Fouriertransformationsfibel

(Zusammenstellung: Andreas Kauffmann)

Letzte Änderungen: 12.11.99

1 Grundlegende Eigenschaften

Im Folgenden wird mit $\langle x, y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ *zunächst das Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$ *bezeichnet. Später wird die gleiche Notation* $\langle \varphi, \psi\rangle$ *auch für das* L^2*-Skalarprodukt zwischen Funktionen und für die Anwendung von Distributionen aus* $\mathcal{S}'$ *auf Funktionen aus* $\mathcal{S}$ *verwendet. Die Bedeutung sollte aber jeweils aus dem Kontext verständlich werden.*
$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$ *bezeichnet die (euklidische) Norm auf* $\mathbb{R}^n$*.*

Definition 1 (Fouriertransformation)
Zu einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder auch $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$) ist die Fouriertransformierte $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx, \tag{1}$$

falls dieses Integral existiert.

Oft wird die Fouriertransformation etwas anders definiert :

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx. \tag{2}$$

Wieder eine andere Definition ist

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}\, dx. \tag{3}$$

Aber hier wird durchgängig die Variante (1) verwendet.

Definition 2 (L^p-Räume)
Sei $1 \le p < \infty$. Mit den Normen

$$\|\varphi\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|\varphi\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \tag{4}$$

lassen sich für $1 \le q \le \infty$ die Funktionenräume

$$L^q(\mathbb{R}^n) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \|\varphi\|_{L^q} < \infty\} \tag{5}$$

definieren.

Die eben definierten L^p-Räume sind Banachräume.
Man sollte noch erwähnen, daß Elemente dieser Räume nicht wirklich Funktionen sind, sondern Repräsentanten von Äquivalenzklassen von Funktionen. Was hat man sich darunter etwa vorzustellen? Sei f die Funktion, die für $-1 < x < 0$ und $0 < x < +1$ den Wert Eins annimmt und ansonsten Null ist, und sei g die Funktion, die für $-1 \leq x \leq +1$ den Wert Eins annimmt und ansonsten Null ist. Dann sind f und g verschiedene Funktionen, aber es gilt $\|f-g\|_{L^p} = 0$ für $1 \leq p \leq \infty$, dh. in einem L^p-Raum lassen sich f und g nicht unterscheiden: Sie gelten als **ein** *Element des Raumes bzw. werden durch* **ein** *Element repräsentiert.*
Für „Fortgeschrittene“: Man sollte auch noch erwähnen, daß die Definition (5) mathematisch noch nicht ganz sauber ist. Es muß noch gefordert werden, daß die φ wirklich Lebesgue-integrierbare Funktionen sind – man sagt: „φ meßbar“.

Bemerkung 3 ($\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$)
Man sieht sofort:

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, dx. \tag{6}$$

Daraus folgt für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^1}. \tag{7}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{F}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\mathcal{F}\varphi + \beta\mathcal{F}\psi$ für $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Damit ist $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine lineare, stetige Abbildung.

Es gilt sogar noch etwas mehr: Für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\widehat{\varphi}$ stetig und für $|x| \to \infty$ geht $\widehat{\varphi}(x)$ gegen Null – vgl. [Rud73],[RS75].

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Fouriertransformation ist, daß sie Differentiation in Multiplikation überführt:

Satz 4 (Differentiation und Multiplikation)
Für $k \in \mathbb{N}_0^n$ gilt (formal) :

$$\left(\mathcal{F}(\nabla^k \varphi)\right)(\xi) = i^{|k|} \xi^k \widehat{\varphi}(\xi). \tag{8}$$

(Beweis: Übungsaufgabe – Einsetzen und partiell Integrieren.)
Sei p ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$. Dann kann man auch schreiben:

$$\mathcal{F}(p(\nabla)\varphi) = p(i\xi)\widehat{\varphi} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(p(-ix)\varphi) = p(\nabla)\widehat{\varphi}. \tag{9}$$

Aber für welche Funktionen φ existieren die Ausdrücke in Gleichung (8) überhaupt? Nun ja, man definiert sich einen passenden Raum von Funktionen:

Definition 5 (Raum der schnell fallenden Funktionen $\mathcal{S}$)
Die Menge

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \nabla^\beta \varphi(x) \right| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\} \tag{10}$$

heißt Raum der schnell fallenden Funktionen des $\mathbb{R}^n$ (space of rapidly decreasing functions) oder Schwartzraum.

Bemerkung 6 (Eigenschaften von $\mathcal{S}_n$)
Hier werden ohne Beweis einige Eigenschaften von $\mathcal{S}_n$ angegeben. (Beweise finden sich in [Rud73].)

1. Eine äquivalente Definition ist

$$\mathcal{S}_n = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \left|x^\alpha \nabla^\beta \varphi(x)\right| \to 0 \text{ für } |x| \to \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\right\}. \tag{11}$$

2. Bisher wurde nur angegeben, wie die Elemente von $\mathcal{S}_n$ aussehen. Zusätzlich muß noch definiert werden, was Konvergenz in $\mathcal{S}_n$ bedeuten soll:
   Eine Folge φ_n in $\mathcal{S}_n$ konvergiert gegen φ in $\mathcal{S}_n$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \nabla^\beta (\varphi_n(x) - \varphi(x))\right| = 0 \tag{12}$$

   für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

3. Sei $p(x)$ ein Polynom, $\psi \in \mathcal{S}_n$ und $k \in N_0^n$. Dann ist jede der drei Abbildungen

$$\varphi \mapsto p(x)\varphi, \quad \varphi \mapsto \psi\varphi, \quad \varphi \mapsto \nabla^k \varphi, \tag{13}$$

   eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}_n$ nach $\mathcal{S}_n$ (dh. $\lim\limits_{n\to\infty} p(x)\varphi_n = p(x) \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ usw., wobei der Grenzwertbegriff 6.2 gilt).
   Insbesondere ist außerdem die Fouriertransformation eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}_n$ nach $\mathcal{S}_n$.

4. $\mathcal{S}_n$ ist ein Fréchetraum. (Vereinfacht: Ein vollständiger Raum, metrisierbar, dh. man kann Abstände messen und Konvergenz beschreiben, aber man hat im Allgemeinen keine Norm zur Verfügung.)
   $\mathcal{S}_n$ liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und in $L^2(\mathbb{R}^n)$, dh. man kann jede L^1-Funktion beliebig genau durch $\mathcal{S}_n$-Funktionen approximieren. (Diese Eigenschaft wird in Beweisen oft benutzt. Man zeigt, daß die $\mathcal{S}_n$-Funktionen bestimmte Eigenschaften haben und kann dann unter Umständen zeigen, daß die L^1-Funktionen, da durch $\mathcal{S}_n$-Funktionen approximierbar, die gleichen Eigenschaften haben.)

5. Der Dualraum $\mathcal{S}_n'$ von $\mathcal{S}_n$ heißt Raum der temperierten Distributionen (space of tempered distributions). Man kann die Fouriertransformation auch für Elemente aus $\mathcal{S}_n'$ definieren. Das wird später in Definition 33 (S.14) erläutert.

Satz 7 (Rechenregeln für $\mathcal{F}$)
Einige weitere, zum Rechnen nützliche Eigenschaften der Fouriertransformation lassen sich (durch Einsetzen in (1) und Benutzung einfacher Integrationsregeln) leicht selbst beweisen :

1. Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $c \neq 0$ und $\psi(x) = \varphi(cx)$. Zeige: $\widehat{\psi}(\xi) = |c|^{-n}\widehat{\varphi}(\frac{1}{c}\xi)$.

2. Sei $\varphi(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k)$ mit $\varphi_k \in L^1(\mathbb{R})$. Zeige: $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{k=1}^{n} \widehat{\varphi}_k(\xi_k)$.

3. Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Definiere den Translationsoperator $T_a : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ durch $(T_a\varphi)(x) = \varphi(x+a)$. Zeige: Für $\psi(x) = e^{-i\langle a,x\rangle}\varphi(x)$ gilt $T_a\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$, und aus $\psi = T_a\varphi$ folgt $\widehat{\psi}(\xi) = e^{+i\langle a,\xi\rangle}\widehat{\varphi}(\xi)$.

4. Seien $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeige: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\widehat{\psi}(x)\,dx$.

5. Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ eine reellwertige Funktion.
   Sei $\psi(x) = \overline{\varphi(x)}$, wobei der Überstrich für „komplex konjugiert“ steht. Zeige: $\widehat{\psi}(\xi) = \overline{\widehat{\varphi}(-\xi)}$.
   Sei $\psi(x) = \varphi(-x)$. Zeige: $\widehat{\psi}(\xi) = \overline{\widehat{\varphi}(\xi)}$.

6. Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ eine relle Funktion. Sei $\varphi_g(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x))$ der gerade Anteil von φ und $\varphi_u(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(-x))$ der ungerade Anteil von φ. Zeige: $\widehat{\varphi_g} = \mathrm{Re}\,(\widehat{\varphi})$ und $\widehat{\varphi_u} = \mathrm{Im}\,(\widehat{\varphi})$.
   Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Zeige: φ ist (un)gerade genau dann, wenn $\widehat{\varphi}$ (un)gerade ist.

7. Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Offensichtlich ist $\widehat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx$.

Die im folgenden Satz beschriebene Funktion φ_e wird sich als hilfreich erweisen, wenn die Invertierbarkeit der Fouriertransformation untersucht wird. (Die Funktion φ_e ist überhaupt ganz praktisch. Wegen $\varphi_e \in \mathcal{S}_n$ kann man sie benutzen, um zu Zeigen, daß $\mathcal{S}_n$ nicht nur die Nullfunktion enthält. Außerdem beschreibt φ_e die Gaußsche Glockenkurve in der Wahrscheinlichkeitstheorie.)

Satz 8 (Die invariante Funktion φ_e)
Die Funktion $\varphi_e(x) := e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ bleibt unter der Fouriertransformation erhalten: $\varphi_e = \widehat{\varphi}_e$. (Für $\varphi(x) = e^{-a|x|^2}$ gilt damit $\widehat{\varphi}(\xi) = (2a)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$.)

