ und somit auch $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Wie wir in BSP.(8.8.2) gezeigt haben, ist die FOURIER–Transformierte $\mathcal{F}\delta$ des DIRAC–Punktfunktionals eine reguläre Distribution $\mu_{\hat{f}}$ mit Dichtefunktion $\hat{f} := (2\pi)^{-n/2} = const.$ Wir haben in diesem Fall

$$\int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = (2\pi)^{-n} \cdot \omega_n \int_0^\infty r^{n-1}(1+r^2)^s \, dr < \infty \quad \text{genau für} \quad s < -\frac{n}{2}, \tag{8.10}$$

worin wir wieder $\omega_n := 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ gesetzt haben. Das heißt, die Klassenbedingung $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbf{R}^n)$ in (8.8) kann auch von Dichten $\hat{f}$ regulärer Distributionen $\mu_{\hat{f}}$ erfüllt werden, welche FOURIER–Transformierte von temperierten Distributionen sind.

Durch obige Bemerkung ist nun die folgende Definition motiviert:

**Definition 8.22** *Für $s \in \mathbf{R}$ heiße der Vektorraum*

$$\boxed{H^s(\mathbf{R}^n) := \{T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \,:\, \mathcal{F}T \quad \textit{hat eine Dichte } \hat{f} \textit{ mit } \quad (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbf{R}^n)\}}$$

SOBOLEV*–Raum der Ordnung $s$. Sind $T, S \in H^s(\mathbf{R}^n)$ gegeben, und sind $\hat{f}, \hat{g}$ die Dichten der* FOURIER*–Transformierten $\mathcal{F}T$ bzw. $\mathcal{F}S$, so ist auf $H^s(\mathbf{R}^n)$ ein* **Skalarprodukt** *gemäß*

$$\langle T, S\rangle_s := \langle (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{g}\rangle_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

*definiert. Mit $(H^s(\mathbf{R}^n), \langle\cdot,\cdot\rangle_s)$ liegt wieder ein* HILBERT*–Raum vor.*

Gemäß (8.10) haben wir

$$\boxed{\delta \in H^s(\mathbf{R}^n) \quad \forall\, s < -\frac{n}{2},}$$

ferner gilt für $s \geq 0$, wie in Bemerkung 8.6 gezeigt:

$$H^s(\mathbf{R}^n) \cong \{f \in L^2(\mathbf{R}^n) \,:\, (1+|\xi|^2)^{s/2}\tilde{\mathcal{F}}f \in L^2(\mathbf{R}^n)\}.$$

---

Wir behandeln abschließend die Frage, ob es in Analogie zum klassischen Fall einen Faltungssatz (vgl. Satz 7.41) für die distributionelle FOURIER–Transformation gibt. Dazu zeigen wir in einem ersten Schritt, daß die FOURIER–Transformierte einer Distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ relativ einfach berechnet werden kann. Wir erinnern nochmals an die Inklusion $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ aus BSP.(8.7.1), die die Existenz der FOURIER–Transformierten von $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ sicherstellt.

**Satz 8.39** *Für $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ ist die* FOURIER*–Transformierte $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ eine reguläre Distribution mit der $C^\infty$–Dichtefunktion*

$$\boxed{\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} T_x(e^{-i\langle x,\xi\rangle}), \quad \xi \in \mathbf{R}^n.} \tag{8.11}$$

*Beweis:* Gemäß Satz 8.13 haben wir $\hat{f} \in \mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$. Für $\epsilon > 0$ sei $T_\epsilon := T * \omega_\epsilon$ die in Satz 8.24 definierte Regularisierung der Distribution $T$. Als Funktion erzeugt $T_\epsilon$ eine reguläre Distribution $\mu_{T_\epsilon}$, und wir zeigen

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \mu_{T_\epsilon}(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

also $\mu_{T_\epsilon} \overset{\mathcal{S}'}{\to} T$. In der Tat, verwenden wir wieder die Symbolik $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$, so gilt für festes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \mu_{T_\epsilon}(\varphi) &= \int_{\mathbf{R}^n} (T * \omega_\epsilon)(x)\varphi(x)\,dx = ((T * \omega_\epsilon) * \tilde{\varphi})(0) \overset{\text{Satz } 8.23(c)}{=} (T * (\omega_\epsilon * \tilde{\varphi}))(0) \\ &\overset{(6.7)}{=} T[(\omega_\epsilon * \tilde{\varphi})\tilde{}]. \end{aligned}$$

Nun erfolgt, wie im Vorspann zu Satz 7.24 gezeigt wurde, die Konvergenz $\tilde{\varphi}_\epsilon := \omega_\epsilon * \tilde{\varphi} \overset{\mathcal{E}}{\to} \tilde{\varphi}$, und daraus erhalten wir

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \mu_{T_\epsilon}(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0+} T[(\omega_\epsilon * \tilde{\varphi})\tilde{}] = T((\tilde{\varphi})\tilde{}) = T(\varphi),$$

also (8.11). Da $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ in der schwach$^*$ Topologie stetig ist, erhalten wir daraus

$$\lim_{\epsilon \to 0+} (\mathcal{F}\mu_{T_\epsilon})(\varphi) = (\mathcal{F}T)(\varphi).$$

