Fourier-Analysis I
Skript[1]

Prof. Nessel

Wintersemester 1996/97

[1] LaTeX-Fassung von V. Elling

Version 0.5, 10.7.1997

Hallo Leser,

ich habe das hier geTEXt, weil ich in Fourier-Analysis eine mündliche Prüfung mache und es sich mit einem gedruckten Skript besser lernt als mit Mitschriften. *Es ist nicht autorisiert oder probegelesen, es enthält also wahrscheinlich zahllose Tippfehler!* Das Skript umfaßt in dieser Version alle Kapitel von Fourier-Analysis I und II. Nur Kapitel I(a) ist unvollständig (es geht nur um Grundlegendes zu Hilbert-Räumen, siehe einschlägige FunkAna-Bücher). Außerdem sind die meisten Beweise jetzt drin (ächz). Die Bemerkungen zwischen den Sätzen und Definitionen sind teilweise noch unvollständig.

Kommentare und Fehlerhinweise bitte an `volker.elling@post.rwth-aachen.de`.

Inhaltsverzeichnis

1 Fourier-Reihen (eindimensional) 4
I.a Orthogonalentwicklungen im Hilbertraum . . . 4
I.b (Trigonometrische) Fourier-Reihen im $L^2_{2\pi}$ . . . 6
I.c Erweiterung der Definitionen und elementare Eigenschaften . . . 12
I.d Faltung . . . 16
I.e Konvergenzsätze für Fourier-Reihen . . . 22
I.f Divergenzaussagen . . . 30
I.g Singuläre Integrale und Umkehrformeln . . . 37
I.h Ableitungen . . . 45

2 Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$ 50
II.a Definition und elementare Eigenschaften . . . 50
II.b Singuläre Integrale und Umkehrformeln . . . 57
II.c Poisson-Summationsformel . . . 70
II.d Ableitungen . . . 79
II.e Fourier-Transformation über $\mathfrak{s}$ . . . 88

3 Fourier(-Plancherel)-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < 2)$ 96
III.a Der Fall $p = 2$ . . . 96
III.b Interpolationssatz von Riesz-Thorin . . . 104
III.c Der Fall $1 < p < 2$ . . . 114

4 Temperierte Distributionen 124
IV.a Der Grundraum $\mathfrak{s}$ . . . 124
IV.b Der Raum $\mathfrak{s}'$ der temperierten Distributionen . . . 129
IV.c Fourier-Transformation über $\mathfrak{s}'$ . . . 137

5 Multiplikatoren 153
V.a Definitionen; ein grundlegender Darstellungssatz . . . 153
V.b Allgemeine Relationen . . . 165
V.c Charakterisierungen . . . 173
V.d Notwendige Bedingungen . . . 179
Index . . . 185
Symbolverzeichnis . . . 187

Kapitel 1

Fourier-Reihen (eindimensional)

I.a Orthogonalentwicklungen im Hilbertraum

Beweis.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \langle f,g\rangle &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\phi_k\rangle\phi_k, \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle g,\phi_j\rangle\phi_j \right\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f,\phi_k\rangle\overline{\langle g,\phi_j\rangle}\underbrace{\langle \phi_k,\phi_j\rangle}_{=\delta_{jk}} \qquad \text{[Lemma 3]} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\phi_k\rangle\overline{\langle g,\phi_k\rangle} \end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (c) Fall $g = f$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Seien $f \in H$ und $m \in \mathbb{N} \Longrightarrow S_m f := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\phi_k\rangle\phi_k \in \operatorname{span} S$ wohldefiniert. *Zeige:*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \|S_m f - f\| = 0,$$

dazu:

$$\|S_m f - f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle S_m f - f,\phi_k\rangle|^2 \qquad \text{(c)}$$

Da

$$\begin{aligned} \langle S_m f - f,\phi_k\rangle &= \langle S_m f,\phi_k\rangle - \langle f,\phi_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \langle f,\phi_j\rangle\langle \phi_j,\phi_k\rangle - \langle f,\phi_k\rangle \\ &= \begin{cases} \langle f,\phi_k\rangle - \langle f,\phi_k\rangle & \text{falls } 1 \le k \le m \\ -\langle f,\phi_k\rangle & \text{falls } m < k \end{cases} \\ \Longrightarrow \quad \|S_m f - f\|^2 &= \sum_{k=m+1}^{\infty} |\langle f,\phi_k\rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow 0$$

da $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 < \infty$ (wegen (c)).

(d) $\Longrightarrow$ (e) Seien $f, g \in H$ so, daß

$$\langle f, \phi_k\rangle = \langle g, \phi_k\rangle \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ für $h := f - g \in H$ gilt dann:

$$\langle h, \phi_k\rangle = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Zeige: $h = 0$

Dazu: (d) $\Longrightarrow$ zu diesem h und beliebigem $\epsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \Phi$ mit

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k \right\| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \epsilon^2 &> \left\langle h - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k , h - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi_j \right\rangle \\
&= \langle h, h\rangle - \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_j} \underbrace{\langle h, \phi_j\rangle}_{=0} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \underbrace{\overline{\langle h, \phi_k\rangle}}_{=0} + \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 \\
&= \|h\|^2 + \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 \\
&\geq \|h\|^2 \\
\Longrightarrow \quad \|h\| &< \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0 \\
\Longrightarrow \quad \|h\| &= 0 \\
\Longrightarrow \quad h &= 0
\end{aligned}$$

(e) $\Longrightarrow$ (f) Trivial, Fall $g = 0$.

(f) $\Longrightarrow$ (a) Sei $f \in H$ beliebig

$\Longrightarrow$ $(\langle f, \phi_k\rangle)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ [Folg. 1]

Mit Satz 3 für $c_k = \langle f, \phi_k\rangle$ (beachte: H vollständig): $\exists g \in H$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \longrightarrow \infty} \left\| g - \sum_{k=1}^{m} \langle f, \phi_k\rangle \phi_k \right\| = 0 \\
&\langle f, \phi_k\rangle = \langle g, \phi_k\rangle \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \quad &\langle f - g, \phi_k\rangle = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \quad &f = g \qquad [(f)] \\
\Longrightarrow \quad &\lim_{m \longrightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{m} \langle f, \phi_k\rangle \phi_k \right\| = 0
\end{aligned}$$

□

I.b (Trigonometrische) Fourier-Reihen im $L^2_{2\pi}$

Vgl. L17: $L^2_{2\pi} = L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^1)$ ist ein Hilbert-Raum unter dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(u)\ \overline{g(u)}\ du \qquad \forall f, g \in L^2_{2\pi}$$

$\rightsquigarrow$ Norm:

$$\|f\|_{L^2_{2\pi}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(u)|^2\ du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\Longrightarrow$ $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ((komplexes) trigonometrisches System) ist Orthonormalsystem in $L^2_{2\pi}$, denn:

$$\begin{aligned}\langle \phi_j, \phi_k\rangle &= \int_0^{2\pi} \phi_j(u)\ \overline{\phi_k(u)}\ du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iju}\ e^{-iku}\ du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)u}\ du - \delta_{jk} \qquad j, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Sei $f \in L^2_{2\pi}$ beliebig $\Longrightarrow$ k-ter Fourier-Koeffizient:

$$\langle f, \phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(u)\ e^{-iku}\ du \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Für $m \in \mathbb{P}$ sei (vgl. Kap. 1(a))

$$\Pi_m := \left\{ t_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} : c_k \in \mathbb{C} \quad \forall |k| \le m \right\}$$

Menge aller *trigonometrischen Polynome* (in komplexer Schreibweise) vom *Grad* $\le m$, vom *Grad* $= m$, falls $|c_m| + |c_{-m}| > 0$.

$$\Pi = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Pi_m$$

Menge aller trigonometrischen Polynome.

Satz 5

$\left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist total in $L^2_{2\pi}$. $\triangleleft$

Beweis. Zeige: Ist $f \in L^2_{2\pi}$, so gilt

$$\langle f, \phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku} du = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\Longrightarrow$ $f = 0$ fast überall

Fall 1: Sei f stetig. Damit ist f stetig auf $\mathbb{R}$, da 2π-periodisch. Aus

$$\langle f, \phi_k \rangle = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

folgt

$$\int_0^{2\pi} f(u)\ t_m(u)\ du = 0 \qquad \forall t_m \in \Pi_m, m \in \mathbb{P}$$

Zu zeigen: $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dazu Annahme: Es gebe doch ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$. f ist stetig in x, daher gibt es ein Intervall $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und ein $\epsilon > 0$ mit $|f(x)| > \epsilon$ für alle $x \in I$. O.B.d.A. sei $f(x) > \epsilon\ \forall x \in I$ mit $\delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Symmetrie). Zeige: Es gibt eine Folge $(t_m)_{m\in\mathbb{P}}$ mit $t_m \in \Pi_m\ \forall m \in \mathbb{P}$ sodaß

(1) $t_m(x) \geq 0 \qquad \forall x \in I$

(2) In jedem Intervall $I' = [x_0 - \mu, x_0 + \mu]$ mit $\mu < \delta$ gilt

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \min_{x \in I'} t_m(x) = +\infty$$

(“gleichmäßige Divergenz auf I’“)

(3) Es gibt ein $M < \infty$ mit

$$|t_m(x)| \leq M \qquad \forall x \in [x_0 - \pi, x_0 + \pi], m \in \mathbb{P}$$

Falls es so eine Folge gibt, dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \left| \int_0^{2\pi} f(x)\ t_m(x)\ dx \right| && \text{[Ü1A5]} \\
&= \left| \int_{x_0-\pi} x_0 + \pi f(x)\ t_m(x)\ dx \right| \\
&= \left| \left(\int_I + \int_{[x_0-\pi, x_0+\pi]\setminus I} \right) f(x)\ t_m(x)\ dx \right| \\
&= \left| \int_I f\ t_m \right| - \left| \int_{[x_0-\pi, x_0+\pi]} f\ t_m \right|
\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}
\left| \int_I f(x)\ t_m(x)\ dx \right| &= \int_I f(x)\ t_m(x)\ dx && [f \geq \epsilon,\ t_m(x) \geq 0 \text{ auf } I] \\
&\geq \int_{I'} f(x)\ t_m(x)\ dx \\
&> \epsilon\ 2\mu\ \min_{x \in I'} t_m(x) \\
&\overset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty && \text{[wg. (ii)]}
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[x_0-\pi, x_0+\pi]\setminus I} f(x)\ t_m(x)\ dx \right| &\leq 2\pi\ \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\ \max_{x \in [x_0-\pi, x_0+\pi]} |t_m(x)| \\
&\leq 2\pi\ \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \cdot M \qquad \forall m \in \mathbb{P}
\end{aligned}$$

also

$$0 = \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x)\ t_m(x)\ dx = \infty$$

Also ist (t_m) zu suchen. Für obige δ, x_0 setze

$$\begin{aligned} t(x) &:= 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta \\ &= 1 - \cos\delta + \frac{e^{i(x-x_0)} + e^{-i(x-x_0)}}{2} \in \Pi_1 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\cos(x - x_0) \begin{cases} > \cos\delta & \text{für } x \in I' \\ \leq \cos\delta & \text{für } x \in [x_0 - \pi, x_0 + \pi] \backslash I \end{cases}$$

also

$$t(x) \begin{cases} > 1 & \text{für } x \in I' \\ \leq 1 & \text{für } x \in [x_0 - \pi, x_0 + \pi] \backslash I \end{cases}$$

Für $m \in \mathbb{P}$ sei

$$t_m(x) := \big(t(x)\big)^m \in \Pi_m$$

t_m erfüllt (i)–(iii).

Fall 2: $f \in L^2_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ beliebig. Nach L20 ist $L^2_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$, also $f \in L^2_{2\pi}$. Sei

$$F(x)\ := \int_0^x f(t)\ dt.$$

F ist wohldefiniert und stetig auf $\mathbb{R}$ und 2π-periodisch, denn

$$\begin{aligned} F(x + 2\pi) - F(x)\ &= \int_x^{x+2\pi} f(t)\ dt && \text{[L2]} \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\ dt = 0, && \text{[Ü1A5]} \end{aligned}$$

da $\langle f, \phi_0 \rangle = 0$. Für $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ gilt mir partieller Integration

$$\int_0^{2\pi} F(x) e^{-ikx}\ dx\ = \underbrace{\Big[F(x) \frac{1}{-ik} e^{-ikx}\Big]_0^{2\pi}}_{=0\ \ (f \in L^2_{2\pi})} - \frac{1}{-ik} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx$$

$$\Longrightarrow \quad ik\langle F, \phi_k \rangle\ =\ \langle f, \phi_k \rangle \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \qquad \text{[“Ableitungsregel”]}$$

Betrachte:

$$G(x)\ :=\ F(x) - \frac{\langle F, \phi_0 \rangle}{\sqrt{2\pi}}.$$

$G \in C_{2\pi}$.

$$\langle G, \phi_k \rangle\ =\ \langle F, \phi_k \rangle - \langle F, \phi_0 \rangle \langle \phi_0, \phi_k \rangle = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad G(x)\ =\ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{[Fall I]}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} G'\ =\ 0$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t)\ dt - \frac{\langle F, \phi_0 \rangle}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\ dt$$
$$= f(x) \quad \text{f.ü.} \qquad \text{[L9]}$$

□

Folgerung 2

(a) Sei f 2π-periodisch und stetig auf $\mathbb{R}$ (also $\in C_{2\pi}$) mit

$$f^\wedge(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(b) Sei $f \in L^1_{2\pi}$ mit

$$f^\wedge(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dann ist

$$f(x) = 0 \qquad \text{fast überall}$$

◁

Beweis.

(a) Siehe Beweis Satz 5 Fall 1

(b) Siehe Beweis Satz 5 Fall 2

□

Folgerung 3

Es gilt

(a) Konvergenz der Fourierreihe im quadratischen Mittel: Jedes $f \in L^2_{2\pi}$ ist in seine trigonometrische Fourierreihe entwickelbar, d.h.:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^\wedge(k) e^{ikx}$$

wobei die Reihe in der $L^2_{2\pi}$-Norm konvergiert:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \|f - S_m f\|_{L^2_{2\pi}} = 0$$

mit

$$S_m f(x) := \sum k = -m^m f^\wedge(k) e^{ikx}$$

(b) Verallgemeinerte Parseval-Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\ \overline{g(u)}\ du = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^\wedge(k)\overline{g^\wedge(k)} \qquad \forall f, g \in L^2_{2\pi}$$

(c) Parseval-Gleichung:

$$\|f\|_{L^2_{2\pi}} = \sqrt{2\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f^\wedge(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in L^2_{2\pi}$$

(d) Darstellungssatz: Sei $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (vgl. Def 6, Lemma 5, Ü1A4). Dann gilt:

$$\exists f \in L^2_{2\pi} : c_k = f^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

außerdem

$$\|c\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|f^\wedge\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L^2_{2\pi}}$$

◁

Beweis. (a)-(c) aufgrund von Satz 4 ((f) $\Longrightarrow$ (a),(b),(c)) □

Bemerkung
Bezüglich Konvergenz: $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^\wedge(k)e^{ikx} \in L^2_{2\pi}$

(i) Nach (a) *Norm-Konvergenz* auf $L^2_{2\pi}$ insbesondere bezüglich *symmetrischer Partialsummen*

$$S_m f := \sum_{k=-m}^{m} \langle f, \phi_k\rangle \phi_k$$

(vgl. Def. 7, Satz 4a + Bemerkung bzgl. beliebiger ONS)
insbesondere: wiederhole Kapitel Ia für den Fall $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ und symmetrischer Partialsummen.
Hier (in $L^2_{2\pi}$) *nicht* nötig, sondern beliebige, *unsymmetrische* Wahl möglich (vgl. Bem. nach Satz 3).; in anderen Räumen wird die symmetrische Wahl von S_m entscheidend sein; dazu beachte Bemerkung nach Folgerung 4.

(ii) Auch hier schon die Frage nach anderen Konvergenzarten sinnvoll, z.B.: Gilt für jedes $f \in L^2_{2\pi}$

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} (S_m f)(x) = f(x) \qquad \text{punktweise fast überall?}$$

Antwort: Ja: Carleson 1966 (siehe Lit. C7)

Folgerung 4 (Abbildungseigenschaften)

Die endliche *Fourier-Transformation*

$$^\wedge : L^2_{2\pi} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), f \mapsto (f^\wedge(k))_{k\in\mathbb{Z}}$$

definiert eine eineindeutige (beschränkte, vgl. Def. 11) lineare Abbildung des Hilbert-Raumes $L^2_{2\pi}$ auf den Hilbert-Raum $\ell^2(\mathbb{Z})$, die die inneren Produkte und damit die Normen (bis auf einen konstanten Faktor) *invariant* läßt, d.h.

$$\langle f, g\rangle_{L^2_{2\pi}} = 2\pi\langle f^\wedge, g^\wedge\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \qquad \forall f, g \in L^2_{2\pi}$$

◁

Beweis. Folgerung 3, Satz 5 □

Bemerkung
Zwei Interpretationen von $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$:

(a)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty,$$

falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|^2 < \infty$$

(*unabhängig*)

(b) (vgl. Bem. bzgl. bel. ONS) Vorgegebene Menge $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ hat *abzählbar* viele Elemente $\Longrightarrow$ durchnumerieren zur *Folge* $(c'_j)_{j=0}^{\infty}$, z.B.

$$c'_{2j} := c_j, \qquad j \in \mathbb{P}$$
$$c'_{2j-1} := c_{-j}, \qquad j \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty,$$

falls

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |c'_j|^2 < \infty}_{\text{abs. konv. } \Longrightarrow \text{ unabhängig von Umordnung}}$$

Beide Interpretationen sind gleich, denn:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|^2 < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k|^2 + |c_{-k}|^2) \; < \; \infty \qquad \text{[gliedw. Add., konv. Reihen]}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} (|c'_{2j}|^2 + |c'_{2j-1}|^2) \; < \; \infty \qquad \text{[spez. Numerierung]}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |c'_j|^2}_{\text{abs. konv. } \Longrightarrow \text{ unabh. von Umordnung}} \; < \; \infty \qquad \text{[Klammern weg, pos. Glieder]}$$

(1) $\Longrightarrow$ (2)

(2) $\Longrightarrow$ (1) (Nach Umnumerierung) Sei

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c'_j|^2 < \infty$$

in *spezieller* Numerierung

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} |c'_{2j}|^2 \; < \; \infty \qquad \text{[Majoranten-Kriterium]}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c'_{2j-1}|^2 \; < \; \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|^2 < \infty$$

Beachte: Entsprechend für $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_k|^2 < \infty$ etc.

I.c Erweiterung der Definitionen und elementare Eigenschaften

Wegen L20: $L^2_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$, insbesondere:

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \int_0^{2\pi} |f(u)|\, du = \int_0^{2\pi} |f(u)| \cdot 1\, du \\ &\leq \|f\|_2 \cdot \|1\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2 \qquad \forall f \in L^2_{2\pi} \end{aligned} \qquad [\text{L19}, p=2]$$

Wichtig: Für das Orthonormalsystem $\left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ kann die Hilbert-Raum-Definition 7 der Fourier-Koeffizienten

$$\langle f, \phi_k \rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku}\, du \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

fortgesetzt werden auf $L^1_{2\pi}$, da

$$f\overline{\phi_k} \in L^1_{2\pi} \qquad \forall f \in L^1_{2\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

, da insbesondere:

$$|\langle f, \phi_k \rangle| \leq \frac{1}{1}\sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(u)| \underbrace{\left|e^{-iku}\right|}_{=1} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \qquad \forall f \in L^1_{2\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

Definition 10

(vgl. Def. 7+ Bezeichnung vor Folg. 2) Für $f \in L^1_{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ ist der k-te (komplexe) *trigonometrische Fourierkoeffizient* $f^\wedge(k)$ definiert durch

$$f^\wedge(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku}\, du$$

Die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^\wedge(k) e^{-iku}\, du$$

heißt die (komplexe) *trigonometrische Fourier-Reihe* von f. Schreibweise:

$$f(k) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^\wedge(k) e^{ikx}$$

($\sim$ Zuordnung, *keine* Aussage bzgl. Konvergenz!) Für $m \in \mathbb{P}$ heißt

$$S_m(f;x) := \underbrace{\sum_{k=-m}^{m}}_{\text{symm.}} f^\wedge(k) e^{ikx} \in \Pi_m$$

die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe von f. Konvergenz der Fourier-Reihe (in einem gewissen Sinne) bedeutet die entsprechende Konvergenz dieser (symmetrischen) Teilsummen. $\triangleleft$

Bemerkung

(1) Zuordnung $\sim$ wohldefiniert in dem Simme

$$f \in L^1_{2\pi} \mapsto (f^\wedge(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in s(\mathbb{Z})$$

(vgl. Def. 6)

(2) Sei

$$C_{2\pi} := \{f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{C} : \text{stetig, } 2\pi\text{-periodisch}\}$$

(vgl. Folg. 2a) $C_{2\pi}$ ist unter der Norm

$$\|f\|_{C_{2\pi}} := \max_{0\le x\le 2\pi} |f(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

ein Banach-Raum

$\Longrightarrow$ $C_{2\pi} \subset L^\infty_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ $\quad \forall 1 < p < \infty$ [L20]

$\Longrightarrow$ alle Größen aus Def. 10 auch wohldefiniert auf $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$, $1 \le p \le \infty$

Problem: Konvergenzverhalten der Fourierreihen, Eigenschaften von Fourier-Koeffizienten etc. (in diesen Banach-Räumen) $\Longrightarrow$ Die Hilbertraumtheorie aus Kapitel I.a liefert hierzu jeweils die *Motivation*.

