Prof. Dr. K. Mathiak

Funktionentheorie

Braunschweig, Juni 1994

Prof. Dr. K. Mathiak
Technische Universität Braunschweig
Institut für Algebra und Zahlentheorie
Pockelsstraße 14
D–38106 Braunschweig

Dieses Skript wurde mit dem Makropaket $\mathcal{AZ}$-LaTeX 2_ε erstellt.

Satz: Frank Rump
Lüder Elbrecht
Prof. Dr. K. Mathiak, Institut für Algebra und Zahlentheorie
Dr. Wolfgang Oelke, Institut für Algebra und Zahlentheorie

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Komplexe Zahlen **5**

Kapitel 2. Möbius-Transformationen **9**

Kapitel 3. Differentiation **17**

Kapitel 4. Integration **27**

Kapitel 5. Die Umlaufzahl **37**

Kapitel 6. Der Cauchysche Integralsatz **47**

Kapitel 7. Unendliche Reihen **59**

Kapitel 8. Laurentreihen **73**

Kapitel 9. Der Residuensatz **81**

Kapitel 10. Nullstellen und Pole **89**

Kapitel 11. Unendliche Produkte **95**

Kapitel 12. Der Produktsatz von Weierstrass **101**

Kapitel 13. Meromorphe Funktionen **111**

Kapitel 14. Analytische Fortsetzung **119**

Kapitel 15. Konforme Abbildungen **125**

Kapitel 16. Harmonische Funktionen **129**

Kapitel 17. Das Maximumprinzip **135**

Kapitel 18. Der Riemannsche Abbildungssatz **143**

Literaturverzeichnis **149**

Index **150**

KAPITEL 1

Komplexe Zahlen

Es sei $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ die Menge der Paare reeller Zahlen.

SATZ 1.1. *$\mathbb{C}$ ist bezüglich der Verknüpfungen*

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\end{aligned}$$

ein Körper.

BEWEIS. Man zeigt leicht, daß $\mathbb{C}$ ein kommutativer Ring ist. Ferner ist $(1, 0)$ Einselement. Ist $(a, b) \neq (0, 0)$, also $a^2 + b^2 \neq 0$, so gilt

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Folglich ist (a, b) invertierbar. □

Unter der Addition und der Verknüpfung

$$c \cdot (a, b) = (c\, a, c\, b)$$

ist $\mathbb{C}$ ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Elemente $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}$. Jedes Element aus $\mathbb{C}$ besitzt die Darstellung

$$z = (a, b) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1) = a + b\, i.$$

Es gilt

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$$

und allgemeiner

$$(a + bi)\,(c + di) = ac - bd + (ad + bc)\, i.$$

DEFINITION. $\overline{z} = a - bi$ heißt die zu $z = a + bi$ *konjugiert komplexe* Zahl.
Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= z\,,\\ \overline{zw} &= \overline{z} \cdot \overline{w}\,,\end{aligned}$$

wie man leicht durch Einsetzen zeigt, z.B. ergibt sich die dritte Gleichung wie folgt:

$$\begin{aligned}\overline{(a+bi)}\cdot\overline{(c+di)} &= (a-bi)\,(c-di) \;=\; ac-bd-(ad+bc)\,i\\ &= \overline{ac-bd+(ad+bc)\,i} \;=\; \overline{(a+bi)\,(c+di)}\,.\end{aligned}$$

DEFINITION. Ist $z = a + bi$, so heißt a *Realteil* und b *Imaginärteil* von z. Geschrieben:

$$a = \mathrm{Re}\,[z] = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad b = \mathrm{Im}[z] = \frac{z-\overline{z}}{2\,i}.$$

Die komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil bilden einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Körper. Zur Vereinfachung fassen wir $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf.

Man hat folgende Kennzeichnung

$$\begin{aligned}z \text{ reell} &\iff z = \overline{z}\\ z \text{ imaginär} &\iff z = -\overline{z}\,.\end{aligned}$$

Es ist

$$z\,\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}^+,$$

wobei $\mathbb{R}^+$ die Menge der nicht negativen reellen Zahlen bezeichnet.

DEFINITION.

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

heißt *Absolutbetrag* von z.

Es gilt $|z|^2 = z\overline{z} = |\overline{z}|^2$, also $|z| = |\overline{z}|$.

SATZ 1.2. *Der Absolutbetrag ist eine Funktion* $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ *mit folgenden Eigenschaften*

$$|z| = 0 \iff z = 0 \tag{1.1}$$

$$|z+w| \leq |z| + |w| \tag{1.2}$$

$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|. \tag{1.3}$$

(*Eine Funktion mit diesen Eigenschaften heißt eine* Bewertung .)

BEWEIS. Durch Nachrechnen.

Zum Beispiel für die *Dreiecksungleichung* (1.2):

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})\\ &= z\overline{z}+w\overline{w}+2\mathrm{Re}\,[z\overline{w}]\\ &\leq z\overline{z}+w\overline{w}+2|z\overline{w}|\\ &= (|z|+|w|)^2\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Wendet man die Dreiecksungleichung auf $z = (z-w)+w$ an, so ergibt sich

$$\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|\,. \tag{1.4}$$

Geometrische Darstellung komplexer Zahlen:
Die Definition komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen legt es nahe, sie mit Punkten der Ebene zu identifizieren. Man spricht dann von komplexer oder Gaußscher Ebene.

SATZ 1.3. *Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine Darstellung*

$$z = r\,(\cos t + i \cdot \sin t)$$

wobei $r = |z|$ und t durch z eindeutig bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist.

DEFINITION. Ist $z = r\,(\cos t + i \sin t)$, $-\pi \leq t < \pi$, so heißt t *Argument* von z, geschrieben $t = \arg z$.
(Beachte: Das Argument ist nur für $z \neq 0$ definiert.)

Auf Grund der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen gilt die *Moivresche Formel*

$$\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2) = (\cos t_1 + i \sin t_1)(\cos t_2 + i \sin t_2)\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$\arg\,(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \bmod 2\pi\,.$$

(Hierbei bedeutet $t_1 \equiv t_2 \bmod 2\pi$: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $t_1 = t_2 + 2k\pi$.)

Man erhält hiermit eine geometrische Interpretation der Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$:

- Die Summe zweier komplexer Zahlen erhält man durch Addition der entsprechenden Vektoren (Parallelogrammkonstruktion).
- Der Absolutbetrag des Produktes zweier komplexer Zahlen ist gleich dem *Produkt* ihrer Absolutbeträge.
- Das Argument des Produktes zweier komplexer Zahlen ergibt sich aus der *Summe* ihrer Argumente.

Sind a, z_1 und z_2 aus $\mathbb{C}$, so ist der Winkel zwischen den von a ausgehenden, in Richtung z_1 und z_2 verlaufenden Strahlen

$$\phi = \sphericalangle\,(z_1, a, z_2) = \arg\left(\frac{z_1 - a}{z_2 - a}\right)\,. \tag{1.5}$$

Weiter ist dann $\sphericalangle\,(z_2, a, z_2) = -\sphericalangle\,(z_1, a, z_2)$.

Es ist dann

$$\arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \big(\arg(z_1) + \arg(z_2)\big) \bmod 2\pi\,.$$

DEFINITION. $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *erweiterte komplexe Ebene* . Man definiert

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \qquad \frac{z}{\infty} = 0, \qquad \frac{z}{0} = \infty$$

für $z \neq 0$ und

$$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$$

für beliebige $z \in \mathbb{C}$.

BEMERKUNG. Man beachte, daß einige Ausdrücke wie $\infty \pm \infty$ und $0 \cdot \infty$ nicht definiert sind.

KAPITEL 2

Möbius-Transformationen

DEFINITION. Eine Funktion

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \qquad \text{mit } ad - bc \neq 0$$

heißt *Möbius-Transformation* oder *gebrochen lineare Abbildung*.
Wegen

$$f(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$$

setzt man $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Für die Nullstelle des Nenners setzt man darüberhinaus $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. (Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ schließt die konstanten Funktionen aus.)

BEISPIELE.

(1) *Translation.* $f(z) = z + b$.

(2) *Drehstreckung.* $f(z) = a \cdot z$.
Sei $a = r \cdot (\cos\phi + i\,\sin\phi)$.
Dann ist $f(z) = \underbrace{r}_{\text{Streckung}} \cdot \underbrace{(\cos\phi + i\,\sin\phi)}_{\text{Drehung}} \cdot z$. Also ist f in eine Drehung um ϕ und eine anschließende Streckung (Stauchung) zerlegbar.

(3) *Inversion am Einheitskreis.* $f(z) = \frac{1}{z}$. Ist $z = r \cdot (\cos\phi + i\,\sin\phi)$, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{r}\,(\cos(-\phi) + i\,\sin -(\phi)) = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}\,.$$

Punkte außerhalb des Einheitskreises werden in das Innere abgebildet und umgekehrt. Dabei ist $f(0) = \infty$ und $f(\infty) = 0$.

SATZ 2.1. *Die Möbiustransformationen bilden bezüglich der Hintereinanderschaltung eine Gruppe.*

BEWEIS.

1. *Abgeschlossenheit*: Zeige zunächst, daß das Produkt zweier Möbiustransformationen wieder eine Möbiustransformation ist:
Seien $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ und $g(z) = \frac{a'\,z+b'}{c'\,z+d'}$.

Dann ist

$$(f\circ g)(z)=f(g(z))=\frac{\overbrace{(a\,a'+b\,c')}^{\alpha}\,z+\overbrace{(b\,d'+a\,b')}^{\beta}}{\underbrace{(c\,a'+c'\,d)}_{\gamma}\,z+\underbrace{(c\,b'+a'd)}_{\delta}}$$

Zu zeigen ist noch: $\alpha\,\delta-\beta\,\gamma\neq 0$. Jede Möbiustransformation f läßt sich durch eine Matrix

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

darstellen.
Obige Verknüpfung entspricht dann gerade der Matrizenmultiplikation dar:

$$M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)\,.$$

Mit dem *Determinantensatz* ist dann

$$\operatorname{Det} M(f\circ g)=\underbrace{\operatorname{Det} M(f)}_{\neq 0}\cdot\underbrace{\operatorname{Det} M(g)}_{\neq 0}\neq 0$$

(*Beachte*: Die Matrizen $M(f)=\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & \lambda d\end{pmatrix}$ beschreiben für alle $\lambda\neq 0$ die gleiche Möbiustransformation.)

2. *Assoziativität:* $(h\circ g)\circ f(z)=h\circ(g\circ f)(z)$ durch einfaches Nachrechnen.
3. *Neutrales Element:* $id:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$, $z\mapsto z$
4. *Inverses:* $f^{-1}(z)=\frac{d\,z-b}{-c\,z+a}$ ist das Inverse von $f(z)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}$. □

Bemerkung.

(1) Die Gruppe der Möbiustransformationen ist *nicht* kommutativ. Es sei

$$f(z)=\frac{z}{z-i}\,,\qquad g(z)=\frac{z+1}{z+2}\,.$$

Dann ist

$$(f\circ g)(z)=\frac{z+1}{(1-i)\,z+(1-2i)}$$

und

$$(g\circ f)(z)=\frac{2z-i}{3z-2i}\,.$$

Wegen

$$(f\circ g)(0)=\frac{1}{1-2i}\neq\frac{1}{2}=(g\circ f)(0)$$

ist die Verknüpfung nicht kommutativ.

(2) Jede Möbiustransformation ist *bijektiv*, denn durch die Bedingung $ad-bc\neq 0$ sind die konstanten Funktionen ausgeschlossen.

(3) Die Gruppe der Möbiustransformationen ist isomorph zu $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$.

Definition. Ein Punkt $z\in\widehat{\mathbb{C}}$ heißt *Fixpunkt* von f, wenn $f(z)=z$ ist.

BEISPIELE.

(1) Es sei $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Dann gilt

$$z = \frac{z}{z-1} \iff z^2 - 2z = 0 \iff z = 0 \text{ oder } z = 2\,.$$

Es gibt also zwei Fixpunkte.

(2) Es sei $f(z) = \frac{z-4}{z-5}$. Dann gilt

$$z = \frac{z-4}{z-5} \iff z^2 + 4z + 4 = (z+2)^2 = 0\,.$$

Es gibt also nur einen Fixpunkt.

SATZ 2.2. *Eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation besitzt einen oder zwei Fixpunkte.*

BEWEIS. 1.) Sei $c = 0$. Dann ist $d \neq 0$, man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d = 1$ annehmen, d.h. $f(z) = az + b$. Dann ist $f(\infty) = \infty$, also ist ∞ ein Fixpunkt von f.

(i) Ist $a = 1$, so ist $b \neq 1$,weil f nicht die Identität ist. Damit hat die Gleichung $f(z) = z + b = z$ keine Lösung, d.h. es existieren keine weiteren Fixpunkte.

(ii) Ist $a \neq 1$, so ist $z = \frac{b}{1-a}$ der zweite Fixpunkt.

2.) Sei nun $c \neq 0$. Dann ist ∞ kein Fixpunkt von f. Aus

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} := z$$

folgt dann

$$dz^2 + (d-a)\,z - b = 0\,.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt eine oder zwei Lösungen in $\mathbb{C}$. □

SATZ 2.3. *Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel paarweise unterschiedlicher Punkte in $\widehat{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbiustransformation f mit*

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3\,.$$

BEWEIS. 1.) *Eindeutigkeit*: Gegeben seien zwei Möbiustransformationen f und g mit

$$f(z_i) = g(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, 2, 3.$$

Dann besitzt $(f^{-1} \circ g)$ drei Fixpunkte.

Nach Satz 2.2 ist dann $(f^{-1} \circ g) = id$, also $f = g$.

2.) *Existenz*: Definiere $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ durch

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{z-z_1}{z-z_3} : \dfrac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & \text{falls alle } z_i \in \mathbb{C},\ i = 1,2,3 \\ \dfrac{z_2-z_3}{z-z_3} & \text{falls } z_1 = \infty \\ \dfrac{z-z_1}{z-z_3} & \text{falls } z_2 = \infty \\ \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} & \text{falls } z_3 = \infty \end{cases}$$

Dann gilt:

$$h(z_1) = 0\,, \quad h(z_2) = 1 \quad \text{und} \quad h(z_3) = \infty\,.$$

Entsprechend gibt es ein $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$g(w_1) = 0\,, \quad g(w_2) = 1 \quad \text{und} \quad g(w_3) = \infty\,.$$

Dann hat $f = g^{-1} \circ h$ die gewünschte Eigenschaft. □

BEMERKUNG. Wegen der im vorigen Satz gezeigten Eigenschaft sagt man auch, die Möbiustransformationen sind *scharf dreifach transitiv*. Man schreibt für die eindeutig bestimmte Möbiustransformation

$$f = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet mit diesen Symbolen wie mit Permutationen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

DEFINITION. z_1, z_2, z_3 und z_4 seien vier verschiedene Punkte aus $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann heißt

$$\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Doppelverhältnis von z_1, z_2, z_3 und z_4. Ist einer der Punkte unendlich, z.B. $z_1 = \infty$, so betrachte man

$$\mathrm{DV}\,(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{\frac{z_4}{z_1} - 1}{z_4 - z_3} : \frac{\frac{z_2}{z_1} - 1}{z_2 - z_3} \overset{z_1 = \infty}{=} \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3}.$$

Für variables z ist $f(z) = \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)$ eine Möbiustransformation. Hierfür gilt

$$f(z_1) = 0\,, \qquad f(z_2) = 1\,, \qquad f(z_3) = \infty\,,$$

also

$$f(z) = \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}(z)\,.$$

Damit ergibt sich folgende Interpretation des Doppelverhältnisses: Ist f die Möbiustransformation, die z_1 nach 0, z_2 nach 1 und z_3 nach ∞ abbildet, so ist

$$\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(z_4).$$

SATZ 2.4. *Eine Möbiustransformation f läßt das Doppelverhältnis invariant, d.h.*

$$\mathrm{DV}\,(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4)\,. \tag{2.3}$$

BEWEIS. Nach den Regeln (2.1) und (2.2) ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{DV}\,(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) &= \begin{pmatrix} f(z_1) & f(z_2) & f(z_3) \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}(f(z_4)) \\
&= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} f(z_1) & f(z_2) & f(z_3) \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{f^{-1}}(f(z_4)) \\
&= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}(z_4) \\
&= \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

ANWENDUNG. Ist eine Möbiustransformation in der Form

$$f = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

gegeben, so kann man die Invarianz des Doppelverhältnisses, also

$$\mathrm{DV}\,(w_1, w_2, w_3, w) = \mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)$$

benutzen, um $w = f(z)$ zu berechnen, indem man diese Gleichung nach w auflöst.

BEISPIEL. Es sei

$$f = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i & 0 \\ 1 & 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\frac{w-1}{w+1} : \frac{1+i-1}{1+i+1} = \frac{z-(1+i)}{z} : \frac{2+i-(1+i)}{2+i}$$

folgt

$$w = \frac{iz+1}{z-1}\,.$$

SATZ 2.5. *Das Doppelverhältnis* $\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z_4)$ *ist genau dann* reell, *wenn die vier Punkte auf einem Kreis oder einer Geraden liegen.*

BEWEIS. Es sei

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

die durch

$$f = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

gegebene Möbiustransformation. Dann ist $f(z)$ genau dann reell, wenn

$$\frac{a\,z+b}{c\,z+d} = \frac{\overline{a}\,\overline{z}+\overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z}+\overline{d}}$$

ist. Dies ist gleichwertig mit

$$(az+b)\,(\overline{cz}+\overline{d}) - (cz+d)\,(\overline{az}+\overline{b}) = 0 \tag{2.4}$$

oder

$$(a\,\overline{c} - c\,\overline{a})\,z\overline{z} + (a\,\overline{d} - c\,\overline{b})z - (d\,\overline{a} - b\,\overline{c})\overline{z} - (d\,\overline{b} - b\,\overline{d}) = 0\,. \tag{2.5}$$

Setzt man $z = x + i\,y$, so erhält man die Gleichung

- eines *Kreises*, wenn $(a\,\overline{c} - c\,\overline{a}) \neq 0$
- einer *Geraden*, wenn $(a\,\overline{c} - c\,\overline{a}) = 0$ ist.

z_1 und z_2 erfüllen (2.5), weil $f(z_1) = 0$ und $f(z_2) = 1$ reell sind. $f(z_3) = \infty$ bedeutet $cz_3 + d = 0$, also erfüllt z_3 die Gleichung (2.4), also auch (2.5). Folglich wird durch (2.5) der Kreis bzw. die Gerade festgelegt, auf der z_1, z_2 und z_3 liegen.

Ferner ist DV $(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(z_4)$. Das Doppelverhältnis ist daher genau dann reell, wenn $f(z_4)$ reell ist, also z_4 die Gleichung (2.5) erfüllt. □

KOROLLAR 2.6. *Eine Möbiustransformation führt Geraden und Kreise wieder in Geraden und Kreise über. (Möglicherweise geht dabei eine Gerade in einen Kreis und ein Kreis in eine Gerade über.)*

BEMERKUNG. Man faßt häufig Geraden als Kreise durch Unendlich oder Kreise mit unendlichem Radius auf und spricht dann von der *Kreisinvarianz* der Möbiustransformationen.

Bei gegebener Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

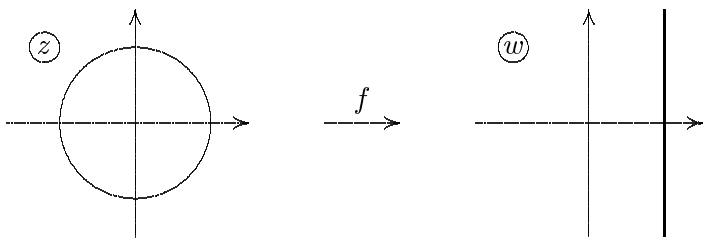
läßt sich leicht erkennen, ob ein Kreis K auf eine Gerade abgebildet wird.

Ist $cz_\infty + d = 0$, so folgt $f(z_\infty) = \infty$. Dann geht K in eine Gerade über, wenn $z_\infty \in K$ ist.

BEISPIEL. Der *Einheitskreis* $K_1 = \{z \mid |z| = 1\}$ wird durch

$$f(z) = \frac{-2}{z - 1}$$

wegen $z_\infty = 1 \in K_1$ auf eine Gerade abgebildet.



Dagegen wird der Kreis $K_2 = \{z \mid |z| = 2\}$ wieder auf einen Kreis abgebildet (da $z_\infty = 1 \notin K_2$).

DEFINITION. Sei K ein Kreis oder eine Gerade. Eine *Orientierung* (oder *Umlaufsinn*) von K wird durch ein Tripel (z_1, z_2, z_3) von Punkten von K gegeben.

Bezüglich der Orientierung (z_1, z_2, z_3) liegt der Punkt z

- *links von* K, wenn $\mathrm{Im}\,[\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)] < 0$ ist und
- *rechts von* K, wenn $\mathrm{Im}\,[\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)] > 0$ ist und
- *auf* K, wenn $\mathrm{Im}\,[\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)] = 0$, also DV (z_1, z_2, z_3, z) reell ist.

Tatsächlich gibt es nur zwei Orientierungen. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses braucht man hierzu nur die Orientierungen der reellen Achse zu betrachten. Ist deren Orientierung durch $(0, 1, \infty)$ festgelegt und (z_1, z_2, z_3) ein beliebiges reelles Tripel, so kann

$$f(Z) = \frac{az + b}{cz + d} = \mathrm{DV}\,(z_2, z_2, z_3, z)$$

mit reellen Koeffizienten geschrieben werden. Man berechnet dann leicht

$$\mathrm{Im}[\mathrm{DV}\,(z_1, z_2, z_3, z)] = \frac{ad - bc}{|c_z + d|^2}\ \mathrm{Im}[z]\,.$$

Die Unterscheidung von rechts und links bedeutet daher nichts anderes als die Unterscheidung von oberer und unterer Halbebene. Sie hängt nur von dem Vorzeichen von $ad - bc$ ab.

Beispiel. Eine Orientierung des Einheitskreises sei durch $(-1, i, 1)$ gegeben (Uhrzeigersinn). Für $z = 0$ ist $\mathrm{DV}\,(-1, 1, 1, 0) = i$, also $\mathrm{Im}[i] > 0$. Also liegt der Ursprung bezüglich dieser Orientierung *rechts* vom Einheitskreis. Bei umgekehrter Orientierung läge er links.

Bemerkung. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnis bei Möbiustransformationen $f(z) = w$ liegt w auf der selben Seite bezüglich der durch (w_1, w_2, w_3) definierten Orientierung wie z bezüglich (z_1, z_2, z_3). Dies nennt man auch *Invarianz der Orientierung*.

KAPITEL 3

Differentiation

DEFINITION. Sei $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$$

eine ε-*Umgebung* von a.

DEFINITION. Eine Teilmenge A von $\mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn zu jedem $a \in A$ eine ε-Umgebung von a existiert, die ganz in A liegt:

$$A \text{ offen} \iff \forall\, a \in A\, \exists\, \varepsilon > 0 :\ U_\varepsilon(a) \subseteq A \tag{3.1}$$

BEISPIEL. Die Einheitskreisscheibe $E = \{z \mid |z| < 1\}$ ist offen:
Sei $a \in E$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}(1 - |a|) > 0$. Dann ist $U_\varepsilon \subseteq E$. Es gilt nämlich für $z \in U_\varepsilon(a)$ mit der Dreiecksungleichung:

$$|z| \le |a| + |z - a| \le |a| + \underbrace{\frac{1}{2}(1 - |a|)}_{=\varepsilon > 0} \le \frac{1}{2}(1 + |a|) < 1\,.$$

DEFINITION. Sei A eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : A \to \mathbb{C}$. Eine Zahl $F \in \mathbb{C}$ heißt *Grenzwert* von f in a, wenn gilt:

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, z \in U_\varepsilon(a), z \ne a\ :\ |f(z) - F| < \delta\,.$$

Dabei sei ε so klein gewählt, daß $U_\varepsilon \subseteq A$.
Man schreibt dann $F = \lim_{z \to a} f(z)$
In Worten: $f(z)$ liegt beliebig dicht an F, wenn z genügend nah an a, jedoch ungleich a ist. Der Funktionswert $f(a)$ spielt bei der Grenzwertbildung keine Rolle, er braucht nicht einmal definiert zu sein.

SATZ 3.1. *Existieren die Grenzwerte*

$$F = \lim_{z \to a} f(z) \quad \textit{und} \quad G = \lim_{z \to a} g(z),$$

so existieren auch

$$\lim_{z \to a} (f(z) + g(z)) = F + G \tag{3.2}$$

$$\lim_{z \to a} (c \cdot f(z)) = c \cdot F \quad \textit{mit} \quad c \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

$$\lim_{z \to a} (f(z) \cdot g(z)) = F \cdot G \tag{3.4}$$

$$\lim_{z\to a}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{F}{G} \quad \textit{wenn } g(z)\neq 0 \textit{ in } U_\varepsilon(a) \textit{ und } G\neq 0. \tag{3.5}$$

BEWEIS. Wie im Reellen.
Exemplarisch hier nur der Beweis zu (3.4).
Betrachte $|f(z)\cdot g(z) - F\cdot G|$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a}\Big[|f(z)\cdot g(z) - F\cdot G|\Big] &= \lim_{z\to a}\Big[|(f(z)-F)\cdot(g(z)-G) \\
&\qquad +F\cdot(g(z)-G)+G\cdot(f(z)-F)|\Big] \\
&\leq \lim_{z\to a}\Big[\underbrace{|f(z)-F|}_{<\varepsilon}\cdot\underbrace{|g(z)-G|}_{<\varepsilon} \\
&\qquad +|F|\cdot\underbrace{|g(z)-G|}_{<\varepsilon}+|G|\cdot\underbrace{|f(z)-F|}_{<\varepsilon}\Big] \\
&= 0 \quad \text{da } \varepsilon \text{ beliebig klein.} \qquad \square
\end{aligned}$$

DEFINITION. f heißt *stetig* in a, wenn $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$ gilt.

KOROLLAR 3.2. *Sind f und g stetig in a, so sind auch $f+g$, $c\cdot f$, $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(z)\neq 0$) stetig in a (siehe Satz 3.1).*

DEFINITION. f heißt *differenzierbar* in a, wenn $\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existiert.
Man schreibt dann

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

Differenzierbarkeit in a bedeutet, daß $f(z)$ in der Nähe von a durch eine lineare Funktion

$$f(z) = w = f(a) + f'(a)\cdot(z-a)$$

approximierbar ist. Man sagt auch, f ist in z_0 *linearisierbar*.

SATZ 3.3. *Ist f differenzierbar in a, so ist f auch stetig in a.*

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a}(f(z)-f(a)) &= \lim_{z\to a}\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot(z-a)\right) \\
&= \underbrace{\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}_{\text{existiert}}\cdot\underbrace{\lim_{z\to a}(z-a)}_{=0} \\
&= 0 \\
\Longrightarrow \quad \lim_{z\to a} f(z) &= f(a). \qquad \square
\end{aligned}$$

SATZ 3.4. *Sind f und g differenzierbar in a, so sind auch $f+g$, $c\cdot f$, $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g'\neq 0$) differenzierbar in a, und es gilt:*

$$(f+g)' = f'+g' \tag{3.6}$$

$$(c\cdot f)' = c\cdot f' \tag{3.7}$$

$$(f\cdot g)' = f'g + f\,g' \tag{3.8}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2} \tag{3.9}$$

BEWEIS. Wie im Reellen.
Als Beispiel hier der Beweis zu (3.8):

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{z\to a}\frac{f(z)\,g(z)-f(a)\,g(a)}{z-a}\\ &= \lim_{z\to a}\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,g(z)+f(a)\,\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right).\end{aligned}$$

f und g sind nach Voraussetzung differenzierbar, weiter ist g nach Satz 3.3 auch stetig in a, das heißt

$$\lim_{z\to a} g(z) = g(a)\,.$$

Also hat man

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)\,. \qquad \square$$

BEISPIELE.

(1) $f(z)=c$, $c\in\mathbb{C}$ $\quad\Longrightarrow\quad \frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{c-c}{z-a}=0.$
Also ist $f'(a)=0$ für alle $a\in\mathbb{C}$.

(2) $f(z)=z$ $\quad\Longrightarrow\quad \frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{z-a}{z-a}=1.$
Also ist $f'(a)=1$ für alle $a\in\mathbb{C}$.

(3) $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{N}$ $\quad\Longrightarrow\quad f'(a)=n\cdot a^{n-1}$ für alle $a\in\mathbb{C}$.
(Beweis durch vollständige Induktion.)

(4) $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $\quad\overset{(3.9)}{\Longrightarrow}\quad f'(a)=\frac{-n\,a^{n-1}}{a^{2n}}=\frac{-n}{a^{n+1}}$ für alle $a\in\mathbb{C}$.

SATZ 3.5 (Kettenregel). *Ist $f: A\to\mathbb{C}$, $g: B\to\mathbb{C}$ mit $f(A)\subseteq B$ und f differenzierbar in z und g differenzierbar in $f(z)$, so ist $g\circ f: A\to\mathbb{C}$ in z differenzierbar, und es gilt:*

$$(g\circ f)'(z) = g'\left(f(z)\right)\cdot f'(z) \tag{3.10}$$

BEWEIS. Wie im Reellen.

BEISPIEL. $f(z)=(1+z^2)^2 \quad\Longrightarrow\quad f'(z)=2\cdot(1+z^2)\cdot 2\,z.$

Jede komplexe Funktion $f: A\to\mathbb{C}$ besitzt die Darstellung

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{mit } z=x+i\,y \text{ und } u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.$$

Dabei heißt u Realteil von f, v Imaginärteil von f.

BEISPIEL. Für die Funktion

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

ist $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$.

Wegen $|a|,\ |b| \le |a+bi| \le |a| + |b|$ ist

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)\,.$$

Eine Funktion f ist also genau dann stetig, wenn u und v stetig sind.

SATZ 3.6. *Ist $f = u + i\,v$ differenzierbar, so sind u und v nach x und y partiell ableitbar, und es gelten die* Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen *(CRD)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{3.11}$$

Es ist

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{3.12}$$

BEWEIS. Sei f differenzierbar in z. Für $h \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} \right) + i \lim_{h\to 0} \left(\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right). \end{aligned}$$

Also sind u und v partiell nach x differenzierbar, und es gilt

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{$*$}$$

Somit ist (3.12) bewiesen. Andererseits ist bei der Grenzwertbildung parallel zur imaginären Achse

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+i\,h) - f(z)}{i\,h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{i\,h} \right) + i \lim_{h\to 0} \left(\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{i\,h} \right). \end{aligned}$$

Also sind u und v auch nach y partiell differenzierbar, und es gilt

$$f'(z) = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{$**$}$$

Durch Gleichsetzen von $(*)$ und $(**)$ ergeben sich dann durch Koeffizientenvergleich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3.11):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \qquad \square$$

BEISPIELE.

(1) $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i\,2\,x\,y$ ist differenzierbar für alle $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$. Nach Satz 3.6 erfüllen dann $u = x^2 - y^2$ und $v = 2\,x\,y$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

(2) Sei $f(z) = (a\,x + b\,y) + i\,(c\,x + d\,y)$ mit $z = x + i\,y$. Damit f differenzierbar, müssen nach Satz 3.6 notwendig die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = d\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = c\,.$$

Also muß $a = d$ und $b = -c$ sein. Es folgt

$$f(z) = a\,(x + i\,y) + b\,(y - i\,x) = (a - i\,b)\,(x + i\,y) = (a - i\,b)\,z\,.$$

DEFINITION. Eine Funktion f heißt *holomorph* oder *regulär* in a, wenn f in einer Umgebung von a differenzierbar ist.

BEISPIEL. Die Funktion $f(z) = z\,\overline{z} = x^2 + y^2$ ist in $z = 0$ differenzierbar, aber *nicht* holomorph.

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{z\,\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0$$

existiert. Also ist f in $z = 0$ differenzierbar. Aber:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\,y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind für alle $z \neq 0$ *nicht* erfüllt, f ist also nicht differenzierbar für $z \neq 0$, also ist f nicht holomorph in $z = 0$ (Satz 3.6).

SATZ 3.7. *Es sei $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ eine komplexe Funktion. Existieren in einer Umgebung U von a die partiellen Ableitungen von u und v, sind diese dort stetig und genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

so ist f holomorph in a.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei weiter $z \in U$. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|h| = |k + i\,\ell| < \delta$ und $z + h \in U$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x + k, y + \ell) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| < \varepsilon \tag{3.13}$$

gilt. Entsprechendes gilt für die übrigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$\begin{aligned} u(x + k, y + \ell) - u(x, y) &= u(x + k, y + \ell) - u(x, y + \ell) \\ &\quad + u(x, y + \ell) - u(x, y) \\ &= k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x + k', y + \ell) + \ell\,\frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \ell') \end{aligned}$$

mit den Zwischenwerten k' und ℓ'. Dann ist

$$\left| u(x+k,y+\ell) - u(x,y) - k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \ell\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| \overset{(3.13)}{<} (|k|+|\ell|)\cdot\varepsilon$$

$$< 2\,|h|\,\varepsilon \tag{3.14}$$

und analog für v

$$\left| v(x+k,y+\ell) - v(x,y) - k\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \ell\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \right| < (|k|+|\ell|)\cdot\varepsilon$$

$$< 2\,|h|\,\varepsilon \tag{3.15}$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3.11) ist

$$\begin{aligned}(k+i\,\ell)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) &= k\,\frac{\partial u}{\partial x} - \ell\,\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\ell\,\frac{\partial u}{\partial x} + k\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &\overset{\text{CRD}}{=} k\,\frac{\partial u}{\partial x} + \ell\,\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(k\,\frac{\partial v}{\partial x} + \ell\,\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Wegen (3.14) und (3.15) erhält man also

$$\left| f(z+h) - f(z) - h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| \le 4\,|h|\,\varepsilon\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right| \le 4\,\varepsilon$$

für alle ε. Also ist f differenzierbar für alle $z \in U$. Somit ist f holomorph in a. □

BEMERKUNG. Später wird bewiesen, daß mit f auch die Ableitung f' holomorph ist. Daraus ergibt sich, daß u und v beliebig oft partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen stetig sind. Damit ist die im Satz gemachte Voraussetzung über die Stetigkeit der partiellen Ableitungen auch notwendig.

BEISPIELE. Wir setzen voraus, daß die reelle Exponentialfunktion sowie die trigonometrischen Funktionen bekannt sind.

(1) EXPONENTIALFUNKTION.
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^z = e^x \cdot (\cos y + i\,\sin y) \quad \text{mit } z = x + i\,y. \tag{3.16}$$

Real- und Imaginärteil sind

$$u(x,y) = e^x \cos y\,, \qquad v(x,y) = e^x \sin y\,.$$

Sie genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und besitzen stetige partielle Ableitungen. Nach Satz 3.7 ist exp eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion.
Eigenschaften:
(a) Für reelle z stimmt exp mit der reellen Exponentialfunktion überein.
(b) exp ist nach Satz 3.7 holomorph in der ganzen Ebene, und es gilt:

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\,\cos y + i\,e^x\,\sin y = \exp(z)\,.$$

(c) Es gilt die *Formel von Moivre*:

$$\exp(z_1+z_2) = e^{(x_1+x_2)}\cdot(\cos(y_1+y_2)+i\,\sin(y_1+y_2)) = \exp z_1\cdot\exp z_2\,. \tag{3.17}$$

(d) Es gibt kein z mit $\exp(z)=0$: *Annahme*: $\exp(z_0)=0$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad 1 &= \exp(0) = \exp\left(z_0+(-z_0)\right)\\ &= \exp(z_0)\cdot\exp(-z_0)\\ &= 0\quad\text{(Widerspruch)}\,.\end{aligned}$$

(e) $\exp(z)$ besitzt die Periode $2\pi i$. Weiter nimmt $\exp(z)$ in einem Periodenstreifen $T_k=\{z=x+i\,y\mid 2(k-1)\pi\le y\le 2k\pi\}$ *jede* komplexe Zahl $w\neq 0$ genau einmal an.

Für komplexe Zahlen $z\neq 0$ ergibt sich die Eulersche Darstellung

$$z = r\,(\cos t + i\sin t) = re^{it}\,. \tag{3.18}$$

Dabei ist $t=\arg z$ eindeutig mod 2π und $r=|z|$ der Absolutbetrag.

(2) Cosinus, Sinus.
Mit Hilfe der Exponentialfunktion lassen sich auch die trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente definieren. Es sei

$$\begin{aligned}\cos &: \mathbb{C}\to\mathbb{C} & \qquad \sin &: \mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ \cos z &= \tfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) & \qquad \sin z &= \tfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\end{aligned}$$

Eigenschaften:

(a) Für reelle z stimmen cos und sin mit den entsprechenden reellen Funktionen überein.

(b) cos und sin sind holomorph in der gesamten komplexen Ebene. Es gilt

$$(\cos z)' = -\sin z,\quad (\sin z)' = \cos z\,.$$

(c) cos und sin besitzen die Periode 2π.

(d) Sind

$$\cosh x = \frac{1}{2}\,(e^x+e^{-x})\,,\qquad \sinh x = \frac{1}{2}\,(e^x-e^{-x})$$

die reellen Hyperbelfunktionen, so ist

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos x\cdot\cosh y - i\,\sin\sinh y,\\ \sin z &= \sin x\cdot\cosh y + i\,\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

Gebiete in $\mathbb{C}$

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt *zusammenhängend*, wenn es **keine** offenen Mengen B und C gibt, mit

1. $A\subseteq B\cup C$.
2. $A\cap B\neq\emptyset,\ \ A\cap C\neq\emptyset$.
3. $(A\cap B)\cap(A\cap C)=\emptyset$.

