FUNKTIONENTHEORIE

Prof. Dr. Karl Mathiak

Vorlesung SS 1998
TU Braunschweig

Institut für Algebra und Zahlentheorie
Pockelsstraße 14
TU Braunschweig

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen **1**

1.1 Konstruktion der komplexen Zahlen 1
1.2 Quadratische Gleichungen 3
1.3 Trigonometrische Darstellung 4
1.4 Erweiterte komplexe Ebene 6
1.5 Aufgaben 7

2 Möbiustransformationen **9**

2.1 Die Gruppeneigenschaft 9
2.2 Das Doppelverhältnis 12
2.3 Die Kreisinvarianz 15
2.4 Invarianz der Orientierung 16
2.5 Aufgaben 18

3 Differentiation **19**

3.1 Grenzwerte 19
3.2 Differenzierbare Funktionen 20
3.3 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen 22
3.4 Die Exponentialfunktion 25
3.5 Gebiete 27
3.6 Konforme Abbildungen 28
3.7 Aufgaben 31

4 Integration **33**

4.1 Kurven und Wege 33
4.2 Definition komplexer Integrale 34
4.3 Integration über glatte Kurven 38
4.4 Aufgaben 42

5 Die Umlaufzahl **43**
5.1 Abstand von Mengen 43
5.2 Die Umlaufzahl 45
5.3 Einfach zusammenhängende Gebiete 48
5.4 Aufgaben 50

6 Integration holomorpher Funktionen **51**
6.1 Cauchyscher Integralsatz 51
6.2 Die Integralformeln 53
6.3 Wegunabhängige Integrale 57
6.4 Der Logarithmus 60
6.5 Aufgaben 62

7 Unendliche Reihen **64**
7.1 Funktionenreihen 64
7.2 Potenzreihen 69
7.3 Die Taylor-Entwicklung 71
7.4 Identitätsatz 73
7.5 Laurent-Reihen 75
7.6 Isolierte Singularitäten 81
7.7 Aufgaben 86

8 Residuen **87**
8.1 Der Residuensatz 87
8.2 Singularitäten in ∞ 90
8.3 Nullstellen und Pole 95
8.4 Aufgaben 97

A Metrische Räume **99**

B Beweis des Cauchyschen Integralsatzes **103**
B.1 Reduktion auf Streckenzüge 103
B.2 Ketten 106
B.3 Umlaufzahl von 1-Zyklen 109
B.4 Das Goursatsche Lemma 113

Kapitel 1 Komplexe Zahlen

1.1 Konstruktion der komplexen Zahlen

Wir setzen im folgenden den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als bekannt voraus.

Satz 1.1 *Es sei* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *die Menge der Paare reeller Zahlen.* $\mathbb{C}$ *ist bezüglich der Verknüpfungen*

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\end{aligned}$$

ein Körper.

Beweis: Man zeigt leicht, daß $\mathbb{C}$ ein kommutativer Ring und $(1, 0)$ Einselement ist. Für $(a, b) \neq (0, 0)$, also $a^2 + b^2 \neq 0$, gilt

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Folglich ist (a, b) invertierbar und damit $\mathbb{C}$ ein Körper. □

Bezüglich der Addition und der Verknüpfung

$$c \cdot (a, b) = (c\,a, c\,b)$$

ist $\mathbb{C}$ ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Elemente $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}$. Jedes Element aus $\mathbb{C}$ schreibt sich daher

$$z = (a, b) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1) = a + b\,i.$$

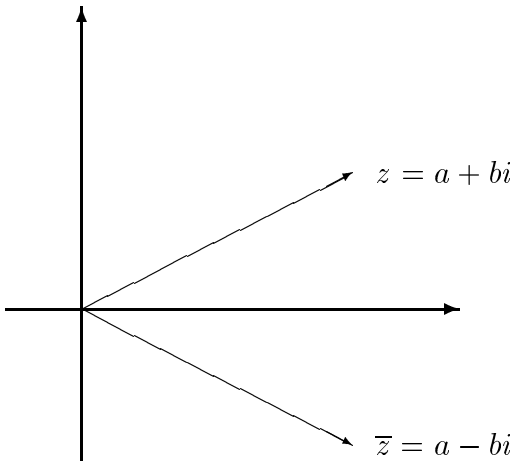
Es gilt $i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$ und allgemeiner

$$(a + bi)\,(c + di) = ac - bd + (ad + bc)\,i.$$

Die Definition komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen legt es nahe, sie mit Punkten der Ebene zu identifizieren. Man spricht dann von *komplexer* oder GAUSSscher Ebene. Jeder komplexen Zahl $z = a + bi$ entspricht ein Punkt (a, b) in der komplexen Ebene. a heißt *Real-* und b *Imaginärteil* von z, geschrieben

$$a = \operatorname{Re} z, \qquad b = \operatorname{Im} z.$$

Man nennt $\overline{z} = a - bi$ die zu $z = a + bi$ *konjugiert komplexe* Zahl. Man erhält $\overline{z}$ durch Spiegeln an der reellen Achse.



Wie man leicht zeigt, gilt

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z, \\ \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w}, \\ \overline{zw} &= \overline{z} \cdot \overline{w}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2\,i}.$$

Zur Vereinfachung fassen wir $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf. Es gilt

$$z \text{ reell} \iff z = \overline{z}.$$

Das Produkt einer komplexen Zahl mit seiner Konjugierten ist eine nicht negative reelle Zahl

$$z\,\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Der *Absolutbetrag* einer komplexen Zahl z ist dann

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Geometrisch ist $|z|$ der Abstand von z zum Nullpunkt. Es gilt $|z|^2 = z\overline{z} = |\overline{z}|^2$, also $|z| = |\overline{z}|$. Ferner gilt für Real- und Imaginärteil die Abschätzung

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z \leq |z|. \tag{1.1}$$

Satz 1.2 *Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften*

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\iff z = 0, \\ |z+w| &\leq |z| + |w|, \\ |z \cdot w| &= |z| \cdot |w|. \end{aligned}$$

Beweis: Durch Nachrechnen, z.B. für die *Dreiecksungleichung*:

Nach (1.1) gilt $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \le |z\overline{w}| = |z|\,|w|$, also

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\le |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| = (|z|+|w|)^2\,. \end{aligned}$$

□

Aus Satz 1.2 ergibt sich, daß die komplexen Zahlen bezüglich der Abstandsfunktion

$$d(z,w) = |z-w|$$

einen *metrischen Raum* bilden.

1.2 Quadratische Gleichungen

Ein wesentlicher Unterschied zwischen reellen und komplexen Zahlen zeigt sich hinsichtlich der Existenz von Quadratwurzeln. In $\mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $x^2 = a$ nur für $a \ge 0$ Lösungen. Mit $\sqrt{a}$ sei die Lösung ≥ 0 bezeichnet. In $\mathbb{C}$ lassen sich dagegen aus jeder komplexen Zahl die Quadratwurzeln ziehen.

Satz 1.3 *Die Gleichung $z^2 = a + bi$ besitzt in $\mathbb{C}$ die Lösungen*

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} + +i\ \mathrm{sgn}\,b\,\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right). \tag{1.2}$$

Hierbei ist

$$\mathrm{sgn}\,b = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad b \ge 0 \\ -1 & \text{für} \quad b < 0 \end{cases}$$

das *Signum* von b. Man verifiziert (1.2) durch Quadrieren

$$z_1^2 = z_2^2 = \frac{1}{2}\,(a+\sqrt{a^2+b^2}) - \frac{1}{2}\,(-a+\sqrt{a^2+b^2}) + 2i\ \mathrm{sgn}\,b \cdot \sqrt{\frac{1}{4}\,b^2} = a+bi.$$

Man findet die Formel für die Wurzeln durch den Ansatz

$$(x+iy)^2 = a+bi,$$

woraus durch Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$x^2 - y^2 = a, \qquad 2xy = b$$

folgt. Wir erhalten hieraus

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Aus

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad x^2 - y^2 = a$$

folgt dann

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})$$
$$y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Wegen $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ lassen sich die Quadratwurzeln in $\mathbb{R}$ ziehen. Dabei sind die Vorzeichen von x und y so zu wählen, daß $2xy = b$ gilt.

Satz 1.4 *Jede quadratische Gleichung*

$$z^2 + pz + q = 0, \qquad p,\ q \in \mathbb{C}$$

besitzt zwei Lösungen in $\mathbb{C}$ *(sie fallen zusammen, wenn* $p^2 - 4q = 0$ *ist).*

Beweis: Die Gleichung läßt sich durch quadratische Ergänzung umformen

$$z^2 + pz + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0 \iff \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Ist $p^2 - 4q = 0$, so existiert eine Lösung, andernfalls gibt es zwei verschiedene Quadratwurzeln und damit auch zwei verschiedene Lösungen der quadratischen Gleichung. □

1.3 Trigonometrische Darstellung

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine Darstellung

$$z = r\,(\cos t + i \sin t),$$

wobei $r = |z|$ und t durch z eindeutig bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Fordert man $-\pi \leq t < \pi$, so ist t eindeutig bestimmt. Man nennt dann t *Argument* von z, geschrieben

$$t = \arg z, \quad -\pi \leq t < \pi.$$

Man beachte, daß das Argument nur für komplexe Zahlen $z \neq 0$ definiert ist.

Aufgrund der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen gilt die Formel von MOIVRE

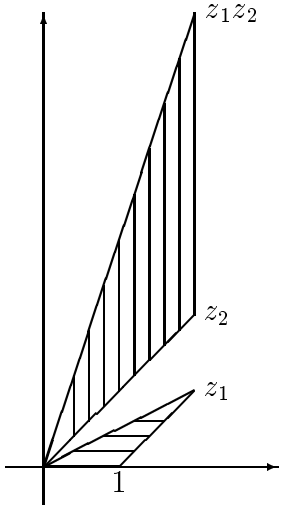
$$(\cos t_1 + i\,\sin t_1)(\cos t_2 + i\,\sin t_2). = \cos(t_1 + t_2) + i\,\sin(t_1 + t_2)$$

Für die Argumente folgt daraus

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \mod 2\pi.$$

(Hierbei bedeutet $t_1 \equiv t_2 \mod 2\pi$: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $t_1 = t_2 + 2k\pi$.)

Die geometrische Konstruktion des Produkts ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $(0, 1, z_1)$ und $(0, z_2, z_1 \cdot z_2)$. In der folgenden Skizze ist $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2+2i$ und $z_1 \cdot z_2 = 2 + 6i$.



Entsprechend benutzt man bei der geometrischen Konstruktion eines Quotienten die Ähnlichkeit der Dreiecke $(0, 1, z_1)$ und $(0, z_2/z_1, z_2)$.

Sind z_1 und z_2 aus $\mathbb{C}$, so ist der Winkel zwischen den Vektoren z_1 und z_2

$$\sphericalangle(z_1, z_2) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right).$$

Man spricht von einem *gerichteten Winkel*, der in diesem Fall von z_1 nach z_2 gerichtet ist. Es gilt

$$\sphericalangle(z_2, z_1) = -\sphericalangle(z_1, z_2).$$

Durch Induktion nach n ergibt sich aus der MOIVREschen Formel

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt. \tag{1.3}$$

Hieraus folgt für n-te Wurzeln

Satz 1.5 *Ist $a = r(\cos t + i \sin t)$ die trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl, so hat die Gleichung*

$$z^n = a$$

die n Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{t + 2\pi k}{n} \right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die Lösungen liegen daher in der komplexen Ebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$. Sie bilden ein regelmäßiges n-Eck.

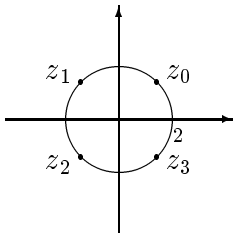
Beispiel

Die Gleichung $z^4 + 16 = 0$ besitzt wegen $-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$ die Lösungen

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

also

$$\begin{aligned} z_0 &= 2(\cos \tfrac{\pi}{4} + i \sin \tfrac{\pi}{4}) &&= \sqrt{2}(1 + i) \\ z_1 &= 2(\cos \tfrac{3\pi}{4} + i \sin \tfrac{3\pi}{4}) &&= \sqrt{2}(-1 + i) \\ z_2 &= 2(\cos \tfrac{5\pi}{4} + i \sin \tfrac{5\pi}{4}) &&= \sqrt{2}(-1 - i) \\ z_3 &= 2(\cos \tfrac{2\pi}{4} + i \sin \tfrac{7\pi}{4}) &&= \sqrt{2}(1 - i). \end{aligned}$$



1.4 Erweiterte komplexe Ebene

Es sei

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Man erweitert hierbei die komplexe Ebene durch einen weiteren Punkt, den man mit ∞ bezeichnet. Die Verknüpfungen in $\mathbb{C}$ lassen sich teilweise auf $\widehat{\mathbb{C}}$ übertragen. Man definiert

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \qquad \frac{z}{\infty} = 0, \qquad \frac{z}{0} = \infty$$

für $z \neq 0$ und

$$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$$

für beliebige $z \in \mathbb{C}$. Man beachte, daß einige Ausdrücke wie $\infty \pm \infty$ und $0 \cdot \infty$ nicht definiert sind.

Geometrisch läßt sich $\widehat{\mathbb{C}}$ auf der *Riemannschen Zahlenkugel* darstellen. Es sei

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

die Einheitssphäre.

Satz 1.6 *Die Abbildung*

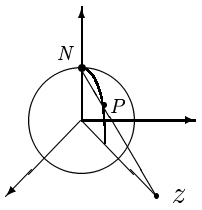
$$\varphi : S \to \widehat{\mathbb{C}}, \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} z = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{für } \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

ist eine Bijektion. (Man bezeichnet φ als stereographische Projektion.*)*

Beweis:

Man verbindet den Nordpol $N = (0, 0, 1)$ mit einem Punkt $P = (x_1, x_2, x_3)$ von S durch eine Gerade. Diese besitzt die Parameterdarstellung

$$x = (0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3 - 1).$$



Setzt man die dritte Komponente Null

$$1 + t(x_3 - 1) = 0, \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{1 - x_3},$$

so erhält man den Schnittpunkt

$$z = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_1}{1 - x_3} \right) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

der Geraden mit der (x_1, x_2)-Ebene, die man als komplexe Ebene deutet.

Umgekehrt ist durch z eindeutig ein Punkt $P \in S$ als Schnittpunkt von S mit der Verbindungsgeraden von z und N bestimmt. □

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1.1 Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $(2 + 3i)z \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 1.2 Ermittle die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(1 - i)z^2 + (8 - 4i)z + (15 + 5i) = 0.$$

Aufgabe 1.3 Beweise die Identität

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

und zeige hiermit, daß die komplexen Zahlen $z_1,\ z_2,\ z_3$ mit

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \text{und} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$

in der komplexen Ebene ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Aufgabe 1.4 Zeige, daß die Gleichung

$$a\,z + b\,\overline{z} + c = 0, \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$$

eine eindeutige Lösung besitzt, wenn $|a| \neq |b|$ gilt. Gib im Fall $|a| = |b|$ eine Bedingung an, unter der keine Lösung der Gleichung existiert.

Hinweis: Beachte $\overline{b}\,z + \overline{a}\,\overline{z} + \overline{c} = 0$.

Aufgabe 1.5 Ermittle sämtliche Lösungen der Gleichungen

$$z^3 = 4 + 4i, \qquad z^4 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$$

und skizziere sie in der komplexen Ebene.

Aufgabe 1.6 Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = 3 + 4i$. Ermittle z_3 und z_4, so daß alle vier Zahlen in der komplexen Ebene ein Quadrat bilden.

Hinweis: Benutze, daß die Multiplikation mit i eine Drehung um einen rechten Winkel bedeutet. Es gibt drei Lösungen.

Kapitel 2 Möbiustransformationen

2.1 Die Gruppeneigenschaft

Eine Funktion

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \;\text{ mit }\; a\,d - b\,c \neq 0$$

heißt *Möbiustransformation* oder *gebrochen lineare Abbildung.*
Wegen

$$f(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$$

setzt man $f(\infty) = \frac{a}{c}$, ferner für die Nullstelle des Nenners $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.
(*Die Bedingung* $ad - bc \neq 0$ *schließt die konstanten Funktionen aus.*)

Beispiele

1. $f(z) = z + b$. Die Abbildung ist geometrisch eine *Translation* oder *Parrallelverschiebung* um den Vektor b.

2. $f(z) = a \cdot z$. Um die geometrische Bedeutung zu erkennen, schreiben wir $a = r(\cos\phi + i\,\sin\phi)$. Dann ist

$$f(z) = \underbrace{r}_{\text{Streckung}} \cdot \underbrace{(\cos\phi + i\,\sin\phi)}_{\text{Drehung}} \cdot z,$$

   also f in eine Drehung um ϕ und eine anschließende Streckung (Stauchung) um den Faktor r zerlegbar. Geometrisch nennt man eine solche Abbildung eine *Drehstreckung.*

3. Die Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$ bezeichnet man als *Inversion am Einheitskreis.*

   Ist $z = r \cdot (\cos t + i\,\sin t)$, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{r}\,(\cos(-t) + i\,\sin(-t)) = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}.$$

   Punkte außerhalb des Einheitskreises werden in das Innere abgebildet und umgekehrt. Dabei ist $f(0) = \infty$ und $f(\infty) = 0$.

4. Für eine allgemeine Möbiustransformation mit $c \neq 0$ gilt

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \frac{bc - ad}{c^2}\,\frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c}\,,$$

also ist f aus den obigen elementaren Möbiustransformation zusammensetzbar. Ist $c = 0$, so kann man $d = 1$ setzen. Dann ist $f(z) = az + b$, also f eine Drehstreckung mit nachfolgender Translation.

Satz 2.1 *Die Möbiustransformationen bilden (bezüglich der Hintereinanderschaltung) eine Gruppe.*

Beweis: 1.) Das Produkt zweier Möbiustransformationen ist wieder eine Möbiustransformation: Seien

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{a'\,z + b'}{c'\,z + d'}$$

zwei Möbiustransformationen. Dann ist

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{\overbrace{(a\,a' + b\,c')}^{\alpha}\,z + \overbrace{(b\,d' + a\,b')}^{\beta}}{\underbrace{(c\,a' + d\,c')}_{\gamma}\,z + \underbrace{(c\,b' + d\,d')}_{\delta}}$$

Es ist noch zu zeigen: $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$.

Jede Möbiustransformation f läßt sich durch eine Matrix

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

darstellen. Die obige Verknüpfung entspricht gerade der Matrizenmultiplikation

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g).$$

Mit dem *Determinantensatz* ist dann

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \mathrm{Det}\,M(f \circ g) = \underbrace{\mathrm{Det}\,M(f)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{Det}\,M(g)}_{\neq 0} \neq 0.$$

(*Beachte:* Die Matrizen $M(f) = \begin{pmatrix} \lambda\,a & \lambda\,b \\ \lambda\,c & \lambda\,d \end{pmatrix}$ beschreiben für alle $\lambda \neq 0$ die *gleiche* Möbiustransformation.)

2.) Für Abbildungen ist das Assoziativgesetz stets erfüllt

$$(h \circ g) \circ f(z) = h \circ (g \circ f)(z).$$

3.) Neutrales Element ist die Identität: $f(z) = z$.

4.) $f^{-1}(z) = \dfrac{d\,z - b}{-c\,z + a}$ ist das Inverse von $f(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

□

Bemerkung

Die Gruppe der Möbiustransformationen ist nicht kommutativ. Es sei

$$f(z) = \frac{z}{z - i}, \qquad g(z) = \frac{z + 1}{z + 2}.$$

Dann ist

$$(f \circ g)(z) = \frac{\dfrac{z+1}{z+2}}{\dfrac{z+1}{z+2} - i} = \frac{z + 1}{(1 - i)z + (1 - 2i)}$$

und analog

$$(g \circ f)(z) = \frac{2z - i}{3z - 2i}.$$

Wegen

$$(f \circ g)(0) = \frac{1}{1 - 2i} \neq (g \circ f)(0) = \frac{1}{2}$$

ist die Verknüpfung nicht kommutativ.

Ein Punkt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *Fixpunkt* einer Möbiustransformation f, wenn $f(z) = z$ ist.

Satz 2.2 *Eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation besitzt einen oder zwei Fixpunkte.*

Beweis: 1.) Es sei $c = 0$. Wir können $f(z) = a\,z + b$ annehmen. Dann ist $f(\infty) = \infty$, also ist ∞ ein Fixpunkt von f.

a) Sei $a = 1$. Dann ist $b \neq 0$ (wegen $f \neq id$). Die Gleichung $f(z) = z + b = z$ hat in $\mathbb{C}$ keine Lösung, also f keinen weiteren Fixpunkt.

b) Sei $a \neq 1$. Dann ist $z = \dfrac{b}{1-a}$ ist ein zweiter Fixpunkt.

2.) Es sei $c \neq 0$. Dann ist $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$, also ∞ *kein* Fixpunkt. Es gilt

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = z \iff c\,z^2 + (d-a)\,z - b = 0.$$

Also ist z ein Fixpunkt, wenn z Lösung dieser quadratischen Gleichung ist. Nach Satz 1.4 besitzt eine quadratische Gleichung zwei Lösungen in $\mathbb{C}$ (die möglicherweise zusammenfallen können). □

Beispiele

1.) Es sei

$$f(z) = \frac{z+3}{z-1}\,.$$

Die Gleichung $f(z) = z$ führt auf eine quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z - 3 = (z-3)(z+1) = 0,$$

also sind $z_1 = 3$ und $z_2 = -1$ Fixpunkte.

2.) $f(z) = z + 1$ besitzt keinen Fixpunkt in $\mathbb{C}$. Es ist jedoch $f(\infty) = \infty$, also ∞ einziger Fixpunkt von f in $\widehat{\mathbb{C}}$.

2.2 Das Doppelverhältnis

z_1, z_2, z_3 und z_4 seien vier verschiedene Punkte aus $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann heißt

$$\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Doppelverhältnis von z_1, z_2, z_3 und z_4. Ist einer der Punkte unendlich, z.B. $z_1 = \infty$, so betrachte man

$$\mathrm{DV}\,(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{\frac{z_4}{z_1} - 1}{z_4 - z_3} : \frac{\frac{z_2}{z_1} - 1}{z_2 - z_3} \overset{z_1 = \infty}{=} \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3}.$$

Für variables z ist $f(z) = \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)$ eine Möbiustransformation. Hierfür gilt

$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1, \quad f(z_3) = \infty,$$

also

$$f(z) = \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}(z).$$

Damit ergibt sich folgende Interpretation des Doppelverhältnisses: Ist f die Möbiustransformation, die z_1 nach 0, z_2 nach 1 und z_3 nach ∞ abbildet, so gilt

$$\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(z_4),$$

das Doppelverhältnis ist also das Bild des vierten Punktes.

Satz 2.3 *Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte in $\widehat{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbiustransformation f mit*

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3.$$

Beweis:

1.) *Eindeutigkeit:* Gegeben seien zwei Möbiustransformationen f und g mit

$$f(z_i) = g(z_i) = w_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Damit besitzt $f^{-1} \circ g$ *drei* Fixpunkte. Nach Satz 2.2 ist dann $f^{-1} \circ g = id$, also $f = g$.

2.) *Existenz:* Wie oben mit Hilfe des Doppelverhältnisses gezeigt wurde, gibt es eine Möbiustransformation $h(z)$ mit

$$h(z_1) = 0. \quad h(z_2) = 1, \quad h(z_3) = \infty.$$

Entsprechend gibt es ein $g(z)$ mit

$$g(w_1) = 0, \quad g(w_2) = 1, \quad g(w_3) = \infty.$$

Dann hat $f = g^{-1} \circ h$ die gewünschte Eigenschaft. □

Wegen dieser Eigenschaft sagt man auch, daß die Möbiustransformationen *scharf dreifach transitiv* auf $\widehat{\mathbb{C}}$ operieren. Man schreibt für die eindeutig bestimmte Möbiustransformation

$$f = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet mit diesen Symbolen wie mit Permutationen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Satz 2.4 *Eine Möbiustransformation f läßt das Doppelverhältnis invariant, d.h.*

$$\mathrm{DV}(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Beweis: Man erhält nach den obigen Regeln

$$\mathrm{DV}\left(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\right) = \begin{pmatrix} f(z_1) & f(z_2) & f(z_3) \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}(f(z_4))$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} f(z_1) & f(z_2) & f(z_3) \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{f^{-1}} (f(z_4))$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}(z_4) = \mathrm{DV}\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right).$$

□

Anwendung

Ist eine Möbiustransformation in der Form

$$f = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

gegeben, so gilt wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses

$$\mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w) = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z).$$

Man kann dies benutzen, um $w = f(z)$ zu berechnen, indem man diese Gleichung nach w auflöst.

Beispiel. Es sei

$$f = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i & 0 \\ 1 & 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\frac{w-1}{w+1} : \frac{1+i-1}{1+i+1} = \frac{z-(1+i)}{z} : \frac{2+i-(1+i)}{2+i}$$

folgt

$$w = \frac{iz+1}{z-1}.$$

2.3 Die Kreisinvarianz

Satz 2.5 *Das Doppelverhältnis* $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ *ist genau dann reell, wenn die vier Punkte auf einem Kreis oder einer Geraden liegen.*

Beweis: Es sei

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

die durch

$$f = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

bestimmte Möbiustransformation. Dann ist $f(z)$ genau dann reell, wenn

$$\frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \frac{\overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z} + \overline{d}}$$

gilt. Dies ist gleichwertig mit

$$(a\,z + b)(\overline{c}\,\overline{z} + \overline{d}) - (c\,z + d)(\overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}) = 0 \tag{2.1}$$

oder

$$(a\,\overline{c} - c\,\overline{a})\,z\overline{z} + (a\,\overline{d} - c\,\overline{b})z - (d\,\overline{a} - b\,\overline{c})\overline{z} - (d\,\overline{b} - b\,\overline{d}) = 0 \tag{2.2}$$

Setzt man $z = x + i\,y$, so erhält man die Gleichung

- eines *Kreises*, wenn $(a\,\overline{c} - c\,\overline{a}) \neq 0$ und
- einer *Geraden*, wenn $(a\,\overline{c} - c\,\overline{a}) = 0$ ist.

z_1 und z_2 erfüllen (2.2), weil $f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1$ reell sind. $f(z_3) = \infty$ bedeutet $c\,z_3 + d = 0$, also erfüllt z_3 die Gleichung (2.1), also auch (2.2). Folglich wird durch die Gleichung (2.2) der Kreis bzw. die Gerade festgelegt, worauf z_1, z_2 und z_3 liegen.