Beweisidee für $n = 1$: Die Funktion φ_e genügt der Differentialgleichung

$$\varphi' + x\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = 1. \tag{14}$$

Weiter gilt (vgl. [Heu91],[MV91a]) :

$$\widehat{\varphi}_e(0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1.$$

Wie in Satz 4 zeigt man nun: $\widehat{\varphi}_e' + \xi\widehat{\varphi}_e = 0$. Damit sind sowohl φ_e als auch $\widehat{\varphi}_e$ Lösungen von (14). Die Lösung dieser DGL ist aber eindeutig, dh. $\varphi_e = \widehat{\varphi}_e$.

Satz 9 (Inverse Fouriertransformation)
Für $\varphi \in \mathcal{S}_n$ gilt:

$$\varphi(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}\right)(x) := (2\varphi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{+i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi. \tag{15}$$

Gleichung (15) gilt auch für die $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, für die zusätzlich $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweisidee: Mit den Rechenregeln Satz 7.4 und 7.1 gilt für $\lambda > 0$ und φ_e aus Satz 8 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\varphi_e(\lambda^{-1}x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\lambda^n \widehat{\varphi}_e(\lambda x)\,dx \qquad (16) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda^{-1}y)\widehat{\varphi}_e(y)\,dy. \qquad (17) \end{aligned}$$

Für $\lambda \to \infty$ existieren die Grenzwerte $\varphi(y\lambda^{-1}) \to \varphi(0)$ und $\varphi_e(x\lambda^{-1}) \to \varphi_e(0)$. Diesen Grenzübergang darf man für die Integrale durchführen (Satz über dominierte Konvergenz – auch: Satz von Lebesgue, vgl. [Alt85]) und erhält:

$$\varphi_e(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\,dx = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_e(y)\,dy. \qquad (18)$$

Damit ist (15) für $x = 0$ gezeigt.
Nun geht es mit der Rechenregel Satz 7.3 ganz einfach weiter: Ersetze $\varphi(0)$ in (18) durch $\varphi(x) = (T_x\varphi)(0)$ und ersetze $\widehat{\varphi}$ durch $\mathcal{F}(T_x\varphi)$, dann steht (15) da.
Die Gültigkeit von Gleichung (15) für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ erhält man durch Ausnutzen von Bemerkung 6.4 – vgl. wieder [Rud73].
(Andere Beweisvarianten finden sich in [MV91b],[RS75],[Yos80].)

Satz 10 (Weitere Rechenregeln für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$)
Es gilt:

1. $(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi)$ und $(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(-\xi)$.
2. $\mathcal{F}^{-1}\varphi = \overline{\mathcal{F}\,\overline{\varphi}}$ und $\mathcal{F}\varphi = \overline{\mathcal{F}^{-1}\,\overline{\varphi}}$.
3. Mit den ersten beiden Eigenschaften läßt sich 7.5 verallgemeinern:
   Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine reellwertige Funktion.
   Für $\psi(x) = \overline{\varphi(x)}$ ist $\widehat{\psi}(\xi) = \overline{\widehat{\varphi}(-\xi)}$.
   Für $\psi(x) = \varphi(-x)$ ist $\widehat{\psi}(\xi) = \overline{\widehat{\varphi}(\xi)}$.

Bisher wurde die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathcal{S}_n$ betrachtet. Der Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist zwar ein Banachraum, aber kein Hilbertraum, dh. kein Raum mit Skalarprodukt. Und der Raum $\mathcal{S}_n$ ist noch nicht einmal ein Banachraum. Dagegen ist der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot \overline{\psi(x)}\,dx. \qquad (19)$$

Daher ist der folgende Satz von Plancherel von fundamentaler Bedeutung:

Satz 11 (Satz von Plancherel ($\mathcal{F} : L^2 \to L^2$))
Die Fouriertransformation ist eine lineare Isometrie auf $L^2(\mathbb{R}^n)$,
dh. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

Daraus folgt insbesondere: $\|\varphi\|_{L^2} = \|\widehat{\psi}\|_{L^2}$.

Beweisidee: Seien $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. (Solche Funktionen gibt es. Alle Funktionen aus $\mathcal{S}_n$ zum Beispiel.) Mit Rechenregel Satz 7.4 und mit der Formel (15) für die inverse Fouriertransformation gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, dx && (21)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{+i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi\ \overline{\psi(x)}\, dx && (22)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)} e^{+i\langle \xi, x\rangle}\, dx\, d\xi && (23)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}}\, dx\, d\xi && (24)\\
&= \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle. && (25)
\end{aligned}$$

Damit ist (20) schon mal für alle $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ bewiesen. Die weitere Argumentation nutzt die Dichtheit von $\mathcal{S}_n$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ – [Rud73].
(Andere Beweisvarianten finden sich in [MV91b],[RS75],[Yos80].)

Mit diesem Satz haben alle bisher bewiesenen Sätze auch für L^2-Funktionen Gültigkeiten, und man braucht nirgends mehr zu fordern, daß zu $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ auch $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, da diese Bedingung automatisch erfüllt ist.

Bemerkung 12 (Eigenwerte der Fouriertransformation, Hermite-Polynome)

Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (oder $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oder $\varphi \in \mathcal{S}_n$).
Aus 10.1 folgt: $(\mathcal{F}^2\varphi)(x) := (\mathcal{F}\widehat{\varphi})(x) = \varphi(-x)$ und $\mathcal{F}^4\varphi = \varphi$ bzw. $\mathcal{F}^4 = I$.
Mit dem Satz von Plancherel ist $\langle \mathcal{F}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle$. Also gilt $\langle \mathcal{F}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}\psi \rangle$ i.A. **nicht**! (Allerdings gilt $\langle \mathcal{F}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}\psi \rangle$, wenn φ oder ψ gerade ist.)
Aus $\mathcal{F}^4 = I$ kann man folgern: Hat die Fouriertransformation Eigenwerte λ mit Eigenfunktionen φ_λ so, daß $\mathcal{F}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, dann muß $\lambda^4 = 1$ gelten, dh. $\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}$.

Hermite-Polynome sind definiert durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{26}$$

Aus (26) läßt sich folgern:

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0 \qquad \text{und} \qquad H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \tag{27}$$

Weiter gilt

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\cdot\delta_{nm}. \tag{28}$$

Die Funktionen $\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ sind Eigenfunktionen der Fouriertransformation zu den Eigenwerten $(-i)^n$. (Man kann das nachrechnen. Aber ich habe keine Ahnung, wie man da jemals drauf gekommen ist.) Jeder Eigenwert hat die Vielfachheit ∞.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\lambda & = & (-i)^0 & = & 1 & : & \varphi_0(x) & = & e^{-\frac{1}{2}x^2}, \\
\lambda & = & (-i)^1 & = & -i & : & \varphi_1(x) & = & 2xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \\
\lambda & = & (-i)^2 & = & -1 & : & \varphi_2(x) & = & (4x^2-2)e^{-\frac{1}{2}x^2}, \\
\lambda & = & (-i)^3 & = & i & : & \varphi_3(x) & = & (8x^3-6x)e^{-\frac{1}{2}x^2}.
\end{array} \tag{29}$$

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wo das Bild von L^p-Funktionen (für $1 \le p \le 2$) unter der Fouriertransformation liegt.

Bemerkung 13 (Haussdorff-Young-Ungleichung ($\mathcal{F} : L^p \to L^q$))
Für $1 \le p \le 2$ ist die Fouriertransformation eine stetige Abbildung von $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach $L^q(\mathbb{R}^n)$ für $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann gilt:

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^q} \le (2\pi)^{-\frac{n(2-p)}{2p}}\|\varphi\|_{L^p}. \tag{30}$$

(Beweis: [RS75])

Bemerkung 14 (Fouriertransformation und Fourierreihe)
Die Fouriertransformation läßt sich als eine Art stetige Fortsetzung des Konzepts der Fourierreihe verstehen. Mit einer Fourierreihe beschreibt man eine (periodische) Funktion auf $\mathbb{R}$ durch eine abzählbare Menge von Koeffizienten c_k:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{31}$$

(Gut, normalerweise stehen etwas andere Faktoren vor den Integralen. Aber so sieht es suggestiver aus ...) Bei der Fouriertransformation hat man statt der diskreten Koeffizienten $c_k, k \in \{\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots\}$ überabzählbar viele Koeffizienten $c(\xi) := \widehat{\varphi}(\xi), \xi \in \mathbb{R}$, und die Summation wird durch die „Fortsetzung der Summation“, nämlich durch Integration ersetzt:

$$\varphi(x) = (2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} c(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \text{ mit } c(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx. \tag{32}$$

Man kann $c(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ als eine Dichtefunktion der in φ enthaltenen Frequenzen ξ interpretieren. (Siehe auch [MV91b].)

2 Fouriertransformation und Faltung

Definition 15 (Faltung)
Seien $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und gelte $1 \leq p^{-1} + q^{-1} \leq 2$ für $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann heißt die durch

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)\, dy \tag{33}$$

definierte Funktion $\varphi * \psi$ die Faltung von φ und ψ.

Die bei der Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auftretende Variation der Konstanten läßt sich z.B. oft auch als Faltung darstellen: Sei $f(x) = 0$ für $x < 0$. Zu $u' + au = f$ ist $u_h = e^{-ax}$ eine Lösung der homogenen Gleichung und eine Partikulärlösung ist $u_p = \bar{u}_h * f$ mit $\bar{u}_h(x) = e^{-ax}$ für $x \geq 0$ und $\bar{u}_h(x) = 0$ sonst. (Siehe auch Beispiel 44, S.19.)