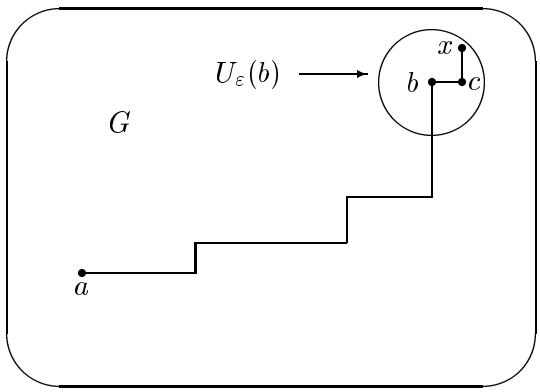
Diese Definition vereinfacht sich etwas, wenn A offen ist: Eine offene Menge ist genau dann zusammenhängend, wenn sie sich nicht als Vereinigung zweier disjunkter nicht-leerer offenen Mengen darstellen läßt.

DEFINITION. Eine nicht-leere, offene und zusammenhängende Menge der komplexen Ebene heißt *Gebiet*.

HILFSSATZ 3.1. *Je zwei Punkte eines Gebietes G lassen sich durch einen ganz in G liegenden Streckenzug mit achsenparallelen Strecken verbinden.*

BEWEIS. Sei $a \in G$ und A eine Menge aller Punkte in G, die sich mit a durch einen achsenparallelen Streckenzug miteinander verbinden lassen.

1. *Zu zeigen*: A ist offen. Sei $b \in A$. Weil G offen ist, gibt es ein $U_\varepsilon(b) \subseteq G$. Sei nun $x \in U_\varepsilon(b)$. Dann läßt sich b mit x durch den zweiteiligen Streckenzug $(b \to c, c \to x)$ mit achsenparallelen Strecken verbinden, die ganz in $U_\varepsilon(b)$, also in G liegen.



   Wegen $b \in A$ lassen sich außerdem alle $a \in A$ mit b durch einen achsenparallelen Streckenzug verbinden, also auch a mit x.
   Somit ist x auch ein Punkt von A. Also gilt $U_\varepsilon \subseteq A$. Also ist A offen.
2. *Zu zeigen*: $B := G \setminus A$ ist offen. Sei $b \in B$ und $U_\varepsilon(b) \subseteq G$. Dann ist $U_\varepsilon(b) \subseteq B$, d.h. B ist offen. Wäre nämlich $x \in U_\varepsilon(b)$ nicht in B, so würde $x \in A$ folgen. Dann gäbe es einen achsenparallelen Streckenzug, der a mit x verbindet, also wäre auch a mit b verbindbar, also $b \in A$ (Widerspruch). Zu jedem $b \in B$ gibt es daher ein $U_\varepsilon(b) \subseteq B$, d.h. B ist offen.
3. *Zu zeigen*: $G = A$. Es ist $G = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A und B offen. Wegen $a \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Weil G zusammenhängend ist, folgt $B = \emptyset$, also $G = A$.

Also ist jeder Punkt von G mit jedem anderen Punkt von G durch einen Streckenzug mit achsenparallelen Strecken verbindbar. □

SATZ 3.8. *Ist f eine in einem Gebiet G definierte, holomorphe Funktion mit verschwindender Ableitung, so ist f konstant.*

BEWEIS. Aus

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \overset{\text{CRD}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz ist dann

$$u(x_1, y) - u(x_2, y) = (x_1 - x_2) \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y)}_{=0} = 0 \quad \text{mit } x_1 \le \xi \le x_2 \,.$$

Also ist $u(x_1, y) = u(x_2, y)$, d.h. u ist auf einer zur reellen Achse parallelen Strecke konstant. Nach Hilfssatz 3.1 ist u dann in ganz G konstant.

Entsprechend zeigt man, daß v in ganz G konstant ist, also auch $f = u + iv$. □

BEMERKUNG. Zusätzlich zur Forderung $f'(z) = 0$ muß hier gefordert werden, daß die betrachtete Definitionsmenge *zusammenhängend* ist.
Beispiel: Sei $A = B \cup C$, B und C offen und nichtleer, und gelte $B \cap C = \emptyset$. Definiere dann

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z \in B \\ 1 & \text{für } z \in C \end{cases}$$

Dann ist f holomorph in $A = B \cup C$ und es gilt $f'(z) = 0$. f ist aber offensichtlich nicht konstant in A.

ANWENDUNGEN.

(1) Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ und

$$(*) \qquad f'(z) = f(z)\,, \quad f(0) = 1\,.$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist $\exp(z)$. Betrachte

$$g(z) = e^{-z} f(z)\,.$$

Wegen

$$g'(z) = -e^{-z} f(z) + e^{-z} f'(z) = 0$$

ist $g(z) = C$ konstant, also $f(z) = C \cdot e^z$. Aus $f(0) = C \cdot e^0 = 1$ folgt $C = 1$, also ist exp die einzige Lösung von $(*)$.

(2) Es gilt $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
Beweis: Sei $g(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$. Differenzieren ergibt

$$g'(z) = 2 \sin z \cos z - 2 \sin z \cos z = 0\,,$$

also $g(z) = C$. Für $z = 0$ folgt $C = g(0) = 1$.

KAPITEL 4

Integration

DEFINITION. Eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\,, \qquad t \mapsto z(t) = x(t) + i\,y(t)\,, \qquad [a,b] \subseteq \mathbb{R}$$

heißt *Kurve*. Die Punkte $|\gamma| = \{z(t) \mid t \in [a,b]\}$ heißen *Punktmenge* der Kurve. $z(a)$ heißt *Anfangspunkt*, $z(b)$ heißt *Endpunkt* der Kurve. Stimmen Anfangs- und Endpunkt von γ überein, so heißt die Kurve *geschlossen*.

Ist

$$P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$$

eine Partition des Intervalls $[a,b]$, so sind $z_i = z(t_i)$ Punkte der Kurve. Dann ist

$$\lambda(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} |z_i - z_{i-1}|$$

die Länge des Streckenzuges durch $z_0, \ldots, z_n$.

Sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller Partitionen $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ mit $t_{i-1} \le t_i$, $t_0 = a$, $t_n = b$. Dann ist $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ die Länge des Teilintervalls $I_i = [t_{i-1}, t_i]$.

$\sigma(P) = \max(\Delta t_i)$ heißt *Feinheitsgrad* der Partition P. Gilt $P' \subseteq P$, d.h. jeder Punkt von P ist auch Punkt von P', so heißt P' *feiner* als P. Es ist dann $\sigma(P') \le \sigma(P)$.

Eine Kurve heißt *rektifizierbar*, wenn die Menge

$$\{\lambda(\gamma, P) \mid P \in \mathfrak{P}\}$$

nach oben beschränkt ist. Das Supremum

$$\lambda(\gamma) = \sup_{P \in \mathfrak{P}} \{\lambda(\gamma, P)\}$$

heißt *Länge der Kurve*.

Eine Kurve heißt *Weg*, wenn sie rektifizierbar ist.

BEMERKUNG. Eine Kurve γ heißt *glatt*, wenn die Parameterfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ stetig differenzierbar sind. In diesem Fall ist γ rektifizierbar, also ein Weg. Die Länge ist

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_a^b |z'(t)|\,dt\,.$$

Die im folgenden interessierenden Wege werden immer stückweise glatt sein.

Definition des Integrals

Es sei

$$P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$$

eine Partition des Intervalls $[a, b]$. Wähle einen beliebigen Punkt c_i aus dem Teilintervall $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Diesem entspricht ein Punkt $\zeta_i = z(c_i)$ auf $|\gamma|$, der zwischen z_{i-1} und z_i liegt. Ist $f(z)$ eine Funktion, so heißt

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \cdot \Delta z_i \tag{4.1}$$

mit $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ eine *Riemann-Summe*.

DEFINITION. Eine Funktion f heißt *integrierbar* längs des Weges γ, wenn eine komplexe Zahl S existiert, mit

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, P_\varepsilon\, \forall\, P \supseteq P_\varepsilon : |S - R(f, P)| < \varepsilon \tag{4.2}$$

In Worten: Bei genügend feinen Partitionen liegen die Riemann-Summen $R(f, P)$ beliebig dicht an S.

Eigenschaften

(A) *Eindeutigkeit.* Ist f längs γ integrierbar, so ist S eindeutig bestimmt. Man schreibt

$$S = \int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

Beweis. Für S und S' gelte (4.2). Wegen $S \neq S'$ kann man $|S - S'| = 2\varepsilon > 0$ annehmen. Dann existieren P_ε und P'_ε, so daß mit (4.2)

$$\begin{aligned} |S - R(f, P)| &< \varepsilon \quad \text{für alle } P \supseteq P_\varepsilon \\ |S' - R(f, P)| &< \varepsilon \quad \text{für alle } P \supseteq P'_\varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Sei $R(f, P)$ eine Riemann-Summe zur Partition $P := P_\varepsilon \cup P'_\varepsilon$. Da P eine Verfeinerung von P_ε und von $P_{\varepsilon'}$ ist, folgt mit der Dreiecksungleichung

$$2\,\varepsilon = |S - S'| \leq \underbrace{|S - R(f, P)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|R(f, P) - S'|}_{<\varepsilon} < 2\,\varepsilon \text{ (Widerspruch)}. \qquad \checkmark$$

(B) *Linearität.* Es gilt:

$$\int_\gamma (f + g)\, dz = \int_\gamma f\, dz + \int_\gamma g\, dz \tag{4.3}$$

$$\int_\gamma a \cdot f\, dz = a \cdot \int_\gamma f\, dz \tag{4.4}$$

Beweis. Für Riemann-Summen gilt

$$R(f + g, P) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\zeta_i) + g(\zeta_i)\big) \cdot \delta z_i = R(f, P) + R(g, P)$$

$$R(af, P) = \sum_{i=1}^{n} af(\zeta_i) \cdot \Delta z_i = aR(f, P)\,. \qquad \checkmark$$

(C) *Zerlegung in Teilwege.*
Sei $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ eine Zerlegung von γ in $\gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c,b] \to \mathbb{C}$. $\int_\gamma f\,dz$ existiert genau dann, wenn $\int_{\gamma_1} f\,dz$ und $\int_{\gamma_2} f\,dz$ existieren, und es gilt:

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz\,.$$

(D) *Unabhängigkeit von der Parametrisierung.*
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma' : [a',b'] \to \mathbb{C}$ und $z' = z \circ u$ mit $u : [a',b'] \to [a,b]$, u stetig, bijektiv und monoton wachsend. Dann ist

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma'} f\,dz\,.$$

Beweis. Sind $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}'$ die Mengen der Partitionen von $[a,b]$ bzw. $[a',b']$, so ist

$$P' = \{t_i'\} \mapsto P = \{t_i = u(t_i')\}$$

eine Bijektion. Es ist $f(\zeta_i) = f(z'(c_i')) = f(z(u(c_i')))$, also

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta z_i = R(f,P')\,.$$

Da sich $\int_\gamma f\,dz$ und $\int_{\gamma'} f\,dz$ beliebig gut durch $R(f,P)$ und $R(f,P')$ approximieren lassen, müssen sie gleich sein. ✓

(E) *Inverser Weg.*
Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ ein Weg, so heißt

$$-\gamma : [-b,-a] \to \mathbb{C},\ z(t) = x(-t) + i\,y(-t)$$

der zu γ *inverse Weg*. Dann ist

$$\int_\gamma f\,dz = -\int_{-\gamma} f\,dz\,.$$

Beweis. Eine Partition $P = \{t_i\}$ von $[a,b]$ entspricht einer Partition $P' = \{-b_i\}$ mit inverser Anordnung,

$$\begin{array}{lccccccc} P: & t_0 & \le & t_1 & \le & \cdots & \le & t_n \\ P': & -t_n & \le & -t_{n-1} & \le & \cdots & \le & -t_0\,, \end{array}$$

also

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(z_i - z_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(z_{i-1} - z_i) = -R(f,P')\,. \qquad ✓$$

SATZ 4.1. *Jede auf γ stetige Funktion f ist integrierbar.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist $f \circ \gamma : [a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $t \mapsto z(t) \mapsto f(z(t))$ stetig. Weil $[a,b]$ kompakt ist, ist $f \circ \gamma$ dort auch gleichmäßig stetig.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es daher ein $\delta_n > 0$ mit

$$|t_1 - t_2| < \delta_n \quad \Longrightarrow \quad \Big|f(z(t_1)) - f(z(t_2))\Big| < \frac{1}{n}\,. \tag{4.5}$$

Zu der Folge $\delta_1, \delta_2, \ldots$ wählen wir eine Folge

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots ,$$

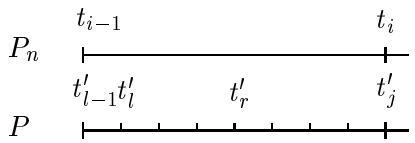
von Partitionen, die einen Feinheitsgrad $\sigma(P_n) < \delta_n$ besitzen.
Solch eine Partitionenfolge läßt sich induktiv konstruieren: Ist P_n bereits konstruiert, so bestimmt man zunächst ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m}\,\sigma(P_n) < \delta_{n+1}$. Dann zerlegt man jedes Teilintervall von P_n äquidistant in m Teile und erhält damit P_{n+1} mit $\sigma(P_{n+1}) = \frac{1}{m}\,\sigma(P_n) < \delta_{n+1}$.

Jeder Partition P_n ordnen wir eine feste Riemann-Summe

$$R_n = R(f, P_n) \sum_{i=1}^{n} = f(\zeta_i)\Delta z_i$$

zu.

Es sei P eine Verfeinerung von P_n und $R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i')\Delta z_i'$ eine Riemann-Summe zu P.



Wegen $\Delta z_i = \sum_{r=l}^{j} \Delta z_r'$ ist dann

$$f(\zeta_i)\Delta z_i - \sum_{r=l}^{j} f(\zeta_r')\Delta z_r' = \sum_{r=l}^{j} \big(f(\zeta_i) - f(\zeta_r')\big) \cdot \Delta z_r' \,.$$

Weil $\sigma(P_n) < \delta_n$ ist, gilt nach (4.5):

$$\big|f(\zeta_i) - f(\zeta_r')\big| < \frac{1}{n} \,.$$

Also gilt für alle $R(f,P)$ mit $P_n \subseteq P$

$$|R_n - R(f,P)| < \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{m} |\Delta z_r'| \le \frac{\lambda}{n} \,, \tag{4.6}$$

wobei λ die Bogenlänge von γ ist. Aus (4.6) folgt speziell:

$$|R_n - R_m| \le \frac{\lambda}{n} \qquad \text{für alle } m \ge n.$$

Die R_n bilden daher eine Cauchy-Folge. Weil $\mathbb{C}$ vollständig ist, konvergieren die R_n in $\mathbb{C}$ gegen

$$S = \lim_{n\to\infty} R_n \,.$$

Behauptung: $S = \int_\gamma f\,dz$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $|S - R_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \ge n_0$. Ferner sei n_1 so groß gewählt, daß $\frac{\lambda}{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n := \max(n_0, n_1)$.

Für $P \supseteq P_n =: P_\varepsilon$ ist dann nach (4.6)

$$|R_n - R(f,P)| < \frac{1}{n} \le \frac{\lambda}{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|S - R(f,P)| \le |\underbrace{S - R_n}_{<\frac{\varepsilon}{2}}| + |\underbrace{R_n - R(f,P)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}| < \varepsilon\,.$$

Mit (4.2) folgt dann die Behauptung. □

Elementare Integrationen.

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $z(a) = A$ und $z(b) = B$.

1. $f(z) = 1$.

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(z_i - z_{i-1}) = z_n - z_0 = B - A\,.$$

Damit ist $\int_\gamma 1\,dz = B - A$.

2. $f(z) = z$. $f(z) = z$ ist stetig. Nach Satz 4.1 existiert also das Integral über jedem Weg γ.
Sei P eine Partition von $[a,b]$. Betrachte die beiden Riemann-Summen

$$\begin{aligned} R_1(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} z_i\cdot(z_i - z_{i-1}) \\ R_2(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} z_{i-1}\cdot(z_i - z_{i-1}) \\ \Longrightarrow\quad R_1 + R_2 &= \sum_{i=1}^{n}(z_i^2 - z_{i-1}^2) = z_n^2 - z_0^2 = B^2 - A^2\,. \end{aligned}$$

Für $P \supseteq P_\varepsilon$ gilt: $|S - R_1| < \varepsilon$ und $|S - R_2| < \varepsilon$. Also ist

$$|2\,S - (R_1 + R_2)| = |2\,S - (B^2 - A^2)| < 2\,\varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist, folgt

$$S = \int_\gamma z\,dz = \frac{1}{2}(B^2 - A^2).$$

Bemerkung.

(1) Der ursprünglich von Riemann 1855 eingeführte Integrabilitätsbegriff benutzt den Feinheitsgrad der Partitionen

$$(4.7)\qquad \exists\, S\,\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\, R(f,P),\ \sigma(P) < \delta : |S - R(f,P)| < \varepsilon\,,$$

wobei $R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$ ist.

(2) Die heute übliche Einführung des Riemann-Integrals mit Ober- und Untersummen stammt von Darboux (1875). Sie läßt sich nicht auf $\mathbb{C}$ übertragen, da sie die Ordnungseigenschaften der reellen Zahlen benutzt. Von Darboux stammt auch der Beweis der Gleichwertigkeit von (4.2) und (4.7). Die hier benutzte Definition (4.2) geht auf Moore und Smith (1922) zurück, die eine allgemeine Theorie der Grenzwertbildung aufstellten.

SATZ 4.2. *Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z(t) = x(t) + i\,y(t)$ eine glatte Kurve und f stetig auf γ, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt\,. \tag{4.8}$$

Dabei stehen auf der rechten Seite der Gleichung nach Aufspaltung in Realteil und Imaginärteil gewöhnliche Riemann-Integrale. $z'(t)$ ist der Richtungsvektor der Kurve.

BEWEIS. Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ gegeben. Dann ist

$$f(z(t)) = u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t)) = \tilde{u}(t) + i\,\tilde{v}(t)\,,$$

wobei $\tilde{u}(t), \tilde{v}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ die zusammengesetzten Funktionen sind, also

$$\begin{aligned} f(z(t)) \cdot z'(t) &= (\tilde{u}(t) + i\,\tilde{v}(t)) \cdot z'(t) \\ &= (\tilde{u}(t) + i\,\tilde{v}(t)) \cdot \big(x'(t) + i\,y'(t)\big) \\ &= \big(\tilde{u}\,x' - \tilde{v}\,y'\big) + i\,\big(\tilde{u}\,y' + \tilde{v}\,x'\big) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Damit ergibt sich

$$S = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt = \int_a^b \big(\tilde{u}\,x' - \tilde{v}\,y'\big)\,dt + i\int_a^b \big(\tilde{u}\,y' + \tilde{v}\,x'\big)\,dt\,. \tag{4.10}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} R(f,P) &= \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\,\Delta z_i \qquad \Big|\ \zeta_i = z(c_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\tilde{u}(c_i) + i\,\tilde{v}(c_i)) \cdot (\Delta x_i + i\,\Delta y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\tilde{u}(c_i)\,\Delta x_i - \tilde{v}(c_i)\,\Delta y_i + i\,(\tilde{u}(c_i)\,\Delta y_i + \tilde{v}(c_i)\,\Delta x_i))\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Zu zeigen ist nun: Für genügend feine Partitionen gilt

$$|S - R(f,P)| < \varepsilon\,. \tag{$*$}$$

Die vier Summanden in (4.11) entsprechen den vier Integralen von S in (4.10), also ist $(*)$ bewiesen, wenn man zeigt, daß

$$\left| \int_a^b \tilde{u}\,x'\,dt - \sum_{i=1}^n \tilde{u}(c_i)\,\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.12}$$

$$\left| \int_a^b \tilde{v}\,y'\,dt - \sum_{i=1}^n \tilde{v}(c_i)\,\Delta y_i \right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.13}$$

$$\left| \int_a^b \tilde{u}\,y'\,dt - \sum_{i=1}^n \tilde{u}(c_i)\,\Delta y_i \right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.14}$$

$$\left| \int_a^b \tilde{v}\,x'\,dt - \sum_{i=1}^n \tilde{v}(c_i)\,\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.15}$$

gilt. (Durch Summenbildung und Abschätzen mit der Dreiecksungleichung folgt dann $(*)$.)

Hier soll nur (4.12) gezeigt werden: Da γ stetig differenzierbar ist, gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\bar{c}_i) \cdot \Delta t_i \,,$$

wobei $\bar{c}_i \in [t_i, t_{i-1}]$ und $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ist. Also gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\ \cdot x'(\bar{c}_i) \cdot \Delta t_i \,. \tag{4.16}$$

Weil $\tilde{u} \cdot x'$ mit $\tilde{u}$ und x' stetig auf $[a,b]$ (also auch Riemann-integrierbar) ist, gilt für genügend feine Partitionen $P \supseteq P_\varepsilon$:

$$\left| \int_a^b \tilde{u}(t) \cdot x'(t)\, dt - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\ \cdot x'(c_i) \cdot\ \Delta t_i \right| < \frac{\varepsilon}{8} \,. \tag{4.17}$$

$\tilde{u}$ ist stetig auf $[a,b]$, also beschränkt. Dann gibt es ein u mit

$$\tilde{u}(t) < U \text{ für sämtliche } t \in [a,b] \,.$$

Nach Voraussetzung ist $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ stetig differenzierbar, also ist $x'(t)$ noch stetig auf dem Kompaktum $[a,b]$, also auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$|t_1 - t_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x'(t_1) - x'(t_2)| < \frac{\varepsilon}{8\,(b-a)\,U} \,.$$

Dann ist

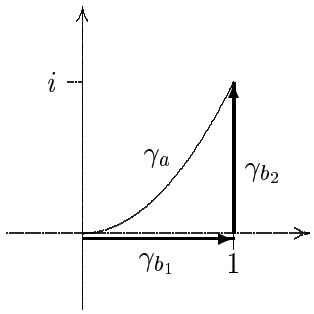
$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, x'(c_i)\, \Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}(c_i)\, \Delta x_i \right| \\ \overset{(4.16)}{=}\ &\left| \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\tilde{u}(c_i)}_{<U} \cdot \underbrace{\left(x_i'(c_i) - x_i'(\bar{c}_i)\right)}_{<\frac{\varepsilon}{8\,(b-a)\,U}} \cdot \underbrace{\Delta t_i}_{<(b-a)} \right| < \frac{\varepsilon}{8} \,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Abschätzen nach der Dreiecksungleichung ergibt nach Addition von (4.17) und (4.18) die Behauptung (4.12). Die anderen Beweisteile gehen analog. Dann folgt $(*)$ und somit die Behauptung. □

Bemerkung. Wegen der Eigenschaft (4) (Seite 29) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$ ist dieser Satz auch für stückweise stetig differenzierbare Wege anwendbar.

Beispiele.

(1) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = x^2 + i\,(x+y)$ ist stetig, also integrierbar nach Satz 4.1.



(a) $\gamma_a : z(t) = t + i\,t^2$, $t \in [0,1]$. Dann ist

$$f(z(t)) = \underbrace{t^2}_{\tilde{u}} + i\,\underbrace{(t+t^2)}_{\tilde{v}} \quad \text{und} \quad z'(t) = 1 + 2it\,.$$

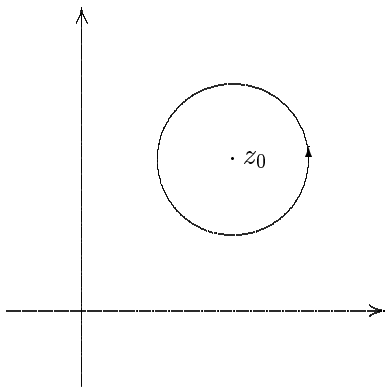
Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_a} f(z)\,dz &= \int_0^1 (t^2 + i\,(t+t^2)) \cdot (1 + 2\,i\,t)\,dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 - 2\,t^3)\,dt + i\int_0^1 2\,t^3 + t^2 + t\,dt \\ &= -\frac{5}{6} + \frac{4}{3}\,i\,.\end{aligned}$$

(b) $\gamma_b = \gamma_{b_1} \cup \gamma_{b_2}$ mit $\gamma_{b_1} : z(t) = t$, $t \in [0,1]$, und $\gamma_{b_2} : z(t) = 1 + (t-1)\,i$, $t \in [1,2]$. Hier ist dann

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_b} f\,dz &= \int_{\gamma_{b_1}} f\,dz + \int_{\gamma_{b_2}} f\,dz \\ &= \int_0^1 (t^2 + i, t) \cdot 1\,dt + \int_1^2 (1 + i\,(1 + t - 1)) \cdot i\,dt \\ &= -\frac{7}{6} + \frac{3}{2}\,i\,.\end{aligned}$$

(3) $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$. γ sei ein Kreis um die Unstetigkeitsstelle z_0 mit dem Radius $r > 0$.



$\gamma : z(t) = z_0 + r \cdot e^{i\,t}$, $r > 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r \cdot e^{i\,t}}\right) \cdot \left(i \cdot r \cdot e^{i\,t}\right)\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt \, = 2\pi i\,.$$

SATZ 4.3. *Ist f integrierbar, und ist M eine obere Schranke für die Werte $|f(z)|$ auf γ, also*

$$|f(z)| \le M \text{ für alle } t \in [a, b],$$

so gilt:

$$\left|\int_\gamma f\, dz\right| \le M \cdot \lambda\,, \tag{4.19}$$

wobei λ die Bogenlänge von γ ist.

BEWEIS. Für eine Riemann-Summe gilt:

$$\begin{aligned} |R(f,P)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta z_i\right| \\ &\le M \cdot \sum_{i=1}^{n} |\Delta z_i| \;=\; M \cdot \widetilde{\lambda}(\gamma, P) \;\le\; M \cdot \lambda, \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\lambda}(\gamma, P)$ die Länge des durch P bestimmten Polygonzuges ist.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Partition P mit

$$\left|\int_\gamma f\, dz\right| - |R(f,P)| \le \left|\int_\gamma f\, dz - R(f,P)\right| \le \varepsilon\,.$$

Es folgt

$$\left|\int_\gamma f\, dz\right| \le |R(f,P)| + \varepsilon \le M \cdot \lambda + \varepsilon\,.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung. □

KAPITEL 5

Die Umlaufzahl

Es sei E ein metrischer Raum mit der Distanzfunktion d. Ein Punkt $x \in E$ heißt ein *Berührpunkt* einer Teilmenge $A \subseteq E$, wenn jede Umgebung von x einen Punkt aus A enthält. Die Menge aller Berührpunkte von A heißt *Abschluß* von A, geschrieben $\overline{A}$ oder $\operatorname{cl} A$.

DEFINITION. Es sei E ein metrischer Raum mit der Distanzfunktion d.

(1) Es sei x ein Punkt aus E und B eine nicht-leere Teilmenge von E. Dann heißt
$$d(x, B) = \inf \{d(x, b) \mid b \in B\}$$
Abstand von x und B.

(2) Es seien A und B nicht-leere Teilmengen von E. Dann heißt
$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$
Abstand von A und B.

EIGENSCHAFTEN.

(1) $d(x, B) = 0 \iff x \in \overline{B}$.
Beweis: (a) Es sei $x \in \overline{B}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $b \in U_\varepsilon(x)$. Also ist
$$d(x, B) \leq d(x, b) < \varepsilon\,.$$
Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist $d(x, B) = 0$.
(b) Sei nun $x \notin \overline{B}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$. Für jedes $b \in B$ ist dann $d(x, b) \geq \varepsilon$, also $d(x, B) \geq \varepsilon > 0$. ✓

(2) Es ist $|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$.
Beweis: Für alle $b \in B$ gilt
$$d(x, B) \leq d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)\,,$$
also
$$d(x, B) \leq d(x, y) + d(y, B)$$
und damit
$$d(x, B) - d(y, B) \leq d(x, y)\,.$$
Analog ergibt sich
$$d(y, b) - d(x, B) \leq d(y, x) = d(x, y)\,, \qquad \checkmark$$

SATZ 5.1. *Ist A eine kompakte und B eine abgeschlossene Teilmenge von E mit $A \cap B = \emptyset$, so ist $d(A,B) > 0$.*

BEWEIS. Wegen (2) ist die Abbildung $A \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto d(x,B)$ stetig. Weil eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum annimmt, gibt es ein $a \in A$ mit $d(A,B) = d(a,B)$. Wegen $a \notin B = \overline{B}$ folgt $d(a,B) > 0$ nach (1). □

BEMERKUNG. Ist A nur abgeschlossen, aber nicht kompakt, so folgt im allgemeinen nicht $d(A,B) > 0$.

BEISPIEL. Die beiden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{und} \qquad B = \{(x,e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

haben den Abstand Null, sind aber disjunkt.

Sind $a, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so ist der Winkel zwischen den von a ausgehenden, nach z_1 und nach z_2 gerichteten Strahlen

$$\varphi = \sphericalangle(z_1, a, z_2) = \arg \frac{z_1 - a}{z_2 - a}\,.$$

Hierbei wird der Winkel von z_1 nach z_2 gemessen, und es gilt $-\pi \le \varphi < \pi$.

HILFSSATZ 5.1. *Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z(t)$, eine Kurve und a ein nicht auf γ liegender Punkt. Es gibt dann eine eindeutig bestimmte Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit*

(1) *g ist stetig*

(2) $g(t) \equiv \arg\left(\dfrac{z(t)-a}{z(0)-a}\right) \bmod 2\pi$

(3) $g(0) = 0$

(D.h. g mißt den Winkel beim Durchlaufen der Kurve γ).

BEWEIS. Es sei $|\gamma|$ die Punktmenge von γ und $\rho := d(a,|\gamma|) > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $z(t)$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|z(t) - z(t')\big| < \rho\,.$$

Für $|t - t'| < \delta$ ist dann

$$\left|\arg\left(\frac{z(t)-a}{z(t')-a}\right)\right| < \frac{\pi}{3}\,.$$

Wegen $|z(t)-a|$, $|z(t')-a| \ge \rho > |z(t)-z(t')|$ ist nämlich der Winkel bei a der kleinste im Dreieck $[a\,z(t')\,z(t)]$, also kleiner als $\frac{\pi}{3}$.

1. *Eindeutigkeit von g*: Wegen (2) ist

$$g(t) - g(t') \equiv \arg\left(\frac{z(t)-a}{z(t')-a}\right) \bmod 2\pi\,,$$

also für festes t'

$$g(t) - g(t') - \arg\left(\frac{z(t)-a}{z(t')-a}\right) = 2\pi k(t)$$

eine stetige Funktion in t im Intervall $|t - t'| < \delta$. Außerdem ist $k(t)$ ganzzahlig und $k(t') = 0$. Also gilt:

$$g(t) - g(t') = \arg\left(\frac{z(t) - a}{z(t') - a}\right)$$

für $|t - t'| < \delta$.
Wähle eine Partition $P = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = 1\}$ mit $\sigma(P) < \delta$. Für $t \in [0, 1]$ und $t_i \in P$ mit $|t_i - t| < \delta$ ist

$$\begin{aligned} g(t) &= g(t) - g(0) = g(t) - g(t_i) + \sum_{k=1}^{i} (g(t_k) - g(t_{k-1})) \\ &= \arg\left(\frac{z(t) - a}{z(t_i) - a}\right) + \sum_{k=1}^{i} \arg\left(\frac{z(t_k) - a}{z(t_{k-1}) - a}\right) \end{aligned}$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist unabhängig von g, also ist g eindeutig bestimmt.

2. *Existenz von g*: Definiere g wie in der vorigen Gleichung. Diese Funktion hat dann die Eigenschaften (1) bis (3). □

DEFINITION. $V(\gamma, a) := g(1)$ heißt *Argumentvariation* von γ bezüglich a ($a \notin \gamma$). Es ist für eine genügend feine Partition $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$

$$V(\gamma, a) = \sum_{k=1}^{n} \arg\left(\frac{z(t_k) - a}{z(t_{k-1}) - a}\right).$$

Eigenschaften der Argumentvariation

(1) Ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, so ist $V(\gamma, a) = V(\gamma_1, a) + V(\gamma_2, a)$.
(2) Es ist $V(-\gamma, a) = -V(\gamma, a)$.
(3) $V(\gamma, a)$ ist stetig in a.
(4) Sei γ geschlossen, das heißt $z(0) = z(1)$. Dann ist

$$V(\gamma, a) = g(1) \equiv \arg\left(\frac{z(1) - a}{z(0) - a}\right) \bmod 2\pi \equiv 0 \bmod 2\pi\,.$$

Also ist $V(\gamma, a) = 2\pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

DEFINITION.

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi} V(\gamma, a) \in \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

($n \in \mathbb{Z}$) heißt *Umlaufzahl* oder *Windungszahl* der geschlossenen Kurve γ bezüglich a.

Eine geschlossene Kurve γ in einem Gebiet G heißt *nullhomolog*, wenn

$$n(\gamma, a) = 0 \tag{5.2}$$

für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt.

Wegen der Stetigkeit ist $n(\gamma, a)$ konstant in den zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

BEISPIEL. Sei γ gegeben durch $z(t) = e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0,1]$.
Dann erfüllt $g(t) = 2\pi t$ die Eigenschaften (1) bis (3) von Hilfssatz 5.1.
Es ist

$$n(\gamma, a) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{für } |a| < 1 \\ 0 & \text{für } |a| > 1 \end{cases}$$

Es sei $[a,b]$ das Parameterintervall der Kurve γ und

$$P = \{t_o, t_1, \ldots, t_n\}$$

eine Partition des Intervalls. Jedem Parameterwert ist ein Punkt der Kurve zugeordnet. Es sei

$$z_i = z(t_i)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Man erhält hiermit zu der Partition P einen der Kurve einbeschriebenen Streckenzug

$$S(P) = [z_0 z_1] + [z_1 z_2] + \cdots + [z_{n-1} z_n]\,.$$

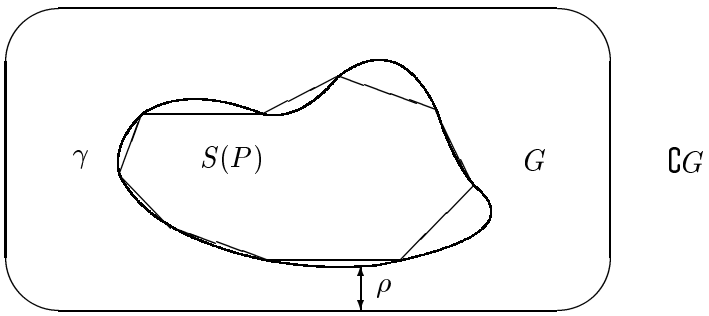
Ist γ geschlossen, so ist auch $S(P)$ geschlossen.

HILFSSATZ 5.2. *Sei γ ein geschlossener Weg in einem Gebiet G. Es gibt dann eine Partition P' des Parameterintervalls, so daß für alle $P \supseteq P'$ die Streckenzüge $S(P)$ in G liegen und*

(5.3) $$n(\gamma, a) = n(S(P), a)\,.$$

für alle $a \in \complement G = \mathbb{C} \setminus G$ gilt.

BEWEIS. Sei $\rho = d(\complement G, |\gamma|)$. Es ist $\rho > 0$ da $|\gamma|$ kompakt ist.



Wegen der Stetigkeit von $z(t)$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$(|t_1 - t_2| < \delta) \quad \Longrightarrow \quad |z(t_1) - z(t_2)| < \rho\,.$$

Sei P' eine Partition mit dem Feinheitsgrad $\sigma(P') < \delta$ und $P = \{t_i\} \supseteq P'$, $z_i = z(t_i)$. Dann ist

$$S(P) = [z_0\, z_i] + [z_1\, z_2] + \cdots + [z_{i-1}\, z_i] + \cdots + [z_{n-1}, z_n]$$

1. Für $z \in [z_{i-1}\, z_i]$ gilt wegen $\sigma(P) < \delta$:

$$|z_i - z| \le |z_i - z_{i-1}| < \rho$$

$$\Longrightarrow \quad z \notin \complement G \quad \Longrightarrow \quad z \in G\,.$$

Also liegt $S(P)$ ganz in G.

2. Für $a \in \complement G$ gilt: $d(a, |\gamma|) \geq \rho$, also

$$|t_1 - t_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |z(t_1) - z(t_2)| < \rho \leq d(a, |\gamma|)\,.$$

Nach Hilfssatz 5.1 ist dann

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \arg\left(\frac{z(t_i) - a}{z(t_{i-1}) - a}\right) = n(S(P), a)$$

für aller Verfeinerungen P von P'. □

Ketten

Sei M eine nichtleere Menge. Unter der *freien*, von M erzeugten *abelschen Gruppe* versteht man die Menge der Abbildungen

$$f:\ M \to \mathbb{Z} \quad \text{mit}$$

$f(m) \neq 0$ für nur *endlich* viele $m \in M$ und der Verküpfung

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m)\,.$$

Die Elemente dieser Gruppe lassen sich auch als formale Summen

$$f(x) = \sum_i n_i\, x_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},\ x_i \in M \text{ und } f(x_i) = n_i$$

schreiben. Die obige Addition ist dann

$$f(x) + g(x) = \sum_i n_i\, x_i + \sum_i m_i\, x_i = \sum_i (m_i + n_i)\, x_i\,.$$

Es sei G ein Gebiet. Wir bezeichnen im folgenden die Punkte mit $A, B, \ldots$. Ein Punktepaar $[AB]$ heißt Strecke von G, wenn jeder Punkt der Strecke mit den Endpunkten A und B zu G gehört. Wir fassen $[AB]$ auch als Weg mit der Parametrisierung $[0, 1] \to \mathbb{C}$, $z(t) = A + t\,(B - A)$.