Zur reellen Schreibweise der trigonometrischen Größen: Sei

$$\begin{aligned} t_m(x) &:= \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \in \Pi_m \qquad [c_k \in \mathbb{C} \text{ beliebig}] \\ &= \sum_{k=-m}^{m} c_k (\cos kx + i \sin kx) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{m} \big((c_k + c_{-k}) \cos kx + i(c_k - c_{-k}) \sin kx\big) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

relle Schreibweise des komplexwertigen Polynoms; und umgekehrt mit

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Lemma 8

Für

$$t_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \in \Pi_m$$

beliebig gilt:

$$t_m \text{ ist reellwertig} \iff c_k = \overline{c_{-k}} \qquad \forall 0 \le k \le m$$

◁

Reelle Schreibweise der Fourier-Koeffizienten für (komplexwertiges) $f \in L^1_{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} f\hat{}(k) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-iku}\,du \qquad \text{[Def. 20]} \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} a_k(f) - ib_k(f) & k \in \mathbb{P} \\ a_k(f) + ib_k(f) & -k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

mit trigonometrischen Fourier-Koeffizienten (in reeller Schreibweise)

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos ku\,du \qquad \forall k \in \mathbb{P}$$

$$b_k(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\sin ku\,du \qquad \forall k \in \mathbb{P}$$

$\Longrightarrow$ Partialsumme + Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} S_m(f;x) &:= \sum_{k=-m}^{m} f\hat{}(k)e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big)}_{\text{gekoppelt (Symm. drückt sich in Kopplung aus)}} \end{aligned}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0(f) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big)}_{\text{Konvergenz in diesem (gekoppelten) Sinne}}$$

—(Hier könnte noch was fehlen)

Definition 11 (Folgenräume)

(vgl. Def. 6)

$$\ell^p := \ell^p(\mathbb{Z}) := \{b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s(\mathbb{Z})\}$$

$$\|b\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^p\right)^{1/p} & \text{für } p \in [1,\infty] \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}} |b_k| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

$$\ell_0^\infty := \ell_0^\infty(\mathbb{Z}) := \left\{b \in \ell^\infty \,\middle|\, \lim_{|k|\longrightarrow\infty} b_k = 0\right\}$$

◁

Lemma 9

Die Folgenräume ℓ^p $(p \in [1,\infty])$ sowie ℓ_0^∞ sind Banach-Räume. ◁

Beweis. Ü3A1 □

Satz 6 (Abbildungseigenschaften der (endlichen) Fouriertransformation)

Seien $f, g \in L^1_{2\pi} 4$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) Linearität:
$$(\alpha f + \beta g)^\wedge(k) = \alpha f^\wedge(k) + \beta g^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(b) Beschränktheit:
$$|f^\wedge(k)| \le \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(c) Riemann-Lebesgue (vgl. Folg 1):
$$\lim_{|k| \longrightarrow \infty} f^\wedge(k) = 0$$

Es gilt sogar die Abschätzung $(k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$

$$\begin{aligned} |f^\wedge(k)| &\le \frac{1}{4\pi}\, \omega(\frac{\pi}{|k|}; f; L^1_{2\pi}) \\ &:= \frac{1}{4\pi} \underbrace{\sup_{|k| \le \frac{\pi}{|k|}} \|f(x+h) - f(x)\|_1}_{\text{(erster) } L^1_{2\pi}\text{-Stetigkeitsmodul }^1} \end{aligned}$$

(d) Eindeutigkeit:
$$f^\wedge(k) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \quad \text{f.ü.}$$

(e) Die (endliche) Fourier-Transformation $^\wedge$ ist ein ein-eindeutiger linearer Operator von $L^1_{2\pi}$ in (nicht: auf) $\ell_0^\infty(\mathbb{Z})$.

◁

Beweis.

(a)+(b) klar, vgl. Def. 10.

(c) Sei $f \in L^1_{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ beliebig

$$\Longrightarrow \quad \Big(f(x + \frac{\pi}{k})\Big)^\wedge(k) = e^{i\pi} f^\wedge(k) = -f^\wedge(k) \qquad \text{[Lemma 7(a)]}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad f^\wedge(k) &= \frac{1}{2}\Big(f^\wedge(k) - \big(f(x+\frac{\pi}{k})\big)^\wedge(k)\Big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(x) - f(x+\frac{\pi}{k})\big)\, e^{-ikx}\, dx \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad |f^\wedge(k)| \le \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - f(x+\frac{\pi}{k})|\, dx$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\,\omega(\frac{\pi}{|k|}; f; L^1_{2\pi})$$

Wegen L18:

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \omega(t; f; L^1_{2\pi}) = 0,$$

also Behauptung

(d) Folgerung 2(b)

(e) Wegen (a)-(d): $\wedge : L^1_{2\pi} \longrightarrow \ell^\infty_0(\mathbb{Z})$ ist ein eineindeutiger linearer beschränkter Operator; insbesondere

$$(L^1_{2\pi})^\wedge \subsetneq \ell^\infty_0(\mathbb{Z}) \qquad \text{Ü3A3}$$

□

Bemerkung
(vgl. Folgerung 3(c+d))

$$(L^2_{2\pi})^\wedge = \ell^2(\mathbb{Z})$$

Also: Kein Darstellungsproblem.
Jetzt: Darstellungsproblem: Charakterisiere die Folgen $b \in \ell^\infty_0(\mathbb{Z})$ mit

$$\exists f \in L^1_{2\pi} : b_k = f^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Enspürechend: Charakterisiere die Teilmenge

$$(C_{2\pi})^\wedge \subsetneq \ell^\infty_0(\mathbb{Z})$$

I.d Faltung

Definition 12 (Faltung in $L^1_{2\pi}$)

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)g(u)\; du$$

◁

Satz 7

Für $f, g \in L^1_{2\pi}$ existiert die Faltung punktweise fast überall als absolut konvergentes Lebesgue-Integral: $(f * g) \in L^1_{2\pi}$ mit

$$\|f * g\|_1 \leq \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_1\,\|g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1 \qquad \forall f, g \in L^1_{2\pi}$$

◁

Beweis. Für $f, g \in L^1_{2\pi}$ beliebig betrachte

$$f(x-u)g(u) : (x,u) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ oder } \overline{\mathbb{C}}$$

$f(x-u)g(u)$ ist meßbar über $\mathbb{R}^2$ und 2π-periodisch in jeder Variablen. Da

$$\int_0^{2\pi} |f(x-u)||g(u)|\,dx = |g(u)| \int_{-u}^{2\pi-u} |f(x-u)|du$$
$$= |g(u)|\,\|f\|_1 \in L^1_{2\pi} \qquad [\text{Ü1A5}]$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-u)||g(u)|du \right) dx\exists \text{ und } = \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad [\text{Fubini}]$$

Insbesondere:

$$\int_0^{2\pi} |f(x-u)||g(u)|\,du\exists \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } \in L^1_{2\pi}$$

Also: $(f * g)(x)$ existiert als absolut konvergentes L-Integral und ist 2π-periodisch, $\in L^1_{2\pi}$.

$$\|f * g\|_1 := \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u)\; g(u)\; du \right| dx$$
$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-u)|\; |g(u)|\; du \right) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \|g\|_1$$

□

Definition 13

(a) Ein Linearsystem A über dem Körper Φ heißt *Algebra* (*Ring*), falls eine Abbildung $\cdot$ von $A \times A$ in A (vgl. Def. 3) definiert ist, d.h. zu jedem Paar $a, b \in A$ existiert $a \cdot b = ab \in A$ mit den Eigenschaften

(1) $a(bc) = (ab)c$

(2) $a(b+c) = ab + ac$

(3) $(b+c)a = ba + ca$

(4) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

für alle $a, b, c \in A, \lambda \in \Phi$. Die Algebra A heißt *kommutativ*, falls $ab = ba$ für alle $a, b \in A$ ist. Die Algebra A besitzt eine *Eins*, falls es ein $e \in A$ gibt mit $ea = ae = a$ für alle $a \in A$ (dann folgt auch Eindeutigkeit).

(b) Eine Algebra A heißt *normierte* Algebra (vgl. Def. I 1+3), falls A ein LNR ist und

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\| \qquad \forall a, b \in A$$

(Verträglichkeit $\cdot$ und Norm)

(c) Eine normierte Algebra A heißt *Banach-Algebra* (vgl. Def. I 2+4), falls A vollständig unter der Norm ist (also Banach-Raum).

◁

Lemma 10

(1) ℓ_0^∞ ist Banach-Raum, $ab \in \ell_0^\infty$ ist wohldefiniert für alle $a, b \in \ell_0^\infty$ und

$$\|ab\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k b_k| \le \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \sup_{k\in\mathbb{Z}} |b_k| = \|a\|\,\|b\|$$

ℓ_0^∞ ist kommutativ, da Produkt in $\mathbb{C}$ kommutativ. *Aber:* Keine Eins. Dagegen ist $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ kommutative Banach-Algebra mit Eins $(1)_{k\in\mathbb{Z}}$.

(2) Sei X Banach-Raum. Def. 11, Ü4A1: $[X]$ ist mit der Komposition als Produkt eine (im allgemeinen *nicht* kommutative) Banach-Algebra mit Eins (= Identität). Sind $S, T \in [X]$, dann ist $ST \in [X]$ definiert durch

$$(ST)(f) := S(Tf) \qquad \forall f \in X$$

◁

Lemma 11

Seien $f, g \in L^1_{2\pi}$.

(a) $L^1_{2\pi}$ ist mit der Faltung (Def. 13) als Produkt eine kommutative Banach-Algebra *ohne* Eins.

(b) Falls g gerade ($g(u) = g(-u)$ fast überall), dann

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+u)\; g(u)\; du$$

(c) Falls g positiv (d.h. $g(u) \ge 0$ f.ü.), dann ist $f * g$ positiv für jedes f.

(d) Falls $g \in \Pi_m$ (trigon. Pol.), dann gilt

$$f * g \in \Pi_m \qquad \forall f \in L^1_{2\pi}$$

Insbesondere: Ist

$$g(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx},$$

so gilt

$$(f * g)(x) = \sum_{k=-m}^{m} f\hat{}(k)\; c_k\; e^{ikx}$$

◁

Beweis.

L17, Satz ?, L22

$\Longrightarrow$ $L^1_{2\pi}$ ist kommutative Banach-Algebra

(a) Annahme: Hat Eins $e \in L^1_{2\pi}$:

$$f = f * e \qquad \forall f \in L^1_{2\pi}$$

Gilt insbesondere für alle $f = e^{ikx}$ $(k \in \mathbb{Z})$, also:

$$(e^{ik\cdot} * e)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik(x-u)}\, e(u)\, du = e^{ikx}\hat{e}(k)$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{e}k \;=\; 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Widerspruch zu Satz 6(c) (Riemann-Lebesgue)

(b)+(c) "Selbermachen"

□

Bemerkung
$L^1_{2\pi}$ hat *kein* Einselement, aber es existiert eine approximierende Eins ("Approximierende Identitäten", Kap. I.g)

Satz 8

(a) Sei $g \in L^1_{2\pi}$. Ist (sogar, vgl. L20) $f \in L^p_{2\pi}$ $(p \in [1,\infty])$, dann folgt

$$f * g \in L^p_{2\pi} \quad \text{und} \quad \|f * g\|_p \le \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_p\,\|g\|_1$$

(b) Sind (sogar) $f \in L^p_{2\pi}, g \in L^{p'}_{2\pi}$ (d.h. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, p \in [1,\infty]$), dann folgt

$$(f * g)(x) \qquad \text{existiert } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(f * g) \in C_{2\pi}$$

und

$$\|f * g\|_{C_{2\pi}} \le \frac{1}{2}\,\|f\|_p\,\|g\|_{p'}$$

◁

Beweis.

(a) Da $L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ $\forall p \in [1,\infty]$ (L20), existiert $(f*g)(x)$ fast überall. $p=1$ mit Satz 7 erledigt, $p=\infty$ folgt aus Teil (b), also sei $1 < p < \infty$.

$$|(f*g)(x)| \;\le\; \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x-u)|\,|g(u)|^{1/p}}_{\in L^1_{2\pi} \text{ bzgl. } u \text{ wg. Satz 7 } (|f|^p,\, g \in L^1_{2\pi})} |g(u)|^{1/p'}\, du \qquad \text{[L4]}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(x-u)|^p |g(u)|\, du\right)^{1/p} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |g(u)|\, du\right)^{1/p'}}_{=\|g\|_1^{1/p'}} \qquad \text{[Hölder] (*)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|f*g\|_p \;=\; \left(\int_0^{2\pi} |(f*g)(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_1^{1/p'} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-u)|^p \ |g(u)| \ du \right) \ dx \right)^{1/p} \qquad [(*)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \|g\|_1^{1/p'} \left(\int_0^{2\pi} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x-u)|^p \ dx}_{\|f\|_p^p} \right) |g(u)| \ du \right)^{1/p} \qquad [\text{Fubini}]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \|g\|_1^{1/p'} \left(\|f\|_p^p \ \|g\|_1 \right)^{1/p}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \|f\|_p \ \|g\|_1$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig $\Longrightarrow$

$$(\Delta) \quad |(f*g)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(x-u)|}_{\in L^p_{2\pi}} \underbrace{|g(u)|}_{\in L^{p'}_{2\pi}} du$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_p \ \|g\|_{p'} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad [\text{Ü1A5, L19}]$$

$\Longrightarrow$ $(f*g)(x)$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$

Außerdem ist $f * g \in C_{2\pi}$ (d.h. stetig), denn:

$$\Longrightarrow \quad |(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h-u) - f(x-u)||g(u)| \ du \qquad [\text{L19, Ü1A5}]$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \|f(t+h) - f(t)\|_p \ \|g\|_{p'}$$

$$\stackrel{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \qquad [\text{lebref18}]$$

Sei $p \in [1, \infty]$:

Sei $p = \infty$: Da $f * g = g * f$ (Lemma 9(a)) $\Longrightarrow$

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|g(t+h) - g(t)\|_1 \ \|f\|_2 \longrightarrow 0$$

Wieder wegen L18, diesmal auf g angewandt.

Wegen (Δ):

$$\|f * g\|_{C_{2\pi}} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_p \ \|g\|_{p'}$$

□

Folgerung 5

Die Räume $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$ $(p \in [1, \infty])$ sind unter der Faltung als Produkt kommutative Banach-Algebren jeweils *ohne* Eins. ◁

Beachte: Folgerung 5 für $p = 2$ beinhaltet insbesondere auch eine zusätzliche Information über den Hilbert-Raum $L^2_{2\pi}$!

Beweis. Satz 8, Lemma 9(a) und L20, da insbesondere für $g \in L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$

$$\|g\|_1 \leq \|g\|_p \, \|1\|_{p'} = (2\pi)^{1/p'} \, \|g\|_p \qquad \text{Hölder}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \|f * g\|_p &\leq \frac{1}{(2\pi)^{1/p+1/p'}} \, \|f\|_p \, \|g\|_1 && \text{[Satz 8(a)]} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} \, \|f\|_p \, \|g\|_p \\ &\leq \|f\|_p \, \|g\|_p \end{aligned}$$

□

Satz 9 (Faltungssatz)

(vgl. Lemma 9d) Für $f, g \in L^1_{2\pi}$ gilt

$$(f * g)^\wedge(k) = f^\wedge(k) g^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

◁

Beweis. Nach Satz 7: Faltung wohldefiniert, $f * g \in L^1_{2\pi}$, also (Def. 10+13)

$$(f * g)^\wedge(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u) \; g(u) \; du \right) \; e^{-ikx} \; dx \in \mathbb{C}$$

wohldefiniert $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| f(x-u) \; g(u) \; e^{-ikx} \right| \, dx \right) \; du \; &= \; \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x-u)| \; du}_{= \|f\|_1} \right) \; |g(u)| \; du \\ &= \; \|f\|_1 \, \|g\|_1 \leq \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad (f * g)^\wedge(k) \; &= \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u) \; e^{-ik(x-u)} \; dx}_{= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \; e^{-ikt} \; dt = f^\wedge(k)} \right) \; g(u) \; e^{-iku} \; du && \text{[Fubini, Tonelli]} \\ &= \; f^\wedge(k) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u) \; e^{-iku} \; du \\ &= \; f^\wedge(k) \; g^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

Folgerung 6

Die Fourier-Transformation $^\wedge : L^1_{2\pi} \longrightarrow \ell^\infty_0(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (f^\wedge(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ definiert eine injektive, linear beschränkte Abbildung der Banach-Algebra $L^1_{2\pi}$ in die Banach-Algebra $\ell^\infty_0(\mathbb{Z})$, die die Produkte *invariant* läßt, d.h. (vgl. Folg. 4)

$$(f * g)^\wedge(k) = f^\wedge(k) g^\wedge(k) \qquad \forall f, g \in L^1_{2\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

◁

Beweis. Satz 6+9 □

Bemerkung
Verlagerung der Strukturen der Fourier-Analysis von Hilberträumen (inneres Produkt+Orthogonalität, vgl. Folg. 4) auf Banach-Algebren (Produkt, Folg. 6) $\rightsquigarrow$ "abstract harmonic analysis".

Folgerung 7

Die Faltung in $L^1_{2\pi}$ ist *translationsinvariant*, d.h.: Ist für $f \in L^1_{2\pi}$, $y \in \mathbb{R}$ der (lineare, beschränkte) Translationsoperator τ_y definiert durch

$$(\tau_y f)(x) := f(x+y) \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}$$

dann gilt

$$\tau_y(f * g) = (\tau_y f) * g = f * (\tau_y g) \qquad \forall f, g \in L^1_{2\pi}, y \in \mathbb{R}$$

Dazu gilt

$$\tau_{y+z}(f * g) = (\tau_y f) * (\tau_z g) \qquad \forall f, g \in L^1_{2\pi}, y \in \mathbb{R}$$

◁

Beweis. Trivial, insbesondere:

$$\|\tau_y f\| \overset{\text{Ü1A5}}{=} \|f\|_1$$

also

$$\|\tau_y\|_{[L^1_{2\pi}]} = 1 \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

□

Folgerung 8

Die Norm in $L^p_{2\pi}$ ist *translationsinvariant*, d.h.:

$$\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p_{2\pi}, y \in \mathbb{R}, p \in [1, \infty]$$

◁

Beweis. Ü1A5 □

I.e Konvergenzsätze für Fourier-Reihen

Lemma 12 (Gleichmäßige Konvergenz)

(a) Konvergiert $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ $(c_k \in \mathbb{C})$ gleichmäßig gegen $g \in C_{2\pi}$, so ist

$$c_k = g^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(vgl. Satz 3)

(b) Ist die Fourierreihe von $f \in C_{2\pi}$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert sie gegen $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^\wedge(k) e^{ikx}$$

(c)

$$\begin{aligned} f \in L^1_{2\pi} &\Longrightarrow f^\wedge \in \ell^1(\mathbb{Z}) \\ &\Longrightarrow f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^\wedge(k) e^{ikx} \text{ fast überall} \end{aligned}$$

◁

Beweis. Ü4A2 □

Also Problem: Punktweise Konvergenz.

Lemma 13 (Riemann-Lebesgue für Fourierreihen)

Für $f \in L^1(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$ gilt

$$\lim_{\rho\longrightarrow\infty} \int_a^b f(u) \begin{Bmatrix} \cos(\rho u) \\ \sin(\rho u) \end{Bmatrix} du = 0$$

◁

Beweis. Sei

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [a,b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1[a,b]}$ Sei $\rho > 0$ beliebig. Wie in Beweis zu Satz 6(c):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(u + \frac{\pi}{\rho}) e^{-i\rho u} du &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(t) \underbrace{e^{-i\rho(t-\frac{\pi}{\rho})}}_{e^{i\pi}e^{-i\rho t} = -e^{-i\rho t}} dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(t) e^{-i\rho t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u) e^{-i\rho u} du &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(u) e^{-i\rho u} du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(u + \frac{\pi}{\rho})) e^{-i\rho u} du \\ \left| \int_a^b f(u) e^{-i\rho u} du \right| &\le \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(u + \frac{\pi}{\delta}) \right| du \longrightarrow 0 \quad (|\rho| \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

wegen L18 für $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$ auch für $\rho \longrightarrow \pm\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{\rho\longrightarrow\infty} \int_a^b f(u) e^{\pm i\rho u} du = 0$$

$\Longrightarrow$ Behauptung. □

Satz 10 (Riemannsches Lokalisationsprinzip)

Für $f \in L^1_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(a)

$$\lim_{m\to\infty} S_m(f;x_0) = c$$

(b) Riemannsche Lokalisationsbedingung:

$$\exists \delta \in (0,\pi) : \lim_{m\to\infty} \int_0^\delta \big(f(x_0+u)+f(x_0-u)-2c\big)\frac{\sin mu}{u}du = 0$$

◁

Bemerkung

(1) Der Kandidat für c ist $f(x_0)$, falls f in x_0 "richtig" definiert ist.

(2) Gegeben $f \in L^1_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Satz 10: *Ohne* Zusatzbedingung an f in Umgebung von x_0 folgt im allgemeinen *nicht* die Konvergenz der Fourier-Reihe (Konvergenz der Folge der (symmetrischen) Partialsummen) in x_0 (denn: Ü?A?: $\exists f \in L^1_{2\pi}, x_0 \in \mathbb{R}$: (a),(b) verletzt) (siehe auch Kapitel I f).

(3) *Anderenfalls* besagt Satz 10: Für $f \in L^1_{2\pi}$ hängt die Konvergenz der Fourier-Reihe in x_0 nur vom Verhalten von $f$in einer (beliebig kleinen) Umgebung von x_0 ab: Lokalisationsprinzip (siehe Folgerung 9).