Ferner ist $\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(z_4)$. Das Doppelverhältnis ist daher genau dann reell, wenn $f(z_4)$ reell ist, also z_4 die Gleichung (2.2) erfüllt. □

Korollar 2.6 *Eine Möbiustransformation führt Geraden und Kreise wieder in Geraden und Kreise über. (Möglicherweise geht dabei eine Gerade in einen Kreis und ein Kreis in eine Gerade über.)*

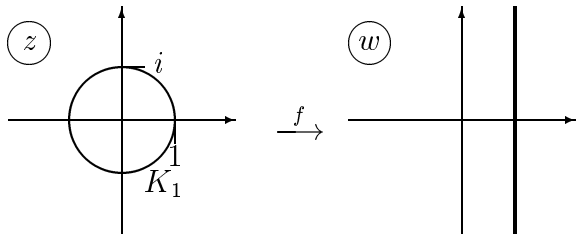
Bemerkung. Man faßt häufig Geraden als Kreise durch unendlich oder Kreise mit unendlichem Radius auf und spricht dann von der *Kreisinvarianz* der Möbiustransformationen.

Bei gegebener Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

läßt sich leicht erkennen, ob ein Kreis K auf eine Gerade abgebildet wird: Ist $c\,z_\infty + d = 0$, so folgt $f(z_\infty) = \infty$. Dann geht K in eine Gerade über, wenn z_∞ auf K liegt.

Beispiel. Der *Einheitskreis* $K_1 = \{z \mid |z| = 1\}$ wird durch $f(z) = \dfrac{-2}{z-1}$ wegen $z_\infty = 1 \in K_1$ auf eine Gerade abgebildet.



Dagegen geht der Kreis $K_2 = \{z \mid |z| = 2\}$ wieder in einen Kreis über (da $z_\infty = 1 \notin K_2$).

2.4 Invarianz der Orientierung

Sei K ein Kreis oder eine Gerade. Eine *Orientierung* von K wird durch ein Tripel (z_1, z_2, z_3) von Punkten von K gegeben.

Bezüglich der Orientierung (z_1, z_2, z_3) liegt der Punkt z

- *links von* K, wenn $\operatorname{Im}[\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)] > 0$ ist und
- *rechts von* K, wenn $\operatorname{Im}[\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)] < 0$ ist und
- *auf* K, wenn $\operatorname{Im}[\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)] = 0$, also $\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)$ reell ist.

Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses bei einer Möbiustransformationen $w = f(z)$ liegt w auf derselben Seite bezüglich der durch (w_1, w_2, w_3) definierten Orientierung wie z bezüglich (z_1, z_2, z_3). Diese Eigenschaft nennt man *Invarianz der Orientierung* .

Tatsächlich gibt es nur zwei Orientierungen. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses braucht man hierzu nur die Orientierungen der reellen Achse zu betrachten. Ist deren Orientierung durch $(0, 1, \infty)$ festgelegt und (z_1, z_2, z_3) ein beliebiges reelles Tripel, so kann

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)$$

mit reellen Koeffizienten geschrieben werden. Man berechnet dann leicht

$$\operatorname{Im}\left[\mathrm{DV}\left(z_1, z_2, z_3, z\right)\right] = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}\ \operatorname{Im} z.$$

Die Unterscheidung von links und rechts bedeutet daher nichts anderes als die Unterscheidung von oberer und unterer Halbebene. Sie hängt nur von dem Vorzeichen von $ad - bc$ ab.

Beispiel

Die durch $(1, i, -1)$ gegebene Orientierung des Einheitskreises bezeichnet man als positiv. Für $z = 0$ ist $\mathrm{DV}\,(1, i, -1, 0) = i$. Folglich liegt der Ursprung bezüglich der positiven Orientierung *links* vom Einheitskreis. Bei umgekehrter Orientierung (Uhrzeigersinn) läge er *rechts*.

Ist K ein Kreis oder eine Gerade, so führt eine Orientierung auf K zu einer Zerlegung der komplexen Ebene

$$\mathbb{C} = K^- \cup K \cup K^+ .$$

Bei anderer Wahl der Orientierung erhält man die gleiche Zerlegung, nur daß die Rollen von K^- und K^+ vertauscht werden.

Bei einer Möbiustransformation gehen die einzelnen Teile der Zerlegung in die entsprechenden Teile des Bildes über. Ist speziell K eine Gerade und das Bild ein Kreis K', so werden die durch die Gerade bestimmten Halbebenen jeweils vollständig auf das auf das Innere von K' oder aber vollständig auf das Äußere von K' abgebildet.

Beispiel

Die Möbiustransformation

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \infty \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix}$$

führt die reelle Achse in den Einheitskreis über. Sie hat die Darstellung

$$f(z) = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Wegen $f(i) = 0$ geht die obere Halbebene $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ auf das Innere des Einheitskreises über.

2.5 Aufgaben

Aufgabe 2.1 Zeige, daß die Kreise $K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-r| = r\}$ bei der Möbiustransformation

$$w = f(z) = 6\,\frac{z-2}{z}$$

in zur imaginären Achse parallelen Geraden übergehen. Ermittle den Bildbereich $f(G)$ von

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \geq 1 \ \text{ und } \ |z-2| \leq 2\}.$$

Aufgabe 2.2 Gegeben seien die Möbiustransformationen

$$f(z) = \frac{z}{z-1} \ \text{ und } \ g(z) = \frac{iz+1}{z+1}.$$

Berechne die Fixpunkte von f und gfg^{-1}. Begründe, daß ein Fixpunkt von f durch g auf einen Fixpunkt von gfg^{-1} abgebildet wird.

Aufgabe 2.3 Gegeben seien für $a \in \mathbb{C},\ |a| \neq 1$ die Möbiustransformationen

$$f_a : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}, \qquad f_a(z) = \frac{az+1}{z+\overline{a}}\,.$$

1.) Zeige, daß diese Möbiustransformationen den Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ auf sich abbilden (d. h. aus $|z| = 1$ folgt $|f_a(z)| = 1$).

2.) Zeige, daß die Fixpunkte von f_a auf dem Einheitskreis oder auf der imaginären Achse liegen.

Aufgabe 2.4 a) Welche Beziehung besteht zwischen den Doppelverhältnissen

$$\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4) \ \text{ und } \ \mathrm{DV}\,(z_3, z_2, z_1, z_4)\,?$$

Was folgt, wenn beide Doppelverhältnisse gleich sind?

b) Es sei $z_1 \neq z_2$ und f eine Möbiustransformation, für die

$$f(z_1) = z_2, \qquad f(z_2) = z_1$$

gilt. Zeige, daß die Fixpunkte von f und die Punkte z_1, z_2 auf einem Kreis oder einer Geraden liegen.

Aufgabe 2.5 a) Ermittle alle Möbiustransformationen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad ad - bc \neq 0,$$

für die $f(1) = -1, \quad f(-1) = 1$ gilt.

b) Zeige, daß ein solches f stets zwei verschiedene Fixpunkte in $\widehat{\mathbb{C}}$ besitzt, die mit den Punkten 1 und -1 auf einem Kreis oder einer Geraden liegen.

Kapitel 3 Differentiation

3.1 Grenzwerte

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl.. Dann heißt

$$U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$$

ε-*Umgebung* von a. Eine Teilmenge A von $\mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn zu jedem $a \in A$ eine ε-Umgebung von a existiert, die ganz in A liegt

$$\bigwedge_{a \in A} \bigvee_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(a) \subseteq A.$$

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt $F \in \mathbb{C}$ *Grenzwert* von f bei Annäherung an a, wenn zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $|f(z) - F| < \varepsilon'$ für alle $z \in U_\varepsilon(a),\ z \neq a$ gilt, geschrieben

$$F = \lim_{z \to a} f(z).$$

Man sagt, daß $f(z)$ gegen F konvergiert, wenn z gegen a konvergiert. Der Funktionswert $f(a)$ selbst spielt bei der Grenzwertbildung $z \to a$ keine Rolle und braucht nicht einmal definiert zu sein.

Satz 3.1 *Existieren die Grenzwerte*

$$F = \lim_{z \to a} f(z) \quad \textit{und} \quad G = \lim_{z \to a} g(z),$$

so existieren auch folgende Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to a}(f(z) + g(z)) &= F + G \\
\lim_{z \to a} c \cdot f(z) &= cF, \quad c \in \mathbb{C} \\
\lim_{z \to a}(f(z)g(z)) &= F \cdot G \\
\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{F}{G}
\end{aligned}$$

Bei der letzten Beziehung muß $g(z) \neq 0$ in einer Umgebung von a und $G \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Beweis wie im Reellen, z.B.

$$\begin{aligned}
|f(z)g(z) - F \cdot G| &= |(f(z) - F)(g(z) - G) + F(g(z) - G) \\
&\quad + G(f(z) - F)| \\
&\leq |f(z) - F|\,|g(z) - G| + |F|\,|g(z) - G| \\
&\quad + |G|\,|f(z) - F|.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite wird beliebig klein, wenn z gegen a konvergiert.

Definition
Eine Funktion f heißt *stetig* in a, wenn

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

ist.

Korollar 3.2 *Sind f und g stetig in a, so sind auch $f+g$, cf, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(a) \neq 0$ ist) stetig in a.*

3.2 Differenzierbare Funktionen

Definition. Eine Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert. Man schreibt dann

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a) := \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Satz 3.3 *Ist f* differenzierbar *in a, so ist f auch* stetig *in a.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to a} (f(z) - f(a)) &= \lim_{z \to a} \left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \cdot (z - a) \right) \\ &= \underbrace{\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}}_{\text{existiert}} \cdot \underbrace{\lim_{z \to a} (z - a)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$, also die Stetigkeit in a. □

Satz 3.4 *Sind f und g differenzierbar in a, so sind auch $f + g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(a) \neq 0$) differenzierbar in a, und es gilt in a*

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' \\ (c \cdot f)' &= c \cdot f' \\ (f \cdot g)' &= f'\, g + f\, g' \\ \left(\frac{f}{g} \right)' &= \frac{f'\, g - f\, g'}{g^2} \end{aligned}$$

Beweis: Wie im Reellen. Als Beispiel der Beweis der Produktregel

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{z\to a}\frac{f(z)\,g(z)-f(a)\,g(a)}{z-a}\\ &= \lim_{z\to a}\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,g(z)+f(a)\,\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right).\end{aligned}$$

f und g sind nach Voraussetzung differenzierbar, weiter ist g nach Satz 3.3 auch stetig in a, das heißt

$$\lim_{z\to a} g(z) = g(a).$$

Damit folgt $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$. □

Beispiele

1. $f(z) = c$ konstant. Es ist
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{c-c}{z-a} = 0.$$
Daher ist f für alle $a\in\mathbb{C}$ differenzierbar, und es gilt $f'(a) = 0$.

2. Es sei $f(z) = z$. Wegen
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{z-a}{z-a} = 1$$
ist f differenzierbar für alle $a\in\mathbb{C}$ und $f'(a) = 1$.

3. Es sei $f(z) = z^n$ mit $n\in\mathbb{N}$. Die Funktion ist ebenfalls differenzierbar und $f'(a) = na^{n-1}$ für alle $a\in\mathbb{C}$.

   Beweis durch Induktion nach n: Die Formel ist richtig für $n = 1$, wie eben gezeigt wurde.
   Sei $f(z) = z^{n+1} = z^n\cdot z$. Nach der Produktregel ist dann
   $$f'(a) = n\cdot a^{n-1}\cdot a + a^n = (n+1)a^n$$

4. Es sei nun $f(z) = \frac{1}{z^n} = z^{-n}$ mit negativem Exponenten. Nach der Quotientenregel ist
$$f'(a) = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}} = \frac{-n}{a^{n+1}} = -n\,a^{-n-1},$$
also f differenzierbar für alle $a\neq 0$.

Satz 3.5 (Kettenregel) *Ist $f: A\longrightarrow\mathbb{C}$, $g: B\longrightarrow\mathbb{C}$ mit $f(A)\subseteq B$ und f differenzierbar in z, g differenzierbar in $f(z)$, so ist $g\circ f: A\longrightarrow\mathbb{C}$ in z differenzierbar, und es gilt*

$$(g\circ f)'(z) = g'(f(z))\cdot f'(z).$$

Beweis wie im Reellen.

3.3 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Jede komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ besitzt die Darstellung

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\ , \qquad z = x + iy,$$

wobei u und v reelle Funktionen in zwei Veränderlichen sind. Man nennt u Real-, v Imaginärteil von f.

Es ist

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

(wegen $|a|, |b| \le |a+bi| \le |a|+|b|$), d. h. existiert ein Grenzwert von f, so existieren auch die entsprechenden Grenzwerte des Real- und Imaginärteils. Insbesondere gilt: Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn u, v stetig sind.

Satz 3.6 *Ist $f(z) = u(x.y) + iv(x,y)$ differenzierbar, so sind u und v nach x und nach y partiell ableitbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Die Ableitung von f ist

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Beweis: Sei f differenzierbar in z. Es gilt für $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right). \end{aligned}$$

Damit sind u und v partiell nach x ableitbar, und es gilt (3.2). Andererseits ist bei Grenzwertbildung parallel zur imaginären Achse

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}, \\ &= \lim_{h\to 0} \left(-i\,\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} + \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h} \right), \end{aligned}$$

also sind auch u, v nach y partiell ableitbar, und es gilt

$$f'(z) = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3.3}$$

Durch Vergleich von (3.2) und (3.3) ergibt sich (3.1). □

Beispiele

1. Die Funktion $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ ist differenzierbar für alle $z \in \mathbb{C}$. Der Realteil $u = x^2 - y^2$ und Imaginärteil $v = 2xy$ erfüllen daher die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

   Ferner ist nach (3.2) die Ableitung

$$f'(z) = 2x + 2yi = 2z.$$

2. Sei $f(z) = (ax + by) + i(cx + dy)$. Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a & \frac{\partial u}{\partial y} &= b \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= c & \frac{\partial v}{\partial y} &= d. \end{aligned}$$

   Damit f differenzierbar ist, muß daher $a = d$, $b = -c$ sein, also

$$f(z) = a(x + iy) + b(y - ix) = (a - bi)(x + iy) = (a - bi)z.$$

Definition. Eine komplexe Funktion f heißt *holomorph* oder *regulär* in a, wenn f in einer Umgebung von a differenzierbar ist.

Beispiel

Die Funktion $f(z) = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ ist in $z = 0$ differenzierbar, aber nicht holomorph.

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \bar{z} = 0$$

existiert. Es ist $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind für $z \neq 0$ nicht erfüllt, f ist also für $z \neq 0$ nicht differenzierbar, also ist f nicht holomorph in $z = 0$.

Satz 3.7 *Es sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ eine komplexe Funktion. Existieren in einer Umgebung U von a die partiellen Ableitungen von u und v, sind diese dort stetig und genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

dann ist f holomorph in a.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $z \in U$. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|h| = |k + i\,\ell| < \delta$ und $z + h \in U$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x+k, y+\ell) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right| < \varepsilon \tag{3.4}$$

gilt. Entsprechende Abschätzungen gelten für die anderen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Nach dem *Mittelwertsatz* ist

$$\begin{aligned} u(x+k, y+\ell) - u(x,y) &= u(x+k, y+\ell) - u(x, y+\ell) \\ &\quad + u(x, y+\ell) - u(x,y) \\ &= k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x+k', y+\ell) + \ell\,\frac{\partial u}{\partial y}(x, y+\ell') \end{aligned}$$

mit den Zwischenwerten k' und ℓ'. Dann ist wegen (3.4)

$$\left|u(x+k, y+\ell) - u(x,y) - k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \ell\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right| < (|k| + |\ell|)\,\varepsilon \le 2\,|h|\,\varepsilon$$

und analog für v

$$\left|v(x+k, y+\ell) - v(x,y) - k\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \ell\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right| < (|k| + |\ell|)\,\varepsilon \le 2\,|h|\,\varepsilon.$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist

$$\begin{aligned} (k + i\,\ell)\,(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}) &= k\,\frac{\partial u}{\partial x} - \ell\,\frac{\partial v}{\partial x} + i\,\left(\ell\,\frac{\partial u}{\partial x} + k\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= k\,\frac{\partial u}{\partial x} + \ell\,\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\left(k\,\frac{\partial v}{\partial x} + \ell\,\frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Man erhält also

$$\left|f(z+h) - f(z) - h\,\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| \le 4\,|h|\,\varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial x} \right| \le 4\,\varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Also ist f differenzierbar für alle $z \in U$, also f holomorph in a. □

Definition. Eine zweimal partiell differenzierbare Funktion $u(x,y)$ heißt *harmonisch* oder *Potentialfunktion*, wenn sie der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt.

Korollar 3.8 *Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.*

Beweis: Nach dem Satz von Schwarz sind die gemischten partiellen Ableitungen gleich, also ist aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

also $\Delta u = 0$ und analog $\Delta v = 0$. □

3.4 Die Exponentialfunktion

Mit Hilfe von Satz 3.7 lassen sich holomorphe Funktionen definieren. Wir setzen voraus, daß die reelle Exponentialfunktion sowie die trigonometrischen Funktionen bekannt sind, und definieren

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp z = e^x \cdot (\cos y + i\,\sin y), \qquad z = x + i\,y.$$

Wie im Reellen schreibt man auch $\exp z = e^z$.

Eigenschaften

1. Für reelle z stimmt die Funktion exp mit der reellen Exponentialfunktion überein.

2. exp ist holomorph in der ganzen Ebene, und es gilt

$$\frac{d}{dz}\exp z = \exp z.$$

Beweis: Real- und Imaginärteil sind

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Sie genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und besitzen stetige partielle Ableitungen. Nach Satz 3.7 ist daher die Exponentialfunktion eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion. Nach (3.2) gilt

$$\frac{d}{dz}\exp z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\,\cos y + i\,e^x\,\sin y = \exp z.$$

3. Mit der *Formel von Moivre* ergibt sich die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}\exp(z_1+z_2) &= e^{x_1+x_2}\cdot(\cos(y_1+y_2)+i\,\sin(y_1+y_2))\\ &= \exp z_1\cdot\exp z_2.\end{aligned}$$

4. exp besitzt keine Nullstellen.

   Beweis: Die Annahme $\exp(z_0)=0$ für ein z_0 führt auf einen Widerspruch

   $$1 = \exp(0) = \exp\left(z_0+(-z_0)\right) = \exp(z_0)\cdot\exp(-z_0) = 0.$$

5. Die Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode $2\pi i$: Für $k\in\mathbb{Z}$ gilt

   $$\exp(z+2\pi i\,k) = \exp z.$$

6. Jede komplexe Zahl $z\neq 0$ besitzt die Darstellung

   $$z = r(\cos t + i\,\sin t) = re^{it}.$$

   (Eulersche Formel). Wegen $r>0$ gilt $r=e^x$ für ein $x\in\mathbb{R}$, also ist $z=e^{x+it}$. Folglich tritt jede komplexe Zahl $z\neq 0$ als Wert der Exponentialfunktion auf und zwar genau einmal im Periodenstreifen $\{z\in\mathbb{C}\mid 2\pi k\le \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, $k\in\mathbb{Z}$. Es gilt

   (3.5) $$\exp z_1 = \exp z_2 \iff z_1 = z_2 + 2\pi k i \quad \text{für ein } k\in\mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Mit Hilfe der Exponentialfunktion lassen sich die trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente einführen:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right).$$

Umgekehrt ist

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z.$$

Erst die Erweiterung der reellen Funktionen ins Komplexe zeigt die enge Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.

3.5 Gebiete

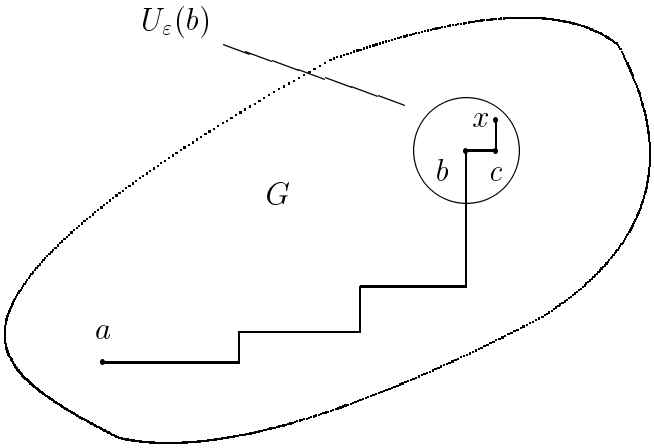
Eine offene Teilmenge eines metrischen Raumes heißt *zusammenhängend*, wenn sie sich nicht als Vereinigung zweier disjunkter nicht leerer offener Mengen darstellen läßt.

Definition. Eine nicht leere offene zusammenhängende Menge der komplexen Ebene heißt ein *Gebiet*.

Hilfssatz 3.9 *Je zwei Punkte eines Gebietes G lassen sich durch einen ganz in G liegenden Streckenzug mit achsenparallelen Strecken verbinden.*

Beweis: Sei $a \in G$ und A eine Menge aller Punkte in G, die sich mit a durch einen achsenparallelen Streckenzug miteinander verbinden lassen.

1.) *A ist offen:* Sei $b \in A$. Weil G offen ist, gibt es ein $U_\varepsilon(b) \subseteq G$. Sei nun $x \in U_\varepsilon(b)$. Dann läßt sich b mit x durch einen zweiteiligen Streckenzug (bc, cx) mit achsenparallelen Strecken verbinden, der ganz in $U_\varepsilon(b)$, also in G liegt.



Wegen $b \in A$ lassen sich außerdem a und b mit einem achsenparallelen Streckenzug verbinden, also auch a mit x.

Somit ist x auch ein Punkt von A. Also gilt $U_\varepsilon(b) \subseteq A$. Also ist A offen.

2.) *$B := G \setminus A$ ist offen:* Sei $b \in B$ und $U_\varepsilon(b) \subseteq G$. Dann ist $U_\varepsilon(b) \subseteq B$: Wäre nämlich $x \in U_\varepsilon(b)$ nicht in B, so würde $x \in A$ folgen. Dann gäbe es einen achsenparallelen Streckenzug, der a mit x verbindet, also wäre auch a mit b verbindbar, also $b \in A$ (Widerspruch). Zu jedem $b \in B$ gibt es daher ein $U_\varepsilon(b) \subseteq B$, d.h. B ist offen.

3.) Es ist $G = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A und B offen. Wegen $a \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Weil G zusammenhängend ist, folgt $B = \emptyset$, also $G = A$. Folglich ist jeder Punkt von G mit

jedem anderen Punkt von G durch einen Streckenzug mit achsenparallelen Strecken verbindbar. □

Satz 3.10 *Ist f eine in einem Gebiet G definierte holomorphe Funktion mit verschwindender Ableitung, so ist f konstant .*

Beweis: Aus

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Nach dem *Mittelwertsatz* ist dann

$$u(x_1, y) - u(x_2, y) = (x_1 - x_2) \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y)}_{=0} = 0 \quad \text{mit } x_1 \le \xi \le x_2$$

Also ist $u(x_1, y) = u(x_2, y)$, d.h. u ist auf einer zur reellen Achse parallelen Strecke konstant. Analog folgt dies für eine zur imaginären Achse parallelen Strecke.

Nach dem obigen Hilfssatz ist dann u auf ganz G konstant. Entsprechend gilt dies für v. Folglich ist auch $f = u + iv$ auf G konstant. □

Bemerkung: Der Zusammenhang von G ist für die Gültigkeit des Satzes notwendig: Ist $G = A \cup B, A \cap B = \emptyset$, so ist

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z \in A \\ 1 & \text{für} \quad z \in B \end{cases}$$

holomorph in G und $f'(z) = 0$.

3.6 Konforme Abbildungen

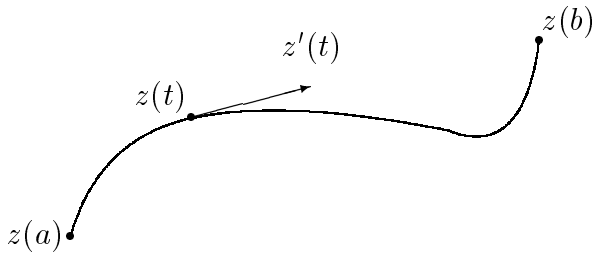
Eine Kurve γ ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t).$$

$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ heißt das Parameterintervall. Die Kurve γ heißt *differenzierbar* , wenn der Grenzwert

$$z'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = x'(t) + i\,y'(t)$$

für alle $t \in (a, b)$ existiert. $z'(t)$ heißt *Tangentenvektor* in $z(t)$.



Ist f eine holomorphe Funktion und γ eine differenzierbare *Kurve*, so ist auch die Bildkurve

$$\gamma^* : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto w(t) = f(z(t))$$

ebenfalls differenzierbar. Aufgrund der Kettenregel gilt

$$w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t). \tag{3.6}$$

Schneiden sich zwei differenzierbare Kurven γ_1 und γ_2 in z und besitzen dort von Null verschiedene Tangentenvektoren z_1' und z_2', dann heißt

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \frac{z_2'}{z_1'}$$

Winkel zwischen den beiden Kurven.

Definition

Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *konform* (winkeltreu) in $z \in G$, wenn sich stets je zwei durch z verlaufende Kurven γ_1 und γ_2 mit dem gleichen Winkel schneiden wie ihre Bildkurven

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle(\gamma_1^*, \gamma_2^*).$$

Die Abbildung f heißt in G konform, wenn f in jedem Punkt $z \in G$ konform ist.