Ein Punktetripel $\Delta = [ABC]$ heißt ein Dreieck eines Gebietes G, wenn jeder Punkt des Dreiecks mit den Endpunkten A, B, C zu G gehört. Es sind hierbei auch entartete Dreiecke zugelassen, bei denen die Punkte auf einer Geraden liegen.

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und

- $\mathfrak{K}^2$ die von den *Dreiecken* aus G erzeugte freie abelsche Gruppe,
- $\mathfrak{K}^1$ die von den *Strecken* aus G erzeugte freie abelsche Gruppe und
- $\mathfrak{K}^0$ die von den *Punkten* aus G erzeugte freie abelsche Gruppe.

Die Elemente aus $\mathfrak{K}^i$ heißen i-dimensionale *Ketten* oder kürzer i-Ketten. Dreieck, Strecke und Punkt bezeichnet man häufig auch als 2-, 1- bzw. 0-dimensionales Simplex. Spezielle 1-Ketten sind die Streckenzüge.

Wir definieren *Randabbildungen*

$$\partial : \mathfrak{K}^2 \to \mathfrak{K}^1\,, \qquad \partial\left(\sum n_i \Delta_i\right) = \sum n_i \partial\Delta_i$$

mit

$$\partial\Delta = \partial[ABC] = [BC] - [AC] + [AB]$$

und

$$\partial : \mathfrak{K}^1 \to \mathfrak{K}^0\,, \qquad \partial\left(\sum n_i [A_i B_i]\right) = \sum n_i (B_i - A_i)\,.$$

DEFINITION. Eine 1-Kette K^1 heißt ein *Zyklus*, wenn $\partial K^1 = 0$ ist. Eine 1-Kette K^1 heißt ein *Rand*, wenn eine 2-Kette K^2 mit $\partial K^2 = K^1$ existiert.

Es sei $K^1 = [AB] + [BC] + \cdots + [DE]$ ein Streckenzug. Dann ist

$$\partial K^1 = (B - A) + (C - B) + \cdots + (E - D) = E - A\,.$$

Also ist ein Streckenzug genau dann ein Zyklus, wenn Anfangs- und Endpunkt gleich sind.

Der Rand eines Dreiecks $\Delta = [ABC]$ ist

$$\partial[ABC] = [BC] - [AC] + [AB]\,.$$

Nochmalige Randbildung ergibt

$$\partial\partial[ABC] = (C - B) - (C - A) + (B - A) = 0\,.$$

Da 2-Ketten Linearkombinationen von Dreiecken sind, folgt

SATZ 5.2. *Der Rand einer 2-Kette ist ein Zyklus.*

Es sei $K^1 = \sum_i n_i[A_iB_i]$ eine 1-Kette. Die Gesamtheit der Punkte der in K^1 auftretenden Strecken bilden den *Träger* von K^1, geschrieben

$$|K^1| = \bigcup_i [A_iB_i]\,,$$

wobei nur die Indizes berücksichtigt werden, für die $n_i \neq 0$ ist. Da die Strecken auch als Wege aufgefaßt werden können, läßt sich der Begriff der Argumentvariation auf 1-Ketten übertragen.

DEFINITION. Ist $K^1 = \sum_i n_i\,[A_i\,B_i]$ eine 1-Kette, so heißt

$$V(K^1, a) = \sum_i n_i\, V([A_i\,B_i], a)$$

Argumentvariation von K^1 bezüglich $a \notin |K^1|$.

Offensichtlich ist die Argumentvariation additiv

$$V(K_1^1 + K_2^1, a) = V(K_1^1, a) + V(K_2^1, a)$$

und stetig in a.

DEFINITION. Eine 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i[A_iB_i]$ heißt *reduziert*, wenn die Koeffizienten positiv sind und je zwei in K^1 auftretende Strecken höchstens einen Randpunkt gemeinsam haben.

HILFSSATZ 5.3. *Jede 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i[A_iB_i]$ besitzt eine Darstellung*

$$K^1 = K_0^1 + \partial K^2\,,$$

wobei K_0^1 reduziert und K^2 eine 2-Kette in G ist.

BEWEIS. Dies folgt aus

$$(*)\qquad \begin{aligned} [AB]+[BA] &= \partial([ABA]+[AAA]) \\ [AB] &= [AC]+[CB]+\partial([ABC]-[BCB]-[BBB])\,, \end{aligned}$$

mit $C \in [AB]$. Die rechtsstehenden Dreiecke sind entartet und enthalten nur Punkte der Strecke $[AB]$, liegen also in G. □

Eine reduzierte 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i[A_iB_i]$ läßt sich geometrisch dadurch veranschaulichen, daß man die Punkte A_i durch einen n_i-fachen Pfeil mit B_i verbindet. Ein Zyklus K^1 mit $\partial K^1 = 0$ ist dadurch gekennzeichnet, daß in jeden Punkt gleich viele Pfeile hinein- wie hinausführen.

SATZ 5.3. *Ist K^1 ein Zyklus, so ist $V(K^1, a) \equiv 0 \bmod 2\pi$.*

BEWEIS. Ist K^1 der Rand eines Dreiecks oder ein geschlossener Streckenzug

$$K^1 = [AB]+[BC]+[CD]+\cdots+[HA]\,,$$

so ist die Argumentvariation ein Vielfaches von 2π. Die Behauptung folgt daher aus Hilfssatz 5.3, wenn man zeigt, daß ein reduzierter Zyklus eine Summe geschlossener Streckenzüge ist. Man beginnt hierzu in einem beliebigen Punkt und geht in Richtung eines hinausführenden Pfeils zum nächsten Punkt, von hier zu einem weiteren Punkt usw.. Weil es sich um einen Zyklus handelt, ist dies stets möglich. Wegen der Endlichkeit der Punkte tritt einmal der Fall ein, daß sich in der Reihe ein Punkt wiederholt. Man erhält dann hiermit einen geschlossenen Streckenzug, den man additiv abspaltet. Mit dem Rest setzt man das Verfahren fort. □

BEISPIEL. Es sei

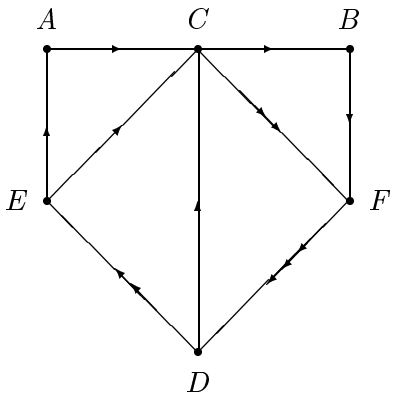
$$K^1 = [AB]+[BF]+3[FD]+2[DE]+[EA]-[CE]-[CD]+2[CF]\,,$$

wobei $C \in [AB]$ ist. Man bestätigt leicht, daß K^1 ein Zyklus ist. Um zu einem reduzierten Zyklus zu kommen, benutzt man $(*)$

$$\begin{aligned} [AB] &= [AC]+[CB]+\partial([ABC]-[BCB]-[BBB])\,, \\ [CE] &= -[EC]+\partial([CEC]+[CCC])\,, \\ [CD] &= -[DC]+\partial([CDC]+[CCC]) \end{aligned}$$

und erhält

$$K_0^1 = [AC]+[CB]+[BF]+3[FD]+2[DE]+[EA]+[EC]+[DC]+2[CF]\,.$$



Die Aufspaltung in Streckenzüge ergibt

$$\begin{aligned} K_0^1 \;=\; & [AC]+[CB]+[BF]+[FD]+[DE]+[EA] \\ & +[FD]+[DC]+[CF] \\ & +[FD]+[DE]+[EC]+[CF]\,. \end{aligned}$$

DEFINITION. Ist K^1 ein Zyklus und $a \notin |K^1|$, so heißt

$$n(K^1,a) = \frac{1}{2\pi}\, V(K^1,a) \in \mathbb{Z} \tag{5.4}$$

Umlaufzahl.
K^1 heißt *nullhomolog*, wenn

$$n(K^1,a) = 0 \tag{5.5}$$

für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt.

Die ganzzahlige Funktion $n(K^1,a)$ ist stetig in a, also konstant auf allen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus |K^1|$.

SATZ 5.4. *Es sei G ein Gebiet. Ein Zyklus $K^1 = \sum_i n_i[A_iB_i]$ ist genau dann Rand einer 2-Kette in G, wenn K^1 nullhomolog ist.*

BEWEIS. 1.) Ist K^1 Rand einer 2-Kette in G, also

$$K^1 = \partial\left(\sum_{i=1}^{r} m_i\Delta_i\right),$$

so folgt

$$n(K^1,a) = \sum_{i=1}^{r} m_i\, n(\partial\Delta_i, a) = 0$$

für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Also ist K^1 nullhomolog.

2.) Sei nun umgekehrt K^1 nullhomolog. Wegen Hilfssatz 5.3 ist

$$K^1 = K_0^1 + \partial K^2\,,$$

wobei K_0^1 reduziert und K^2 eine 2-Kette in G ist. Mit K^1 ist auch K_0^1 nullhomolog.

Sei

$$V(K_0^1, a) = n_1 V([A, B], a) + n_2 V([CD], a) + \cdots$$

Betrachte nun zwei spiegelbildliche Punkte a und a' auf der Mittelsenkrechten von $[AB]$. Für kleine $|a - a'|$ ist dann

$$V([AB], a) = -V([AB], a') \approx \pi\,.$$

Für die übrigen Strecken ist wegen der Stetigkeit für kleine $|a - a'|$:

$$V([CD], a) \approx V([CD, a')\,.$$

Das bedeutet, daß sich beim Überschreiten der Strecke $[AB]$ von a nach a' die Umlaufzahl um n_1 vergrößert.

Dies gilt auch, wenn man noch zusätzliche Strecken mit der Vielfachheit 0 hinzufügt. Man erhält hiermit eine Triangulierung des durch die Punkte aus $|K_0^1|$ bestimmten Bereiches. Zu jedem der Dreiecke Δ_i gehört eine feste Umlaufzahl m_i. Ist diese von 0 verschieden, so muß dieses Dreieck vollständig in G liegen, weil K_0^1 nullhomolog ist.

Die 1-Kette

$$K_1^1 = K_0^1 - \partial \sum_i \Delta_i$$

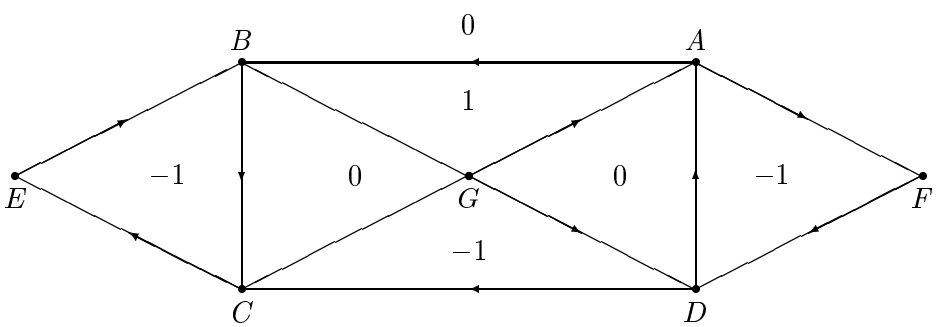
hat für alle $a \notin |K^1|$ die Umlaufzahl 0. In der Darstellung

$$K_1^1 = \sum_i n_i [A_i B_i]$$

sind dann nach der obigen Überlegung die Koeffizienten Null. Also ist K_0^1 und damit auch K^1 Rand einer 2-Kette. □

Beispiel. Gegeben sei der geschlossene Streckenzug

$$\begin{aligned} K^1 \;=\; & [A\,B] + [B\,C] + [C\,A] + [A\,F] + [F\,D] + \\ & [D\,C] + [C\,E] + [E\,B] + [B\,D] + [D\,A]\,. \end{aligned}$$



Um zu einem reduzierten Zyklus zu kommen, müssen wir noch den Punkt G als Schnittpunkt von $[BD]$ und $[CA]$ einführen. Mit den eingetragenen Umlaufzahlen ist dann

$$\begin{aligned} K_0^1 &= K^1 - \partial\,(1\cdot[BGA] - 1\cdot[EBC] - 1\cdot[CDG] - 1\cdot[ADF]) \\ &= [AB]+[BA]+[BC]+[CB]+[FD]+[DF]+[DC]+ \\ &\quad +[CD]+[EC]+[CE]+[DA]+[AD]+[GD]+[DG]+ \\ &\quad +[CA]-[CG]-[GA]+[BD]-[BG]-[GD]\,. \end{aligned}$$

Anwendung der obigen Formeln $(*)$ ergibt $K_0^1 = \partial K^2$, also

$$K^1 = \partial\big(K^2 + [BGA] - [EBC] - [CDG] - [ADF]\big)\,.$$

Dies gilt für alle Gebiete, die die vier in der Formel auftretenden Dreiecke enthalten, z.B. für $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$, wobei a und b zwei Punkte sind, die im Inneren des Dreiecks $[BCG]$ bzw. $[ADG]$ liegen.

KAPITEL 6

Der Cauchysche Integralsatz

SATZ 6.1 (Verallgemeinerte Intervallschachtelung). *Es sei $\triangle$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und*

$$\triangle_1 \supseteq \triangle_2 \supseteq \triangle_3 \supseteq \cdots$$

abgeschlossene, nicht-leere Teilmengen von $\triangle$. Dann ist

$$\bigcap_i \triangle_i \neq \emptyset\,.$$

BEWEIS. *Annahme*: $\bigcap_i \triangle_i = \emptyset$.

Die Komplementmengen $U_i = \complement\,\triangle_i$ bilden dann eine offene Überdeckung von $\triangle$, denn wäre $x \in \triangle$ in keinem der U_i, so wäre $x \in \triangle_i$ für alle i, also $\bigcap_i \triangle_i \neq \emptyset$ (Widerspruch).

Weil $\triangle$ kompakt ist, überdecken endlich viele U_i bereits $\triangle$ (Satz von Heine-Borel). Wegen

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots$$

ist dann $\triangle \subseteq U_n$, also ist

$$\triangle_n = \complement\,U_n \subseteq \complement\,\triangle \cap = \emptyset\,.$$

(Widerspruch zu $\triangle_n \neq \emptyset$). $\square$

DEFINITION. Sei im folgenden $[A\,B]$ die *Strecke* von A nach B. Setze

$$\int_{[A\,B]} f\,dz := \int_\gamma f\,dz \quad \text{mit } \gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ z(t) = A + t \cdot (B - A)$$

und für eine 1-Kette $K^1 = \sum_i n_i [A_i B_i]$

$$\int_{K^1} f(z)\,dz := \sum_i \int_{[A_i b_i]} f(z)\,dz\,.$$

Der *Rand* des Dreiecks $\Delta = [ABC]$ ist

$$\partial\Delta = [BC] - [AC] + [AB]\,.$$

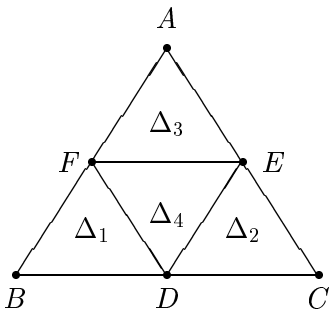
HILFSSATZ 6.1 (GOURSAT). *Ist f holomorph in einem Gebiet G, so ist*

$$\int_{\partial\triangle} f\,dz = 0 \tag{6.1}$$

für alle in G liegenden Dreiecke $\triangle = [A\,B\,C]$.

BEWEIS. Seien D, E und F die Mittelpunkte der Strecken $[B\,C]$, $[A\,C]$ und $[A\,B]$. Seien weiter

$$\triangle_1 = [F\,B\,D],\ \triangle_2 = [E\,D\,C],\ \triangle_3 = [A\,F\,E],\ \triangle_4 = [F\,D\,E]\,.$$



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\triangle} f\,dz &= \int_{[B\,C]} f\,dz - \int_{[A\,C]} f\,dz + \int_{[A\,B]} f\,dz \\
&= \int_{[B\,D]} f\,dz + \int_{[D\,C]} f\,dz - \int_{[A\,E]} f\,dz \\
&\quad - \int_{[E\,C]} f\,dz + \int_{[A\,F]} f\,dz + \int_{[F\,B]} f\,dz \\
&= \int_{\partial\triangle_1} f\,dz + \int_{\partial\triangle_2} f\,dz + \int_{\partial\triangle_3} f\,dz + \int_{\partial\triangle_4} f\,dz\,.
\end{aligned}$$

Sei $M = \left|\int_{\partial\triangle} f\,dz\right|$ sowie $\triangle^1$ dasjenige der vier Teildreiecke $\triangle_1, \ldots, \triangle_4$, für das $\left|\int_{\partial\triangle_i} f\,dz\right|$ maximal ist. Ist M_1 dieser maximale Wert, so gilt

$$M \le 4 \cdot M_1\,.$$

Man zerlegt nun $\triangle^1$ wieder in vier Teildreiecke und erhält ein $\triangle^2$, so daß

$$M_1 \le 4 \cdot M_2 \quad \text{wobei} \quad M_2 = \left|\int_{\partial\triangle^2} f\,dz\right|$$

gilt. Man setzt dieses Verfahren fort und gewinnt eine Folge ineinandergeschachtelter Dreiecke

$$\triangle \supseteq \triangle^1 \supseteq \triangle^2 \supseteq \triangle^3 \supseteq \cdots$$

Für die $M_n = \left|\int_{\partial\triangle^n} f\,dz\right|$ gilt jeweils $M_n \le 4 \cdot M_{n+1}$, also

$$M \le 4^n \cdot M_n\,.$$

Weil $\triangle$ kompakt ist, folgt $\bigcap_i \triangle^i \neq \emptyset$, d.h. es gibt ein $z_0 \in \bigcap_i \triangle^i \subseteq G$.

Sei $\varepsilon > 0$. Weil f holomorph in z_0 ist, gilt für $z \in U_\delta(z_0)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| &< \varepsilon, \text{ also}\\ \left|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)\cdot(z-z_0)\right| &< |z-z_0|\cdot\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Es sei S die Länge der längsten Seite von $\triangle$. Die längste Seite von $\triangle^n$ hat dann die Länge $S_n = \frac{1}{2^n}\cdot S$.

Wähle S so groß, daß $S_n = \frac{1}{2^n}\cdot S < \delta$ ist. Dann gilt $\Delta^n \subset U_\delta(z_0)$. Für $z \in \triangle^n$ gilt dann

$$\left|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)\,(z-z_0)\right| < |z-z_0|\,\varepsilon \le \frac{\varepsilon\cdot S}{2^n}\,.$$

Wegen $\int_{\partial\triangle^n} 1\,dz = 0$ und $\int_{\partial\triangle^n} z\,dz = 0$ gilt

$$\begin{aligned} M &= \left|\int_{\partial\triangle^n} f\,dz\right| \\ &= \Big|\int_{\partial\triangle^n} f(z) - \underbrace{f(z_0)}_{\int_{\partial\triangle^n}=0} - \underbrace{f'(z_0)\,(z-z_0)}_{\int_{\partial\triangle^n}=0}\,dz\Big| \\ &\le \frac{\varepsilon\cdot S}{2^n}\cdot\frac{3\,S}{2^n} = \frac{3\,\varepsilon\,S^2}{4^n}\,.\end{aligned}$$

Also ist $M \le 3\,\varepsilon\,S^2$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $M = 0$. □

Bemerkung. Der Beweis dieses Hilfssatzes stammt von Goursat (1858-1936). Sein Beweis (1899) kommt ohne Stetigkeitsforderung für $f'(z)$ aus. Diese und auch die Holomorphie von $f'(z)$ ist dann eine Folgerung des Cauchyschen Integralsatzes. Goursat benutzt in seinem Beweis Rechtecke. Die Idee, Dreiecke zu verwenden, stammt vom Pringsheim (1901).

Eine unmittelbare Folgerung ist

Korollar 6.2. *Ist f holomorph in einem Gebiet G, so ist*

$$\int_{\partial K^2} f\,dz = 0\,. \tag{6.2}$$

für alle 2-Ketten K^2 in G.

Hilfssatz 6.2. *f sei stetig in einem Gebiet G und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg in G. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Partition P_ε, so daß für alle $P \supseteq P_\varepsilon$*

$$\left|\int_\gamma f\,dz - \int_{S(P)} f\,dz\right| < \varepsilon \tag{6.3}$$

gilt, wobei $S(P)$ der γ einbeschriebene zu P gehörige Streckenzug ist .

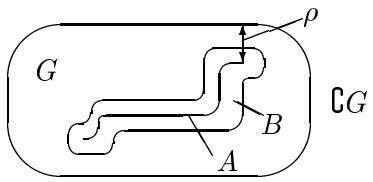
Also läßt sich jedes Integral über einen Weg γ durch ein Integral über einem Streckenzug $S(P) = [z_0\, z_1][z_1\, z_2]\cdots[z_{k-1}\, z_k]$ mit beliebiger Genauigkeit approximieren.

BEWEIS. Sei $A = |\gamma|$ die Punktmenge des Weges γ. A ist als stetiges Bild einer kompakten Menge ebenfalls kompakt. Außerdem ist $\complement G$ abgeschlossen.

Damit ist $\rho := d(A, \complement G) > 0$ (falls $\complement G = \emptyset$, setze $\rho := 1$). Die Menge

$$B = \left\{ z \mid d(z, A) \le \frac{\rho}{2} \right\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt und liegt in G.



f ist stetig, also auch gleichmäßig stetig auf B. Es gibt also zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2\lambda} > 0$ ein $\delta' > 0$ mit

$$|z - z'| < \delta' \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(z')| < \varepsilon' \tag{6.4}$$

für $z, z' \in B$. Hierbei ist λ die Bogenlänge von γ. Ferner ist γ gleichmäßig stetig auf $[a, b]$. Es gibt also zu jedem $\mu > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |z(t) - z(t')| < \mu\,. \tag{6.5}$$

Sei $\mu := \frac{1}{2}\min\{\rho, \delta'\}$.

Ist der Feinheitsgrad $\sigma(P) < \delta$, so liegt $S(P) = [z_0\, z_1] + \cdots + [z_{n-1}\, z_n]$ in B, denn für $z \in [z_{i-1}\, z_i]$ gilt

$$|z_i - z| \le |z_i - z_{i-1}| < \frac{\rho}{2}\,.$$

Weil $z_i \in A$ und $d(z, A) \le \frac{\rho}{2}$ ist, muß dann $z \in B$ sein.

Da f integrierbar ist, gibt es eine Partition P_ε, so daß für alle $P \supseteq P_\varepsilon$

$$\left| \int_\gamma f\, dz - R(f, P) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.6}$$

gilt. Man kann $\sigma(P_\varepsilon) < \delta$ annehmen, da man die Partition verfeinern kann. Betrachte

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \cdot (z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[z_{i-1}\, z_i]} f(\zeta_i)\, dz\,.$$

Also ist

$$R(f, P) - \int_{S(P)} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{[z_{i-1}\, z_i]} \big(f(\zeta_i) - f(z)\big)\, dz\,.$$

Für $z \in [z_{i-1}\, z_i]$ ist

$$|\zeta_i - z| \le |\zeta_i - z_i| + |z_i - z_{i-1}| < \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta'}{2} = \delta'\,.$$

Wegen (6.4) folgt

$$|f(\zeta_i) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\,\lambda}\,, \qquad \text{also}$$

$$\left| R(f,P) - \int_{S(P)} f(z)\,dz \right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2\,\lambda} |z_i - z_{i-1}| \le \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.7}$$

Aus (6.6) und (6.7) folgt dann mit der Dreiecksungleichung die Behauptung. □

SATZ 6.3 (Cauchyscher Integralsatz). *Ist f holomorph in einem Gebiet G, so ist*

$$\int_\gamma f\,dz = 0 \tag{6.8}$$

für jeden nullhomologen geschlossenen Weg γ in G.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Hilfssatz 6.2 (Seite 49) ist für $P \supseteq P_\varepsilon$:

$$\left| \int_\gamma f\,dz - \int_{S(P)} f\,dz \right| < \varepsilon\,.$$

Nach Hilfssatz 5.2 gilt für $P = P' \cup P_\varepsilon$:

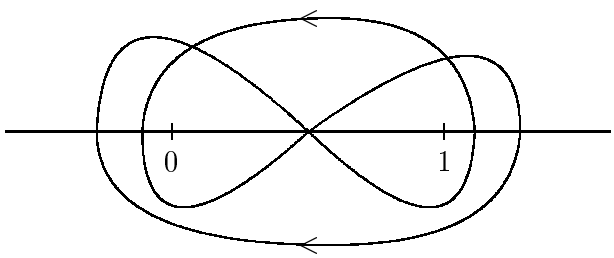
$$n(S(P), a) = n(\gamma, a) = 0 \quad \text{für alle } a \in \complement G\,.$$

Also ist $S(P)$ nullhomolog und damit nach Satz 5.4 Rand einer 2-Kette, also nach Korollar 6.2 (Seite 49)

$$\int_{S(P)} f\,dz = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_\gamma f\,dz \right| < \varepsilon\,.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $\int_\gamma f\,dz = 0$. □

BEISPIEL. $f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Sei γ der folgende Weg:



Es ist $n(\gamma, 0) = n(\gamma, 1) = 0$. Also ist γ nullhomolog. Weiter liegt γ ganz in G. Damit ist

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z\,(1-z)}\,dz = 0\,.$$

DEFINITION. Zwei Wege γ_1 und γ_2 heißen *homolog*, wenn

$$n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$$

für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt.
(„Nullhomolog" bedeutet „homolog zur Nullfunktion".)

KOROLLAR 6.4. *γ_1 und γ_2 seien geschlossene homologe Wege in G. Ist f holomorph in G, so gilt*

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz\,. \tag{6.9}$$

BEWEIS. Da G zusammenhängend ist, gibt es in G einen Weg γ_0, der den Aufpunkt von γ_1 mit dem von γ_2 verbindet. Der Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_0 - \gamma_2 - \gamma_0$ ist geschlossen, und für alle $a \in \complement G$ ist $n(\gamma, a) = 0$, also ist γ nullhomolog. Nach Satz 6.3 ist dann

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f\,dz = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz\,. \qquad \square$$

BEISPIEL. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-a}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Sei γ' der $n(\gamma, a)$-fach durchlaufene Kreis um a mit dem Radius 1:

$$\gamma' : z(t) = a + e^{2\pi i\, t}, \quad t \in [0, n(\gamma, a)]\,.$$

Wegen $n(\gamma, a) = n(\gamma', a)$, $a \in \complement G$, sind γ und γ' homolog, also

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{n(\gamma,a)} \frac{2\pi i}{e^{2\pi i t}} \cdot e^{2\pi i t}\,dt = 2\pi i\, n(\gamma, a)\,.$$

SATZ 6.5 (Cauchysche Formel). *Sei f holomorph in einem Gebiet G und γ ein nullhomologer Weg in G. Dann gilt für $a \in G \setminus |\gamma|$:*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, a) \cdot f(a)\,. \tag{6.10}$$

BEWEIS. Für festes $a \in \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$$

in $G' = G \setminus \{a\}$ definiert und holomorph. Wegen $\lim_{z\to a} g(z) = f'(a)$ gibt es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) \subset G$ mit

$$|g(z) - f'(a)| < 1 \quad \text{für } z \in U_\varepsilon(a),\ z \neq a\,.$$

Also

$$|g(z)| \leq |g(z) - f'(a)| + |f'(a)| < 1 + |f'(a)| =: M\,.$$

Es sei nun γ' ein $n(\gamma, a)$-fach durchlaufener Kreis um a mit einem Radius $r < \varepsilon$. γ und γ' sind dann bezüglich G' homolog:

$$\begin{aligned} n(\gamma, a) &= n(\gamma', a) \\ \text{und} \quad n(\gamma, b) &= n(\gamma', b) = 0 \quad \text{für } b \in \complement G \end{aligned}$$

Nach Korollar 6.4 ist also

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \oint_{\gamma'} g(z)\,dz$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma'} g(z)\,dz\right| \le M \cdot 2\pi\, r \cdot n(\gamma', a)\,.$$

Weil r beliebig klein gewählt werden kann, ist

$$\left|\int_\gamma g(z)\right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0\,.$$

Also nach obigem Beispiel

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, a)\cdot f(a)\,. \qquad \square$$

Beispiele.

(1) $\int \frac{e^z}{z-1}\,dz$, $\gamma : z(t) = 1 + e^{i2\pi\, t}$, $t \in [0,1]$. $f(z) = e^z$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. γ ist in $G = \mathbb{C}$ ein nullhomologer Weg ($\complement G = \emptyset$), $n(\gamma, 1) = 1$. Dann ist nach Satz 6.5 (Cauchysche Formel)

$$\int \frac{f(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i \cdot e^1 \cdot 1 = 2\pi i\, e\,.$$

(2)

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz\,.$$

$f(z) = \frac{1}{z+i}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Ein Weg γ in G ist genau dann nullhomolog, wenn $n(\gamma, -i) = 0$ ist ($\complement G = \{-i\}$). Dann ist nach Satz 6.5 (Cauchysche Formel)

$$\int \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \cdot n(\gamma, i) = \pi \cdot n(\gamma, i)\,.$$

Lemma 6.6. *Es sei γ ein Weg und g eine auf γ stetige Funktion. Die für $a \in \complement\,|\gamma|$ definierte Funktion*

$$f(a) = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^n}\,dz \quad \textit{mit } n = 0, 1, 2, \ldots$$

ist holomorph in $\complement|\gamma|$, und es gilt:

$$f'(a) = \int_\gamma \frac{n\cdot g(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\,.$$

Bemerkung. Man beachte, daß hier nicht vorausgesetzt ist, daß γ geschlossen ist. Die Formel bedeutet, daß man unter dem Integral differenzieren kann.

BEWEIS. Sei a fest gewählt und $\rho = d(a, |\gamma|) > 0$. Sei $h \leq \frac{\rho}{2}$, also $a + h \notin |\gamma|$. Ist $z \in |\gamma|$, so gilt $|z - a| \geq \rho$, also

$$|z - a - h| \geq |z - a| - |h| \geq \frac{\rho}{2}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \int_\gamma \frac{n \cdot g(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \\
= &\int_\gamma \left(\frac{g(z)}{h\,(z-a-h)^n} - \frac{g(z)}{h\,(z-a)^n} - \frac{n \cdot g(z)}{(z-a)^{n+1}} \right) dz \\
= &\int_\gamma \frac{(z-a)^{n+1} - (z-a-h)^n \cdot (z-a) - n \cdot h \cdot (z-a-h)^n}{h \cdot (z-a-h)^n \cdot (z-a)^{n+1}} \cdot g(z)\, dz \\
= &\int_\gamma \frac{h^2 \cdot P(z-a,h)}{h \cdot (z-a-h)^n \cdot (z-a)^{n+1}} \cdot g(z)\, dz\,,
\end{aligned}$$

wobei $P(z-a,h)$ ein Polynom in $(z-a)$ und h ist. Wegen der Stetigkeit von $P(z-a,h)$ und $g(z)$ auf der kompakten Menge $|\gamma| \times \left\{h \mid |h| \leq \frac{\rho}{2}\right\}$ gilt:

$$|P(z-a,h) \cdot g(z)| \leq M \quad \text{(Beschränktheit)}\,.$$

Also

$$\left| \int_\gamma \frac{h \cdot P(z-a,h) \cdot g(z)}{(z-a-h)^n \cdot (z-a)^{n+1}}\, dz \right| \leq h \cdot \underbrace{\frac{M}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n} \sqrt{\rho)^{n+1}} \cdot \lambda(\gamma)}_{\text{konst.}}\,,$$

wobei $\lambda(\gamma)$ die Bogenlänge von γ ist. Für $h \to 0$ konvergiert das Integral gegen Null, also ist f differenzierbar in a, und es gilt die Behauptung. □

SATZ 6.7. *Ist f holomorph in einem Gebiet G, so ist auch f' holomorph in G (und somit auch f'', f''', ...)*

BEWEIS. Sie $a \in G$, γ ein Kreis um a, der mit seinen inneren Punkten in G liegt. γ ist dann nullhomolog ($n(\gamma, a) = 0$ für $b \in \complement G$, also b außerhalb des Kreises γ).

Nach Satz 6.5 (Cauchysche Formel) ist

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,.$$

Nach Lemma 6.6 ist $f(a)$ differenzierbar und

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz\,.$$

Nochmaliges Anwenden von Lemma 6.6 liefert die Holomorphie von f' in G. □

KOROLLAR 6.8 (Cauchysche Integralformeln). *Ist γ ein nullhomologer Weg und f holomorph in G, so gilt für sämtliche $a \notin |\gamma|$ und $m = 0, 1, 2, \ldots$*

$$f^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi i \cdot n(\gamma, a)} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\, dz\,. \tag{6.11}$$

BEISPIEL. $\gamma : z(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n(\gamma, 0) = 1$. Mit Korollar 6.8 ist dann

$$\int_\gamma \frac{\sin^2 z}{z^3}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \cdot 2 = 2\pi i\,,$$

denn mit $f(z) = \sin^2 z$ ist $f''(z) = 2\,(\cos^2 z - \sin^2 z)$ und somit $f''(0) = 2$.

Einfach zusammenhängende Gebiete

DEFINITION. Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg γ in G nullhomolog ist, das heißt, wenn $n(\gamma, a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt.

BEISPIELE. 1.) $G = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist nicht einfach zusammenhängend, da ein Kreis um einen der Punkte a_i eine Umlaufzahl 1 besitzt.

2.) Wir nennen einen Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus G$ mit ∞ *verbindbar*, wenn es in $\mathbb{C} \setminus G$ Wege gibt, die a mit einem Punkt von beliebig großem Absolutbetrag in $\mathbb{C} \setminus G$ verbindet. Dann ist G einfach zusammenhängend, wenn alle Punkte $a \notin G$ mit ∞ verbindbar sind. Anschaulich sagt man, daß dann G keine Löcher besitzt. Hierzu gehören konvexe, aber auch sternförmige Gebiete, z.B.

$$G = \{z = x + iy \mid (-1 \le x \le 1) \ \vee \ (-1 \le y \le 1)\}\,.$$

Der allgemeine Cauchysche Integralsatz (Satz 6.3) geht dann über in den Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete.

SATZ 6.9 (CAUCHY). *Ist f holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und γ ein geschlossener Weg in G, so gilt*

$$\int_\gamma f\, dz = 0\,.$$

DEFINITION. Ein Integral über eine Funktion f heißt *wegunabhängig* in G, wenn

$$\int_\gamma f\, dz = 0 \tag{6.12}$$

für alle geschlossenen Wege γ gilt.

Eine gleichwertige Definition ist: Für alle $z_0, z_1 \in G$ ist $\int_\gamma f\, dz$ unabhängig von dem z_0 mit z_1 verbindenden Weg γ. Man schreibt dann

$$\int_\gamma f\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f\, dz\,,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} f\, dz + \int_{z_1}^{z_2} f\, dz &= \int_{z_0}^{z_2} f\, dz\,, \\ \int_{z_0}^{z_1} f\, dz &= -\int_{z_1}^{z_0} f\, dz\,. \end{aligned}$$

Mit dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 6.3) hat man:
Ist G einfach zusammenhängend, so sind Integrale über holomorphe Funktionen wegunabhängig.

HILFSSATZ 6.3. *Ist das Integral über eine stetige Funktion wegunabhängig, so ist die Funktion*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \quad \textit{mit } z \in G$$

holomorph in G, und es gilt

$$F'(z) = f(z)\,.$$

BEWEIS. Wegen der Wegunabhängigkeit und des Zusammenhangs von G ist das Integral wohldefiniert für alle $z \in G$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{h} f(z) \int_z^{z+h} d\zeta \\ &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta\,. \end{aligned}$$

Weil f stetig ist, gilt $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ auf der Strecke $[z\, z+h]$ für genügend kleines h. Es folgt

$$\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon\,. \qquad \square$$

SATZ 6.10 (Satz von MORERA). *Ist in G das Integral über eine stetige Funktion wegunabhängig, so ist f holomorph.*

BEWEIS. Nach Hilfssatz 6.3 ist f die Ableitung einer holomorphen Funktion F. Nach Satz 6.7 ist dann auch f holomorph. $\square$

BEMERKUNG. Der Satz von MORERA (1886) stellt die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes dar.

DEFINITION. Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f(z)$ in G, wenn F holomorph ist und

$$F'(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in G$$

gilt.

EIGENSCHAFTEN:

(A) Besitzt $f(z)$ eine Stammfunktion, so ist f holomorph (Satz 6.7).

(B) Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorphe Funktion f besitzt eine Stammfunktion, nämlich

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Denn: Nach dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 6.3) sind die Integrale über f wegunabhängig. Nach Hilfssatz 6.3 ist dann $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ Stammfunktion von f.