Bemerkung 16 (Eigenschaften der Faltung)
Man sieht leicht: Wenn $\varphi * \psi$ existiert, dann ist $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.
(Beim Beweisen mit Substitution nicht vergessen, die Integrationsgrenzen zu ändern!)
Eine wichtige Eigenschaft der Faltung bezieht sich wieder auf Differentiation: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und ψ eine Distribution aus dem Dualraum von $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Wer mit Distributionen noch nichts anfangen kann stelle sich stattdessen irgendeine L^p-Funktion ψ vor.) Dann ist $\varphi * \psi$ eine C^∞-Funktion mit

$$\nabla^k(\varphi * \psi) = (\nabla^k \varphi) * \psi = \varphi * (\nabla^k \psi) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0^n. \tag{34}$$

Für ein vorgegebenes $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiere $f_\xi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{i\langle \xi, x\rangle}$. Dann läßt sich $\widehat{\varphi}(\xi)$ durch eine Faltung darstellen:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (f_\xi * \varphi)(0). \tag{35}$$

Satz 17 (Faltung von L^p-Funktionen)
Seien $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und gelte $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$ für $1 \leq p, q, r \leq \infty$. Dann ist $\varphi * \psi \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|\varphi * \psi\|_{L^r} \leq \|\varphi\|_{L^p} \cdot \|\psi\|_{L^q}. \tag{36}$$

Speziell gilt für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, daß $\varphi * \psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\varphi * \psi\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^p} \cdot \|\psi\|_{L^1}. \tag{37}$$

(Beweis des allgemeinen Teils: [RS75]; Beweis allein des speziellen Teils: [Alt85],[Ada75].)

Satz 18 (Fouriertransformation und Faltung)
Wenn man Fouriertransformation und Faltung zusammenbringt, so erhält man (für z.B. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_n$) :

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} (\mathcal{F}\varphi) \cdot (\mathcal{F}\psi) \quad \text{bzw.} \quad \widehat{(\varphi * \psi)} = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}, \tag{38}$$

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\mathcal{F}\varphi) * (\mathcal{F}\psi) \quad \text{bzw.} \quad \widehat{(\varphi\psi)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}. \tag{39}$$

(Zum Beweis benutzt man die Definitionen und Satz 7.3.)

Bemerkung 19 (Kreuz- und Autokorrelation)
Seien $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und sei die *Kreuz-Korrelation* $\varphi \star \psi$ von φ und ψ definiert durch

$$(\varphi \star \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\psi(x+y)\, dy. \tag{40}$$

Dann ist

$$\mathcal{F}(\varphi \star \psi) = (2\pi)^{+\frac{n}{2}}\, \overline{(\mathcal{F}\varphi)} \cdot (\mathcal{F}\psi) \quad \text{bzw.} \quad \widehat{(\varphi \star \psi)} = (2\pi)^{+\frac{n}{2}}\, \overline{\widehat{\varphi}} \cdot \widehat{\psi}. \tag{41}$$

Insbesondere gilt für die sogenannte *Autokorrelation* $c_\varphi := \varphi \star \varphi : \widehat{c}_\varphi(\xi) = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2$.

3 Fouriertransformation und Sobolevräume $H^m(\mathbb{R}^n)$

Definition 20 (Sobolevräume $H^m(\mathbb{R}^n)$)
Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Der Sobolevraum $H^m(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$H^m(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \nabla^k \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n), |k| \le m \right\}. \tag{42}$$

Mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^m} := \sum_{|k| \le m} \left\langle \nabla^k \varphi, \nabla^k \psi \right\rangle_{L^2} \tag{43}$$

ist $H^m(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum. (Die natürliche Norm auf $H^m(\mathbb{R}^n)$ ist dann selbstverständlich $\|\varphi\|_{H^m} = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{H^m}}$.)

Diese Definition ist etwas schlampig. Man sollte darauf hinweisen, daß mit $\nabla^k \varphi$ sogenannte schwache Ableitungen von φ gemeint sind, und diese mittels Testfunktionen oder womöglich Distributionen definieren: vgl. [Ada75],[Hac86]. Dort erfährt man auch, daß H^m sich auch als $W^{m,2}$ schreiben läßt, wobei $W^{m,p}$ Sobolovräume zu L^p-Räumen sind. Außerdem betrachtet man normalerweise Räume von Funktionen auf beliebigen Gebieten Ω statt immer nur Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Im Zusammenhang mit Fouriertransformationen sind aber zunächst nur die Räume $H^m(\mathbb{R}^n)$ von Interesse.

Satz 21 (Äquivalente Normen)
Das Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_m := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)}\, d\xi \tag{44}$$

ist ein zu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m}$ äquivalentes Skalarprodukt auf $H^m(\mathbb{R}^n)$, dh. für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ existieren Konstante $c, C > 0$ so, daß

$$c\langle \varphi, \psi \rangle_m \le \langle \varphi, \psi \rangle_{H^m} \le C \langle \varphi, \psi \rangle_m \quad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in H^m(\mathbb{R}^n).$$

Die zugehörige Norm

$$\|\varphi\|_m = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{\psi}(\xi) \right\|_{L^2} \tag{45}$$

ist eine zu $\|\cdot\|_{H^m}$ äquivalente Norm auf $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Beweisidee: Mit (8) aus Satz 4 und (20) aus dem Satz von Plancherel läßt sich das Skalarprodukt (43) umschreiben:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^m} = \sum_{|k| \le m} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^k \widehat{\varphi} \cdot \overline{\xi^k \widehat{\psi}}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|k| \le m} \xi^k \bar{\xi}^k \right) \widehat{\varphi} \overline{\widehat{\psi}}\, d\xi. \qquad (46)$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ existieren Konstante $c, C \in \mathbb{R}$ so, daß

$$c(1 + |\xi|^2)^m \le \sum_{|k| \le m} \xi^k \bar{\xi}^k \le C(1 + |\xi|^2)^m \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (47)$$

Das war's auch schon.

Bemerkung 22 (Räume H^s mit $s \in \mathbb{R}$)
Der letzte Satz ist sehr praktisch, denn die Norm (45) ist nicht nur für $m \in \mathbb{N}_0$, sondern für alle $s \in \mathbb{R}$ definiert! Damit kann man Sobolevräume $H^s(\mathbb{R}^n)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ definieren:

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \|\varphi\|_s < \infty \}. \qquad (48)$$

Tatsächlich ist das durchaus sinnvoll. Negative Exponenten zum Beispiel tauchen bei Dualräumen auf: Der Dualraum von $H^1(\mathbb{R}^n)$ ($H^s(\mathbb{R}^n)$) (bzgl. des L^2-Skalarprodukts) zum Beispiel ist gerade $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ ($H^{-s}(\mathbb{R}^n)$). In anderen Worten: Jede lineare stetige Abbildung $\Phi : H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ läßt sich durch eine „Funktion" $\varphi_\Phi \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ darstellen, so daß $\Phi(\psi) = \langle \varphi_\Phi, \psi \rangle$. Rationale Exponenten werden sich im nächsten Satz ergeben. Aus (45) liest man außerdem einen schönen Zusammenhang zwischen dem Abklingen der Fouriertransformierten $\widehat{\varphi}$ für $|\xi| \to \infty$ und der Differenzierbarkeit von φ ab.

Satz 23 (Ein Spursatz: $H^s(\mathbb{R}^n) \mapsto H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$)
Hilfsweise werden hier Vektoren in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Form $\mathbf{x} = (x, x_n)$ mit $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x_n \in \mathbb{R}$ dargestellt.
Sei $s > \frac{1}{2}$ und $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $\psi = \varphi|_{x_n=0}$, dh. $\psi(x) = \varphi(x, 0)$. (ψ heißt auch: Die Spur von φ auf der Hyperebene $x_n = 0$.) Dann ist $\psi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ und es gibt eine Konstante $C > 0$ so, daß

$$\|\psi\|_{s-\frac{1}{2}} \le C \cdot \|\varphi\|_s \quad \text{für alle } \psi = \varphi|_{x_n=0} \text{ mit } \varphi \in H^s(\mathbb{R}^n). \qquad (49)$$

Beweis 24 (von Satz 23)
Es gilt:

$$\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi, \xi_n) e^{+i\xi_n \cdot 0}\, d\xi_n, \qquad (50)$$

weil man $\widehat{\psi}$ erhält, wenn man $\varphi(x, 0)$ fouriertransformiert bzw. komplizierter: wenn man $\widehat{\varphi}(\xi, \xi_n)$ an der Stelle $x_n = 0$ rücktransformiert.
Die Höldersche Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)\psi(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p\, dx^{\frac{1}{p}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^q\, dx^{\frac{1}{q}} \qquad (51)$$

gilt für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und alle $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n), \psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$.
Mit $p = q = 2$ und (50) ergibt sich:

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2 + \xi_n^2)^{-s} \, d\xi_n{}^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2 + \xi_n^2)^{+s} \widehat{\varphi}(\xi, \xi_n) \, d\xi_n{}^{\frac{1}{2}}. \quad (52)$$

Für $s > \frac{1}{2}$ ist $C_s := \int_{\mathbb{R}} (1 + \zeta^2)^{-s} \, d\zeta < \infty$, und damit nach Substitution:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2 + \xi_n^2)^{-s} \, d\xi_n = C_s (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2} - s}.$$

Quadrieren beider Seiten, Multiplikation mit $(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2} - s}$ und Integration $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdots d\xi$ ergibt dann (49) und damit die Behauptung.

Dass folgende Lemma klärt, wann Funktionen mit schwachen Ableitungen in $L^2(\mathbb{R}^n)$ tatsächlich „klassisch" differenzierbar sind.

Bemerkung 25 (Lemma von Sobolev)
Mit diesem Spursatz und einigen weiteren Überlegungen kann man ein Einbettungslemma von Sobolev beweisen: Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $k + \frac{n}{2} < s$ gilt $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 26 (Interpolationsabschätzung)
Sei $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, sei $t \leq s$ und sei $\vartheta \in [0, 1]$. Dann zeigt sich (mit der Hölderschen Ungleichung (51))

$$\|\varphi\|_{\vartheta s + (1-\vartheta)t} \leq \|\varphi\|_s^{\vartheta} \cdot \|\varphi\|_t^{1-\vartheta}. \quad (53)$$

(Man sagt: $\|\varphi\|_s$ ist eine in s logarithmisch konvexe Funktion.)