Satz 3.11 *Eine holomorphe Funktion f ist in allen Punkten z konform, in denen Ableitung $f'(z) \neq 0$ ist.*

Beweis: Es seien $z_1(t)$ und $z_2(s)$ die Parameterdarstellungen der Kurven mit nicht verschwindenden Tangentenvektoren $z_1'(t_0)$ und $z_2'(s_0)$ in z. Nach (3.6) ist dann

$$\arg \frac{w_1'(t_0)}{w_2'(s_0)} = \arg \frac{f'(z) \cdot z_1'(t_0)}{f'(z) \cdot z_2'(s_0)} = \arg \frac{z_1'(t_0)}{z_2'(s_0)}.$$

□

Bemerkung. Es gilt

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z)\cdot z'(t_0)) \equiv \Big(\underbrace{\arg f'(z)}_{\alpha} + \arg z'(t_0)\Big) \mod 2\pi.$$

Der Winkel α ist demnach nur von f, *nicht* aber von der Kurve abhängig. Bei der Abbildung f werden also die Tangentenvektoren der Kurven durch z um den gleichen Winkel $\alpha = \arg f'(z)$ gedreht.

Beispiele

1. $w = f(z) = \overline{z}$ ist *nicht* konform für alle z:

   $$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = -\sphericalangle(\gamma_1^*, \gamma_2^*).$$

   Die Absolutbeträge der Winkel bleiben zwar erhalten, der Richtungssinn kehrt sich aber bei der Spiegelung um. Solche Abbildungen bezeichnet man auch als *konform im weiteren Sinne* .

2. Es sei $f(z) = z^2$. Die Ableitung $f'(z) = 2z$ verschwindet nur für $z = 0$, in allen anderen Punkten ist die Abbildung konform.

   In $z = 0$ ist f nicht konform: Der Winkel zwischen der reellen Achse und einer Geraden durch den Nullpunkt verdoppelt sich beim Quadrieren.

Satz 3.12 (Gauss 1822) *Sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, mit* stetigen *partiellen Ableitungen von u und v. Ist f* konform *in G, so ist f auch* holomorph *in G.*

Beweis: Es sei $z \in G$ und $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ die Parameterdarstellung einer Kurve γ durch z mit dem Tangentenvektor $z'(t) \neq 0$. Dann ist

$$(*) \qquad \left.\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{2}(z(t) + \overline{z}(t)), \\ y(t) &= \tfrac{1}{2i}(z(t) - \overline{z}(t)). \end{aligned}\right\}$$

Die Bildkurve wird dargestellt durch

$$w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + i\,v(x(t), y(t)).$$

Also

$$w'(t) = u_x \cdot x'(t) + u_y \cdot y'(t) + i \cdot [v_x \cdot x'(t) + v_y \cdot y'(t)]\,.$$

Mit $(*)$ gilt dann:

$$w'(t) = A \cdot z'(t) + B \cdot \overline{z'}(t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}((u_x + v_y) + i\,(v_x - u_y)) \\ B = \frac{1}{2}((u_x - v_y) + i\,(v_x + u_y)) \end{cases}$$

Da $z'(t) \neq 0$ ist, gilt dann

$$\frac{w'(t)}{z'(t)} = A + B\,\frac{\overline{z'}(t)}{z'(t)} = A + B\,e^{-2i\,\arg(z')},$$

d.h. $\dfrac{w'(t)}{z'(t)}$ liegt auf einem Kreis um den Punkt A mit dem Radius $|B|$. Weil f konform ist, ist $\arg\dfrac{w'(t)}{z'(t)}$ unabhängig von der gewählten Kurve, also ist $B = 0$, d.h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt. Also ist f nach Satz 3.7 (Seite 24) holomorph. □

3.7 Aufgaben

Aufgabe 3.1 Wie muß man die Konstanten $a_i,\ b_i,\ c_i$ wählen, damit

$$u(x,y) = a_1 x^2 + 2b_1\,xy + c_1 y^2$$

$$v(x,y) = a_2 x^2 + 2b_2\,xy + c_2 y^2$$

Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind?

Aufgabe 3.2 Zeige

$$|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

für eine differenzierbare Funktion f.

Aufgabe 3.3 Prüfe, ob die folgenden Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Imaginärteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion sind, und bestimme gegebenenfalls eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß $f = u + iv$ holomorph wird:

a) $v(x,y) = e^{-x}\,(1-x)\sin y,$

b) $v(x,y) = e^{-y}\,\sin x + 2xy - 2y.$

Aufgabe 3.4 a) Ermittle Real- und Imaginärteil der Hyperbelfunktionen

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

und berechne die Absolutbeträge $|\cosh z|$ und $|\sinh z|$.

b) Bestimme die Nullstellen der beiden Funktionen.

c) Beweise

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Hinweis: Zeige durch Bildung der Ableitung, daß $f(z) = \cosh^2 z - \sinh^2 z$ konstant ist, und berechne $f(0)$.

Aufgabe 3.5 Es sei f eine in einem Gebiet G holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt. Zeige, daß dann f auf G konstant ist.

Aufgabe 3.6 Ermittle eine konforme Abbildung, die das Gebiet

$$G = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ und } y > 0\}$$

auf das Innere des Einheitskreises abbildet.

Hinweis: Benutze Möbiustransformationen und die Abbildung $f(z) = z^2$.

Aufgabe 3.7 Bestimme die Bildkurven der achsenparallelen Geraden $g : y = y_0$ bzw. $h : x = x_0$ bei der Abbildung $f(z) = z(1 + z)$. Skizziere das Bild des Quadrats mit den Ecken $\{0, 1, 1 + i, i\}$.

Kapitel 4 Integration

4.1 Kurven und Wege

Eine Kurve γ ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t).$$

$z(a)$ heißt Anfangs-, $z(b)$ Endpunkt der Kurve. γ heißt *geschlossen*, wenn Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen.

Es sei

$$|\gamma| = \{z(t) \mid t \in [a,b]\}$$

die Punktmenge der Kurve. Als Bild des kompakten Intervalls $[a,b]$ ist $|\gamma|$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Es sei

$$P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$$

eine Partition des Intervalls $[a,b]$. Wir nehmen hierbei stets $t_{i-1} \leq t_i$ an. Die Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$ haben die Länge $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Es sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Partitionen von $[a,b]$.

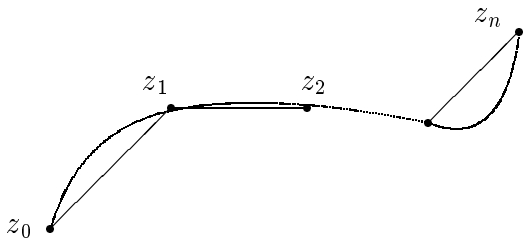
Ist $z(t)$ die Parameterdarstellung einer Kurve, so gehört zu jeder Partition $P \in \mathcal{P}$ eine Folge von Punkten $z_i = z(t_i)$ auf der Kurve. Verbindet man die Punkte z_i, so entsteht ein der Kurve einbeschriebener Streckenzug. Seine Länge ist

$$\lambda(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} |z_i - z_{i-1}|.$$

Eine Kurve nennt man *rektifizierbar*, wenn $\{\lambda(\gamma, P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ nach oben beschränkt ist. Das Supremum

$$\lambda(\gamma) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \lambda(\gamma, P)$$

heißt *Länge* der Kurve. Eine Kurve heißt Weg, wenn sie rektifizierbar ist.



Eine Kurve γ heißt *glatt* ist, wenn die Koordinatenfunktionen $x(t), y(t)$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar sind. In diesem Fall ist γ rektifizierbar, also ein Weg. Die Länge ist

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_a^b |z'(t)|dt.$$

Eine Kurve γ heißt *stückweise differenzierbar*, wenn eine Partition

$$t_0 = a \leq t_1 \leq \ldots t_n = b$$

des Parameterintervalls $[a,b]$ existiert, so daß $z(t)$ auf den Teilintervallen $[t_{i-1}, t_i]$ differenzierbar ist.

Beispiele

1. Die Kurve
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$
ist stetig differenzierbar und stellt den Einheitskreis dar. Wegen $z(0) = z(2\pi)$ ist γ eine geschlossene Kurve.

2. Die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{C}$
$$z(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in [-1, 0] \\ (1+i)t & \text{für } t \in [0, 1] \end{cases}$$
besteht aus zwei Geradenstücken. Sie ist stüchweise glatt.

4.2 Definition komplexer Integrale

Eine Partition P' heißt feiner als P, wenn $P \subseteq P'$, d.h. wenn jeder Punkt von P auch Punkt von P' ist.

Sind P_1, P_2 Partitionen von $[a,b]$, so ist $P = P_1 \cup P_2$ eine gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2.

Es sei
$$P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$$
eine Partition des Intervalls $[a,b]$. Unter dem *Feinheitsgrad* verstehen wir

$$\sigma(P) = \max\{t_i - t_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

die maximale Länge der Teilintervalle.

Beispiel

$$P = \{\frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad P' = \{\frac{i}{2n} \mid i = 0, 1, \ldots, 2n\}$$

sind Partitionen von $[0, 1]$ mit $P \subseteq P'$, also ist P' eine Verfeinerung von P. Dagegen gilt für die Partition

$$P'' = \{\frac{i}{n+1} \mid i = 0, 1, \ldots, n+1\}$$

zwar $\sigma(P'') < \sigma(P)$, es ist jedoch P'' keine Verfeinerung von P.

Es sei

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

eine Kurve und

$$P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$$

eine Partition des Intervalls $[a, b]$. $z_i = z(t_i)$ sind Punkte der Kurve.

Aus dem Teilintervallen $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ wählen wir jeweils einen Punkt c_i. Diesen entsprechen Punkte $\zeta_i = z(c_i)$ auf γ, der zwischen z_{i-1} und z_i liegt.

Ist $f(z)$ eine komplexe Funktion, so heißt

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$$

mit $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ eine *Riemann-Summe*.

Definition

Eine komplexe Funktion f heißt *integrierbar* längs des Weges γ, wenn

$$(*) \qquad \bigvee_{S \in \mathbb{C}} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{P_\varepsilon} \bigwedge_{P \supseteq P_\varepsilon} |S - R(f, P)| < \varepsilon$$

gilt. In Worten: Bei genügend feinen Partitionen liegen die Riemann-Summen beliebig dicht bei S.

Eigenschaften

(A) Ist f längs γ integrierbar, so ist S eindeutig bestimmt. Man schreibt

$$S = \int_\gamma f(z)dz.$$

Beweis: Für S und S' gelte $(*)$. Annahme: $|S - S'| = 2\varepsilon > 0$. Dann existieren P_ε und P'_ε mit

$$\begin{aligned} |S - R(f,P)| &< \varepsilon \quad \text{für alle } P \supseteq P_\varepsilon \\ |S' - R(f,P)| &< \varepsilon \quad \text{für alle } P \supseteq P'_\varepsilon \end{aligned}$$

Sei $R(f,P)$ eine Riemann-Summe zur Partition $P := P_\varepsilon \cup P'_\varepsilon$. Da P eine Verfeinerung von P_ε und von P'_ε ist, folgt

$$2\,\varepsilon = |S - S'| \leq \underbrace{|S - R(f,P)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|R(f,P) - S'|}_{<\varepsilon} < 2\,\varepsilon \text{ (Widerspruch).}$$

(B) *Linearität*

$$\int_\gamma (f+g)dz = \int_\gamma f dz + \int_\gamma g dz.$$

$$\int_\gamma af dz = a \int_\gamma f dz.$$

Beweis: Für Riemann-Summen gilt

$$\begin{aligned} R(f+g,P) &= \sum_{i=1}^{n} (f(\zeta_i) + g(\zeta_i))\Delta z_i = R(f,P) + R(g,P) \\ R(af,P) &= \sum_{i=1}^{n} af(\zeta_i)\Delta z_i = aR(f,P). \end{aligned}$$

Daraus folgen die entsprechenden Formeln für die Integrale.

(C) *Zerlegung in Teilwege.* Es sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ eine Unterteilung des Weges γ

$$\gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma_2 : [c,b] \to \mathbb{C}.$$

Das Integral $\int_\gamma f dz$ existiert genau dann, wenn die Integrale $\int_{\gamma_1} f dz$ und $\int_{\gamma_2} f dz$ existieren, und es gilt

$$\int_\gamma f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

(D) *Inverser Weg.* Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z(t) = x(t) + i\,y(t)$ ein Weg, so heißt

$$-\gamma : [-b,-a] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z(-t) = x(-t) + i\,y(-t)$$

der zu γ *inverse Weg* . Dann ist

$$\int_\gamma f\,dz = -\int_{-\gamma} f\,dz$$

Beweis: Eine Partition $P = \{t_i\}$ von $[a,b]$ entspricht einer Partition $P' = \{-t_i\}$ mit inverser Anordnung.

$$\begin{array}{lccccc} P: & t_0 & \leq & t_1 & \leq \ldots \leq & t_n \\ P': & -t_n & \leq & -t_{n-1} & \leq \ldots \leq & -t_0, \end{array}$$

also

$$\begin{aligned} R(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_{i-1} - z_i) = -R(f,P'). \end{aligned}$$

Damit gilt $|S - R(f,P)| = |-S - R(f,P')|$. Folglich ist f längs $-\gamma$ integrierbar, wenn f längs γ integrierbar ist. Für das Integral gilt

$$\int_{-\gamma} f dz = -\int_{\gamma} f dz.$$

(E) *Unabhängigkeit von der Parametrisierung.* Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $u : [a',b'] \to [a,b]$ stetig, bijektiv und monoton wachsend, so ist

$$\gamma' : [a',b'] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(u(t))$$

ein Weg. Ist f längs γ integrierbar, so ist f auch längs γ' integrierbar, und es gilt

$$\int_{\gamma} f\, dz = \int_{\gamma'} f\, dz.$$

Beweis: Sind $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{P}'$ die Mengen der Partitionen von $[a,b]$ bzw. $[a',b']$, so ist

$$P' = \{t'_i\} \mapsto P = \{t_i = u(t'_i)\}$$

eine Bijektion. Es ist $f(\zeta_i) = f(z'(c'_i)) = f(z(u(c'_i))$, also

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\, \Delta z_i = R(f,P')$$

Da sich $\int_\gamma f\, dz$ und $\int_{\gamma'} f\, dz$ beliebig gut durch $R(f,P)$ und $R(f,P')$ approximieren lassen, müssen sie gleich sein.

4.3 Integration über glatte Kurven

Wie für Riemann-Integrale im Reellen kann man zeigen, daß auch im Komplexen auf γ stetige Funktionen integrierbar sind. Speziell für glatte Kurven gilt

Satz 4.1 *Ist* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z(t) = x(t) + i\,y(t)$ *eine* glatte *Kurve und* f stetig *auf* γ, *so ist* f *integrierbar längs der Kurve* γ *und*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt. \tag{4.1}$$

Dabei stehen auf der rechten Seite der Gleichung nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil gewöhnliche Riemann-Integrale, $z'(t)$ ist der Richtungsvektor der Kurve.

Beweis: Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ und

$$f(z(t)) = u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t)) = \tilde{u}(t) + i\,\tilde{v}(t),$$

wobei $\tilde{u},\ \tilde{v} : [a,b] \to \mathbb{R}$ Real- und Imaginärteil der zusammengesetzten Funktionen $f \circ z$ sind, also

$$\begin{aligned} f(z(t)) \cdot z'(t) &= (\tilde{u}(t) + i\,\tilde{v}(t)) \cdot (x'(t) + i\,y'(t)) \\ &= (\tilde{u}\,x' - \tilde{v}\,y') + i\,(\tilde{u}\,y' + \tilde{v}\,x')\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das rechte Integral in der Gleichung (4.1)

$$S = \int_a^b (\tilde{u}\,x' - \tilde{v}\,y')\ dt + i \int_a^b (\tilde{u}\,y' + \tilde{v}\,x')\ dt. \tag{4.2}$$

Andrerseits erhalten wir für die Riemann-Summen die Zerlegung

$$\begin{aligned} R(f,P) &= \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\,\Delta z_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\tilde{u}(c_i) + i\,\tilde{v}(c_i)) \cdot (\Delta x_i + i\,\Delta y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\tilde{u}(c_i)\,\Delta x_i - \tilde{v}(c_i)\,\Delta y_i + i\ (\tilde{u}(c_i)\,\Delta y_i + \tilde{v}(c_i)\,\Delta x_i))\,. \end{aligned}$$

Den vier Summanden in dieser Formel entsprechen die vier Integralen von S in (4.2). Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt für genügend feine Partitionen

$$\left| \int_a^b \tilde{u}\,x'\,dt - \sum_{i=1}^n \tilde{u}(c_i)\,\Delta x_i \right| \ < \ \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.3}$$

$$\left| \int_a^b \tilde{v}\, y'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}(c_i)\, \Delta y_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.4}$$

$$\left| \int_a^b \tilde{u}\, y'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta y_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.5}$$

$$\left| \int_a^b \tilde{v}\, x'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}(c_i)\, \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.6}$$

Beweis von (4.3):

Weil $\tilde{u} \cdot x'$ mit $\tilde{u}$ und x' stetig auf $[a,b]$, also auch Riemann-integrierbar ist, gilt für genügend feine Partitionen $P \subseteq P_\varepsilon$

$$\left| \int_a^b \tilde{u} \cdot x'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i) \cdot x'(c_i) \cdot \Delta t_i \right| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{4.7}$$

Da $x(t)$ differenzierbar ist, gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\bar{c}_i) \cdot \Delta t_i$$

mit $\bar{c}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ und $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, also

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i) \cdot x'(\bar{c}_i) \cdot \Delta t_i. \tag{4.8}$$

Man beachte, daß c_i und $\bar{c}_i$ i. a. verschieden sind. Sie liegen aber im gleichen Teilintervall der Partition. Das nutzen wir jetzt aus.

Da $\tilde{u}$ als stetige Funktion beschränkt auf $[a,b]$ ist, gibt es ein U mit

$$|\tilde{u}(t)| \le U \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

Nach Voraussetzung ist die Kurve glatt, also $x(t)$ stetig differenzierbar. Damit ist $x'(t)$ stetig auf dem Kompaktum $[a,b]$, also auch gleichmäßig stetig. Das heißt, es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$|t_1 - t_2| < \delta \;\Rightarrow\; |x'(t_1) - x'(t_2)| < \frac{\varepsilon}{8\,(b-a)\,U}.$$

Setzen wir von der Partition P voraus, daß ihr Feinheitsgrad $\sigma(P) < \delta$ ist, so ist $|c_i - \bar{c}_i| < \delta$, also

$$|x'(c_i) - x'(\bar{c}_i)| < \frac{\varepsilon}{8\,(b-a)\,U}.$$

Damit erhalten wir

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, x'(c_i)\, \Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta x_i\right| \overset{(4.8)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i) \cdot (x'(c_i) - x'(\bar{c}_i)) \cdot \Delta t_i\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} U \cdot \frac{\varepsilon}{8\,(b-a)\,U} \cdot \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{8}.$$

Aus dieser Ungleichung und aus (4.7) folgt schließlich (4.3):

$$\left|\int_a^b \tilde{u}\, x'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta x_i\right| \leq$$

$$\left|\int_a^b \tilde{u}x'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)x'(c_i)\, \Delta t_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, x'(c_i)\, \Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta x_i\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analog zeigt man (4.4), (4.5), (4.6). Für genügend feine Partitionen P gilt dann

$$|S - R(f,P)| \leq \left|\int_a^b \tilde{u}\, x'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta x_i\right| + \left|\int_a^b \tilde{v}\, y'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}(c_i)\, \Delta y_i\right|$$

$$+ \left|\int_a^b \tilde{u}\, y'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta y_i\right| + \left|\int_a^b \tilde{v}\, x'\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}(c_i)\, \Delta x_i\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Damit ist f integrierbar längs γ, und es gilt (4.1). □

Bemerkung. Wegen der Eigenschaft (C) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$ ist der Satz 4.1 auch für stückweise glatte Kurven anwendbar.

Satz 4.2 *Ist f integrierbar längs γ und M eine obere Schranke für die Werte $|f(z)|$ auf γ, also*

$$|f(z(t))| \leq M \text{ für alle } t \in [a,b],$$

so gilt

$$\left|\int_\gamma f\, dz\right| \leq M \cdot \lambda, \tag{4.9}$$

wobei λ die Bogenlänge von γ ist.

Beweis: Für eine Riemann-Summe gilt

$$|R(f,P)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\, \Delta z_i\right|$$
$$\leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} |\Delta z_i| = M \cdot \lambda(\gamma, P) \leq M \cdot \lambda,$$

wobei $\lambda(\gamma, P)$ die Länge des durch P bestimmten Polygonzuges ist.

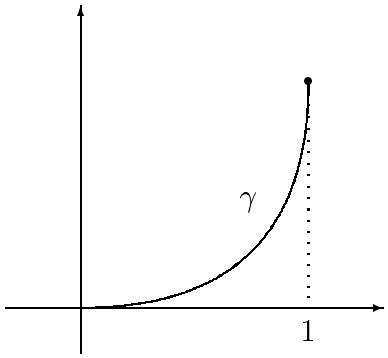
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Partition P mit

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le |R(f,P)| + \left|\int_\gamma f\,dz - R(f,P)\right| \le M \cdot \lambda + \varepsilon.$$

Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung (4.9). □

Beispiel

Es sei $f(z) = x^2 + i\,(x+y)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad z(t) = t + i\,t^2$, der Parabelbogen



Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 f(z(t))\,z'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + i\,(t+t^2)) \cdot (1 + 2\,i\,t)\,dt \\
&= \int_0^1 (-t^2 - 2\,t^3)\,dt + i \int_0^1 (2\,t^3 + t^2 + t)\,dt \\
&= -\frac{5}{6} + \frac{4}{3}\,i.
\end{aligned}$$

Wir wollen das Integral nach Satz 4.2 abschätzen. Für den Integranden gilt

$$|f(z(t))| = |t^2 + (t+t^2)i| = \sqrt{t^4 + (t+t^2)^2} \le \sqrt{5}$$

und für die Bogenlänge

$$\lambda = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt \le \sqrt{5}$$

für alle $t \in [0,1]$. Wir erhalten damit die Abschätzung

$$\left|\int_\gamma f dz\right| \le \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5.$$

4.4 Aufgaben

Aufgabe 4.1 Schätze den Betrag des Integrals

$$I = \int_\gamma \frac{z}{17 + z^4}\, dz$$

durch 1 nach oben ab, wobei

$$\gamma : [0, 2] \to \mathbb{C}, \qquad z(t) = e^{i\frac{\pi}{4}}\, t$$

die Strecke zwischen 0 und $\sqrt{2}(1 + i)$ ist.

Hinweis: Unterteile dazu den Weg geeignet in zwei Teilwege und schätze die entstehenden Integrale einzeln ab.

Aufgabe 4.2 Berechne

$$\int_\gamma z(1 - 2\bar{z})\, dz,$$

wobei der Integrationsweg γ

a) die Strecke zwischen 0 und $1 + i$,

b) der Bogen zwischen 0 und $1 + i$ des Kreises um 1 mit dem Radius 1,

c) der Streckenzug ist, der aus den Strecken von 0 nach i und von i nach $1 + i$ besteht.

Aufgabe 4.3 Berechne $\int_\gamma \overline{z} dz$ entlang folgender Wege

a) $\gamma : z(t) = t^2 + it,\ 0 \le t \le 2$,

b) $\gamma : z(t) = \begin{cases} 2ti, & 0 \le t \le 1 \\ 4(t-1) + 2i, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$.

Kapitel 5 Die Umlaufzahl

5.1 Abstand von Mengen

Es sei E ein metrischer Raum. Eine Teilmenge A von E heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\mathcal{C}A = E \setminus A$ offen ist.

Ein Punkt $x \in E$ ist ein *Berührungspunkt* einer Teilmenge $A \subseteq E$, wenn jede Umgebung von x einen nicht leeren Durchschnitt mit A hat. Die Menge aller Berührungspunkte heißt *Abschluß* von A, geschrieben $\overline{A}$.

Definition

1.) Es sei x ein Punkt, B eine nicht leere Teilmenge eines metrischen Raumes E. Dann heißt

$$d(x, B) = \inf\{d(x, b) \mid b \in B\}$$

Abstand von x und B.

2.) Es seien A und B nicht leere Teilmengen von E. Dann heißt

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Abstand von A und B.

Eigenschaften

(1) $A \subseteq \overline{A}$.

Beweis: Ist $a \in A$, so gilt $a \in U_\varepsilon(a) \cap A$ für alle $\varepsilon > 0$, also $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$, d. h. $a \in \overline{A}$.

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Beweis: Ist $a \in \overline{A}$, so folgt $U_\varepsilon(a) \cap B \supseteq U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$, also $a \in \overline{B}$. Damit ist $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(3) $A = \overline{A} \iff A$ ist abgeschlossen.

Beweis: Ist A abgeschlossen und $a \notin A$, so gibt es eine ganze Umgebung $U_\varepsilon(a)$ im Komplement von A, da dieses offen ist. Damit ist a auch kein Berührungspunkt, liegt also nicht in $\overline{A}$. Damit ist $\overline{A} \subseteq A$ gezeigt. Die umgekehrte Inklusion folgt aus (1)

Es sei $A = \overline{A}$ und $a \notin A$, also $U_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$, also ist $U_\varepsilon(a)$ im Komplement von A enthalten. Das bedeutet aber, daß dieses offen, also A abgeschlossen ist.

BEMERKUNG. Ist B abgeschlossen und $A \subseteq B$, so gilt $\overline{A} \subseteq \overline{B} = B$ nach (2), also ist $\overline{A}$ ist die kleinste A umfassende abgschlossene Menge.

(4) $d(x, B) = 0 \iff x \in \overline{B}$

Beweis: a) Es sei $x \in \overline{B}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $b \in U_\varepsilon(x)$. Also ist

$$d(x, B) \leq d(x, b) < \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist $d(x, B) = 0$.

b) Es sei $x \notin \overline{B}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$. Für jedes $b \in B$ ist $d(x, b) \geq \varepsilon$, also $d(x, B) \geq \varepsilon > 0$.

(5) $|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$

Beweis: Für alle $b \in B$ gilt

$$d(x, B) \leq d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b),$$

also

$$d(x, B) \leq d(x, y) + d(y, B),$$

also

$$d(x, B) - d(y, B) \leq d(x, y).$$

Analog ergibt sich

$$d(y, B) - d(x, B) \leq d(y, x) = d(x, y),$$

also gilt (5).