(C) Die Stammfunktionen von f sind bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Denn:

$$\begin{aligned} & F_1'(z) = F_2'(z) = f(z) \\ \iff \quad & (F_1(z) - F_2(z))' = 0 \\ \iff \quad & F_1(z) - F_2(z) = c = \text{konstant} \end{aligned}$$

nach Satz 3.8 (Seite 24).

SATZ 6.11. *Besitzt f eine Stammfunktion F, so sind die Integrale über f wegunabhängig und es gilt für einen beliebigen Weg γ mit dem Anfangspunkt z_0 und dem Endpunkt z_1*

$$\int_{\gamma} f\, dz = F(z_1) - F(z_0)\,. \tag{6.13}$$

BEWEIS. 1.) Sei G zunächst einfach zusammenhängend. Nach Eigenschaft (A) (s.o.) ist f holomorph, also sind die Integrale über f wegunabhängig, also ist nach Eigenschaft (B)

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

eine Stammfunktion. Mit Eigenschaft (C) hat man weiter für eine beliebige Stammfunktion F

$$\phi(z) = F(z) + c\,.$$

Für $z = z_0$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} & 0 = F(z_0) + c \quad \Longrightarrow \quad c = -F(z_0) \\ \Longrightarrow \quad & \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0)\,. \end{aligned}$$

2.) Sei nun G beliebig und $\rho = d(|\gamma|, \complement G)$. Wähle eine Partition P, so daß

$$|z_i - z_{i-1}| < \rho$$

gilt und der Weg γ_i zwischen z_{i-1} und z_i in einem Kreis um z_{i-1} mit einem Radius $r < \rho$, also in einem einfach zusammenhängenden Gebiet liegt. Mit der gleichen Argumentation wie im ersten Beweisteil folgt dann

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \;=\; \sum_{i=1}^{n} (F(z_i) - F(z_{i-1})) = F(z_n) - F(z_0)\,,$$

wobei z_n der Endpunkt von γ ist. □

BEISPIELE.

(1) $f(z) = z^2 \cdot \cos^2 z$ ist holomorph in $G = \mathbb{C}$, und

$$F(z) = 2 \cdot z \cdot \cos z + (z^2 - 2) \cdot \sin z$$

ist eine Stammfunktion.

(2) $f(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ist holomorph in $G = \mathbb{C}$, und

$$F(z) = \frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1}$$

ist eine Stammfunktion.

(3) $f(z) = z^n$, $n = -2, -3, -4, \ldots$, ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und

$$F(z) = \frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1}$$

eine Stammfunktion. Es gibt also eine Stammfunktion, obgleich G nicht einfach zusammenhängend ist.

(4) $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es gibt *keine* Stammfunktion, denn die Integrale über f sind nicht wegunabhängig.

Der Logarithmus

Wir definieren den Logarithmus als eine Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$. Da der ganze Holomorphiebereich von $f(z)$ nicht einfach zusammenhängend ist, wählen wir das einfach zusammenhängende Gebiet

$$G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$$

und setzen

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z}. \tag{6.14}$$

Dann gilt

(1) log ist holomorph in G und

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

(2) Für positive reelle Zahlen stimmt $\log z$ mit dem natürlichen Logarithmus ln überein.

(3) Sei $\gamma_1 : z(t) = 1 + t\,(|\zeta| - 1)$, $t \in [0, 1]$ das Geradenstück zwischen 1 und $|\zeta|$ und $\gamma_2 : z(t) = |\zeta| \cdot e^{i\,t}$, $t \in [0, \arg \zeta]$ der Kreisbogen von $|\zeta|$ bis ζ. Dann ist

$$\log \zeta = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \ln |\zeta| + i \cdot \arg \zeta\,.$$

Zum Beispiel ist $\log i = \ln 1 + i\,\frac{\pi}{2} = i\,\frac{\pi}{2}$.

(4) $e^{\log z} = e^{\log |z|} \cdot (\cos(\arg z) + i\,\sin(\arg z)) = z$.

(5) $\log(z_1 \cdot z_2) \equiv \log z_1 + \log z_2 \bmod 2\pi i$.

KAPITEL 7

Unendliche Reihen

Es sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots$$

eine unendliche Reihe komplexer Funktionen, und

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

seien die zugehörigen Teilsummen.

DEFINITION. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *konvergiert punktweise* auf einer Teilmenge $E \subseteq \mathbb{C}$ gegen $f(z)$, wenn gilt:

$$\forall\, z \in E \,\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N \in \mathbb{N} \,\forall\, n > N : |f(z) - s_n(z)| < \varepsilon\,. \tag{7.1}$$

Hierbei ist N von z und ε abhängig.

DEFINITION. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *konvergiert gleichmäßig* auf einer Teilmenge $E \subseteq \mathbb{C}$ gegen $f(z)$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N \in \mathbb{N} \,\forall\, n > N \,\forall\, z \in E : |f(z) - s_n(z)| < \varepsilon\,. \tag{7.2}$$

In diesem Fall kann N unabhängig von $z \in E$ gewählt werden.

In beiden Fällen schreiben wir

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\,.$$

Konvergiert eine Reihe gleichmäßig auf E, und ist $F \subseteq E$, so konvergiert sie auch auf F- Wird E von endlich vielen Mengen $E_1, \ldots, E_n$ überdeckt, also

$$E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_n\,,$$

und konvergiert die Reihe auf jeder der Mengen E_i gleichmäßig, so konvergiert sie auch auf E gleichmäßig.

Ist die Grenzfunktion $f(z)$ nicht bekannt, so läßt sich die Konvergenz mit Hilfe des *Cauchy-Kriteriums* zeigen:
$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ konvergiert gleichmäßig, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m > N\, \forall z \in E : \left| \sum_{n}^{m} f_k(z) \right| < \varepsilon\,.$$

Eine Folgerung ist

SATZ 7.1 (M-Test von Weierstraß). *Ist*

$$|f_k(z)| \le M \cdot a_k$$

für alle $z \in E$ und $\sum a_k$ konvergent, so konvergiert $\sum f_k(z)$ gleichmäßig auf E.

BEWEIS. Wegen

$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(z) \right| \le \sum_{k=n}^{m} |f(z)| \le M \cdot \sum_{k=n}^{m} a_k$$

und der Konvergenz von $\sum a_k$ wird die rechte Seite für große n und m beliebig klein. □

BEISPIEL. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1 - z^k}$$

konvergiert gleichmäßig für alle z mit $|z| \le r < 1$. Es ist nämlich

$$\left| \frac{z^k}{1 - z^k} \right| \le \left| \frac{r^k}{1 - z^k} \right| \le \frac{r^k}{1 - r}\,.$$

Wähle $M = \frac{1}{1-r}$. Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ ist für $r < 1$ konvergent, also konvergiert die obige Reihe gleichmäßig nach dem M-Test.

Wie im Reellen zeigt man

SATZ 7.2. *Konvergiert $f(z) = \sum f_k(z)$ gleichmäßig auf E, und sind die Funktionen $f_k(z)$ stetig, so ist auch $f(z)$ stetig.*

SATZ 7.3. *Es sei γ ein Weg, und die f_k seien stetig auf γ. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$* gleichmäßig *gegen $f(z)$ auf γ, so ist*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma f_k(z)\, dz\,, \tag{7.3}$$

das heißt bei gleichmäßiger *Konvergenz kann man eine Reihe gliedweise integrieren.*

BEWEIS. Nach Satz 7.2 ist auch f stetig und damit integrierbar. Für die Teilsummen gilt

$$\left| \int_\gamma f\, dz - \int_\gamma s_n\, dz \right| = \left| \int_\gamma (f - s_n)\, dz \right| \le \lambda(\gamma) \cdot \sup_{z \in |\gamma|} \{|f - s_n|\}\,,$$

wobei $\lambda(\gamma)$ die Bogenlänge von γ ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \lim_{n\to\infty}\int_\gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right) dz \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)\,dz \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_\gamma f_k(z)\,dz\,. \qquad \square\end{aligned}$$

DEFINITION.

(1) Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ konvergiert *lokal gleichmäßig* in einem Gebiet G gegen $f(z)$, wenn zu jedem $a \in G$ eine Umgebung $U_\varepsilon(a) \subseteq G$ existiert, auf der $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

(2) Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ konvergiert *kompakt* in einem Gebiet G gegen $f(z)$, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge $A \subseteq G$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

Die Forderungen zur lokal gleichmäßige Konvergenz und die kompakte Konvergenz sind schwächer als die Forderungen zur gleichmäßigen Konvergenz.

BEISPIEL. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert lokal gleichmäßig auf

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

gegen die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z}:$$

Es ist

$$f(z) - s_n(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}}{1-z}\,.$$

Sei $a \in G$, dann ist $|a| < 1$. Setzt man $\varepsilon := \frac{1}{2}(1-|a|) > 0$, so gilt für $z \in U_\varepsilon(a)$

$$|1-z| \geq 1 - |a| - |a-z| \geq \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |z| \leq 1-\varepsilon\,.$$

Damit ist

$$\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{(1-\varepsilon)^{n+1}}{\varepsilon} \quad \text{für alle } z \in U_\varepsilon(a)\,.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert $(1-\varepsilon)^{n+1}$ gegen Null, und es folgt die gleichmäßige Konvergenz auf der Umgebung $U_\varepsilon(a)$.

$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert *nicht* gleichmäßig gegen $f(z) = \frac{1}{1-z}$ in G, denn

$$|f(z) - s_n(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right|$$

wird für festes n beliebig groß, wenn z gegen 1 konvergiert.

LEMMA 7.4. *Lokal gleichmäßige Konvergenz ist äquivalent zur kompakten Konvergenz.*

BEWEIS. 1.) Sei $\sum f(z)$ lokal gleichmäßig konvergent auf G und K eine kompakte Teilmenge von G.

Zu jedem Punkt $a \in K$ existiert eine offene Umgebung $U(a)$, auf der $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig konvergiert. Weil A kompakt ist, wird K bereits durch endlich viele Umgebungen, etwa

$$U(a_1), U(a_2), \ldots, U(a_n)$$

überdeckt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein N_i mit

$$|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_i \text{ und } z \in U(a_i)\,.$$

Ist $N = \max\{N_i\}$, so gilt:

$$|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und } z \in K\,.$$

Damit konvergiert $\sum f(z)$ kompakt.

2.) Konvergiere $\sum f(z)$ nun kompakt auf G. Jede abgeschlossene Kreisscheibe K_r ist kompakt, also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig auf jeder ε-Umgebung in K_r. □

Damit ergibt sich folgende Situation

gleichmäßige Konvergenz

⇓

lokal glm. Konvergenz ⟺ kompakte Konvergenz

⇓

punktweise Konvergenz

SATZ 7.5 (Satz von WEIERSTRASS). *Seien $f_k(z)$ holomorph in G und $\sum f_k(z)$ kompakt konvergent gegen $f(z)$. Dann ist auch $f(z)$ holomorph in G, und es ist*

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z) \quad \textit{für alle } z \in G. \tag{7.4}$$

Die differenzierte Reihe ist ebenfalls kompakt konvergent.

BEMERKUNG. Im entsprechenden Satz für reelle Funktionen muß man die gleichmäßige Konvergenz der gliedweise differenzierten Reihe fordern.

BEWEIS. 1.) Sei $z_0 \in G$ und $U_\rho(z_0) \subseteq G$. Weil $U_\rho(z_0)$ einfach zusammenhängend ist und die Funktionen f_k holomorph sind, gilt für jeden in $U_\rho(z_0)$ liegenden geschlossenen Weg

$$\int_\gamma f_k(z)\,dz = 0\,. \qquad (\text{ Satz 6.3})$$

Auf der kompakten Menge γ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig gegen $f(z)$. Nach Satz 7.3) ist also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_\gamma f_k(z)\,dz}_{0} = 0\,.$$

Nach dem Satz von Morera (Satz 6.10, Seite 56) ist $f(z)$ dann holomorph in $U_\rho(z_0)$, damit in ganz G.

2.) Sei $z_0 \in G$ und $U_\rho(z_0) \subseteq G$. Wähle als γ einen Kreis um z_0 mit dem Radius $r < \rho$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der kompakten Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ ein N mit

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \right| < \frac{\varepsilon \cdot r}{4} \quad \text{für } n \geq N \text{ und alle } z \in |\gamma|\,.$$

Für $a \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \left| f'(a) - \sum_{k=1}^{n} f_k'(a) \right| &\overset{\text{Kor. 6.8}}{=} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)}{(z-a)^2}\,dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon \cdot r}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \cdot \underbrace{2\pi r}_{\lambda} \\ &= \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f'(a) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(a)$$

und zwar gleichmäßig für alle $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$, also lokal gleichmäßig. □

DEFINITION. Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n\,, \qquad a_n \in \mathbb{C}$$

heißt eine *Potenzreihe* zum *Entwicklungspunkt* z_0.

Bei der Untersuchung von Potenzreihen stellt man sich unter anderem die Frage, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Potenzreihe konvergiert. Zunächst gilt folgender

SATZ 7.6. *Für eine Potenzreihe $\sum a_n (z - z_0)^n$ gilt:*

(1) *Konvergiert die Reihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, so konvergiert sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.*
(2) *Divergiert die Reihe für ein $z_2 \in \mathbb{C}$, so divergiert sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.*

BEWEIS. 1.) Es seien ein Konvergenzpunkt $z_1 \neq z_0$ und ein beliebiger Punkt z mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ gegeben.

(a) Aus der Konvergenz von $\sum a_n (z_1 - z_0)^n$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n (z_1 - z_0) = 0$. Es gibt also ein $M > 0$ mit

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(b) Aus

$$|a_n\,(z-z_0)| = |a_n\,(z_1-z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$$

folgt wegen $\left|\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$ mit dem Vergleichskriterium (geometrische Reihe) sofort die Konvergenz von $\sum a_n\,(z-z_0)$.

2.) Seien nun ein Divergenzpunkt z_2 und ein z mit $|z-z_0| > |z_2-z_0|$ gegeben. Würde die Reihe an z konvergieren, so wäre nach 1.) auch z_2 ein Konvergenzpunkt, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

SATZ 7.7 (HADAMARD). *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe und*

$$s := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Definiere

$$R = \begin{cases} 0 & \textit{falls } s = \infty \\ \dfrac{1}{s} & \textit{falls } 0 < s < \infty \\ \infty & \textit{falls } s = 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

(1) *Die Potenzreihe konvergiert kompakt in* $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$,
(2) *Die Potenzreihe divergiert in* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| > R\}$.

R *heißt* Konvergenzradius *der Potenzreihe, der Kreis* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = R\}$ *ihr Konvergenzkreis.*

BEMERKUNG. lim sup ist der größte Häufungspunkt einer reellen Folge $\{b_k\}$.

$$s = \lim_{n\to\infty} \sup\bigl\{b_k \mid k \geq n\bigr\}\,.$$

Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es nur endlich viele Folgenglieder mit $b_n \geq s+\varepsilon$.

BEWEIS.

(1) Der Fall $R = 0$ ist trivial. Sei also $R > 0$. Ist K eine kompakte Teilmenge von $G = \{z \mid |z-z_0| < R\}$, so gibt es ein r mit $0 < r < R$ mit

$$K \subseteq A := \{z \mid |z-z_0| \leq r\}\,.$$

Daß ein solches r existiert, ist klar für $R = \infty$, da K als kompakte Menge beschränkt ist.
Falls $R < \infty$ ist, wählt man $r := R-d$, wobei d der Abstand von K und dem Kreis $\{z \mid |z-z_0| = R\}$ ist.
Sei $z \in A$, also

$$s \cdot |z-z_0| \leq s \cdot r < 1 \quad (r < R,\, s = \tfrac{1}{R})\,.$$

Zu $\varepsilon := \frac{1-s\cdot r}{2r} > 0$ gibt es dann ein n_0 mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq s+\varepsilon = \frac{1+sr}{2r}$$

für alle $n \geq n_0$. Wegen $sr < 1$ ist $q := \frac{1+s\cdot r}{2} < 1$. Für $n \geq n_0$ gilt dann

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| \leq \frac{1 + s \cdot r}{2\, r} \cdot r = q\,.$$

Also ist

$$|a_n| \cdot |z - z_0|^n \leq q^n \quad \text{mit } q < 1\,.$$

Nach dem M-Test von Weierstraß (siehe Seite 60) konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$, und damit auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$, gleichmäßig auf A, also auch auf K. Damit folgt die kompakte Konvergenz.

(2) Sei $|z - z_0| > R$, also $s \cdot |z - z_0| > 1$. Weil s Häufungspunkt von $\sqrt[n]{|a_n|}$ ist, gibt es zu jedem N ein $n \geq N$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| > 1\,, \quad \text{also} \quad |a_n\,(z - z_0)^n| > 1\,.$$

Daraus folgt die Divergenz der Reihe. □

BEMERKUNG. Für die Punkte auf dem Konvergenzkreis $\{z \mid z - z_0| = R\}$ hat man keine Aussage über die Konvergenz. Dies zeigen folgende

BEISPIELE.

(1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Es ist $R = 1$, die Reihe divergiert für alle Punkte des Konvergenzkreises.

(2) $f(z) = \sum \frac{z^n}{n}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $R = 1$, die Reihe konvergiert für $|z| < 1$ und für $z = -1$, divergiert aber für $z = 1$.

(3) $f(z) = \sum \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$. Die Reihe ist gleichmäßig konvergent für alle z mit $|z| \leq 1$.(M-Test mit der Vergleichsreihe $\sum \frac{1}{n^2}$.)

SATZ 7.8. *Sei R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$. Dann ist die Funktion*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

holomorph in $G = \{z \mid |z - z_0| < R\}$, und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}\,.$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 7.5 von Weierstraß mit der kompakten Konvergenz der Reihe in $G = \{z \mid |z - z_0| < R\}$.

BEMERKUNG.

(1) Wegen

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\limsup \sqrt[n]{n}}_{1} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n\,|a_n|}$$

hat die differenzierte Reihe den gleichen Konvergenzradius.

(2) Es ist

$$\begin{aligned} f'(z) &= a_1 + 2\,a_2\,(z-z_0) + 3\,a_3\,(z-z_0)^2 + \cdots \\ f''(z) &= 2\,a_2 + 6\,a_3\,(z-z_0) + 12\,a_4\,(z-z_0)^2 + \cdots \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= n!\;a_n + (n+1)!\;a_{n+1}\,(z-z_0) + \cdots \end{aligned}$$

Also ist $f^{(n)}(z_0) = n!\;a_n$, bzw.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

Anwendung:
Man kann Potenzreihen dazu benutzen, holomorphe Funktionen zu definieren.

(1) Setze

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Dann ist

(a) $R = \infty$, also ist $\exp z$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{R}$ ist auch $\exp z$ reell und stimmt mit der reellen Exponentialfunktion überein.

(b) Nach Satz 7.8 ist die Ableitung

$$(\exp z)' = \exp z\,.$$

(c) Es ist $\exp z = e^z$ mit

$$e^z = e^x\,(\cos y + i \sin y) \qquad (z = x + iy)$$

(Siehe Gleichung (3.16), Seite 22 .)

Beweis. Betrachte $g(z) = e^{-z} \cdot \exp z$. Dann ist

$$g'(z) = -e^{-z} \cdot \exp z + e^{-z} \cdot \exp z = 0\,.$$

Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend muß dann $g(z) =$ konstant ein, also $\exp z = c \cdot e^z$. Wegen $\exp 0 = 1 = e^0$ ist $c = 1$ und damit

$$\exp z = e^z\,. \qquad \checkmark$$

(2) Definiere analog:

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

cos und sin sind für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert, und es gilt die *Eulersche Formel*

$$e^{iz} = \cos z + i\,\sin z\,. \tag{7.5}$$

SATZ 7.9 (Taylor-Entwicklung). *Es sei f holomorph in einem Gebiet G, $z_0 \in G$ und $K_r := \{z \mid |z - z_0| < r\}$ eine offene Kreisscheibe, die ganz in G liegt. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in K_r\,. \tag{7.6}$$

f läßt sich also um z_0 in eine Taylorreihe entwickeln.

BEWEIS. Sei $z \in K_r$ fest gewählt, $|z - z_0| = r_1 < r$. Sei γ ein Kreis um z_0 mit

$$\zeta = z_0 + \rho \cdot e^{it}\,, \qquad t \in [0, 2\pi] \text{ und } r_1 < \rho < r.$$

Wegen $K_r \subseteq G$ muß auch $|\gamma| \subseteq G$ gelten. Für $\zeta \in |\gamma|$ ist

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{r_1}{\rho} < 1\,.$$

Unter Anwendung der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} \\
&= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\
&= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta) \quad \text{mit } f_n(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z}\right)^n.
\end{aligned}$$

Weil f stetig auf γ ist, gilt

$$|f(\zeta)| < A \quad \text{für } \zeta \in \gamma\,,$$

also mit der vorigen Gleichung

$$|f_n(\zeta)| \le \frac{A}{\rho} \cdot \Big(\underbrace{\frac{r_1}{\rho}}_{<1}\Big)^n.$$

Da $\sum \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^n$ konvergent ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum f_n(\zeta)$ auf $|\gamma|$ mit dem Weierstraßschen M-Test, siehe Seite 60. Nach Satz 7.3 (Seite 60) kann man dann gliedweise integrieren:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right) \cdot (z - z_0)^n\,.$$

Nach den Cauchyschen Integralformeln (6.11) ist dann

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} \cdot (z - z_0)^n\,. \qquad \square$$

BEISPIELE.

(1) Sei $f(z) = e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$. f ist holomorph in $\mathbb{C}$. Wegen $(e^z)' = e^z$ ist

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

und damit

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \ .$$

(2) Sei $f(z) = \frac{1}{1+z}$. f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Dann ist

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(1+z_0)^{n+1}}, \quad \text{also}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n \, .$$

Die Konvergenz gilt für $z \in K_r$ mit $K_r \in G = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, das heißt für $-1 \notin K_r$. Wähle r maximal, also $r = |(-1) - z_0| = |1 + z_0|$. Die Potenzreihe konvergiert dann für $|z - z_0| < r = |1 + z_0|$, für $|z - z_0| > r$ ist sie divergent. Dagegen ist $f(z) = \frac{1}{1+z}$ für alle $z \neq -1$ definiert.

(3) Sei $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $g(z)$ und $h(z)$ rational und gekürzt. Seien weiter $\beta_1, \ldots, \beta_k$ die Nullstellen des Nennerpolynoms $h(z)$. Dann ist $f(z)$ holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$.
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ die Taylorreihe von f in z_0. Diese Reihe konvergiert dann im größten Kreis K_r, der $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ *nicht* enthält. Der Konvergenzradius ist

$$R = \min_{i=1\ldots k} |z_0 - \beta_i| \ .$$

Er läßt sich hier ohne Hadamardsche Formel bestimmen.

BEMERKUNG. WEIERSTRASS nennt eine Funktion *analytisch*, wenn sie lokal durch eine Potenzreihe darstellbar ist. Nach Satz 7.8 und Satz 7.9 sind die Begriffe „holomorph“ und „analytisch“ äquivalent. (WEIERSTRASS).

DEFINITION. Ein Punkt $a \in G$ heißt *Häufungspunkt* einer Menge E, wenn in jeder Umgebung von a ein von a verschiedener Punkt aus E liegt.

Es gibt dann stets eine Folge (a_n) in $E \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert.

SATZ 7.10 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Stimmen die durch zwei Potenzreihen definierten Funktionen*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z - z_0)^n$$

auf einer Menge A, die einen Häufungspunkt z_0 besitzt, überein, so haben sie gleiche Koeffizienten.

BEWEIS. Sei U eine Umgebung von z_0, in der f und g durch ihre Potenzreihen dargestellt werden. f und g sind differenzierbar und nach Satz 7.8 stetige Funktionen in U, also

$$a_0 = f(z_0) = \lim_{z \to z_0, z \in A} f(z) = \lim_{z \to z_0, z \in A} g(z) = g(z_0) = b_0 \,.$$

Es sei bereits $a_k = b_k$ für $k = 0, 1, \ldots, m-1$ gezeigt. Definiere

$$\begin{aligned} f_m(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^{n-m} = a_m + a_{m+1} \cdot (z - z_0) + \cdots \\ g_m(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} b_n \cdot (z - z_0)^{n-m} = b_m + b_{m+1} \cdot (z - z_0) + \cdots \\ p(z) &= \sum_{n=0}^{m-1} a_n \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{m-1} b_n \cdot (z - z_0)^n \,. \end{aligned}$$

Dann ist für $z \in A$

$$\begin{aligned} f(z) &= p(z) + f_m(z) \cdot (z - z_0)^m \,. \\ g(z) &= p(z) + g_m(z) \cdot (z - z_0)^m \,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$f_m(z) = g_m(z) \quad \text{für} \quad z \in U \cap A,\ z \neq z_0 \ .$$

Die Potenzreihen f_m und g_m haben den gleichen Konvergenzradius wie f und g und sind daher stetig in U. Es folgt also

$$a_m = f_m(z_0) = \lim_{z \to z_0, z \in A} f_m(z) = \lim_{z \to z_0, z \in A} g_m(z) = g_m(z_0) = b_m \,.$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich so die Behauptung. □

Rechnen mit Potenzreihen

(1) Die Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n$ seien konvergent für $|z| < \rho$. Dann gilt ebenfalls für $|z| < \rho$:

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot z^n \,. \tag{7.7}$$

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \quad \text{mit} \quad c_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \,. \tag{7.8}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{f^n(0) + g^{(n)}(0)}{n!} = a_n + b_n \\ \frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) \cdot g^{(n-k)}(0)}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \,. \qquad \checkmark$$

(2) Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n$ und $g(z) \neq 0$ für $|z| < \rho$. Dann ist $\frac{f(z)}{g(z)}$ holomorph und in eine Potenzreihe entwickelbar, die für $|z| < \rho$ konvergiert:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \,. \tag{7.9}$$

Die c_n lassen sich dabei durch Koeffizientenvergleich aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \right)$$

bestimmen, also

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \cdot c_0 \\ a_1 &= b_1 \cdot c_0 + b_0 \cdot c_1 \\ a_2 &= b_2 \cdot c_0 + b_1 \cdot c_1 + b_0 \cdot c_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiel. Berechne die Taylorreihe von

$$f(z) = \frac{(1+z)\,\sin z + 2\,e^z}{1 + \sin z}$$

bis zu Gliedern dritter Ordnung. Es ist

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{6} + \cdots \\ (1+z)\,\sin z &= z + z^2 - \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{6} + \cdots \\ (1+z)\,\sin z + 2\,e^z &= 2 + 3\,z + 2\,z^2 + \frac{z^3}{6} + \cdots \\ 1 + \sin z &= 1 + z - \frac{z^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

Ansatz: $f(z) = c_0 + c_1\,z + c_2\,z^2 + c_3\,z^3$. Damit folgt

$$\begin{array}{rcll} 2 &=& c_0 & \Longrightarrow \quad c_0 = 2 \\ 3 &=& c_0 + c_1 & \Longrightarrow \quad c_1 = -1 \\ 2 &=& c_0 + c_1 + c_2 & \Longrightarrow \quad c_2 = 1 \\ \frac{1}{6} &=& -\frac{1}{6}\,c_0 + c_2 + c_3 & \Longrightarrow \quad c_3 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Damit folgt

$$f(z) = 2 - z + z^2 - \frac{1}{2}\,z^3 + \cdots \,.$$

SATZ 7.11 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). *Stimmen zwei in einem Gebiet G holomorphe Funktionen f und g auf einer Teilmenge $A \subseteq G$ überein, die einen Häufungspunkt $z_0 \in G$ besitzt, so sind f und g identisch, d.h. es ist*

$$f(z) = g(z) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

BEWEIS. Sei $z \in G$. Verbinde z_0 und z durch einen Weg γ. Die kompakte Menge $|\gamma|$ hat einen Abstand $\rho > 0$ von $\complement G$ (ist $G = \mathbb{C}$, so setze $\rho := 1$). Es sei $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z$ eine Punktfolge auf γ mit $|z_i - z_{i-1}| < \rho$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Jede Kreisscheibe $U_\rho(z_i) := \{z \mid |z - z_i| < \rho\}$ liegt dann in G und enthält neben z_i auch den Punkt z_{i+1}.

Entwickle f und g in z_0. Dann konvergieren nach Satz 7.9 die Reihen in $U_\rho(z_0)$ und stellen f und g dar. Da z_0 Häufungspunkt von A ist, gilt nach Satz 7.10

$$f = g \quad \text{auf } U_\rho(z_0)\,.$$

z_1 ist Häufungspunkt von Punkten aus $U_\rho(z_0)$, also stimmen f und g nach Satz 7.10 und Satz 7.9 auf $U_\rho(z_1)$ überein.

Wiederholt man diese Überlegung für $z_2, z_3, \ldots$, so ergibt sich nach n Schritten

$$f(z) = g(z)$$

Dies gilt für alle $z \in G$, also sind f und g gleich. □

KOROLLAR 7.12. *Die Nullstellen einer holomorphen Funktion $f \not\equiv 0$ sind isoliert, das heißt zu jeder Nullstelle z_0 gibt es eine Umgebung $U(z_0)$, in der außer z_0 keine weitere Nullstelle liegt.*

BEWEIS. Wäre z_0 nicht isoliert, so wäre z_0 Häufungspunkt einer Menge A von Nullstellen. Nach Satz 7.11 müßte f mit der Nullfunktion übereinstimmen (Widerspruch zu $f \not\equiv 0$). □

BEISPIEL. Die Funktion $f(z) = z^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ist holomorph auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. f hat die Nullstellen $\frac{1}{\pi k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mit dem Häufungspunkt 0. Dies ist jedoch wegen $0 \notin G$ kein Widerspruch zum Korollar.

KAPITEL 8

Laurentreihen

DEFINITION. Eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

heißt eine *Laurentreihe*. Sie heißt *konvergent*, wenn die Teilreihen

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

konvergent sind. Man setzt dann

$$f(z) = h(z) + g(z)\,.$$

$g(z)$ heißt *regulärer Teil*, $h(z)$ *Hauptteil* der Laurentreihe.

BEISPIELE.

(1) Jede Potenzreihe ist eine Laurentreihe mit Hauptteil 0.

(2) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad k \in \mathbb{N},\ z_0 \neq 0$$

ist eine Laurentreihe mit endlichem Hauptteil

$$h(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \cdot (z - z_0)^n\,.$$

SATZ 8.1. *Es sei* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ *eine Laurentreihe und*

$$r_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad r_2^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Dann konvergiert die Laurentreihe im Ringgebiet

$$G = \{z \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

kompakt und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.
Ihre Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation.

BEWEIS. Ist $u = \frac{1}{z-z_0}$, so gilt für den Hauptteil

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot u^n \,.$$

Diese Reihe konvergiert nach Satz 7.7 (Seite 64) kompakt für

$$|u| < \rho = \frac{1}{r_1} \iff \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{r_1} \iff r_1 < |z-z_0| \,.$$

Weil $\frac{1}{z-z_0} = u$ stetig ist, entspricht jeder kompakten Teilmenge von

$$\{z \mid r_1 < |z-z_0|\}$$

eine kompakte Teilmenge von

$$\left\{u \,\middle|\, |u| < \frac{1}{r_1}\right\} ,$$

also ist auch die Konvergenz bezüglich z kompakt.

Die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$$

konvergiert kompakt in $\{z \mid |z-z_0| < r_2\}$. Nach Satz 7.5 (Seite 62) ist $f(z)$ holomorph in G. □

BEISPIEL. Es sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} r_1 &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1|} = 1 \\ r_2^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_2 = 2 \end{aligned}$$

Nach Satz 8.1 konvergiert die Reihe für $1 < |z| < 2$.

In $G = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{z}{(z-1)\cdot(2-z)} \,. \end{aligned}$$

SATZ 8.2 (LAURENT, 1843). *Es sei f in einem Ringgebiet*

$$G = \{z \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

holomorph. Dann kann f um z_0 in eine in G konvergente Laurentreihe entwickelt werden. Die Koeffizienten a_n der Reihe sind durch f eindeutig bestimmt, und es gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{für } r_1 < r < r_2 \text{ und } M = \max\{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\} \ .$$

Man nennt dies auch die Cauchy-Abschätzungen.

BEWEIS. Sei $z \in G$ fest gewählt und $|z - z_0| = \rho$. Wähle ρ_1, ρ_2 mit

$$r_1 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r_2 \, .$$

Die Kreise $\gamma_1 : z(t) = z_0 + \rho_1 \, e^{it}$ und $\gamma_2 : z(t) = z_0 + \rho_2 \, e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ liegen ganz in G. Verbinde $z + \rho_1$ mit $z + \rho_2$ durch einen Hilfsweg γ_0 so, daß $z \notin |\gamma_0|$ ist. Der Weg

$$\gamma = -\gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_0$$

ist dann nullhomolog, und es gilt $n(\gamma, z) = 1$, also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \, .$$

1. Berechnung des ersten Integrals: Für ζ auf γ_1 gilt

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{\rho_1}{\rho} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{f(\zeta)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \, .$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf γ_1, also kann man gliedweise integrieren

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^\nu \, d\zeta \right) \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{\nu+1}}$$

$$\overset{\nu+1 = -n}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \, .$$

2. Berechnung des zweiten Integrals: Für ζ auf γ_2 gilt

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{\rho}{\rho_2} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) \cdot (z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, .$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf γ_2, also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta\,.$$

3. Insgesamt ergibt sich somit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta\,, \tag{8.1}$$

für alle ganzen Zahlen. Der Integrationsweg ist

$$\gamma : z(t) = z_0 + re^{it}\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,, \qquad r \in (r_2, r_2)\,.$$

Ist $|f(\zeta)| < M$ für $\zeta \in |\gamma|$, so folgt hieraus

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}\,.$$

4. Eindeutigkeit der Koeffizienten: Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot (z - z_0)^n\,.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen ist

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(z - z_0)^{n-k-1}\,dz\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z) \cdot (z - z_0)^{-k-1}\,dz \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(z - z_0)^{n-k-1}\,dz\right) \\ &= b_k \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung. Die allgemeine Formel (8.1) für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

mit $\gamma : \zeta(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ führt im allgemeinen auf Rechenschwierigkeiten. Man versucht, sie durch Umformungen zu umgehen.

BEISPIEL. Die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)\cdot(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z}$$

ist holomorph in

(1) $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, also

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^n}\right) \cdot z^n \,.$$

f wird also in G_1 durch eine *Potenzreihe* dargestellt.

(2) $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$, also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_n = 1 & \text{für } n \le -1 \\ a_n = \frac{1}{2^n} & \text{für } n \ge 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Man erhält eine Laurentreihe in G_2.

(3) $G_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$. Forme wie folgt um:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} - \frac{\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot (1 - 2^n) \,.$$

Man erhält eine Laurentreihe, die nur aus dem Hauptteil besteht.

DEFINITION. Ein Punkt z_0 heißt *isolierte Singularität* einer Abbildung f, wenn eine Umgebung $U(z_0)$ existiert, so daß f in $U' = U \setminus \{z_0\}$ definiert und holomorph ist, das heißt f ist definiert und holomorph auf einem Ringgebiet $G = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. (Man beachte, daß f in z_0 nicht definiert zu sein braucht.)

DEFINITION. Sei z_0 eine isolierte Singularität und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad \text{in} \quad G = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

die zugehörige Laurent-Entwicklung in z_0.

Dann heißt z_0

- *hebbare Singularität*, falls $a_n = 0$ für $n < 0$.
- *Pol k-ter Ordnung* ($k \in \mathbb{N}$), falls $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für $n < -k$.
- *wesentliche Singularität*, wenn im Hauptteil der Laurentreihe ($n < 0$) unendlich viele Glieder auftreten.

BEISPIELE.

(1) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ist definiert für $z \neq 0$ und holomorph. $z_0 = 0$ ist hebbare Singularität.

(2) $f(z) = \frac{1}{z^k}$, $k \in \mathbb{N}$ besitzt den Pol k-ter Ordnung $z_0 = 0$.

(3) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ besitzt die wesentliche Singularität $z_0 = 0$.

(4) $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ besitzt *keine* isolierte Singularität in $z_0 = 0$, da 0 Häufungspunkt der Singularitäten $z = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, ist.

SATZ 8.3. *z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so daß f in $U' = U \setminus \{z_0\}$ beschränkt und holomorph ist.*

In diesem Fall existiert der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} f(z)$, und f wird holomorph in ganz U, wenn man $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ setzt. (Die Singularität wird damit behoben.)

BEWEIS. 1.) Ist z_0 eine hebbare Singularität, so gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

für $0 < |z - z_0| < r$. Mit $f(z_0) = a_0$ wird $f(z)$ in $\{z \mid 0 \le |z - z_0| < r\}$ durch eine Potenzreihe dargestellt, und ist damit holomorph und in einer Umgebung von z_0 beschränkt.

2.) Sei r_1 so gewählt, daß $G = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r_1\} \subseteq U$ und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad \text{und} \quad |f(z)| \le M \quad \text{für } z \in G \text{ ist.}$$

Für einen Kreis um z_0 mit dem Radius $r < r_1$ gilt nach Satz 8.2

$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = M \cdot r^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Weil r beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$a_{-n} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist z_0 eine hebbare Singularität. □

KOROLLAR 8.4. *Ist f stetig in z_0 und holomorph in $U' = U \setminus \{z_0\}$, so ist f auch holomorph in z_0.*

BEMERKUNG. Dies gilt *nicht* im Reellen. So ist zum Beispiel $f(x) = |x|$ stetig in 0 und differenzierbar für alle $x \neq 0$, aber nicht differenzierbar in $x = 0$.