Tatsächlich lassen sich viele Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume und die Anfänge der Theorie interpolierender Räume sehr schön mit Hilfe von Fouriertransformation herleiten, solange man Funktionen mit schwachen Ableitungen in L^2 auf ganz $\mathbb{R}^n$ betrachtet.. Mühsam wird es allerdings, wenn man zu Funktionenräumen auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ übergeht, oder auch zu Funktionen, deren schwache Ableitungen in L^p mit $p \neq 2$ liegen.

Beispiel 27 (Rechteckimpuls)
Ein Rechteckimpuls bzw. eine charakteristische Funktion auf dem Intervall $[-1, +1]$ wird beschrieben durch

$$\varphi_R(x) = \chi_{[-1,+1]}(x) := \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq +1) \\ 0 & (1 < |x|) \end{cases}. \quad (54)$$

Diese Funktion ist sicherlich nicht besonders differenzierbar. In welchem Sobolevraum könnte sie liegen? Als Fouriertransformierte erhält man die sogenannte sinc-Funktion:

$$\widehat{\varphi}_R(\xi) = \sqrt{2\pi^{-1}} \operatorname{sinc}(\xi) \quad \text{wobei} \quad \operatorname{sinc}(\xi) := \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (55)$$

Nun fragt sich, für welche $s \in \mathbb{R}$ das folgende Integral beschränkt ist:

$$\|\varphi\|_s = 2\pi^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}\, d\xi < \infty? \tag{56}$$

Weil die sinc-Funktion beschränkt ist braucht man sich nur um die Potenzen von ξ für $|\xi| \to \infty$ zu kümmern, also um ξ^{2s-2}, und erhält als Konvergenzbedingung für das Integral: $s < 2^{-1}$. Damit ist $\varphi_R \in H^s(\mathbb{R})$ für alle $s < \frac{1}{2}$.

Beispiel 28 (Delta-Distribution)
Die Delta-Distribution ist keine Funktion, sondern eine Art Abbildung von einem Raum stetiger Funktionen nach $\mathbb{R}$. Sie ist (implizit) definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0). \tag{57}$$

(Zu der Notation vgl. Definition 33, S.14 – hier ist der Integralausdruck strenggenommen noch nicht definiert.)
Ihre Fouriertransformierte ist zwar derzeit eigentlich noch nicht definiert, läßt sich aber (formal) schon leicht berechnen:

$$\widehat{\delta}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}. \tag{58}$$

Wie im letzten Beispiel zeigt man leicht: $\delta \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ für $s > \frac{n}{2}$. (Also ist δ z.B. im Dualraum von $H^1(\mathbb{R})$, aber nicht im Dualraum von $H^1(\mathbb{R}^n)$ für $n \geq 2$.)

Es fällt auf, daß man $\widehat{\delta}$ nicht ohne Weiteres zurücktransformieren kann, weil das zugehörige Integral nicht konvergiert. Man muß mit dem Konvergenzbegriff im Raum der Distributionen oder mit dem Cauchy-Hauptwert argumentieren, um zu erklären, warum man so etwas wie $\mathcal{F}^{-1}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} = \delta$ hinschreiben darf. (Siehe dazu Beispiel 35, S.14.)

4 Fouriertransformation einiger Funktionen

Beispiel 29 (Rechteckimpuls und Dreieckimpuls)
In Beispiel 27 wurde der Rechteckimpuls φ_R auf dem Intervall $[-1,+1]$ und seine Fouriertransformierte untersucht. Mit Satz 7.1 zeigt man für den Rechteckimpuls $\varphi_{R,a}$ auf dem Intervall $[-a,+a]$ $(a>0)$:

$$\widehat{\varphi}_{R,a} = a\sqrt{2\pi^{-1}} \cdot \operatorname{sinc}(a\xi) = \sqrt{2\pi^{-1}} \cdot \frac{\sin a\xi}{\xi}. \tag{59}$$

Nun kann man sich die Mühe machen, die Faltung $\varphi_{D,2a} = \varphi_{R,a} * \varphi_{R,a}$ zu berechnen und erhält einen Dreieckimpuls:

$$\varphi_{D,2a}(x) = \begin{cases} 0 & (x < -2a) \\ 2a - |x| & (-2a < x < +2a) \\ 0 & (2a < x) \end{cases}. \tag{60}$$

Wozu macht man sich die Mühe? Weil man nun mit Satz 18 sofort die Fouriertransformation von $\varphi_{D,2a}$ hinschreiben kann:

$$\widehat{\varphi}_{D,2a}(\xi) = a^2\sqrt{2^3\pi^{-3}} \cdot \operatorname{sinc}^2(a\xi). \tag{61}$$

Bemerkung 30 (Faltung und Tiefpassfilter)
Oft beschreibt eine Funktion $\varphi_{in}(x)$ ein eingehendes Signal. Ein (ideales) Tiefpassfilter läßt alle Schwingungsanteile von φ mit Frequenzen $|\xi| \leq \omega$ unverändert passieren und schneidet Anteile zu Frequenzen $|\xi| > \omega$ ab. Die Frequenzanteile von φ_{in} werden durch $\widehat{\varphi}_{in}(\xi)$ beschrieben. Die Frequenzanteile des gefilterten Signals haben die Form $\widehat{\varphi}_{in} \cdot \varphi_{R,\omega}$, wobei $\varphi_{R,\omega}$ wieder einmal ein Rechteckimpuls ist. Das gefilterte Signal selbst kann nun als Faltung des eingehenden Signal mit $\mathcal{F}^{-1}\varphi_{R,\omega}$ dargestellt werden:

$$\varphi_{out} = \varphi_{in} * \psi_{R,\omega} \quad \text{mit} \quad \psi_{R,\omega}(x) = \omega\pi^{-1} \cdot \operatorname{sinc}(\omega x). \tag{62}$$

Beispiel 31 (Gedämpfte Schwingung)
Sei $a > 0$. Zum Berechnen der Fouriertransformation der gedämpften Schwingung

$$\varphi(x) = e^{-a|x|} \cos \omega x \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{63}$$

kann man die Rechenregeln aus Satz 7 hübsch ausnutzen. Zuerst betrachtet man φ_a mit $\varphi_a(x) = e^{-ax}$ $(a > 0)$ für $x \geq 0$ und $\varphi_a(x) = 0$ für $x < 0$. Es ergibt sich leicht $\widehat{\varphi}_a(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \cdot (a + i\xi)^{-1}$. Mit der Linearität der Fouriertransformation und mit Satz 7.1 ergibt sich für $\varphi_2(x) = e^{-a|x|} = \varphi_a(x) + \varphi_a(-x)$:

$$\widehat{\varphi}_2(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a + i\xi} + \frac{1}{a - i\xi} \right) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2a}{a^2 + \xi^2}. \tag{64}$$

Weiter läßt sich $\cos \omega x$ darstellen als $\frac{1}{2}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x})$ und mit Satz 7.3 (und wieder der Linearität der Fouriertransformation) erhält man:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{a^2 + (\xi - \omega)^2} + \frac{a}{a^2 + (\xi + \omega)^2} \right). \tag{65}$$

Beispiel 32 (Signumfunktion und Heavisidefunktion)
Die Signumfunktion (Vorzeichenfunktion) $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\sigma(x) = -1$ für $x < 0$, $\sigma(x) = +1$ für $x > 0$ und (meistens) $\sigma(0) = 0$. σ ist (genau wie δ) keine L^p-Funktion für $p < \infty$. $\widehat{\sigma}$ ist also erstens noch nicht definiert und läßt sich zweitens nicht ohne Weiteres durch Einsetzen in die Definition der Fouriertransformation berechnen. Aber punktweise (also für jedes einzelne x) gilt: $\sigma(x) = \lim_{a \to 0}(\varphi_a(x) - \varphi_a(-x))$, wobei φ_a wie im vorigen Beispiel 31 definiert ist. Dieser Grenzübergang läßt sich hier tatsächlich auf die Fouriertransformierte übertragen, und es ergibt sich

$$\widehat{\sigma}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{i\xi}. \tag{66}$$

(Zur Berechnung von $\mathcal{F}^{-1}\widehat{\sigma}$ mit funktionentheoretischen Methoden vgl. auch [MV91b] und Beispiel 42, S.17.)
Ein anderes beliebtes Beispiel ist die Heavisidefunktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $H(x) = 0$ für $x < 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$. Wenn man den gleichen Grenzübergang wie eben versucht, dann erhält man $\widehat{H} = \widehat{\sigma}/2$, und das ist **falsch**! (Das sieht man sofort: H ist keine ungerade Funktion, also darf $\widehat{H}$ nicht ungerade sein.) Wenn man sich H umschreibt zu $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \sigma(x))$, dann erhält man die korrekte Fouriertransformierte

$$\widehat{H}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\pi\delta(\xi) + \frac{1}{i\xi} \right). \tag{67}$$

Dies Beispiel hat gezeigt, daß man einfachen Grenzübergängen nicht ohne Weiteres trauen kann. Es ist also höchste Zeit, wenigstens anzugeben, worauf man Fouriertransformation überhaupt anwenden kann und was man dann unter Konvergenz versteht. Formal sieht das so aus:

Definition 33 (Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'$)
Der Raum $\mathcal{S}'$ der temperierten Distributionen ist der Raum der stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{S}$ nach $\mathbb{C}$. Als Notation hat sich eingebürgert: $\Phi(\varphi) = \langle \Phi, \varphi \rangle$ für die Anwendung von $\Phi \in \mathcal{S}'$ auf $\varphi \in \mathcal{S}$. Die Elemente des $\mathcal{S}'$ (wie z.B. δ) werden meist so wie Funktionen geschrieben und behandelt, und die Anwendung wird formal als Integral beschrieben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\overline{\varphi(x)}\, dx := \langle \Phi, \varphi \rangle. \tag{68}$$

(Das ist eine Verallgemeinerung des L^2-Skalarprodukts.)
Man sagt: Φ_n konvergiert in $\mathcal{S}'$ gegen Φ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Phi_n, \varphi \rangle = \langle \Phi, \varphi \rangle \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{69}$$

Für $\Phi \in \mathcal{S}'$ definiert man die Fouriertransformierte $\widehat{\Phi}$ als die lineare Abbildung $\widehat{\Phi} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, für die gilt, daß

$$\langle \widehat{\Phi}, \varphi \rangle = \langle \Phi, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{70}$$

Diese Definition (70) macht Sinn, weil sie mit dem Satz von Plancherel übereinstimmt und die Überlegungen aus Bemerkung 12, S.6, auf Distributionen erweitert.
Ableitungen von Distributionen $\Phi \in \mathcal{S}'$ definiert man analog: $\Psi = \nabla^k \Phi$ ist die lineare Abbildung $\Psi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, für die gilt, daß

$$\langle \Psi, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle \Phi, \nabla^k \varphi \rangle \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{71}$$

Diese Definition ist eine Art Erweiterung der partiellen Integration.