Beweis. Sei $f \in L^1_{2\pi}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad S_m(f;x) &:= \sum_{k=-m}^{m} f\hat{}(k)e^{ikx} && \text{[Def. 10]}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\sum_{k=-m}^{m} e^{ik(x-u)}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)(1+2\sum_{k=1}^{m}\cos kt)dt && \text{[Ü1A5]}\\
&=: (f * D_m)(x) && \text{[D_m Dirichlet-Kern]}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} D_m(t)dt = 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad S_m(f;x_0)-c &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}+\int_0^{\pi}\right)(f(x_0-u)-c)\underbrace{D_m(u)}_{\text{gerade}}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+u)+f(x_0-u)-2c)D_m(u)du\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_\delta^{\pi}\right)\phi_{x_0}(u)\frac{\sin(2m+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du && \text{[Ü2A3(a)]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \phi_{x_0}(u)\frac{\sin(2m+1)\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \phi_{x_0}(u)\left(\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{\frac{u}{2}}\right)\sin(2m+1)\frac{u}{2}\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \phi_{x_0}(u)\frac{\sin(2m+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du \qquad \forall\delta\in[0,\infty] \\
&=: I_1^{(m)} + I_2^{(m)} + I_3^{(m)}
\end{aligned}
$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}, \delta \in [0,\pi]$ beliebig und fest zeige:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} I_2^{(m)} = \lim_{m\longrightarrow\infty} I_3^{(m)},$$

dazu: Sei

$$g_1(u) := \frac{1}{\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{\frac{u}{2}}$$

auf $[0,\delta]$. Da

$$\lim_{u\longrightarrow 0+}\left(\frac{1}{\sin u}-\frac{1}{u}\right) = 0 \qquad \text{[l'Hospital]}$$

$$\Longrightarrow \quad g_1 \in C[0,\delta]$$

Sei

$$g_2(u) := \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}$$

auf $[\delta,\pi]$ (für ein $\delta > 0$)

$$\Longrightarrow \quad g_2 \in C[\delta,\pi]$$

$$f \in L^1_{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi_{x_0}(u) \in L^1_{2\pi} \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\phi_{x_0}(u)g_1(u) \in L^1[0,\delta]$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{m\longrightarrow\infty} I_2^{(m)} = \lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \phi_{x_0}(u)g_1(u)\sin(m+\frac{1}{2})u\,du \qquad \text{[Lemma 11 mit } \rho = m+\tfrac{1}{2},\ [a,b]\text{]}$$

$$= 0 \qquad \text{[Riemann-Lebesgue]}$$

$$\phi_{x_0}(u)g_2(u) \in L^1[\delta,\pi]$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \phi_{x_0}(u)g_2(u)\sin(m+\frac{1}{2})u\,du = 0 \qquad \text{[Lemma 11, } \rho = m+\tfrac{1}{2},\ [a,b]=[\delta,\pi]\text{]}$$

$\Longrightarrow$ Zwischenbehauptung: (a) $\Longleftrightarrow$ (b'). Zeige: (b') $\Longleftrightarrow$ (b), dazu:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_0^\delta \phi_{x_0}(u)\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})u}{\frac{u}{2}} - \frac{\sin mu}{\frac{u}{2}}\right)\,du$$

$$= \int_0^\delta \phi_{x_0}(u) \underbrace{\underbrace{\frac{2\sin\frac{u}{4}}{\frac{u}{2}}}_{=:g_3(u)\in C[0,\delta]} \cos(m+\frac{1}{4})u \; du}_{\in L^1[0,\delta]}$$

$\longrightarrow 0$ [Lemma 11 mit $\delta = m + \frac{1}{4}$, $m \longrightarrow \infty$]

$\Longrightarrow$ Behauptung. □

Folgerung 9

$h, f \in L^1_{2\pi}$ wohldefiniert in x_0, $\lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f;x_0) = f(x_0)$ und $h = f$ um $x_0 \Longrightarrow$

$$S_m(h;x_0) = h(x_0)$$

◁

Beweis. Sei $g(x) := h(x) - f(x) \Longrightarrow g \in L^1_{2\pi}$, $g(x_0)$ wohldefiniert mit $g(x) = 0$ f.ü. auf $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

$$\Longrightarrow \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^\delta (g(x_0+u) + g(x_0-u) - 2g(x_0))\frac{\sin mu}{u}\, du = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(g;x_0) = 0 \quad \text{[Satz 10 (b) } \Longrightarrow \text{ (a)]}$$

$$\Longrightarrow \lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(h;x_0) = \lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f;x_0) = f(x_0) = h(x_0) \quad \text{[Linearität]}$$

□

Bemerkung
Analogon von Satz 10 etc. für gleichmäßige Konvergenz auf (Teil-)Intervallen $[a,b] \Longrightarrow$ Ü5A2(a)

Folgerung 10 (Dini-Kriterium für punktweise Konvergenz)

Sei $f \in L^1_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Aus

$$\exists c \in \mathbb{C}, \delta \in [0,\pi] : \int_0^\delta \left| \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2c}{u} \right| du < \infty$$

("Dini-Bedingung in x_0") folgt

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f;x_0) = c$$

◁

Beweis.

$$h(u) := \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2c}{u}$$

$$\Longrightarrow h \in L^1[0,\delta] \quad \text{[Voraussetzung]}$$

$$\Longrightarrow \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^\delta (f(x_0+u) + f(x_0+u) - 2c)\frac{\sin mu}{u}\, du = \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^\delta h(u)\sin mu\, du = 0$$

Lemma 11 mit $[a,b] = [0,\delta]$, $\rho = m$ und Satz 10 (b)$\Longrightarrow$(a) $\Longrightarrow$ Behauptung. □

Folgerung 11 (Lokales Lipschitz-Kriterium)

Sei $f \in L^1_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Wenn es $\alpha \in [0,1]$, $\delta \in [0,\pi]$, $M \in [0,\infty]$ gibt so daß f auf $U_\delta(x_0)$ punktweise wohldefiniert ist mit

$$|f(x_0+u) - f(x_0)| \le M|u|^\alpha \qquad \forall |u| \le \delta$$

("lokale Lipschitz-Bedingung"), dann gilt

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f;x_0) = f(x_0)$$

◁

Beweis.

$$\begin{aligned} |f(x_0+u) - f(x_0-u) - 2f(x_0)| &\le |f(x_0+u) - f(x_0)| + |f(x_0-u) - f(x_0)| \\ &\le 2M|u|^\alpha \qquad \forall |u| < \delta \qquad \text{[Voraussetzung]} \\ \Longrightarrow \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2f(x_0)}{u} \right| du &\le 2M \int_0^\delta u^{\alpha-1}\, du \\ &= \frac{2M}{\alpha}\delta^\alpha < \infty, \end{aligned}$$

da $\alpha > 0$, $\Longrightarrow$ Dini-Bedingung erfüllt mit $c = f(x_0)$. Folgerung 10 $\Longrightarrow$ Behauptung.

Insbesondere: Ist x_0 Differenzierbarkeitspunkt, das heißt:

$$\frac{f(x_0+u) - f(x_0)}{u} \longrightarrow f'(x_0) \qquad (u \longrightarrow 0),$$

dann erfüllt f in x_0 lokal die L-Bedingung mit $\alpha = 1$. □

Beispiel (Bernoulli-Splines)
(vgl. Ü2A4(b)) *Bernoulli-Funktionen*:

$$f_2(x) := \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0 \\ 2\pi\text{-periodisch}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f_2^\wedge(k) &= \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{1}{2ik}, & k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \end{cases} \\ \Longrightarrow \quad f_2(x) &\sim \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2ik} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \\ & f_2(x) \text{ differenzierbar für alle } x \in [0,2\pi] \\ \Longrightarrow \quad \lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f_2;x) &= f_2(x) \qquad \forall x \in [0,2\pi] \qquad \text{[Folgerung 11]} \end{aligned}$$

Zu $x_0 = 0$:

(i) Da $f_2(0) := 0$ und $S_m(f_2;0) = 0\ \forall m \in \mathbb{P}$, gilt

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f_2;0) = 0 = f_2(0)$$

(ii) f_2 erfüllt in $x_0 = 0$ die Dini-Bedingung mit $c = f_2(0) = 0$, denn:

$$\begin{aligned}\frac{f_2(x_0+u)+f_2(x_0-u)-2c}{u} &= \frac{f_2(u)+f_2(-u)}{u} \\ &= \frac{f_2(u)-f_2(u)}{u} = 0 \qquad \forall u > 0 \qquad [f_2 \text{ ungerade}]\end{aligned}$$

Also:

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{punktweise} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf dem Intervall $[\eta, 2\pi - \eta]$ für jedes $0 < \eta < \pi$ (vgl. Ü5A2(b)). Aber: sie kann nicht gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ sein und damit nicht auf $\mathbb{R}$ (f unstetig in $2\pi j$ $\forall j \in \mathbb{Z}$).

Definition 14 (BV$[a,b]$)

Sei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ kompakt, $g : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ (insbesondere *überall* wohldefiniert). g heißt *von beschränkter Variation* auf $[\alpha, \beta]$ (Bezeichnung: $g \in \mathrm{BV}[\alpha, \beta]$), falls die *totale Variation*

$$[\mathrm{Var}]_\alpha^\beta := \sup_{Z \in \mathcal{Z}[\alpha,\beta]} \sum_{k=1}^{m} |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty$$

Dabei ist $\mathcal{Z}[\alpha, \beta]$ die Menge der Zerlegungen $Z = (t_0, \ldots, t_m)$ von $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$. ◁

Lemma 14 (Jordan-Zerlegung)

(a) Sei $g \in \mathrm{BV}[\alpha, \beta]$. Dann gibt es monoton wachsende $g_1, g_2 : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_1(\alpha) = g_2(\alpha) = 0$$

$$g(t) - g(\alpha) = g_1(t) - g_2(t) \qquad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$[\mathrm{Var}\, g]_\alpha^t = g_1(t) + g_2(t) \qquad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$\begin{aligned} g \text{ in } x_0 \text{ stetig} &\Longrightarrow [\mathrm{Var}\, g]_\alpha^{\cdot} \text{ stetig in } x_0 \\ &\Longrightarrow g_1, g_2 \text{ stetig in } x_0 \end{aligned}$$

(b) Sei $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, $g \in C[\alpha, \beta]$. Dann gilt:

$$\exists \xi \in [\alpha, \beta] : \int_\alpha^\beta f(x)\, dg(x) = f(\alpha) \int_\alpha^\xi dg(x) + f(\beta) \int_\xi^\beta dg(x)$$

◁

Satz 11 (Jordan-Kriterium für punktweise Konvergenz von Fourierreihen)

Sei $f \in L^1_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Gibt es ein $\delta > 0$ so daß

$$f \in \mathrm{BV}[x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

dann gilt

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} S_m(f; x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

◁

Beweis. Da $f \in \mathrm{BV}[x_0-\delta, x_0+\delta]$ nach Voraussaetzung: $f(x_0+), f(x_0-)$ existieren. Wegen Satz 10 (Lokalisationsprinzip):

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f;x_0) \;=\; \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2} = c$$

$$\iff \exists 0<\delta<\pi : \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^\delta \underbrace{(f(x_0+u)+f(x_0-u)-2c)}_{=:\phi_{x_0}(u)=:\phi(u)} \frac{\sin mu}{u}\, du$$

mit

$$\phi(u) \;=\; \begin{cases} f(x_0+u)+f(x_0-u)-2c, & 0<u\le\delta \\ 0(=\phi(0+)), \text{sonst} \end{cases}$$

Da $\phi \in \mathrm{BV}[0,\delta]$ und ϕ in $u=0$ stetig mit $\phi(0)=0$, existieren (Lemma 12(a) mit $[\alpha,\beta]=[0,\delta]$) ϕ_1, ϕ_2 mit $\phi_1(0)=\phi_2(0)=0$ und $\phi(u)=\phi_1(u)-\phi_2(u)\ \forall u\in[0,\delta]$. Dazu sind ϕ_1, ϕ_2 stetig in $u=0$. Also: Behauptung folgt, falls gezeigt wird: Für das (nach Voraussetzung existierende) $\delta>0$ gilt:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^\delta \phi(u)\frac{\sin mu}{u}\, du \;=\; 0$$

für jedes auf $[0,\delta]$ monoton wachsende ϕ, ϕ stetig in $u=0$ mit $\phi(0)=0$. Dazu: Sein ϕ so eine Funktion. Zu $\epsilon>0$ existiert ein $\eta>0$ ($\eta\le\delta$ mit

$$0\le\phi(u)\le\epsilon \qquad \forall 0\le u\le\eta$$

$$\Longrightarrow \int_0^\eta \phi(u)\frac{\sin mu}{u}\, du \;=\; \phi(\eta)\int_\xi^\eta \frac{\sin mu}{u}\, du \qquad \text{[Lemma 12(b), } \exists \xi\in[0,\eta]\text{]}$$

$$= \phi(\eta)\int_{m\xi}^{m\eta} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$= \phi(\eta)\Big(\int_0^{m\eta} - \int_0^{m\xi}\Big)\frac{\sin t}{t} dt$$

$$\Longrightarrow \left|\int_0^\eta \phi(u)\frac{\sin mu}{u}\, du\right| \;\le\; \underbrace{\phi(\eta)}_{\le\epsilon}\Big(\underbrace{\left|\int_0^{m\eta}\frac{\sin t}{t}dt\right|}_{\le M} + \underbrace{\left|\int_0^{m\xi}\frac{\sin t}{t}dt\right|}_{\le M}\Big)$$

$$\le\; 2M\epsilon$$

(da $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}$ existiert (Ü3A2(a)))

$$\Longrightarrow \left|\int_0^\delta \phi(u)\frac{\sin mu}{u}\, du\right| \;\le\; \underbrace{\left|\int_0^\eta \phi(u)\frac{\sin mu}{u}\right|}_{\le 2M\epsilon} + \underbrace{\left|\int_0^\delta \frac{\phi(u)}{u}\sin mu\ du\right|}_{\longrightarrow 0\ \ (m\longrightarrow\infty)}$$

$$\limsup_{m\longrightarrow\infty}\left|\int_0^\delta \phi(u)\frac{\sin mu}{u}\, du\right| \;\le\; 2M\epsilon$$

$\epsilon>0$ beliebig

$$\Longrightarrow \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^\delta \phi(u)\frac{\sin mu}{u}\, du \;=\; 0$$

□

Beispiel (Bernoulli-Splines)

$$f_2(x) := \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und 2π-periodisch fortgesetzt

$$\Longrightarrow \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

für $0 < x < 2\pi$ wegen Folgerung 11, für $0 = x$ mit speziellem Argument oder Dini-Bedingung, da f_2 ungerade. Also: Punktweise Konvergenz in allen $x \in \mathbb{R}$. Jetzt mit Satz 11: $f_2 \in \mathrm{BV}[a,b]$ für alle kompakten Teilintervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{f_2(x+) + f_2(x-)}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{cases} f_2(x), & 0 < x < 2\pi \\ \frac{f_2(0+)+f_2(0-)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}+(-\frac{\pi}{2})}{2} = 0 = f_2(0) \end{cases}$$

Bemerkung
Satz 10, Satz 11, Folgerung 10 und Folgerung 11 liefern Kriterien für die Konvergenz von Fourier-Reihen zu $f \in L^1_{2\pi}$ zu *einem* Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Übung 5: Entsprechende Aussagen für gleichmäßige Konvergenz auf Teilintervallen (Lemma 10).

I.f Divergenzaussagen

Satz 12 (Du Bois-Reymond)

Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es ein $g \in C_{2\pi}$ mit

$$\limsup_{m \to \infty} S_m(g; x_0) = \infty$$

◁

Das heißt insbesondere: Die Fourier-Reihe von (beliebigen) $g_0 \in C_{2\pi}$ konvergiert *nicht* punktweise in einem (vorgegebenen) Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Insbesondere:

$$\limsup_{m \to \infty} \|S_m g_0\|_{C_{2\pi}} = \infty$$

Also: Die Fourier-Reihe von $g_0 \in C_{2\pi}$ konvergiert *nicht* gleichmäßig (gegen g_0), das heißt: Keine *Normkonvergenz* in $C_{2\pi}$. Dagegen: vgl. Folgerung 3(a) bezüglich des Hilbert-Raumes $L^2_{2\pi}$.

Beweis. (Nach Féjer: konstruktiv) Sei $x_0 = 0$. Betrachte die Féjer-Polynome

$$f_n(x) := \frac{\cos x}{n} + \cdots + \frac{\cos nx}{1} - \left(\frac{\cos(n+2)x}{1} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)x}{n} \right)$$

Nach Ü3A2(b): $f_n \in \Pi_{2n+1}$ mit $\|f_n\|_{C_{2\pi}} \leq 6\sqrt{\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da jedes trigonometrische Polynom seine eigene Fourier-Reihe ist (trivial):

$$S_m(f_n;x) \;=\; \begin{cases} \frac{\cos x}{n} + \cdots + \frac{\cos mx}{n+1-m}, & 1 \le m \le n \\ \frac{\cos x}{n} + \cdots + \frac{\cos nx}{1}, & m = n+1 \\ \frac{\cos x}{n} + \cdots + \frac{\cos nx}{1} - (\frac{\cos(n+2)x}{1} + \cdots + \frac{\cos mx}{m-n-1}), & n+2 \le m \le 2n+1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad S_m(f_n;0) \;\ge\; 0 \qquad \forall m,n \in \mathbb{N}$$

Sei

$$f_0(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underbrace{\phi_{2k^3}(x)}_{\in \Pi \subset C_{2\pi}}$$

(beachte: *konkrete Teilfolge*), dann ist $f_0 \in C_{2\pi}$ wohldefiniert, da

$$\begin{aligned} |f_0(x)| \;&\le\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left|\phi_{2k^3}(x)\right| \\ &\le\; 6\sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad \text{gleichmäßig} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wie im Beweis zu Satz 10 wegen Def. 13 und Ü2A3(a):

$$S_m(f;x) \;=\; (f * D_m)(x) \qquad \forall f \in C_{2\pi}$$

Da $f \in C_{2\pi}$, $D_m \in \Pi_m \subset L^1_{2\pi}$, folgt mit Satz 8(b) für jedes einzelne (feste) $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\|S_m f\|_{C_{2\pi}} \;\le\; \|D_m\|_1 \, \|f\|_C \\ \Longrightarrow \quad &\|S_m\|_{C_{2\pi}} \;\le\; \|D_m\|_1 \qquad \text{[Def. 11]} \end{aligned}$$

Also: Da $S_m \in [C_{2\pi}]$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ (fest) und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_{2k^2}$ gleichmäßig konvergiert, also in der *Norm* von $C_{2\pi}$, gilt (S_m stetig, vgl. Def. ?)

$$\begin{aligned} S_m(f_0;x) \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} S_m(\phi_{2k^3};x) \\ \Longrightarrow \quad S_m(f_0;0) \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} S_m(\phi_{2k^3};0) \qquad (1.1) \\ &\overset{k=n}{\ge}\; \frac{1}{n^2} S_m(\phi_{2k^3};0) \qquad \forall m,n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Insbesondere: Für $m = 2^{n^3}$:

$$\begin{aligned} S_{2k^3}(\phi_{2n^3};0) \;&=\; 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n^3}} \\ &>\; \int_1^{2^{n^3}+1} \frac{dx}{x} \\ &=\; \log(2^{n^3}+1) \\ &\ge\; n^3 \log 2 \\ \Longrightarrow \quad S_{2^{n^3}}(f_0;0) \;&\ge\; \frac{1}{n^2} S_{2^{n^3}}(\phi_{2^{n^3}};0) \qquad [(1.1)] \\ &\ge\; n \log 2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \limsup_{m\longrightarrow\infty} S_m(f_0;0) \;=\; \infty$$

$\Longrightarrow$ Behauptung für $x_0 = 0$.

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig fest, dann betrachte

$$\begin{aligned} g_0(U) \;&:=\; (\tau_{-x_0} f_0)(u) := f(u-x_0) \in C_{2\pi} \\ S_m(g_0;x_0) \;&=\; (\tau_{-x_0} f_0 * D_m)(x_0) \\ &=\; \tau_{-x_0}(f_0 * D_m)(x_0) \qquad \text{[Folgerung 7]} \\ &=\; (f_0 * D_m)(0) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \limsup_{m\longrightarrow\infty} S_m(g_0;x_0) \;=\; \limsup_{m\longrightarrow\infty} S_m(f_0;0) = \infty$$

□

Bemerkung

(1) Raum $C_{2\pi}$: Mit "Kondensationsprinzip" (Banach-Steinhaus):

$$\exists g_0 \in C_{2\pi} : \limsup_{m\longrightarrow\infty} |S_m(g_0;x)| = \infty \qquad (\forall x \in \mathbb{Q})$$

$$\forall g \in C_{2\pi} : \limsup_{m\longrightarrow\infty} S_m(g;x) = g(x)\text{f.ü.}$$

sogar (Orlicz 1934) für alle $x \in B$, wobei $B \subset \mathbb{R}$ dicht von 2. Kategorie ist (*überabzählbar*), aber (Carleson 1966): Für jedes $g \in C_{2\pi}$ gilt:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(g;x) = g(x)\text{f.ü.}$$

das heißt: Für eine *stetige* Funktion hat die Menge der Divergenzpunkte notwendigerweise das L-Maß 0.

(2) Räume $L^p_{2\pi}$ $(1 < p < \infty)$: M. Riesz (1927):

$$\forall f \in L^p_{2\pi} : \lim_{m\longrightarrow\infty} \|S_m f - f\|_p = 0$$

Carleson (1966, $2 \le p \le \infty$) und Hunt (1967, $1 < p < 2$):

$$\forall f \in L^p_{2\pi} : \lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(f;x) = f(x)\text{f.ü.}$$

(3) Raum $L^1_{2\pi}$: Mit dem Beschränktheitsprinzip (Satz 13):

$$\exists g_0 \in L^1_{2\pi} : \limsup_{m\longrightarrow\infty} \|S_m g_0\|_1 = \infty$$

Kolmogorov (1926):

$$\exists g_0 \in L^1_{2\pi} : \limsup_{m\longrightarrow\infty} |S_m(g_0;x)| = \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Wegen dieser Divergenzphänomene werden *Summationsverfahren* benötigt, siehe Kapitel I(g).

Divergenzaussagen (wie die von Satz 12) werden allgemein kontrolliert durch

Satz 13 (Beschränktheitsprinzip)

Sei X Banach-Raum, Y LNR und $(T_m)_{m\in\mathbb{N}} \in [X,Y]$.