SATZ 8.5. *Ist z_0 ein Pol, so gibt es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $\rho > 0$ mit $|f(z)| \ge M$ für $|z - z_0| \le \rho$, $z \neq z_0$.*

BEWEIS. Sei z_0 ein Pol k-ter Ordnung, also $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ mit $g(z)$ holomorph in $U = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$, $g(z_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $g(z)$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(z) - g(z_0)| \le \frac{1}{2} g(z_0) \quad \text{für} \quad |z - z_0| < \delta\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |g(z)| - |g(z_0)| &\leq |g(z) - g(z_0)| \leq \frac{1}{2}\,|g(z_0)| \\ \Longrightarrow \quad |g(z)| &\geq \frac{1}{2}\,|g(z_0)| > 0 \\ \Longrightarrow \quad |f(z)| &= \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^k} \geq \frac{|g(z_0)|}{2\cdot\rho^k} \quad \text{für } 0 \leq |z-z_0| < \rho < \delta. \end{aligned}$$

Für genügend kleines ρ ist dann $f(z) \geq M$. □

SATZ 8.6 (Satz von CASORATI-WEIERSTRASS). *Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f, c eine beliebige komplexe Zahl und $\varepsilon > 0$.*

Dann gibt es in jeder Umgebung von z_0 ein $z \neq z_0$ mit $|f(z) - c| < \varepsilon$.

BEWEIS. *Annahme*: Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $U(z_0)$ mit

$$|f(z) - c| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U' = U \setminus \{z_0\},$$

also

$$\frac{1}{|f(z)-c|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Funktion $g(z) = \frac{1}{|f(z)-c|}$ ist also holomorph und beschränkt (durch $\frac{1}{\varepsilon}$) in U', besitzt also nach Satz 8.3 eine hebbare Singularität in z_0.

Also ist $\frac{1}{f(z)-c} = (z-z_0)^k \cdot h(z)$, $h(z_0) \neq 0$, $k \geq 0$, h holomorph in U und

$$f(z) = c + (z-z_0)^{-k} \cdot \frac{1}{h(z)}.$$

Es ist $|h(z)| \geq \frac{1}{2} \cdot |h(z_0)|$ für $|z - z_0| < \rho$, also h ohne Nullstellen in diesem Bereich. Also ist $\frac{1}{h(z)}$ holomorph für $|z - z_0| < \rho$.

Dann ist z_0 keine wesentliche Singularität, weil die Laurent-Entwicklung von $f(z)$ bei $n = -k$ beginnt (Widerspruch). □

KAPITEL 9

Der Residuensatz

DEFINITION. Ist z_0 eine isolierte Singularität und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \,, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

die Laurentreihe von f, so heißt der Koeffizient a_{-1} *Residuum* von f in z_0, geschrieben:

$$\text{Res } [f, z_0] = a_{-1} \,.$$

BEISPIELE.

(1) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (1 - z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots$$

besitzt das Residuum Res $[f, 0] = 1$.

(2) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (1 - z^2)} = \frac{1}{z^2} + 1 + z^2 + \cdots$$

besitzt das Residuum Res $[f, 0] = 0$.

BEMERKUNG. Bei der Berechnung der Laurent-Koeffizienten war

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \,,$$

wobei γ ein Kreis um z_0 mit dem Radius ρ mit $0 < \rho < r$ ist. Damit ist

$$a_{-1} = \text{Res } [f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, dz \,. \tag{9.1}$$

SATZ 9.1 (Residuensatz). *Sei f holomorph in einem Gebiet G mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$. Sei γ ein nullhomologer Weg, der durch keine der Singularitäten z_i geht. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, dz = \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) \cdot \text{Res } [f, z_i] \,. \tag{9.2}$$

BEWEIS. f ist holomorph in $G^* = G \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$. Seien γ_i Kreise um z_i, die ganz in G liegen und außer z_i keinen weiteren singulären Punkt enthalten. Weiter verbinde σ_i den Punkt $A \in |\gamma|$ mit γ_i. Der Weg

$$\gamma^* = \gamma + \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i - n(\gamma, z_i) \cdot \gamma_i - \sigma_i)$$

ist nullhomolog in G^*. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 6.3, Seite 51) ist dann

$$\int_{\gamma^*} f(z)\, dz = 0\,,$$

also

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) \cdot \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \\ &= \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\,[f, z_i]\,. \end{aligned}$$ □

BEISPIEL. Es ist $z^2 - 4z + 3 = (z-1)(z-3)$. Sei $n(\gamma, 1) =: n_1$ und $n(\gamma, 3) =: n_2$. Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 3} = \frac{-\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-3}\,.$$

Damit folgt

$$\operatorname{Res}\,[f, 1] = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}\,[f, 3] = \frac{1}{2}\,.$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 3}\, dz = \pi i\,(-n_1 + n_2)\,.$$

Regeln zur Berechnung von Residuen

(A) Ist z_0 ein Pol 1. Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}\,[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)\,.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} (z - z_0) \cdot f(z) &= (z - z_0) \cdot \big(a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + \cdots\big) \\ &= a_{-1} + a_0(z - z_0) + \cdots \\ \Longrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z) &= a_{-1}\,. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(B) Sei $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit g, h holomorph und $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$\operatorname{Res}\,[f, z_0] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

(C) Sei $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, g holomorph und $g(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$\text{Res}\,[f, z_0] = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}\,.$$

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \cdots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^n} \cdot \Big(a_{-n} + a_{-n+1}\,(z-z_0) + \cdots + a_{-1}\,(z-z_0)^{n-1} + \cdots \Big) \end{aligned}$$

und daher

$$g^{(n-1)}(z_0) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big((z-z_0)^n \cdot f(z)\big) = (n-1)!\,a_{-1}\,. \qquad \checkmark$$

Singularitäten in ∞:
Es sei $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ und

$$U_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}\,.$$

Dann heißt $U_R \cup \{\infty\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ Umgebung von ∞.

$z = \infty$ heißt eine isolierte Singularität von f, wenn es ein R gibt, so daß f in U_R holomorph ist.

Die Art der Singularität in ∞ ist definiert wie die von $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0.

DEFINITION.

$$\text{Res}\,[f, \infty] := -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz\,,$$

wobei γ ein Kreis mit einem Radius $\rho > R$ ist, heißt *Residuum von f in ∞*. (Das Minuszeichen entsteht dadurch, daß ∞ rechts von γ liegt.)

Es gilt folgende Identität:

$$\text{Res}\,[f, \infty] = -\text{Res}\left[\frac{1}{z^2}\,f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]\,. \tag{9.3}$$

BEWEIS. Es sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n$ die Laurentreihe von $f(z)$ in $U_R = \{z \mid |z| > R\}$. Nach Satz 8.2 ist

$$\text{Res}\,[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = -a_{-1}\,.$$

Wegen

$$\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = \cdots + a_0\,z^{-2} + \boldsymbol{a_{-1}\,z^{-1}} + a_{-2} + a_{-3}\,z + \cdots$$

ist also $a_{-1} = \text{Res}\,\left[\frac{1}{z^2}\,f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$. $\square$

SATZ 9.2. *f habe in $\mathbb{C}$ nur endlich viele isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$ und ∞. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}[f, z_i] + \operatorname{Res}[f, \infty] = 0\,. \tag{9.4}$$

BEWEIS. Sei γ ein Kreis mit dem Radius R, der $z_1, \ldots, z_m$ enthält. Nach Satz 9.1 ist dann

$$-\operatorname{Res}[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}[f, z_i]$$

wegen $n(\gamma, z_i) = 1$ für alle i. □

DEFINITION. Eine geschlossene Kurve heißt *einfach*, wenn $n(\gamma, z)$ nur die Werte 1 und 0 annimmt. Ist $n(\gamma, z) = 1$, so heißt z ein *innerer*, ist $n(\gamma, z) = 0$, so heißt z ein *äußerer* Punkt von γ.

KOROLLAR 9.3 (Zu Satz 9.2). *f sei holomorph in einem Gebiet G mit Ausnahme endlich viele Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$. Ist γ ein einfacher in G nullhomologer Weg, der durch keinen der Punkte z_i verläuft, so gilt*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz &= \sum_{z_i \text{ innerer Pkt.}} \operatorname{Res}[f, z_i] \\ &= -\sum_{z_i \text{ äußerer Pkt.}} \operatorname{Res}[f, z_i] \; - \; \operatorname{Res}[f, \infty]\,. \end{aligned}$$

BEISPIELE.

(1) Betrachte

$$f(z) = \frac{z^9}{(z^2+1)^4 \cdot (z^2-9)}\,.$$

Dann ist ∞ ein Pol 1. Ordnung, ± 3 sind Pole 1. Ordnung und $\pm i$ sind Pole 4. Ordnung. Mit den Regeln von Seite 82 ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f, \infty] &= -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} \cdot \frac{z^9}{(z^2+1)^4 \cdot (z^2-9)}, 0\right] \\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1+z^2)^4 \cdot (1-9z^2)}, 0\right] \\ &\overset{(A)}{=} -\frac{1}{(1+z^2) \cdot (1-9z^2)}\Big|_{z=0} = -1 \\ \operatorname{Res}[f, 3] &\overset{(A)}{=} \frac{z^9}{(z^2+1)^4 \cdot (z+3)}\Big|_{z=3} = \frac{3^9}{10^4 \cdot 6} \\ \operatorname{Res}[f, -3] &\overset{(A)}{=} \frac{z^9}{(z^2+1)^4 \cdot (z+3)}\Big|_{z=-3} = \frac{3^9}{10^4 \cdot 6} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2}\frac{z^9}{(z^2+1)^4\cdot(z^2-9)}\,dz &= \text{Res}\,[f,i]+\text{Res}\,[f,-i]\\ &= -\text{Res}\,[f,3]-\text{Res}\,[f,-3]-\text{Res}\,[f,\infty]\\ &= -\frac{3^8}{10^4}+1\,.\end{aligned}$$

(2) Betrachte

$$\int_\gamma \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\,,$$

wobei γ aus dem Halbkreis in der oberen Halbebene mit dem Radius R und der Strecke $[-R,R]$ auf der reellen Achse zusammengesetzt ist. Die Nullstellen von $1+z^4$ sind $z_n = e^{i\,t_n}$ mit $t_n = \frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}$, $n=0,1,2,3$. $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ und $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i+1)$ sind einfache Nullstellen, also Pole 1. Ordnung von f. $z_2 = -z_0$ und $z_3 = -z_1$ liegen in der unteren Halbebene und sind somit äußere Punkte von γ. Dann ist

$$\begin{aligned}\text{Res}\,[f,z_n] &\overset{(B)}{=} \frac{z^2}{4\,z^3}\Big|_{z=z_n}\\ \Longrightarrow\quad \text{Res}\,[f,z_0] &= \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)\\ \text{Res}\,[f,z_1] &= \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)\,,\end{aligned}$$

und man erhält

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{z^2}{1+z^4}\,dz &= \text{Res}\,[f,z_0]+\text{Res}\,[f,z_1]\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von R! Dies läßt sich auch zur Bestimmung uneigentlicher Integrale ausnutzen: Sei $\gamma_1 = [-R,R]$, $\gamma_2 : z(t) = R\,e^{it}$ mit $t\in[0,\pi]$ und $\gamma = \gamma_1+\gamma_2$ wie oben. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\\ &= \int_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx+\int_{\gamma_2}\frac{z^2}{1+z^4}\,dz\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right| \le \left|\frac{R^2}{R^4-1}\right|\cdot\pi\cdot R\,,$$

was für $R\to\infty$ zu Null wird. Also ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Analog zum letzten Beispiel zeigt man

SATZ 9.4. *Sei*

$$f(x) = \frac{a_n\, x^n + \cdots + a_0}{b_m\, x^m + \cdots + b_0} \quad \textit{mit } m > n+2$$

und $b_m\, x^m + \cdots + b_0 \neq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Dann ist*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= 2\pi i \cdot \left\{ \begin{array}{c} \textit{Summe der Residuen von } f(z) \\ \textit{in der oberen Halbebene} \end{array} \right. \\ &= -2\pi i \cdot \left\{ \begin{array}{c} \textit{Summe der Residuen von } f(z) \\ \textit{in der unteren Halbebene} \end{array} \right. \end{aligned} \tag{9.5}$$

BEISPIEL. Es sei

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,.$$

Die Funktion $f(z)$ besitzt in der oberen Halbebene bei $z = i$ einen Pol $(n+1)$-ter Ordnung. Es ist

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^{n+1}} \quad \text{mit} \quad g(z) = \frac{1}{(z+i)^{n+1}}\,.$$

Nach Regel (C) ergibt sich

$$\operatorname{Res}\,[f,i] = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n+1} \cdot i}\,.$$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\,[f,i] = \frac{\pi \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2}\,.$$

Eine weitere Anwendung des Residuensatzes ist die Berechnung der Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin t, \cos t)\,dt\,,$$

wobei $\mathrm{R}(u,v)$ eine rationale Funktion in u und v ist. Es ist

$$\int_{|z|=1} \mathrm{R}\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin t, \cos t)\,dt$$

mit

$$\begin{array}{ll} \gamma : z = e^{it},\ t \in [0, 2\pi] & dz = ie^{it}\,dt \\ z = \cos t + i \sin t, & \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \end{array}$$

Verfahren: Ersetze in $\int \mathrm{R}(\sin t, \cos t)\,dt$

$$\begin{array}{rcl} \sin t & \text{durch} & \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right), \\ \cos t & \text{durch} & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \\ dt & \text{durch} & \dfrac{dz}{iz}\,. \end{array}$$

Das Integral geht über in

$$\int_{|z|=1} \mathrm{R}\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} f(z)\,dz\,.$$

f ist eine rationale Funktion von z. Mit dem Residuensatz ergibt sich

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|a_i|<1} \mathrm{Res}\ [f, a_i]\ ,$$

wobei die a_i die Singularitäten von f innerhalb des Einheitskreises sind.

Beispiel. Um

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$$

zu berechnen, führen wir die obige Substitution aus und erhalten

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2+4z+1}\,dz\,.$$

Singularitäten liegen bei $-2\pm\sqrt{3}$, wobei $-2+\sqrt{3}$ innerhalb des Einheitskreises liegt. Für Pole 1. Ordnung gilt

$$\mathrm{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right] = \frac{-2i}{2\left(-2+\sqrt{3}+2\right)} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\,,$$

also

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{-2i}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

KAPITEL 10

Nullstellen und Pole

DEFINITION. Sei $f(z) = (z-a)^m u(z)$, $u(a) \notin \{0, \infty\}$. Dann heißt m *Ordnung* von f an der Stelle a, geschrieben $\operatorname{ord}_a f = m$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} m > 0 & : & a \text{ Nullstelle der Vielfachheit } m \\ m < 0 & : & a \text{ Pol der Ordnung } -m\,. \end{array}$$

SATZ 10.1. *Es sei $f(z)$ holomorph in G bis auf Pole $a_1, \ldots, a_k$. Außerdem seien $a_{k+1}, \ldots, a_\ell$ die Nullstellen von f in G. Ist $g(z)$ holomorph in G und γ ein nullhomologer Weg in G, der keines der a_i enthält, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{l} g(a_i) \cdot n(\gamma, a_i) \cdot \operatorname{ord}_{a_i} f\,. \tag{10.1}$$

BEWEIS. Isolierte Singularitäten von $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ sind $a_1, \ldots, a_\ell$, und zwar sind dies Pole 1. Ordnung:

Sei $f(z) = (z-a_i)^m u(z)$ mit $u(a_i) \neq 0, \infty$ und $m = \operatorname{ord}_{a_i} f$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z)\frac{m\,(z-a_i)^{m-1}u(z) + (z-a_i)^m u'(z)}{(z-a_i)^m u(z)} \\ &= g(z)\frac{m\,u(z) + (z-a_i)u'(z)}{(z-a_i)\,u(z)}\,. \end{aligned}$$

Damit ist a_i ein Pol 1. Ordnung, also gilt

$$\operatorname{Res}\left[g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}, a_i\right] = g(a_i) \cdot \operatorname{ord}_{a_i} f\,.$$

Die Behauptung ergibt sich aus dem Residuensatz. □

BEMERKUNG. Für den Spezialfall $g(z) \equiv 1$, γ einfach, hat man

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{l} n(\gamma, a_i) \cdot \operatorname{ord}_{a_i} f = \sum_{a_i \text{ innerer Pkt.}} \operatorname{ord}_{a_i} f\,.$$

KOROLLAR 10.2. *Sei γ einfach, N die Anzahl der Nullstellen von f innerhalb von γ, P die Anzahl der Pole von f innerhalb von γ, jeweils mit ihrer Vielfachheit, bzw. Ordnung gezählt. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P\,.$$

KOROLLAR 10.3. *Sei γ einfach, $f(z)$ holomorph innerhalb von γ ($\Rightarrow$ keine Pole). Dann gilt für die Anzahl N der Nullstellen innerhalb von γ (mit Vielfachheit gezählt)*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{a_i \text{ innerer Pkt. } \gamma} \operatorname{ord}_{a_i} f\,.$$

SATZ 10.4 (Hauptsatz der Algebra). *Jedes nicht-konstante Polynom*

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

BEMERKUNG. Es gibt verschiedene gleichwertige Formulierungen des Hauptsatzes

(1) Jedes Polynom n-ten Grades hat n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit ihrer Vielfachheit gezählt).
(2) Jedes nicht-konstante Polynom hat eine Nullstelle.
(3) $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, das heißt irreduzible Polynome über $\mathbb{C}$ sind linear.

Es sollen im folgenden mehrere Beweise des Hauptsatzes gegeben werden.

HILFSSATZ 10.1. *Sämtliche Nullstellen des Polynoms*

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

liegen in $\{z \mid |z| < R\}$ mit $R = 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$.

BEWEIS. Sei $|z| \geq R$. Dann gilt $|z|^k \geq R$, also $\frac{1}{|z|^k} \leq \frac{1}{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{z^n} - 1\right| &= \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z^n|} \\ &\leq \frac{1}{R}\left(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\right) < 1\,.\end{aligned}$$

Wäre $f(z) = 0$, so würde ein Widerspruch folgen, also kann z mit $|z| \geq R$ keine Nullstelle des Polynoms sein. □

Erster Beweis des Hauptsatzes

Sei R wie in Hilfssatz 10.1 gewählt und $\gamma : z(t) = R \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, der Kreis um 0 mit dem Radius R. $f(z)$ ist holomorph in ganz $\mathbb{C}$. Da alle Nullstellen von $f(z)$ innerhalb γ liegen, ist ihre Anzahl

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, \infty\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}\frac{f'(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})}, 0\right]\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n\,z^{n-1}+(n-1)\,a_{n-1}\,z^{n-2}+\cdots}{z^n+a_{n-1}\,z^{n-1}+\cdots}\\ \frac{1}{z^2}\cdot\frac{f'(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})} &= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{n\frac{1}{z^{n-1}}+\cdots}{\frac{1}{z^n}+\cdots} = \frac{1}{z}\cdot\frac{n+(n-1)a_{n-1}z+\cdots}{1+a_{n-1}z+\cdots}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$N=\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}\frac{f'(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})},0\right]=n\,. \qquad \square$$

SATZ 10.5 (Satz von ROUCHÉ). *Seien f und g holomorph in G und γ ein einfacher nullhomologer Weg in G, auf dem*

$$|g(z)|<|f(z)| \quad \textit{für alle} \quad z\in|\gamma|\,.$$

gilt. Dann haben die Funktionen $f(z)$ und $f(z)+g(z)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen innerhalb von γ.

BEWEIS. Sei $a\in\{z\mid|z|\le 1\}$ und $f_a(z)=f(z)+a\cdot g(z)$. Wegen

$$|f_a(z)|\ge|f(z)|-|a|\cdot|g(z)|>0$$

für alle $z\in|\gamma|$ hat f_a keine Nullstellen auf γ. f_a ist holomorph in G, also holomorph für die inneren Punkte von γ.

$$N_a=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_a'(z)}{f_a(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)+a\,g'(z)}{f(z)+a\,g(z)}\,dz$$

ist Nullstellenzahl von f_a innerhalb von γ. Das rechtsstehende Integral ist stetig in a. Da N_a ganzzahlig ist, folgt N_a ist konstant, also $N_0=N_1$. f und $f+g$ haben also die gleiche Nullstellenanzahl innerhalb von γ. $\square$

BEISPIEL. $h(z)=z^8-4z^5+z^2-1$ besitzt 5 Nullstellen im Einheitskreis. Wähle $f(z)=-4z^5$, $g(z)=z^8+z^2-1$. Für $|z|=1$ gilt

$$|g(z)|=|z^8+z^2-1|\le 3<|f(z)|=4\,.$$

Also hat $h(z)=f(z)+g(z)$ die gleiche Nullstellenzahl wie $f(z)$, also 5.

Als Anwendung des Satzes von Rouché ergibt sich

Zweiter Beweis des Hauptsatzes

Wir wählen

$$\begin{aligned}h(z) &= z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0\\ f(z) &= z^n\\ g(z) &= a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0\end{aligned}$$

Sei

$$R=1+|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|\,.$$

Für $|z| = R$ gilt

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_0| \\ &\leq (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)\, R^{n-1} < R^n = |f(z)|\,. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché (Satz 10.5) gilt dann: $h(z)$ hat so viele Nullstellen wie $f(z)$ in $\{z \mid |z| \leq R\}$, also n Nullstellen. □

SATZ 10.6 (Satz von HURWITZ). *Eine Folge (f_n) in G holomorpher Funktionen konvergiere kompakt gegen f. Es sei γ ein nullhomologer Weg, auf dem f keine Nullstelle besitzt.*

Dann gibt es ein N, so daß f und f_n, $n \geq N$, die gleiche Anzahl von Nullstellen innerhalb von γ besitzen.

BEWEIS. Weil stetige Funktionen auf einer kompakten Menge ihr Minimum annehmen und f auf γ keine Nullstelle besitzt, gilt

$$|f(z)| \geq \delta > 0 \quad \text{für alle } z \in |\gamma|\,.$$

Wegen $f_n \to f$ gleichmäßig konvergent auf γ gibt es ein N mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \delta \leq |f(z)| \quad \text{für alle } n > N$$

auf $|\gamma|$. Also haben $f_n(z)$ und $f(z)$ gleich viele Nullstellen innerhalb γ. □

BEMERKUNG. Im Reellen ist die Aussage des Satzes falsch. Beispiel:

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = x^2$$

konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Die Funktionen besitzen keine Nullstellen, die Grenzfunktion besitzt eine Nullstelle.

SATZ 10.7 (Satz von LIOUVILLE). *Es sei f eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Ist f beschränkt, d.h. $|f(z)| \leq M$ für $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.*

BEWEIS. Nach den Cauchyschen Integralformeln (6.11) (Seite 54) ist

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$$

(γ Kreis um a mit dem Radius R und $n(\gamma, a) = 1$). Dann ist

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}\,.$$

Da f in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, kann R beliebig groß gewählt werden, so daß $|f'(a)| = 0$ für alle $a \in \mathbb{C}$, also f konstant folgt. □

HILFSSATZ 10.2. *Ist*

$$f(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0\,,$$

so gibt es zu jeder reellen Zahl M ein R mit

$$|f(z)| \geq M$$

für alle z mit $|z| \geq R$.

BEWEIS. Sei M beliebig vorgegeben und

$$R := 1 + 2\,(M + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|)\,.$$

Für $z \geq R$ ist dann

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_0\right| \\
&\geq |z^n| - \left|a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_0\right| \\
&\geq |z^n| - \left(\left|a_{n-1}\,z^{n-1}\right| + \cdots + |a_0|\right) \\
&\overset{R>1}{\geq} |z^n| - \left|z^{n-1}\right| \cdot \Big(\underbrace{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|}_{\leq \frac{R}{2}}\Big) \\
&\geq |z^n| \cdot \left(1 - \frac{1}{|z|} \cdot \frac{R}{2}\right) \\
&\geq \left|z^n \cdot \frac{1}{2}\right| \;\geq\; \frac{R}{2} \;\geq\; M\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Dritter Beweis des Hauptsatzes

Sei $f(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt, denn nach Hilfssatz 10.2 ($M := 1$) ist $|f(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$, wenn R genügend groß ist, also

$$|g(z)| \leq 1 \quad \text{für} \quad |z| > R\,.$$

$K = \{z \mid |z| \leq R\}$ ist kompakt. g ist stetig, also beschränkt auf K:

$$|g(z)| \leq M \qquad \text{für } |z| \geq R\,.$$

Also ist

$$g(z) \leq \max\{1, M\} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Nach dem Satz von Liouville (Satz 10.7) ist dann $g(z)$, also auch $f(z)$ konstant, d.h.

$$f(z) = c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Nach dem Identitätssatz 7.11 (Seite 71) ist f dann das konstante Polynom (Widerspruch zur Voraussetzung). $\square$

KAPITEL 11

Unendliche Produkte

BEMERKUNG. Unendliche Produkte treten bereits bei WALLIS (1655) auf:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots$$

DEFINITION. Sei (a_k) eine Folge komplexer Zahlen und

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \, .$$

Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, wenn die Folge der Teilprodukte (p_n) konvergiert. Man setzt

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} p_n \, .$$

BEISPIELE.

1. $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$ konvergiert:

   $$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} = \begin{cases} \frac{n+1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

   konvergiert gegen 1, also konvergiert das Produkt.

2. $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ divergiert, weil

   $$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n + 1$$

   divergiert.

DEFINITION. Ein unendliches Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + |u_k|)$ konvergiert.

LEMMA 11.1. *Seien $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gilt*

(1) $1 + \sum\limits_{k=1}^{n} |u_k| \leq \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + |u_k|)$

(2) $\left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)-1\right| \le \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)-1$

BEWEIS. Induktion nach n. $n=1$ trivial.

(1)

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1+|u_k|) &\ge \left(1+\sum_{k=1}^{n}|u_k|\right)(1+|u_{n+1}|)\\ &\ge 1+\sum_{k=1}^{n}|u_k|+|u_{n+1}|\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n+1}(1+u_k)-1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)-1\right)(1+u_{n+1})+u_{n+1}\right|\\ &\overset{\text{Induktion}}{\le} \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)-1\right)(1+|u_{n+1}|)+|u_{n+1}|\\ &\le \prod_{k=1}^{n+1}(1+|u_k|)-1\,. \qquad \square\end{aligned}$$

LEMMA 11.2. *Es gilt*

(1) $1+x \le e^x$ *für* $x \in \mathbb{R}$

(2) $e^x \le 2x+1$ *für* $0 \le x \le 1$

BEWEIS. Siehe Graphen der Funktionen. $\square$

SATZ 11.3. $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ *ist genau dann absolut konvergent, wenn* $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ *konvergiert.*

BEWEIS.

1. Sei $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ konvergent, etwa $A=\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$, also
$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|) \le \sum_{k=1}^{n}e^{|u_k|}=e^{\prod_{k=1}^{n}|u_k|} \le e^A$$
Wegen $p_1 \le p_2 \le \ldots \le e^A$ konvergieren die p_n. Also ist $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ absolut konvergent.
2. $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_k|)$ konvergiert. Dann ist nach Lemma 11.1
$$1+\sum_{k=1}^{n}|u_k| \le \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|) \le \prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_k|)\,.$$
Also ist $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ konvergent. $\square$

BEISPIEL. $\prod(1+\frac{1}{k})$ divergent $\iff$ $\sum\frac{1}{k}$ divergent

SATZ 11.4. *Ist ein Produkt absolut konvergent, so ist es auch konvergent.*

BEWEIS. Seien $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ Teilprodukte. Sei

$$A = \prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_k|)\,.$$

Dann ist

$$|p_n| \le \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|) \le A\,.$$

Behauptung: (p_n) ist Cauchy-Folge. Sei $0 < \varepsilon \le 1$. Nach Satz 11.3 ist $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ konvergent, also existiert ein N mit

$$\sum_{k=N}^{\infty}|u_k| < \varepsilon\,.$$

Sei $n > m \ge N$.

$$\begin{aligned}
|p_n - p_m| &= \left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) - \prod_{k=1}^{m}(1+u_k)\right| = |p_m|\left|\prod_{k=m+1}^{n}(1+u_k) - 1\right| \\
&\le A\left(\prod_{k=m+1}^{n}(1+|u_k|) - 1\right) \\
&\le A\left(e^{\sum_{k=m+1}^{n}|u_k|} - 1\right) \le A\,(e^{\varepsilon}-1) \\
&\le 2A\varepsilon
\end{aligned}$$

Also ist (p_n) eine Cauchy-Folge und damit konvergent. □

KOROLLAR 11.5. *$\sum|u_n|$ konvergent $\quad\Longrightarrow\quad$ $\prod(1+u_n)$ konvergent.*

BEISPIEL. $\prod\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$, $\prod(1+z^n)$ konvergent für $|z|<1$.

SATZ 11.6. *In einem absolut konvergenten Produkt können die Faktoren beliebig kommutiert werden, das heißt, ist $k \mapsto n_k$ eine Bijektion $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, so konvergiert auch*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_{n_k})\,,$$

und es gilt

$$p = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_{n_k})\,.$$

BEWEIS. Seien $q_m = \prod_{j=1}^{m}(1+u_{n_j})$ die Teilprodukte des kommutierten Produkts.
Behauptung: $q_m \to p$.
Sei $0<\varepsilon\le 1$. Es gibt ein $n\in\mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k| < \varepsilon \quad\text{und}\quad |p-p_n| < \varepsilon\,.$$

Wähle m so groß, daß

$$\{1,\dots,n\} \subseteq \{n_1,\dots,n_m\}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
|q_m - p_n| &= \left|\prod_{j=1}^{m}(1+u_{n_j}) - \prod_{j=1}^{n}(1+u_j)\right| \\
&= \left|\prod_{j=1}^{n}(1+u_j)\right| \cdot \left|\prod_{\substack{j=1\\ n_j>n}}^{m}(1+u_{n_j}) - 1\right| \\
&\le \prod_{j=1}^{\infty}(1+|u_j|)\left(e^{\sum_{\substack{j=1\\ n_j>n}}^{m}|u_{n_j}|} - 1\right) \\
&\le A\cdot(e^{\varepsilon}-1) \le 2A\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

also

$$|q_m - p| \le |q_m - p_n| + |p_n - p| \le (2A+1)\varepsilon$$

$\Longrightarrow \quad q_m \to p.$ □

Satz 11.7. *Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(s)|$ gleichmäßig auf S und sind $u_k : S \to \mathbb{C}$ beschränkt, so konvergiert*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\big(1+u_k(s)\big)$$

gleichmäßig auf S gegen eine beschränkte Funktion $p(s)$.

Beweis.

1. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum|u_k(s)|$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so daß $\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(s)| \le 1$ ist. Gilt $|u_i(s)| \le M_i$ auf S, so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(s)| \le \sum_{i=1}^{n} M_i + 1 =: C \qquad \text{für alle } s \in S\,.$$

2. Sei

$$p_n(s) = \prod_{k=1}^{n}\big(1+u_k(s)\big)\,,$$

also

$$|p_n(s)| \le \prod_{k=1}^{n}\big(1+|u_k(s)|\big) \le e^{\sum_{k=1}^{n}|u_k(s)|} \le e^{C} =: M\,.$$

3. Sei $0 < \varepsilon \le 1$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum|u_k(s)|$ gibt es ein n_0 mit

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|u_k(s)| < \varepsilon\,.$$

Es folgt für $n > m \geq n_0$ und alle $s \in S$

$$\begin{aligned} |p_n(s) - p_m(s)| &= |p_m(s)| \left| \prod_{k=m+1}^{n} (1+u_k) - 1 \right| \\ &\leq M \left(e^{\sum_{k=m+1}^{n} |u_k|} - 1 \right) \\ &\leq M\,(e^{\varepsilon} - 1) \leq \underbrace{2 \cdot M \cdot \varepsilon}_{\text{unabhängig von } s} . \end{aligned}$$

Also ist $p_n(s)$ eine Cauchy-Folge und konvergiert gleichmäßig auf S. □

SATZ 11.8. *Seien $f_k = 1 + u_k : S \to \mathbb{C}$ Funktionen, $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(s)|$ gleichmäßig konvergent auf S. Ist $f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(s)$ und $p_n(s) = \prod_{k=1}^{n} f_k(s)$, so gibt es ein n_0 mit*

$$|p_{n_0}(s)| \leq 2 \cdot |f(s)| .$$

BEWEIS. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |u_k(s)| < \varepsilon \quad \text{für alle } s \in S.$$

Für $n > m \geq n_0$ und alle $s \in S$ gilt

$$|p_n(s) - p_m(s)| = |p_m(s)| \cdot \left| \prod_{k=m+1}^{n} (1 + u_k(s)) - 1 \right| \leq |p_m(s)| \cdot 2\varepsilon .$$

Speziell gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ein n_0 mit

$$|p_m(s)| - |p_n(s)| \leq |p_n(s) - p_m(s)| \leq |p_m(s)| \cdot \frac{1}{2},$$

also

$$|p_m(s)| \leq 2|p_n(s)| .$$

Für $m = n_0$ und $\lim_{n\to\infty}$ ist

$$|p_{n_0}(s)| \leq 2 \cdot |f(s)| . \qquad \square$$

KOROLLAR 11.9. *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 11.8. Dann gilt*

(1) $$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(s) = 0 \iff \exists\, k : f_k(s) = 0$$

(2) $$f(s) = 0 \quad \textit{für alle } s \in S \quad \Longrightarrow \quad p_{n_0}(s) = 0 \quad \textit{für alle } s \in S .$$

KAPITEL 12

Der Produktsatz von Weierstrass

Es sei G ein Gebiet und $\mathfrak{H}(G)$ die Menge der in G holomorphen Funktionen.

$\mathfrak{H}(G)$ ist ein kommutativer Ring (siehe auch Seite 108), der außerdem nullteilerfrei ist, d.h. es gilt

$$fg = 0 \quad \Longrightarrow \quad (f = 0 \text{ oder } g = 0)\,.$$

Sei $f(z) = (z-a)^m \cdot (a_0 + a_1\,(z-a) + \cdots)$, $a_0 \neq 0$, die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ in $z = a$. Dann ist

$$\operatorname{ord}_a f = m$$

Ordnung der Nullstelle a (vgl. die Definition auf Seite 89). Setze $\operatorname{ord}_a f = \infty$ für die Nullfunktion $f(z) \equiv 0$.

Damit ist ord_a eine Funktion $\operatorname{ord}_a : \mathfrak{H}(G) \to \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ mit

(1) $\operatorname{ord}_a f = \infty \iff f = 0$

(2) $\operatorname{ord}_a(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}_a f, \operatorname{ord}_a g\}$

(3) $\operatorname{ord}_a fg = \operatorname{ord}_a f + \operatorname{ord}_a g$

PROBLEM: Seien $\{a_1, a_2, \ldots\}$ Punkte aus G und $m_i \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $f \in \mathfrak{H}(G)$, das genau in den a_i Nullstellen der Ordnung $\operatorname{ord}_{a_i} f = m_i$ besitzt?

Bei endlich vielen Punkten a_i gilt $f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{m_i}$.

SATZ 12.1. *$f_k = 1 + u_k \in \mathfrak{H}(G)$, $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(z)|$ seien kompakt konvergent in G.*

(1) *Dann konvergiert $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ kompakt und absolut gegen eine holomorphe Funktion $f(z)$.*

(2) $\operatorname{ord}_a f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ord}_a f_k(z)$.

BEWEIS.

(1) Folgt aus Satz 11.7. Die $u_k(z)$ sind auf kompakten Mengen beschränkt (wegen ihrer Stetigkeit). Nach dem Satz von Weierstraß 7.5 (Seite 62) ist das Produkt holomorph.

(2) (a) $f(z) = 0$ für alle $z \in G$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \quad : \quad \prod_{k=1}^{n_0} f_k(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in G \text{ (Korollar 11.9)}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, k \quad : \quad f_k(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in G$$

$$\operatorname{ord}_a f(z) \quad = \quad \infty = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ord}_a f_k(z)$$

(b) Ist a keine Nullstelle von $f(z)$, so ist a auch keine Nullstelle von $f_k(z)$ für alle k.

$$\operatorname{ord}_a f(z) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ord}_a f_k(z)\,.$$

(c) Sei $f(z)$ nicht die Nullfunktion und $a \in G$ Nullstelle von $f(z)$. Da die Nullstellen holomorpher Funktionen $\neq 0$ isoliert liegen, gibt es ein $r > 0$, so daß a einzige Nullstelle in

$$K = \{z \mid |z - a| \leq r\}$$

ist. Nach Satz 10.6 hat für $n \geq N$

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} f_k(z)$$

genauso viele Nullstellen in K wie $f(z)$ (mit Vielfachheit gezählt). Weil jede Nullstelle von $p_n(z)$ auch Nullstelle von $f(z)$ ist, ist a die einzige Nullstelle von $p_n(z)$ in K, also

$$\operatorname{ord}_a f(z) = \operatorname{ord}_a p_n(z) \quad \text{für } n \geq N.$$

Für $k > N$ hat $f_k(z)$ in $z = a$ wegen

$$p_k(z) = p_{k-1}(z) \cdot f_k(z)$$

keine Nullstelle. Daher ist

$$\operatorname{ord}_a p_k(z) = \operatorname{ord}_a p_{k-1}(z) + \operatorname{ord}_a f_k(z)\,,$$

also

$$\operatorname{ord}_a f_k(z) = 0 \quad \text{für } k > N.$$

Es folgt

$$\operatorname{ord}_a f(z) = \operatorname{ord}_a p_N(z) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{ord}_a f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ord}_a f_k(z)\,. \qquad \square$$

Beispiel. Es sei $a_i = i$, $i \in \mathbb{Z}$, $m_i = 1$

$$f_0(z) = z\ ,\ f_k(z) = 1 - \frac{z^2}{k^2}\ ,\ k = 1, 2, \ldots$$

$$f(z) = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)\,.$$

Sei S eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, also beschränkt: $|z| \leq R$, $z \in S$

$$|1 - z| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{k^2} \quad \text{gleichmäßig konvergent auf } S$$

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|z|^2}{k^2} \leq R^2 \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon\,.$$

Gegeben sei die Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ in G ohne Häufungspunkt und

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \cdots$$

Gesucht: $f \in \mathfrak{H}(G)$ mit den vorgegebenen Nullstellen a_i und

$$\operatorname{ord}_{a_i} f(z) = \text{ Häufigkeit von } a_i \text{ in der Folge}$$

(Drücke dabei die Vielfachheit der Nullstellen durch entsprechende Wiederholung in der (a_i)-Folge aus.)