Bemerkung 34 ($\mathcal{S}'$: Raum der langsam wachsenden Funktionen)
Alle Polynome sind in $\mathcal{S}'$ enthalten, wie man leicht sieht, wenn man sich die Definition 5 (S.2) noch einmal ansieht. Aber „schnell wachsende Funktionen“ wie $\Phi(x) = e^x$ sind keine Elemente von $\mathcal{S}'$, denn offensichtlich ist $\varphi(x) = (e^x + e^{-x})^{-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aber

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx \notin \mathbb{R},$$

dh. Φ kann nicht als Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathbb{R}$ verstanden werden. Daher wird $\mathcal{S}'$ auch manchmal Raum der langsam wachsenden Funktionen genannt.

Beispiel 35 (Noch einmal die Deltadistribution)
Nun kann man die Fouriertransformation der Distribution $\Phi \equiv 1$ durchführen:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(-\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(-\xi) e^{i\langle \xi, 0\rangle}\, d\xi = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \varphi(0) \\ &= \left\langle (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \delta, \varphi \right\rangle \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Damit gilt also wirklich auch $\mathcal{F}^{-1}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} = \delta$. Im distributionellen Sinn darf man nach dieser Überlegung schreiben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx = (2\pi)^n \delta(\xi). \tag{72}$$

Im „klassischen Sinn", also z.B. als Lebesgue-Integral, existiert dieses Integral allerdings nicht.

Beispiel 36 (Noch einmal die Heavisidefunktion)
Zuerst wird die Ableitung der Heavisidefunktion berechnet:

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle, \tag{73}$$

dh. die Delta-Distribution ist Ableitung der Heavisidefunktion: $H' = \delta$.
Wenn man nun die Differentiationsregel (8) anwendet, erhält man

$$\text{Achtung, falsch:} \qquad (2\pi)^{-1/2} = \widehat{\delta}(\xi) = \widehat{H'}(\xi) = i\xi \widehat{H}(\xi),$$

und das war doch vorhin schon nicht richtig. Die Differentiationsregel wurde mit Hilfe partieller Integration hergeleitet und setzte voraus, daß φ für $|x| \to \infty$ gegen Null geht. Diese Voraussetzung ist für Distributionen aber in der Regel nicht erfüllt. Das, was bei der partiellen Integration noch zusätzlich anfällt, läßt sich hier durch Untersuchung des geraden Anteils von H ermitteln: Mit $H(x) + H(-x) = 1$ (für $x \neq 0$) berechnet man den fehlenden gerade Anteil von $\widehat{H}$: $\widehat{H}(\xi) + \widehat{H}(-\xi) = (2\pi)^{+1/2}\delta(\xi)$. Beide Überlegungen zusammen liefern die korrekte Transformation (67).

Beispiel 37 (Fouriertransformation der Distribution $\Phi(x) = ix$***)***
Mit der Definition der Fouriertransformationen von Distributionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\Phi}, \varphi\rangle &:= \langle ix, \widehat{\varphi}(-x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} ix\widehat{\varphi}(-x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -ix\widehat{\varphi}(x)e^{ix0}\, dx = -(2\pi)^{+\frac{1}{2}}\varphi'(0) \end{aligned}$$

und mit der Definition der Ableitungen von Distributionen ist gleichzeitig

$$\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi\rangle = -\varphi'(0).$$

Also gilt $(\mathcal{F}(ix))(\xi) = (2\pi)^{+\frac{1}{2}}\delta'(\xi)$.
Nimmt man nun die Signumfunktion und die Faltungsregeln dazu, so erhält man formal aus $|x| = \sigma(x)x$:

$$(\mathcal{F}|x|)(\xi) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\xi^2}. \tag{74}$$

Hierbei wurden nun allerdings zwei Distributionen miteinander verfaltet. Das ist legal dann, wenn wenigstens eine der Funktionen einen kompakten Träger hat, was hier der Fall war. ([DL88], [RS75], [Rud73])

***Beispiel 38** ($\varphi(x)\cos\omega x$ **und** $\cos\omega x$)*
Sei $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\psi(x) = \varphi(x)\cos\omega x$. Mit der Darstellung $\cos\omega x = \frac{1}{2}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) = \cosh i\omega x$ berechnet man als Fouriertransformation von ψ :

$$\widehat{\psi}(\xi) = \tfrac{1}{2}(\widehat{\varphi}(\xi-\omega) + \widehat{\varphi}(\xi+\omega)). \tag{75}$$

Die Funktion $\cos\omega x$ ist nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, aber in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Mit der gleichen Darstellung des Kosinus und mit (70) erhält man: $\langle \mathcal{F}\cos\omega x, \varphi\rangle = \frac{1}{2}(\varphi(\omega) + \varphi(-\omega))$ und damit:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\cos\omega x)(\xi) &= \tfrac{1}{2}(\delta(\xi-\omega) + \delta(\xi+\omega)) \qquad \text{und analog} \\ (\mathcal{F}\sin\omega x)(\xi) &= \tfrac{i}{2}(\delta(\xi-\omega) - \delta(\xi+\omega)) \quad . \end{aligned} \tag{76}$$

Beispiel 39 (Noch einmal die Fourierreihe)
Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion. Dann kann man φ als Fourierreihe darstellen:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{77}$$

(wenn man wieder die unkonventionelle Notation aus (31) verwendet). Eine periodische Funktion klingt natürlich nicht ab für $|x| \to \infty$. Aber eine periodische Funktion ist Element von $\varphi \in \mathcal{S}'$. Mit Satz 7.3 ist $(\mathcal{F}e^{ikx})(\xi) = (2\pi)^{1/2} \cdot \delta(\xi - k)$ und damit ergibt sich dann die Fouriertransformierte

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(\xi - k). \tag{78}$$

5 Funktionentheorie und weitere Beispiele

Die bei der Fouriertransformation zu berechnenden Integrale, wie z.B. (72) auf S.15, sind oft mit den Mitteln der Integration im Reellen nicht auswertbar. Hilfreich sind hier Methoden und Ergebnisse aus der Funktionentheorie, der Theorie von Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf komplexen Zahlen. Hier wird keine Einführung in die Funktionentheorie gegeben werden: Unbekannte, hier nicht erläuterte Begriffe wird man nachschlagen müssen, z.B. in [MV91b] oder [Rem84]. Aber wenigstens eines der Hauptwerkzeuge, der Cauchy-Integralsatz, soll hier aufgeführt werden:

Satz 40 (Cauchy-Integralsatz)
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $\gamma \subset G$ eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve. Dann gilt für jede auf G analytische Funktion $f : G \to \mathbb{C}$:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0. \tag{79}$$

Das Integrationssymbol „$\oint_\gamma$“ wird verwendet, wenn eine ein Gebiet $G_\gamma \subset G$ umschliessende Kurve γ genau einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. G ist einfach zusammenhängend, wenn G keine Löcher hat.

Bemerkung 41 (Integration einer Funktion mit Pol in Null)
Sei $\varphi : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit Pol in Null, deren Integral über die reelle Achse berechnet werden soll. Dann betrachtet man z.B. die Kurve γ, die aus den zwei Halbkreisbögen $\gamma_r(s) = re^{i(\pi-s)}$ und $\gamma_R(s) = Re^{is}$ $(0 \le s \le \pi)$ und den beiden Achsenabschnitten $\gamma_+(s) = se^0$ und $\gamma_-(s) = (s - r - R)e^0$ $(r \le s \le R)$ zusammengesetzt ist. Mit dem Cauchy-Integralsatz gilt dann:

$$\int_{-R}^{-r} \varphi(x)\,dx + \int_r^R \varphi(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{0} \varphi(re^{is})\,ds - \int_0^{\pi} \varphi(Re^{is})\,ds. \tag{80}$$

Für $r \to 0$ und $R \to \infty$ erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} \varphi(re^{is})\,ds - \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \varphi(Re^{is})\,ds, \tag{81}$$

falls die Grenzwerte existieren.

Beispiel 42 (Fouriertransformation von $\varphi(x) = x^{-1}$)
Sei $\varphi(x) = x^{-1}$. Diese Funktion hat einen Pol in Null. Um die Fouriertransformierte mittels (81) auszuwerten, müssen Integrale über Halbkreisbögen γ_ρ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
I(\gamma_\rho) := \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{-iz\xi}}{z}\,dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^k}{k!}\int_{\gamma_\rho} z^{k-1}\,dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\xi\rho)^k}{k!}\int_0^{\pi} (e^{is})^{k-1} ie^{is}\,ds \\
&= i\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i\xi\rho)^k}{k!k}((-1)^k - 1) \\
&= i\pi - 2i\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\xi\rho)^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}}_{=:\,g(\rho)}.
\end{aligned}$$

Für $\rho \to 0$ konvergiert die Reihe $g(\rho)$ gegen Null, dh. $\lim_{\rho\to 0} I(\gamma_\rho) = i\pi$. Wenn man $g'(\rho)$ bildet sieht man durch Ausklammern von $(\xi\rho)^{-1}$ sofort, daß $g'(\rho) = \frac{\sin\xi\rho}{\rho}$. Damit, und mit $g(\rho) = 0$ ergibt sich

$$\lim_{R\to\infty} g(R) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin\xi\rho}{\rho}\,d\rho = \begin{cases} \pi/2 & (\xi > 0) \\ -\pi/2 & (\xi < 0) \end{cases}. \tag{82}$$

Wenn man nun noch berücksichtigt, in welchem Drehsinn die Halbkreisbögen durchlaufen werden müssen, dann erhält man

$$(2\pi)^{+\frac{1}{2}}\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} -i\pi - (i\pi - i\pi) = -i\pi & (\xi > 0) \\ -i\pi - (i\pi + i\pi) = +i\pi & (\xi < 0) \end{cases} \tag{83}$$

und kann damit die Fouriertransformationsformal (66) der Signumfunktion aus Beispiel 32, S.32 untermauern.