(a)

$$\begin{aligned} &\forall f \in X\ \exists M_f < \infty : \|T_m f\|_Y \leq M_f \\ \Longrightarrow &\exists M < \infty : \|T_m\|_{[X,Y]} \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(positive Version)

(b)

$$\begin{aligned} &\limsup_{m \longrightarrow \infty} \|T_m\|_{[X,Y]} = \infty \\ \Longrightarrow &\exists g_0 \in X : \limsup_{m \longrightarrow \infty} \|T_m g_0\|_Y = \infty \end{aligned}$$

(negative Version)

$\triangleleft$

Beispiel

(i) $X = Y = L^1_{2\pi}$, $T_m = S_m \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \limsup_{m \longrightarrow \infty} \|S_m\|_{[L^1_{2\pi},]} = \infty \qquad \text{[Ü4A4, Folg. 12]}$$

$$\Longrightarrow \exists g_0 \in L^1_{2\pi} : \limsup_{m \longrightarrow \infty} \|S_m g_0\|_1 = \infty \qquad \text{[Satz 13]}$$

(ii) $X = C_{2\pi}$, $Y = \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig fest, $T_m : C_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $T_m f := S_m(f; x_0)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \|T_m\|_{[C_{2\pi},\mathbb{C}]} &:= \sup_{|f| \leq 1} |S_m(f; x_0)| \qquad \text{[Def. 11]} \\ &= \sup_{\|f\|_{C_{2\pi}} \leq 1} |(f * D_m)(x_0)| \\ &\leq \sup_{\|f\|_{C_{2\pi}} \leq 1} \frac{1}{2\pi} \|D_m\|_1 \|f\|_{C_{2\pi}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \|D_m\|_1 \end{aligned}$$

Sogar (Riesz-Darstellungssatz):

$$\begin{aligned} \|T_m\|_{[C_{2\pi},\mathbb{C}]} &= \frac{1}{2\pi} \|D_m(x_0 - u)\|_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \|D_m\|_1 \qquad \text{[Ü1A5]} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \exists g_0 \in C_{2\pi} : \limsup_{m \longrightarrow \infty} |S_m(g_0; x_0)| = \infty \qquad \text{[Ü4A4, Satz 13]}$$

Satz 13 $\rightsquigarrow$ Problem: Zu X Banach-Raum, Y linearer normierter Raum, $(T_m)_{m \in \mathbb{P}} \subset [X, Y]$, bestimme *untere* Schranken von $(\|T_m\|_{[X,Y]})_{m \in \mathbb{P}}$!

Dazu: Gegeben eine unendliche Dreiecksmatrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{00} & 0 & \cdots & \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \quad \ddots \end{pmatrix}$$

Für $f \in L^1_{2\pi}$ sei

$$\begin{aligned}\Lambda_m(f;x) &:= \sum_{k=-m}^{m} \lambda_{|k|,m}\ f\hat{}(k)\ e^{ikx} \\ &= (f * \chi_m)(x)\end{aligned}$$

mit $\chi_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} \lambda_{|k|,m}\ e^{ikx}$.

Satz 14 (Ungleichung von Hardy-Littlewood-Sidon)

Für $X_{2\pi} \in \{C_{2\pi}, L^1_{2\pi}\}$

$$\exists M > 0 : \|Lambda_m\|_{[X_{2\pi}]} \geq M \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{km}}{m+1-k} \right| \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

◁

Beweis.

Fall $C_{2\pi}$: Für die Féjer-Polynome $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gilt nach Ü3A2(b):

$$\frac{1}{C\sqrt{\pi}} \|\phi_m\|_{C_{2\pi}} \ \leq\ 1 \qquad \forall m \in \mathbb{P}$$

und $\phi_m \in \Pi_{2m+1}$ mit

$$f_m\hat{}(k) \ =\ \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{1}{m+1-|k|}, & 1 \leq |k| \leq m \\ 0, & |k| = m+1 \\ \frac{1}{|k|-m-1}, & m+2 \leq |k| \leq 2m+1 \\ 0, & |k| > 2m+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad \|\Lambda_m\|_{C_{2\pi}} &:= \sup_{\|f\|_{C_{2\pi}} \leq 1} \|\Lambda_m f\|_{C_{2\pi}} \\ &\geq \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \|\Lambda_m \phi_m\|_{C_{2\pi}} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left\| \sum_{k=-m}^{m} \lambda_{|k|,m} \phi_m\hat{}(k) e^{ikx} \right\|_{C_{2\pi}} \\ &= \frac{1}{12\sqrt{\pi}} \left\| \sum_{k=-m}^{m} \frac{\lambda_{|k|,m}}{m+1-|k|} e^{ikx} \right\|_{C_{2\pi}} \\ &\geq \frac{1}{12\sqrt{\pi}} \left| \sum_{k=-m, k\neq 0}^{m} \frac{\lambda_{|k|,m}}{m+1-|k|} \right| \qquad [x = 0,\ C_{2\pi}\text{-Fall}] \\ &= \frac{1}{6\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\lambda_{|k|,m}}{m+1-|k|} \right.\right.\end{aligned}$$

Fall $L^1_{2\pi}$: Es gilt allgemein (Norm dualer Operatoren, ohne Beweis): UNLESERLICH :(

□

Beispiel
Sei $\lambda_{k,m} = 1\ \forall 0 \le k \le m,\ m \in \mathbb{P},\ X_{2\pi} \in \{C_{2\pi}, L^1_{2\pi}\}$. Dann ist $\Lambda_m = S_m$ und

$$\begin{aligned} \|S_m\|_{[} X_{2\pi}] &\ge M \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+1-k} \right| \qquad \text{[Satz 14]} \\ &= M \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \\ &\ge M \sum_{j=1}^{m} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} \\ &= M \int_1^{m+1} \frac{dx}{x} \\ &= M \log(m+1) \end{aligned}$$

(vgl. Folg. 12)

Satz 15 (Gibbs-Phänomen)

Für $x_m := \frac{\pi}{m}$ $(m \in \mathbb{N})$ und den Bernoulli-Spline

$$f_2(x) := \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{für } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(2π-periodisch fortgesetzt) gilt:

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} S_m(f_2; x_m) - f_2(x_m) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} =: M > 0$$

◁

Beweis.

$$f_2(x_m) = \frac{\pi - \frac{\pi}{m}}{2} = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{m}) \ \longrightarrow \ \frac{\pi}{2} f_2(0+) \quad (m \longrightarrow \infty)$$

Da $\frac{sint}{t} \in C[0, \infty]$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{t} &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \lim_{m \longrightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k\frac{\pi}{m}}{k\frac{\pi}{m}} \frac{\pi}{m}}_{\text{Riemann-Summe}} \\ &= \lim_{m \longrightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k x_m}{k}}_{= S_m(f_2; x_m)} \qquad \text{[Ü2A4(b)]} \\ &= \lim_{m \longrightarrow \infty} S_m(f_2; x_m) \end{aligned}$$

Zeige:

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} - \frac{\pi}{2} \; > \; 0$$

Dazu:

$$\begin{aligned}
\cos t \; &> \; 1 - \frac{2}{\pi}t \qquad \forall 0 < t < \frac{\pi}{2} \\
\sin x \; &= \; \int_0^x \cos t dt \\
&> \; \int_0^x (1 - \frac{2}{\pi}t) dt \\
&= \; x - \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2} \\
&= \; x - \frac{x^2}{\pi} \\
&= \; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}(x - \frac{\pi}{2})^2 \qquad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Da symmetrisch um $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \sin x \; &> \; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}(x - \frac{\pi}{2})^2 \qquad \forall 0 < x < \pi \\
&= \; x - \frac{x^2}{\pi} \\
\Longrightarrow \quad \frac{\sin x}{x} \; &> \; 1 - \frac{x}{\pi} \qquad 0 < x < \pi \\
\Longrightarrow \quad \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \; &> \; \int_0^\pi (1 - \frac{x}{\pi}) dx = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung
Beispiel nach Folgerung 11 bzw. Satz 11 (Bernoulli):

$$\Longrightarrow \quad \lim_{m \longrightarrow \infty} (S_m(f_2; x) - f_2(x)) \; = \; 0$$

punktweise $\forall 0 \leq x \leq 2\pi$, gleichmäßig auf $[\eta, 2\pi - \eta]$ für jedes $0 < \eta < \pi$ (Ü8A2(b)). Also: Für gegebenes $0 < \eta < \pi$ ist nach Satz 15 die Konvergenz auf $[0, \eta]$ nicht gleichmäßig, denn (z.B.):

$$\begin{aligned}
\|S_m f_2 - f_2\|_{C[0,\eta]} \; &\geq \quad S_m(f_2, \frac{\pi}{m}) - f_2(\frac{\pi}{m}) \qquad \forall m \in N, \frac{\pi}{m} \leq \eta \\
&\longrightarrow \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} > 0
\end{aligned}$$

folgt auch aus der Unstetigkeit von f_0 in Null. Darüberhinaus liefert Satz 15: Gibbs-Phänomen ist ein Maß für die nicht gleichmäßige Konvergenz; dazu:

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} S_m(f_2; x_m) \; = \; \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2} + M$$

mit Konstante $M > 0$.

I.g Singuläre Integrale und Umkehrformeln

Definition 15 (Kern)

ei $\mathbb{A} = [a, b]$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ oder $\mathbb{A} = \mathbb{N}$. Sei $\rho_0 \in \{a, b, \infty\}$. Eine Menge $\{\chi_\rho(x)\}_{\rho \in \mathbb{A}}$ von Funktionen heißt *Kern*, falls

(1)
$$\chi_\rho \in L^1_{2\pi} \qquad \forall \rho \in \mathbb{A}$$

(2)
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_\rho(u)du = 1[= \chi_\rho^\wedge(0)] \qquad \forall \rho \in \mathbb{A}$$

(Normierungsbedingung)

◁ ◁

Definition 16 (Singuläres Integral)

Sei $\{\chi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{A}}$ ein Kern, $f \in L^1_{2\pi}$. Das *singuläre Integral* $I_\rho(f;x)$ (genauer: $\{I_\rho(f;x)\}_{\rho \in \mathbb{A}}$) ist definiert als die Faltung
$$I_\rho(f;x) := I_\rho f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\ \chi_\rho(u)\ du[= (f * \chi_\rho)(x)]$$

◁ ◁

Lemma 15

Sei $\{\chi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{A}}$ ein Kern. Für $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [1, \infty]$ existiert $I_\rho(f;x)$ für alle $(p = \infty)$ bzw. fast alle $(p < \infty)$ $x \in \mathbb{R}$, und es gilt
$$I_\rho f \in L^p_{2\pi}$$
und
$$\|I_\rho\|_{[L^p_{2\pi}]} \leq \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1 \qquad \forall \rho \in \mathbb{A}$$

◁

Beweis. Satz 7+8 (vgl. Def. 11) □

Problem: Für welche p gilt *Gleichheit*:
$$\|I_\rho\|_{[L^p_{2\pi}]} = \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1$$

Satz 16 (Darstellung der Operatornorm durch Norm des Kerns)

Sei $\{\chi_\rho\}_{\rho \in \mathbb{A}}$ der Kern des singulären Integrals $\{I_\rho\}$. Dann gilt
$$\forall \rho \in \mathbb{A} : \|I_\rho\|_{[C_{2\pi}]} = \|I_\rho\|_{[L^1_{2\pi}]} = \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1$$

◁

Beweis. Ü6A1(a) □

Beispiel (Singuläres Integral von Dirichlet)
Sei $f \in L^1_{2\pi}$. Dann gilt (vgl. Beweis zu Satz 10):

$$\begin{aligned} S_m(f;x) &:= \sum_{k=-m}^{m} f\hat{}(k)\ e^{ikx} && \text{[Def. 10]} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u) \sum_{k=-m}^{m} e^{ik(x-u)}\ du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\left(1+2\sum_{k=1}^{m}\cos kt\right) dt \\ &= (f * D_m)(x) && \text{[Def. 13]} \end{aligned}$$

mit Dirichlet-Kern (Ü2A3(a))

$$D_m(x) := 1 + 2\sum_{k=1}^{m}\cos kx = \begin{cases} \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} & x \neq 2\pi j \\ 2m+1 & x = 2\pi j \end{cases}$$

und

$$\int_0^{2\pi} D_m(u)\ du = 2\pi$$

d.h. $(D_m)_{m\in\mathbb{P}}$ ist Kern.

Folgerung 12

Sei $m \in \mathbb{N}$, $Y = C_{2\pi}$ oder $Y = L^p_{2\pi}$ $(p \in [1,\infty])$.

(a) Die Teilsummen $S_m(f;x)$ der Fourierreihe von $f \in Y$ haben die *Darstellung als singuläres Integral von Dirichlet*

$$S_m(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\ D_m(u)\ du$$

mit Dirichlet-Kern $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Insbesondere ist $S_m : Y \longrightarrow \Pi_m \subset Y$ wohldefiniert $\forall x \in \mathbb{R}$, polynomial, linear und beschränkt mit

$$\|S_m\|_{[Y]} \leq \frac{1}{2\pi}\|D_m\|_1$$

(D_m (sind's die?) "Lebesgue-Konstanten")

(b)

$$\frac{1}{2\pi}\|D_m\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\log m + O(1) \longrightarrow \infty \qquad (m \longrightarrow \infty)$$

(c) "Projektionseigenschaft": $\forall x \in \mathbb{R},\ f_m \in \Pi_m,\ m \in \mathbb{N}$:

$$S_m(f_m;x) = f_m(x)$$

◁

Beweis.

(a) Satz 8b, Lemma 13, Satz 16

(b) Ü4A1

(c) Lemma 3(d), da

$$D_m^\wedge = \begin{cases} 1 & \text{für } |k| \le m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

Definition 17 (Approximierende Identität)

Ein Kern $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ heißt *approximierende Identität*, falls

(1)
$$\|\chi_\rho\|_1 \le M \qquad \forall \rho \in \mathbb{A}$$

(2)
$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \int_{\delta\le|u|\le\pi} |\chi_\rho(u)|\, du = 0 \qquad \delta \in [0,\pi]$$

◁

Bemerkung
Der Dirichlet-Kern ist *keine* approximierende Identität, da (i) wegen Folgerung 12(b) nicht gilt.

Satz 17

Sei $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ oder $X_{2\pi} = L^p_{2\pi}$ mit $p \in [1,\infty]$, sei $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ eine approximierende Identität. Dann gilt:

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \qquad \forall f \in X_{2\pi}$$

Achtung: Gilt nicht für $p = \infty$ ◁

Beweis. Sei $f \in X_{2\pi}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
I_\rho(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-u) - f(x)\big)\chi_\rho(u)\, du && \text{[Def. 16(ii), Ü1A5]} \\
\Longrightarrow \quad & \|I_\rho(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big\|\big(f(\cdot-u) - f(\cdot)\big)\chi_\rho(u)\big\|_{X_{2\pi}}\, du && \text{[L21]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot-u) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} |\chi_\rho(u)|\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|u|<\delta} + \int_{\delta\le|u|\le\pi}\right) \|f(\cdot-u) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} |\chi_\rho(u)|\, du \qquad \forall 0<\delta<\pi \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Wesentlicher Trick: L18 (Stetigkeit im Mittel).
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(f;\epsilon) > 0$ mit

$$\|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} < \epsilon \qquad \forall |u| \ < \ \delta (< \pi) \qquad \text{[L18]}$$

Für dieses δ gilt:

$$\begin{aligned} I_1 \ &\leq \ \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{|u|<\delta} |\chi_\rho(u)| \, du \\ &\leq \ \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_\rho(u)| \, du \\ &= \ \frac{\epsilon}{2\pi} \, \|\chi_\rho\|_1 \\ &\leq \ \frac{M}{2\pi}\epsilon \qquad \text{für jedes } \rho \in \mathbb{A} \qquad \text{[Def. 18(i)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 \ &\leq \ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \big(\underbrace{\|f(\cdot - u)\|_{X_{2\pi}}}_{= \|f\| \text{ nach Ü1A5}} + \|f\|_{X_{2\pi}} \big) |\chi_\rho(u)| \, du \\ &= \ \frac{\|f\|_{X_{2\pi}}}{\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| \, du \end{aligned}$$

Zu diesem Paar ϵ, δ gibt es ein $\rho^* \in \mathbb{A}$ mit

$$\int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| \, du \ < \ \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} \ \leq \ \epsilon \left(\frac{M}{2\pi} + \frac{\|f\|_{X_{2\pi}}}{\pi} \right)$$

für alle $\rho \in \mathbb{A}$ mit

$$\begin{cases} |\rho - \rho_0| < |\rho^* - \rho_0|, & \rho_0 \in \mathbb{R} \\ \rho^* < \rho, & \rho_0 = \infty \end{cases}$$

ϵ war beliebig, also folgt die Behauptung. □

Beispiel (Singuläres Integral von Fejér)

$$\begin{aligned} \sigma_m(f;x) \ &:= \ \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} S_k(f;x) \\ &= \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u) \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} D_k(u) \right) du \\ &= \ (f * F_m)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} D_k(u) \ &= \ \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k} \cos ju \right) \\ &= \ 1 + \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \cos ju \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{2}{m+1} \sum_{j=1}^{m} \cos ju \sum_{k=j}^{m} 1$$

$$= 1 + 2 \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{j}{m+1}\right) \cos ju$$

mit *Fejér-Kern* (Ü2A3(b))

$$F_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} (1 - \frac{|k|}{m+1}) e^{ikx} = \begin{cases} \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sin \frac{m+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 & \text{für } x \neq 2\pi\rho \\ m+1 & \text{für } x = 2\pi\rho \text{ mit } \rho \in \mathbb{A} = \mathbb{N} \end{cases}$$

also: $F_m \in \Pi_m \subset L^1_{2\pi}$ und

$$\int_0^{2\pi} F_m(u)\, du = 2\pi$$

somit ist $(F_m)_{m \in \mathbb{P}}$ Kern. Da $F_m(x) \geq 0$:

$$\int_0^{2\pi} |F_m(u)|\, du = \int_0^{2\pi} F_m(u)\, du = 2\pi$$

dies ist Bedingung (i) aus Def. 18. Nach Ü6A1 ist auch Bedingung (ii) erfüllt. Also: $(F_m)_{m \in \mathbb{P}}$ ist approximierende Identität (für $m \longrightarrow \infty$)

Folgerung 13 (Satz von Fejér)

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \|\sigma_n f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \qquad \forall f \in X_{2\pi}$$

◁

Bemerkung

(1) Aus Folgerung 13 folgt Eindeutigkeitssatz (Folgerung 2), denn (vgl. Beweis zu Satz 5): Sei $f \in X_{2\pi}$:

$$f^\wedge(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_m(f;x) := \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right) f^\wedge(k)\, e^{ikx} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{P}$$

$$\Longrightarrow \quad \|f\|_{X_{2\pi}} = 0 \qquad \text{[Folg. 13]}$$

$$\Longrightarrow \quad f = 0 \qquad \text{in } X_{2\pi}$$

□

(2) Lemma 9(a): In der kommutativen Banach-Algebra $L^1_{2\pi}$ gibt es keine Eins e (mit $f * e = f\ \forall f \in L^1_{2\pi}$); aber: Folgerung 13: Es gibt eine approximierende Eins in dem Sinne, daß $\exists (F_m) \in L^1_{2\pi}$ mit

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} F_m * f = f \qquad \forall f \in L^1_{2\pi}$$

(Limes in der Norm der Banach-Algebra $L^1_{2\pi}$)

Folgerung 14

$$\Pi := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Pi_m \subset X_{2\pi} \text{ ist dicht in } X_{2\pi}$$

. ◁

Beweis. Folgerung 13, da $\sigma_m f \in \Pi_m \ \forall f \in X_{2\pi},\ m \in \mathbb{P}$. □

Konstruktiver Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes. Nach der Normkonvergenz nächstes Problem: Punktweise Konvergenz von singulären Integralen.

Satz 18 (Konvergenz des singulären Integrals)

Sei $f \in L^1_{2\pi}$. Der *gerade* Kern $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ habe eine *Majorante* $\{\chi^*_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ auf $[0,\pi]$, d.h.

$$\forall \rho \in \mathbb{A} : |\chi_\rho(x)| \le \chi^*_\rho(x) \text{ f.ü. auf } [0,\pi]$$

mit

(i)
$$\int_0^\pi \chi^*_\rho(u)\ du \le M \qquad \forall \rho \in \mathbb{A}$$

(ii)
$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \int_\delta^\pi \chi^*_\delta(u)\ du = 0 \qquad \forall \delta \in [0,\pi]$$

(iii) Für alle $\rho \in \mathbb{A}$ ist χ^*_ρ monoton fallend auf $[0,\pi]$

In jedem L-Punkt x von f, d.h.

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\ du = 0,$$

also insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt von f, gilt

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f;x) = f(x)$$

◁

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ L-Punkt von f, beliebig, fest. Da $f \in L^1_{2\pi}$, ist nach L9

$$G(t) := \int_0^t |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\ du$$

wohldefiniert für $t \ge 0$ als *absolut stetige* Funktion mit $G(0) = 0$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da x L-Punkt ist, gibt es ein $\delta \in [0,\pi]$ mit

$$G(t) \le \epsilon t \qquad \forall t \in [0,\delta]$$

Für diese (festgelegten) x, ϵ, δ gilt

$$\begin{aligned} I_\rho(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^\pi\right)[f(x-u)-f(x)]\chi_\rho(u)\ du && \text{[Def. 16(iii)]} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\chi_\rho(u)\ du && [\chi_\rho \text{ gerade, vgl. Lemma 9b}] \\ \Longrightarrow\ |I_\rho(f;x)-f(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right)|f(x-u)+f(x-u)-2f(x)|\chi^*_\rho(u)\ du \\ &=: I_1 + I_2 \\ 2\pi I_1 &= \int_0^\delta |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\ \chi^*_\rho \end{aligned}$$

$$= \underbrace{[\chi_\rho^*(u)\ G(u)]_0^\delta}_{=\chi_\rho^*(\delta)G(\delta) \text{ da } G(0)=0} + \underbrace{\int_0^\delta G(u)\ d[\ \underbrace{-\chi_\rho^*(u)}_{\searrow \text{ auf } [0,\infty]}\ ]}_{\text{Riemann-Stieltjes-Int., da } G \text{ stetig}} \qquad \text{[part. Int.]}$$

$G(u) \leq \epsilon u\ \forall 0 \leq u \leq \delta$, also:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{\epsilon}{2\pi}\left[\delta\chi_\rho^*(\delta) + \int_0^\delta u\ d[-\chi_\rho^*(u)]\right] \\
&= \frac{\epsilon}{2\pi}\left(\underbrace{\delta\chi_\rho^*(\delta) - [u\chi_\rho^*(u)]_0^\delta}_{=0} + \int_0^\delta \chi_\rho^*(u)\ du\right) && \text{[part. Int.]} \\
&= \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^\delta \chi_\rho(u)\ du \\
&\leq \frac{\epsilon}{2\pi}M \qquad \forall \rho \in \mathbb{A} && \text{[(i)]} \\
|I_2| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi (|f(x+u)+f(x-u)+2f(x)|)\ du \cdot \sup_{\delta \leq u \leq \pi} \chi_\rho^*(u) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}[2\,\|f\|_1 + 2|f(x)|\pi]\chi_\rho^*(\delta) && [\chi_\rho^* \searrow]
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{\delta/2}^\pi \chi_\rho^*(u)\ du &\geq \int_{\delta/2}^\delta \chi_\rho^*(u)\ du && [0 < \delta < \pi,\ \chi_\rho^*(u) \geq 0] \\
&\geq \chi_\rho^*(\delta)\cdot\frac{\delta}{2} \geq 0 && [\chi_\rho^* \searrow]
\end{aligned}$$

Da wegen (ii) $\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \int_{\delta/2}^\pi \chi_\rho^*(u)\ du = 0$, gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \chi_\rho^*(\delta) = 0 \\
\Longrightarrow\quad &\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} |I_2| = 0 \\
\Longrightarrow\quad &\limsup_{\rho \longrightarrow \rho_0} |I - \rho(f;x) - f(x)| \leq \frac{M}{2\pi}\cdot\epsilon
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow$ Behauptung. □

Beispiel (Féjer)
$(F_m)_{m\in\mathbb{P}}$ ist gerade, positiv, approximierende Identität mit Majorante (Ü4A5)

$$F_m(x) \leq \frac{2\pi^2 m}{1+(nx)^2} \qquad \forall 0 \leq x \leq \pi, m \in \mathbb{N},$$

also Bedingungen aus Satz 18 erfüllt (Ü4A5).