Satz 5.1 *Ist A eine kompakte, B eine abgeschlossene Teilmenge von E und sind A und B disjunkt, so gilt $d(A, B) > 0$.*

Beweis: Wegen (5) ist die Abbildung $A \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x, B)$ stetig. Weil eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum annimmt, gibt es ein $a \in A$ mit $d(A, B) = d(a, B)$. Aus $a \notin B = \overline{B}$ folgt $d(a, B) > 0$ wegen (4). □

Bemerkung. Ist A nur abgeschlossen, aber nicht kompakt, so folgt im allgemeinen nicht $d(A, B) > 0$.
Beispiel: Die beiden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \qquad B = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

haben den Abstand Null, obwohl sie disjunkt sind.

5.2 Die Umlaufzahl

Sind a, z_1, z_2 komplexe Zahlen, so ist der Winkel zwischen den Strahlen von a nach z_1 und von a nach z_2 gleich

$$\varphi = \sphericalangle(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2 - a}{z_1 - a}, \qquad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

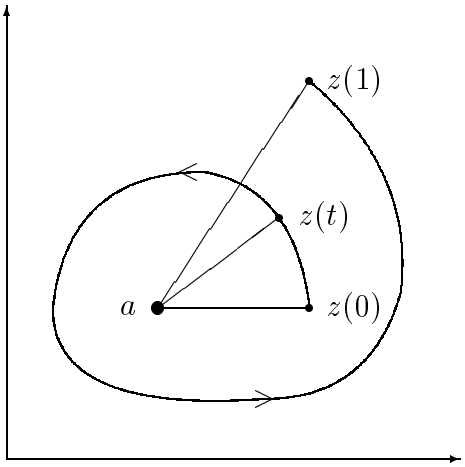
Hilfssatz 5.2 *Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, z = z(t)$ eine Kurve und a ein nicht auf γ liegender Punkt. Es gibt dann eine eindeutig bestimmte Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften*

(1) *g ist stetig,*

(2) $g(t) \equiv \arg \dfrac{z(t) - a}{z(0) - a} \bmod 2\pi,$

(3) $g(0) = 0.$

(D.h. g mißt den Winkel beim Durchlaufen der Kurve γ.)



Beweis: Es sei $|\gamma|$ die Punktmenge von γ und $\rho := d(a, |\gamma|) > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $z(t)$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |z(t) - z(t')| < \rho.$$

Für $|t - t'| < \delta$ ist dann

$$\left| \arg \left(\frac{z(t) - a}{z(t') - a} \right) \right| < \frac{\pi}{3}.$$

Wegen $|z(t)-a|, |z(t')-a| \geq \rho > |z(t)-z(t')|$ ist nämlich der Winkel bei a der kleinste im Dreieck $[a\, z(t')\, z(t)]$, also kleiner als $\frac{\pi}{3}$.

1.) *Eindeutigkeit von g:* Wegen (2) ist

$$g(t) - g(t') \equiv \arg\left(\frac{z(t)-a}{z(t')-a}\right) \bmod 2\pi,$$

also für festes t'

$$g(t) - g(t') - \arg\left(\frac{z(t)-a}{z(t')-a}\right) = 2\pi k(t).$$

Dann ist $k(t)$ eine stetige Funktion in t im Intervall $\{t \in \mathbb{R} \mid |t-t'| < \delta\}$. Außerdem ist $k(t)$ ganzzahlig und $k(t') = 0$. Daraus folgt

$$g(t) - g(t') = \arg\left(\frac{z(t)-a}{z(t')-a}\right)$$

für $|t-t'| < \delta$.

Wir wählen eine Partition $P = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = 1\}$, deren Feinheitsgrad $\sigma(P) < \delta$ ist. Dann ist $t_k - t_{k-1} < \delta$. Für $t \in [0,1]$ sei $t_i \leq t < t_{i+1}$, also auch $t - t_i < \delta$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} g(t) &= g(t) - g(0) = g(t) - g(t_i) + \sum_{k=1}^{i} (g(t_k) - g(t_{k-1})) \\ &= \arg\left(\frac{z(t)-a}{z(t_i)-a}\right) + \sum_{k=1}^{i} \arg\left(\frac{z(t_k)-a}{z(t_{k-1})-a}\right). \end{aligned}$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist nur abhängig von der Kurve und P, also ist g eindeutig bestimmt.

2.) *Existenz von g:* Definiere g wie in der vorigen Gleichung. Diese Funktion hat dann die Eigenschaften (1) bis (3). □

Man nennt

$$V(\gamma, a) := g(1)$$

die *Argumentvariation* der Kurve γ bezüglich des Punktes a. Sie ist für alle $a \notin |\gamma|$ definiert. Für eine genügend feine Partition $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ gilt die obige Formel

$$V(\gamma, a) = \sum_{k=1}^{n} \arg\left(\frac{z(t_k)-a}{z(t_{k-1})-a}\right).$$

Eigenschaften der Argumentvariation

1. Ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, so ist $V(\gamma, a) = V(\gamma_1, a) + V(\gamma_2, a)$.
2. Es ist $V(-\gamma, a) = -V(\gamma, a)$.
3. $V(\gamma, a)$ ist stetig in a.
4. Ist γ geschlossen, also $z(0) = z(1)$, so ist $V(\gamma, a) \equiv 0 \bmod 2\pi$, also $V(\gamma, a) = 2n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Definition. Ist γ eine geschlossene Kurve, so heißt

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi} V(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$$

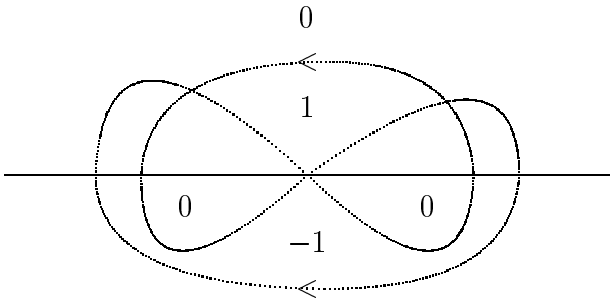
Umlaufzahl oder *Windungszahl* der Kurve γ bezüglich a.

Beispiele

1.) Es sei γ gegeben durch $z(t) = e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0, 1]$. Dann erfüllt $g(t) = 2\pi t$ die Eigenschaften (1) bis (3) von Hilfssatz 5.2. Es ist

$$n(\gamma, a) = \begin{cases} 1 & \text{für } |a| < 1 \\ 0 & \text{für } |a| > 1. \end{cases}$$

2.) Wegen der Stetigkeit ist $n(\gamma, a)$ konstant in den zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Man hat daher die Umlaufzahlen für diese Bereiche zu bestimmen. Beispielsweise ist



5.3 Einfach zusammenhängende Gebiete

Definition. 1.) Ein geschlossener Weg γ heißt *nullhomolog* in einem Gebiet G, wenn die Umlaufzahl

$$n(\gamma, a) = 0$$

für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$ ist.

2.) Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg γ in G nullhomolog ist.

Beispiele

1.) $G = \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

2.) $G = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist nicht einfach zusammenhängend, da ein Kreis um einen der Punkte eine Umlaufzahl 1 besitzt.

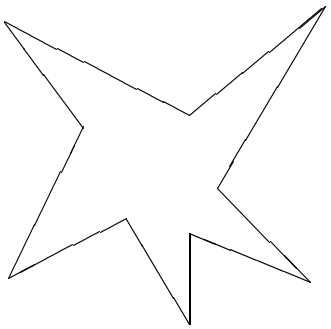
3.) Wir nennen einen Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus G$ mit ∞ verbindbar, wenn zu jeder Zahl $R \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{C} \setminus G$ mit $|x| \geq R$ existiert, so daß sich a mit x durch einen Weg in $\mathbb{C} \setminus G$ verbinden läßt. Dann gilt: Sind alle Punkte $a \notin G$ mit ∞ verbindbar, so ist G einfach zusammenhängend.

Beweis: Da die Punktmenge $|\gamma|$ einer geschlossenen Kurve γ kompakt, also beschränkt ist, gibt es ein Quadrat $Q = \{z \mid |\operatorname{Im} z|, |\operatorname{Re} z| \leq R\}$, das $|\gamma|$ enthält. Für $x \notin Q$ ist $n(\gamma, x) = 0$.

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Nach Voraussetzung ist a mit einem $x \notin Q$ in $\mathbb{C} \setminus G$ verbindbar. Wegen der Stetigkeit der Umlaufzahl auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ ist

$$n(\gamma, a) = n(\gamma, x) = 0.$$

Anschaulich besagt die Bedingung, daß das Gebiet G keine Löcher besitzt. Hierzu gehören konvexe, aber auch sternförmige Gebiete

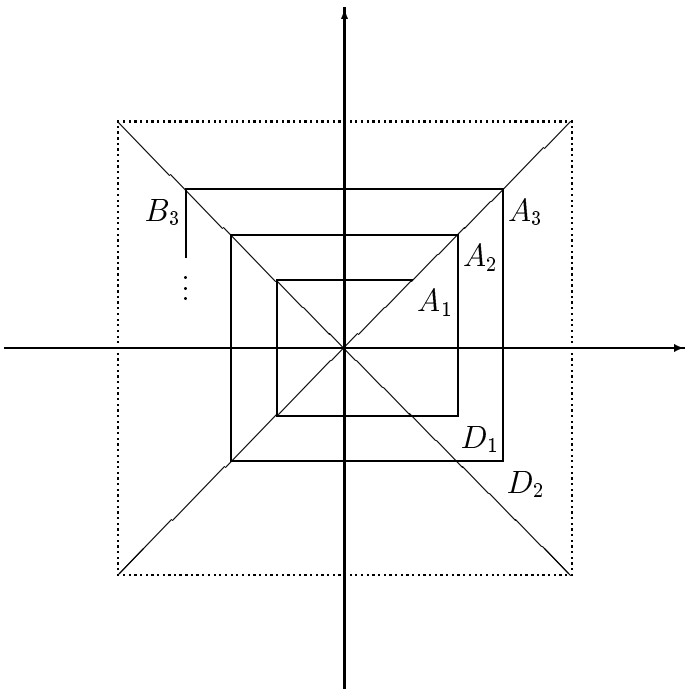


oder z. B. das unbeschränkte Gebiet

$$G = \{z = x + iy \mid -1 < x < 1 \text{ oder } -1 < y < 1\}.$$

Die Bedingung, daß die Punkte $a \notin G$ in $\mathbb{C} \setminus G$ mit ∞ verbindbar sind, ist nicht notwendig für den einfachen Zusammenhang.

Beispiel



Es sei (a_n) eine reelle positive, monoton wachsende Folge mit dem Grenzwert 1 (z.B. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$). Wir definieren dann folgende Punkte im Einheitsquadrat

$A_1 = (a_1, a_1)$

$A_n = (a_n, a_n), \qquad B_n = (-a_n, a_n), \qquad C_n = (-a_n, -a_n), \qquad D_n = (a_{n+1}, -a_n)$

für $n \in \mathbb{N}$ und den Streckenzug

$$H_n = [A_n, B_n] \cup [B_n, C_n] \cup [C_n, D_n] \cup [D_n, A_{n+1}].$$

Das Gebiet

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|,\ |y| < 1\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

ist einfach zusammenhängend, kein Punkt aus H_n läßt sich jedoch in $\mathbb{C} \setminus G$ mit einem Punkt außerhalb des Einheitsquadrats verbinden.

5.4 Aufgaben

Aufgabe 5.1 E sei ein metrischer Raum, A und B seien Teilmengen von E.
Zeige

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Gib ein Beispiel an, für das die Gleichheit in b) nicht gilt.

Aufgabe 5.2 Skizziere eine Kurve, bei der $0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$ als Umlaufzahlen vorkommen.

Kapitel 6 Integration holomorpher Funktionen

6.1 Cauchyscher Integralsatz

Satz 6.1 (Cauchy 1825) *Ist f holomorph in einem Gebiet G und γ ein nullhomologer geschlossener Weg in G, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: siehe Anhang. □

Beispiele

1. $f(z) = z^2$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Weil $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, sind alle geschlossenen Wege nullhomolog. Daher gilt

   $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

   für alle geschlossene Wege.

2. Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ist holomorph in $G \setminus \{0\}$. Der Einheitskreis

   $$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad z(t) = e^{it}$$

   ist wegen $n(\gamma, 0) = 1$ nicht nullhomolog, es gilt

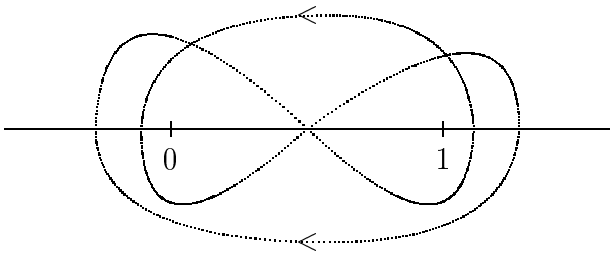
   $$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot 2\pi i\, e^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

   Man erhält einen von Null verschiedenen Wert. Für den Kreis

   $$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad z(t) = 2 + e^{it}$$

   ist dagegen das Integral Null, weil in G der Weg nullhomolog ist.

3. Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z\,(1-z)}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Sei γ der folgende Weg:



Es ist $n(\gamma, 0) = n(\gamma, 1) = 0$. Also ist γ nullhomolog. Folglich gilt

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z\,(1-z)}\,dz = 0.$$

In einfach zusammenhängenden Gebieten sind alle geschlossenen Wege nullhomolog, man erhält daher als Spezialfall des Cauchyschen Integralsatzes

Korollar 6.2 *Ist f holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und γ ein geschlossener Weg in G, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Definition

Ein Integral über $f(z)$ heißt *wegunabhängig*, wenn für zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

gilt.

Gleichwertig hiermit ist

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

für geschlossenene Wege. (Man setze $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$.) Aus dem obigen Korollar ergibt sich dann

Korollar 6.3 *Ist f holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G, so sind die Integrale über f wegunabhängig.*

Definition. Zwei geschlossene Wege γ_1 und γ_2 heißen *homolog*, wenn

$$n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C} \setminus G$$

gilt. ("nullhomolog" bedeutet "homolog zur Nullfunktion".)

Korollar 6.4 *γ_1 und γ_2 seien geschlossene homologe Wege in G. Ist f holomorph in G, so gilt*

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz.$$

Beweis: Da G zusammenhängend ist, gibt es in G einen Weg γ_0, der den Anfangspunkt von γ_1 mit dem von γ_2 verbindet. Der Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_0 - \gamma_2 - \gamma_0$ ist geschlossen, und für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$ ist $n(\gamma, a) = 0$, also ist γ nullhomolog. Nach Satz 6.1 folgt

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz = 0$$

und damit die Behauptung. □

Beispiel

Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Sei γ ein geschlossener Weg in G und γ' der $n(\gamma, a)$-fach durchlaufene Kreis um a mit dem Radius 1:

$$\gamma' : z(t) = a + e^{2\pi i\, t}, \quad t \in [0, n(\gamma, a)]$$

Wegen $n(\gamma, a) = n(\gamma', a)$, $a \in \mathbb{C} \setminus G$, sind γ und γ' homolog, also ist

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{n(\gamma,a)} \frac{2\pi i}{e^{2\pi i\, t}} \cdot e^{2\pi i\, t}\,dt = 2\pi i\, n(\gamma, a). \tag{6.1}$$

6.2 Die Integralformeln

Satz 6.5 (Cauchysche Formel) *Sei f holomorph in einem Gebiet G und γ ein nullhomologer Weg in G. Dann gilt für $a \in G \setminus |\gamma|$:*

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, a) \cdot f(a). \tag{6.2}$$

Beweis: Nach (6.1) ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz &= \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz \\ &= \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + 2\pi i \cdot n(\gamma,a)\cdot f(a).\end{aligned}$$

Folglich muß nur gezeigt werden, daß das Integral

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz$$

verschwindet.

Für festes a ist die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

in $G' = G \setminus \{a\}$ definiert und holomorph. Wegen $\lim_{z\to a} g(z) = f'(a)$ gibt es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) \subseteq G$ mit

$$|g(z) - f'(a)| < 1 \quad \text{für } z \in U_\varepsilon(a),\ z \neq a.$$

Also ist

$$|g(z)| \leq |g(z) - f'(a)| + |f'(a)| < 1 + |f'(a)| =: M.$$

Es sei nun γ' ein $n(\gamma,a)$-fach durchlaufener Kreis um a mit dem Radius $r < \varepsilon$. γ und γ' sind dann bezüglich G' homolog:

$$\begin{aligned} n(\gamma,a) &= n(\gamma',a) \\ \text{und} \quad n(\gamma,b) &= n(\gamma',b) = 0 \quad \text{für } b \in \mathbb{C}\setminus G\end{aligned}$$

Nach Korollar 6.4 ist

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{\gamma'} g(z)\,dz,$$

also

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma'} g(z)\,dz\right| \leq M \cdot 2\pi\, r \cdot n(\gamma',a).$$

Weil r beliebig klein gewählt werden kann, gilt

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| = 0,$$

also

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

□

Beispiel

Die Funktion $f(z) = e^z$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Der Kreis um 1 mit dem Radius 1, also

$$\gamma : z(t) = 1 + e^{2\pi i t}, \qquad t \in [0,1].$$

ist in $G = \mathbb{C}$ ein nullhomologer Weg mit $n(\gamma, 1) = 1$. Dann ist nach Satz 6.5 (Cauchysche Formel)

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\, dz = 2\pi i \cdot e^1 \cdot 1 = 2\pi i\, e.$$

Lemma 6.6 *Es sei γ ein Weg und g eine auf γ stetige Funktion. Die für $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ definierte Funktion*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, und es gilt:

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{n \cdot g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

(Die Formel bedeutet, daß man unter dem Integral differenzieren darf.)

Beweis: Wir betrachten zunächst z als fest gewählt und $\rho = d(z, |\gamma|) > 0$. Sei $|h| \le \varepsilon := \frac{\rho}{2}$, also $z + h \notin |\gamma|$. Ist $\zeta \in |\gamma|$, so gilt $|\zeta - z| \ge \rho$, also

$$|\zeta - z - h| \ge |\zeta - z| - |h| \ge \varepsilon$$

für $|h| < \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \int_\gamma \frac{n \cdot g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \\
= &\int_\gamma \left(\frac{g(\zeta)}{h \cdot (\zeta - z - h)^n} - \frac{g(\zeta)}{h \cdot (\zeta - z)^n} - \frac{n \cdot g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \right) d\zeta \\
= &\int_\gamma \frac{(\zeta - z)^{n+1} - (\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z) - n \cdot h \cdot (\zeta - z - h)^n}{h \cdot (\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)^{n+1}} \cdot g(\zeta)\, d\zeta \\
= &\int_\gamma \frac{h \cdot P(\zeta - z, h)}{(\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)^{n+1}} \cdot g(\zeta)\, d\zeta,
\end{aligned}$$

wobei $P(\zeta - z, h)$ ein Polynom in $(\zeta - z)$ und h ist. Dann sind $P(\zeta - z, h)$ und $g(z)$ auf der kompakten Menge $|\gamma|$ beschränkt, also

$$|P(\zeta - z, h) \cdot g(\zeta)| \le M$$

Hiermit folgt

$$\left| \int_\gamma \frac{h \cdot P(\zeta - z, h)}{(\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)^{n+1}} \cdot g(\zeta)\, d\zeta \right| \leq |h| \cdot \frac{M}{\varepsilon^{2n+1}} \cdot \lambda(\gamma),$$

wobei $\lambda(\gamma)$ die Bogenlänge von γ ist. Für $h \to 0$ wird die rechte Seite beliebig klein, also konvergiert das Integral gegen Null. Folglich ist f differenzierbar in z, und es gilt

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{n \cdot g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Dies gilt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$, also ist f holomorph in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. □

Satz 6.7 *Ist f holomorph in einem Gebiet G, so ist auch f' holomorph in G (und somit auch f'', f''', ...)*

Beweis: Sei $a \in G$, γ ein Kreis um a, der mit seinen inneren Punkten in G liegt. γ ist dann nullhomolog ($n(\gamma, b) = 0$ für $b \in \mathbb{C} \setminus G$, also b außerhalb des Kreises γ).

Nach Satz 6.5 (Cauchysche Formel) ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nach Lemma 6.6 ist $f(z)$ differenzierbar und

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta. \tag{6.3}$$

Nochmals Lemma 6.6 angewendet, ergibt, daß f' holomorph in G ist. □

Durch Differentiation der Cauchyschen Integralformel (6.2)

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\, d\zeta = 2\pi i \cdot n(\gamma, a) \cdot f(z)$$

ergeben sich die weiteren Cauchysche Integralformeln

Korollar 6.8 *Ist γ nullhomolog und f holomorph in G, so gilt für sämtliche $z \notin |\gamma|$ und $m = 0, 1, 2, \ldots$:*

$$m! \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\, d\zeta = 2\pi i \cdot n(\gamma, a) \cdot f^{(m)}(z).$$

6.3 Wegunabhängige Integrale

Ein Integral über eine Funktion f sei *wegunabhängig*, also

$$\int_\gamma f\,dz = 0$$

für alle geschlossenen Wege γ. Für alle $z_0, z_1 \in G$ ist dann

$$\int_\gamma f\,dz$$

unabhängig von dem z_0 mit z_1 verbindenden Weg γ. Man schreibt

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f\,dz\,.$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z_1} f\,dz + \int_{z_1}^{z_2} f\,dz &= \int_{z_0}^{z_2} f\,dz,\\ \int_{z_0}^{z_1} f\,dz &= -\int_{z_1}^{z_0} f\,dz.\end{aligned}$$

Hilfssatz 6.9 *Ist das Integral über eine stetige Funktion f wegunabhängig, so ist für fest gewähltes $z_0 \in G$ die Funktion*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \quad \textit{mit } z \in G$$

holomorph in G, und es gilt

$$F'(z) = f(z).$$

Beweis: Wegen der Wegunabhängigkeit und des Zusammenhangs von G ist das Integral wohldefiniert für alle $z \in G$. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{h}f(z)\int_z^{z+h} d\zeta\\ &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\zeta)-f(z))\,d\zeta.\end{aligned}$$

Weil f stetig ist, gilt $|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$ auf der Strecke $[z\,z+h]$ für genügend kleines h, also

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot|h| = \varepsilon.$$

Also ist $F(z)$ differenzierbar und $F'(z) = f(z)$. □

Satz 6.10 (Morera 1886) *Ist in G das Integral über eine stetige Funktion wegunabhängig, so ist f holomorph.*

Beweis: Nach dem Hilfssatz 6.9 ist f die Ableitung einer holomorphen Funktion F. Nach Satz 6.7 ist dann auch f holomorph. □

Nach Korollar 6.3 sind Integrale von holomorphen Funktionen wegunabhängig, wenn G einfach zusammenhängend ist. Der Satz von Morera ergibt die Umkehrung: Nur holomorphe Funktionen haben diese Eigenschaft.

Definition

Eine Funktion $F(z)$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f(z)$ in G, wenn F holomorph ist und

$$F'(z) = f(z)$$

für alle $z \in G$ gilt.

Eigenschaften

(A) Besitzt $f(z)$ eine Stammfunktion, so ist f holomorph (Satz 6.7).

(B) Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorphe Funktion f besitzt eine Stammfunktion, nämlich

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Denn: Nach dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 6.1) sind die Integrale über f wegunabhängig. Nach Hilfssatz 6.9 ist dann $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ Stammfunktion von f.

(C) Die Stammfunktionen von f sind bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Denn:

$$F_1'(z) = F_2'(z) = f(z) \iff (F_1(z) - F_2(z))' = 0.$$

Nach Satz 3.10 (Seite 28) ist dies mit $F_1(z) - F_2(z) =$ konstant gleichwertig.

Satz 6.11 *Besitzt f in G eine Stammfunktion F, so sind die Integrale über f wegunabhängig, und es gilt für einen beliebigen Weg γ mit dem Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1*

$$\int_{\gamma} f\, dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Beweis: 1.) Sei G zunächst einfach zusammenhängend. Nach Eigenschaft (A) ist f holomorph, also sind die Integrale über f wegunabhängig, also ist nach (B)

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

eine Stammfunktion. Mit Eigenschaft (C) hat man weiter für die Stammfunktion F

$$\phi(z) = F(z) + c.$$

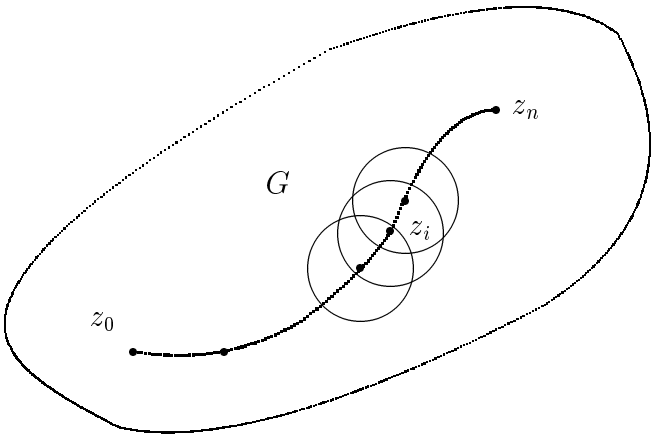
Für $z = z_0$ ergibt sich damit $\phi(z_0) = 0 = F(z_0) + c$, also $c = -F(z_0)$, also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \phi(z_1) = F(z_1) - F(z_0).$$

2.) Sei nun G beliebig. Wir wählen eine Partition P des Parameterintervalls, so daß für die entsprechenden Punkte $z_0,\ z_1, \ldots,\ z_n$ auf der Kurve γ

$$|z_i - z_{i-1}| < \rho = d(|\gamma|, \mathbb{C} \setminus G)$$

gilt.