DEFINITION. Sei $G = \mathbb{C}$. Definiere dann die *Elementarfaktoren* (nach WEIERSTRASS) durch

$$\begin{aligned} E_0(z) &:= 1 - z \\ E_n(z) &:= (1-z) \cdot e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}} . \end{aligned}$$

Die Elementarfaktoren sind holomorph in ganz $\mathbb{C}$ und besitzen eine einfache Nullstelle in $z = 1$. $E_n(\frac{z}{a})$ hat eine einfache Nullstelle in $z = a$.

LEMMA 12.2. *Für* $|z| \leq 1$ *gilt*

$$|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1} . \tag{12.1}$$

BEWEIS. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei $n \geq 1$ und

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

die Taylorentwicklung. Da $f_n(z)$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$ ist, konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$. (Satz: Auf dem Konvergenzkreis liegt eine Singularität.)

$$\begin{aligned} E_n'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, z^{k-1} \\ &= \left((1-z)(1 + z + \cdots + z^{n-1} - 1)\right) e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}} \\ &= -z^n e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}} = -z^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k . \end{aligned} \tag{12.2}$$

Zwischenbehauptung: Sei $f(z) = e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}}$. Dann gilt

$$f^{(k)}(z) = P_k(z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}} ,$$

wobei $P_k(z)$ Polynome in z mit reellen Koeffizienten ≥ 0 sind.
Beweis: Induktion nach k.

1. $k = 0$: $P_0(z) = 1$.
2. $k \to k + 1$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z) &= \left(P_k(z)(1 + z + \ldots + z^{n-1}) + P_k'(z)\right) e^{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n}} \\ &= P_{k+1}(z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n}} . \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Also sind die Koeffizienten von $P_k(z)$ reell und ≥ 0. Wegen $b_k = \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \geq 0$ folgt aus Gleichung 12.2 durch Koeffizientenvergleich:

$$a_1 = \cdots = a_n = 0 \qquad \text{und} \qquad a_k \leq 0 \quad \text{für } k > n.$$

Wegen $E_n(0) = a_0 = 1$ gilt

$$E_n(z) = 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k = 1 + z^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-n-1}.$$

Wegen

$$E_n(1) = 0 = 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad \overset{a_k \leq 0}{\Longrightarrow} \quad 1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$$

folgt für $|z| \leq 1$

$$|E_n(z) - 1| = |z|^{n+1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-n-1} \right| \leq |z|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{n+1}. \qquad \square$$

SATZ 12.3 (Produktsatz von WEIERSTRASS). *Sei $(a_1, a_2, \ldots)$ eine Folge komplexer Zahlen ohne Häufungspunkt und $a_1 = \cdots = a_m = 0$, $a_i \neq 0$ für $i > m$. Sind die n_i so gewählt, daß*

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_i|} \right)^{n_i+1} < \infty, \quad n_i \geq 0 \tag{12.3}$$

für alle $r > 0$ ist, so ist

$$f(z) = z^m \prod_{k=m+1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{a_k} \right)$$

eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die genau die Punkte a_i als Nullstellen besitzt (wobei die Vielfachheit gleich der Häufigkeit ist, mit der a_i in der Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ auftritt).

BEWEIS. Sei $u_i(z) = E_{n_i}\left(\frac{z}{a_i}\right) - 1$. Nach Satz 12.1 ist zu zeigen

$$\sum |u_i(z)| \text{ konvergiert kompakt in } \mathbb{C}.$$

Ist K eine kompakte, also beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$, so gibt es ein $r > 0$ mit $|z| \leq r$ für $z \in K$. Da sich die a_i nicht häufen, gilt $|a_i| \geq r$ für $i \geq N$. Für $z \in K$ und $i \geq N$ ist $\left|\frac{z}{a_i}\right| \leq 1$. Nach Lemma 12.2 ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=N+1}^{\infty} |u_i(z)| &= \sum_{i=N+1}^{\infty} \left| E_{n_i}\left(\frac{z}{a_i}\right) - 1 \right| \overset{\text{Lemma 12.2}}{\leq} \sum_{i=N+1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_i}\right|^{n_i+1} \\ &\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_i|}\right)^{n_i+1} \overset{(12.3)}{<} \infty. \end{aligned} \qquad \square$$

KOROLLAR 12.4. *Es sei $(a_1, a_2, \ldots)$ eine Folge komplexer Zahlen ohne Häufungspunkt. Dann existiert eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(z)$ mit den vorgeschriebenen Nullstellen.*

BEWEIS. Setze $n_i = i - 1$. Zu $r > 0$ gibt es endlich viele a_i mit $|a_i| < 2r$, etwa $i = 1, \ldots, N$. Das heißt

$$\left|\frac{r}{a_i}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } i > N.$$

Dann ist $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^i$ eine Majorante von $\sum \left(\frac{r}{|a_i|}\right)^i < \infty$. □

SPEZIALFALL.

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{|a_i|}\right)^{k+1} < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sum \left(\frac{r}{|a_i|}\right)^{k+1} = r^{k+1} \sum \left(\frac{1}{|a_i|}\right)^{k+1}$$

also gilt Gleichung (12.3) für $n_i = k$.

Wähle k möglichst klein!

BEISPIELE.

(1) In 0, 1, 4, 9, ... sollen Nullstellen 1. Ordnung liegen. Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2}\right)^{0+1} < \infty \quad \text{ist } k = 0, \text{ also}$$

$$f(z) = z \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{i^2}\right).$$

(2) In 0, 1, 2, 3, ... sollen einfache Nullstellen liegen. Wegen

$$\sum_{i} \left(\frac{1}{i}\right)^{1+1} < \infty \quad \text{ist } k = 1, \text{ also}$$

$$f(z) = z \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{i}\right) e^{\frac{z}{i}}.$$

(3) In ..., −1, 0, 1, 2, ... sollen einfache Nullstellen liegen. Wegen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{|-n|}\right)^{1+1} < \infty \quad \text{ist } k = 1.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= z \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{i}\right) e^{\frac{z}{i}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{i}\right) e^{-\frac{z}{i}} \\ &= z \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right). \quad \text{(auf Grund der absoluten Konvergenz)} \end{aligned}$$

(4) Seien ω_1, ω_2 linear unabhängige komplexe Zahlen und

$$L := \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{(Gitter in } \mathbb{C}\text{)}.$$

Gesucht ist eine Funktion $f(z)$, die in den Gitterpunkten einfache Nullstellen besitzt.
Sei P_n das Parallelogramm mit den Eckpunkten $\pm n\omega_1 \pm n\omega_2$.
Auf P_n liegen $8n$ Gitterpunkte ($4(2n+1)-4$). Sei K ein Kreis in P_1 mit dem Radius h. Für die $8n$ Punkte von P_n gilt

$$|a_i| \geq h \cdot n\,,$$

also

$$\sum_{a_i \in P_n} \left(\frac{1}{|a_i|}\right)^3 \leq 8n \left(\frac{1}{hn}\right)^3 = \frac{8}{h^3} \cdot \frac{1}{n^2}\,,$$

also

$$\sum_{\substack{a_i \in L \\ a_i \neq 0}} \left(\frac{1}{|a_i|}\right)^3 \leq \frac{8}{h^3} \sum \frac{1}{n^2} < \infty \quad \Longrightarrow \quad k = 2\,.$$

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= z \prod_{\substack{a_i \in L \\ a_i \neq 0}} E_2\left(\frac{z}{a_i}\right) \\ &= z \prod_{\substack{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ (n,m) \neq (0,0)}} \left(1 - \frac{z}{n\omega_1 + m\omega_2}\right) e^{\frac{z}{n\omega_1+m\omega_2} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(n\omega_1+m\omega_2)^2}}\,. \end{aligned}$$

($\sigma(z)$ =Weierstraßsche σ-Funktion).

DEFINITION. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *ganz*, wenn f für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist.

SATZ 12.5. *Seien $g(z)$ und $f(z)$ ganze Funktionen mit gleichen Nullstellen (einschließlich Vielfachheit). Dann ist*

$$g(z) = e^{h(z)} \cdot f(z)\,, \tag{12.4}$$

wobei $h(z)$ eine ganze Funktion ist.

BEWEIS. $u(z) := \frac{g(z)}{f(z)}$ ist holomorph für $z \neq a_i$. Für $z = a_i$ ist

$$u(z) = \frac{(z-a_i)^{m_i}(b_0 + b_1 z + \cdots)}{(z-a_i)^{m_i}(c_0 + c_1 z + \cdots)}\,,$$

in a_i liegen also hebbare Singularitäten. Man kann $u(z)$ als ganze Funktion ohne Nullstellen annehmen. Dann ist $\frac{u'(z)}{u(z)}$ ganz. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, existiert eine Stammfunktion, also

$$h'(z) = \frac{u'(z)}{u(z)}\,.$$

Dann ist

$$\left(\frac{e^{h(z)}}{u(z)}\right)' = \frac{u(z)\,h'(z)\,e^{h(z)} - u'(z)\,e^{h(z)}}{u^2(z)}$$

$$= \frac{e^{h(z)}}{u(z)}\left(h'(z) - \frac{u'(z)}{u(z)}\right) = 0\,,$$

also

$$\frac{e^{h(z)}}{u(z)} = c \quad \text{(konstant)}\,.$$

Weil $h(z)$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann man $c = 1$ annehmen. Es folgt

$$g(z) = e^{h(z)} \cdot f(z)\,. \qquad \square$$

BEMERKUNG. Der Produktsatz für *beliebige Gebiete* lautet:

SATZ 12.6. *Sei $(a_1, a_2, \ldots)$ eine Folge komplexer Zahlen aus einem Gebiet G ohne Häufungspunkt in G. Dann existiert $f(z) \in \mathfrak{H}(G)$ mit den vorgeschriebenen Nullstellen.*

- WEIERSTRASS (1876): $G = \mathbb{C}$.
- MITTAG-LEFFLER (1884): beliebige Gebiete G.
- PICARD: $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{a_n - c_n}{z - c_n}\right)$ mit $d(a_n, c_n) = d(a_n, \mathbb{C} \setminus G)$

BEWEIS. Siehe z.B. [5]

BEISPIEL. $G = \{z \mid |z| < 1\}$, $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ mit Häufungspunkt $z_0 = 1 \notin G$. Dann existiert ein $0 \not\equiv f \in \mathfrak{H}(G)$ mit den a_n als Nullstellen.

SATZ 12.7 (BLASCHKE). *Sei $G = E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und a_n eine Folge aus E ohne Häufungspunkt in E mit $a_1 = \cdots = a_m = 0$, $a_i \neq 0$ für $i > m$. Ferner sei*

$$B_a(z) = \frac{\overline{a}}{|a|}\frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \quad 0 < |a| < 1$$

($B_a(z)$ =Blaschke-Funktion, Möbiustransformation.)
Ist $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - |a_i|) < \infty$, so stellt

$$f(z) = z^m \prod_{i=m+1}^{\infty} B_{a_i}(z)$$

eine in E holomorphe Funktion mit den vorgegebenen Nullstellen dar.

BEWEIS. Nach Satz 12.1 ist zu zeigen:

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |B_{a_i}(z) - 1| \quad \text{konvergieren kompakt auf } E.$$

Sei A eine kompakte Teilmenge in E. Es gibt ein $r < 1$ mit

$$|z| \leq r \quad \text{für alle } z \in A.$$

(A und der Einheitskreis besitzen einen positiven Abstand.)

Dann ist

$$\begin{aligned} |B_a(z)-1| &= \left|\frac{\overline{a}}{|a|}\cdot\frac{a-z}{1-\overline{a}z}-1\right| = \left|\frac{\overline{a}a-\overline{a}z-|a|+|a|\overline{a}z}{|a||1-\overline{a}z|}\right| \\ &= \left|\frac{(|a|-1)(|a|+\overline{a}z)}{|a||1-\overline{a}z|}\right| \\ &\le (1-|a|)\cdot\frac{|a|+|\overline{a}||z|}{|a|(1-|\overline{a}||z|)} \le (1-|a|)\cdot\frac{1+|z|}{1-|z|} \\ &\le (1-|a|)\cdot\frac{1+r}{1-r} \quad \text{für } |z|\le r\,, \end{aligned}$$

also für $z\in A$

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}|B_{a_i}(z)-1| \le \frac{1+r}{1-r}\cdot\sum_{i=m+1}^{\infty}(1-|a_i|)\,.$$

Nach Satz 12.1 konvergiert $f(z)=z^m\prod_{i=m+1}^{\infty}B_{a_i}(z)$ kompakt und absolut, $f(z)\in\mathfrak{H}(E)$. Nach Satz 12.1(2.) hat $f(z)$ die vorgeschriebenen Nullstellen. □

BEISPIEL. Sei $a_{n,k}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)e^{\frac{2\pi i}{n}k}$, $n=1,2,\ldots,\ 0\le k<n$.

Wegen

$$\sum_{n,k}(1-|a_{n,k}|)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}<\infty$$

ist $f(z)=\prod_{n,k}B_{a_{n,k}}(z)$ holomorph in E und hat in $a_{n,k}$ einfache Nullstellen. Jeder Punkt z mit $|z|=1$ ist Häufungspunkt der $a_{n,k}$. f ist holomorph in E, läßt sich jedoch nicht holomorph auf ein größeres Gebiet fortsetzen.

Algebraische Eigenschaften von $\mathfrak{H}(G)$

1. Die Menge der in G holomorphen Funktionen ist ein kommutativer Ring mit Eins

$$\begin{aligned}(f+g)(z) &:= f(z)+g(z)\\ (fg)(z) &:= f(z)\cdot g(z)\end{aligned}$$

   $\mathfrak{H}(G)$ ist *nullteilerfrei*: Seien $0\not\equiv f,g\in\mathfrak{H}(G)$ und $a\in G$.
   Für $z\in U_\varepsilon(a)$, $z\ne a$ gilt

$$f(z),g(z)\ne 0 \quad\Longrightarrow\quad fg(z)\ne 0 \quad\Longrightarrow\quad fg\ne 0$$

2. Die Einheiten von $\mathfrak{H}(G)$ sind die Funktionen ohne Nullstellen.

$$G=\mathbb{C} \quad\overset{\text{Satz 12.5}}{\Longrightarrow}\quad f(z)=e^{h(z)}$$

3. $f\mid g :\Longleftrightarrow$ Es gibt ein h mit $f\cdot h=g$, $N(f)=$ Menge der Nullstellen von f

$$f\mid g \iff N(f)\subseteq N(g) \iff \operatorname{ord}_a f\le\operatorname{ord}_a g$$

   (Charakterisierung der Teilbarkeit in $\mathfrak{H}(G)$.)
   $N(f)$ legt f bis auf Einheiten fest.

4. Zwei Elemente von $\mathfrak{H}(G)$ besitzen einen größten gemeinsamen Teiler

$$h = \mathrm{ggT}(f,g)\,.$$

Zum Beweis bestimme nach dem Produktsatz $h(z)$ so, daß

$$\mathrm{ord}_a\, h(z) = \min\bigl\{\mathrm{ord}_a\, f(z), \mathrm{ord}_a\, g(z)\bigr\}\,.$$

Folgerung:

$$\begin{aligned} f,g \text{ teilerfremd} &\iff 1 = \mathrm{ggT}(f,g) \\ &\iff 0 = \min\bigl\{\mathrm{ord}_a\, f, \mathrm{ord}_a\, g\bigr\} \\ &\iff f \text{ und } g \text{ haben keine gemeinsamen} \\ &\qquad \text{Nullstellen, } N(f)\cap N(g) = \emptyset \end{aligned}$$

5. $\mathfrak{H}(G)$ ist kein Gaußscher Ring, das heißt bis auf Einheiten gibt es keine eindeutige Primfaktorzerlegung, denn es gilt $f = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \implies f$ hat endlich viele Nullstellen. (p prim $\iff$ p hat eine einfache Nullstelle.)
6. Sind f und g teilerfremd, so gibt es $p, q \in \mathfrak{H}(G)$ mit

$$1 = p\cdot f + q\cdot g \quad (\text{BEZOUT-Gleichung})$$

Beweis: $A = N(f)\cup N(g)$ besitzt keinen Häufungspunkt in G. Ermittle nach Satz 12.3 eine Funktion $h(z)\in\mathfrak{H}(G)$ mit

$$h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(\mathrm{ord}_a\, f)}(a) = 0 \text{ für } a\in N(f)$$

$$h(b) = 1,\ h'(b) = \cdots = h^{(\mathrm{ord}_b\, g)}(b) = 0 \text{ für } b\in N(g)\,.$$

Dann gilt $f \mid h$, das heißt es gibt $p\in\mathfrak{H}(G)$ mit $p\cdot f = h$, und es gilt $g \mid 1-h$, also gibt es $q\in\mathfrak{H}(G)$ mit $q\cdot g = 1-h$. $\implies 1 = p\cdot f + q\cdot g$.
7. Es sei $d = \mathrm{ggT}(f,g)$. Dann gibt es $p,q\in\mathfrak{H}(G)$ mit $d = pf+qg$.
Beweis: $f^* = \frac{f}{d}$, $g^* = \frac{g}{d}$ sind teilerfremd, also gibt es p,q mit

$$1 = pf^* + qg^* \quad\implies\quad d = pf+qg$$

8. Jedes endlich erzeugte Ideal von $\mathfrak{H}(G)$ ist Hauptideal (HELMER, 1940).
Beweis: Es genügt, dies für ein von zwei Elementen erzeugtes Ideal $I=(f,g)$ zu zeigen. Sei $d = \mathrm{ggtT}(f,g)$. Es folgt $f = kd$, $g = ld$, also $(f,g)\subseteq(d)$. Wegen 7. ist $d = pf+qg\in(f,g)$. $\implies (f,g) = (d)$.
9. Sei A eine unendliche Punktmenge ohne Häufungspunkt in G.

$$I = \{f\in\mathfrak{H}(G) \mid f(a) = 0 \text{ für fast alle } a\in A\}$$

ist ein nicht endlich erzeugtes Ideal in $\mathfrak{H}(G)$ (siehe z.B. [12, Bd.2]).

KAPITEL 13

Meromorphe Funktionen

DEFINITION. Eine Funktion f heißt *meromorph* in einem Gebiet G, wenn f in G bis auf Pole holomorph ist. Sei im folgenden $\mathfrak{M}(G)$ die Menge der in G meromorphen Funktionen ($\mathfrak{H}(G) \subseteq \mathfrak{M}(G)$).

BEISPIEL. $\sin z$, $\cos z \in \mathfrak{H}(\mathbb{C})$, $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \in \mathfrak{M}(\mathbb{C})$.

Sei weiter $\mathfrak{P}(f)$ die Menge der Pole von f. Setzt man $f(z) := \infty$ für $z \in \mathfrak{P}(f)$, so hat man

$$f : G \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

EINFACHE EIGENSCHAFTEN:

(A) $\mathfrak{P}(f)$ besitzt keinen Häufungspunkt, denn ein Häufungspunkt wäre eine nicht isolierte Singularität, also kein Pol. In jeder kompakten Teilmenge liegen also nur endlich viele Pole.

(B) Sei $a \in G$ und

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^k f^*(z).$$

$f^*(a) \neq 0$, $f^*(z)$ holomorph in $z = a$.

DEFINITION. Sei $f \in \mathfrak{M}(G)$.

$$\operatorname{ord}_a f := \begin{cases} k & \text{für } f \not\equiv 0 \\ \infty & \text{falls } f \equiv 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{ord}_a : \mathfrak{M}(G) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

Es gilt dann

(1) $\operatorname{ord}_a f = \infty \iff f = 0$

(2) $\operatorname{ord}_a(f+g) \geq \min(\operatorname{ord}_a f, \operatorname{ord}_a g)$

(3) $\operatorname{ord}_a fg = \operatorname{ord}_a f + \operatorname{ord}_a g$

BEWEIS. Sei $f(z) = (z-a)^k f^*(z)$, $g(z) = (z-a)^l g^*(z)$. Sei $k \leq l$.

$$\begin{aligned} f+g &= (z-a)^k (f^* + (z-a)^{l-k} g^*) \\ fg &= (z-a)^{k+l} f^* g^* \end{aligned}$$

$f+g$, $fg \in \mathfrak{M}(G)$ holomorph in $G \setminus (\mathfrak{P}(f) \cup \mathfrak{P}(g))$.

$f \not\equiv 0$, $\frac{1}{f}$ hat Pole, wo f Nullstellen hat.

$$\operatorname{ord}_a f + \operatorname{ord}_a \frac{1}{f} = \operatorname{ord}_a 1 \quad = \quad 0$$

$$\operatorname{ord}_a \frac{1}{f} = -\operatorname{ord}_a f\,. \qquad \square$$

ERGEBNIS. $\mathfrak{M}(G)$ ist ein Körper.

SATZ 13.1 (WEIERSTRASS). *Jede meromorphe Funktion ist Quotient zweier holomorpher Funktionen (algebraisch formuliert: $\mathfrak{M}(G)$ ist der Quotientenkörper von $\mathfrak{H}(G)$).*

BEWEIS. Sei $f \in \mathfrak{M}(G)$. Nach dem Produktsatz gibt es ein $g \in \mathfrak{H}(G)$ mit

$$\operatorname{ord}_a g = -\operatorname{ord}_a f \qquad a \in \mathfrak{P}(f)\,.$$

Dann ist

$$\operatorname{ord}_a(fg) = \operatorname{ord}_a f + \operatorname{ord}_a g \begin{cases} = 0 & \text{für } a \in \mathfrak{P}(f) \\ \geq 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

also

$$h = fg \in \mathfrak{H}(G) \Longrightarrow f = \frac{h}{g}\,. \qquad \square$$

BEMERKUNG. Zur Begriffsbildung:

meromorph	$\rightsquigarrow$	*meros*	=	bruchartig
holomorph	$\rightsquigarrow$	*holos*	=	ganzartig

DEFINITION. Sei $a \in G$, $f \in \mathfrak{M}(G)$ und

$$f(z) = \sum_{i=k}^{\infty} b_i (z-a)^i$$

die Laurententwicklung. Dann heißt

$$H_a(f) = \sum_{i=k}^{-1} b_i (z-a)^i$$

Hauptteil von f in a (siehe auch die Definition auf Seite 73).

$H_a(f) = H_a(g)$ für alle $a \in G \iff h = f - g \in \mathfrak{H}(G)$.

SATZ 13.2 (Anschmiegungssatz (MITTAG-LEFFLER)). *Es sei A eine Punktmenge eines Gebietes G ohne Häufungspunkt in G. Jedem $a_n \in A$ sei (willkürlich) ein Ausdruck*

$$H_n(z) = \sum_{i=k_n}^{-1} b_{n_i} (z-a_n)^i \qquad k_n \leq -1$$

zugeordnet. Es gibt dann eine meromorphe Funktion f, die genau an den Stellen a_n Pole mit den Hauptteilen $H_{a_n} f = H_n(z)$ besitzt.

BEWEIS. Beweisidee: Setze

$$f(z) = \sum_n (H_n(z) - h_n(z))$$

mit $h_n(z) \in \mathfrak{H}(G)$ und bestimme $h_n(z)$ so, daß die Summe konvergiert ($h_n(z)$ heißen konvergenzerzeugende Summanden).

Beweis für $G = \mathbb{C}$:

Man kann $0 \notin A$ voraussetzen (andernfalls addiere nachträglich den zu Null gehörigen Ausdruck). $H_n(z)$ hat in $z = a_n$ einen Pol, sonst ist $H_n(z)$ holomorph. Sei

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

die Taylorreihe. Sie konvergiert für $|z| < |a_n|$ (siehe Satz 7.9, Seite 67, Entwicklung um $z_0 = 0$) und gleichmäßig für $|z| \leq \frac{1}{2}|a_n|$.

Sei $\sum \varepsilon_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$, $\varepsilon_n > 0$, und

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{l_n} b_k z^k$$

mit

$$|H_n(z) - h_n(z)| < \varepsilon_n \text{ für } |z| \leq \tfrac{1}{2}|a_n|\,.$$

Sei $R > 0$ beliebig und $|z| < R$. Setze

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{|a_n| \leq 2R} (H_n(z) - h_n(z)) + \sum_{|a_n| > 2R} (H_n(z) - h_n(z)) \\ &= f_1(z) + f_2(z)\,. \end{aligned}$$

Die erste Summe ist endlich, stellt also eine meromorphe Funktion $f_1(z)$ dar, die holomorph in $\mathbb{C} \setminus A$ ist.

Für $|a_n| > 2R$ ist $|z| < R < \frac{1}{2}|a_n|$, also

$$|H_n(z) - h_n(z)| < \varepsilon_n\,.$$

Die zweite Summe konvergiert gleichmäßig, also ist $f_2(z)$ holomorph für $|z| < R$. Weil R beliebig ist, konvergiert $f(z) = \sum(H_n(z) - h_n(z))$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus A$ und ist holomorph. Ferner ist für $a_k \in A$ und $|a_k| < R$

$$H_{a_k}(f) = H_{a_k}(f_1(z)) = H_{a_k}(H_k(z)) = H_k(z)\,. \qquad \square$$

BEISPIELE.

(1) $a_n = n$, $H_n(z) = \frac{1}{z-n}$

$$H_n(z) = -\frac{1}{n}\frac{1}{1 - \frac{z}{n}} = -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^i\,.$$

$$H_n(z) - h_n(z) = -\frac{1}{n}\sum_{i=l_n+1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^i$$

$$= \quad -\frac{1}{n}\frac{z^{l_n+1}}{n^{l_n+1}}\frac{1}{1-\frac{z}{n}}\,, \qquad |z|<n\,.$$

Setze $l_n := 0$.

$$h_n(z) = -\frac{1}{n}, \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).$$

$$|H_n(z) - h_n(z)| \le 2|z|\frac{1}{n^2}\,.$$

(2) $F(z) = \pi\cdot\cot\pi z := \pi\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$ besitzt Pole 1. Ordnung in $z = n \in \mathbb{Z}$ mit den Hauptteilen

$$H_n(z) = \frac{1}{z-n}\,.$$

Nach dem Satz von Mittag-Leffler (Satz 13.2) ist

$$\pi\cot\pi z = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

mit einer noch nicht näher bestimmten Funktion $g(z)$, die holomorph in $\mathbb{C}$ ist.

$$\begin{aligned}\pi\cot\pi z &= g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\\ &= g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\,.\end{aligned}$$

Satz 13.3. *Seien die Bezeichnungen wie im letzten Beispiel. Dann ist*

$$F(z) = \pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).$$

Beweis (Cauchy). 1.) Es gilt

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-m\\ n\neq 0}}^{m}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{z\,F(u)}{u(u-z)}\,du\,, \tag{13.1}$$

wobei C_m ein einfacher Weg ist, der die Pole $z = n$, $|n| \le m$ enthält.

Setze $g(u) = \frac{zF(u)}{u(u-z)}$, $z \notin \mathbb{Z}$ fest gewählt. Nach dem Residuensatz 9.1 (Seite 81) ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} g(u)du = \sum_i \operatorname{Res}\left[g(u), u_i\right],$$

wobei sich die Residuen berechnen lassen (siehe Regeln auf Seite 82) durch

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[g(z), a\right] &\overset{(A)}{=} \lim_{z\to a}(z-a)\,g(z) \quad \text{falls } a \text{ Pol 1.Ordnung}\\ &\overset{(C)}{=} \lim_{z\to a}\frac{\left((z-a)^k g(z)\right)^{(k-1)}}{(k-1)!} \quad \text{falls } a \text{ Pol } k\text{-ter Ordnung}\end{aligned}$$

Die Funktion

$$g(u) = \frac{z\,F(u)}{u\,(u-z)} = \frac{z\pi\cos\pi u}{u(u-z)\sin\pi u}$$

besitzt innerhalb von C_m

- Pole 1. Ordnung in $u = z$, $u = n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$
- Pol 2. Ordnung in $u = 0$.

Es ist also

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,[g(u), z] &= \lim_{u\to z}(u-z)\cdot\frac{z\,F(u)}{u\,(u-z)} = F(z)\\
\text{Res}\,[g(u), n] &= \lim_{u\to n}(u-n)\frac{z\,F(u)}{u\,(u-z)} = -\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\\
\text{Res}\,[g(u), 0] &= \lim_{u\to 0}\left(u^2\frac{z\,F(u)}{u\,(u-z)}\right)' = -\frac{1}{z}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Gleichung (13.1).

2.)

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} g(u)du = 0\,.$$

Wähle speziell C_m als Quadrat mit den Eckpunkten

$$\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)\,.$$

Behauptung: Es ist $|F(u)| \le 2\pi$ für $u \in C_m$.
Sei etwa $u = \left(m+\frac{1}{2}\right) + iy$. Dann ist

$$\begin{aligned}
F(u) &= \pi\,\text{cotan}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi + iy\right) = -\pi\tan(iy\pi)\\
&= -\pi\tanh(\pi y)\,.
\end{aligned}$$

Analog für die anderen Seiten des Quadrates.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{zF(u)}{u(u-z)}du\right| &\le \frac{1}{2\pi}\frac{|z|\cdot 2\pi}{\left(m+\frac{1}{2}\right)(m-|z|)}\cdot 8\left(m+\frac{1}{2}\right)\\
&\le \frac{8|z|}{m-|z|}\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Satz 13.4. *Sei $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ kompakt konvergent auf G. Dann ist*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

und konvergiert kompakt in $G' = G \setminus \{z \mid F(z) = 0\}$ und heißt logarithmische Ableitung (*ohne Beweis*).

KOROLLAR 13.5. (EULER) *Es ist*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) . \tag{13.2}$$

BEWEIS. Nach dem Produktsatz 12.3 (Seite 104) ist hier

$$\sin \pi z = e^{h(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

logarithmisch abgeleitet

$$\pi \operatorname{cotan} \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-\frac{2z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}}}_{\frac{2z}{z^2 - n^2}}$$

$$\overset{\text{Satz 13.3}}{\Longrightarrow} \quad h'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h(z) = \text{ konstant, } e^{h(z)} =: C'$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sin \pi z}{\pi z} = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{mit } C = \tfrac{C'}{\pi} .$$

Für $z \to 0$ ergibt sich $C = 1$.

$$z = \frac{1}{2} \quad : \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \qquad \text{(WALLIS)}$$

$$z = i \quad : \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} . \qquad \square$$

Interpolation mit Polynomen:

Gegeben: $a_0, \ldots, a_n, \omega_0, \ldots, \omega_n$

Gesucht: Polynom $p(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$ mit $p(a_i) = \omega_i$, $i = 0, \ldots, n$.

1. NEWTON: 1, $z - a_0$, $(z - a_0)(z - a_1), \ldots$
2. LAGRANGE:

$$\begin{aligned}
q_i(z) &= \frac{\prod_{j=0}^{n}(z - a_j)}{z - a_i} \\
q_0(z) &= (z - a_1) \cdot \ldots \cdot (z - a_n) \\
q_1(z) &= (z - a_0)(z - a_2) \cdot \ldots \cdot (z - a_n) \\
p(z) &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j q_j(z) \\
p(a_i) &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j q_j(a_i) = \alpha_i \underbrace{q_i(a_i)}_{\neq 0} = \omega_i \\
&\Longrightarrow \quad \alpha_i = \frac{\omega_i}{q_i(a_i)} .
\end{aligned}$$

SATZ 13.6 (Anschmiegungssatz von MITTAG-LEFFLER). *Es sei A eine Teilmenge eines Gebietes G ohne Häufungspunkt in G. Jedem $a \in A$ seien n_a komplexe Zahlen $\omega_{a,k}$, $0 \le k < n_a$, zugeordnet. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{H}(G)$ mit*

$$f^{(k)}(a) = \omega_{a,k}\,, \qquad 0 \le k < n_a$$

für alle $a \in A$. (*Anschmiegungssatz*)

Spezialfall*: Jedem $a \in A$ sei ein ω_a zugeordnet. Es gibt dann ein $f \in \mathfrak{H}(G)$ mit*

$$f(a) = \omega_a \text{ für alle } a \in A$$

(*allgemeiner Interpolationssatz*).

BEWEIS. Sei $g \in \mathfrak{H}(G)$ mit Nullstellen in A der Ordnung $\operatorname{ord}_a g = n_a$, das heißt die Taylorreihe von g in a ist

$$g(z) = (z-a)^{n_a}(b_0 + b_1(z-a) + \cdots)\,.$$

Betrachte die Polynome

$$Q_a(z) = \omega_{a,0} + \frac{\omega_{a,1}}{1!}(z-a) + \frac{\omega_{a,2}}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{\omega_{a,n_a-1}}{(n_a-1)!}(z-a)^{n_a-1}$$

und

$$\frac{Q_a(z)}{g(z)} = H_a(z) + P_a(z)\,,$$

wobei $H_a(z)$ der Hauptteil von $\frac{Q_a(z)}{g(z)}$ und $P_a(z)$ holomorph in a ist.

Nach Satz 13.2 gibt es eine Funktion $h \in \mathfrak{M}(G)$, die in $a \in A$ Pole mit den Hauptteilen $H_a(z)$ hat. Dann ist

$$f(z) = h(z)g(z)$$

die gesuchte Funktion. In $a \in A$ ist

$$h(z) = H_a(z) + h^*(z)\,, \quad h^*(z) \text{ holomorph in } a,$$

also gilt in einer Umgebung von a

$$\begin{aligned} f(z) &= H_a(z)g(z) + h^*(z)g(z) \\ &= Q_a(z) + (h^*(z) - P_a(z))\,g(z) \\ &= \omega_{a,0} + \frac{\omega_{a,1}}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{\omega_{a,n_a-1}}{(n_a-1)!}(z-a)^{n_a-1} \\ &\quad + c_{n_a}(z-a)^{n_a} + \cdots \qquad \square \end{aligned}$$

BEISPIEL. *Lagrangeinterpolation:* Es sei $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ und $z = a_0, \ldots, a_n$ sowie $f(z) = \omega_0, \ldots, \omega_n$ vorgegebene Werte. $g(z) = \prod_{j=0}^{n}(z - a_j)$ hat einfache

Nullstellen in $a_i \in A$.

$$\begin{aligned} Q_{a_i}(z) &= \omega_i \\ \frac{Q_{a_i}(z)}{g(z)} &= \frac{\omega_i}{z-a_i}\frac{1}{q_i(z)} \quad \text{mit } q_i(z) = \tfrac{g(z)}{z-a_i} \\ &= \underbrace{\frac{\omega_i}{z-a_i}\frac{1}{q_i(a_i)}}_{H_{a_i}(z)} + P_{a_i}(z)\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $h(z) = \sum_{j=0}^{n} H_{a_j}(z)$ hat die Hauptteile $H_{a_i}(z)$ in a_i.

$$f(z) = h(z)g(h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega_j}{z-a_j}\frac{1}{q_j(a_j)}g(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega_j}{q_j(a_j)}q_j(z)\,.$$

KAPITEL 14

Analytische Fortsetzung

DEFINITION. Sei $f_1 : G_1 \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine holomorphe Funktion $f_2 : G_2 \to \mathbb{C}$ heißt eine *analytische Fortsetzung* von f_1, wenn $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ und

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ für alle } z \in G_1 \cap G_2.$$

Dann ist

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{für } z \in G_1 \\ f_2(z) & \text{für } z \in G_2 \end{cases}$$

holomorph in $G_1 \cup G_2$. Wegen des Identitätssatzes 7.11 (Seite 71) ist $f(z)$ bereits durch $f_1(z)$ festgelegt.

AUFGABE. Es sei $f_1(z) = \sum a_n(z-a)^n$ definiert in einem Kreis um a. Erweitere f_1 zu einer Funktion f auf einem möglichst großem Gebiet.

BEISPIELE.

(1) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ist holomorph in $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} \\ &= \frac{1}{1-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n} \quad \text{für } |z-a| < |1-a| \end{aligned}$$

Sei $a_1 = 0$, $a_2 = 1+i$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1-i$ und

$$G_i = \{z \mid |z - a_i| < 1\} \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$\begin{aligned} f_1 &: G_1 \to \mathbb{C}, \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ f_2 &: G_2 \to \mathbb{C}, \qquad f_2(z) = \frac{1}{-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{(-i)^n} \\ f_3 &: G_3 \to \mathbb{C}, \qquad f_3(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(-1)^n} \end{aligned}$$

$$f_4 \;:\; G_4 \to \mathbb{C}, \qquad f_4(z) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{i^n}\,.$$

Wegen $f(z) = \frac{1}{1-z} = f_i(z)$ für $z \in G_i$ ist f_2 analytische Fortsetzung von f_1, f_3 analytische Fortsetzung von f_2, f_4 analytische Fortsetzung von f_3 und f_1 analytische Fortsetzung von f_4.