Folgerung 15

Für $f \in L^1_{2\pi}$ gilt

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \sigma_m(f;x) = f(x) \qquad \text{f.ü.},$$

insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt. ◁

Definition 18

Sei $\mathbb{A}$ wie in Definition 15. Eine Menge

$$\{(\theta_\rho(k))_{k\in\mathbb{Z}}\}_{\rho\in\mathbb{A}} \subset s(\mathbb{Z})$$

heißt *Konvergenzfaktor*, falls

(1) (Def. 12)

$$\theta_\rho \in \ell^1(\mathbb{Z}) \qquad \forall \rho \in \mathbb{A}$$

(2) Normiertheit:

$$\theta_\rho(0) = 1$$

(3) gerade:

$$\theta_\rho(k) = \theta_\rho(-k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \rho \in \mathbb{A}$$

Das θ-*Mittel* (θ-*Summationsverfahren*) der Fourier-Reihe von $f \in L^1_{2\pi}$ ist dann definiert durch

$$M_\rho(f;x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta_\rho(k)\ f\hat{}(k)\ e^{ikx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

◁

Die Reihe konvergiert wegen (i) absolut und gleichmäßig in x auf $\mathbb{R}$ für alle ρ.

Bemerkung

(1) Zur Bezeichnungsweise:

$$M_\rho(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\Theta_\rho(h)}_{\longrightarrow 0 \text{ f. } \rho \longrightarrow \rho_0} f\hat{}(k)\ e^{ikx} \qquad \text{[Def.]}$$

$$\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\hat{}(k)\ e^{ikx}$$

(genauere Interpretation im Sinne dieser Konvergenzen)

$$M_\rho(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Theta_\rho(k)\ f\hat{}(k)\ e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_\rho(k) \underbrace{\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big)}_{\text{gekoppelt vgl. Def 10}} \qquad \text{[(ii)+(iii), Lemma 6]}$$

(2) Da $\Theta_\rho \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$\Longrightarrow \quad C_\rho(x) := \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Theta_\rho(k)\ e^{ikx}}_{\text{abs.+glm.konv. wg. (i)}}$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \Theta_\rho(k)\cos kx \in C_{2\pi} \qquad \text{[(ii), (iii)]}$$

für alle $\rho \in \mathbb{A}$ wohldefiniert mit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_\rho(x)\ dx \ = \ \Theta_\rho(0) = 1 \qquad \forall \rho \in \mathbb{A} \qquad \text{[(i),(ii)]}$$

$\Longrightarrow \{C_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ ist Kern stetiger Funktionen mit

$$C_\rho\hat{}(x) \ = \ \Theta_\rho(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ \rho \in \mathbb{A}$$

Weiter:

$$\begin{aligned}(f * C_\rho)(x) \ &:= \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Theta_\rho(k)\ e^{iku}\right)\ du && \text{[Def. 13]}\\ &= \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Theta_\rho(x)\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\ e^{-ik(x-u)}\ du\right)}_{=f\hat{}(k)} e^{ikx} && \text{[glm. Konv.]}\\ &= \ M_\rho(f;x)\end{aligned}$$

Folgerung 16

Für einen θ-Faktor erfüllt $\{C_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ gerade die Voraussetzungen von Satz 7/8. ◁

Beispiel (Féjer)

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{k=-m}^{m}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)\ f\hat{}(k)\ e^{ikx} = f(x)\text{f.ü.}$$

Frage: Wann in Folgerung 16

$$\lim_{\rho\longrightarrow\rho_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\ldots = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\lim_{\rho\longrightarrow\rho_0}\ldots \qquad ?$$

d.h. falls

$$\Theta_\rho(k) \overset{\rho\longrightarrow\rho_0}{\longrightarrow} 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\Longrightarrow$ Wann konvergiert die FR *selbst* (ohne Konvergenzfaktoren)? $\rightsquigarrow$ Kap. I.e+I.f

I.h Ableitungen

Definition 19 (Absolute Stetigkeit)

$f \in C_{2\pi}$ heißt *r-fach absolut stetig*, falls es $g \in L^1_{2\pi}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ gibt, so daß

$$f(x) = \alpha_1 + \int_0^x \left(\alpha_2 + \int_0^{u_1}\left(\alpha_3 + \cdots + \int_0^{u_{r-2}}\left(\alpha_r + \int_0^{u_{r-1}} g(u_r)\ du_r\right)\ du_{r-1}\cdots\right)du_2\right)du_1$$

$AC^{(r)}_{2\pi}$ ist die Menge aller 2π-periodischen, r-fach absolut stetigen Funktionen. Schreibweise:

$$f = g^{(r)}$$

◁

$$C_{2\pi}^{(r)} := \{f \in C_{2\pi} : \text{f ist r-mal stetig differenzierbar auf } \mathbb{R}\}$$
$$(L_{2\pi}^p)^{(r)} := \left\{f \in L_{2\pi}^p : \exists \phi \in AC_{2\pi}^{(r)} \text{ mit } f = \phi \text{ f.ü.} \quad \text{und} \quad g = f^{(r)} \in L_{2\pi}^p\right\}$$

Satz 19 (Faltung glättet)

Die Faltung ist ein Glättungsprozeß, das heißt:
Sei $r \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$, $f \in (L_{2\pi}^p)^{(r)}$, $g \in (L_{2\pi}^{p'})^{(r)}$, dann gilt:

$$f * g \in C_{2\pi}^{(r)}$$

und

$$(f*g)^{(r)}(x) = (f^{(r)} * g)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

◁

Beweis. Sei $r = 1$. Da $f \in (L_{2\pi}^1)^{(r)} \Longrightarrow \exists h[= f^{(1)}] \in L_{2\pi}^p$, $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \alpha + \int_0^x h(u)\, du \quad \text{f.ü.}$$

$\Longrightarrow$ $f*g, h*g \in C_{2\pi}$ [Satz 8b, $f,g,h \in L^p$]

$\Longrightarrow$ $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall |\delta| < \delta : \|h(u+\delta) - h(u)\|_p \le \epsilon$ [$h \in L_{2\pi}^p$ $(p < \infty)$, LL18]

$$\frac{(f*g)(x+t) - (f*g)(x)}{t} - (h*g)(x)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{f(x+t-u) - f(x-u)}{t} - h(x-u)\right) g(u)\, du \qquad \text{[Def. 13]}$$

$\Longrightarrow$
$$\left\| \frac{(f*g)(x+t) - (f*g)(x)}{t} - (h*g)(x) \right\|_{C_{2\pi}}$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\|g\|_{p'} \left\| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - h(x) \right\|_p \qquad \text{[Satz 8b, Ü1A5]}$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\|g\|_{p'} \left\| \int_0^1 \big(h(x+tw) - h(x)\big)\, dw \right\|_p$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\|g\|_{p'} \int_0^1 \|h(x+tw) - h(x)\|_p\, dw$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\|g\|_{p'}\epsilon \qquad w \in [0,1] \Longrightarrow |tw| \le |t| \le \delta_0$$

$\Longrightarrow$ Behauptung für $r = 1$. Für $r > 1$ entsprechend durch Iteration und Induktion (vgl. Ü4/7(?)A1+2) □

Satz 20

Sei $r \in \mathbb{N}$.

(a)

$$f \in AC_{2\pi}^{(r)} \Longrightarrow \left(f^{(r)}\right)^\wedge(k) = (ik)^r f^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{A}$$

(b) Sei $f \in X_{2\pi}$.

$$\exists g \in X_{2\pi} : (ik)^r f^\wedge(k) = g^\wedge(k) \implies f \in X_{2\pi}$$

$\triangleleft$

Beweis.

(a) Fall $r = 1$ (vgl. Beweis zu Satz 5): Zu $f \in AC^{(r)}_{2\pi}1 \Longrightarrow \exists g[= f'] \in L^1_{2\pi}, \alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = \alpha + \int_0^x g(u)\ du$ und $g^\wedge(0) = 0$ (vgl. Bem. nach Def. 10), also gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
(2\pi)(f')^\wedge(k) &= 2\pi g^\wedge(k) \\
&= \int_0^{2\pi} g(u)\ e^{-iku}\ du && \text{[Def. 10]} \\
&= \underbrace{[f(u)\ e^{-iku}]_0^{2\pi}}_{=0} + ik \int_0^{2\pi} f(u)\ e^{-iku}\ du \\
&= ik2\pi f^\wedge(k)
\end{aligned}$$

Für $r > 1$ Iteration und Induktion.

(b) Setze

$$\begin{aligned}
G_0(x) &:= g(x), \\
G_1(x) &:= \int_0^x \left[g(x_r) - g^\wedge(0)\right]\ dx_r && \text{[vgl. Ü6A4]} \\
G_2(x) &:= \int_0^x \left[G_1(x_{r-1}) - G_1^\wedge(0)\right]\ dx_{r-1} \\
&\vdots \\
G_r(x) &:= \int_0^x \left[G_{r-1}(x_1) - G_{r-1}^\wedge(0)\right]\ dx_1
\end{aligned}$$

$$G_{r-1}^\wedge(0) + \int_0^{x_1} dx_2 \left(-G_{r-2}^\wedge(0) + \cdots + \int_0^{x_{r-1}} dx_r\ (-g^\wedge(0) + g(x_r))\right)\Bigg)$$

Also (da $X_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$, vgl. Def. 20): $G_r \in AC^{(r)}_{2\pi}r$, falls gezeigt wird: G_r ist 2π-periodisch. Dazu:

Da g 2π-periodisch:

$$\begin{aligned}
G_1(x + 2\pi) - G_1(x) &= \int_x^{x+2\pi} g(x_r)\ dx_r - 2\pi g^\wedge(0) \\
&= \int_0^{2\pi} g(x_r)\ dx_r - 2\pi g^\wedge(0) && \text{[Ü1A5]} \\
&= 0 && \text{[Def. 10]}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ G_1 2π-periodisch

Ebenso folgert man, daß $G_2, G_3, G_4, \ldots$ 2π-periodisch sind. Also: $G_r \in AC^{(r)}_{2\pi}r$ und $G_r^{(r)} = g(x) - g^\wedge(0)$ fast überall. Somit gilt für alle $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$:

$$(ik)^r f^\wedge(k) = g^\wedge(k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(G_r^{(r)} + g^\wedge(0)\right)^\wedge(k) \\
&= \left(G_r^{(r)}\right)^\wedge(k) && [k \neq 0] \\
&= (ik)^r G_r^\wedge(k) && [\text{(a)}] \\
\Longrightarrow\quad & (f - G_r)^\wedge(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\
\Longrightarrow\quad & f(x) = G_r(x) + (f^\wedge(0) - G_r^\wedge(0)) \qquad \text{f.ü.} && [\text{Satz 6d}] \\
\Longrightarrow\quad & f \in X_{2\pi}^{(r)}
\end{aligned}
$$

□

Folgerung 17 (Fourier-analytische Beschreibung der Sobolev-Räume)

Für $r \in \mathbb{N}$ und $f \in X_{2\pi}$:

$$f \in X_{2\pi} \Longleftrightarrow \exists g \in X_{2\pi} : (ik)^r f^\wedge(k) = g^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{A}$$

◁

Beweis. Satz 20+Def. 20 □

Satz 21

Für $f \in L_{2\pi}^1$ und

$$F(x) := \int_0^x f(u)\ du$$

gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$F(x) = f^\wedge(0)\ x + \alpha + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{ik} f^\wedge(k) e^{ikx},$$

wobei die Reihe auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Die Reihe darf gliedweise integriert werden:

$$\int_a^b f(x)\ dx = f^\wedge(0)(b-a) + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} f^\wedge(k) \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

◁

Beweis. Sei

$$G(x) := F(x) - f^\wedge(0)x := \int_0^x \big(f(u) - f^\wedge(0)\big) du$$

Dann ist $G \in AC_{2\pi}^{(1)}$, da 2π-periodisch, denn:

$$
\begin{aligned}
G(x+2\pi) - G(x) &= \int_x^{x+2\pi} f(u)\ du - f^\wedge(0) 2\pi = 0 \\
\Longrightarrow\quad G^\wedge(k) &= \frac{1}{ik}\big(f - f^\wedge(0)\big)^\wedge(k) \\
&= \frac{1}{ik} f^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \quad G(x) \sim G^\wedge(0) \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{ik} f^\wedge(k) e^{ikx}$$

Da $G \in AC^{(r)}_{2\pi} 1 \Longrightarrow G \in \mathrm{BV}[a,b]$ für jedes kompakte Intervall $[a,b] \in \mathbb{R}$, denn:

Sei $Z = (x_0, \ldots, x_m) \in J[a,b]$ beliebige Zerlegung

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} |F(x_k) - F(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(u)\ du \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(u)| du \\
&= \sum_{0}^{t} |f(u)| du < \infty \\
\Longrightarrow \qquad F &\in \mathrm{BV}[a,b] \\
\Longrightarrow \qquad G &\in \mathrm{BV}[a,b]
\end{aligned}$$

Also ist $G \in C[a,b] \cap \mathrm{BV}[a,b]$, damit konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen G (Ü5A3, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ beliebig), d.h.

$$F(x) - f^\wedge(0)x = G^\wedge(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{ik} f^\wedge(k) e^{ikx} \qquad \text{gleichmäßig } \forall x \in \mathbb{R}$$

Θ^1, da gleichmäßig auf z.B. $[-2\pi, 2\pi]$ und 2π-Periodizität.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ dx &= \int_0^b f(x)\ dx - \int_0^a f(x)\ dx \\
&= F(b) - F(a) \\
&= f^\wedge(0)b - f^\wedge(0)a + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{ik} f^\wedge(k)(e^{ikb} - e^{ika}) \\
&= f^\wedge(0)(b-a) + \sum k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} f^\wedge(k) \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}
\end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$

II.a Definition und elementare Eigenschaften

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

$$e^{iuv} = e^{i\sum_{k=1}^{n} u_k v_k}$$

Funktionen: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$; komplexwertig mit n reellen Variablen. Raum stetiger Funktionen:

$$C(\mathbb{R}^n) := \{f : f \text{ auf } \mathbb{R}^n \text{ stetig}\}$$

$$C_B(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) : f \text{ beschränkt}\}$$

Insbesondere:

$$C_B \subset L^\infty$$

Norm:

$$\|f\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

$$C_0(\mathbb{R}^n) := C_0 := \left\{ f \in C_B(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x| \longrightarrow \infty} f(x) = 0 \right\}$$

wobei:

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} \iff \forall \epsilon > 0 \exists M < \infty \forall |x| \geq M : |f(x)| \leq \epsilon$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1+x^2}, e^{-x^2} \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

Inklusionen:

$$C_0 \subset C_B \subset C$$

Beachte:

$$f \in C_0 \Longrightarrow f \text{ gleichmäßig stetig auf } \mathbb{R}^n$$

C_B und C_0 sind unter $\|\cdot\|_C$ Banach-Räume.

Beachte: Da $m(\mathbb{R}^n) = \infty$: *Keine* Inklusionen zwischen den Räumen $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ (siehe Ü8A2, vgl. L20). Problem: Keine einheitliche Fourier-Theorie in diesem Räumen. Zunächst: $p = 1$

Definition 1 ($L^1(\mathbb{R}^n)$-Fourier-Transformation)

(vgl. Def I.10) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die *n-dimensionale Fourier-Transformation* definiert durch

$$\mathcal{F}^{(1)}[f](v) := \mathcal{F}[f](v) := f^\wedge(v) := \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\ e^{-ivu}\ du$$

◁

Satz 1

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann ist die Fourier-Transformierte $f^\wedge(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ wohldefiniert und hat die Abbildungseigenschaften

(a) Linearität:

$$[\alpha f + \beta g]^\wedge(v) = \alpha f^\wedge(v) + \beta g^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

(b) Beschränktheit:

$$|f^\wedge(v)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(c) Riemann-Lebesgue-Lemma:

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} f^\wedge(v) = 0$$

Es gilt sogar die Abschätzung ($v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

$$\begin{aligned} |f^\wedge(v)| &\leq \frac{1}{2}\,\omega(\frac{\pi}{|v|}; f; L^1(\mathbb{R}^n)) \\ &:= \frac{1}{2} \underbrace{\sup_{|h| \leq \frac{\pi}{|v|}} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}_{\text{erster (radialer) } L^1(\mathbb{R}^n)\text{-Stetigkeitsmodul von } f} \end{aligned}$$

(d) Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist ein linear beschränkter Operator von $L^1(\mathbb{R}^n)$ *in* $C_0(\mathbb{R}^n)$

◁

Beweis.

(a)+(b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $f^\wedge(v)$ ist wohldefiniert $\forall v \in \mathbb{R}^n$, und

$$|f^\wedge(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longrightarrow \quad \|f^\wedge\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \text{und} \quad (L^1(\mathbb{R}^n))^\wedge \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Zeige weiter: $f^\wedge \in C_B$ und gleichmäßig stetig, dazu: Für beliebige $v, h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |f^\wedge(v+h) - f^\wedge(v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-ivu}(e^{-iku} - 1)\ du \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(u)|\,|e^{-iku} - 1|}_{=: g_h(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)}\ du \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{h \longrightarrow 0} g_h(u) \;=\; 0 \quad \text{f.ü.}$$

$$|g_h(u)| \;\leq\; 2|f(u)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

(Majorante unabhängig von h!)

$$\Longrightarrow \quad \limsup_{h \longrightarrow 0} |f^\wedge(v+h) - f^\wedge(v)| \;\leq\; \lim_{h \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_h(u)\; du$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{h \longrightarrow 0} g_h(u))\; du \;=\; 0 \qquad \text{[L25]}$$

$$\Longrightarrow \quad f^\wedge \in C_B(\mathbb{R}^n) \text{ und gleichmäßig stetig für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

(c) Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ beliebig fest.

$$\Longrightarrow \quad f^\wedge(v) \;=\; -\int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(vu-\pi)}\; du$$

$$= \; -\int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i|v|(\frac{v}{|v|}u - \frac{\pi}{|v|})}\; du$$

$$\Longrightarrow \qquad -\int_{\mathbb{R}^n} f(y + \frac{\pi}{|v|^2} v) e^{-i|v|(\frac{v}{|v|}y + \frac{\pi}{|v|^3}v^2 - \frac{\pi}{|v|})}\; dy$$

$$= \; -\int_{\mathbb{R}^n} f(y + \frac{\pi}{|v|^2} v) e^{-ivy}\; dy \qquad [u = y + \tfrac{\pi}{|v|}v, \text{ L12}]$$

$$\Longrightarrow \quad 2^\wedge(v) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - f(u + \frac{\pi}{|v|^2} v)) e^{-ivu}\; du \qquad \forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longrightarrow \quad |f^\wedge(v)| \;\leq\; \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(u) - f(u + \underbrace{\frac{\pi}{|v|^2} v}_{h}) \right| du$$

$$\leq \; \frac{1}{2} \sup_{|h| \leq \frac{\pi}{|v|}} \|f(u+h) - f(u)\|_1$$

Wegen L18 (Stetigkeit im Mittel):

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \omega(t; f; L^1(\mathbb{R}^n)) \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{|v| \longrightarrow \infty} f^\wedge(v) \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \quad f^\wedge \;\in\; C_0(\mathbb{R}^n)$$

(d) Wegen (a)-(c): $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ linear beschränkt.

□

Insbesondere: $(L^1(\mathbb{R}^n))^\wedge \subsetneq C_0(\mathbb{R}^n)$ ($\neq$ wegen Ü8A3).