Der Teilweg γ_i zwischen z_{i-1} und z_i liegt in einem Kreis um z_i mit dem Radius ρ, also in einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Wie im ersten Beweisteil folgt dann

$$\int_{\gamma_i} f\,dz = F(z_i) - F(z_{i-1}).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} (F(z_i) - F(z_{i-1})) \\ &= F(z_n) - F(z_0),\end{aligned}$$

wobei z_n der Endpunkt der Kurve ist. □

Beispiele

1. $f(z) = z^2 \cdot \cos z$ ist holomorph in $G = \mathbb{C}$ und

$$F(z) = 2 \cdot z \cdot \cos z + (z^2 - 2) \cdot \sin z$$

ist eine Stammfunktion. (Die Stammfunktionen elementarer Funktionen kann man einer Integraltafel entnehmen.)

Für $f(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ist

$$F(z) = \frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1}$$

ist eine Stammfunktion, also

$$\int_\gamma z^n \, dz = \frac{1}{n+1} \left(z_1^{n+1} - z_0^{n+1} \right),$$

wobei z_0 der Anfangs-, z_1 der Endpunkt von γ ist.

2. Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$, $n > 1$, ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$F(z) = \frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1}$$

eine Stammfunktion. Es gibt eine Stammfunktion, obgleich G nicht einfach zusammenhängend ist.

3. $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es gibt *keine* Stammfunktion, weil die Integrale über f nicht wegunabhängig sind.

6.4 Der Logarithmus

Wir definieren den Logarithmus als eine Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$. Da der ganze Holomorphiebereich von $f(z)$ nicht einfach zusammenhängend ist, wählen wir das einfach zusammenhängende Gebiet

$$G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$$

und setzen

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z}. \tag{6.4}$$

Hierbei kann als Integrationsweg ein beliebiger Weg gewählt werden, der 1 und z verbindet und die negative reelle Achse nicht schneidet. Dann gilt

1. log ist holomorph in G und
$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

2. Für positive reelle Zahlen stimmt log mit dem natürlichen Logarithmus ln überein.

3. *Berechnung von* $\log z$*:* Es sei $z = re^{i\varphi}$, also $r = |z|,\ \varphi = \arg z$. Wir wählen als Verbindungsweg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit
$$\gamma_1 :\ z_1(t) = 1 + t\,(r-1), \quad t \in [0,1]$$
das Geradenstück zwischen 1 und r auf der reellen Achse und
$$\gamma_2 :\ z_2(t) = r \cdot e^{i\varphi\, t}, \quad t \in [0,1]$$
der Kreisbogen von r nach z.
Dann ist
$$\begin{aligned} \log z &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \\ &= \ln r + i \cdot \varphi \\ &= \ln|z| + i \arg z. \end{aligned}$$
Das Bild von log ist
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}.$$
Zum Beipiel ist
$$\log(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\,\frac{3\pi}{4},$$
$$\log(-1-i) = \ln(\sqrt{2}) - i\,\frac{3\pi}{4}.$$
Nähert man sich mit $t \to 0$ in $\log(-1+ti)$ der negativen reellen Achse, so erhält man im Grenzwert $+i\pi$ für $t > 0$ und $-i\pi$ für $t < 0$. In $\mathbb{C}$ würde ein Sprung von $2i\pi$ entstehen.

4. Es sei jetzt γ ein beliebiger Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von 1 nach z. Ferner sei γ_0 das Geradenstück von 1 nach z. Dann ist $\gamma_1 = \gamma - \gamma_0$ geschlossen und $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, also
$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{z} &= \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \\ &= \log z + 2\pi i \cdot n(\gamma_1, 0) \\ &\equiv \log z \mod 2\pi i. \end{aligned}$$

5. Es gilt
$$\exp(\log z) = z \quad \text{und} \quad \log(\exp z) \equiv z \bmod 2\pi i.$$
Beweis: Es sei $z = r\,e^{i\varphi}$. Dann ist
$$\exp(\log z) = \exp(\ln r + i\varphi) = r\,e^{i\varphi} = z.$$
Hieraus folgt
$$\exp(\log(\exp z)) = \exp z,$$
also auch die zweite Formel nach (3.5), Seite 26.

6. $\log(z_1 \cdot z_2) \equiv \log z_1 + \log z_2 \mod 2\pi i$ für $z_1, z_2 \in G$.
Beweis: Es ist
$$\exp(\log z_1 + \log z_2) = \exp\log z_1 \cdot \exp\log z_2 = z_1\,z_2 = \exp\log(z_1\,z_2).$$
Die Behauptung folgt dann wieder nach (3.5), Seite 26.

6.5 Aufgaben

Aufgabe 6.1 Berechne mit Hilfe der Cauchyschen Integralformeln
$$a) \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz, \qquad b) \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z^4}\,dz,$$
wobei γ der einmal positiv durchlaufene Kreis um 0 mit dem Radius 2 ist.

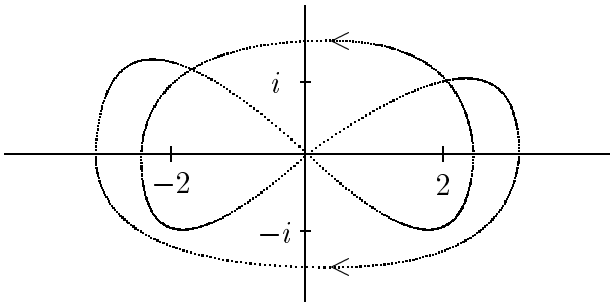
Aufgabe 6.2 Es sei f holomorph in G, γ nullhomolog und $a \notin |\gamma|$. Zeige
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$
Gib eine entsprechende Formel für die zweite Ableitung an.

Aufgabe 6.3 Berechne die Integrale
$$a) \quad \int_\gamma \frac{2z^2 - z}{z-a}\,dz \qquad b) \quad \int_\gamma \frac{z^3 + 2z}{(z-a)^3}\,dz$$
für $|a| \neq 1$, wobei γ durch
$$z(t) = e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi k], \qquad k \in \mathbb{N}$$
gegeben ist.

Aufgabe 6.4 Berechne

$$\int_\gamma \frac{4z^2 - 30z + 4}{(1+z^2)(z^2-4)}\,dz,$$

wobei γ der unten skizzierte Integrationsweg ist



Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 6.5 Berechne die Integrale

$$a)\ \int_\gamma \sin^3 z\,dz, \qquad b)\ \int_\gamma z^2\, e^{3z}\,dz$$

unter Verwendung von Stammfunktionen. Dabei sei γ ein Weg, der 1 und $1+i$ verbindet.

Aufgabe 6.6 Berechne alle möglichen Werte des Integrals

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2},$$

wobei γ ein Weg ist, der 0 und 1 verbindet und $\pm i$ nicht enthält.

Aufgabe 6.7 Es sei $f(z) = \dfrac{1}{z}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad z(t) = e^{it}$ der Einheitskreis. Berechne

$$F(a) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

für $|a| < 1$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung für $a \neq 0$.

Kapitel 7 Unendliche Reihen

7.1 Funktionenreihen

Es sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots$$

eine unendliche Reihe komplexer Funktionen, und

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

seien die zugehörigen Teilsummen.

Definitionen

1. Eine Reihe $\sum f_k(z)$ konvergiert punktweise auf einer Teilmenge E von $\mathbb{C}$ gegen $f(z)$, wenn gilt
$$\bigwedge_{z\in E}\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{N}\bigwedge_{n\geq N} |f(z) - s_n(z)| < \varepsilon.$$
(Hierbei ist N von z und ε abhängig.)

2. Eine Reihe $\sum f_k(z)$ konvergiert gleichmäßig auf einer Teilmenge E von $\mathbb{C}$ gegen $f(z)$, wenn gilt
$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{N}\bigwedge_{n\geq N}\bigwedge_{z\in E} |f(z) - s_n(z)| < \varepsilon.$$
(In diesem Fall kann N unabhängig von $z \in E$ gewählt werden.)

In beiden Fällen schreiben wir

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z).$$

Ist die Grenzfunktion $f(z)$ nicht bekannt, so läßt sich die Konvergenz mit Hilfe des *Cauchy-Kriteriums* zeigen: Gilt

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{N}\bigwedge_{n,m>N}\bigwedge_{z\in E} |\sum_{k=n}^{m} f_k(z)| < \varepsilon,$$

so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig auf E.

Eine Folgerung davon ist

Satz 7.1 (M-Test von Weierstraß) *Gilt*

$$|f_k(z)| \leq M \cdot a_k$$

für $z \in E$ und ist $\sum a_k$ konvergent, so konvergiert $\sum f_k(z)$ gleichmäßig auf E.

Beweis: Es ist

$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(z)| \leq M \cdot \sum_{k=n}^{m} a_k.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum a_k$ wird die rechte Seite für große n und m beliebig klein. □

Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k}$$

konvergiert gleichmäßig auf $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ für $r < 1$. Es ist nämlich $|1| = |z^k + (1-z^k)| \leq |z^k| + |1-z^k|$, also $1 - r \leq 1 - |z^k| \leq |1-z^k|$, also

$$\left| \frac{z^k}{1-z^k} \right| \leq \frac{r^k}{1-r} \leq M \cdot r^k.$$

für $M = \dfrac{1}{1-r}$. Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ ist für $r < 1$ konvergent, also konvergiert die obige Reihe gleichmäßig nach dem M-Test.

Wie im Reellen zeigt man

Satz 7.2 *Konvergiert $f(z) = \sum f_k(z)$ gleichmäßig auf E und sind die Funktionen $f_k(z)$ stetig, so ist auch $f(z)$ stetig.*

Satz 7.3 *Es sei γ ein Weg, $f_k(z)$ seien stetig auf γ. Bei gleichmäßiger Konvergenz auf γ gilt*

$$\int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma f_k(z)dz,$$

(gliedweise Integration).

Beweis: Nach Satz 7.2 ist auch $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ stetig und damit integrierbar. Für die Teilsummen gilt

$$\left| \int_\gamma f\,dz - \int_\gamma s_n\,dz \right| = \left| \int_\gamma (f - s_n)\,dz \right| \leq \lambda(\gamma) \cdot \sup_{z \in |\gamma|} \{|f - s_n|\},$$

wobei $\lambda(\gamma)$ die Länge von γ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \lim_{n\to\infty}\int_\gamma \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right)\,dz \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)\,dz \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_\gamma f_k(z)\,dz.\end{aligned}$$

Definitionen

1.) Eine Reihe $\sum f_k(z)$ konvergiert *lokal gleichmäßig* in einem Gebiet G gegen $f(z)$, wenn zu jedem $a \in G$ eine Umgebung $U_\varepsilon(a) \subseteq G$ existiert, auf der $\sum f_k(z)$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

2.) Eine Reihe $\sum f_k(z)$ konvergiert *kompakt* in einem Gebiet G gegen $f(z)$, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge $A \subseteq G$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

Beispiel. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert lokal gleichmäßig auf

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

gegen die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Beweis: 1.) Die Teilsummen sind

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

also ist

$$f(z) - s_n(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Sei $a \in G$, also $|a| < 1$. Setzt man $\varepsilon := \frac{1}{2}(1-|a|) > 0$, so gilt für $z \in U_\varepsilon(a)$

$$|1-z| \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad |z| < 1-\varepsilon.$$

Damit ist

$$\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| < \frac{(1-\varepsilon)^{n+1}}{\varepsilon} \quad \text{für alle } z \in U_\varepsilon(a).$$

Für $n \to \infty$ konvergiert $(1-\varepsilon)^{n+1}$ gegen Null. Es folgt die gleichmäßige Konvergenz auf der Umgebung $U_\varepsilon(a)$. Damit konvergiert $\sum z^k$ lokal gleichmäßig auf G gegen $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

2.) $\sum z^k$ konvergiert jedoch *nicht* gleichmäßig gegen $f(z)$ in G: Zu $\varepsilon > 0$ würde sonst ein N mit

$$|f(z) - s_n(z)| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ existieren. Wenn z jedoch dicht bei 1 liegt, wird dieser Ausdruck beliebig groß.

Lemma 7.4 *Lokal gleichmäßige Konvergenz ist äquivalent zur kompakten Konvergenz.*

Beweis: 1.) Sei $\sum f_k(z)$ lokal gleichmäßig konvergent und A eine kompakte Teilmenge von G. Zu jedem Punkt $a \in A$ existiert dann eine offene Umgebung $U(a)$, auf der $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig konvergiert. Weil A kompakt ist, wird A bereits durch endlich viele Umgebungen überdeckt, etwa

$$A \subseteq U(a_1) \cup U(a_2) \cup \ldots \cup U(a_n)\,.$$

Zu $\varepsilon > 0$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es dann ein N_i mit

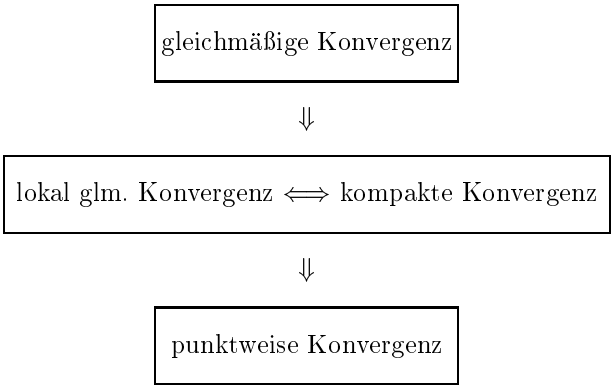
$$|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_i$ und $z \in U(a_i)$. Ist $N = \max\{N_i\}$, so gilt

$$|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und $z \in A$.

2.) Jede abgeschlossene Kreisscheibe $K = \{z \mid |z-a| \leq \varepsilon\}$ ist kompakt, also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig auf $U_\varepsilon(a) \subseteq K$, also lokal gleichmäßig. □



Satz 7.5 (Weierstraß) *Seien $f_k(z)$ holomorph in G und $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ kompakt konvergent gegen $f(z)$. Dann ist auch $f(z)$ holomorph in G und*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z) \quad \textit{für alle } z \in G$$

(gliedweise Differentiation).

Die differenzierte Reihe ist ebenfalls kompakt konvergent.

Bemerkung. Im entsprechenden Satz für reelle Funktionen muß man die gleichmäßige Konvergenz der differenzierten Reihe fordern.

Beweis: 1.) Sei $a \in G$ und $U_\rho(a) \subseteq G$. Weil $U_\rho(a)$ einfach zusammenhängend ist und die Funktionen f_k holomorph sind, gilt für jeden in $U_\rho(a)$ liegenden geschlossenen Weg nach Satz 6.1

$$\int_\gamma f_k(z)\,dz = 0.$$

Auf der kompakten Menge $|\gamma|$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig gegen $f(z)$. Nach Satz 7.3 ist also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_\gamma f_k(z)\,dz}_{0} = 0.$$

Nach dem Satz von Morera (Satz 6.10, Seite 58) ist $f(z)$ dann holomorph in $U_\rho(a)$, damit in ganz G.

2.) Sei $a \in G$ und $U_\rho(a) \subseteq G$. Man wähle für γ einen Kreis um a mit einem Radius $r < \rho$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der kompakten Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ ein N mit

$$\left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} f_k(\zeta) \right| < \frac{\varepsilon \cdot r}{4} \quad \text{für } n \geq N \text{ und alle } \zeta \in |\gamma|.$$

Für $z \in U_{\frac{r}{2}}(a)$ gilt dann nach den Cauchyschen Integralformeln:

$$\begin{aligned} \left| f'(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k'(z) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon \cdot r}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \cdot \underbrace{2\pi r}_{\lambda} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \geq N$. Damit ist

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z).$$

Dabei konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $U_{\frac{r}{2}}(a)$. Dies gilt für alle $a \in G$. Damit konvergiert sie lokal gleichmäßig, also kompakt auf G. □

7.2 Potenzreihen

Wie im Reellen zeigt man

Satz 7.6 (Hadamardsche Formel) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$ eine Potenzreihe und*

$$s := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

$$R := \begin{cases} 0 & \text{falls } s = \infty \\ \dfrac{1}{s} & \text{falls } 0 < s < \infty \\ \infty & \text{falls } s = 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

1. *Die Potenzreihe konvergiert kompakt in $G = \{z \mid |z-a| < R\}$.*
2. *Ist $|z-a| > R$, so divergiert die Reihe.*

R heißt Konvergenzradius *der Potenzreihe.*

Bemerkung. Für die Punkte auf dem Konvergenzkreis ($|z-a| = R$) hat man *keine* Aussage über die Konvergenz. Dies zeigen folgende Beispiele

1.) Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Es ist $R = 1$, die Reihe divergiert für alle Punkte des Konvergenzkreises.

2.) Die Reihe $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $R = 1$, sie konvergiert für $z = -1$, divergiert aber für $z = 1$.

3.) Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ ist gleichmäßig konvergent für alle z mit $|z| = 1$. (M-Test mit der Vergleichsreihe $\sum \dfrac{1}{n^2}$.)

Korollar 7.7 *Sei R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$. Dann ist die Funktion*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$$

holomorph in $G = \{z \mid |z-a| < R\}$ und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z-a)^{n-1}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Satz 7.5 von Weierstraß mit der kompakten Konvergenz der Reihe in $G = \{z \mid |z - a| < R\}$. □

Bemerkung. Wegen

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\limsup \sqrt[n]{n}}_{1} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n\,|a_n|}$$

hat die differenzierte Reihe den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Anwendung: Definition holomorpher Funktionen durch Potenzreihen

Setzt man

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

so folgt

1. $R = \infty$, also ist $\exp z$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{R}$ ist auch $\exp z$ reell und stimmt mit der reellen Exponentialfunktion überein.

2. Nach Satz 7.7 ist die Ableitung

$$(\exp z)' = \exp z.$$

3. Es gilt $\exp z = e^z$, wobei mit e^z die in Kapitel 3 definierte Exponentialfunktion gemeint ist.

   Beweis:

   Betrachte $g(z) = e^{-z} \cdot \exp z$. Dann ist

$$g'(z) = -e^{-z} \cdot \exp z + e^{-z} \cdot \exp z = 0.$$

   Dann ist $g(z) =$ konstant, also $\exp z = c \cdot e^z$. Wegen $\exp(0) = 1 = e^0$ ist $c = 1$, somit

$$\exp z = e^z.$$

7.3 Die Taylor-Entwicklung

Satz 7.8 *Es sei f holomorph in einem Gebiet G, $a \in G$ und $K_r := \{z \mid |z-a| < r\}$ eine offene Kreisscheibe, welche ganz in G liegt. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n$$

für alle $z \in K_r$.

Beweis: Sei $z \in K_r$ fest gewählt, $|z-a| = r_1 < r$. Sei γ ein Kreis um a mit der Parameterdarstellung $\zeta = a + \rho \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $r_1 < \rho < r$. Wegen $K_r \subseteq G$ muß auch $|\gamma| \subseteq G$ gelten. Für $\zeta \in |\gamma|$ ist

$$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| = \frac{r_1}{\rho} < 1.$$

Unter Anwendung der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta) \quad \text{mit} \quad f_n(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n . \end{aligned}$$

Weil f stetig auf γ ist, gilt $|f(\zeta)| \leq A$ für $\zeta \in |\gamma|$, also

$$|f_n(\zeta)| \leq \frac{A}{\rho} \cdot \underbrace{\left(\frac{r_1}{\rho} \right)^n}_{<1}.$$

Da $\sum \left(\dfrac{r_1}{\rho} \right)^n$ konvergent ist, folgt nach dem M-Test die gleichmäßige Konvergenz von $\sum f_n(\zeta)$ auf $|\gamma|$. Nach Satz 7.3 kann man dann gliedweise integrieren:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \right) \cdot (z-a)^n.$$

Nach den Cauchyschen Integralformeln ist dann

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n .$$

□

Beispiele

1. Sei $f(z) = e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$ wie in Kapitel 3 definiert. f ist holomorph in $\mathbb{C}$ mit den Ableitungen $f^{(n)}(0) = 1$, also

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \, .$$

   Dies ist ein zweiter Beweis der Gleichwertigkeit beider Definitionen.

2. Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Dann ist

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(1+a)^{n+1}},$$

   also

$$(*) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n.$$

   Die Konvergenz gilt für $z \in K_r$ mit $K_r \subseteq G = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Man wählt r maximal, also $r = |(-1) - a| = |1 + a|$. Die Potenzreihe konvergiert dann für $|z - a| < r = |1 + a|$. Für $|z - a| > r$ ist sie divergent.

3. Sei $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ eine rationale Funktion, $g(z)$ und $h(z)$ Polynome und gekürzt. Seien weiter $\beta_1, \ldots, \beta_k$ die Nullstellen des Nennerpolynoms $h(z)$. Dann ist $f(z)$ holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$.

   Die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$$

   von f in a konvergiert dann im größten Kreis K_r um a, der $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ *nicht* enthält. Der Konvergenzradius ist

$$R = \min_{i=1,\ldots,k} |a - \beta_i| \, .$$

   Er läßt sich also hier ohne Hadamardsche Formel bestimmen.

Bemerkung. Weierstraß nennt eine Funktion *analytisch*, wenn sie lokal, also in einer Umgebung von a durch eine Potenzreihe darstellbar ist. Nach Satz 7.7 und Satz 7.8 sind die Begriffe "holomorph" und "analytisch" äquivalent.

7.4 Identitätsatz

Zwei Potenzreihen bezeichnet man als *identisch*, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Es soll nun untersucht werden, ob sie identisch sind, wenn sie in einer Umgebung von a die gleiche Funktion darstellen.

Definition

Ein Punkt $a \in G$ heißt ein *Häufungspunkt* einer Teilmenge A, wenn in jeder Umgebung von a ein von a verschiedener Punkt aus A liegt.

Beispielsweise ist 0 Häufungspunkt von $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zu einem Häufungspunkt a von A, so gibt es stets eine Folge (z_i) in A, $z_i \neq a$, die gegen a konvergiert.

Satz 7.9 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Stimmen die durch zwei Potenzreihen definierten Funktionen*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z-a)^n$$

auf einer Menge A, die a als einen Häufungspunkt besitzt, überein, so haben sie gleiche Koeffizienten.

Beweis: Sei U eine Umgebung von a, wo f und g durch die obigen Potenzreihen dargestellt sind und (z_i), $z_i \neq a$ eine Folge in $U \cap A$ mit $\lim z_i = a$. f und g sind differenzierbar nach Satz 7.7 und damit *stetige* Funktionen in U, also gilt für den ersten Koeffizienten

$$a_0 = f(a) = \lim f(z_i) = \lim g(z_i) = g(a) = b_0.$$

Wir nehmen an, daß bereits $a_k = b_k$ für $k = 0, 1, \ldots, m-1$ gezeigt ist. Wir definieren dann die Potenzreihen

$$\begin{aligned} f_m(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^{n-m} = a_m + a_{m+1} \cdot (z-a) + \cdots \\ g_m(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} b_n \cdot (z-a)^{n-m} = b_m + b_{m+1} \cdot (z-a) + \cdots. \end{aligned}$$

Sie haben den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihen, sind also als Funktionen stetig in a. Mit

$$p(z) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \cdot (z-a)^n = \sum_{n=0}^{m-1} b_n \cdot (z-a)^n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= p(z) + f_m(z) \cdot (z-a)^m \\ g(z) &= p(z) + g_m(z) \cdot (z-a)^m. \end{aligned}$$

Wegen $z_i \neq a$ folgt hieraus

$$f_m(z_i) = g_m(z_i)$$

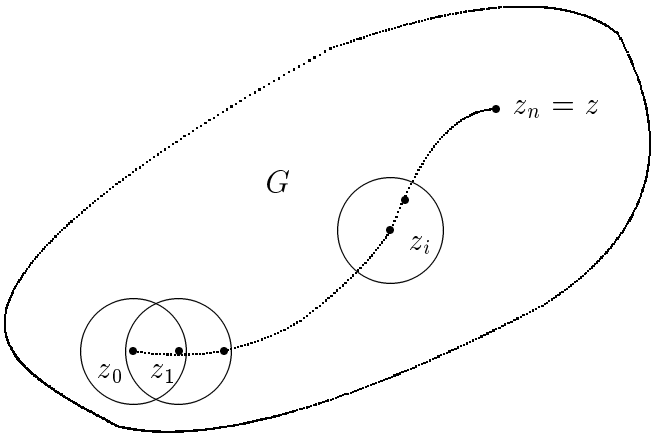
für alle z_i, also

$$a_m = f_m(a) = \lim f_m(z_i) = \lim g_m(z_i) = g_m(a) = b_m$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich so die Behauptung. □

Satz 7.10 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) *Stimmen zwei in einem Gebiet G holomorphe Funktionen f und g auf einer Teilmenge $A \subseteq G$ überein, die einen Häufungspunkt $a \in G$ besitzt, so sind sie gleich, d.h. es ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*

Beweis: Sei $z \in G$. Verbinde a und z durch einen in G liegenden Weg γ. Die kompakte Menge $|\gamma|$ hat einen Abstand $\rho > 0$ von $\mathbb{C} \setminus G$ (ist $G = \mathbb{C}$, setze $\rho := 1$). Es sei $z_0 = a, z_1, z_2, \ldots, z_n = z$ eine Punktfolge auf γ mit $|z_i - z_{i-1}| < \rho$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Jede Kreisscheibe $U_\rho(z_i) := \{z \mid |z - z_i| < \rho\}$ liegt dann in G und enthält neben z_i auch den folgenden Punkt z_{i+1}.



Die Taylor-Reihen von f und g in a konvergieren nach Satz 7.8 in $U_\rho(a)$ und stellen dort f und g dar. Da a ein Häufungspunkt von A ist, gilt nach Satz 7.9 $f(z) = g(z)$ auf $U_\rho(a)$.

Nun ist z_1 ein Häufungspunkt von Punkten aus $U_\rho(a)$, also stimmen f und g auf $U_\rho(z_1)$ überein. Wiederholt man diese Überlegung für $z_2, z_3, \ldots$, so ergibt sich schließlich nach n Schritten

$$f(z) = g(z).$$

Dies gilt für alle $z \in G$, also sind f und g gleich. □

Korollar 7.11 *Die Nullstellen einer holomorphen Funktion $f \not\equiv 0$ sind isoliert, das heißt zu jeder Nullstelle a gibt es eine Umgebung $U(a)$, in der außer a keine weitere Nullstelle liegt.*

Beweis: Wäre a nicht isoliert, so wäre a Häufungspunkt einer Menge A von Nullstellen. Nach Satz 7.10 müßte f mit der Nullfunktion übereinstimmen. □

Beispiel. Die Funktion $f(z) = z^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ist holomorph auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. f hat die Nullstellen $\frac{1}{\pi k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mit dem Häufungspunkt 0. Dies ist jedoch wegen $0 \notin G$ kein Widerspruch zum Korollar.