(2)

$$f_1 \;:\; G_1 \to \mathbb{C}, \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$$f_2 \;:\; G_2 \to \mathbb{C}, \qquad f_2(z) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i+1)^{n+1}}{(n+1)(-i)^n}$$

$$f_3 \;:\; G_3 \to \mathbb{C}, \qquad f_3(z) = \pi i - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{n+1}}{(n+1)(-1)^n}$$

$$f_4 \;:\; G_4 \to \mathbb{C}, \qquad f_4(z) = \frac{3\pi}{2} i + \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^{n+1}}{(n+1)i^n}\,.$$

Behauptung: f_2 ist analytische Fortsetzung von f_1. Sei $z \in G_1 \cap G_2$.

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \int_0^z \frac{dz}{1-z} \\
&= \int_0^{i+1} \frac{dz}{1-z} + \int_{i+1}^{z} \frac{dz}{1-z} \\
&= -\ln(1-z)\,\Big|_0^{1+i} + \int_{1+i}^{z} -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i-1)^n}{(-i)^n}\,dz \\
&= -\ln e^{-\frac{\pi}{2}i} - \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i-1)^{n+1}}{(n+1)(-i)^n} \;=\; f_2(z)\,.
\end{aligned}$$

Analog: f_3 ist analytische Fortsetzung von f_2, und f_4 ist analytische Fortsetzung von f_3. Für $z \in G_1 \cap G_4$:

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \int_0^{1-i} \frac{dz}{1-z} + \int_{1-i}^{z} \frac{dz}{1-z} \;=\; -\frac{\pi}{2} i + \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^{n+1}}{(n+1)i^n} \\
&= -2\pi i + f_4(z)\,.
\end{aligned}$$

DEFINITION. Es sei $\mathfrak{P}$ die Menge der Potenzreihen

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\; a_i \in \mathbb{C}$$

mit positivem Konvergenzradius $r_p > 0$ und G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Ein Element $(a, P) \in G \times \mathfrak{P}$ heißt *Funktionselement* auf G.

DEFINITION. Zu (a,P) sei $U(a,P)$ die größte offene Kreisscheibe in G, in der $P(z-a)$ konvergiert und

$$f_{(a,P)} : U(a,P) \to \mathbb{C} \quad f_{(a,P)}(z) = P(z-a)$$

holomorphe Funktion. Dabei sei

$$\text{Radius von } U(a,P) := \begin{cases} \min\{d(a, \complement G), r_p\} \\ \infty \text{ falls } G = \mathbb{C} \text{ und } r_p = \infty \text{ ist} \end{cases}$$

Zwei Funktionselemente $(a,P),(b,Q) \in G \times \mathfrak{P}$ heißen *direkte Fortsetzungen* voneinander, geschrieben

$$(a,P) \leftrightarrow (b,Q)$$

wenn $U(a,P) \cap U(b,Q) \neq \emptyset$ und $P(z-a) = Q(z-b)$ für alle $z \in U(a,P) \cap U(b,Q)$.

DEFINITION. Definiere eine Äquivalenzrelation auf $G \times \mathfrak{P}$:

$$\begin{aligned} (a,P) \sim (b,Q) \quad :\Longleftrightarrow \quad & \text{Es gibt endlich viele Funktionselemente} \\ & (a_i,P_i),\ i = 0,\dots,n \ \text{ mit} \\ & (a_{i-1},P_{i-1}) \leftrightarrow (a_i,P_i) \ \text{ und} \\ & (a,P) = (a_0,P_0),\ (b,Q) = (a_n,P_n) \end{aligned}$$

Eine Äquivalenzklasse

$$[f] = \{(b,Q) \in G \times \mathfrak{P} \mid (b,Q) \sim (a,P)\}$$

heißt die vom Funktionselement (a,P) erzeugte *analytische „Funktion“* (WEIERSTRASS) .

BEMERKUNG.

(1) Unter „Funktion“ versteht man hier mehrdeutige Funktionen. Zu einem $b \in G$ kann es mehrere Funktionselemente

$$(b,Q_1),(b,Q_2),\dots$$

oder auch kein Funktionselement geben ((a,P) ist in b nicht fortsetzbar).

(2) Gibt es zu $b \in G$ *genau ein* $(b,Q) \in [f]$, so wird durch

$$[f](z) = Q(z-b) \text{ für } z \in U(b,Q)$$

lokal eine holomorphe Funktion auf G definiert.

Zu $b \in U(a,P)$ gibt es ein $(b,Q) \leftrightarrow (a,P)$ mit $Q(z-b)$ Taylorreihe von $f(z) = P(z-a)$ in b mit $r_Q \geq r - |a-b|$.

SATZ 14.1.

(1) *Gibt es zu jedem $b \in G$ genau ein $(b,Q) \in [f]$, so wird durch*

$$f(z) = Q(z-b) \text{ für } z \in U(b,Q)$$

eine holomorphe Funktion auf G definiert, die (a,P) fortsetzt.

(2) *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $P(z-a)$ die Taylorreihe von f in a, so ist für jedes $(b,Q) \sim (a,P)$ dann $Q(z-b)$ die Taylorreihe von f in b (das heißt zu b gibt es genau ein $(b,Q) \sim (a,P)$).*

BEWEIS.

(1) $f(z)$ ist wohldefiniert in G.
Sei $(a,P) \sim (b,Q)$ mit $U(a,P) \cap U(b,Q) \neq \emptyset$ und c Element des Durchschnitts. Es gibt (c,R), (c,R') mit $(c,R) \leftrightarrow (a,P)$ und $(c,R') \leftrightarrow (b,Q)$. Wegen der Eindeutigkeit ist $R = R'$, also $P(c-a) = Q(c-b)$. $f(z) = Q(z-b)$ ist in $U(b,Q)$ differenzierbar, also holomorph in G.

(2) Sei $(a,P) \sim (b,Q)$, etwa

$$(a,P) \leftrightarrow (a_1,P_1) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (a_n,P_n) = (b,Q).$$

Für $z \in U(a,P) \cap U(a_1,P_1)$ ist $P(z-a) = P_1(z-a_1)$, also $f(z) = P_1(z-a_1)$. Nach dem Identitätssatz 7.11 ist $P_1(z-a_1)$ die Taylorreihe von $f(z)$ in a_1, analog $P_2(z-a_2)$ in a_2 usw., also $P_n(z-a_n) = Q(z-b)$ Taylorreihe von $f(z)$ in b. □

BEISPIEL. $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$ $a = 0$, $P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ ist Taylorreihe von $\frac{1}{1-z}$ in $a = 0$.

$$[f] = \left\{ (b,Q) \;\middle|\; Q(z-b) \text{ Taylorreihe von } \tfrac{1}{1-z} \text{ in } b \right\}$$

DEFINITION. Ein Funktionselement (a,P) heißt *uneingeschränkt* auf G *fortsetzbar*, wenn zu jedem $(b,Q) \sim (a,P)$ und $c \in G$ auf dem Rand von $U(b,Q)$ ein (c,R) mit $(c,R) \leftrightarrow (b,Q)$ existiert.

HILFSSATZ 14.1. *Ist (a,P) auf G uneingeschränkt fortsetzbar und $(b,Q) \sim (a,P)$, so liegt auf dem Rand von $U(b,Q)$ ein Randpunkt von G.*

BEWEIS. *Annahme:* Der Rand K von $U(b,Q)$ liegt ganz in G.
Es ist $K \subseteq \bigcup_{c \in K} U(c,R)$, also weil K kompakt, ist $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U(c_i,R_i)$.
Es gibt ein $d > 0$ mit $\{z \mid |z-b| < r+d\} \subseteq G$. $Q(z-b)$ ist analytisch fortsetzbar auf dieser Menge. (Widerspruch zur Definition von $U(b,Q)$). □

SATZ 14.2 (Monodromiesatz). *Das Gebiet G sei einfach zusammenhängend und (a,P) uneingeschränkt auf G fortsetzbar. Dann gibt es eine in G holomorphe Funktion, die das Funktionselement (a,P) analytisch fortsetzt.*

BEWEIS. Es seien $(b_i,Q_i) \in [f]$, $i = 1,\ldots,n$,

$$(b_1,Q_1) \leftrightarrow (b_2,Q_2) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (b_n,Q_n)$$

und $U(b_1,Q_1) \cap U(b_n,Q_n) \neq \emptyset$.
Behauptung: $(b_1,Q_1) \leftrightarrow (b_n,Q_n)$
$S = [b_1,b_2] + \ldots + [b_n,b_1]$ ist ein geschlossener Streckenzug. Weil G einfach zusammenhängend ist, ist $S = \partial\left(\sum_{i=1}^{k} \triangle_i\right)$, $\triangle_i$ Dreiecke in G, Rand einer 2-Kette.

Sei $|\triangle|$=Punktmenge des Dreiecks, $|\triangle| \subseteq G$. Die Menge $A = \bigcup_{i=1}^{k} |\triangle_i|$ ist kompakt in G.

Sei $d > 0$ der Abstand von A und $\complement G$. Durch Unterteilung des Streckenzuges und der Dreiecke kann man erreichen, daß die Seitenlängen der $\triangle_i$ kleiner als d sind. Es seien a_i die Eckpunkte der Dreiecke. Die b_i bilden eine Teilmenge davon.

Die Radien von $U(b_1, Q_1)$ und $U(b_2, Q_2)$ sind $\geq d$ nach Hilfssatz 14.1, also ist $a_i \in U(b_1, Q_1) \cap U(b_2, Q_2)$.

Es gibt also eine holomorphe Funktion $f(z)$ auf $U(b_1, Q_1) \cup U(b_2, Q_2) \cup U(a_i, R_i)$, die durch die Potenzreihen in b_1, b_2, a_i dargestellt wird.

Induktionsbeweis nach der Anzahl der Dreiecke:

1. $k = 1$: Sei $\triangle_1 = [b_1\, b_2\, a_i]$ das Dreieck, das $[b_1\, b_2]$ enthält. $k = 1$, $(b_1, P_1) \leftrightarrow (b_2, P_2) \leftrightarrow (b_n, P_n)$ Nach Hilfssatz 14.1 ist

$$|\triangle_1| \subseteq U(b_1, P_1) \cap U(b_2, P_2) \cap U(b_n, P_n) =: U \neq \emptyset\,.$$

   Für $z \in U$ ist

$$P_1(z - b_1) = P_2(z - b_2) = P_n(z - b_n)$$

   also $(b_1, P_1) \leftrightarrow (b_n, P_n)$.

2. $k > 1$:
   (a) Ist $\triangle_1 = [b_1\, b_2\, b_3]$, so ist $(b_1, P_1) \leftrightarrow (b_3, P_3)$.

$$\Longrightarrow \quad S' = [b_1\, b_3] + [b_3\, b_4] + \cdots$$

   ist Rand von $(k-1)$ Dreiecken:

$$S' = \partial \left(\sum_{i=2}^{k} \triangle_i \right)$$

   Durch Induktion: $(b_1, P_1) \leftrightarrow (b_n, P_n)$

   (b) Sei $\triangle = [b_1\, b_2\, a_i]$, $a_i \neq b_3$ und $(b_1, P_1) \leftrightarrow (a_i, Q) \Longrightarrow (a_i, Q) \leftrightarrow (b_2, P_2)$

$$S' := [b_1, a_i] + [a_i, b_2] + [b_2, b_3] + \cdots = \partial \left(\sum_{i=2}^{k} \triangle_i \right)$$

   Rand von $(k-1)$ Dreiecken. Durch Induktion folgt die Behauptung. □

DEFINITION. Eine *Riemannsche Fläche* M ist ein zusammenhängender topologischer Raum mit einem abzählbaren analytischen Atlas

$$H = \{(U_\lambda, h_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}\,, \qquad (U_\lambda, h_\lambda) \text{ Karte}\,.$$

Es gilt:

1. Die U_λ sind offene Mengen in M mit $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M$.
2. $h_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{C}$ ist injektiv und stetig.
   $h_\lambda : U_\lambda \to h_\lambda(U_\lambda)$ ist ein Homöomorphismus.
3. Ist $\lambda, \mu \in \Lambda$ mit $U = U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, so ist die Abbildung

$$h_{\lambda\mu} : h_\lambda(U) \to h_\mu(U), \quad h_{\lambda\mu} = h_\mu h_\lambda^{-1}(z)$$

   holomorph.

BEISPIEL. $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definition der Topologie: Seien $U_r = \{z \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}$ Umgebungen von ∞ und $U_\varepsilon(a) = \{z \mid |z-a| < \varepsilon\}$ Umgebungen von a. $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ist offen, wenn mit jedem $a \in A$ auch eine Umgebung von a in A liegt. $\widehat{\mathbb{C}}$ ist kompakt.

Definition des Atlas: Sei $U_1 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$, $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$,

$$h_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z,$$
$$h_2 : U_2 \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{1}{z},$$

$U = U_1 \cap U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$.

$$h_1 h_2^{-1} : U \to U, \quad z \mapsto \frac{1}{z} \qquad \text{holomorph}$$

DEFINITION. Sei G ein Gebiet. M heißt *Überlagerungsfläche* von G, wenn eine holomorphe Abbildung $\Pi : M \to G$ existiert.

BEISPIELE.

(1) $M = \{(re^{it}, t) \mid r > 0, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (Spiralenfläche) ist Überlagerungsfläche von $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(2) Riemannsche Fläche zu einer analytischen „Funktion“

$$[f] = \{(b, Q) \mid (b, Q) \sim (a, P)\}$$

$M = [f]$, $\Pi : M \to G$, $(b, Q) \mapsto b$. Atlas auf M:

$$\hat{U}(b, Q) = \{(c, R) \mid c \in U(b, Q) \text{ und } (c, R) \leftrightarrow (b, Q)\}$$

Karten: $(\hat{U}(b, Q), \Pi)$. $f : M \to G$, $f(b, Q) = Q(0)$.

KAPITEL 15

Konforme Abbildungen

DEFINITION. Eine Kurve γ heißt *differenzierbar*, wenn

$$z'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = x'(t) + i\, y'(t)$$

für alle $t \in (a, b)$ existiert.

Gilt außerdem $z'(t) \neq 0$, so heißt γ *regulär* .

$z'(t_0)$ heißt *Tangentenvektor* in $z_0 = z(t_0)$.

SATZ 15.1. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Ist f stetig und γ eine Kurve, so ist auch*

$$\gamma^* : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto w(t) = f(z(t))$$

eine Kurve.

SATZ 15.2. *Das Bild einer differenzierbaren Kurve γ bei einer holomorphen Funktion ist wieder differenzierbar. Es gilt:*

$$w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t)\,. \tag{15.1}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} w'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z(t+h)) - f(z(t))}{z(t+h) - z(t)} \cdot \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \quad \Big|\begin{matrix} f \text{ diff'bar} \\ \gamma \text{ diff'bar} \end{matrix} \\ &= f'(z(t)) \cdot z'(t)\,. \qquad \square \end{aligned}$$

DEFINITION. Sind γ_1 und γ_2 zwei reguläre, durch z_0 verlaufende Kurven, und z_1' und z_2' die Tangentenvektoren in z_0, dann heißt

$$\sphericalangle(\gamma_1, z_0, \gamma_2) = \arg \frac{z_1'}{z_2'}$$

Winkel zwischen γ_1 und γ_2.

BEMERKUNG.

(1) Wegen $-\pi \leq \arg z < \pi$ ist

$$\arg \frac{z_1'}{z_2'} = \arg \frac{r_1\, e^{i\phi_1}}{r_2\, e^{i\phi_2}} = \arg \frac{r_1}{r_2}\, e^{i\,(\phi_1-\phi_2)} = \phi_1 - \phi_2\,.$$

(2) Es gilt $\sphericalangle\,(\gamma_1, z_0, \gamma_2) = -\sphericalangle\,(\gamma_2, z_0, \gamma_1)$.

DEFINITION. Eine Abbildung f heißt *konform* oder *winkeltreu* in z_0, wenn für zwei durch z_0 verlaufende Kurven und ihre Bilder gilt:

$$\sphericalangle\,(\gamma_1, z_0, \gamma_2) = \sphericalangle\,(\gamma_1^*, z_0^*, \gamma_2^*)\,.$$

SATZ 15.3. *Eine holomorphe Funktion f ist in allen Punkten z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.*

BEWEIS.

$$\arg \frac{w_1'(t_0)}{w_2'(s_0)} = \arg \frac{f'(z_0)\cdot z_1'(t_0)}{f'(z_0)\cdot z_2'(s_0)} = \arg \frac{z_1'(t_0)}{z_2'(s_0)}\,. \qquad \square$$

BEMERKUNG. Es gilt:

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(t_0)\cdot z'(t_0)) = \Big(\underbrace{\arg f'(z_0)}_{\alpha} + \arg z_0\Big) \bmod 2\pi\,.$$

Der Winkel α ist demnach nur von f, *nicht* aber von der Kurve abhängig. Bei der Abbildung f wird also der Tangentenvektor einer regulären Kurve γ durch z_0 um den Winkel $\alpha(z_0) = \arg f(z_0)$ gedreht.

BEISPIELE.

(1) $w = f(z) = \overline{z}$ ist *nicht* konform für alle z:

$$\sphericalangle\,(\gamma_1, z_0, \gamma_2) = -\sphericalangle\,(\gamma_1^*, z_0^*, \gamma_2^*)\,.$$

Trotzdem bleiben hier die Winkel erhalten, es kommt lediglich eine Spiegelung hinzu. Solche Abbildungen bezeichnet man auch als *konform im weiteren Sinne*.

(2) $f(z) = z^2$.

(a) In $z_0 = 0$ ist f nicht konform: Betrachte dazu die Gerade durch den Ursprung $z(t) = t\cdot e^{i\phi_0}$.

$$\Longrightarrow \quad w(t) = f(z(t)) = t^2\cdot e^{i2\phi_0} \quad \Longrightarrow \quad \text{keine Winkeltreue}\,.$$

(b) Für alle $z_0 \neq 0$ ist f konform. Speziell werden orthogonale Netze wieder auf orthogonale Netze abgebildet.

(3) Möbiustransformationen $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ mit $a\,d - b\,c \neq 0$.

$$\Longrightarrow \quad f'(z) = \frac{a\,(cz+d) - c\,(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0\,.$$

Möbiustransformationen sind also stets konform.

SATZ 15.4. *Sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, mit stetigen partiellen Ableitungen von u und v. Ist f konform in G, so ist f auch holomorph in G.*

BEWEIS. Es sei $z \in G$ und $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ die Parameterdarstellung einer regulären Kurve γ durch z. Dann ist

$$(*) \qquad x(t) = \frac{1}{2}(z(t) + \overline{z}(t))\,, \qquad y(t) = \frac{1}{2i}(z(t) - \overline{z}(t))\,.$$

Die Bildkurve wird dargestellt durch

$$w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + i\,v(x(t), y(t))\,.$$

Also

$$w'(t) = u_x \cdot x'(t) + u_y \cdot y'(t) + i \cdot \left[v_x \cdot x'(t) + v_y \cdot y'(t)\right]\,.$$

Mit $(*)$ gilt dann:

$$w'(t) = A \cdot z'(t) + B \cdot \overline{z'}(t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}((u_x + v_y) + i\,(v_x - u_y)) \\ B = \dfrac{1}{2}((u_x - v_y) + i\,(v_x + u_y)) \end{cases}$$

Da γ regulär ($z'(t) \neq 0$) ist, ist dann

$$\frac{w'(t)}{z'(t)} = A + B\,\frac{\overline{z'}(t)}{z'(t)} = A + B\,e^{-i\,2\,\arg(z')},$$

d.h. $\frac{w'(t)}{z'(t)}$ liegt auf einem Kreis um den Punkt A mit dem Radius $|B|$. Weil f konform ist, ist $\arg \frac{w'(t)}{z'(t)}$ unabhängig von der gewählten Kurve, also ist $B = 0$, d.h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3.11) (Seite 20) sind erfüllt. Also ist f nach Satz 3.7 (Seite 21) holomorph. □

BEMERKUNG. *konform = Aehnlichkeit* (von Bild und Urbild) *in den kleinsten Theilen* (RIEMANN).

KAPITEL 16

Harmonische Funktionen

DEFINITION. Eine Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$, G Gebiet im $\mathbb{R}^2$, heißt *harmonisch* (oder *Potentialfunktion*) in G, wenn alle partiellen Ableitungen einer Ordnung $n \leq 2$ stetig sind und die *Laplacesche Differentialgleichung*

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{16.1}$$

gilt.

BEISPIELE.

(1) $\varphi(x, y) = a + b\,x + c\,y$ ist harmonisch.
(2) $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ ist harmonisch.
(3) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ ist nicht harmonisch.

BEMERKUNG. Die Gesamtheit aller harmonischer Funktionen bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ (Δ ist ein linearer Operator).
Schreibe im folgenden zur Vereinfachung

$$\varphi(z) = \varphi(x, y), \quad z = x + i\,y, \quad G \subseteq \mathbb{C}\,.$$

SATZ 16.1. *Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion*

$$f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

sind harmonisch.

BEWEIS. u und v einer holomorphen Funktion erfüllen nach Satz 3.6 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3.11). Durch nochmaliges Differenzieren erhält man die Behauptung. □

DEFINITION. Ist $\psi : G' \to \mathbb{R}$, so heißt die Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{R}$, $\varphi(z) = \psi(f(z))$ *Verpflanzung* der Funktion ψ von G' auf G mittels f.

$$\varphi(x, y) = \psi(u(x, y), v(x, y))\,.$$

BEMERKUNG. Wann erfüllt φ die Laplace-Gleichung (16.1)?

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= \psi_u u_x + \psi_v v_x \\
\varphi_{xx} &= (\psi_{uu}u_x + \psi_{uv}v_x)u_x + \psi_u u_{xx} + (\psi_{vu}u_x + \psi_{vv}v_x)v_x + \psi_v v_{xx} \\
\text{analog } \varphi_{yy} &= (\psi_{uu}u_y + \psi_{uv}v_y)u_y + \psi_u u_{yy} + (\psi_{vu}u_y + \psi_{vv}v_y)v_y + \psi_v v_{yy} \\
\Longrightarrow \Delta\varphi &= \psi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\,\psi_{uv}\underbrace{(u_x\,v_y + u_y\,v_x)}_{0} + \psi_{vv}(v_x^2 + v_y^2) \\
&\quad + \psi_u\underbrace{(u_{xx} + u_{yy})}_{0} + \psi_v\underbrace{(v_{xx} + v_{yy})}_{0} \quad \Big|{}^{f \text{ holomorph}}_{\text{Satz 16.1}} \\
\Longrightarrow \Delta\varphi &= (\psi_{uu} + \psi_{vv}) \cdot |f'(z)|^2 \,.
\end{aligned}$$

(nach Satz 3.6 ist $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} = i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$.)

SATZ 16.2 (Verpflanzungssatz). *Bei der Verpflanzung mittels einer holomorphen Funktion f gilt:*

$$\Delta\varphi = \Delta\psi \cdot |f'(z)|^2 \,. \tag{16.2}$$

BEWEIS. Siehe vorige Bemerkung. Insbesondere gehen harmonische Funktionen wieder in harmonische Funktionen über.

Dirichlet-Problem:

Sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}$) und Γ ein Rand von G, also $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

Gegeben: $h : \Gamma \to \mathbb{R}$.

Gesucht: $\varphi : \overline{G} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Delta\varphi(z) = 0 \quad \text{für } z \in G \tag{16.3}$$

$$\varphi(z) = h(z) \quad \text{für } z \in \Gamma \tag{16.4}$$

Lösung des Dirichlet-Problems für die Einheitskreisscheibe $E = \{z \mid |z| < 1\}$:

(A) Lösung mittels Fourierreihen:

In Polarkoordinaten:

$$x = r\,\cos\theta, \qquad y = r\,\sin\theta, \qquad \varphi = \varphi(r,\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta_{xy}\varphi = \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} \overset{(16.3)}{=} 0\,.$$

Dies soll gelten für $0 < r < 1$ mit der Randbedingung (16.4)

$$\varphi(1,\theta) = h(\theta).$$

Dabei sei h stetig, stückweise glatt und 2π-periodisch. Mit einem Produktansatz (BERNOULLI):

$$\varphi(r,\theta) := R(r) \cdot T(\theta)$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi = R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r^2}RT'' &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{r^2\,R'' + r\,R'}{R} &= -\frac{T''}{T} =: K \text{ (konst.)}
\end{aligned}$$

(Beide Seiten müssen konstant sein, da die Gleichung für alle Werte der Variablen r und θ erfüllt sein muß). Damit erhält man zwei getrennte lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für R und T:

$$T''(\theta) + K\,T(\theta) = 0 \tag{16.5}$$

$$r^2\,R''(r) - r\,R'(r) - K\,R(r) = 0\,. \tag{16.6}$$

Die Lösungen sind dann abhängig davon, ob $K > 0$ oder $K < 0$.

Zu (16.5): Wegen Stetigkeit und 2π-Periodizität von h muß

$$\begin{aligned} K &= n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ T(\theta) &= a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \end{aligned}$$

Zu (16.6): Eulersche Differentialgleichung, substituiere $\rho := \ln r$, $P(\rho) = R(e^\rho)$:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & P'' - n^2\,P = 0 \\ n = 0 \;:\; & P_0(\rho) = a_0 + b_0\,\rho \\ n > 0 \;:\; & P_n(\rho) = c_n\,e^{n\rho} + d_n\,e^{-n\rho} \\ \Longrightarrow \quad & R_0(r) = a_0 + b_0\,\ln r \\ & R_n(r) = c_n\,r^n + d_n\,r^{-n} \end{aligned}$$

Für im Nullpunkt reguläre Lösungen muß $b_0 = d_n = 0$ sein, also insgesamt

$$\begin{aligned} \varphi_0(r,\theta) &= \frac{1}{2}\,a_0 \\ \varphi_n(r,\theta) &= r^n\,(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Satz 16.3. *Ist h stückweise glatt und 2π-periodisch und*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,dt \tag{16.7}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,\sin nt\,dt \quad \textit{mit } n = 1, 2, \ldots \tag{16.8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,\cos nt\,dt \quad \textit{mit } n = 1, 2, \ldots \tag{16.9}$$

so ist

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} r^n\,(a_n\,\cos n\theta + b_n\,\sin n\theta) \tag{16.10}$$

Lösung des Dirichlet-Problems für E. Die Reihe konvergiert gleichmäßig.

Beweis. Für $r = 1$ ist

$$\varphi(1,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\cos n\theta + b_n\,\sin n\theta) = h(\theta)$$

nach dem Satz von Dirichlet (über die Darstellbarkeit stetiger Funktionen durch Fourierreihen). Zu zeigen wäre noch:

$$\Delta\varphi(r,\theta) = 0\,.$$

Dazu muß $\sum$ und Δ vertauschbar sein, was wegen h stückweise glatt erfüllt ist (siehe z.B. [1]). □

(B) Lösung mit der Poissonschen Integralformel

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,dt}_{\frac{1}{2}a_0} \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} [\cos nt\,\cos n\theta + \sin nt\,\sin n\theta]\cdot h(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r^n\cdot\cos\left(n\,(t-\theta)\right)\right\}\cdot h(t)\,dt\,. \qquad (16.11)\end{aligned}$$

Setze $z = r\cdot e^{i\,(t-\theta)}$. Für r^1 ist auch $|z|<1$ und

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} r^n\,\cos\left(n\,(t-\theta)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,[z^n] \;=\; \mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{z}{1-z}\right] \;=\; \mathrm{Re}\left[\frac{z\cdot(1-\overline{z})}{(1-z)\cdot(1-\overline{z})}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{z-|z|^2}{|1-z|^2}\right] \\ &= \frac{r\,\cos(t-\theta)-r^2}{1+r^2-2\,r\,\cos(t-\theta)}\,. \qquad (16.12)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

Satz 16.4 (Poissonsche Integralformel). *Die Lösung aus Satz* 16.3 *hat die Darstellung*

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\,h(t)}{1+r^2-2\,r\,\cos(t-\theta)}\,dt \qquad (16.13)$$

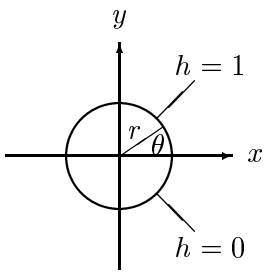
für $0<r<1$.

Beweis. Folgt direkt aus den Gleichungen (16.11) und (16.12).

Beispiele.

(1) Isothermen in einem (unendlichen) Zylinder.
Gegeben: Dirichlet-Problem mit

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0<\theta<\pi \\ 0 & \text{für } \pi\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$



Gesucht: Isothermen, also $\varphi = \varphi_0 = \text{konstant}$.
Nach der Poisson-Formel (16.13) ist hier

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(1-r^2)}{1+r^2-2\,r\,\cos(t-\theta)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\tan\left(\frac{t-\theta}{2}\right)\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r^2}{2\,r\sin\theta}\right).
\end{aligned}$$

Für die Isothermen ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
& 2\,\tan\pi\varphi_0\cdot y &&= 1-x^2-y^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & x^2+(y+\tan\pi\varphi_0)^2 &&= 1+\tan^2\pi\varphi_0\,.
\end{aligned}$$

Dies sind Kreise mit Mittelpunkt auf der y-Achse, die die x-Achse in ± 1 schneiden.

(2) Anwendung des Verpflanzungssatzes 16.2:
Gegeben: Dirichlet-Problem mit Randbedingung

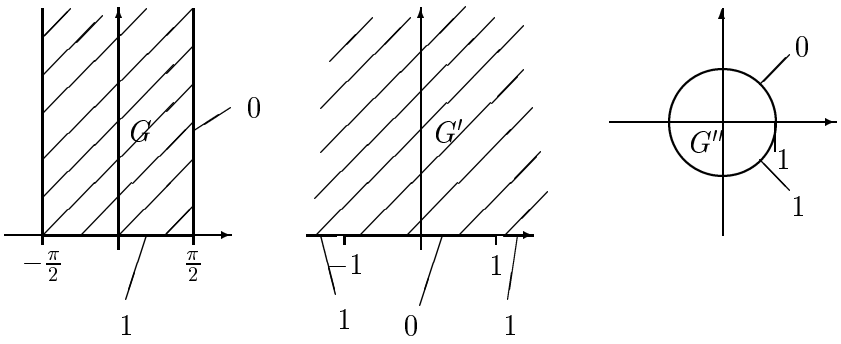
$$\begin{aligned}
\varphi(x,0) &= 1 \qquad \text{für } -\tfrac{\pi}{2}\le x\le\tfrac{\pi}{2} \\
\varphi(\pm\frac{\pi}{2},y) &= 0 \qquad \text{für } y>0
\end{aligned}$$

Lösung: Bilde zunächst den Periodenstreifen $\left(x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], y>0\right)$ auf die gesamte obere Halbebene ab durch

$$v := \sin z = \sin x\cosh y + i\,\sinh y\cos x\,.$$

Bilde dann mit einer Möbiustransformation die obere Halbebene in den Einheitskreis ab (Konstruktion der Abbildung mit Hilfe des Doppelverhältnisses , siehe Seite 12), und zwar so, daß auf dem unteren Halbkreis $\varphi = 1$ und auf dem oberen Halbkreis $\varphi = 0$:

$$w := \frac{i\,v+1}{v+i}\,.$$



Dies ist dann das Beispiel (1) mit der obigen Lösung. Es ergibt sich

$$\varphi_1(z) = \varphi(w) = \varphi(f(z)) \quad \text{mit} \quad w = f(z) = \frac{i \sin z + 1}{\sin z + i}$$

Nach Beispiel (1):

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1 - w\overline{w}}{2\ \mathrm{Im}\,[w]}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right) . \end{aligned}$$

Als Isothermen ($\varphi = \varphi_0$) hat man dann die Bedingung

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\,\varphi_0\right) \sinh y = \cos x\,.$$

KAPITEL 17

Das Maximumprinzip

SATZ 17.1 (Maximumprinzip). *G sei ein Gebiet und f holomorph in G. Gibt es $a \in G$ mit*

$$|f(a)| \geq |f(z)| \quad \textit{für alle } z \in G,$$

so ist $f(z) = f(a)$ konstant.

BEWEIS. Sei $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (z-a)^i$ die Taylorreihe von f in a für $|z-a| < r$. Sei $k \geq 1$ der kleinste Index mit $a_k \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_k\,(z-a)^k + \cdots \\ &= a_0 + a_k\,(z-a)^k + (z-a)^k \cdot g(z) \end{aligned}$$

mit $g(a) = 0$. Sei $|g(z)| < \frac{1}{2}\,|a_k|$ für $|z-a| < \varepsilon$. Ist $a_0 = |a_0| \cdot e^{i\alpha}$ und $a_k = |a_k| \cdot e^{i\beta}$, so wähle γ so, daß $\beta + k\,\gamma = \alpha$ ist.

Dann ist für $z = a + t\,e^{i\gamma}$, $0 < t < \min\{r, \varepsilon\}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= |a_0| \cdot e^{i\alpha} + |a_k| \cdot e^{i\beta} \cdot t^k \cdot e^{ik\gamma} \cdot g(z) \\ &= \Big(|a_0| + |a_k| \cdot t^k\Big) \cdot e^{i\alpha} + t^k \cdot e^{ik\gamma} \cdot g(z)\,. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_0| + |a_k| \cdot t^k - t^k \cdot \frac{1}{2} \cdot |a_k| \\ &\geq |f(a)| + \frac{1}{2} \underbrace{t^k \cdot |a_k|}_{>0} \\ &> |f(a)| \quad \text{(Widerspruch).} \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 17.2. *Ist A eine kompakte Teilmenge von G und f holomorph, so nimmt $|f(z)|$ das Maximum auf dem Rand an.*

BEWEIS. Da A kompakt und $|f(z)|$ stetig ist, existiert ein $z \in A$, so daß $|f(z)|$ maximal wird. Mit Satz 17.1 ergibt sich dann die Behauptung. □

KOROLLAR 17.3 (Minimum-Prinzip). *Sei f holomorph in G. Besitzt f keine Nullstelle und ist nicht konstant, so besitzt $|f(z)|$ kein Minimum in G.*

BEWEIS. Betrachte $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ und wende Satz 17.1 an. □

SATZ 17.4 (Schwarzsches Lemma (SCHWARZ, 1869)). *Sei* $G = E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *und* f *holomorph in* E *mit* $f(0) = 0$ *und* $|f(z)| \leq 1$ *für* $z \in E$.
Dann ist $|f'(0)| \leq 1$, *und es gilt:*

$$|f(z)| \leq |z| \,. \tag{17.1}$$

Ist $|f'(0)| = 1$ *oder* $|f(z_0)| = |z_0|$ *für ein* $z_0 \in E$, *so ist*

$$f(z) = c \cdot z \quad \textit{mit } |c| = 1.$$

BEWEIS. Definiere $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $g(z) = \frac{f(z)}{z}$. In $z = 0$ liegt dann eine hebbare Singularität vor, weil $f(0) = 0$ und somit

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)$$

ist. Setze also $g(0) = f'(0)$ (existiert, da f holomorph in E).
Sei $0 < r < 1$. Nach Korollar 17.2 ist für $|z| < r$:

$$|g(z)| < \max_{|a|=r}\{|g(a)|\} \leq \max_{|a|=r} \left\{ \frac{|f(a)|}{r} \right\} \leq \frac{1}{r}\,, \tag{$*$}$$

da $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in E$ ist. Sei $z \in E$ beliebig. Dann gilt

$$n \cdot (1 - |z|) \geq 1$$

für $n \geq n_0$ genügend groß, also

$$|z| \leq 1 - \frac{1}{n} =: r\,.$$

Wegen $(*)$ gilt

$$g(z) \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

für alle $n \geq n_0$, also, da n beliebig groß

$$g(z) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad \big|f'(0)\big| = |g(0)| \leq 1\,.$$

Ist $|f(z_0)| = z_0$, also $g(z_0) = 1$ für $z_0 \in E$, oder $|f'(0)| = 1$, also $|g(0)| = 1$, so nimmt $|g|$ ihren maximalen Wert in E an. Nach dem Maximumprinzip (Satz 17.1) ist dann $g(z) = c$ konstant. Also $f(z) = c \cdot z$.
Wegen $|f(z_0)| = |z_0|$ oder $|g(0)| = 1$ folgt $|c| = 1$. □

DEFINITION. z heißt *w-Stelle* von f, wenn $f(z) = w$ ist. Speziell heißt z *Nullstelle*, wenn $f(z) = 0$.
Setze $F(z) = f(z) - w$. Die Nullstellen von F sind dann die w-Stellen von f. Dann ist die Anzahl N_w der w-Stellen von f innerhalb des nullhomologen Weges γ

$$N_w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz\,.$$

SATZ 17.5 (Open Mapping Theorem). *Eine nicht konstante holomorphe Funktion* f *bildet eine offene Menge wieder in eine offene Menge ab.*

BEWEIS. Sei U offen, $z_0 \in U$ und $w_0 = f(z_0)$.
Zu zeigen: Es gibt eine Umgebung V von w_0 mit $V \subseteq f(U)$.