Hierin gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mu_{T_\epsilon}(\varphi) &= \mu_{T_\epsilon}(\hat{\varphi}) = \int\limits_{\mathbf{R}^n_x} (T * \omega_\epsilon)(x)\Big((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n_\xi} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(\xi)\,d\xi\Big)\,dx \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^n_\xi} \varphi(\xi)\Big((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n_x} (T * \omega_\epsilon)(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,dx\Big)\,d\xi, \end{aligned}$$

wobei wir den Vertauschungssatz von FUBINI verwendet haben. Das heißt, die reguläre Distribution $\mathcal{F}\mu_{T_\epsilon}$ hat eine Dichtefunktion

$$\hat{f}_\epsilon(\xi) := (2\pi)^{-n/2}((T_x * \omega_\epsilon) * e^{i\langle x,\xi\rangle})(0) = (2\pi)^{-n/2}(T_x * (\omega_\epsilon * e^{i\langle x,\xi\rangle}))(0) \overset{(6.7)}{=} (2\pi)^{-n/2}T_x[(\omega_\epsilon * e^{i\langle x,\xi\rangle})\tilde{}].$$

Wegen $(\omega_\epsilon * e^{i\langle x,\xi\rangle})\tilde{} \overset{\mathcal{E}}{\to} e^{-i\langle x,\xi\rangle}$, gleichmäßig in $\xi$ auf jeder beschränkten Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, folgern wir aus der Stetigkeit von $T$:

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \hat{f}_\epsilon(\xi) = (2\pi)^{-n/2}T_x(e^{-i\langle x,\xi\rangle}) \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Verwenden wir jetzt das Lemma von FATOU in der Form (5.4), Abschnitt 4.5, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0+} |\mu_{\hat{f}_\epsilon}(\varphi) - \mu_{\hat{f}}(\varphi)| &\le \limsup_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}_\epsilon(\xi) - \hat{f}(\xi)| \cdot |\varphi(\xi)|\,d\xi \\ &\le \int_{\mathbf{R}^n} \limsup_{\epsilon \to 0+} |\hat{f}_\epsilon(\xi) - \hat{f}(\xi)| \cdot |\varphi(\xi)|\,d\xi = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mu_{\hat{f}}(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0+} \mu_{\hat{f}_\epsilon}(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0+} (\mathcal{F}\mu_{T_\epsilon})(\varphi) = (\mathcal{F}T)(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

Wir sind nun in der Lage, den folgenden distributionellen Faltungssatz zu beweisen:

**Satz 8.40** *Für gegebenes $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ hat die reguläre temperierte Distribution $\mu_{T*\varphi}$ eine distributionelle* FOURIER*–Transformierte*

$$\boxed{\mathcal{F}\mu_{T*\varphi} = (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}\cdot(\mathcal{F}T).} \tag{8.12}$$

*Für $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ und $S \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ gilt $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ sowie*

$$\boxed{\mathcal{F}(T*S) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}\cdot(\mathcal{F}S),} \tag{8.13}$$

*wobei $\hat{f} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ die gemäß (8.11) definierte Dichte der* FOURIER*–Transformierten $\mathcal{F}T$ ist.*

*Beweis:* Es sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Aus dem Faltungssatz 7.41 folgt

$$\mathcal{F}(\hat{\varphi}\psi) = (2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}\hat{\varphi}) * \hat{\psi} = (2\pi)^{-n/2}\tilde{\varphi} * \hat{\psi}$$

mit $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\mu_{T*\varphi}(\psi) &= \mu_{T*\varphi}(\hat{\psi}) = \int_{\mathbf{R}^n}(T*\varphi)(x)\hat{\psi}(x)\,dx = ((T*\varphi)*(\hat{\psi})\tilde{})(0) \\
&= (T*(\varphi*\check{\psi}))(0) \overset{(6.7)}{=} T((\varphi*\check{\psi})\tilde{}) = T(\tilde{\varphi}*\hat{\psi}) = T((2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(\hat{\varphi}\psi)) \\
&= (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}(\mathcal{F}T)(\psi),
\end{aligned}$$

und dies ist die behauptete Relation (8.12). Liegt speziell $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ vor, so können wir Satz 8.39 verwenden: $\mathcal{F}T = \mu_{\hat{f}}$ mit der Dichtefunktion $\hat{f}$ aus (8.11). In diesem Fall erhalten wir den folgenden Zusammenhang:

$$\mathcal{F}(T*\varphi) = (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}\cdot\hat{f}. \tag{8.14}$$

Zum Beweis von (8.13) setzen wir wieder $T_\epsilon := T * \omega_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ für $\epsilon > 0$. Dann gilt

$$S * T_\epsilon = S * (T * \omega_\epsilon) = (S*T) * \omega_\epsilon = (T*S) * \omega_\epsilon.$$

Bei Anwendung der FOURIER–Transformation ergibt sich nach Übergang zu den von diesen Dichten erzeugten regulären Distributionen, indem wir die Identitäten (8.12) und (8.14) benutzen:

$$\mathcal{F}\mu_{S*T_\epsilon} \overset{(8.12)}{=} (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(T*\omega_\epsilon)\cdot(\mathcal{F}S) \overset{(8.14)}{=} (2\pi)^{n/2}\cdot(2\pi)^{n/2}\cdot\hat{\omega}_\epsilon\cdot\hat{f}\cdot(\mathcal{F}S) \overset{(8.12)}{=} (2\pi)^{n/2}\hat{\omega}_\epsilon\cdot\mathcal{F}(T*S).$$

Aus der letzten Gleichung extrahieren wir

$$\hat{\omega}_\epsilon\cdot\mathcal{F}(T*S) = (2\pi)^{n/2}\hat{\omega}_\epsilon\cdot\hat{f}\cdot(\mathcal{F}S),$$

und wegen

$$\hat{\omega}_\epsilon(\xi) = \epsilon^{-n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\omega(\frac{x}{\epsilon})\,dx \overset{y:=x/\epsilon}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-i\epsilon\langle y,\xi\rangle}\omega(y)\,dy \to \int\limits_{\mathbf{R}^n}\omega(y)\,dy = 1 \quad (\epsilon\to 0+)$$

resultiert die behauptete Relation (8.13). □