7.5 Laurent-Reihen

Eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$$

heißt eine *Laurent-Reihe*. Sie heißt *konvergent*, wenn die Teilreihen

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z-a)^n \quad \text{und } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$$

konvergent sind. Man setzt dann

$$f(z) = h(z) + g(z)$$

$g(z)$ heißt *regulärer Teil* , $h(z)$ *Hauptteil* der Laurent-Reihe.

Beispiele

1. Jede Potenzreihe ist eine Laurent-Reihe mit Hauptteil 0.

2. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n, \quad k \in \mathbb{N},\, a_0 \neq 0$$

ist eine Laurent-Reihe mit endlichem Hauptteil

$$h(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \cdot (z-a)^n.$$

Satz 7.12 *Es sei* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$ *eine Laurent-Reihe und*

$$\begin{aligned} r_1 &:= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \\ r_2^{-1} &:= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \end{aligned}$$

Dann konvergiert die Laurent-Reihe im Ringgebiet

$$G = \{z \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$$

kompakt und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

Beweis: Ist $u = \dfrac{1}{z-a}$, so gilt für den Hauptteil

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot u^n.$$

Diese Reihe konvergiert nach Satz 7.6 (Seite 69) kompakt für

$$|u| < \rho = \frac{1}{r_1} \iff \left|\frac{1}{z-a}\right| < \frac{1}{r_1} \iff r_1 < |z-a|.$$

Sei $G_1 = \{z \mid r_1 < |z-a|\}$. Weil $u = \dfrac{1}{z-a}$ stetig ist, entspricht jeder kompakten Teilmenge von $G_1 = \{z \mid r_1 < |z-a|\}$ eine kompakte Teilmenge von $\{u \mid |u| < \frac{1}{r_1}\}$, also ist auch die Konvergenz bezüglich z kompakt.

2.) Die Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$ konvergiert kompakt in

$$G_2 = \{z \mid |z-a| < r_2\}.$$

Die Laurent-Reihe $f(z) = h(z) + g(z)$ konvergiert daher kompakt auf $G = G_1 \cap G_2$. Nach dem Satz von Weierstraß (Seite 68) stellt $f(z)$ eine in G holomorphe Funktion dar, deren Ableitung man durch gliedweise Differentiation erhält. □

Beispiel. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} r_1 &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1|} = 1 \\ r_2^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|} = \frac{1}{2} \implies r_2 = 2 \end{aligned}$$

Nach Satz 7.12 konvergiert die Reihe kompakt in $G = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$.

Satz 7.13 (Laurent 1843) *Es sei f in einem Ringgebiet*

$$G = \{z \mid r_1 < |z - a| < r_2\}$$

holomorph. Dann kann f um a in eine in G konvergente Laurent-Reihe entwickelt werden, die in G kompakt konvergiert.

Beweis: 1.) Wir definieren

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \tag{7.1}$$

für alle ganzen Zahlen (auch negativen). Der Integrationsweg ist

$$\gamma : z(t) = a + r\, e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad r \in (r_1, r_2).$$

Er liegt in G. Wir zeigen als erstes, daß a_n unabhängig von dem gewählten r ist.
Beweis: Wir betrachten die Kreise

$$\gamma_1 : z_1(t) = a + \rho_1\, e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2 : z_2(t) = a + \rho_2\, e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

mit $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ und verbinden $z_1 = a + \rho_1$ und $z_2 = a + \rho_2$ durch einen Hilfsweg γ_0. Der Weg

$$\gamma = -\gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_0$$

ist nullhomolog in G, nach dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta,$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta.$$

2.) Sei $z \in G$ fest gewählt und $|z-a| = \rho$. Wir wählen ρ_1, ρ_2 mit

$$r_1 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r_2.$$

Die Kreise $\gamma_1 : z(t) = a + \rho_1 e^{it}$ und $\gamma_2 : z(t) = a + \rho_2 e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ liegen ganz in G. Wir verbinden $a + \rho_1$ mit $a + \rho_2$ wieder durch einen Hilfsweg γ_0 so, daß $z \notin |\gamma_0|$ gilt. Der Weg

$$\gamma = -\gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_0$$

ist dann nullhomolog und es gilt $n(\gamma, z) = 1$. Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

3.) *Berechnung des ersten Integrals:*

Für ζ auf $|\gamma_1|$ gilt

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{\rho_1}{\rho} \; < \; 1,$$

also

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) \cdot (\zeta - a)^\nu}{(z - a)^{\nu+1}}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf γ_1, also kann man gliedweise integrieren

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad &= \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta) \cdot (\zeta - a)^\nu \, d\zeta \right) \cdot \frac{1}{(z-a)^{\nu+1}} \\ &\overset{\nu+1=-n}{=} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z-a)^n \\ &\qquad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \end{aligned}$$

4.) *Berechnung des zweiten Integrals:*

Für $\zeta \in |\gamma_2|$ gilt

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| = \frac{\rho}{\rho_2} \; < \; 1,$$

also

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) \cdot (z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf γ_2, also ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Insgesamt ist also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n.$$

mit den in (7.1) definierten Koeffizienten a_n. □

Ergänzung: Die Koeffizienten a_n der Laurent-Reihe sind durch f eindeutig bestimmt, und es gelten für $n \in \mathbb{Z}$ und $r_1 < r < r_2$ die Cauchy-Abschätzungen

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n},$$

wobei $M = \max\{|f(z)| \mid |z-a| = r\}$ ist.

Beweis: Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot (z-a)^n$$

und

$$\gamma : z(t) = a + r\,e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad r \in (r_1, r_2).$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Mengen ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \cdot (z-a)^{-k-1}\, dz = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z-a)^{n-k-1}\, dz \right) = a_k,$$

weil

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z-a)^{n-k-1}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq k \\ 1 & \text{für } n = k \end{cases}$$

ist. Bei Verwendung der zweiten Reihe ergibt sich b_k, also ist $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Ist $|f(z)| \leq M$ für $z \in |\gamma|$, so folgt aus (7.1)

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

□

Die allgemeine Formel (7.1) für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta,$$

wobei $\gamma : \zeta(t) = a + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ist, führt i.a. auf Rechenschwierigkeiten. Man versucht sie durch Umformungen zu umgehen.

Beispiel. Die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)\cdot(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z}$$

ist holomorph in

a) $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, also

$$\begin{aligned} f(z) &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^n}\right) \cdot z^n \end{aligned}$$

f wird also in G_1 durch eine *Potenzreihe* dargestellt.

b) $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \leq -1 \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{für } n \geq 0 \end{cases}$$

die Laurent-Reihe in G_2.

c) $G_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$. Forme wie folgt um:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} - \frac{\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot (1 - 2^n) \end{aligned}$$

Man erhält eine Laurent-Reihe, die nur aus dem Hauptteil besteht.

7.6 Isolierte Singularitäten

Ein Punkt a heißt *isolierte Singularität* einer Abbildung f, wenn eine Umgebung $U(a)$ von a existiert, so daß f in

$$U' = U \setminus \{a\}$$

definiert und holomorph ist.

Dann ist f holomorph in einem Ringgebiet

$$U' = \{z \mid 0 < |z - a| < r\}.$$

(Man beachte, daß f in a nicht definiert zu sein braucht.)

BEMERKUNG. $z = a$ heißt ein *regulärer* Punkt einer Abbildung f, wenn f in a holomorph ist. Reguläre Punkte sind nach der obigen Definition auch isolierte Singularitäten. Wenn man von den singulären Punkten einer Abbildung spricht, so meint man in der Regel die nicht regulären.

Sei a eine isolierte Singularität und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n \quad \text{in} \quad G = \{z \mid 0 < |z - a| < r\}$$

die zugehörige Laurent-Entwicklung in a.

Dann heißt a

- *hebbare Singularität*, falls $a_n = 0$ für $n < 0$ ist.
- *Pol* k-ter Ordnung ($k \in \mathbb{N}$), falls $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für $n < -k$ ist.
- *wesentliche Singularität*, wenn im Hauptteil der Laurent-Reihe unendlich viele Glieder auftreten.

Beispiele

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ ist definiert für $z \neq 0$ und holomorph. Die Laurent-Entwicklung ist
$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$
$z = 0$ ist daher eine hebbare Singularität.

2. $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ besitzt die wesentliche Singularität in $z = 0$, da die Laurent-Entwicklung
$$f(z) = z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} - \dots$$
unendlich viele Glieder mit negativen Exponenten enthält.

3. $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$.
$z = 0$ ist *keine* isolierte Singularität, da 0 Häufungspunkt der Singularitäten $z = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Satz 7.14 *a ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so daß f in $U' = U \setminus \{a\}$ beschränkt und holomorph ist.*

Beweis: 1.) Für eine hebbare Singularität gilt
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \cdots$$
für $0 < |z-a| < r$. Mit $f(a) = a_0$ (man ändert den Wert $f(a)$, wenn er vorher anders definiert war) wird $f(z)$ in $\{z \mid |z-a| < r\}$ durch eine Potenzreihe dargestellt und ist also dort holomorph. In
$$A = \{z \mid |z-a| \le \frac{r}{2}\}$$
ist f beschränkt (als stetige Funktion auf einer kompakten Menge). Für
$$U = \{z \mid |z-a| < \frac{r}{2}\}$$
ist also f beschränkt und holomorph in $U' = U \setminus \{a\}$.
2.) Sei r_1 so gewählt, daß $G = \{z \mid 0 < |z-a| < r_1\} \subseteq U$ und
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n \quad \text{und} \quad |f(z)| \le M \quad \text{für } z \in G$$
gilt. Für einen Kreis um a mit einem Radius $r < r_1$ ist nach den Cauchy-Abschätzungen
$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = M \cdot r^n$$
für $n \in \mathbb{N}$. Weil r beliebig klein gewählt werden kann, folgt $a_{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist a eine hebbare Singularität. □

BEMERKUNG. Ist f stetig in a und holomorph in $U' = U \setminus \{a\}$, so ist f auch holomorph in a.

Dies gilt *nicht* im Reellen, so ist zum Beispiel $f(x) = |x|$ stetig in 0 und differenzierbar für alle $x \neq 0$, aber *nicht* differenzierbar in $x = 0$.

Hilfssatz 7.15 *Ist g stetig in a, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß*

$$|g(z)| \geq \frac{1}{2}|g(a)|$$

für alle $z \in U_\delta(a)$ gilt.

Beweis: Wegen der Stetigkeit von g gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(a) - g(z)| \leq \frac{1}{2}|g(a)|$$

für $|a - z| < \delta$. Dann ist

$$|g(a)| \leq |g(a) - g(z)| + |g(z)|,$$

also

$$|g(z)| \geq \frac{1}{2}|g(a)|$$

für alle $z \in U_\delta(a)$. □

Satz 7.16 *Ist a ein Pol, so gibt es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $\rho > 0$ mit $|f(z)| \geq M$ für $|z - a| \leq \rho$, $z \neq a$.*

Beweis: Sei a ein Pol k-ter Ordnung, also

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k},$$

wobei $g(z)$ holomorph in $U = \{z \mid |z-a| < r\}$ und $g(a) \neq 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $g(z)$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(z)| \geq \frac{1}{2}|g(a)| > 0$$

für alle $z \in U_\delta(a)$. Daraus folgt

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z-a|^k} \geq \frac{|g(a)|}{2 \cdot \rho^k},$$

für $0 < |z-a| < \rho < \delta$. Es ist $|g(a)| > 0$. Für genügend kleines ρ ist dann $\frac{|g(a)|}{2 \cdot \rho^k} \geq M$, also $|f(z)| \geq M$. □

Satz 7.17 (Casorati-Weierstraß) *Sei a eine wesentliche Singularität von f, c eine beliebige komplexe Zahl und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es in jeder Umgebung von a ein $z \neq a$ mit $|f(z) - c| < \varepsilon$.*

Beweis: *Annahme:* Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit eine Umgebung $U(a)$ mit

$$|f(z) - c| \geq \varepsilon$$

für $0 < |z - a| < \delta$, also

$$\left| \frac{1}{f(z) - c} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Funktion $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$ ist also holomorph und beschränkt (durch $\frac{1}{\varepsilon}$) in $U' = \{z \mid 0 < |z - a| < \delta\}$, besitzt also nach Satz 7.14 eine hebbare Singularität in a.

Also ist

$$\frac{1}{f(z) - c} = (z - a)^k \cdot g(z),$$

$g(a) \neq 0$, $k \geq 0$, g holomorph in U und

$$f(z) = c + (z - a)^{-k} \cdot \frac{1}{g(z)}.$$

Es ist $|g(z)| \geq \frac{1}{2} \cdot |g(a)|$ für $|z - a| < \rho < \delta$, also g ohne Nullstellen in diesem Bereich. Also ist $\dfrac{1}{g(z)}$ holomorph für $|z - a| < \rho$.

Damit ist f regulär oder besitzt einen Pol in a. Folglich ist a *keine* wesentliche Singularität (Widerspruch). □

Wählt man verschiedene komplexe Zahlen c_1 und c_2, so gibt es in jeder noch so kleinem Umgebung einer wesentlichen Singularität ein z_1 und z_2, deren Funktionswerte dicht bei c_1 bzw. c_2 liegen, also kann

$$|f(z_1) - f(z_2)|$$

beliebig groß werden, d. h. f schwankt in jeder beliebig kleinen Umgebung um jeden Wert.

Beispiel. Die Funktion

$$f(z) = \exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

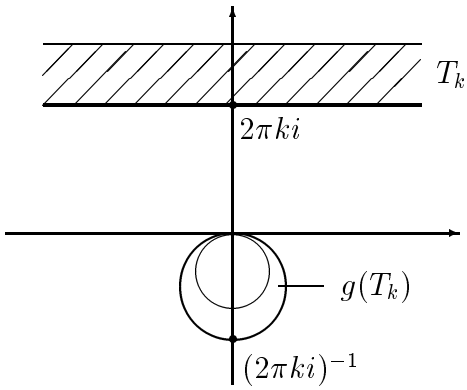
hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität. Sie setzt sich aus zwei Funktionen zusammen. Für diese gilt

(a) Die Exponentialfunktion nimmt im Periodenstreifen

$$T_k = \{z \mid 2\pi k \leq \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$$

jede komplexe Zahl $w \neq 0$ als Funktionswert an.

(b) Bei der Möbiustransformation $g(z) = \dfrac{1}{z}$ gehen die zur reellen Achse parallelen Geraden in Kreise über, die durch 0 gehen und deren Mittelpunkte auf der imaginären Achse liegen.



Sei $\varepsilon > 0$. Wählt man k so groß, daß $(2\pi k)^{-1} < \varepsilon$ ist, so gilt $g(T_k) \subseteq U_\varepsilon(0)$. Auf $g(T_k)$, also auch auf $U_\varepsilon(0)$ nimmt dann $f(z)$ jeden Wert $w \neq 0$ an.

Bemerkung. Die Eigenschaften einer Funktion in der Nähe einer isolierten Singularität, die in den vorangehenden Sätzen für hebbare Singularitäten, für Pole und für wesentliche Singularitäten bewiesen wurden, schließen sich gegenseitig aus, sie kennzeichnen daher diese Singularitäten. Es gilt

a hebbare Singularität	$\Longleftrightarrow$	Es gibt eine Umgebung U, so daß f auf $U' = U \setminus \{a\}$ beschränkt ist.
a Pol	$\Longleftrightarrow$	Zu jedem M gibt es eine Umgebung U mit $\lvert f(z)\rvert \geq M$ auf $U' = U \setminus \{a\}$.
a wesentliche Singularität	$\Longleftrightarrow$	Zu jedem $c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ und jeder Umgebung U von a gibt es ein $z \in U' = U \setminus \{a\}$ mit $\lvert f(z) - c\rvert < \varepsilon$.

7.7 Aufgaben

Aufgabe 7.1 a) Es sei E eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Es seien $f_n : E \to \mathbb{C}$ beschränkte Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : E \to \mathbb{C}$ konvergieren. Zeige, daß dann auch f auf E beschränkt ist und daß eine Zahl M existiert, so daß

$$|f_n(z)| \leq M$$

für alle $z \in E$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Es seien (f_n) und (g_n) zwei Folgen von Funktionen $E \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren. Zeige, daß dann $(f_n g_n)$ gleichmäßig gegen fg konvergiert.

Hinweis: $fg - f_n g_n = (f - f_n)g + f_n(g - g_n)$.

Aufgabe 7.2 Es sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und (f_n) eine Folge komplexwertiger Funktionen auf G. Zeige: Konvergieren die f_n auf jeder der Mengen

$$E_k = \{z \in G \mid |z| \leq \frac{k}{k+1}\}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

gleichmäßig, so konvergieren sie kompakt auf G.

Aufgabe 7.3 Ermittle die Taylor-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+2)(3z+2)}$$

und bestimme ihren Konvergenzradius aus der Lage der Singularitäten.

Aufgabe 7.4 Ermittle die Laurent-Reihen der Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)(z-3)}$$

im Nullpunkt für die möglichen Ringgebiete.

Aufgabe 7.5 Welche isolierten Singularitäten besitzen die folgende Funktionen

$$a) \quad f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}, \qquad b) \quad f(z) = \frac{\cos z}{z},$$

$$c) \quad f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}, \qquad d) \quad f(z) = \frac{\cos \frac{1}{z}}{z} \; ?$$

Kapitel 8 Residuen

8.1 Der Residuensatz

Ist a eine isolierte Singularität und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n, \qquad 0 < |z-a| < r,$$

die Laurent-Reihe von f, so heißt der Koeffizient a_{-1} *Residuum* von f in a, geschrieben

$$\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}.$$

Nach (7.1) sind die Laurent-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz,$$

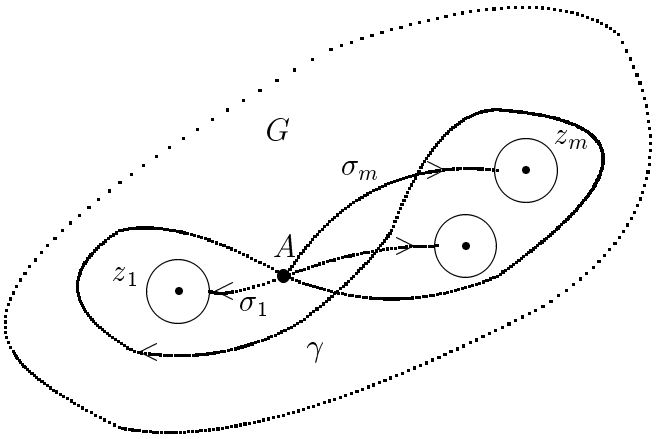
wobei γ ein Kreis um a mit dem Radius ρ mit $0 < \rho < r$ ist. Speziell ist

$$\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz. \tag{8.1}$$

Satz 8.1 (Residuensatz) *Es sei f holomorph in einem Gebiet G mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$. Ist γ ein nullhomologer Weg, der durch keine der Singularitäten z_i geht, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) \cdot \operatorname{Res}(f, z_i) \tag{8.2}$$

Beweis: f ist holomorph in $G^* = G \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$. Seien γ_i Kreise um z_i, die ganz in G liegen und außer z_i keinen weiteren singulären Punkt enthalten. Weiter verbinde σ_i in G^* den Anfangspunkt A von γ mit γ_i.



Der Weg

$$\gamma^* = \gamma + \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i - n(\gamma, z_i) \cdot \gamma_i - \sigma_i)$$

ist nullhomolog in G^*. Nach dem Cauchyschen Integralsatz verschwindet das Integral von f über γ^*, also ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) \cdot \int_{\gamma_i} f(z)\,dz \\ &= \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_i)\,, \end{aligned}$$

woraus (8.2) folgt. □

Beispiel. Es sei

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 3}$$

gegeben. Aus

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 3} = \frac{-\frac{1}{2}}{z - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{z - 3}$$

folgt

$$\operatorname{Res}(f, 1) = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}(f, 3) = \frac{1}{2}.$$

Mit dem Residuensatz ist dann

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 3} = \pi i \,(\, -n(\gamma, 1) + n(\gamma, 3)\,)\,.$$

Regeln zur Berechnung von Residuen

(A) Ist a ein Pol 1.Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z)$$

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned}(z-a)\cdot f(z) &= (z-a)\cdot\left(a_{-1}(z-a)^{-1}+a_0+\cdots\right)\\ &= a_{-1}+a_0(z-a)+\cdots\end{aligned}$$

ist

$$\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z) = a_{-1} = \operatorname{Res}(f,a).$$

(B) Es sei $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, wobei g, h holomorph in a und $h(a)=0$ und $h'(a)\neq 0$ ist. Dann folgt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Beweis: Die Taylor-Entwicklung $h(z)=h'(a)(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots$ zeigt, daß a ein Pol erster Ordnung von f ist. Nach (A) ist dann

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

(C) Sei $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^n}$, g holomorph und $g(a)\neq 0$. Dann ist

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Beweis: Es sei $g(z)=a_0+a_1(z-a)+\ldots$ die Taylor-Entwicklung mit den Koeffizienten

$$a_k = \frac{g^{(k)}(a)}{k!}.$$

Dann ist

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n} = \frac{a_0}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{z-a}+a_n+\cdots$$

und daher

$$\operatorname{Res}(f,a) = a_{n-1} = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Beispiele. 1.) Es sei

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3} = \frac{1}{(z-1)(z-3)}.$$

Dann sind $z = 1$ und $z = 3$ Pole erster Ordnung. Nach der Regel (B) ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 1) &= \frac{1}{2z-4}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Res}(f, 3) &= \frac{1}{2z-4}\Big|_{z=3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.) Es sei

$$f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)^3}.$$

Bei $z = 1$ liegt ein Pol 3-ter Ordnung. Um (C) anzuwenden, bilden wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} g(z) &= ze^z \\ g'(z) &= (z+1)e^z \\ g''(z) &= (z+2)e^z, \end{aligned}$$

also ist

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{g''(z)}{2!}\Big|_{z=1} = \frac{(z+2)e^z}{2}\Big|_{z=1} = \frac{3e}{2}.$$

8.2 Singularitäten in ∞

Eine Umgebung von $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ ist definiert durch $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$.

Definition. $z = \infty$ heißt eine isolierte Singularität von f, wenn f in $U_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ für ein $R \in \mathbb{R}$ holomorph ist. Die Art der Singularität in ∞ ist definiert wie die von $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0 und

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

wobei γ ein Kreis mit einem Radius $\rho > R$ ist, das *Residuum* von f in ∞.

Satz 8.2 *Es gilt*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0\right). \tag{8.3}$$

Beweis: Es sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n$ die Laurent-Reihe von $f(z)$ für das Ringgebiet $U_R = \{z \mid |z| > R\}$. Nach (8.2) ist

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = -a_{-1}.$$

Wegen

$$\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = \cdots + a_0\, z^{-2} + a_{-1}\, z^{-1} + a_{-2} + a_{-3}\, z + \cdots$$

ist $a_{-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$. □

Beispiel

Es sei $f(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_0$. Wegen

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^n} + a_{n-1}\, \frac{1}{z^{n-1}} + \ldots + a_0$$

ist ∞ ein Pol n-ter Ordnung. Sein Residuum ist

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0\right) = 0.$$

Satz 8.3 *f habe in $\mathbb{C}$ nur endlich viele isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$ und ∞. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_i) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0. \tag{8.4}$$

Beweis: Sei γ ein Kreis mit dem Radius R, der $z_1, \ldots, z_m$ enthält. Nach Satz 8.1 ist dann

$$-\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_i),$$

weil $n(\gamma, z_i) = 1$ für alle z_i ist. □

Definition

Eine geschlossene Kurve γ heißt *einfach*, wenn $n(\gamma, z)$ nur die Werte 1 und 0 annimmt. Ist $n(\gamma, z) = 1$, so heißt z ein *innerer*, ist $n(\gamma, z) = 0$, so heißt z ein *äußerer* Punkt der Kurve.

Korollar 8.4 *f sei holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$. Ist γ ein einfacher Weg, der durch keinen der Punkte z_i verläuft, so gilt*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{z_i \text{ innerer Pkt.}} \operatorname{Res}(f, z_i) \\ &= -\sum_{z_i \text{ äußerer Pkt.}} \operatorname{Res}(f, z_i) - \operatorname{Res}(f, \infty).\end{aligned}$$

Beispiele

Es sei

$$f(z) = \frac{z^4 + 2z}{z^2 - 1}$$

mit Singularitäten in ± 1. Da f holomorph für $|z| > 1$ ist, ist ∞ isoliert. Wegen

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2}\,\frac{1 + 2z^3}{1 - z^2}$$

ist ∞ ein Pol 2-ter Ordnung. Durch Entwicklung der Funktion

$$\frac{1}{z^4}\,\frac{1 + 2z^3}{1 - z^2} = \frac{1}{z^4}\,(1 + 2z^3)(1 + z^2 + z^4 + \ldots) = \frac{1}{z^4}\,(1 + z^2 + 2z^3 + \ldots$$

erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}\,f(\frac{1}{z}), 0\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4}\,\frac{1 + 2z^3}{1 - z^2}, 0\right) = -2.$$

Ferner ist für $z = \pm 1$ nach der Regel (B)

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{z^4 + 2z}{2z}\,\Big|_{z=1} = \frac{3}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{z^4 + 2z}{2z}\,\Big|_{z=-1} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Summe der Residuen Null.

Ist γ der Kreis um 0 mit dem Radius 2, so sind $z = \pm 1$ innere Punkt, also ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^4 + 2z}{z^2 - 1}\,dz &= \operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1) \\ &= -\operatorname{Res}(f, \infty) = 2.\end{aligned}$$

2.) Es sei

$$\int_\gamma \frac{z^2}{1 + z^4}\,dz,$$

wobei γ aus dem Halbkreis in der oberen Halbebene mit einem Radius $R > 1$ und der Strecke $[-R, R]$ auf der reellen Achse zusammengesetzt ist.