Beispiel 43 (Fouriertransformation von $\varphi(x) = e^{ia|x|^2}$)
In [DL88] findet sich das Beispiel $\varphi(x) = e^{ia|x|^2}$, wobei $a > 0$. Zunächst wird das Integral über φ von 0 bis ∞ berechnet. Dazu definiert man sich eine geschlossene Kurve folgendermassen: Gehe auf der reellen Achse von 0 bis R, gehe einen Achtelkreisbogen mit Radius R (dh. $0 \le \varphi \le \pi/4$) und dann komme auf der Diagonalen $(1+i)s$ (mit $R \ge s\sqrt{2} \ge 0$) zurück.
Bei der folgenden Abschätzung des Integrals auf dem Kreisbogen γ_R ergibt sich mit den Abkürzungen $c = \cos 2t$, $s = \sin 2t$

$$\int_{\gamma_R} e^{iaz^2}\,dz = \int_0^{\pi/4} e^{ia(Re^{it})^2} Rie^{it}\,dt = \int_0^{\pi/4} e^{iaR^2(c+is)} Rie^{it}\,dt.$$

Mit $|e^{ix}| = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ und mit $t \le \sin 2t$ in $[0, \pi/4]$ verschwindet das Integral für $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R} e^{iaz^2}\,dz \right| \le \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/4} 1 \cdot e^{-aR^2 t} R\,dt \le \lim_{R\to\infty} \frac{a}{R} = 0.$$

Nun ist das Integral entlang der Diagonalen γ_D zu berechnen: Mit $z = 2^{-\frac{1}{2}}(1+i)t$ ist $z^2 = it^2$ und

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_D} e^{iaz^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} 2^{-\frac{1}{2}}(1+i) \int_0^R e^{-at^2}\,d\xi = 2^{-\frac{1}{2}}(1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Mit dem Cauchy-Integralsatz ist das aber gerade das Integral über φ von 0 bis ∞. Also gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax^2}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}(1+i)}{2\sqrt{a}}. \tag{84}$$

Was nutzt das nun bei der Berechnung der Fouriertransformierten? Nun, das geht so:

$$e^{iax^2 - i\xi x} = e^{i\left(ax^2 - x\xi + \frac{\xi^2}{4a}\right)} = e^{ia\left(x - \frac{\xi}{2a}\right)^2} \cdot e^{-i\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Damit folgt: Die Fouriertransformierte von

$$\varphi(x) = e^{ia|x|^2} \quad \text{ist} \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \left(\frac{1+i}{2\sqrt{a}}\right)^n e^{-\frac{i|\xi|^2}{4a}} \qquad (x, \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{85}$$

Das zu wissen ist hilfreich, wenn man zufällig mal die Fouriertransformation von $\varphi(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ berechnen muss:

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1-i}{2\sqrt{\xi}} \qquad (\xi > 0) \tag{86}$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-ix\xi}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1-i}{2\sqrt{\xi}} \qquad (\xi > 0) \tag{87}$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1+i}{2\sqrt{|\xi|}} = \frac{-1+i}{2\sqrt{\xi}} \qquad (\xi < 0) \tag{88}$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-ix\xi}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{-1-i}{2\sqrt{|\xi|}} = \frac{1-i}{2\sqrt{\xi}} \qquad (\xi < 0) \tag{89}$$

6 Differential- und Integralgleichungen

Sei p mit $p(x) = \sum_{|k|\leq m} a_k x^k$ ein Polynom m-ten Grades auf $\mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten a_k in $\mathbb{C}$. Mit solchen Polynomen kann man lineare (partielle) Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in kompakter Form darstellen:

$$p(\nabla)u := \sum_{|k|\leq m} a_k \nabla^k u = v, \tag{90}$$

wobei v irgendeine gegebene Funktion (oder Distribution) sei. Mit der Fouriertransformation kann man die Differentialgleichung (90) in eine algebraische Gleichung $p(i\xi) \cdot \widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi)$ transformieren und damit formal eine Lösung von (90) angeben:

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{v}(\xi)}{p(i\xi)} \cdot e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi. \tag{91}$$

Es bleibt allerdings zu Untersuchen, ob dieser Ausdruck für das gegebene v überhaupt sinnvoll ist. Die Frage, was unter „sinnvoll" zu verstehen ist, führt wieder in die Theorie der Distributionen. Bei der Untersuchung des Ausdrucks (91) spielt ein Satz von Paley-Wiener (Satz 55, S.23) eine Rolle, der Eigenschaften der Fouriertransformationen von C_0^∞-Funktionen und von Distributionen mit kompakten Trägern angibt. Mehr dazu findet sich in [RS75], [Rud73].

Beispiel 44 (Eine gewöhnliche Differentialgleichung)
Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung $u' + \omega u = f$. Fouriertransformation liefert $\widehat{u}(\xi) = (i\xi + \omega)^{-1}\widehat{f}(\xi)$. Mit Beispiel 31 und Satz 18 zur Faltung erhält man die Lösungsdarstellung $u = w * f$ mit $w(x) = e^{-\omega x}$ für $x \geq 0$ und $w(x) = 0$ für $x < 0$.

Nun gut, das war eine etwas komplizierte Methode, um an ein Ergebnis zu kommen, daß man als Variation der Konstanten aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen sowieso schon kennt. Bei partiellen Differentialgleichungen ist das interessanter.

Beispiel 45 (Eine elliptische Differentialgleichung)
Betrachte die Gleichung

$$(I - \Delta)u = \delta. \tag{92}$$

Hier ist $p(x) = 1 - \sum_{k=1}^n {x_k}^2$. Formal ergibt sich die Fouriertransformierte der Lösung:

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^n {\xi_1}^2\right)^{-1} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(1 + |\xi|^2\right)^{-1}. \tag{93}$$

Für $n \leq 3$ ist $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, also existiert für $n \leq 3$ eine L^2-Lösung u von (92).
Für $n = 1$ ergibt sich mit Beispiel 31 die Lösung $u(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
Für $n = 2, 3$ ist es nicht komisch, die inverse Fouriertransformation zu berechnen. Weil $\widehat{u}$ radialsymmetrisch (dh. nur von $|x|$ abhängig) ist, ist u auch radialsymmetrisch (vgl.

Satz 7.6): $u = u(r)$. Ein Ansatz in Polarkoordinaten führt für $r > 0$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' - u = 0. \tag{94}$$

Der Ansatz $u(r) = r^\alpha v(r)$ führt für $n = 3$ zu einer Lösung: $\alpha = -1$ und $v(r) = C_1 e^r + C_2 e^{-r}$. Damit u eine $L^2(\mathbb{R}^3)$-Funktion ist, muß $u(r) = Cr^{-1}e^{-r}$ mit einer noch zu bestimmenden Konstante C sein. Vergleich der Normen $\|u\|_{L^2}$ und $\|\widehat{u}\|_{L^2}$ ergibt (wenn ich mich nicht verrechnet habe) $C = \frac{1}{8}$.
Zum Fall $n = 2$ findet man im [BS87] heraus, daß u ein Vielfaches der modifizierten Besselfunktion zweiter Gattung 0. Ordnung (Macdonaldsche Funktion) sein muß.

Bemerkung 46 (Fundamentallösungen)
Warum betrachtet man Differentialgleichungen mit δ auf der rechten Seite? Nun, sei u_δ eine Lösung von $\sum a_k \nabla^k u = \delta$. Dann heißt u_δ *Fundamentallösung* der Differentialgleichung, und man erhält die Lösung u_v von $\sum a_k \nabla^k u = v = v * \delta$ durch die Faltung $u_v = u_\delta * v$. (Vgl. dazu Bemerkung 16, S.8.)

Beispiel 47 (Eine parabolische Differentialgleichung)
Betrachte die Gleichung

$$u_t - \Delta u = \delta(t, x). \tag{95}$$

Nun wird nur bezgl. der x-Koordinate fouriertransformiert. Dann ergibt sich die (fast gewöhnliche) Differentialgleichung

$$\widehat{u}_t(t, \xi) + |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \delta(t). \tag{96}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist $\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{C}_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}$. Wegen δ hat die Lösung eine Unstetigkeit in $t = 0$ mit der Sprunghöhe $(2\pi)^{-n/2}$. Damit ist (eine) Lösung gegeben durch

$$\widehat{u}(t, \xi) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ (2\pi)^{-n/2} e^{-t|\xi|^2} & (t \geq 0) \end{cases}, \tag{97}$$

und Rücktransformation (in ξ-Richtung) liefert eine Fundamentallösung

$$u_\delta(t, x) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \delta(x) & (t = 0) \\ (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (t \geq 0) \end{cases}. \tag{98}$$

Zum Problem $u_t - \Delta u = f$ mit $u(t = 0, x) = g(x)$ erhält man schließlich die Lösung $u = u_f + u_g$ mit

$$u_f(t, x) = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} u_\delta(t - s, x - y) f(s, y)\, dy\, ds \tag{99}$$

und

$$u_g(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_\delta(t, x - y) g(y)\, dy. \tag{100}$$

Interessiert man sich nur für $t > 0$ und setzt f für $t < 0$ durch Null fort, so braucht man in (99) nur von 0 bis t über s zu integrieren.