Die Menge $\{z \in U \mid f(z) = w_0\}$ besitzt keine Häufungspunkte in U, weil sonst mit dem Identitätssatz 7.11 $f(z) \equiv f(z_0)$ konstant folgen würde. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so daß $\{z \mid |z - z_0| \leq \delta\} \subseteq U$ keine w_0-Stelle außer z_0 enthält.

Auf dem kompakten Kreis $K = \{z \mid |z - z_0| = \delta\}$ nimmt die stetige Funktion $z \mapsto |f(z) - w_0|$ ihr Minimum $\varepsilon > 0$ an.

Es sei $V = \left\{w \mid |w - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Für $w \in V$ gilt dann

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0\,.$$

Die Abbildung

$$\phi : V \to \mathbb{C}\,, \qquad w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

ist stetig für $w \in V$. $\phi(w)$ ist die Anzahl N_w der w-Stellen von f innerhalb von K, also ist $\phi(w)$ ganzzahlig und konstant. In U gibt es eine w_0-Stelle (nämlich z_0), also ist $N_w = N_{w_0} > 0$, d.h. zu $w \in V$ gibt es ein $z \in U$ mit $f(z) = w$, also $V \subseteq f(U)$. □

KOROLLAR 17.6 (Gebietstreue holomorpher Funktionen). *Das Bild eines Gebietes unter einer nichtkonstanten holomorphen Funktion ist wieder ein Gebiet.*

BEWEIS. Die Menge der Gebiete (offen und zusammenhängend) ist Teil der Menge der offenen Mengen, also gilt für sie der Satz 17.5. □

BEMERKUNG. f ist in einer Umgebung um z_0 genau dann injektiv, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

DEFINITION. f heißt *lokal umkehrbar* in z_0, wenn f in einer Umgebung von z_0 injektiv ist. f heißt (global) *umkehrbar* , wenn f bijektiv ist.

BEISPIEL. $f(z) = \exp(z)$ ist lokal umkehrbar in jedem Punkt, nicht aber global umkehrbar, denn aus

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \quad \text{folgt nur} \quad z_1 \equiv z_2 \bmod 2\pi i\,.$$

SATZ 17.7. *Die Umkehrabbildungen von holomorphen Funktionen sind stetig.*

BEWEIS. Eine Funktion f ist genau dann stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind. Mit dem Open Mapping Theorem (Satz 17.5) folgt direkt die Behauptung. □

SATZ 17.8. *Sei $f : G \to G'$ holomorph und bijektiv. Die Umkehrabbildung $g : G' \to G$ ist dann ebenfalls holomorph. Es gilt:*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad \textit{mit } b = f(a)\,. \tag{17.2}$$

BEWEIS. Zu zeigen ist:

$$\lim_{w\to b}\frac{g(w)-g(b)}{w-b}=\frac{1}{f'(a)}$$

für alle $b\in G'$. Ist $f(a)=b$, $f(z)=w$, so ist

$$\frac{g(w)-g(b)}{w-b}=\frac{1}{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}\,.$$

Zu $\varepsilon>0$ gibt es ein $\varepsilon'>0$ mit

$$\left|\frac{1}{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}-\frac{1}{f'(a)}\right|<\varepsilon\quad\text{für}\quad|z-a|<\varepsilon'\,.$$

Nach Satz 17.5 ist g stetig, zu $\varepsilon'>0$ gibt es also ein $\varepsilon''>0$ mit

$$|g(w)-g(b)|=|z-a|<\varepsilon'\quad\text{für}\quad|w-b|<\varepsilon''\,.$$

Zu $\varepsilon>0$ gibt es also ein $\varepsilon''>0$ mit

$$\left|\frac{g(w)-g(b)}{w-b}-\frac{1}{f'(a)}\right|<\varepsilon\quad\text{für}\quad|w-b|<\varepsilon''\,.$$

Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{w\to b}\frac{g(w)-g(b)}{w-b}$$

und ist gleich $\frac{1}{f'(a)}$. □

Berechnung der Umkehrfunktion

Sei $w=f(z)$, $f'(z_0)\neq 0$, also f lokal umkehrbar. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit speziell $z_0=w_0=0$. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \\ z &= g(w) = c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \cdots \end{aligned}$$

Man berechnet die c_i durch Koeffizientenvergleich aus

$$w=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,w^k\right)^i\,.$$

BEISPIEL. $w=z+z^3$. Also

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,w^k+\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,w^k\right)^3\,.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
w^1 &: \quad 1 = c_1 \\
w^2 &: \quad 0 = c_2 \\
w^3 &: \quad 0 = c_3 + c_1^3 = c_3 + 1 \quad \Longrightarrow \quad c_3 = -1 \\
w^4 &: \quad 0 = c_4 \\
w^5 &: \quad 0 = c_5 + (-3) \quad \Longrightarrow \quad c_5 = 3 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Also $z = w - w^3 + 3w^5 + \cdots$.

SATZ 17.9 (Integraldarstellung der Umkehrfunktion). *Es sei $f : G \to G'$ holomorph und $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$ und f injektiv in $U = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$.*

Ist $V = f(U)$ und $K_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, so ist für $w \in V$:

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz \tag{17.3}$$

Umkehrfunktion von f.

BEWEIS. Sei $f(a) = w$, $g(w) = a$. Setze $F(z) = f(z) - w$. F besitzt in U eine Nullstelle $z = a$ (nicht mehr, da f injektiv). Wegen $f'(a) = F'(a) \neq 0$ ist diese Nullstelle $z = a$ sogar einfach. Nach Formel (10.1) (Seite 89)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{k} n(\gamma, a_i) \cdot g(a_i) \cdot \operatorname{ord}_{a_i} f$$

($a_1, \dots, a_k$ Nullstellen von f) ist dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = a = g(w)\,. \qquad \square$$

BEISPIEL. $w = z + z^3$. Nach Satz 17.9 ist

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{z\,(1 + 3z^2)}{z + z^3 - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{z + 3z^3}{z + z^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{w}{z+z^3}}}_{\text{geom. Reihe}}\, dz\,.$$

Für w genügend klein

$$\begin{aligned}
g(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} w^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{z + 3z^3}{(z + z^3)^{k+1}}\, dz \\
&=: \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, w^k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{z + 3z^3}{(z + z^3)^{k+1}}\, dz\,,
\end{aligned}$$

und bei geeigneter Wahl von $r < 1$:

$$c_k = \operatorname{Res}\left[\frac{z + 3z^3}{(z + z^3)^{k+1}}, 0\right]\,.$$

Es ergibt sich allgemein

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^\ell}{2\ell+1}\binom{3\ell}{\ell} & \text{für } k \text{ ungerade, } k = 2\ell+1 \end{cases}$$

DEFINITION. G sei ein Gebiet. Eine holomorphe Abbildung $f : G \to G$ heißt *Endomorphismus* von G. Die Halbgruppe der Endomorphismen wird mit $\operatorname{End} G$ bezeichnet. (Sie besitzt ein neutrales Element id_G.)

DEFINITION. $f \in \operatorname{End} G$ heißt *Automorphismus*, wenn f in $\operatorname{End} G$ invertierbar ist, d.h. wenn ein $g \in \operatorname{End} G$ existiert mit

$$f \circ g = g \circ f = id_G\,.$$

Die Gruppe der Automorphismen von G wird mit $\operatorname{Aut} G$ bezeichnet.

SATZ 17.10. *$f \in \operatorname{End} G$ ist genau dann ein Automorphismus, wenn f bijektiv ist.*

BEWEIS.

(1) $f \circ g = g \circ f = id_G$ impliziert, daß f bijektiv ist:

(a) Injektivität:

$$f(z_1) = f(z_2) \quad \Longrightarrow \quad z_1 = g \circ f(z_1) = g \circ f(z_2) = z_2\,.$$

(b) Surjektivität:

Für $w \in G$ ist $f(g(w)) = w$.

(2) Nach Satz 17.8 ist eine bijektive holomorphe Abbildung umkehrbar.

□

BEMERKUNG. Von jetzt an sei G die offene Einheitskreisscheibe

$$G := E = \{z \mid |z| < 1\}\,.$$

SATZ 17.11. *Die Möbiustransformationen*

$$\varphi_{a,b}(z) = \frac{a\,z + b}{\overline{b}\,z + \overline{a}} \quad \textit{mit} \quad \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = 1$$

sind Automorphismen von E.

BEWEIS. $\varphi_{a,b}$ ist holomorph in E: Aus $|z| < 1$ und $\overline{b}\,z + a = 0$ folgt

$$a\,\overline{a} = (-b\,\overline{z}) \cdot (-\overline{b}\,z) = b\,\overline{b}\,z\,\overline{z} < b\,\overline{b} \quad \text{(Widerspruch zu } a\,\overline{a} - b\,\overline{b} = 1)$$

Für $w = \frac{a\,z+b}{\overline{b}\,z+\overline{a}}$ ist

$$1 - w\,\overline{w} = 1 - \frac{a\,z+b}{\overline{b}\,z+\overline{a}} \cdot \frac{\overline{a}\,\overline{z}+\overline{b}}{b\,\overline{z}+a} = \frac{1 - z\,\overline{z}}{|\overline{b}\,z+\overline{a}|^2}\,.$$

Also

$$\begin{aligned} z\,\overline{z} < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad w\,\overline{w} < 1 \quad \text{oder} \\ z \in E \quad &\Longleftrightarrow \quad w \in E\,. \end{aligned}$$

(Mit $z\,\overline{z} = 1 \iff w\,\overline{w} = 1$ folgt sogar, daß der Einheitskreis bei $\varphi_{a,b}$ in sich selbst übergeht.) □

BEMERKUNG. Sei im folgenden $\mathfrak{T}$ die Menge aller im obigen Satz definierten $\varphi_{a,b}$.

SATZ 17.12. *$\mathfrak{T}$ ist eine Gruppe, die auf E transitiv operiert, d.h. zu $z_0, z_1 \in E$ gibt es eine Möbiustransformation $\varphi_{a,b} \in \mathfrak{T}$ mit $\varphi_{a,b}(z_0) = z_1$.*

BEWEIS.

(1) $\mathfrak{T}$ ist eine Gruppe. Siehe Satz 2.1 (Seite 9) mit $c = \overline{b}$ und $d = \overline{a}$.

(2) Sei zunächst $z_1 = 0$. Wegen $|z_0| < 1$ ist $1 - z_0\,\overline{z_0} > 0$.
Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a\,\overline{a}\,(1 - z_0\,\overline{z_0}) = 1$. Setze $b = -a\,z_0$. Dann ist $a\,\overline{a} - b\,\overline{b} = 1$ und

$$\varphi_{a,b}(z_0) = \varphi_{a,b}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{a\,\left(-\frac{b}{a}\right) + b}{\overline{b}\,\left(-\frac{b}{a} + \overline{a}\right)} = 0\,.$$

Sei nun $z_1 \in E$ beliebig. Es gibt dann ein $\varphi_{c,d} \in \mathfrak{T}$ mit $\varphi_{c,d}(z_1) = 0$. Für $\varphi := \varphi_{c,d}^{-1} \circ \varphi_{a,b} \in \mathfrak{T}$ gilt dann $\varphi(z_0) = z_1$.

□

SATZ 17.13. *Es gilt* $\operatorname{Aut} E = \mathfrak{T}$.

BEWEIS.

(1) Sei $f \in \operatorname{Aut} E$ mit $f(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma (Satz 17.4) gilt dann $|f'(0)| \le 1$. f besitzt eine Umkehrabbildung $g \in \operatorname{Aut} E$ mit $g(0) = 0$, also auch $|g'(0)| \le 1$.
Nach Satz 17.8 ist

$$|g'(0)| = \left|\frac{1}{f'(0)}\right|,$$

also $|f'(0)| = 1$. Nach dem Schwarzschen Lemma folgt $f(z) = c\,z$ mit $|c| = 1$ und

$$f(z) = c\,z = \varphi_{c,0} \in \mathfrak{T}\,.$$

(2) Sei $f(0) = z_0$. Nach Satz 17.12 gibt es ein $\varphi_{a,b} \in \mathfrak{T}$ mit $\varphi_{a,b}(z_0) = 0$. Dann gilt für $\hat{f} = \varphi_{a,b} \circ f$: $\hat{f}(0) = 0$, also $\hat{f} \in \mathfrak{T}$ nach 1., also auch $f = \varphi_{a,b}^{-1} \circ \hat{f} \in \mathfrak{T}$.

Somit ist $\operatorname{Aut} E \subseteq \mathfrak{T}$.
Nach Satz 17.11 ist $\mathfrak{T} \subseteq \operatorname{Aut} E$, also ist $\operatorname{Aut} E = \mathfrak{T}$. □

DEFINITION. Zwei Gebiete G_1 und G_2 heißen *konform äquivalent*, wenn es eine bijektive holomorphe Abbildung $f : G_1 \to G_2$ gibt.

SATZ 17.14. *Die Automorphismengruppen konform äquivalenter Gebiete sind isomorph.*

BEWEIS. Sei $f : G_1 \to G_2$ bijektiv und holomorph.
Dann ist $A : \operatorname{Aut} G_1 \to \operatorname{Aut} G_2$, $\varphi \mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1}$ ein Isomorphismus. □

KOROLLAR 17.15. *Es gilt:*

(1) $\operatorname{Aut} G_2 = f \cdot \operatorname{Aut} G_1 \cdot f^{-1}$.

(2) *Ist* $f_0 : G_1 \to G_2$ *eine bijektive holomorphe Abbildung, so ist*

$$f_0 \cdot \operatorname{Aut} G_1 = \operatorname{Aut} G_2 \cdot f_0$$

die Gesamtheit aller bijektiven holomorphen Abbildungen $f : G_1 \to G_2$.

KAPITEL 18

Der Riemannsche Abbildungssatz

Das wichtigste Hilfsmittel beim Beweis des Riemannschen Abbildungsatzes ist der Satz von Montel (P. Montel 1876 – 1975).

DEFINITION. Eine Teilmenge $A \subseteq G$ heißt *dicht* in G, wenn

$$\forall\, z \in G \,\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, a \in A : |z - a| < \varepsilon$$

gilt. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

DEFINITION. Eine Familie $\mathfrak{F}$ von Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt* auf U, wenn eine Konstante c existiert, mit

$$|f(z)| \leq c \quad \text{für alle } z \in U \text{ und alle } f \in \mathfrak{F}.$$

$\mathfrak{F}$ heißt *lokal beschränkt* auf G, wenn zu jedem $z \in G$ eine Umgebung $U(z)$ existiert, auf der $\mathfrak{F}$ beschränkt ist.

Es gilt dann

(A) Ist $\mathfrak{F}$ beschränkt auf U und $V \subseteq U$, so ist $\mathfrak{F}$ auch beschränkt auf V.

(B) Ist $\mathfrak{F}$ beschränkt auf $U_1, U_2, \ldots, U_n$, so ist $\mathfrak{F}$ auch beschränkt auf

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$$

(C) Ist $\mathfrak{F}$ lokal beschränkt, so ist $\mathfrak{F}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq G$ beschränkt.
Denn: Für jedes $z \in K$ existiert eine offene Umgebung $U(z)$, auf der $\mathfrak{F}$ beschränkt ist. Da K kompakt ist, überdecken endlich viele dieser $U(z)$ bereits die Menge K:

$$K \subseteq U_1(z_1) \cup U_2(z_2) \cup \cdots \cup U_n(z_n)\,.$$

Mit (B) folgt dann die Behauptung.

SATZ 18.1. *Sei $\mathfrak{F}$ eine Familie holomorpher Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ und $\mathfrak{F}$ lokal beschränkt. Ist A eine dichte Teilmenge von G und konvergiert $(f_n(a))$ für jedes $a \in A$ (punktweise), wobei (f_n) Folge von Funktionen aus $\mathfrak{F}$, so konvergiert (f_n) kompakt.*

BEWEIS. Nach Lemma 7.4 (Seite 61) reicht es aus, die lokal gleichmäßige Konvergenz zu zeigen, also

$$\forall\, z_0 \in G\, \exists\, U_r(z_0) : (f_n) \text{ konvergiert gleichmäßig auf } U_r(z_0) \iff$$

$$\forall\, z_0 \in G\, \exists\, U_r(z_0)\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0\, \forall\, n, m > n_0\, \forall\, z \in U_r(z_0) : |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon\,.$$

(1) Wähle r, so daß der Kreis γ um $z_0 \in G$ mit dem Radius $2r$ mit seinem Inneren ganz in G liegt. Sei nun $U = U_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ und $\overline{U} = \{z \mid |z - z_0| \le r\}$. Für $\zeta \in |\gamma|$ und $z \in U$ gilt dann:

$$|\zeta - z| \ge |\zeta - z_0| - |z - z_0| \ge 2r - r = r$$

Weil $|\gamma|$ kompakt ist, gilt wegen der lokalen Beschränktheit von $\mathfrak{F}$:

$$|f(\zeta)| < c \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{F} \text{ und alle } \zeta \in |\gamma|\,.$$

Für $z, z' \in U$ und alle $f \in \mathfrak{F}$ gilt der Cauchysche Integralsatz 6.3 (f holomorph), also

$$\begin{aligned} f(z) - f(z') &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} - \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (z - z') \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z) \cdot (\zeta - z')}\, d\zeta\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$|f(z) - f(z')| \le \frac{|z - z'|}{2\pi} \cdot \frac{c}{r^2} \cdot 2\pi\,(2r) = \frac{2c}{r} \cdot |z - z'|\,. \tag{18.1}$$

(2) Sei $\delta > 0$. Zu jedem $a \in U \cap A$ bilde $U_\delta = \{z \mid |z - a| < \delta\}$.
Behauptung: $\overline{U}$ wird von $U_\delta(a)$, $a \in U \cap A$, überdeckt.
Beweis: Sei $z \in \overline{U}$ und z' ein Element aus $U_\delta(z) \cap U$. Weil $U_\delta(z) \cap U$ offen ist, gibt es ein $\rho > 0$ mit $U_\rho(z') \subset U_\delta(z) \cap U$. Weil A dicht in G liegt, gibt es ein $a \in A$ mit $a \in U_\rho(z') \subseteq U_\delta(z) \cap U$, also $a \in U$ und $|z - a| < \delta$.
Also $z \in U_\delta(a)$. Weil $\overline{U}$ kompakt ist, gibt es endlich viele $a_1, \ldots, a_N$ aus $U \cap A$ mit

$$U \subseteq \overline{U} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_\delta(a_i)\,.$$

Sei $z \in U$. Dann hat z einen Abstand kleiner als δ von einem dieser Punkte $a_1, \ldots, a_N$, etwa von a_j.
Nach (18.1) ist dann

$$|f(z) - f(a_j)| \le \frac{2c}{r} \cdot \delta \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{F}\,.$$

(3) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung konvergieren die $\big(f_n(a_i)\big)$ für $i = 1, \ldots, N$. Es gibt also ein n_0 mit

$$|f_n(a_i) - f_m(a_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } m, n \ge n_0 \text{ und } i = 1, \ldots, N\,.$$

Sei $z \in U$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{r}{2c}$. Wähle ein a_j, dessen Abstand von z kleiner als δ ist. Dann gilt nach (2) für alle $z \in U$:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(a_j)| + |f_n(a_j) - f_m(a_j)| \\ &\quad + |f_m(a_j) - f_m(z)| \\ &\leq \frac{2c}{r} \cdot \underbrace{\frac{r}{2c} \cdot \frac{\varepsilon}{3}}_{\delta} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;<\; \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Das heißt (f_n) konvergiert gleichmäßig auf U, also konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig. Nach Lemma 7.4 konvergiert (f_n) dann kompakt. □

DEFINITION. Eine Familie $\mathfrak{F}$ von Funktionen heißt *normal*, wenn jede Folge von Funktionen aus $\mathfrak{F}$ eine kompakt konvergente Teilfolge enthält.

SATZ 18.2 (MONTEL 1907). *Eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist normal.*

BEWEIS. Sei (f_n) eine Folge aus $\mathfrak{F}$ und $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von G (etwa Punkte mit rationalen Koordinaten).

Die Folge $(f_n(a_1))$ ist in $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge $(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots)$ von (f_n), die an der Stelle a_1 konvergiert und eine Teilfolge $(f_{k1}, f_{k2}, \ldots)$ von (f_n), die an den Stellen $a_1, \ldots, a_k$ konvergiert.

Betrachte eine Teilfolge $(f_{k+1\,1}, f_{k+1\,2}, \ldots)$, die auch für a_{k+1} konvergiert. Die Diagonalfolge $(f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots)$ konvergiert dann für alle $a_i \in A$. Nach Satz 18.1 konvergiert diese Folge dann kompakt. □

BEISPIEL. Familie der Drehungen um den Nullpunkt:

$$\mathfrak{F} = \{f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f_a(z) = az, |a| = 1\}\,.$$

$\mathfrak{F}$ ist beschränkt auf einer kompakten Menge $K = \{z \mid |z| \leq R\}$, $|f_a(z)| = |a|\,|z| \leq R$ für $f_a \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ ist normal. Sei (f_n) eine Folge aus $\mathfrak{F}$: $f_n(z) = a^n z$, $|a| = 1$, für festes a. Es gibt eine konvergente Teilfolge.

SATZ 18.3 (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$. Dann existiert eine bijektive holomorphe Abbildung*

$$f : G \to E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}\,.$$

BEMERKUNG.

(1) Eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to E$ ist beschränkt, also nach dem Satz von Liouville (Satz 10.7) konstant. Sie kann also nicht bijektiv holomorph sein, deshalb $G \neq \mathbb{C}$.

(2) Stetige Abbildungen erhalten den einfachen Zusammenhang, deshalb muß G einfach zusammenhängend sein (da E einfach zusammenhängend und $G = f^{-1}(E)$), falls eine solche Abbildung f existiert.

(3) Seien $G, G' \neq \mathbb{C}$, einfach zusammenhängend. $f : G \to E$ und $g : G' \to E$. Dann ist $g^{-1} \circ f : G \to G'$ bijektiv holomorph, also sind G und G' konform äquivalent.

(4) Im Beweis wird der einfache Zusammenhang von G nur für die Existenz der Wurzelfunktion benötigt. Zu $h \in \mathfrak{H}(G)$ mit $h(z) \neq 0$ für $z \in G$ mit

$$(*) \qquad \big(g(z)\big)^2 = h(z)\,.$$

BEWEIS. 1.) Reduktion auf $G' \subseteq E$, $0 \in G'$. Wir zeigen zuerst, daß wir im Beweis annehmen können, daß das Gebiet innerhalb des Einheitskreises liegt und den Nullpunkt enthält.

(a) Es gibt ein a mit $U_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{C} \setminus G$, das heißt das Komplement von G besitzt innere Punkte. Die Abbildung $f(z) = \frac{\varepsilon}{z-a}$ ist injektiv und holomorph auf G und $f(G) \subseteq E$. Sei $z_0 \in f(G)$. Nach Satz 17.12 existiert ein Automorphismus von E mit $\varphi(z_0) = 0$. Dann ist

$$G' = \varphi f(G) \subseteq E \quad \text{und} \quad 0 \in G'\,.$$

(b) $\complement G$ enthält keine inneren Punkte. Aus dem einfachen Zusammenhang von G folgt:
Sei $a \in \complement G$. nach $(*)$ gibt es ein $g \in \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ mit

$$\big(g(z)\big)^2 = z - a\,.$$

g ist injektiv:

$$g(z_1) = g(z_2) \Longrightarrow z_1 - a = g^2(z_1) = g^2(z_2) = z_2 - a \Longrightarrow z_1 = z_2\,.$$

Dann sind G und $G' = g(G)$ konform äquivalent.
Weiter ist $G' \cap -G' = \emptyset$: Sei $w \in G \cap G'$. Dann ist

$$\begin{array}{lll} & w = g(z_1) = -g(z_2) \quad \text{mit } z_1, z_2 \in G & \\ \Longrightarrow & z_1 - a = g^2(z_1) = g^2(z_2) = z_2 - a & \\ \Longrightarrow & z_1 = z_2 \quad \Longrightarrow \quad w = -w \quad \Longrightarrow & w = 0 \\ \Longrightarrow & 0 = g^2(z_1) \quad \Longrightarrow & z_1 = a \\ & \text{(Widerspruch zu } a \in \mathbb{C} \setminus G.) & \end{array}$$

Sei $w = G'$ und $U_\varepsilon(w) \subseteq G'$. Dann ist $U_\varepsilon(-w) \subseteq \mathbb{C} \setminus G'$. Nach (a) folgt die Behauptung.

2.) Sei G einfach zusammenhängend mit $G \subseteq E$, $0 \in G$. *Ist $G \neq E$, so gibt es eine injektive holomorphe Abbildung $u : G \to E$ mit $u(0) = 0$ und $|u'(0)| > 1$.*

BEWEIS. Für $|a| < 1$ ist $f_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}\,z}$ ein Automorphismus von E und $f_a(a) = 0$. Sei $a \in E \setminus G$. Dann ist $f_a(z) \neq 0$ für $z \in G$. Nach (Q) existiert ein $g \in \mathfrak{H}(G)$ mit $g^2(z) = f_a(z)$. Sei $b = g(0)$. Setze $u = f_b \circ g$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} u(0) & = & f_b(g(0)) = f_b(0) = 0 \\ u(a) & = & f_b(0) = -b \\ b^2 & = & g^2(0) = f_a(0) = -a\,. \end{array}$$

Aus $g^2(z) = f(z)$ folgt mit der Kettenregel

$$2\,g(z)\,g'(z) = f_a'(z) = \frac{1 - a\,\overline{a}}{(1 - \overline{a}\,z)^2}\,.$$

Wieder mit der Kettenregel folgt

$$u'(0) = g'(0) \cdot f_b'(0) \;=\; \frac{1-a\,\overline{a}}{2b} \cdot \frac{1-b\,\overline{b}}{(1-b\,\overline{b})^2} = \frac{1+|b|^2}{2\,b}\,,$$

also

$$|u'(0)| = \frac{1+|b|^2}{2\,b} \;=\; \frac{(1-|b|)^2}{2|b|} + 1 > 1\,. \quad \checkmark$$

3.) Sei $G \subseteq E$, $0 \in G$. Es gibt dann eine holomorphe Abbildung $f : G \to E$. Definiere

$$\mathfrak{F} := \big\{ f : G \to E \mid f \text{ injektiv holomorph und } f(0) = 0 \big\}$$

Da id_G existiert, ist $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

(A) Ist $f \in \mathfrak{F}$ nicht surjektiv, so gibt es ein $h \in F$ mit

$$\big|h'(0)\big| \geq \big|f'(0)\big|\,.$$

Beweis. Sei u definiert wie in 2). Dann gilt für $h = u \circ f$:

$$\big|h'(0)\big| = \Big|\underbrace{f'(0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{u'(0)}_{|\cdot|>1}\Big| \quad \Longrightarrow \quad \big|h'(0)\big| > \big|f'(0)\big|\,. \qquad \checkmark$$

(B) $\{|f'(0)| \mid f \in \mathfrak{F}\}$ ist beschränkt.

Beweis. Sei $\rho > 0$ mit $\big\{z \mid |z| < \rho\big\} \subseteq G$. Dann ist

$$\big|f'(0)\big| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^2}\,dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\pi\rho \;=\; \rho\,. \quad \checkmark$$

(C) Sei $S = \sup\big\{|f'(0)| \mid f \in \mathfrak{F}\big\}$. Wegen $id \in \mathfrak{F}$ ist $S \geq 1$. Es existiert eine Abbildung $g \in \mathfrak{F}$, die bijektiv ist.

Beweis. Wähle eine Folge (f_n) aus $\mathfrak{F}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \big|f_n'(0)\big| = S\,.$$

Da $\mathfrak{F}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Montel (Satz 18.2) Teilfolge (g_n), die kompakt gegen eine Funktion g konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 7.5) ist g holomorph und

$$\begin{aligned} g'(0) \;&=\; \lim_{n\to\infty} g_n'(0), \qquad \text{also} \\ |g'(0)| \;&=\; \lim_{n\to\infty} \big|g_n'(0)\big| \;=\; S\,. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Eigenschaften von g:

(1) Es ist $g(0) = \lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0$.

(2) $g(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z) \leq 1$. Weil g holomorph ist, ist g offen.

(3) g ist injektiv, da eine kompakt konvergente Folge injektiver Abbildungen gegen eine injektive oder konstante Funktion konvergiert und da g wegen $g'(0) \neq 0$ nicht konstant ist.

(4) g ist surjektiv, andernfalls würde nach (A) ein $h \in \mathfrak{F}$ existieren mit

$$\big|h'(0)\big| > \big|g'(0)\big| = S \quad \text{(Widerspruch)}$$

□

SATZ 18.4. *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$ und $z_0 \in G$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte bijektive und holomorphe Abbildung $f : G \to E$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$ reell.*

BEWEIS. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz 18.3 gibt es eine bijektive und holomorphe Abbildung $g : G \to E$. Sei $g(z_0) = a$. Die Abbildung

$$\varphi(z) = c \cdot \frac{z - a}{1 - \overline{a}\, z} \quad \text{mit} \quad |c| = 1$$

ist ein Automorphismus von E mit $\varphi(a) = 0$.

Setze $f = \varphi \circ g$. Wegen $\varphi(a) = 0$ ist

$$f(z_0) = \varphi(g(z_0)) = \varphi(a) = 0\,.$$

Ermittle c so, daß $f'(z_0) > 0$ reell. Seien $f, g : G \to E$ bijektive holomorphe Abbildungen mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $f'(z_0)$ und $g'(z_0)$ reell > 0. Die Abbildung $h = g \circ f^{-1}$ ist dann ein Automorphismus von E. Nach Satz 17.11 (Seite 140) ist

$$h(z) = \frac{a\, z + b}{\overline{b}\, z + \overline{a}}, \qquad \text{mit} \qquad a\,\overline{a} - b\,\overline{b} = 1\,.$$

Wegen $h(0) = g \circ f^{-1}(0) = 0$ ist $b = 0$, also

$$h(z) = c\, z \qquad \text{mit } |c| = 1, \qquad \text{also}$$

$$g(z) = g \circ f^{-1} \circ f(z) = c\, f(z),$$

also $g'(z) = c\, f'(z)$. Wegen $g'(z_0)$ und $f'(z_0)$ reell > 0 folgt $c = 1$, also $f = g$. □

Literaturverzeichnis

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw Hill, 1966.

[2] H. Behnke and F. Sommer. *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Springer, 1965.

[3] L. Bieberbach. *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2 Bände). Teubner, 1931.

[4] H. Cartan. *Elementare Theorien der Analytischen Funktionen einer oder mehrerer Komplexen Veränderlichen.* BI, 1966.

[5] J. B. Conway. *Functions of one Complex Variable.* Springer, 1973.

[6] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis* (3 Bände). J. Wiley, 1974.

[7] E. Hille. *Analytic Function Theory* (2 Bände). Ginn, 1959.

[8] A. Hurwitz and R. Courant. *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen.* Springer, 1925.

[9] K. Knopp. *Funktionentheorie* (2 Bände). Göschen, 1957.

[10] W. F. Osgood. *Lehrbuch der Funktionentheorie.* Chelsea, 1928.

[11] E. Peschl. *Funktionentheorie* (2 Bände). BI, 1967.

[12] R. Remmert. *Funktionentheorie* (2 Bände). Springer, 1957.

[13] W. Rudin. *Real- and Complex Analysis.* McGraw Hill, 1966.

[14] G. Sansone and J. Gerretsen. *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable.* Nordhoff, 1960.

Index

Abschluß einer Menge, 37
Absolutbetrag, 6
absolute Konvergenz von unendlichen Produkten, 95
Abstand, 37
Abstand zweier Mengen, 37
analytische Fortsetzung, 119
analytische Funktion $[f]$, 121
Anschmiegungssatz von Mittag-Leffler, 117
Argumentvariation, 39
Atlas, 123, 124
äußerer Punkt, 84
Automorphismus, 140

Berührpunkt, 37
Bernoulli, 130
beschränkte Familie, 143
Bewertung, 6
Bezout, 109
Blaschke, 107
Blaschke-Funktion, 107

Casorati, 79
Cauchy, 20, 51, 52, 54, 55, 60, 75, 114
Cauchy-Konvergenzkriterium, 60
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, 20
Cauchysche Formel, 52
Cauchysche Integralformeln, 54
Cauchyscher Integralsatz, 51, 55
Cosinus, 23, 66

dichte Teilmenge, 143
differenzierbare Kurve, 125
Differenzierbarkeit, 18
direkte Fortsetzung, 121
Dirichlet-Problem, 130
Doppelverhältnis, 12, 133
Dreiecksungleichung, 6

einfach zusammenhängend, 55
einfache Kurve, 84
Einheitskreis, 14
Einheitskreisscheibe, 17
Elementarfaktoren, 103
Endomorphismus, 140
Entwicklungspunkt, 63
Epsilon-Umgebung, 17
erweiterte komplexe Ebene, 7

Euler, 116
Eulersche Formel, 66
Exponentialfunktion, 22, 66, 137

Feinheitsgrad, 27
Fixpunkt, 10
Formel von Moivre, 23
Fourierreihen, 130
freie abelsche Gruppe, 41
Funktionselement, 120

ganze Funktion, 106
Gebiet, 24
Gebietstreue, 137
ggT, 109
Gitter, 106
gleichmäßige Konvergenz, 59
globale Umkehrbarkeit, 137
Grenzwert, 17
Gruppe, 9, 141

Hadamardsche Formel, 64
harmonisch, 129
Hauptsatz der Algebra, 90
Hauptteil, 73, 112
hebbare Singularität, 77
Helmer, 109
holomorphe Funktion, 21
homolog, 52
Hurwitz, 92

Identitätssatz für holomorphe Funktionen, 71
Identitätssatz für Potenzreihen, 68
Imaginärteil, 6
innerer Punkt, 84
Integral, 28
Interpolation mit Polynomen, 116
Intervallschachtelung, 47
Invarianz der Orientierung, 15
inverser Weg, 29
isolierte Nullstelle, 71
isolierte Singularität, 77

Körper, 5, 112
Karte, 123
Ketten, 41
Kettenregel, 19
kompakte Konvergenz, 61

konform im weiteren Sinne, 126
konforme Äquivalenz, 141
konforme Abbildung, 126, 127
konjugiert komplexe Zahl, 5
konstante Funktion, 24
Konvergenz von unendlichen Produkten, 95
Konvergenzradius, 64
Kreisinvarianz, 14
Kurve, 27

Länge einer Kurve, 27
Lagrange, 116
Lagrangeinterpolation, 117
Laplacesche Differentialgleichung, 129
Laurent, 75
Laurentreihe, 73
Liouville, 92
logarithmische Ableitung, 115
Logarithmus, 58
lokal beschränkte Familie, 143
lokal gleichmäßige Konvergenz, 61
lokale Umkehrbarkeit, 137

M-Test von Weierstraß, 60
Möbiustransformation, 9, 107, 126, 133
Maximumprinzip, 135
meromorphe Funktion, 111
Minimum-Prinzip, 135
Mittag-Leffler, 112, 117
Moivre, 23
Moivresche Formel, 7
Monodromiesatz, 122
Montel, 145
Morera, 56

Newton, 116
normale Funktionenfamilie, 145
nullhomolog, 39, 44

offene Menge, 17
Open Mapping Theorem, 136
Ordnung, 89
Ordnung meromorpher Funktionen, 111
Orientierung, 14
orthogonale Netze, 126

Poissonsche Integralformel, 132
Pol k-ter Ordnung, 77
Potentialfunktion, 129
Potenzreihe, 63
Produktsatz, 107
Produktsatz von Weierstraß, 104
punktweise Konvergenz, 59

Rand, 42, 47
Randabbildung, 41
Realteil, 6
reguläre Funktion, 21
reguläre Kurve, 125
regulärer Teil, 73
rektifizierbare Kurve, 27
Residuensatz, 81
Residuum, 81
Residuum in ∞, 83
Riemann, 20, 31, 127, 145
Riemann-Summe, 28
Riemannsche Fläche, 123
Riemannscher Abbildungssatz, 145
Ring, 101, 108
Rouché, 91

Satz von Casorati-Weierstraß, 79
Satz von Hurwitz, 92
Satz von Liouville, 92
Satz von Montel, 145
Satz von Morera, 56
Satz von Rouché, 91
Satz von Weierstraß, 62
Schwarzsches Lemma, 136
Singularität, 77
Singularität in ∞, 83
Sinus, 23, 66, 116
Stammfunktion, 56
Stetigkeit, 18
Strecke, 47

Taylor-Entwicklung, 67
Träger, 42

Überlagerungsfläche, 124
Umgebung, 17
Umkehrfunktion, 138
Umkehrfunktion, Integraldarstellung, 139
Umlaufsinn, 14
Umlaufzahl, 39, 44
uneigentliche Integrale, 85
uneingeschränkte Fortsetzbarkeit, 122
unendliche Reihe, 59

Vektorraum, 129
Verpflanzung, 129
Verpflanzungssatz, 130

w-Stelle, 136

Wallis, 95, 116
Weg, 27
Weierstrass, 60, 62, 68, 79, 103, 104, 112, 121
Weierstraßsche σ-Funktion, 106
wesentliche Singularität, 77
Winkel zwischen zwei Kurven, 125

zusammenhängende Menge, 23
Zyklus, 42