Bemerkung
Darstellungsproblem: Charakterisiere die Funktionen $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\exists f \in L^1(\mathbb{R}^n) : g(x) = f^\wedge(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lemma 1

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$. Dann gilt (vgl. Lemma I.7)

(a)

$$[f(x+h)]^\wedge(v) = e^{ikv} f^\wedge(v) \qquad \forall v, h \in \mathbb{R}^n$$

Für jedes $v \in \mathbb{R}$ sei der *Charakter* e_v definiert als die Funktion $e_v(x) := e^{ivx}$.

$$(\tau_h f)^\wedge = e_h f^\wedge$$

(b)

$$[e^{-ihx} f(x)]^\wedge(v) = f^\wedge(v+h) \qquad \forall v, h \in \mathbb{R}^n$$
$$(e_{-h} f)^\wedge = \tau_h f^\wedge \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

(c)

$$[\overline{f}(-x)]^\wedge(v) = \overline{f^\wedge(v)}$$

(d)

$$[f(-x)]^\wedge(v) = f^\wedge(-v)$$

f heißt *symmetrisch*, falls $f(x) = f(-x) =: f^*(x)$ fast überall. Also:

$$(f^*)^\wedge = (f^\wedge)^*$$

und

$$f \text{ ist symmetrisch} \Longrightarrow f^\wedge \text{ ist symmetrisch}$$

(e)

$$[\rho^n f(\rho x)]^\wedge(v) = f^\wedge\left(\frac{v}{\rho}\right) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \rho > 0$$

(f) f heißt *zerfallend*, falls f die Darstellung

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

mit eindimensionalen Funktionen

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

hat. Für zerfallendes f gilt

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow f_k \in L^1(\mathbb{R}),$$
$$f \text{ zerfallend} \Longleftrightarrow f^\wedge \text{ zerfallend},$$

insbesondere

$$f^\wedge(v) = \prod_{k=1}^{m} f_k^\wedge(v_k),$$

also

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)^\wedge = \prod_{k=1}^{n} f_k^\wedge$$

(g) f heißt *radial*, falls eine auf $0 \le r < \infty$ definierte Funktion $\phi(r)$ existiert mit

$$f(x) = \phi(|x|) \qquad \text{f.ü.}$$

Beachte:

$$n = 1 \Longrightarrow (symmetrisch \Longleftrightarrow radial \Longleftrightarrow gerade)$$

$$n > 1 \Longrightarrow (radial \not\Longleftarrow symmetrisch)$$

$$f \text{ radial} \Longrightarrow f^\wedge \text{ radial}$$

insbesondere (wg. Folgerung II.7)

$$f^\wedge(v) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\ e^{-i|v|u_1}\ du$$

◁

Beweis. Ü8A1 □

Definition 2

Die Faltung zweier auf $\mathbb{R}^n$ meßbarer Funktionen f, g ist definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\ g(u)\ du,$$

falls existent (vgl. Def. I.13) ◁

Satz 2

(a) Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\Longrightarrow (f * g)(x) \text{ existiert fast überall}$$

(als ein absolut konvergentes Integral),

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$$

(b) Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$. Dann gilt

$$(f * g) \text{ existiert für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$f * g \in \mathbb{C}_B(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\|f * g\|_C \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Für $1 < p < \infty$ gilt sogar

$$f * g \in C_0(\mathbb{R}^n),$$

dies gilt auch für $p = 1$, falls $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

◁

Beweis.

(a) Analog zum Beweis von Satz I.7 (sofort für L^p) und I.8(a)

(b) Ebenfalls analog; zeige weiter

$$f * g \in C_0$$

für $1 < p < \infty$. Dazu: Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p \, du \; < \; \infty$$

$$\text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |g(u)|^{p'} \, du \; < \; \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \exists M < \infty : \int_{|u| \geq M} |f(u)|^p \, du \; \leq \; \epsilon^p$$

$$\int_{|u| \geq M} |g(u)|^{p'} \, du \; \leq \; \epsilon^{p'}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$.

$$|x| \; \geq \; 2M$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{S(x,M)} := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq M\} \; \subset \; \complement_{\mathbb{R}^n} S(0,M) \qquad \text{[Skript L]}$$

$$\Longrightarrow \quad |(f*g)(x)| \; \leq \; \left(\int_{|u|<M} + \int_{|u| \geq M} \right) |f(x-u)| \; |g(u)| \; du$$

$$\leq \; \left(\int_{|u|<M} |f(x-u)|^p du \right)^{1/p} \underbrace{\left(\int_{|u|<M} |g(u)|^{p'} du \right)^{1/p'}}_{\leq \|g\|_{p'}} \qquad \text{[L19]}$$

$$+ \underbrace{\left(\int_{|u| \geq M} |f(x-u)|^p du \right)^{1/p}}_{\leq \|f\|_p} \left(\int_{|u| \geq M} |g(u)|^{p'} du \right)^{1/p'}$$

$$\leq \; \left(\int_{S(x,M)} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \|g\|_{p'} + \|f\|_p \cdot \epsilon$$

$$\leq \; \left(\int_{|v| \geq M} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \|g\|_{p'} + \|f\|_p \cdot \epsilon$$

$$\leq \; (\|g\|_{p'} + \|f\|_p) \cdot \epsilon \qquad \forall |x| \geq 2M$$

$$\Longrightarrow \quad f * g \; \in \; C_0$$

Analog für $p = 1$, falls zusätzlich $g \in C_0$.

□

Folgerung 1

(vgl. Lemma I.9) $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist mit der Faltung als Produkt eine kommutative Banach-Algebra (Folgerung 8: ohne Eins) (Def. I.14) ◁

Beweis. L17 und Satz 2(a) für $p = 1$ sowie L22. □

Satz 3 (Faltungssatz)

(vgl. Satz I.9) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(f * g)^\wedge(v) = f^\wedge(v) g^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

◁

Beweis. Voraussetzung und Satz 2(a)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad f * g \ \in \ L^1(\mathbb{R}^n) \\
&\Longrightarrow \quad \underbrace{(f * g)^\wedge(v)}_{\text{wohldef.: Def. 1}} \ := \ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) g(u) \, du \right) e^{-ivx} \, dx \\
&\qquad\qquad = \ \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) e^{-iv(x-u)} \, dx \right)}_{= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ivy} \, dy = f^\wedge(v)} g(u) e^{-ivu} \qquad \text{[L22b]} \\
&\qquad\qquad = \ f^\wedge(v) \int_{\mathbb{R}^n} g(u) e^{-ivu} \, du \\
&\qquad\qquad = \ f^\wedge(v) g^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

□

Satz 4 (Parseval-Formel)

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v) \ g(v) \ dv = \int_{\mathbb{R}^n} f(v) \ g^\wedge(v) \ dv$$

◁

Beweis. Da $f, g \in L^1$, sind nach Satz 1 $f^\wedge, g^\wedge \in C^\infty$, insbesondere nach Satz 1(b):

$$|f^\wedge(v) g(v)| \le \|f\|_1 \, |g(v)| \ \in \ L^1$$
$$|f(v) g^\wedge(v)| \le \|g\|_1 \, |f(v)| \ \in \ L^1$$

(also beide Integrale wohldefiniert)

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v) g^\wedge(v) \ dv \ &:= \ \int \left(\int f(u) e^{-ivu} \, du \right) g(v) \ dv \\
&= \ \int \left(\int g(v) e^{-ivu} \, du \right) f(u) \ du \qquad \text{[L22]}
\end{aligned}$$

$$= \int g^\wedge(u) f(u)\ du$$

□

II.b Singuläre Integrale und Umkehrformeln

Umkehrproblem: Bisher

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f^\wedge \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

Jetzt: Rekonstruktion von f aus $f^\wedge$. Dazu: Sei $n = 1$: Motivation der Umkehrformel für die Fourier-Transformation als Grenzfall von Fourier-Reihen (und entsprechend der Fourier-Transformation als Analogon von Fourier-Reihen). Sei $f \in L^1[-\pi\lambda, \pi\lambda]$ $2\pi\lambda$-periodisch für ein $\lambda > 0$. Dann ist $g(x) := f(\lambda x)$ 2π-periodisch, d.h. $g \in L^1_{2\pi}$

$$\Longrightarrow \quad g^\wedge(k) \ := \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda x) d^{-ikx}\ dx \qquad \text{[Def. I 10]}$$

$$\overset{\lambda x = u}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(u) e^{-ik\frac{u}{\lambda}}\ du}_{\text{Fourier-Koeffizienten von } f \text{ (vgl. Ü4A3(c))}} \qquad =: f^\wedge(k)$$

Annahme: g und damit f werde durch Fourier-Reihe dargestellt, das heißt:

$$\begin{aligned} f(x) \ &= \ g(\frac{x}{\lambda}) \\ &= \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} g^\wedge(k) e^{ik\frac{x}{\lambda}} \\ &= \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^\wedge(k) e^{ik\frac{x}{\lambda}} \\ &= \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\frac{x}{\lambda}}}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(u) e^{-ik\frac{u}{\lambda}}\ du \\ &= \ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ix\frac{k}{\lambda}} \left(\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(u) e^{-i\frac{k}{\lambda}u}\ du\right)\left(\frac{k+1}{\lambda} - \frac{k}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Setze

$$h_{\lambda,x} = h(v) \ := \ e^{ixv}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(u) e^{-ivu}\ du$$

und $v_k := \frac{k}{\lambda}$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(v_k)(v_{k+1} - v_k)}_{(*)}$$

(*): Formal für $(v_{k+1} - v_k) \longrightarrow 0$, d.h. $\lambda \longrightarrow \infty$, "Riemann-Summe" für $\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\ du$. Für $\lambda \longrightarrow \infty$ formal aber auch:

(i) $f \in L^1[-\pi\lambda, \pi\lambda]$ 2π-periodisch $\Longrightarrow$ $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} h(v) \;&\longrightarrow\; e^{ixv}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ivu}\;du\right) \\ &=\quad e^{ixv}\mathcal{F}^{(1)}[f](v) && \text{[Def. 1]} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \;=\; \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{(1)}[f](v)e^{ixv}\;dv}_{(**)} \qquad \text{[formal (für } \lambda \longrightarrow \infty)]$$

(ii) (**): Kandidat für eine Fourier-Umkehrtransformation.

Also: Vergleich

	Kapitel I	Kapitel II
Fourier-Koeffizienten:	$f^\wedge(k),\ k \in \mathbb{Z}$	$f^\wedge(v),\ v \in \mathbb{R}$
Fourier-Reihe:	$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^\wedge(k)e^{ikx}$	$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(v)e^{ixv}\;dv$
Partialsummen:	$\sum_{k=-m}^{m} f^\wedge(k)e^{ikx}$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\rho}^{\rho} \underbrace{f^\wedge(v)e^{ixv}}_{\in C[-\rho,\rho]\ \forall \rho>0}\;dv$

Problem: Genauere Interpretation des Kandidaten, denn: $f^\wedge(v) \in C_0$ (nur), aber i.a. $f^\wedge \notin L^1(\mathbb{R})$ (z.B. Ü8A4).

Dazu betrachte wieder θ-Mittel des Kandidaten, insbesondere in der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\theta(\frac{v}{\rho})}_{\longrightarrow 1} f^\wedge(v)e^{ixv}\;dv$$

Problem: $\longrightarrow f(x)$ in welchem Sinne? Dazu:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\frac{v}{\rho})f^\wedge e^{ixv}\;dv \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\frac{v}{\rho})(f(\cdot+x))^\wedge(v)\;dv && \text{[Lemma 1(a)]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\theta(\frac{\cdot}{\rho}))^\wedge(v)f(v+x)\;dv && \text{[Satz 4]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+v)\rho\theta^\wedge(\rho v)dv && \text{[Lemma 1(e)]} \\ &= \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)(\rho\theta^\wedge(\rho u))\;du}_{\text{Def. 2: Faltung mit Kern } (\rho\theta^\wedge(\rho u))_{\rho>0}} && \text{[Lemma 1(d), falls } \theta \text{ gerade]} \end{aligned}$$

Definition 3 (Kerne und singuläre Integrale vom Fejérschen Typ)

Für $\rho > 0$ und $\chi \in NL^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$NL^1(\mathbb{R}^n) := \left\{\chi \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \chi(u)\;du = 1\right\}$$

heißt

$$\{\rho^n\chi(\rho u)\}_{\rho>0}$$

Kern vom Fejérschen Typ. Entsprechend (vgl. Def. I.17) ist

$$J(f;x;\rho) := \rho^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\ \chi(\rho u)\ du = (f * \chi_\rho)(x)$$

für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ ein *singuläres Integral vom Fejér-(de la Valleé Poussin-)Typ* ◁ ◁

Lemma 2

Sei $\chi \in NL^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) $\{\rho^n \chi(\rho u)\}_{\rho>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ ist approximierende Identität in dem Sinne, daß (vgl. Def. I.16/18)

(1) Kern-Eigenschaft:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho^n \chi(\rho u)\ du = 1 \qquad \forall \rho > 0$$

(2)

$$\|\rho^n \chi(\rho u)\|_1 \le M \qquad \forall \rho > 0$$

(3)

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_{\delta \le |u|} |\rho^n \chi(\rho(u)|\ du = 0 \qquad \forall \rho > 0$$

(b) Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ und $\rho > 0$ existiert das singuläre Integral $J(f;x;\rho)$ für alle ($p = \infty$, insbesondere für $f \in \mathbb{C}_B(\mathbb{R}^n)$) bzw. fast alle ($p < \infty$) $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt

$$J(f;x;\rho) \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

mit

$$\|J(f;x;\rho)\|_p \le \|\chi\|_1 \|f\|_p \qquad \text{gleichgradig in } \rho > 0$$

◁

Beweis.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho^n \chi(\rho u))\ du \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \chi(u)\ du = 1 \qquad [\text{L12}, \chi \in NL^1(\mathbb{R}^n)]$$

(a) (i)

$$\|\rho^n \chi(\rho u)\|_1 \|\chi\|_1 \ =: \ M$$

(ii)

$$\int_{\delta \le |u|} |\rho^n \chi \rho u|\ du \ = \ \int_{\delta\rho \le |x|} |\chi(x)|\ dx$$

(iii)

(b) Satz 2(a)+(b)

□

Satz 5

Sei $\chi \in NL^1(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \|J(f;x;\rho) - f(x)\|_p = 0 \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

◁

Beweis. Entsprechend dem von Satz I.17. □

Lemma 3

Sei χ radial mit $\chi(x) = \kappa(|x|)$ fast überall. Dann gilt

$$\chi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow r^{n-1}\kappa(r) \in L^1[0,\infty]$$

In diesem Fall ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\ dx = \omega_n \int_0^\infty \kappa(r)\ r^{n-1}\ dr$$

wobei ω_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist (vgl. Skript L)

$$\omega_n := \int_{|u|=1} d\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

◁

Beweis. L12+Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\chi(x)|dx &= \int_0^\infty \int_{|u|=1} |\chi(ru)|r^{n-1}\ dr\ d\omega \\ &= \int_0^\infty |\kappa(r)|r^{n-1}\ dr \int_{|u|=1} d\omega \end{aligned}$$

□

Satz 6

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\chi \in NL^1(\mathbb{R}^n)$ und $\{J(f;x;\rho)\}_{\rho>0}$ das zugehörige Integral vom Fejérschen Typ. Weiterhin sei χ radial, das heißt

$$\chi(x) = \kappa(|x|) \qquad \text{f.ü.},$$

dazu positiv ($\chi(x) \geq 0$ fast überall, also auch $\kappa(r) \geq 0$) und $\kappa(r)$ monoton fallend für $r \in [0,\infty]$. Dann gilt

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} J(f;x;\rho) = f(x)$$

(a) in jeder Stetigkeitsstelle von f (vgl. Ü6A2)

(b) in jedem D-Punkt von f

◁

Beweis. Zunächst:

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} r^n\kappa(r) \;=\; 0 \tag{2.1}$$

denn:

$$\begin{aligned}\int_{2^{-n/2}r}^{r} t^{n-1}\kappa(t)\;dt \;&\geq\; \kappa(r)\int_{2^{-n/2}r}^{r} t^{n-1}dt && [\kappa\searrow]\\ &=\; \frac{\kappa(r)}{n}(r^n-\frac{r^n}{2})\\ &=\; \frac{1}{2n}r^n\kappa(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\chi \;\in\; L^1(\mathbb{R}^n)\\ \Longrightarrow\quad & t^{n-1}\kappa(t) \;\in\; L^1[0,\infty]\\ \Longrightarrow\quad & \lim_{r\longrightarrow\infty}\int_{2^{-n/2}r}^{r} t^{n-1}\kappa(t)\;dt \;=\; 0\end{aligned}$$

also (2.1)

Da $\chi\in NL^1(\mathbb{R}^n)$ radial ist, ist es insbesondere symmetrisch, und es gilt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega_n}(J(f;x;\rho)-f(x))\\ =\quad & \frac{\rho^n}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n}(f(x+y)-f(x))\chi(\rho y)\;dy && [(2.1)]\\ \overset{y=ru}{=}\quad & \rho^n\int_0^\infty \kappa(\rho r)r^{n-1}\left(\frac{1}{\omega_n}\int_{|u|=1}(f(x+ru)-f(x))\;d\omega\right)\;dr\\ =\quad & \rho^n\left(\int_0^\delta+\int_\delta^\infty\right)\kappa(\rho r)g(x,r)\;dr\\ =:\quad & I_1+I_2 && [\text{Polarkoord.+Lemma 3}]\quad (2.2)\end{aligned}$$

für ein noch unbestimmtes $\delta>0$.

(a) Sei $x\in\mathbb{R}^n$ Stetigkeitspunkt von f, das heißt

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0\;\exists\delta>0:|f(x+y)-f(x)| \;\leq\; \epsilon \qquad \forall|y|\leq\delta\\ \Longrightarrow\quad & |g(x,r)| \;\leq\; \frac{r^{n-1}}{\omega_n}\int_{|u|=1}|f(x+ru)-f(x)|\;d\omega\\ &\qquad\leq\; \epsilon r^{n-1} \qquad \forall 0\leq|ru|=r\leq\delta\end{aligned}$$

Mit diesem $\delta=\delta(\epsilon,x)$ gilt:

$$\begin{aligned}|I_1| \;\leq\quad & \epsilon\rho^n\int_0^\delta r^{n-1}\kappa(\rho r)\;dr && [\kappa\text{ positiv}]\\ \overset{\rho r=t}{=}\quad & \epsilon\int_0^{\delta\rho} t^{n-1}\kappa(t)\;dt\\ \leq\quad & \epsilon\int_0^\infty t^{n-1}\kappa(t)\;dt\\ =\quad & \frac{\epsilon}{\omega_n} \qquad \forall\rho>0\end{aligned}$$

da $\chi \in NL^1(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Lemma 3).

Allgemein, also insbesondere in den Fällen (a) und (b), gilt für I_2:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \rho^n \int_\delta^\infty \kappa(\rho r) r^{n-1} \Big(\frac{1}{\omega_n} \int_{|u|=1} |f(x+ru)|d\omega + |f(x)|\Big) dr \\ &= I_2^{(1)} + I_2^{(2)} \qquad (2.3) \\ I_2^{(2)} &= |f(x)| \rho^n \int_\delta^\infty r^{n-1} \kappa(\rho r) dr \\ &\overset{\rho r = t}{=} |f(x)| \int_{\delta\rho}^\infty t^{n-1} \kappa(t) dt \\ &\leq \epsilon |f(x)| \qquad \forall \rho \geq \rho_1 \end{aligned}$$

da $t^{n-1}\kappa(t) \in L^1[0,\infty]$

Zur Abschätzung von $I_2^{(1)}$ Fallunterscheidung: $p=1$, $p=\infty$, $1<p<\infty$:

$$\begin{aligned} I_2^{(1)} &\leq \rho^n \kappa(\rho\delta) \frac{1}{\omega_n} \int_\delta^\infty r^{n-1} dr \int_{|u|=1} |f(x+ru)| du \qquad [(2.3)] \\ &\leq \frac{(\delta\rho)^n \kappa(\delta\rho)}{\delta^n \omega_n} \underbrace{\int_0^\infty \int_{|u|=1} |f(x+ru)| r^{n-1} dr d\omega}_{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y)| dy = \|f\|_1} \\ &= \frac{\|f\|_1}{\delta^n \omega_n} (\delta\rho)^n \kappa(\delta\rho) \\ &\leq \epsilon \frac{\|f\|_1}{\omega_n} \qquad \forall \rho \geq \rho_0, \end{aligned}$$

$p=1$ da wegen (2.1) $(\delta\rho)^n \chi(\delta\rho) \longrightarrow 0$ ($\rho \longrightarrow \infty$, δ fest). Also:

$$(\delta\rho)^n \kappa(\delta\rho) \leq \epsilon \delta^n \qquad \forall \rho \geq \rho_0$$

(beachte: ϵ und δ fest)

$$\begin{aligned} I_2^{(1)} &:= \frac{\rho^n}{\omega_n} \int_\delta^\infty \Big(\int_{|u|=1} |f(x+ru)| du \Big) \kappa(\rho r) r^{n-1} dr \qquad [(2.2)] \\ &\overset{\rho r = t}{\leq} \|f\|_\infty \int_{\rho\delta}^\infty \kappa(t) t^{n-1} dt \\ &\leq \epsilon \|f\|_\infty \qquad \forall \rho \geq \rho_1 \end{aligned}$$

$p=\infty$

$1<p<\infty$ Hölder:

$$\int_{|u|=1} |f(x+ru)| d\omega \leq \Big(\int_{|u|=1} |f(x+ru)|^p d\omega \Big)^{1/p} \underbrace{\Big(\int_{|u|=1} 1 d\omega \Big)^{1/p'}}_{= \omega_n^{1/p'}} \qquad (2.4)$$

$$\begin{aligned} I_2^{(1)} &:= \frac{\rho^n}{\omega_n} \int_\delta^\infty \Big(\int_{|u|=1} |f(x+ru)| \, d\omega \Big) (\kappa(\rho r) r^{n-1})^{1/p + 1/p'} \, dr \\ &\leq \Big(\frac{\rho^n}{\omega_n} \int_\delta^\infty \Big(\int_{|u|=1} |f(x+ru)| \, d\omega \Big)^p \kappa(\rho r) r^{n-1} \Big) \Big(\frac{\rho^n}{\omega_n} \int_\delta^\infty \kappa(\rho r) r^{n-1} \, dr \Big)^{1/p'} \qquad [\text{L}19] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n}\Big(\int_{\delta\rho}^{\infty}\kappa(t)t^{n-1}\,dt\Big)^{1/p'}\Big(\frac{\rho^n}{\omega_n}\int_{\delta\rho}^{\infty}\big(\omega^{p/p'}\int_{|u|=1}|f(x+ru)|^p\,d\omega\big)\kappa(\rho r)r^{n-1}\,dr\Big)^{1/p} \qquad [(2.4)]$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n^{1/p}}\Big(\int_{\delta\rho}^{\infty}\kappa(t)t^{n-1}\,dt\Big)^{1/p'}\Big(\frac{(\rho\delta)^n\kappa(\delta\rho)}{\delta^n}\int_{\delta}^{\infty}\int_{|u|=1}|f(x+ru)|^p r^{n-1}\,dr\,d\omega\Big) \qquad [\kappa\searrow]$$

$$\leq \underbrace{\int_0^{\infty}\int_{|u|=1}|f(x+ru)|^p r^{n-1}\,dr\,d\omega}_{=\|f\|_p^p}$$

$$= \frac{\|f\|_p}{(\omega_n\delta^n)^{1/p}}\underbrace{\Big(\underbrace{\int_{\delta\rho}^{\infty}\kappa(t)t^{n-1}dt\Big)^{1/p'}}_{\leq\epsilon\ \forall\rho\geq\rho_1}\underbrace{((\delta\rho)^n\kappa(\delta\rho))^{1/p}}_{\leq\epsilon\delta^n\ \forall\rho\geq\rho_0}}_{\leq\epsilon\delta^{n/p}\ \forall\rho\geq\max\{\rho_1,\rho_0\}}$$

$$\Longrightarrow \quad |J(f;x;\rho)-f(x)| \leq \omega_n(|I_1|+I_2^{(1)}+I_2^{(2)})$$
$$\leq \epsilon(1+\omega_n|f(x)|+\omega_n^{1/p'}\|f\|_p) \qquad \forall\rho\geq\max\{\rho_0,\rho_1\}$$