Beispiel 48 (Eine Fredholmsche Integralgleichung)
Eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art hat die Form

$$\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy - \lambda f(x) = g(x),$$

wobei die Funktionen k, g und $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gegeben sind und f die gesuchte unbekannte Funktion ist.
(Im Falle $\lambda = 0$ hat man eine Fredholmsche Integralgleichung 1. Art vorliegen. Solche Probleme sind in der Regel schlecht gestellt. Wird λ durch eine Funktion $h(x)$ ersetzt, so hat man eine Gleichung 3. Art, die sich für $h(x) \neq 0$ in eine Gleichung 2. Art überführen läßt. Volterrasche Integralgleichungen sehen genauso aus, nur daß nicht von a bis b, sondern von a bis x integriert wird.)
Die spezielle Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)f(y)\,dy - \lambda f(x) = g(x) \tag{101}$$

kann man formal transformieren und erhält aus $\left((2\pi)^{+1/2}\widehat{k} - \lambda\right)\widehat{f} = \widehat{g}$ formal die Lösung

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{g}(\xi)}{(2\pi)^{1/2}\widehat{k}(\xi) - \lambda} \cdot e^{i\langle \xi, x\rangle}\,d\xi. \tag{102}$$

7 Unschärferelation und Abtasttheorem

In [MV91b] findet sich folgende Anmerkung zur „Reziprozität von Zeit und Frequenz“: Ist $\varphi(x)$ „breitbandig“, dh. für $x \to \pm\infty$ langsam abfallend, dann ist $\widehat{\varphi}(\xi)$ „schmalbandig“, dh. für $\xi \to \pm\infty$ schnell abfallend, und umgekehrt ...[dh.] φ und $\widehat{\varphi}$ sind nie gleichzeitig beliebig schmalbandig. *(Ein sehr anschauliches Beispiel dafür sind die Delta-Distribution und ihre Fouriertransformierte.) In Formeln sieht das so aus:*

Satz 49 (Unschärferelation)
Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\frac{\|x\varphi(x)\|_{L^2}}{\|\varphi\|_{L^2}} \cdot \frac{\|\xi\widehat{\varphi}(\xi)\|_{L^2}}{\|\widehat{\varphi}\|_{L^2}} = \frac{\|\varphi'\|_{L^2}}{\|\varphi\|_{L^2}} \cdot \frac{\|\widehat{\varphi}'\|_{L^2}}{\|\widehat{\varphi}\|_{L^2}} \geq \frac{1}{2}. \tag{103}$$

Beweis 50 (von Satz 49)
Zum Beweis des Satzes definiere einen Multiplikationsoperator M und einen Differentialoperator D auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch

$$M : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad (M\varphi)(x) := -ix\varphi(x) \qquad \text{und} \tag{104}$$

$$D : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad (D\varphi)(x) := \tfrac{\partial}{\partial x}\varphi(x). \tag{105}$$

(Mit diesen Operatoren läßt sich (8) aus Satz 4 abkürzen zu $\mathcal{F}D = -M\mathcal{F}$. Außerdem sieht man leicht: $\mathcal{F}M = D\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}M = -D\mathcal{F}^{-1}$ und $\mathcal{F}^{-1}D = M\mathcal{F}^{-1}$.)
Es ergibt sich folgende Gleichung, auf der der Beweis aufbaut:

$$i\varphi = (MD - DM)\varphi. \tag{106}$$

Einige recht offensichtliche Eigenschaften des L^2-Skalarprodukts werden hier noch schnell aufgeführt:

$$\langle M\varphi, \psi\rangle = -\langle \varphi, M\psi\rangle \quad \text{und} \quad \langle D\varphi, \psi\rangle = -\langle \varphi, D\psi\rangle \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{107}$$

dh. die Operatoren M, D sind schiefsymmetrisch, und

$$\langle \varphi, \psi\rangle - \langle \psi, \varphi\rangle = 2i \operatorname{Im}(\langle \varphi, \psi\rangle) \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}). \tag{108}$$

Nun werden beide Seiten von (106) mit $\overline{\varphi(x)}$ multipliziert und es wird über $\mathbb{R}$ integriert:

$$\begin{aligned} i\langle \varphi, \varphi\rangle &= \langle MD\varphi, \varphi\rangle - \langle DM\varphi, \varphi\rangle = -\langle D\varphi, M\varphi\rangle + \langle M\varphi, D\varphi\rangle & (109)\\ &= 2i \operatorname{Im}(\langle M\varphi, D\varphi\rangle). & (110)\end{aligned}$$

Nun werden die Beträge betrachtet und die rechte Seite wird abgeschätzt:

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \le 2\,|\langle M\varphi, D\varphi\rangle| \le 2\|M\varphi\|_{L^2} \cdot \|D\varphi\|_{L^2}. \tag{111}$$

Mit dem Satz von Plancherel ist $\|\varphi\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2} \cdot \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}$ und $\|D\varphi\|_{L^2} = \|\widehat{D\varphi}\|_{L^2} = \|M\widehat{\varphi}\|_{L^2}$ und es ergibt sich (103).

Satz 51 (Shannons Abtasttheorem)
Sei $\widehat{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion mit $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ für $|\xi| > \omega$.
Sei $0 < \Delta x \le \frac{\pi}{\omega}$ und $\omega_0 = \frac{\pi}{\Delta x}$ und sei $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}$.
Sind die Werte $\varphi_k := \varphi(k\Delta x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gegeben, so läßt sich damit φ darstellen in der Form

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k \cdot \operatorname{sinc} \omega_0(x - k\Delta x). \tag{112}$$

Beweis 52 (von Satz 51)
Zur Vereinfachung wird angenommen, daß $\omega \le \pi$ und $\Delta x = 1$ sei.
Weil $\widehat{\varphi}$ nur auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$ von Null verschieden ist, läßt sich $\widehat{\varphi}$ auf diesem Intervall als Fourierreihe darstellen:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\xi} \qquad \text{für} \qquad -\pi \le \xi \le +\pi. \tag{113}$$

Die sinc-Funktionen kommen ins Spiel, weil $\widehat{\varphi} = \varphi_{R,\pi} \cdot \widehat{\varphi}$ ist. Damit kann man nun die Reihendarstellung (113) auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen und erhält (formal ein wenig schlampig aufgeschrieben)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \Big(\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{R,\pi} \cdot \widehat{\varphi})\Big)(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Big((\mathcal{F}^{-1}\varphi_{R,\pi}) * (\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi})\Big)(x) & (114)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(\pi(x-y)) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(y+k)\, dy. & (115)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{-k} \cdot \operatorname{sinc}(\pi(x-k)). & (116)\end{aligned}$$

Setzt man nun $x = k$ in (116) ein, so ergibt sich $c_{-k} = \varphi(k)$ und damit (112).
(Ein anderer Beweis findet sich in [MV91b].)

Bemerkung 53 (Nyquist-Bedingung)
Die Bedingungen, daß φ eine endliche Bandbreite $\omega < \infty$ besitzt ($\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ für $|\xi| > \omega$) und daß die Abtastfrequenz $\frac{2\pi}{\Delta x}$ mindestens doppelt so groß wie ω sein muß (dh. $\Delta x \leq \frac{\pi}{\omega}$) heißt auch Nyquist-Bedingung. Man interessiert sich in der Signalverarbeitung dafür, wenn man wissen möchte, wie oft man Daten φ_k erheben muß, um φ rekonstruieren zu können. (Beispiele dazu finden sich in [MV91b].)
Außerdem läßt sich zeigen, daß die sinc-Funktionen $s_k(x) := \operatorname{sinc}(\pi(x-k))$ $(k \in \mathbb{Z})$ eine Zerlegung der Eins bilden, dh. $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (vgl. ebenfalls [MV91b]).

Bemerkung 54 (Zu Unschärfe und Bandbreite und Abtasttheorem)
Tatsächlich gibt es keine Funktion mit kompaktem Träger, deren Fouriertransformierte einen kompakten Träger hat ([DL88]). (Eine Funktion φ hat einen kompakten Träger, wenn die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}$ beschränkt ist.)

Einen weiteren Aspekt, der etwas mit dem Abklingen von Fouriertransformationen, aber auch mit Funktionentheorie zu tun hat, beleuchtet der Satz von Paley-Wiener:

Satz 55 (Satz von Paley-Wiener)
Hier bezeichne $\widehat{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ die Fortsetzung der Fouriertransfomation auf komplexe Argumente:

$$\widehat{\varphi}(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(s) e^{-i\langle z,s\rangle}\, ds \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{117}$$

(Diese Fortsetzung nennt sich auch Fourier-Laplace-Transformation.)