Die Nullstellen von $1 + z^4$ sind

$$z_n = e^{i\,t_n} \quad \text{mit} \quad t_n = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Im Innern von γ liegen

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1 + i) \quad \text{und} \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1 + i)$$

Es sind Pole 1.Ordnung von f. Hierfür gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_n) \overset{(B)}{=} \frac{z^2}{4\,z^3}\,\Big|_{z=z_n} = \frac{1}{4\,z}\,\Big|_{z=z_n},$$

also

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\sqrt{2}}{8}\,(1 - i) \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{\sqrt{2}}{8}\,(-1 - i).$$

Wir erhalten

$$\int_\gamma \frac{z^2}{1 + z^4}\,dz = 2\pi i\ (\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Das Ergebnis ist unabhängig von R. Dies läßt sich bei Berechnung uneigentlicher Integrale verwenden: Sei $\gamma_1 : z(t) = t, \quad t \in [-R, R]$, $\gamma_2 : z(t) = R\,e^{it}$ mit $t \in [0, \pi]$ und $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ wie oben. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1 + x^4}\,dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1 + z^4}\,dz.$$

Dabei ist

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1 + z^4}\,dz \right| \le \left| \frac{R^2}{R^4 - 1} \right| \cdot \pi \cdot R,$$

was für $R \to \infty$ zu Null wird. Hieraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Analog zu diesem Beispiel zeigt man

Satz 8.5 *Es sei*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$$

mit $m \ge n + 2$ *und* $b_m x^m + \ldots + b_0 \neq 0$ *für* $x \in \mathbb{R}$. *Dann ist*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad &= \quad 2\pi i(\text{Summe der Residuen in der oberen Halbebene}) \\ &= - \quad 2\pi i(\text{Summe der Residuen in der unteren Halbebene}). \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung des Residuensatzes ist die Berechnung der Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin t, \cos t)dt,$$

wobei $\mathrm{R}(u, v)$ eine rationale Funktion in u und v ist.

Satz 8.6 *Für den Einheitskreis* $\gamma: \ z(t) = e^{it}, \ t \in [0, 2\pi i]$ *gilt*

$$\int_\gamma \mathrm{R}\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin t, \cos t)dt.$$

Beweis: Man hat dabei nur in dem linken Integral die Parameterdarstellung des Einheitskreises einzusetzen. □

Um das rechtsstehende Integral zu berechnen, ersetzt man daher in $\int \mathrm{R}(\sin t, \cos t)dt$

$$\begin{array}{lll} \sin t & \text{durch} & \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) \\ \cos t & \text{durch} & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ dt & \text{durch} & \dfrac{dz}{iz}. \end{array}$$

Das Integral geht dann über in

$$\int_\gamma \mathrm{R}\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int_\gamma f(z)dz.$$

Dabei ist $f(z)$ eine rationale Funktion in z. Die Lösung ist nach dem Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{|a_i|<1} \mathrm{Res}\left(f, a_i\right),$$

wobei die a_i die Singularitäten von f innerhalb des Einheitskreises sind.

Beispiel. Um

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$$

zu berechnen, führen wir die obige Substitution durch und erhalten

$$\int_\gamma \frac{1}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \ \frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}dz.$$

Singularitäten liegen bei $-2 \pm \sqrt{3}$, wobei nur $-2+\sqrt{3}$ innerhalb des Einheitskreises liegt. Für Pole 1. Ordnung gilt nach (B)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{-2i}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right) = \frac{-2i}{2(-2+\sqrt{3})+4} = \frac{-i}{\sqrt{3}},$$

also

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

8.3 Nullstellen und Pole

Definition. Sei $f(z) = (z-a)^m u(z)$, $u(a) \notin \{0, \infty\}$. Dann heißt m *Ordnung* von f an der Stelle a, geschrieben $\operatorname{ord}_a f = m$. Es gilt

$$\begin{array}{lcl} m > 0 & : & a \text{ Nullstelle der Vielfachheit } m \\ m < 0 & : & a \text{ Pol der Ordnung } -m. \end{array}$$

Es sei f gegeben. Die Funktion

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

hat an den Stellen Singularitäten, wo f Singularitäten oder Nullstellen besitzt.

Hilfssatz 8.7 *Ist* $\operatorname{ord}_a f = m \neq 0$, *so ist* a *ein Pol erster Ordnung von* $\frac{f'}{f}$ *und*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \operatorname{ord}_a f\,.$$

Beweis: Sei $f(z) = (z-a)^m u(z)$ mit $u(a) \neq 0, \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m\,(z-a)^{m-1}u(z) + (z-a)^m u'(z)}{(z-a)^m u(z)} \\ &= \frac{m}{z-a} + \frac{u'(z)}{u(z)}. \end{aligned}$$

Weil $\frac{u'(z)}{u(z)}$ regulär ist, ist a ein Pol 1. Ordnung und $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = m = \operatorname{ord}_a f$. □

Aus dem Residuensatz folgt

Satz 8.8 *Die Funktion $f(z)$ sei holomorph in G bis auf Pole $a_1, \ldots, a_k$, außerdem seien $a_{k+1}, \ldots, a_l$ die Nullstellen von f in G. Ist $g(z)$ holomorph in G und γ ein nullhomologer Weg, auf dem keiner der Punkte a_i liegt, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{l} n(\gamma, a_i)\cdot \operatorname{ord}_{a_i} f. \tag{8.5}$$

Ist speziell γ ein einfacher Weg, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a_i \text{ innerer Pkt.}} \operatorname{ord}_{a_i} f.$$

Korollar 8.9 *Sei γ einfach, N die Anzahl der Nullstellen von f innerhalb von γ, P die Anzahl der Pole von f innerhalb von γ, jeweils mit ihrer Vielfachheit bzw. Ordnung gezählt. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P.$$

Korollar 8.10 *Sei γ einfach, $f(z)$ holomorph innerhalb von γ (also keine Pole). Dann ist*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

die Anzahl der Nullstellen innerhalb von γ (mit Vielfachheit gezählt).

Korollar 8.11 *Sei γ einfach, $f(z)$ holomorph innerhalb von γ und $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Dann ist*

$$N_w = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz$$

die Anzahl der Stellen a innerhalb von γ, für die $f(a) = w$ gilt.

Offensichtlich gilt

$$f(a) = w \iff a \text{ ist Nullstelle von } f(z) - w$$

Satz 8.12 (Hauptsatz der Algebra) *Jedes nicht-konstante Polynom*

$$f(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0$$

besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Eine Folgerung ist, daß jedes Polynom n-ten Grades n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit ihrer Vielfachheit gezählt) besitzt.

Wir wollen diese etwas schärfere Aussage mit Hilfe des Korollars 8.10 beweisen. Hierzu benötigen wir

Hilfssatz 8.13 *Sämtliche Nullstellen des Polynoms*

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

liegen in $\{z \mid |z| < R\}$ *mit* $R = 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$.

Beweis: Sei $|z| \geq R$. Wegen $R \geq 1$ gilt $|z|^k \geq R$, also $\frac{1}{|z|^k} \leq \frac{1}{R}$, $k = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{z^n} - 1 \right| &= \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z^n|} \\ &\leq \frac{1}{R}\left(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\right) < 1. \end{aligned}$$

Wäre $f(z) = 0$, so würde ein Widerspruch folgen, also kann z mit $|z| \geq R$ keine Nullstelle des Polynoms sein. □

Beweis des Hauptsatzes

Sei R wie im Hilfssatz 8.13 gewählt und $\gamma : z(t) = R \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, der Kreis um 0 mit dem Radius R. $f(z)$ ist holomorph in ganz $\mathbb{C}$. Da alle Nullstellen von $f(z)$ innerhalb γ liegen, ist ihre Anzahl

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, \infty\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}\frac{f'(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})}, 0\right).$$

Aus

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{f'(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\cdot\frac{n + (n-1)a_{n-1}z + \ldots}{1 + a_{n-1}z + \ldots}$$

folgt

$$N = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}\frac{f'(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})}, 0\right) = n.$$

8.4 Aufgaben

Aufgabe 8.1 Es sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Berechne das Integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2 - 3z)(1 + z^2)^n}$$

mit $\gamma : z(t) = 2\,e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Hinweis: Benutze das Residuum in ∞.

Aufgabe 8.2 Berechne das Integral

$$\int_\gamma \frac{z^7}{(z+2)^4(z-\frac{3}{2})^2(z-2)}\,dz$$

mit $\gamma : z(t) = e^{2it} - \frac{1}{4},\ 0 \le t \le 2\pi$.

Aufgabe 8.3 Berechne mit Hilfe des Residuensatzes die reellen Integrale

$$a)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{3 - 4\cos x}\,dx \qquad b)\quad \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx\,.$$

Aufgabe 8.4 Es sei f ein Polynom von einem Grad $n \ge 2$. Zeige mit Hilfe des Residuensatzes für einen Kreis γ mit genügend großem Radius

$$\int_\gamma \frac{dz}{f(z)} = 0.$$

Was gilt für Polynome vom Grad 1 ?

Anhang A Metrische Räume

Es sei E eine Menge und

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$$

eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

(1) $d(x,y) = 0 \iff x = y,$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

für $x, y, z \in E$. Dann heißt d eine *Abstandsfunktion* oder Metrik auf E und E ein *metrischer Raum* bezüglich d.

Die komplexe Ebene bildet bezüglich $d(x,y) = |x - y|$ einen metrischen Raum. Allgemein ist der $\mathbb{R}^n$ bezüglich $d(x,y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum, wobei

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

die euklidische Norm ist.

Ist $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl und $a \in E$, so heißt

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in E \mid d(x,a) < \varepsilon\}$$

eine ε-*Umgebung* von a. Unter einer *Umgebung* von a verstehen wir eine Teilmenge von E, die eine ε-Umgebung von a enthält.

Eine Teilmenge A von E nennen wir *offen*, wenn zu jedem $a \in A$ eine Umgebung existiert, die ganz in A liegt. Ein Punkt $a \in A$ heißt ein *innerer Punkt*, wenn eine Umgebung U existiert, die ganz in A liegt. Offene Mengen sind daher Teilmengen, die nur aus inneren Punkten bestehen. Es sei $\overset{\circ}{A}$ die Menge der inneren Punkte von A. Dann ist $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. Eine Menge A ist genau dann offen, wenn $A = \overset{\circ}{A}$ gilt.

Eine Teilmenge A heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\mathcal{C}A = E \setminus A$ offen ist. Ein *Berührungspunkt* von A ist ein Punkt $x \in E$ mit der Eigenschaft, daß jede Umgebung von x einen nicht leeren Durchschnitt mit A hat. Die Menge aller Berührungspunkte wird mit $\overline{A}$ bezeichnet und heißt *Abschluß* von A. Es gilt $A \subseteq \overline{A}$. Die Teilmenge A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$ gilt.

Der *Rand* von A besteht aus allen Punkten des Abschlusses $\overline{A}$, die keine inneren Punkte sind. Jede Umgebung eines Randpunktes enthält Punkte aus A und aus dem Komplement von A.

Beispiel. Die Teilmenge

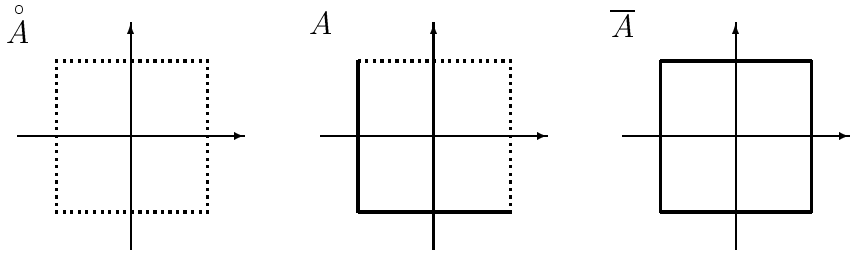
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x,\ y < 1\ \}$$

der Ebene ist weder offen noch abgeschlossen. Für die inneren Punkte gilt

$$-1 < x,\ y < 1.$$

Der Rand besteht aus den Punkten (x, y), für die $|x| = |y| = 1$ gilt. Der Abschluß ist

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x,\ y \leq 1\ \}.$$



Es sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes E. Ein System $\{U_i\}$ offener Mengen heißt eine *offene Überdeckung* von A, wenn

$$A \subseteq \bigcup_i U_i$$

gilt, wenn also A von den Mengen U_i überdeckt wird.

Definition. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes E heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von A ein endliches Teilsystem enthält, das ebenfalls eine Überdeckung ist.

Nach dem Satz von Heine-Borel ist ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ von $\mathbb{R}$ kompakt. Allgemein ist eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere gilt dieses Kriterium in der komplexen Ebene.

Der folgende Satz verallgemeinert die CANTORsche Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$.

Satz A.1 *Ist A kompakt und*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$

eine Folge abgeschlossener, nicht-leerer Teilmengen von A, so gilt

$$\bigcap_i A_i \neq \emptyset.$$

Beweis: Nehmen wir an, daß der Durchschnitt leer ist, so bilden die Komplemente

$$U_i = \mathcal{C}A_i$$

eine offene Überdeckung von A. Weil A kompakt ist, gibt es ein endliches Teilsystem, das A überdeckt. Wegen $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ existiert ein Index n mit $A \subseteq U_n = \mathcal{C}A_n$. Dies steht aber im Widerspruch zu $A_n \subseteq A$ und $A_n \neq \emptyset$. □

Ein metrischer Raumes E heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht Vereinigungsmenge zweier disjunkter, nicht-leerer offener Mengen ist. Eine Teilmenge A von E heißt zusammenhängend, wenn A als Teilraum von E zusammenhängend ist.

Wir sagen, daß sich zwei Mengen A und B berühren, wenn entweder $A \cap \overline{B}$ oder $\overline{A} \cap B$ nicht leer ist. Berühren sich zwei zusammenhängende Mengen, so ist ihre Vereinigungsmenge ebenfalls zusammenhängend. Es sei $a \in E$ und K_a die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von E, die a enthalten. Je zwei berühren sich in a, also ist K_a zusammenhängend und offenbar die größte zusammenhängende Teilmenge von E, die a enthält. K_a heißt die Zusammenhangskomponente von a in E. Sind zwei Zusammenhangskomponenten verschieden, so sind sie auch disjunkt. Damit ist

$$E = \bigcup_{a \in E} K_a$$

eine Zerlegung von E in seine Zusammenhangskomponenten.

Beispiel. Es sei γ eine einfache Kurve in der komplexen Ebene. Das Komplement

$$\mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

zerfällt dann in zwei Zusammenhangskomponenten und zwar in die Menge der inneren und die Menge der äußeren Punkte.

Es seien E und E' metrische Räume mit den Abstandsfunktionen d bzw. d' und $f : E \to E'$ eine Abbildung. Ist $a \in E$, so heißt ein Element $a' \in E'$ Grenzwert von f bei Annäherung an $a \in E$, geschrieben

$$a' = \lim_{x \to a} f(x),$$

wenn zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß

$$f(x) \in U_{\varepsilon'}(a') \quad \text{für alle} \quad x \in U_\varepsilon(a), \quad x \neq a$$

gilt.

Eine Abbildung $f : E \to E'$ heißt *stetig* in a, wenn

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

ist. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt von E stetig ist.

Satz A.2 *Es sei $f : E \to E'$ stetig. Dann gilt*

1.) *Ist A eine kompakte Teilmenge von E, so ist das Bild $f(A)$ ebenfalls kompakt.*

2.) *Ist A zusammenhängend, so ist auch das Bild $f(A)$ zusammenhängend.*

Für reellwertige Funktionen folgt

Satz A.3 *Ist $f : E \to \mathbb{R}$ stetig und A eine nicht-leere kompakte Teilmenge von E, so nimmt f auf A Maximum und Minimum an.*

Eine Funktion $f : E \to E'$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für zwei Punkte $a, b \in E$ mit $d(a, b) < \varepsilon$

$$d'(f(a), f(b)) < \varepsilon'$$

gilt, formal geschrieben

$$\bigwedge_{\varepsilon'>0} \bigvee_{\varepsilon>0} \bigwedge_{a\in E} f(U_\varepsilon(a)) \subseteq U_{\varepsilon'}(f(a)).$$

Bei gleichmäßiger Stetigkeit kann ε unabhängig von a, also für alle Punkte von E gleichmäßig gewählt werden.

Satz A.4 *Ist eine Funktion $f : E \to E'$ stetig und ist E kompakt, so ist f gleichmäßig stetig auf E.*

Für Beweise und eine ausführlichere Darstellung sei auf Ahlfors [1] verwiesen.

Anhang B Beweis des Cauchyschen Integralsatzes

B.1 Reduktion auf Streckenzüge

Es sei $\gamma : z = z(t)$ eine Kurve und

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$$

eine Partition des Parameterintervalls. Jedem Parameterwert $t_i \in P$ ist ein Punkt der Kurve

$$z_i = z(t_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

zugeordnet. Man erhält hiermit zu der Partition P einen der Kurve einbeschriebenen Streckenzug

$$S(P) = [z_0 z_1] + [z_1 z_2] + \ldots + [z_{n-1} z_n].$$

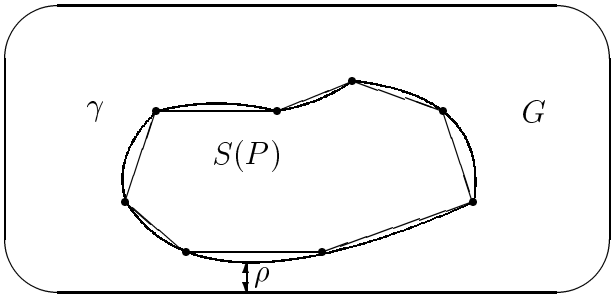
Ist γ eine geschlossene Kurve, so ist auch $S(P)$ geschlossen.

Hilfssatz B.1 *Es sei γ eine geschlossene Kurve in einem Gebiet G. Dann gibt es eine Partition P' des Parameterintervalls, so daß für alle Verfeinerungen $P \supseteq P'$ die Streckenzüge $S(P)$ in G liegen und für die Umlaufzahlen*

$$n(\gamma, a) = n(S(P), a) \tag{B.1}$$

für alle $a \in \mathcal{C}G = \mathbb{C} \setminus G$ gilt.

Beweis: Sei $A = |\gamma|$ die Punktmenge des Weges γ. A ist als stetiges Bild einer kompakten Menge ebenfalls kompakt. Außerdem ist $\mathbb{C} \setminus G$ abgeschlossen. Nach Satz 5.1 ist der Abstand $\rho := d(A, \mathbb{C} \setminus G) > 0$. (Im Fall $G = \mathbb{C}$, also $\mathbb{C} \setminus G = \emptyset$ setze man $\rho := 1$).



Da $z(t)$ stetig, also auch gleichmäßig stetig auf dem kompakten Parameterintervall ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies |z(t_1) - z(t_2)| < \rho.$$

Sei P' eine Partition mit einem Feinheitsgrad $\sigma(P') < \delta$ und $P = \{t_i\} \supseteq P'$, $z_i = z(t_i)$. Wir betrachten den zugehörigen Streckenzug

$$S(P) = [z_0\, z_1] + [z_1\, z_2] + \cdots + [z_{n-1}\, z_n].$$

1.) Für $z \in [z_{i-1}\, z_i]$ gilt, weil $\sigma(P) < \delta$ ist,

$$|z_i - z| \leq |z_i - z_{i-1}| < \rho,$$

also $z \in G$, weil die Punkte außerhalb G einen Abstand $\geq \rho$ von γ besitzen. Folglich liegt $S(P)$ ganz in G.

2.) Für einen Punkt $a \in \mathcal{C}G$ gilt $d(a, |\gamma|) \geq \rho$, also wegen $\sigma(P) < \delta$

$$|z(t_i) - z(t_{i-1})| < \rho \leq d(a, |\gamma|).$$

Wie im Beweis von Hilfssatz 5.2 gezeigt wurde, ist dann

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \arg\left(\frac{z(t_i) - a}{z(t_{i-1}) - a}\right) = n(S(P), a).$$

□

Hilfssatz B.2 *f sei stetig in einem Gebiet G und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $z = z(t)$ ein Weg in G. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine Partition P_ε von $[0,1]$, so daß für alle Verfeinerungen $P \supseteq P_\varepsilon$*

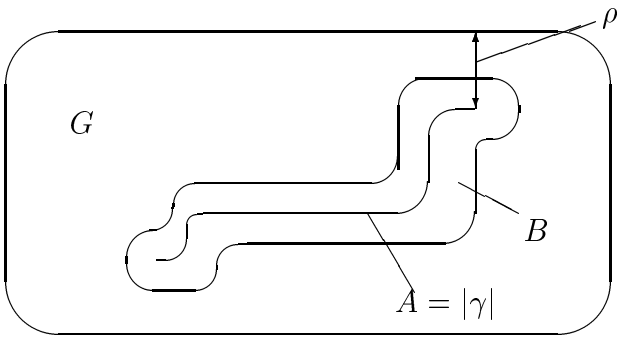
$$\left| \int_\gamma f\, dz - \int_{S(P)} f\, dz \right| < \varepsilon \tag{B.2}$$

gilt, wobei $S(P)$ der γ einbeschriebene zu P gehörige Streckenzug ist.

Beweis: Es sei $A = |\gamma|$ die Punktmenge des Weges γ und ρ definiert wie in Hilfssatz B.1. Die Menge

$$B = \left\{ z \;\middle|\; d(z, |\gamma|) \leq \frac{\rho}{2} \right\}$$

ist dann abgeschlossen und beschränkt, also kompakt und liegt in G.



Es sei $\varepsilon > 0$. Die Abbildung f ist stetig, also auch gleichmäßig stetig auf B. Es gibt also ein $\delta' > 0$, so daß für alle $z, z' \in B$

$$|z - z'| < \delta' \;\Rightarrow\; |f(z) - f(z')| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2\,\lambda} \tag{B.3}$$

gilt. Hierbei ist λ die Bogenlänge von γ.

Ferner ist γ gleichmäßig stetig auf $[0,1]$. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit

$$|t - t'| < \delta \;\Rightarrow\; |z(t) - z(t')| < \frac{1}{2}\min\{\rho, \delta'\}. \tag{B.4}$$

Ist der Feinheitsgrad $\sigma(P) < \delta$, so liegt $S(P) = [z_0\, z_1] + \cdots + [z_{n-1}\, z_n]$ in B, denn für $z \in [z_{i-1}\, z_i]$ gilt dann

$$|z_i - z| \le |z_i - z_{i-1}| < \frac{\rho}{2}.$$

Weil $z_i \in A$ und $d(z, A) \le \frac{\rho}{2}$ ist, liegt z in B.

Da f integrierbar ist, gibt es eine Partition P_ε, so daß für alle $P \supseteq P_\varepsilon$

$$\left| \int_\gamma f\, dz - R(f, P) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{B.5}$$

gilt. Man kann $\sigma(P_\varepsilon) < \delta$ annehmen, da man die Partition verfeinern kann. Für $P \supseteq P_\varepsilon$ gilt dann auch $\sigma(P) < \delta$.

Wir betrachten eine Riemann-Summe

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[z_{i-1}\, z_i]} f(\xi_i)\, dz$$

zu $P \supseteq P_\varepsilon$ mit $\xi \in [z_i, z_{i-1}]$. Hiermit ist

$$R(f,P) - \int_{S(P)} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{[z_{i-1}\,z_i]} (f(\xi_i) - f(z))\,dz.$$

Für $z \in [z_{i-1}\,z_i]$ ist

$$|\xi_i - z| \le |\xi_i - z_i| + |z_i - z_{i-1}| < \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta'}{2} = \delta'.$$

Wegen (B.3) folgt

$$|f(\xi_i) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\,\lambda},$$

also

$$\left| R(f,P) - \int_{S(P)} f(z)\,dz \right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2\,\lambda} |z_i - z_{i-1}| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{B.6}$$

Aus (B.5) und (B.6) folgt dann mit der Dreiecksungleichung (B.2). □

Damit ist gezeigt: Jedes Integral über einem nullhomologen Weg γ läßt sich durch ein Integral über einem nullhomologen Streckenzug $S(P) = [z_0\,z_1] + [z_1\,z_2] + \cdots + [z_{k-1}\,z_k]$ beliebig gut approximieren.

B.2 Ketten

Es sei M eine nicht leere Menge. Unter der freien von M erzeugten abelschen Gruppe verstehen wir die Menge der formalen Summen

$$\sum n_i x_i, \qquad n_i \in \mathbb{Z}, \qquad x_i \in M,$$

wobei aber nur endlich viele der Koeffizienten n_i von Null verschieden sind, mit der Addition

$$\sum n_i x_i + \sum m_i x_i = \sum (n_i + m_i) x_i.$$

Wir bezeichnen im folgenden die Punkte der komplexen Ebene mit $A, B, \ldots$. Es sei G ein Gebiet. Ein Punktepaar $[AB]$ heißt Strecke von G, wenn jeder Punkt der Strecke mit den Endpunkten A und B zu G gehört. Wir fassen $[AB]$ auch als Weg mit der Parametrisierung $[0,1] \to \mathbb{C}, z(t) = A + (B - A)t$ auf.

Ein Punktetripel $\Delta = [ABC]$ heißt ein Dreieck des Gebietes G, wenn jeder Punkt aus dem Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C zu G gehört. (Es sind hier auch entartete Dreiecke zugelassen, bei denen die Punkte auf einer Geraden liegen.)

Zwei Strecken und auch zwei Dreiecke werden als verschieden angesehen, wenn die Punkte nicht in der angegebenen Reihenfolge übereinstimmen. So sind z. B. $[ABC]$ und $[BCA]$ verschiedene Dreiecke.

Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und

$\mathcal{K}^2$ die von den Dreiecken aus G erzeugte freie abelsche Gruppe,

$\mathcal{K}^1$ die von den Strecken aus G erzeugte freie abelsche Gruppe,

$\mathcal{K}^0$ die von den Punkten aus G erzeugte freie abelsche Gruppe.