(b) Sei $x\in\mathbb{R}^n$ D-Punkt von f (beliebig, fest), das heißt (vgl. Skript L):

$$\lim_{t\longrightarrow 0+}t^{-n}\int_{|y|\leq t}(f(x+y)-f(x))dy = 0$$

Da

$$\int_0^t g(xr)dr = \int_0^t\frac{r^{n-1}}{\omega_n}\Big(\int_{|u|=1}(f(x+ru)-f(x))d\omega\Big)dr$$
$$= \frac{1}{\omega_n}\int_0^t\int_{|u|=1}f(x+ur)r^{n-1}d\omega dr - f(x)\int_0^t r^{n-1}dr$$
$$= \int_{|u|leqt}f(x+y)dy$$
$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|\leq t}(f(x+y)-f(x))dy$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t\longrightarrow 0+}t^{-n}\int_0^t g(xr)dr = 0$$

in jedem D-Punkt von f. Setze

$$G(t) := \begin{cases}\int_0^t g(x,r)dr, & t>0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad |G(t)| \leq \epsilon t^n \qquad \forall 0\leq t\leq\delta$$

Mit der Darstellung (2.2) des Fehlers folgt:

$$I_1 := \rho^n\int_0^{\delta}\kappa(\rho r)G(x,r)dr$$
$$= \rho^n\int_0^{\delta}\kappa(\rho r)dG(r)$$
$$= \rho^n\left[\kappa(\rho r)G(r)\right]_0^{\delta}-\rho^n\int_0^{\delta}G(r)d_r(\kappa(\rho r)) \qquad [\text{part. Int.}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho^n \kappa(\rho\delta) G(\delta) + \rho^n \int_0^\delta G(r)\, d_r \underbrace{(-\kappa(\rho r))}_{\text{mon. wachsend}} \\
&=: I_1^{(1)} + I_1^{(2)} \\
\left|I_1^{(1)}\right| &\le \rho^n \kappa(\delta\rho)\epsilon\delta^n \\
&= \epsilon(\delta\rho)^n \kappa(\delta\rho) \\
\left|I_1^{(2)}\right| &= \rho^n \left| \int_0^\delta G(r)\, d_r(-\kappa(\rho r)) \right| \\
&\le \epsilon\rho^n \int_0^\delta r^n\, d_r(-\kappa(\rho r)) \\
&= \epsilon\rho^n ([-r^n\kappa(\rho r)]_0^\delta) + n\int_0^\delta r^{n-1}\kappa(\rho r)dr \\
&\overset{\rho r = t}{=} \epsilon(-(\delta\rho)^n\kappa(\delta\rho) + n\int_0^{\delta\rho} \kappa(t)t^{n-1}dt) \\
\Longrightarrow \quad |I_1| &\le \epsilon n \int_0^{\delta\rho} \kappa(t)t^{n-1}dt \\
&\le \epsilon n \int_0^\infty \kappa(t)t^{n-1}dt \\
&= \frac{n}{\omega_n}\epsilon \qquad \forall \rho > 0 \qquad \text{[Def. 3, Lemma 3]}
\end{aligned}
$$

Mit dem jetzigen ϵ, δ schätze I_2 genauso ab wie unter (a), dann folgt

$$|J(f;x;\rho)f(x)| \le \epsilon(n + \omega_n|f(x)| + \omega_n^{1/p'} \|f\|_p) \qquad \forall \rho \ge \max\{\rho_0, \rho_1\}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung.

□

Bemerkung

(1) Da jeder Stetigkeitspunkt von f auch D-Punkt ist, umfaßt (b) (a).

(2) Entsprechend zu Satz I.18 gilt auch hier ein Analogon zu Satz 6; falls χ (nur) eine radiale, positive, monoton fallende Majorante hat: Man hat dann Konvergenz in allen L-Punkten von f.

(3) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ D-Punkt von $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, d.h.:

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \frac{n}{a_n t^n} \int_{|\eta| \le t} [f(x+y) - f(x)]\, dy = 0$$

Sei $V_n(t)$ das Volumen der Kugel $\overline{S(0,t)}$, d.h.

$$V_n(t) := \int_{|x| \le t} dx = \int_0^t \left(\int_{|u|=1} d\omega \right) r^{n-1}\, dr$$

Dann gilt

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ D-Punkt von } f \Longleftrightarrow \lim_{t \longrightarrow 0+} \frac{1}{V_n(t)} \int_{|y| \leq t} f(x+y)\ dy = f(x) \qquad \text{vgl. Skript L}$$

Sei

$$m(x) := \begin{cases} \frac{n}{\omega_n} & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

$m \in NL^1(\mathbb{R}^n)$; das singuläre Integral $J(f;x;\rho)$ mit Kern $\{\rho^n m(\rho x)\}_{\rho>0}$ wird mit $M(f;x;\rho)$ bezeichnet und heißt das *sphärische Mittel* von f. M erfüllt die Voraussetzungen von Satz 6, und es gilt

$$\begin{aligned} M(f;x;\rho) &:= \rho^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) m(\rho u)\ du \\ &= \frac{n\rho^n}{\omega_n} \int_{|\rho u| \leq 1} f(x-u)\ du \\ &= \frac{1}{V_n\left(\frac{1}{\rho}\right)} \int_{|u| \leq \frac{1}{\rho}} f(x+u)\ du \end{aligned}$$

Also:

$$x \text{ ist D-Punkt von } f \Longleftrightarrow \lim_{\rho \longrightarrow \infty} M(f;x;\rho) = f(x)$$

d.h. Satz 6 ist ein *Vergleichssatz*:

Konvergiert für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ das *spezielle* singuläre Integral $M(f;x;\rho)$ gegen $f(x)$, so auch das *allgemeine* singuläre Integral $J(f;x;\rho)$, *falls* der Kern χ die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt.

Beispiel (Singuläres Integral von (Gauß-)Weierstraß)
Sei

$$w(x) := \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-x^2},$$

dann gilt (Ü8A5(a))

$$w\hat{}(v) = e^{-\frac{v^2}{4}},$$

insbesondere $w \in NL^1(\mathbb{R}^n)$. Sei $W(f;x;t)$ das singuläre Integral mit Kern $\{\rho^n w(\rho x)\}_{\rho>0}$ und Parameter $\rho = \frac{1}{2\sqrt{t}}$:

$$W(f;x;t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\ e^{-\frac{u^2}{4t}}\ du \qquad (t \longrightarrow 0+)$$

Der Parameter ρ ist so gewählt, daß $W(f;x;t)$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die eindeutige Lösung des folgenden *Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung* ist:

$$\Delta u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \| u(x,t) - \underbrace{f(x)}_{Anfangswert} \|_1 = 0$$

(vgl. Ü?A?).
Klar: w ist radial (*und* zerfallend) mit

$$\kappa(r) = \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-r^2} \text{ positiv und monoton fallend auf } 0 \leq r < \infty$$

Folgerung 2 (Eigenschaften des Gauß-Weierstraß-Kerns)

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ gilt:

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \|W(f;x;t) - f(x)\|_p = 0,$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} W(f;x;t) = f(x) \qquad \text{fast überall}$$

$\triangleleft$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$\mathcal{F}[f](v) := f^\wedge(v) := \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\ e^{-ivu}\ du$$

Kandidat für die Fourier-Umkehrtransformation:

$$f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv$$

Bezeichnung:

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) := g^\vee(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv,$$

falls existent (z.B.: $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Formal: $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f] = f$ bzw. $(f^\wedge)^\vee = f$.

Definition 4

Eine symmetrische Funktion $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt *Konvergenzfaktor*, falls

$$(2\pi)^{-n}\theta^\wedge \in NL^1(\mathbb{R}^n)$$

Für $\rho > 0$ und ein $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sind die θ-*Mittel* des *Fourier-Umkehrintegrals*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\ e^{ikv}\ dv$$

definiert durch

$$U(f;x;\rho) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{v}{\rho}\right) f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv$$

$\triangleleft$

Folgerung 3

(vgl. Folgerung I.16): Für einen beliebigen θ-Faktor gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $(\rho > 0)$

$$U(f;x;\rho) \text{ existiert für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$U(f;x;\rho) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n),$$

$$\|U(f;x;\rho)\|_1 \leq \|\theta^\wedge\|_1 \|f\|_1 \qquad \forall \rho > 0$$

Das Fourier-Umkehrintegral ist θ-summierbar (gegen f) in dem Sinne, daß

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{v}{\rho}\right) f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv - f(x) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0 \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Gilt für den θ-Faktor darüberhinaus, daß $\theta^\wedge$ radial ist mit $\theta^\wedge(v) = \eta(|v|)$ und η positiv und monoton fallend auf $[0,\infty]$, dann ist das Fourier-Umkehrintegral auch θ-summierbar in dem Sinne, daß für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{v}{\rho}\right) f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv = f(x) \qquad \text{fast überall}$$

◁

Beispiel (W)

$$\theta(v) := e^{-\frac{v^2}{4}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

ist symmetrisch, also (Ü8A5(a))

$$(2\pi)^{-n}\theta^\wedge(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-x^2} = w(x) \in NL^1(\mathbb{R}^n)$$

$\Longrightarrow$ (Gauß-)Weierstraß-Mittel des Fourier-Umkehrintegrals für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} U(f;x;\rho) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv \\ &= \frac{\rho^n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\ e^{-(\rho u)^2}\ du \\ &\overset{\rho=\frac{1}{2\sqrt{t}}}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\ e^{-\frac{u^2}{4t}}\ du \\ &= w(f;x;t) \end{aligned}$$

Also (Folgerung 2 für $p = 1$):

Folgerung 4

Das Fourier-Umkehrintegral von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist (Gauß-)Weierstraß-summierbar gegen $f(x)$ sowohl in der L^1-Norm als auch punktweise fast überall, d.h. für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gelten die *Umkehrformeln*

$$\lim_{\rho\longrightarrow\infty}\left\| f(x) - \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv\right\|_1 = 0$$

$$\lim_{\rho\longrightarrow\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv = f(x) \qquad \text{fast überall}$$

◁

Folgerung 5

(vgl. Lemma I.10(c)) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sodaß $f^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv \qquad \text{f.ü.},$$

insbesondere in den Stetigkeitspunkten x von f. ◁

Beweis. Folgerung 4 (bzw. Satz 6(a))

$$\Longrightarrow\quad f(x) = \lim_{\rho\longrightarrow\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v) e^{ixv} dv \quad \text{f.ü.},$$

insbesondere in allen Stetigkeitspunkten von f. Weiterhin:

$$\lim_{\rho\longrightarrow\infty} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v) e^{ixv} = f^\wedge(v) e^{ixv} \qquad \forall x, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\left| e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v) e^{ixv}\right| \le |f^\wedge(v)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \qquad \text{[nach Vorauss.]}$$

unabhängig von $\rho > 0$ (und $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\Longrightarrow \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v) e^{ixv}\, dv = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v) e^{ixv}\, dv \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{[L25 (maj. Konv.)]}$$

□

Folgerung 6 (Eindeutigkeitssatz)

(vgl. Beweis von Folg. I.2) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$(\forall v \in \mathbb{R}^n : f^\wedge(v) = 0) \Longrightarrow f(x) = 0 \qquad \text{f.ü.}$$

Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$(\forall v \in \mathbb{R}^n : f^\wedge(v) = g^\wedge(v)) \Longrightarrow f(x) = g(x) \qquad \text{f.ü.}$$

◁

Folgerung 7

(vgl. Lemma 1(d),(g)) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so, daß

$$f^\wedge \begin{cases} \text{symmetrisch} \\ \text{radial} \end{cases} \Longrightarrow f^\wedge \begin{cases} \text{symmetrisch} \\ \text{radial} \end{cases}$$

◁

Beweis. Betrachte

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v) e^{ixv}\, dv$$

$f^\wedge$ symmetrisch/radial

$$\Longrightarrow e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v) \text{ symmetrisch/radial} \qquad [e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} \text{ symmetrisch/radial}]$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n} \left(\underbrace{e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\wedge(v)}_{\in L^1} \right)^\wedge (-x)}_{e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} f^\vee(x)} \text{ symmetrisch/radial} \qquad \text{[Lemma 1 (d)+(g)]}$$

$$\Longrightarrow f \text{ symmetrisch/radial}$$

□

Bemerkung
Bezüglich zerfallend: Voraussetzung

$$f^\wedge(v) = \Pi_{k=1}^n g_k(v_k)$$

mit $g_k \in C_0(\mathbb{R}^n)$ zu wenig (vgl. Lemma 1(f)). Was wäre eine sinnvolle Aussage?

Folgerung 8

(vgl. Lemma I.9(a), Bemerkung (ii) nach Folgerung I.3, Folgerung 1) $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Faltung als Produkt ist eine kommutative Banach-Algebra *ohne* Eins, das heißt $\nexists e \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so, daß

$$e * f = f \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Dagegen existiert ein *approximierendes Eins-Element*, das heißt $\exists (e_\rho)_{\rho>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ so, daß

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} e_\rho * f = f \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

(in der Norm des Raumes $L^1(\mathbb{R}^n)$) $\triangleleft$

Beweis. Nach Folgerung 1: $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist kommutative Banach-Algebra. Zeige: Es gibt keine Eins, dazu: Annahme:

$$\begin{aligned}
& \exists e \in L^1 \forall f \in L^1 : e * f \;=\; f \\
\Longrightarrow \quad & e * e \;=\; e \\
\Longrightarrow \quad & (e^\wedge(v))^2 \;=\; e^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n && \text{[Satz 3]} \\
\Longrightarrow \quad & \forall v \in \mathbb{R}^n : e^\wedge(v) \;\in\; \{0,1\} \\
& e^\wedge \;\in\; C_0 && \text{[Satz 1]} \\
\Longrightarrow \quad & e^\wedge \;\in\; \{0,1\} && \text{[e stetig]} \\
\Longrightarrow \quad & e^\wedge \;=\; 0 && \text{[denn $e^\wedge(\infty) = 0$]} \\
\Longrightarrow \quad & e(x) \;=\; 0 \quad \text{f.ü.} && \text{[Folgerung 6]} \\
\Longrightarrow \quad & f(x) \;=\; (e * f)(x) = 0 \quad \text{f.ü.} && \text{[Annahme]}
\end{aligned}$$

Widerspruch, z.B. $f(x) := e^{-x^2}$.

Zur Existenz approximierender Eins-Elemente (e_ρ) siehe Folgerung 2 mit $W(f;x;\frac{1}{(2\rho)^2})$ für $p = 1$. $\square$

Bemerkung
CoRn mit punktweisem Produkt ist kommutative Banach-Algebra *ohne Eins* $\Longrightarrow$ mit Satz 1, Folg. 8, Satz 3

Folgerung 9 (Abbildungseigenschaften von $\mathcal{F}^{(1)}$)

Die Fourier-Transformation

$$Fou^{(1)} : f \in L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow f^\wedge \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

ist eine eineindeutige, lineare, beschränkte Abbildung der Banach-Algebra $L^1(\mathbb{R}^n)$ in (nicht: auf) die Banach-Algebra $C_0(\mathbb{R}^n)$, die Produkte invariant läßt, das heißt:

$$(f * g)^\wedge(v) = f^\wedge(v) g^\wedge(v) \qquad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in \mathbb{R}^n$$

$\triangleleft$

Bemerkung
Fall $n = 1$: Parallel zu Kapitel I.e: Interpretiere das Fourier-Umkehrintegral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(v) e^{ixv} \; dv$$

über die Konvergenz der *symmetrischen Partialsummen* (Cauchy-Hauptwert in ∞)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\rho}^{\rho} f^\wedge(v)e^{ixv}\ dv$$

für $\rho \longrightarrow \infty \rightsquigarrow$ Riemann-Lokalisation, Jordan-Kriterium etc. $\rightsquigarrow$ siehe Ü10A1. Parallelität braucht in höheren Dimensionen zusätzlich... (HIER FEHLT WAS)

II.c Poisson-Summationsformel

Die Poisson-Summationsformel ist *der* Zusammenhang zwischen Kapitel I und II (vgl. dagegen *formale* Motivation am Anfang zu Kapitel II(b))-

Definition 5

(vgl. Def. I.10) Für $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ (vgl L17) und $k \in \mathbb{Z}^n$ ist der k-te (komplexe, trigonometrische) *Fourier-Koeffizient* $f^\wedge(k)$ definiert durch

$$\begin{aligned} f^\wedge(k) &:= \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\text{d.h. über } [0,\,2\pi]^n} f(u)e^{-iku}du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(u_1,\ldots,u_n)\ e^{-i\sum_{j=1}^n k_j u_j}du_1\cdots du_n \end{aligned}$$

Die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f^\wedge(k)\ e^{ik\cdot x}$$

heißt die (komplexe, trigonometrische) *Fourier-Reihe* von f. Schreibweise:

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f^\wedge(k)\ e^{ikx}$$

($\sim$ *formale* Zuordnung, *keine* Aussage bzgl. Konvergenz) *Partialsummen*: Für $\rho > 0$ heißt

$$S_\rho^{rad}(f;x) := \sum_{|k|\le\rho} f^\wedge(k)\ e^{ikx}$$

die ρ-te *radiale Partialsumme* ($|k| := (k_1^2+\cdots+k_n^2)^{1/2}$) und

$$S_\rho^{\text{quadr}}(f;x) := \sum_{|k_j|\le\rho,\,1\le j\le n} f^\wedge(k)\ e^{ikx}$$

die *quadratische Partialsumme* der Fourier-Reihe von f. Entsprechend werden Partialsummen $S_j^D(f;x)$ definiert über eine beliebige Folge $D = (D_j)_{j=0}^\infty$ von beschränkten Bereichen $D_j \subset D_{j+1} \subset \mathbb{R}^n$, die den $\mathbb{R}^n$ ausschöpfen:

$$\bigcup_{j=0}^\infty D_j = \mathbb{R}^n$$

$\triangleleft$

Bemerkung

(i) Das Konvergenzverhalten von Fourierreihen im $\mathbb{R}^n$ hängt *stark* davon ab, über welche Art der Partialsummen die Konvergenz der Fourierreihe definiert ist (vgl. dagegen die Situation für $n = 1$ in Definition I.10).

(ii) Bei *absoluter* Konvergenz (nur dies wird hier (sonst siehe Kap VI) neben dem Fall $n = 1$ betrachtet) *kein* Problem bzgl. *Interpretation* der Konvergenz von Fourier-Reihen,
denn: allgemein zur Interpretation *mehr*dimensionaler, *absoluter* Konvergenz der Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k$ (vgl. Ende Kapitel I(b)):
Vorgegebene *Menge* $\{c_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ hat abzählbar viele Elemente
$\Longrightarrow$ durchnumerieren zur *Folge* $(c'_j)_{j=0}^{\infty}$ (irgendwie)
$\Longrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k$ interpretiert als $\sum_{j=0}^{\infty} c'_j$; falls diese *absolut* konvergiert, unabhängig von Umordnung.

(iii) Wegen L20:

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset L^{1}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall 1 < p < \infty$$

$\Longrightarrow$ alle Größen aus Def. 5 (und 6) auch wohldefiniert auf diesen Banach-Räumen (vgl. L17) $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$, $1 \le p \le \infty$.