1. Es ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in einer Kugel vom Radius r um Null genau dann, wenn $\widehat{\varphi}$ eine auf $\mathbb{C}^n$ holomorphe Funktion ist und $c_k < \infty$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ existieren mit

$$|\widehat{\varphi}(z)| \leq c_k \frac{e^{r|\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^k} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{118}$$

2. Eine Distribution $\Phi \in \mathcal{S}'$ hat kompakten Träger in einer Kugel vom Radius r um Null genau dann, wenn $\widehat{\Phi}$ eine auf $\mathbb{C}^n$ holomorphe Funktion ist und Konstante c, k existieren mit

$$|\widehat{\Phi}(z)| \leq c(1+|z|)^k e^{r|\operatorname{Im} z|} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{119}$$

(vgl. [DL88],[RS75],[Rud73],[Yos80])

8 Reste

Bemerkung 56 (Polarkoordinaten und Hankeltransformation)
Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ mit Fouriertransformierter $\widehat{g}(\xi)$. Manchmal möchte man g oder $\widehat{g}$ in Polarkoordinaten $x = re^{i\varphi}, \xi = \rho e^{i\vartheta}$ darstellen. Weil $g, \widehat{g}$ in φ, ϑ 2π-periodisch sind, kann man $g, \widehat{g}$ als Fourier*reihe* bzgl. des Winkels darstellen:

$$g(r,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(r)e^{ik\varphi} \quad \text{und} \quad \widehat{g}(\rho,\vartheta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k(\rho)e^{ik\vartheta}. \tag{120}$$

Wenn man untersucht, wie die $u_k(r)$ und $v_k(\rho)$ zusammenhängen, so landet man bei der *Hankeltransformation* $\mathcal{H}$:

$$u_k = i^n \cdot \mathcal{H}v_k \quad \text{und} \quad v_k = (-i)^n \cdot \mathcal{H}u_k, \tag{121}$$

wobei

$$(\mathcal{H}\varphi)(r) := \int_0^\infty \varphi(\rho)J_k(r\rho)\rho\, d\rho. \tag{122}$$

Dabei sind J_k die Besselfunktionen k-ter Ordnung erster Art. (Zu Besselfunktionen findet sich Einiges in [BS87], [DL88], [MV91b] u.a. Sie sind Lösungen der Besselschen DGL $x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$ und man begegnet ihnen, wenn man nach Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf Kreisscheiben sucht.)
Speziell gilt für radial symmetrische Funktionen (dh. $g(r,\varphi) = g(r)$):

$$\widehat{g}(\rho) = \int_0^\infty g(r)J_0(\rho r)r\, dr \quad \text{und} \quad g(r) = \int_0^\infty \widehat{g}(\rho)J_0(r\rho)\rho\, d\rho. \tag{123}$$

Wie kommt man da hin? Nun, $g = \mathcal{F}^{-1}\widehat{g}$ sieht in Polarkoordinaten transformiert (mit $\langle x,\xi\rangle = r\rho\cos(\vartheta-\varphi)$) so aus:

$$\begin{aligned}
g(r,\varphi) &= (2\pi)^{-1}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \widehat{g}(\rho,\vartheta)e^{ir\rho\cos(\vartheta-\varphi)}\rho\, d\vartheta d\rho \\
&= (2\pi)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty v_k(\rho)\rho\int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\vartheta-\varphi)+ik\vartheta}\, d\vartheta d\rho \\
&= (2\pi)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty v_k(\rho)\rho\int_{-\varphi-\pi/2}^{2\pi-\varphi-\pi/2} e^{-ir\rho\sin\alpha+ik\alpha}\, d\alpha d\rho \cdot e^{ik(\varphi+\pi/2)} \\
&= (2\pi)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{i^k\cdot\int_0^\infty v_k(\rho)\rho\int_0^{2\pi}\cos(k\alpha - r\rho\sin\alpha)\, d\alpha d\rho}_{=u_k(r)} \cdot e^{ik\varphi},
\end{aligned}$$

wobei $\alpha = \vartheta - \varphi - \frac{\pi}{2}$. Nun braucht man nur noch eine spezielle Eigenschaft der Besselfunktionen um (121) zu erhalten, nämlich (vgl. [DL88], [Rem84]) :

$$2\pi J_k(\omega) = \int_0^{2\pi}\cos(k\alpha - \omega\sin\alpha)\, d\alpha. \tag{124}$$

Bemerkung 57 (Integralcosinus und Integralsinus)
Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Die Fouriercosinustransformation F_c und ihre Inverse sind definiert durch

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \xi x \, dx \quad \text{und} \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\xi) \cos \xi x \, d\xi, \tag{125}$$

und die Fouriersinustransformation F_s und ihre Inverse sind definiert durch

$$F_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \xi x \, dx \quad \text{und} \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\xi) \sin \xi x \, d\xi. \tag{126}$$

Für negative ξ seien die Transformierten durch $F_c(\xi) = F_c(-\xi)$ und $F_s(\xi) = -F_s(-\xi)$ fortgesetzt. Dann gilt für gerade Funktionen $\mathcal{F}f = F_c$ und für ungerade Funktionen $\mathcal{F}f = iF_s$. Weil man jede Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen kann läßt sich die Fouriertransformation auch durch Fouriercosinus- und Fouriersinustransformierte darstellen.

Bemerkung 58 (Wo finden sich weitere Informationen?)
In [BS87] findet sich (natürlich) eine Tabelle zu Fouriertransformationen, nämlich Fouriercosinustransformierte und Fourierinustransformierte.
Das Buch [MV91b] ist (finde ich) sehr gut lesbar. Es sind viele Beispiele aufgeführt und Vieles wird durch Illustrationen ergänzt. Außerdem werden Zusammenhänge zwischen Fourier- und Laplacetransformation erläutert.
Erheblich tiefer gehen [RS75] und [Rud73]. Dabei ist [Rud73] ist etwas leichter zugänglich als [RS75], aber nicht so vollständig (für mein Gefühl). Vertiefende Kapitel in [RS75] sind interessant vor dem Hintergrund von Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie, sowie zum Studium von partiellen Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten.

Literatur

[Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

[Alt85] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, 1985.

[BS87] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik.* Harri Deutsch, 1987.

[DL88] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, volume 2 of *Functional and Variational Methods.* Springer–Verlag, 1988.

[Hac86] Wolfgang Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* Teubner, 1986.

[Heu91] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis*, volume 2. Teubner, 1991.

[MV91a] Kurt Meyberg and Peter Vachenauer. *Höhere Mathematik*, volume 1. Springer, 1991.

[MV91b] Kurt Meyberg and Peter Vachenauer. *Höhere Mathematik*, volume 2. Springer, 1991.

[Rem84] Reinhold Remmert. *Funktionentheorie 1.* Springer, 1984.

[RS75] Michael Reed and Barry Simon. *Fourier Analysis, Self-Adjointness*, volume 2 of *Methods of Modern Mathematical Physics.* Academic Press, 1975.

[Rud73] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[Yos80] Kosaku Yosida. *Functional Analysis.* Springer, 6. edition, 1980.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Eigenschaften **1**
Def. 1 : Fouriertransformation . . . 1
Def. 2 : L^p-Räume . . . 1
Bem. 3 : $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ . . . 2
Satz 4 : Differentiation und Multiplikation . . . 2
Def. 5 : Raum der schnell fallenden Funktionen $\mathcal{S}$ . . . 2
Bem. 6 : Eigenschaften von $\mathcal{S}_n$ . . . 3
Satz 7 : Rechenregeln für $\mathcal{F}$ . . . 3
Satz 8 : Die invariante Funktion φ_e . . . 4
Satz 9 : Inverse Fouriertransformation . . . 4
Satz 10 : Weitere Rechenregeln für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ . . . 5
Satz 11 : Satz von Plancherel ($\mathcal{F} : L^2 \to L^2$) . . . 6
Bem. 12 : Eigenwerte der Fouriertransformation, Hermite-Polynome . . . 6
Bem. 13 : Haussdorff-Young-Ungleichung ($\mathcal{F} : L^p \to L^q$) . . . 7
Bem. 14 : Fouriertransformation und Fourierreihe . . . 7

2 Fouriertransformation und Faltung **8**
Def. 15 : Faltung . . . 8
Bem. 16 : Eigenschaften der Faltung . . . 8
Satz 17 : Faltung von L^p-Funktionen . . . 8
Satz 18 : Fouriertransformation und Faltung . . . 8
Bem. 19 : Kreuz- und Autokorrelation . . . 9

3 Fouriertransformation und Sobolevräume $H^m(\mathbb{R}^n)$ **9**
Def. 20 : Sobolevräume $H^m(\mathbb{R}^n)$ . . . 9
Satz 21 : Äquivalente Normen . . . 9
Bem. 22 : Räume H^s mit $s \in \mathbb{R}$ . . . 10
Satz 23 : Ein Spursatz: $H^s(\mathbb{R}^n) \mapsto H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ . . . 10
Bem. 25 : Lemma von Sobolev . . . 11
Bem. 26 : Interpolationsabschätzung . . . 11
Bsp. 27 : Rechteckimpuls . . . 11
Bsp. 28 : Delta-Distribution . . . 12

4 Fouriertransformation einiger Funktionen **12**
Bsp. 29 : Rechteckimpuls und Dreieckimpuls . . . 12
Bem. 30 : Faltung und Tiefpassfilter . . . 13
Bsp. 31 : Gedämpfte Schwingung . . . 13
Bsp. 32 : Signumfunktion und Heavisidefunktion . . . 13
Def. 33 : Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'$ . . . 14
Bem. 34 : $\mathcal{S}'$: Raum der langsam wachsenden Funktionen . . . 14
Bsp. 35 : Noch einmal die Deltadistribution . . . 14
Bsp. 36 : Noch einmal die Heavisidefunktion . . . 15
Bsp. 37 : Fouriertransformation der Distribution $\Phi(x) = ix$ . . . 15
Bsp. 38 : $\varphi(x)\cos\omega x$ und $\cos\omega x$ . . . 16

Bsp. 39 : Noch einmal die Fourierreihe 16

5 Funktionentheorie und weitere Beispiele **16**
Satz 40 : Cauchy-Integralsatz 16
Bem. 41 : Integration einer Funktion mit Pol in Null 17
Bsp. 42 : Fouriertransformation von $\varphi(x) = x^{-1}$ 17
Bsp. 43 : Fouriertransformation von $\varphi(x) = e^{ia|x|^2}$ 18

6 Differential- und Integralgleichungen **19**
Bsp. 44 : Eine gewöhnliche Differentialgleichung 19
Bsp. 45 : Eine elliptische Differentialgleichung 19
Bem. 46 : Fundamentallösungen 20
Bsp. 47 : Eine parabolische Differentialgleichung 20
Bsp. 48 : Eine Fredholmsche Integralgleichung 21

7 Unschärferelation und Abtasttheorem **21**
Satz 49 : Unschärferelation 21
Satz 51 : Shannons Abtasttheorem 22
Bem. 53 : Nyquist-Bedingung 23
Bem. 54 : Zu Unschärfe und Bandbreite und Abtasttheorem 23
Satz 55 : Satz von Paley-Wiener 23

8 Reste **24**
Bem. 56 : Polarkoordinaten und Hankeltransformation 24
Bem. 57 : Integralcosinus und Integralsinus 25
Bem. 58 : Wo finden sich weitere Informationen? 25