Die Elemente aus $\mathcal{K}^i$ heißen i-dimensionale *Ketten*, kürzer i-Ketten. (Dreieck, Strecke, Punkt bezeichnet man häufig auch als 2-, 1- bzw. 0-dimensionales Simplex.) Spezielle 1-Ketten sind die Streckenzüge

$$K^1 = [AB] + [BC] + \cdots + [DE].$$

Wir definieren den *Rand* eines Dreiecks durch

$$\partial\Delta = \partial[ABC] = [BC] - [AC] + [AB],$$

den *Rand* einer Strecke durch

$$\partial[AB] = B - A.$$

Diese Abbildungen lassen sich zu Randabbildungen

$$\partial : \mathcal{K}^2 \to \mathcal{K}^1, \qquad \partial(\sum n_i\Delta_i) = \sum n_i\partial\Delta_i$$

und

$$\partial : \mathcal{K}^1 \to \mathcal{K}^0, \qquad \partial\left(\sum n_i[A_iB_i]\right) = \sum n_i(B_i - A_i)$$

fortsetzen.

Definition

1.) Eine 1-Kette K^1 heißt ein *Zyklus*, wenn $\partial K^1 = 0$ ist.

2.) Eine 1-Kette K^1 heißt ein *Rand*, wenn eine 2-Kette K^2 mit $\partial K^2 = K^1$ existiert.

Beispiel

Es sei $K^1 = [AB] + [BC] + \cdots + [DE]$ ein Streckenzug. Dann ist

$$\partial K^1 = (B - A) + (C - B) + \cdots + (E - D) = E - A,$$

also ist ein Streckenzug genau dann ein Zyklus, wenn Anfangs- und Endpunkt gleich sind.

Der Rand eines Dreiecks $\Delta = [ABC]$ ist

$$\partial[ABC] = [BC] - [AC] + [AB].$$

Nochmalige Randbildung ergibt

$$\partial\partial[ABC] = (C - B) - (C - A) + (B - A) = 0.$$

Da 2-Ketten Linearkombinationen von Dreiecken sind, ist der Rand einer 2-Kette stets ein Zyklus.

Definition

Eine 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i\,[A_i\,B_i]$ heißt *reduziert*, wenn die Koeffizienten n_i positiv sind und je zwei in K^1 auftretende Strecken höchstens einen Randpunkt gemeinsam haben.

Hilfssatz B.3 *Jede 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i\,[A_i\,B_i]$ besitzt eine Darstellung*

$$K^1 = K_0^1 + \partial K^2,$$

wobei K_0^1 reduziert und K^2 eine 2-Kette in G ist.

Beweis: Dies folgt aus

$$(*) \qquad \begin{aligned} [A\,B] + [B\,A] &= \partial([A\,B\,A] + [A\,A\,A]) \\ [A\;B] &= [A\,C] + [C\,B] + \partial([A\,B\,C] - [B\,C\,B] - [B\,B\,B]), \end{aligned}$$

mit $C \in [A\,B]$. Die rechtsstehenden Dreiecke sind entartet und enthalten nur Punkte der Strecke [A B], liegen also in G. □

Eine reduzierte 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i\,[A_i\,B_i]$ läßt sich geometrisch veranschaulichen, indem man jeden Punkt A_i durch einen n_i-fachen Pfeil mit B_i verbindet. Ein Zyklus K^1 mit $\partial K^1 = 0$ ist dadurch gekennzeichnet, daß in jeden Punkt gleich viele Pfeile hinein- wie hinausführen. Ein reduzierter Zyklus ist eine Summe geschlossener Streckenzüge. Um dies zu zeigen, beginnt man in einem beliebigen Punkt und geht in Richtung eines hinausführenden Pfeils zum nächsten Punkt, von hier zu einem weiteren Punkt usw. Wegen der endlichen Anzahl der Punkte tritt einmal der Fall ein, daß sich in der Reihe ein Punkt wiederholt. Man erhält hiermit einen geschlossenen Streckenzug, den man additiv abspaltet. Mit dem Rest setzt man dann das Verfahren fort.

Beispiel

Es sei

$$K^1 = [A\,B] + [B\,F] + 3[F\,D] + 2[D\,E] + [E\,A] - [C\,E] - [C\,D] + 2[C\,F],$$

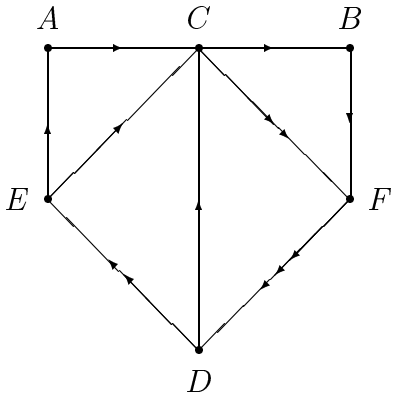
wobei $C \in [A\,B]$ ist. Man bestätigt leicht, daß K^1 ein Zyklus ist. Um zu einem reduzierten Zyklus zu kommen, benutzt man $(*)$

$$\begin{aligned} [A\,B] &= [A\,C] + [C\,B] + \partial([A\,B\,C] - [B\,C\,B] - [B\,B\,B]), \\ [C\,E] &= -[E\,C] + \partial([C\,E\,C] + [C\,C\,C]), \\ [C\,D] &= -[D\,C] + \partial([C\,D\,C] + [C\,C\,C]) \end{aligned}$$

und erhält $K^1 = K_0^1 + \partial K^2$ mit

$$K_0^1 = [A\,C] + [C\,B] + [B\,F] + 3[F\,D] + 2[D\,E] + [E\,A] + [E\,C] + [D\,C] + 2[C\,F],$$

$$K^2 = [A\,B\,C] - [B\,C\,B] - [B\,B\,B] - [C\,E\,C] - 2[C\,C\,C] - [C\,D\,C].$$



Die Aufspaltung in Streckenzüge ergibt

$$\begin{aligned} K_0^1 \;=\; & ([A\,C] + [C\,B] + [B\,F] + [F\,D] + [D\,E] + [E\,A]) \\ & + ([F\,D] + [D\,C] + [C\,F]) \\ & + ([F\,D] + [D\,E] + [E\,C] + [C\,F]). \end{aligned}$$

B.3 Umlaufzahl von 1-Zyklen

Es sei $K^1 = \sum_i n_i\,[A_i\,B_i]$ eine 1-Kette. Die Gesamtheit der Punkte der in K^1 auftretenden Strecken bilden den *Träger* von K^1, geschrieben

$$|K^1| = \bigcup_i\ [A_i\,B_i],$$

wobei nur die Indizes berücksichtigt werden, für die $n_i \neq 0$ ist. Die Strecken sind in G enthalten, also liegt auch $|K^1|$ in G. Da die Strecken als Wege aufgefaßt werden können, läßt sich der Begriff der Argumentvariation auf 1-Ketten übertragen.

Definition

Ist $K^1 = \sum_i n_i\,[A_i\,B_i]$ eine 1-Kette, so heißt

$$V(K^1, a) = \sum_i n_i\,V([A_i\,B_i], a)$$

Argumentvariation von K^1 bezüglich $a \notin |K^1|$.

Offensichtlich ist die Argumentvariation additiv

$$V(K_1^1 + K_2^1, a) = V(K_1^1, a) + V(K_2^1, a)$$

und stetig in a.

Hilfssatz B.4 *Ist K^1 ein* Zyklus *in G, so ist*

$$V(K^1, a) \equiv 0 \bmod 2\pi$$

für alle Punkte a, die nicht auf $|K^1|$ liegen.

Beweis: Ist K^1 der Rand eines Dreiecks oder ein geschlossener Streckenzug, so ist die Argumentvariation ein Vielfaches von 2π. Nach Hilfssatz B.3 gilt $K^1 = K_0^1 + \partial K^2$, wobei K_0^1 reduziert, also Summe von Streckenzüge ist, und K^2 Summe von Dreiecken ist. Die bei der Zerlegung benutzten Formeln $(*)$ enthalten nur entartete Dreiecke, deren Seiten in $|K^1|$ liegen. Folglich ist a auch kein Punkt des Trägers von K_0^1 sowie der Dreiecksränder aus K^2. □

Definition

Ist K^1 ein Zyklus und $a \notin |K^1|$, so heißt

$$n(K^1, a) = \frac{1}{2\pi} V(K^1, a) \in \mathbb{Z} \tag{B.7}$$

die *Umlaufzahl* von K^1. Der Zyklus K^1 heißt *nullhomolog*, wenn

$$n(K^1, a) = 0 \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{C} \setminus G \tag{B.8}$$

gilt.

Ist $K^1 = \partial\Delta = \partial[ABC] = [BC] - [AC] + [AB]$ der Rand eines Dreiecks, so gilt

$$n(K^1, a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \text{ ein innerer Punkt,} \\ 0 & \text{falls } a \text{ ein äußerer Punkt ist.} \end{cases}$$

Die ganzzahlige Funktion $n(K^1, a)$ ist stetig in a, also konstant auf allen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus |K^1|$.

Satz B.5 *Es sei G ein Gebiet. Ein Zyklus $K^1 = \sum_i n_i [A_i B_i]$ ist genau dann Rand einer 2-Kette in G, wenn K^1 nullhomolog ist.*

Beweis: 1.) Sei K^1 Rand einer 2-Kette in G, also

$$K^1 = \partial \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \Delta_i \right).$$

Für $a \in \mathcal{C}G$ ist a äußerer Punkt der Dreiecke Δ_i, also $n(\partial\Delta_i, a) = 0$ und damit

$$n(K^1, a) = \sum_{i=1}^{r} m_i \; n(\partial\Delta_i, a) = 0,$$

also K^1 nullhomolog.

2.) Es sei nun umgekehrt K^1 nullhomolog. Nach Hilfssatz B.3 ist

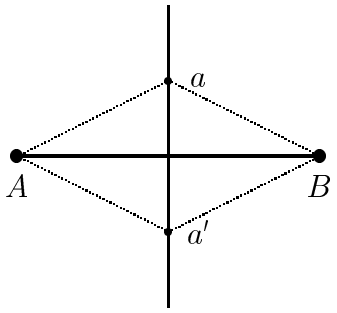
$$K^1 = K_0^1 + \partial K^2,$$

wobei K_0^1 reduziert und K^2 eine 2-Kette in G ist. Mit K^1 ist auch K_0^1 nullhomolog.

Es sei $[AB]$ eine Strecke in K_0^1 der Vielfachheit n_1, also

$$K_0^1 = n_1\,[AB] + n_2\,[CD] + \cdots.$$

Wir betrachten zwei spiegelbildliche Punkte a und a' auf der Mittelsenkrechten von $[A\,B]$. Dann ist $V([A\,B], a) = -V([A\,B], a')$. Der Winkel liegt dicht bei π, wenn $|a - a'|$ klein ist. Für die übrigen Strecken ist für kleine $|a - a'|$ wegen der Stetigkeit $V([C\,D], a)$ näherungsweise gleich $V([C\,D], a')$.



Vergleicht man die Umlaufzahl von K_0^1 in a und a', so ist

$$n(K_0^1, a) - n(K_0^1, a') =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,(\,n_1\,(V([A\,B], a) - V([A\,B], a')) + n_2\,(V([C\,D], a) - V([C\,D], a')) + \cdots\,)$$

näherungsweise n_1, also wegen der Ganzzahligkeit sogar gleich n_1. Das bedeutet, daß sich beim Überschreiten der Strecke $[A\,B]$ von a nach a' die Umlaufzahl um n_1 vergrößert.

Dies gilt auch, wenn man noch zusätzliche Strecken mit der Vielfachheit 0 hinzufügt. Man kann daher eine Triangulierung des durch die Punkte aus $|K_0^1|$ bestimmten Bereichs annehmen. Zu jedem der Dreiecke Δ_i gehört dann eine feste Umlaufzahl m_i. Ist diese von Null verschieden, so muß dieses Dreieck vollständig in G liegen, weil K_0^1 nullhomolog ist.

Die 1-Kette

$$K_1^1 = K_0^1 - \partial K_1^2$$

mit $K_1^2 = \sum_i m_i \Delta_i$ hat für alle $a \notin |K^1|$ die Umlaufzahl 0. In einer Darstellung

$$K_1^1 = K_{red}^1 + \partial K_2^2$$

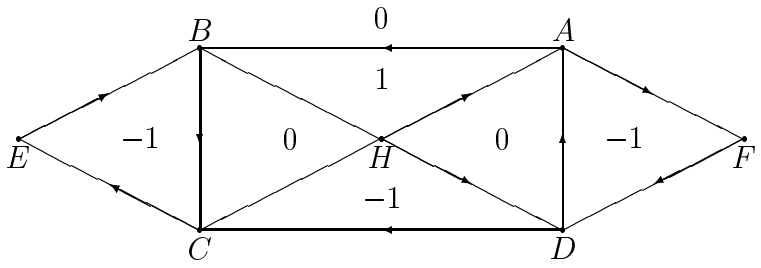
sind dann nach der obigen Überlegung die Koeffizienten von K_{red}^1 Null, also ist $K_1^1 = \partial K_2^2$. Folglich ist K_0^1 und damit auch K^1 Rand einer 2-Kette. □

Der Beweis dieses Satzes enthält ein Verfahren, um für eine nullhomologe 1-Kette eine Darstellung als Rand einer 2-Kette zu berechnen.

Beispiel

Gegeben sei der geschlossene Streckenzug

$$\begin{aligned} K^1 &= [A\,B] + [B\,C] + [C\,A] + [A\,F] + [F\,D] + [D\,C] + \\ &\quad [C\,E] + [E\,B] + [B\,D] + [D\,A]. \end{aligned}$$



Um zu einem reduzierten Zyklus zu kommen, müssen wir noch den Punkt H als Schnittpunkt von $[B\,D]$ und $[C\,A]$ einführen.

Mit den in der Skizze eingetragenen Umlaufzahlen setzen wir

$$K_1^2 = [H\,G\,A] - [E\,B\,C] - [C\,D\,H] - [A\,D\,F].$$

Dann ist

$$K_0^1 = K^1 - \partial K_1^2$$

ein 1-Zyklus mit $n(K_0^1, a) = 0$ für alle $a \notin |K^1|$. Man berechnet

$$\begin{aligned} K_0^1 &= K^1 - \partial\left([B\,G\,A] - [E\,B\,C] - [C\,D\,G] - [A\,D\,F]\right) \\ &= [A\,B] + [B\,A] \;+\; [B\,C] + [C\,B] \;+\; [F\,D] + [D\,F] \\ &\quad + [D\,C] + [C\,D] \;+\; [E\,C] + [C\,E] \;+ \\ &\quad + [D\,A] + [A\,D] \;+\; [H\,D] + [D\,H] + \\ &\quad + [C\,A] - [C\,H] - [H\,A] \;+\; [B\,D] - [B\,H] - [H\,D]. \end{aligned}$$

Anwendung der obigen Formeln $(*)$ ergibt $K_0^1 = \partial K_2^2$, wobei K_2^2 nur aus entarteten besteht. Hiermit ist

$$K^1 = \partial\left(K_1^2 + K_2^2\right).$$

Für die Dreiecke aus K_1^2 ist sicherzustellen, daß sie Dreiecke des Gebietes sind. Also muß G die vier in der Formel für K_1^2 auftretenden Dreiecke enthalten (z.B. ist dies richtig für $G = \mathbb{C}\setminus\{a, b\}$, wobei a und b zwei Punkte sind, die im Innern des Dreiecks $[B\,C\,H]$ bzw. $[A\,D\,H]$ liegen).

B.4 Das Goursatsche Lemma

Wir setzen

$$\int_{[A\,B]} f\,dz := \int_{\gamma} f\,dz \quad \text{mit } \gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ z(t) = A + t \cdot (B - A)$$

und für eine 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i [A_i\ B_i]$

$$\int_{K^1} f(z)\ dz := \sum_i n_i \int_{[A_i\ B_i]} f(z)\ dz.$$

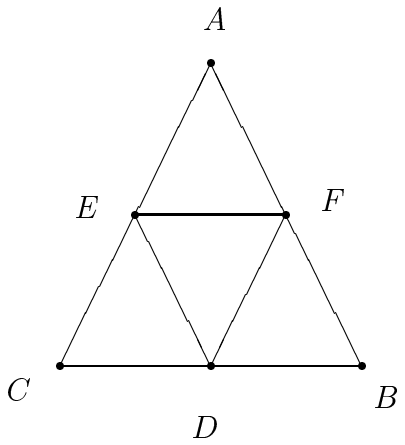
Lemma B.6 (Goursat) *Ist f holomorph in einem Gebiet G, so ist*

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0 \tag{B.9}$$

für alle in G liegenden Dreiecke $\Delta = [A\,B\,C]$.

Beweis: Seien D, E und F die Mittelpunkte der Strecken $[B\,C]$, $[A\,C]$ und $[A\,B]$. Seien weiter

$$\Delta = [A\,B\,C],\ \Delta_a = [F\,B\,D],\ \Delta_b = [E\,D\,C],$$
$$\Delta_c = [A\,F\,E] \ \text{ und } \ \Delta_d = [F\,D\,E].$$



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} f\,dz &= \int_{[B\,C]} f\,dz - \int_{[A\,C]} f\,dz + \int_{[A\,B]} f\,dz \\
&= \int_{[B\,D]} f\,dz + \int_{[D\,C]} f\,dz - \int_{[A\,E]} f\,dz \\
&\quad - \int_{[E\,C]} f\,dz + \int_{[A\,F]} f\,dz + \int_{[F\,B]} f\,dz \\
&= \int_{\partial\Delta_a} f\,dz + \int_{\partial\Delta_b} f\,dz + \int_{\partial\Delta_c} f\,dz + \int_{\partial\Delta_d} f\,dz.
\end{aligned}$$

Sei $M = \left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right|$. Sei weiter o.B.d.A. Δ_1 dasjenige der vier Teildreiecke $\Delta_a \ldots \Delta_d$, für das $\left|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz\right|$ maximal ist. Ist M_1 dieser maximale Wert, so gilt

$$M \leq 4 \cdot M_1.$$

Man zerlegt nun Δ_1 wieder in vier Teildreiecke und erhält ein Δ_2, so daß

$$M_1 \leq 4 \cdot M_2, \quad \text{wobei} \quad M_2 = \left|\int_{\partial\Delta_2} f\,dz\right|$$

ist. Man setzt dieses Verfahren fort und gewinnt eine Folge ineinandergeschachtelter Dreiecke

$$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \supseteq \ldots$$

Für die $M_n = \left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|$ gilt jeweils $M_n \leq 4 \cdot M_{n+1}$, also

$$M \leq 4^n \cdot M_n$$

Nach Satz A.1 folgt $\bigcap_i \Delta_i \neq \emptyset$, d.h. es gibt ein $z_0 \in \bigcap_i \Delta_i \subseteq G$.

Sei $\varepsilon > 0$. Weil f holomorph in z_0 ist, gilt für $z \in U_\delta(z_0)$

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon,$$

also

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot (z - z_0)| \leq |z - z_0| \cdot \varepsilon.$$

Es sei S die Länge der längsten Seite von Δ. Die längste Seite von Δ_n ist dann $S_n = \frac{1}{2^n} \cdot S$ lang.

Wählt man n so groß, daß $S_n = \frac{1}{2^n} \cdot S < \delta$ ist. Dann gilt $\Delta_n \subset U_\delta(z_0)$. Für z in Δ_n gilt dann

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)\,(z - z_0)| \leq |z - z_0|\,\varepsilon \leq \frac{\varepsilon \cdot S}{2^n}.$$

Wegen $\int_{\partial\Delta} 1\,dz = 0$ und $\int_{\partial\Delta} z\,dz = 0$ gilt

$$\begin{aligned} M_n &= \left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| \\ &= \left|\int_{\partial\Delta_n} (f(z) - \underbrace{f(z_0)}_{\int_{\partial\Delta_n}=0} - \underbrace{f'(z_0)\,(z - z_0)}_{\int_{\partial\Delta_n}=0})\,dz\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon \cdot S}{2^n} \cdot 3\,S_n = \frac{3\,\varepsilon\,S^2}{4^n}. \end{aligned}$$

Also ist $M \leq 3\,\varepsilon\,S^2$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $M = 0$. □

Bemerkung. Der GOURSATsche Beweis (1899) kommt anders als in früheren Beweisen ohne Stetigkeitsforderung an $f'(z)$ aus. Die Stetigkeit und auch die Holomorphie von $f'(z)$ ergeben sich dann als eine Folgerung des Cauchyschen Integralsatzes (siehe Satz 6.7, Seite 56). Goursat benutzt in seinem Beweis Rechtecke. Die Idee, Dreiecke zu verwenden, stammt von PRINGSHEIM (1901).

Satz B.7 (Cauchyscher Integralsatz) *Ist f holomorph in einem Gebiet G und γ ein nullhomologer geschlossener Weg in G, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Hilfssatz B.2 (Seite 104) gibt es eine Partition P_ε, so daß für Streckenzüge $S(P)$ mit $P \supseteq P_\varepsilon$

$$\left| \int_\gamma f\,dz - \int_{S(P)} f\,dz \right| < \varepsilon.$$

gilt. Nach Hilfssatz B.1 ist für $P = P' \cup P_\varepsilon$:

$$n(S(P), a) = n(\gamma, a) = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C} \setminus G,$$

also ist $S(P)$ nullhomolog und damit nach Satz B.5 Rand einer 2-Kette $K^2 = \sum n_i \Delta_i$. Nach dem Goursatschen Lemma ist dann

$$\int_{S(P)} f\,dz = \sum n_i \int_{\partial\Delta_i} f\,dz = 0,$$

also

$$\left| \int_\gamma f\,dz \right| < \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist das Integral Null. □

Literaturverzeichnis

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw Hill, 1966.

[2] H. Behnke, F. Sommer. *Theorie der analytischen Funktionen eine komplexen Veränderlichen.* Springer, 1965.

[3] L. Bieberbach. *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2 Bände). Teubner, 1931.

[4] H. Cartan. *Elementare Theorien der Analytischen Funktionen einer oder mehrerer Komplexen Veränderlichen.* BI, 1966.

[5] J. B. Conway. *Functions of one Complex Variable.* Springer, 1973.

[6] W. Fischer, E. Lieb. *Funktionentheorie.* Vieweg, 1992.

[7] E. Freitag, R. Busam. *Funktionentheorie.* Springer, 1993.

[8] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis* (3 Bände). J. Wiley, 1974.

[9] A. Hurwitz, R. Courant. *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen.* Springer, 1925.

[10] K. Knopp. *Funktionentheorie* (2 Bände). Göschen, 1957.

[11] F. Lorenz. *Funktionentheorie.* Spektrum Akademischer Verlag, 1997.

[12] W. F. Osgood. *Lehrbuch der Funktionentheorie.* Chelsea, 1928.

[13] E. Peschl. *Funktionentheorie* (2 Bände). BI, 1967.

[14] R. Remmert. *Funktionentheorie* (2 Bände). Springer, 1957.

[15] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw Hill, 1966.

Index

äußerer Punkt, 91

Abschluß, 99
Absolutbetrag, 2
Abstand von Mengen, 43
analytische Funktion, 72
Argument, 4
Argumentvariation, 46

Berührungspunkt, 99

Cantor, 100
Casorati, 84
Cauchy, 51, 53, 56, 79, 115
Cauchy-Abschätzungen, 79
Cauchysche Formel, 53
Cauchysche Integralformeln, 56
Cauchyscher Integralsatz, 51, 115

differenzierbare Kurve, 28
Doppelverhältnis, 12
Dreiecksungleichung, 3

einfach zusammenhängend, 48
einfache Kurve, 91
erweiterte komplexe Ebene, 6
Exponentialfunktion, 25, 70

Fixpunkt, 11

Gaußsche Ebene, 1
geschlossene Kurve, 33
glatt, 34
gleichmäßig stetig, 102
Goursat, 115

Hadamardsche Formel, 69
harmonisch, 25
Hauptsatz der Algebra, 96
Hauptteil, 75
hebbare Singularität, 81
homologe Wege, 53

Identitätssatz für holomorphe Funktionen, 74
Identitätssatz für Potenzreihen, 73
Imaginärteil, 1
innerer Punkt, 91, 99
integrierbar, 35
Intervallschachtelung, 100
Invarianz der Orientierung, 16
inverser Weg, 36
isolierte Nullstelle, 75
isolierte Singularität, 81, 90

Körper, 1
kompakt, 100
komplexe Ebene, 1
konform im weiteren Sinne, 30
konforme Abbildung, 29
konjugiert komplexe Zahl, 1
konstante Funktion, 28
Kreisinvarianz, 15
Kurve, 28, 33

Laplaceschen Differentialgleichung, 25
Laurent, 77
Laurent-Reihe, 75
Logarithmus, 60

Möbiustransformation, 9
metrische Raum, 99
Moivre, 5
Moivresche Formel, 5
Morera, 58

offene Überdeckung, 100

Ordnung, 95
Orientierung, 16

Pol k-ter Ordnung, 81
positive Orientierung, 17
Potentialfunktion, 25
Pringsheim, 115

quadratische Ergänzung, 4
quadratische Gleichung, 4
quadratische Gleichungen, 3
Quadratwurzeln, 3

Rand, 99
Realteil, 1
regulärer Teil, 75
rektifizierbar, 33
Residuensatz, 87
Residuum, 87
Residuum in ∞, 90
Riemann, 6
Riemann-Summe, 35
Riemannsche Zahlenkugel, 6

Satz von Casorati-Weierstraß, 84
Satz von Morera, 58
Satz von Weierstraß, 68
Singularität, 81
Singularität in ∞, 90
Stammfunktion, 58
stereographische Projektion, 7
Stetigkeit, 20

Taylor-Entwicklung, 71

Uhrzeigersinn, 17
Umgebung, 99
Umlaufzahl, 45, 47
uneigentliche Integrale, 93

Weg, 33
wegunabhängig, 57
Weierstraß, 84
Weierstrass, 68, 72
wesentliche Singularität, 81
Windungszahl, 47
Winkel zwischen zwei Kurven, 29

zusammenhängend, 101
Zusammenhangskomponente, 101