Definition 6

(vgl. Def. I.13) Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$(f * g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{=\int_{[0,2\pi]^n}} f(x-u)\; g(u)\; du$$

◁

Bemerkung
Sätze I.7-9 gelten entsprechend

Satz 7

Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$ Die Reihe

$$(2\pi)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(x + 2\pi k) \qquad (=: g^*(x))$$

konvergiert absolut fast überall und in der Norm des Raumes $L^1([0, 2\pi]^n)$. Für die Summe g^* gilt:

(a)

$$g^* \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$$

(b)

$$(2\pi)^{-n} \|g^*\|_{L^1_{2\pi}} \le \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(c)

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} g^*(u)\; du = \int_{\mathbb{R}^n} g(u)\; du$$

(d) Für $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\underbrace{(f * g^*)(x)}_{\text{Def. 6: } \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} f(x-u)\; g^*(u)\; du} = \underbrace{(f * g)(x) \quad \text{f.ü.}}_{\text{Def. 2: } \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\; g(u)\; du}$$

(e)

$$\underbrace{(g^*)^\wedge(k)}_{\text{Def. 5: } \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} g^*(u)\ e^{-iku}\ du} = \underbrace{g^\wedge(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^n}_{\text{Def. 1: } \int_{\mathbb{R}^n} g(u)\ e^{-uku}\ du}$$

◁

Beweis. Zur Konvergenz von $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(x+2\pi k)|$: Betrachte (z.B.) quadratische Partialsummen:

$$S_m(x) := \sum_{k_1=-m}^{m} \cdots \sum_{k_n=-m}^{m} |g(x+2\pi k)| \qquad \forall m \in \mathbb{P}$$

$$\Longrightarrow \quad s_m(x) \geq 0 \text{ meßbar auf } [0,2\pi]^n \text{ und monoton } (s_{m_1}(x) \leq s_{m_2}(x) \text{ für } 0 \leq m_1 \leq m_2 < \infty)$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^{2\pi} S_m(x)\ dx}_{<\infty} = \int_0^{2\pi} \lim_{m\longrightarrow\infty} S_m(x)\ dx \qquad \text{[L24]}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(x+2\pi k)| \ \in\ L^1([0,2\pi]^n),$$

denn:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{[0,2\pi]^n} S_m(x)\ dx$$

$$= \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{k_1=-m}^{m} \cdots \sum_{k_n=-m}^{m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} |g(x_1+2\pi k_1, \ldots, x_n+2\pi k_n)|\ dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{k_1=-m}^{m} \cdots \sum_{k_n=-m}^{m} \int_{2\pi k_1}^{2\pi(k_1+1)} \cdots \int_{2\pi k_n}^{2\pi(k_n+1)} |g(u_1, \ldots, u_n)| du_1 \cdots du_n \qquad [u = x+2\pi k]$$

$$= \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{-2\pi m}^{2\pi(m+1)} \cdots \int_{-2\pi m}^{2\pi(m+1)} |g(u)|\ du$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |g(u)|\ du < \infty \qquad \text{[nach Vorauss.]}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(x+2\pi k)| \ \in\ L^1([0,2\pi]^n) \qquad \text{[L24]}$$

Also: $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} g(x+2\pi k)$ konvergiert absolut fast überall und $\in L^1([0,2\pi]^n)$. Insbesondere gezeigt:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_0^{2\pi} |g(x+2\pi k)|\ dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(x+2\pi k)| \right)\ dx \qquad (2.5)$$

Entsprechend: Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(x+2\pi k)|$ in der $L^1([0,2\pi]^n)$-Norm, dazu zeige (z.B.): die speziellen Partialsummen $S_m(x)$ bilden eine Cauchy-Folge in $L^1([0,2\pi])$. Dazu: Seien $m, p \in \mathbb{P}, m < p$.

$$\Longrightarrow \qquad \|S_p(x) - S_m(x)\|_{L^1([0,2\pi]^n)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k_i|\leq p \forall i\neq j \\ m<k_j\leq p \\ -p\leq k_j\leq -m}} \int_0^{2\pi} |g(x+2\pi k)|\ dx$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k_j|>m \\ k\in\mathbb{Z}^n}} \int_0^{2\pi} |g(x+2\pi k)|\, dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k_j|>m \\ k\in\mathbb{Z}^n}} \int_{2\pi k_1}^{2\pi(k_1+1)} \cdots \int_{2\pi k_n}^{2\pi(k_n+1)} |g(u_1,\ldots,u_n)|du_1\cdots du_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{2\pi(m+1)}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-2\pi(m+1)} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |g(u_1,\ldots,u_n)|\, du$$

Wegen L22 (Fubini):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |g(u_1,\ldots,u_n)|\, du_1\cdots du_{j-1}\, du_{j+1}\cdots du_n$$

existiert fast überall und $\in L^1(\mathbb{R}^n)$ bzgl. u_j

$$\Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{2\pi(m+1)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |g(u_1,\ldots,u_n)|\, du \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Longrightarrow \quad (S_m)_{m=0}^{\infty} \text{ ist Cauchy-Folge in } L^1([0,2\pi])$$

L17: Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(x+2\pi k)|$ konvergiert in $L^1([0,2\pi])$-Norm.

(a) $g^* \in L^1_{2\pi}$; schon gezeigt: $g^* \in L^1([0,2\pi])$, zeige: g^* ist 2π-periodisch in jeder Variablen. Dazu: Sei $e_j \in \mathbb{R}^n$ j-ter Einheitsvektor, $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{aligned} & g^*(x+2\pi e_j) \\ = \quad & (2\pi)^n \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} g(x_1+2\pi k_1,\ldots,x_j+2\pi(k_j+1),\ldots,x_n+2\pi k_n) \\ = \quad & (2\pi)^n \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\ell_j=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} g(x_1+2\pi k_1,\ldots,x_j+2\pi l_j,\ldots,x_n+2\pi k_n) \\ \overset{\ell_j:=k_j+1}{=} \quad & g^*(x) \qquad \forall 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad g^* \in L^1_{2\pi} \qquad \text{[vgl. Skript L]}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \|g^*\|_{L^1_{2\pi}} &:= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(x+2\pi k) \right| dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(x+2\pi k)|\, dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_0^{2\pi} |g(x+2\pi k)|\, dx \qquad [(2.5)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(u)|\, du =: \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

(b)

(c)+(e) Sei $\ell \in \mathbb{Z}^n$. Nach (a) ist $(g^*)(\ell) \in \mathbb{C}$ wohldefiniert

$$\Longrightarrow \quad (g^*)^{\wedge}(\ell) \;=\; \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(u+2\pi k) \right) e^{-i\ell u}\, du \qquad \text{[Def. 5]}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_0^{2\pi} g(u+2\pi k) e^{-i\ell u}\, du \qquad \text{[L25]}$$

denn (vgl. Beweis zu (d)): $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} g(u+2\pi k)e^{-i\ell u}$ konvergiert absolut fast überall (als Grenzwert von Partialsummen), da

$$\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(u+2\pi k)e^{-i\ell u} \right| \;\le\; \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(u+2\pi k)|$$

fast überall konvergiert (und weiterhin $\in L^1([0,2\pi]^n)$, also auch integrierbare Majorante)

$$\Longrightarrow \quad (g^*)^{\wedge}(\ell) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{2\pi k_1}^{2\pi(k_1+1)} \cdots \int_{2\pi k_n}^{2\pi(k_n+1)} g(x) \underbrace{e^{-i\ell(x-2\pi k)}}_{=e^{-i\ell x}}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i\ell x}\, dx$$

$$= \; g^{\wedge}(\ell) \qquad \text{[Def. 1]}$$

(d) Für $f \in L^1_{2\pi}$ gilt

$$(f * g^*)(x) \;=\; (f*g)(x) \quad \text{f.ü.}$$

dazu: Sei $f \in L^1_{2\pi}$. Da $g^* \in L^1_{2\pi}$ nach (a), ist $f * g^* \in L^1_{2\pi}$ wohldefiniert. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig fest

$$\Longrightarrow \quad (f*g^*)(x) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} f(x-u) g^*(u)\, du \qquad \text{[Def. 6]}$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x-u) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(u+2\pi k) \right) du$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_0^{2\pi} f(x-u) g(u+2\pi k)\, du \qquad \text{[L25]}$$

denn: Schon gezeigt:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(u+2\pi k)| \quad \exists \text{ f.ü.}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi)^n} g^*(u) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(u+2\pi k)$$

$$= \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{\substack{1\le j\le n \\ |k_j|\le m}} g(u+2\pi k) \quad \exists \text{ f.ü.}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{m\longrightarrow\infty} f(x-u) \sum_{\substack{j=1\ldots n \\ |k|\le m}} g(u+2\pi k) \;=\; f(x-u) g^*(u) (2\pi)^n$$

für fast alle u ($x \in \mathbb{R}^n$ fest);

$$\left| f(x-u) \sum_{\substack{j=1\ldots n \\ |k|\le m}} g(u+2\pi k) \right| \;\le\; |f(x-u)| \sum_{\substack{1\le j\le n \\ |k_j|\le m}} |g(u+2\pi k)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x-u)| \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(u+2\pi k)|}_{=:\widetilde{g}(u)\in L^1([0,2\pi]^n)}}_{\in L^1([0,2\pi]^n)}$$

unabhängig von m, denn: $f, \widetilde{g} \in L^1_{2\pi}$, also (vgl. Satz I 7): $f * \widetilde{g}$ existiert (für fast alle x) als absolut konvergentes L-Integral

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad & (f * g^*)(x) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_0^{2\pi} f(x-u) g(\underbrace{u+2\pi k}_{=y})\ du \\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{k_1=-m}^{m} \cdots \sum_{k_n=-m}^{m} \int_{2\pi k_1}^{2\pi(k_1+1)} \cdots \int_{2\pi k_n}^{2\pi(k_n+1)} f(x-y)g(y)\ dy \qquad [f\ 2\pi\text{-periodisch}] \\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{-2\pi m}^{2\pi(m+1)} \cdots \int_{-2\pi m}^{2\pi(m+1)} f(x-y)g(y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy
\end{aligned}$$

Der rechte Grenzwert existiert zunächst nur als Grenzwert der linken Seite ($\sim$ Cauchy-Interpretation).

Zeige: Existiert sogar als (absolut konvergentes) L-Integral fast überall (in x). Dazu: Sei

$$\begin{aligned}
& G_m(x) := |f(x-y)||g(y)|\chi_{[-2\pi m, 2\pi(m+1)]^n}(y) \\
\Longrightarrow \quad & G_m(y) \text{ meßbar auf } \mathbb{R}^n;\ G_m(y) \geq 0,\ G_m(y) \leq G_{m+1}(y) \\
\Longrightarrow \quad & \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^n} G_m(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{m\longrightarrow\infty} G_m(y))\ dy \qquad [\text{L24}] \\
& \qquad\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\ dy
\end{aligned}$$

und falls der erste Limes (außen) existiert: $|f(x-y)||g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dazu:

$$\begin{aligned}
& \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{-2\pi m}^{2\pi(m+1)} \cdots \int_{-2\pi m}^{2\pi(m+1)} |f(x-y)||g(y)|\ dy \\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^{2\pi} f(x-u) \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ |k_j|\leq m}} |g(u+2\pi k)|\ du \qquad [f\ 2\pi\text{-periodisch}] \\
&= \int_0^{2\pi} |f(x-u)| \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ |k_j|\leq m}} |g(u+2\pi k)|\ du \qquad [\text{schon gezeigt}] \\
&= \int_0^{2\pi} |f(x-u)| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(u+2\pi k)| \right)\ du < \infty \quad \text{f.ü.}
\end{aligned}$$

da $f \in L^1_{2\pi}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(u+2\pi k)| \in L^1_{2\pi}$ (vgl. Satz I 7)

□

Konsatz (?) über Poisson-Summationsformel

HIER FEHLT WAS!!!

Beispiel (n=1)
Sei

$$\Theta^c(x) := \begin{cases} 1-|x| & \text{für } |x| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann gilt (Ü8A5(b)):

$$(\Theta^c)^\wedge(v) = \left(\frac{\sin\frac{v}{2}}{\frac{v}{2}}\right)^2$$

$$(\Theta^c)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \Theta^c \text{ stetig}$$

$$\Longrightarrow \quad \Theta^c(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\Theta^c)^\wedge(v)\, e^{ixv}\, dv \qquad \text{[Folg. 5]}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{v}{2}}{\frac{v}{2}}\right)^2 e^{ixv}\, dv \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad g(x) = F(x) := \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \in NL^1(\mathbb{R}) \qquad \text{[vgl. Ü9A2(a), Folg. 10]}$$

$$\wedge \quad F^\wedge(v) = \begin{cases} 1-|v| & \text{für } |v| \le 1 \\ 0 & \text{für } |v| > 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |F^\wedge(k)| = F^\wedge(v) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad F^\wedge(k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$$

$$2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(x+2\pi k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin\frac{x+2\pi k}{2}}{\frac{x+2\pi k}{2}}\right)^2$$

$$\le \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+2\pi k)^2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x-2\pi k)^2}$$

Sei $|x| \le \pi$

$$\Longrightarrow \quad |x \pm 2\pi k| \; geq \; 2\pi k - |x|$$

$$\ge \quad 2\pi k - \pi,$$

dann gilt weiter

$$2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(x+2\pi k) \le 1 + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k-\pi)^2}$$

$$= 1 + \frac{8}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2}$$

$$\le 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(4 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right) < \infty \quad \text{gleichmäßig konvergent} \qquad \forall |x| \le \pi$$

und da alles 2π-periodisch: gleichmäßige Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ Voraussetzungen von Folgerung 10 erfüllt für (stetiges) F und damit auch für $(m+1)F((m+1)x)$ für beliebige $m \in \mathbb{P}$ (fest).

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (m+1)\left(\frac{\sin\left((m+1)\frac{x+2\pi k}{2}\right)}{(m+1)\frac{x+2\pi k}{2}}\right)^2 = \frac{1}{m+1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\sin(m+1)\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}+\pi k}\right)^2 \qquad \text{[Additionstheorem]}$$

und

$$\begin{aligned}
& 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(m+1)F\left((m+1)(x+2\pi k)\right) \\
= \; & \sum_{k\in\mathbb{Z}} F^{\wedge}\left(\frac{k}{m+1}\right)e^{ikx} \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{P} \qquad \text{[Folg. 10, Lemma 1(e)]} \\
= \; & \sum_{k=-(m+1)}^{m+1}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)e^{ikx} \\
= \; & \sum_{k=-m}^{m}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)e^{ikx} \\
=: \; & F_m(x) \qquad \text{[periodischer Fejér-Kern]} \\
= \; & \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin(m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

liefert

$$\frac{\sin^2(m+1)u}{\sin^2 u} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^2(m+1)u}{(u+\pi k)^2} \qquad \forall u\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{P}$$

bzw:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+\pi k)^2} \qquad \forall x\neq j\pi,\ j\in\mathbb{Z}$$

vgl. dies mit Analysis IV (dort über komplexe Methoden, hier reelle Methode):

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+k\pi)^2}$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert ist auf jedem Kompaktum $K\subset\mathbb{C}$, das keinen der Punkte $j\pi$ $(j\in\mathbb{Z})$ enthält. Insbesondere folgt mit Satz 7(d): Für $f\in L^1_{2\pi}$

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f;x) &= \frac{1}{2\pi(m+1)}\int_0^{2\pi} f(x-u)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\left((m+1)F((m+1)u)\right)du
\end{aligned}$$

Erste Zeile: transzendente Abhängigkeit vom Parameter $(m+1)$, zweite Zeile: übersichtliche Abhängigkeit $\rightsquigarrow$ Vorteile z.B. bei asymptotischen Entwicklungen nach $m=1$.

Dies gilt allgemein für die Kerne vom Fejérschen Typ.

Folgerung 11

Für $\chi\in NL^1(\mathbb{R}^n)$ und $\rho>0$ sei

$$\chi^*_\rho(x) \;:=\; (2\pi)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \rho^n \chi(\rho(x+2\pi k))$$

$\forall \rho > 0$:

$$\chi^*_\rho \in L^1_{2\pi}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\left\|\chi^*_\rho\right\|_{L^1_{2\pi}} \le \|\chi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} \chi_\rho(u)\; du = 1$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\delta\le|u|\le\pi} \left|\chi^*_\rho(u)\right|\; du \le \int_{\delta\rho\le|u|} |\chi(u)|\; du \qquad \forall 0<\delta<\pi$$

$$(\chi^*_\rho)^\wedge(k) = \chi^\wedge(\frac{k}{\rho}) \qquad \forall k\in\mathbb{Z}^n$$

Insbesondere: $(\chi^*_\rho)_{\rho>0}$ ist eine (n-dimensionale) 2π-periodische approximierende Identität vom Féjerschen Typ im Sinne von Definition I 16+18 mit Parametermenge $\mathbb{A} = [0,\infty]$ und $\rho_0 = \infty$, erzeugt durch eine Funktion χ. Für das nach (vgl. Def. 3) Def I 17 und Def. 6 mittels (χ^*_ρ) definiert periodische singuläre Integral vom Féjerschen Typ

$$I^*_\rho(f;x) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} f(x-u)\chi^*_\rho(u)\; du$$

gilt für jedes $f\in L^1_{2\pi}$, $\rho>0$:

$$\begin{aligned} I^*_\rho(f;x) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\rho^n\chi(\rho u)\; du \\ &=\; J(f;x;\rho) \quad \text{f.ü.} \end{aligned}$$

◁

Beweis. Wende Satz 7 auf $g(x) = \rho^n\chi(\rho x)$, $\rho>0$ beliebig fest an

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad \frac{1}{(2\pi)^n}\left\|\chi^*_\rho\right\|_{L^1_{2\pi}} \;&\le\; \|\rho^n\chi(\rho x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\chi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} && \text{[Satz 7(b)]} \\ (\chi^*_\rho)^\wedge(k) \;&=\; (\rho^n\chi(\rho x))^\wedge(k) && \text{[Satz 7(e)]} \\ &=\; \chi^\wedge(\frac{k}{\rho}), && \text{[Lemma 1(e)]} \end{aligned}$$

insbesondere:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} \chi^*_\rho(u) + du \;=\; \chi^\wedge(0) = 1 && [\chi\in NL^1(\mathbb{R}^n)] \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\delta\le|u|\le\pi} \left|\chi^*_\rho(u)\right|\; du \\ &\le \int_{\delta\le|u|\le\pi} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \rho^n|\chi(u+2\pi k)|\right)\; du \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \rho^n \int_{\delta\le|u|\le\pi} |\chi(\rho(u+2\pi k))| && \text{[vgl. Beweis Satz 7]} \\ &\le \rho^n\int_{\delta\le|u|\le\pi} |\chi(\rho u)|\; du + \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}^n}} \rho^n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(\rho(u+2\pi k))|\; du}_{\int_{\pi(2k-e)}^{\pi(2k+e)} |\chi(\rho u)|\; du} && [e=(1,\dots,1)^\top] \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\delta\leq|u|} |\rho^n \chi(\rho u)|\ du$$
$$= \int_{\delta\rho\leq|u|} |\chi(y)|\ dy$$

Rest mit Satz 7(d) (und L9 (absolute Stetigkeit)) □

Beispiel (Féjer)
Der periodische Féjer-Kern (Kapitel I(g))

$$F_m(x) := \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin(m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

ist vom Fejér-Typ, erzeugt durch

$$F(x) := \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

(de la Vallée-Poussin 1919).

Weitere Beispiele: Ü11A1

Bemerkung
$n = 1$: Ist von einem periodischen Kern (χ_ρ) (Def. I 16) bekannt, daß er vom Fejér-Typ ist (Indiz: es existiert (notwendig) eine Funktion h mit $\chi_\rho^\wedge(k) = h(\frac{k}{\rho h_o})\ \forall k \in \mathbb{Z}, \rho > 0$), dann kann das periodische singuläre Integral $I_\rho(f;x)$ auf die reelle Achse abgerollt werden in dem Sinne, daß

$$I_\rho(f;x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\chi_\rho(u)\ du \qquad \text{[transzendent von } \rho \text{ abhängig]}$$
$$= \rho\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\chi(\rho u)\ du \qquad \text{[übersichtlich abhängig]}$$
$$= J(f;x;\rho)$$

$\rightsquigarrow$ Vorteile z.B. bei asymptotischen Entwicklungen nach dem Parameter ρ. Beachte: Wichtige periodische Kerne sind *nicht* vom Fejér-Typ.

II.d Ableitungen

Sei

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar und lokal integrierbar}\}$$

(lokal integrierbar: $\int_a^b |f(u)|\ du < \infty$ für beliebige kompakte $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$; vgl. Def. $BV_{loc}(\mathbb{R})$ in Ü11). Beispiele: e^{x^2}, Polynome. Allgemein

$$C(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$
$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall p \in [1,\infty]$$

denn: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n (a \leq b)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig:

$$\int_a^b |f(u)|\ du \leq \left(\int_a^b |f(u)|^p\ du\right)^{1/p}\left(\int_a^b 1\ du\right)^{1/p'} \qquad \text{[Hölder]}$$

$$\leq \left(\prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p \; du\right)^{1/p} \overset{\text{n.V.}}{<} \infty$$

$p \leq \infty$

$p = \infty$

$$\int_a^b |f(u)| \; du \leq \|f\|_\infty \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \infty$$

Zunächst: Diskussion: Ableitungen und Fourier-Transformation bei $n = 1$.

Definition 7 ($AC_{loc}(\mathbb{R}^n)$)

$$AC_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{\text{Alle lokal absolut stetigen Funktionen}\}$$

Lokal absolut stetig (vgl. L9):

$$AC_{loc}(\mathbb{R}^n) := \left\{\phi \in C(\mathbb{R}) : \exists g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \alpha_1 \in \mathbb{C} \; \forall x \in \mathbb{R} : \phi(x) = \alpha_1 + \int_0^x g(u) \; du\right\}$$

(Achtung: Für *alle* $x \in \mathbb{R}$!), man hat also die Darstellung

$$\phi(x) - \phi(y) = \int_y^x g(u) \; du \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Entsprechend sei $AC_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N}$ die Menge aller $\phi \in C(\mathbb{R})$ mit $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$, sodaß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \alpha_1 + \int_0^x \left(\alpha_2 + \int_0^{u_1} \left(\alpha_3 + \cdots + \int_0^{u_{r-2}} \left(\alpha_r + \int_0^{u_{r-1}} g(u_r) \; du_r\right) \; du_{r-1}\right) \; du_2\right) \; du_1 \\ &= p_{r-1}(x) + \int_0^x \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{r-1}} g(u_r) \; du_r \; du_{r-1} \ldots du_2 \; du_1\end{aligned}$$

für ein $p_{r-1} \in P_{r-1}$ (P_{r-1} Menge aller komplexwertigen algebraischen Polynome einer reellen Variablen vom Grad $\leq r$). ◁

Bemerkung
Ist $\phi \in AC_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für ein $r > 1$, dann existiert

$$\phi^{(k)}(x) \begin{cases}\text{überall} & \text{für } k < r \\ \text{fast überall} & \text{für } k = r\end{cases}$$

Bezeichnung:

$$\phi^{(r)} := g$$

Definition 8

(vgl. Def. 20) Für $r \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ sind die *Sobolev-Räume* definiert durch

$$(L^p(\mathbb{R}))^{(r)} := \left\{f \in L^p(\mathbb{R}) : f(x) = \phi(x) \quad \text{f.ü.} \quad \text{und} \quad \exists \phi \in AC^{(r)}_{loc}(\mathbb{R}) : \phi^{(k)} \in L^p(\mathbb{R}^n) \; \forall k = 0, \ldots, r\right\}$$

Bezeichnung: $f^{(k)} := \phi^{(k)}$ ◁

Beachte:

$$(L^p(\mathbb{R}))^{(r)} \subset \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) | f(x) = \phi(x) \text{ f.ü. und } \exists \phi \in AC^{(r)}_{loc}(\mathbb{R}) : \phi^{(r)} \in L^p(\mathbb{R}) \right\}$$

Also: Zwischenableitungen müssen nicht mehr in $L^p(\mathbb{R})$ sein, die beiden Mengen sind aber dennoch gleich (später).

Satz 8

(vgl. Satz I.20) Sei $r \in \mathbb{N}$.

(a) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC^{(r)}_{loc}(\mathbb{R})$ mit $f^{(r)} \in L^1(\mathbb{R})$, dann

$$(f^{(r)})^\wedge(v) = (iv)^r f^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

(b) Falls es umgekehrt zu $f \in L^1(\mathbb{R})$ ein $g \in L^1(\mathbb{R})$ gibt mit

$$(iv)^r f^\wedge(v) = g^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R},$$

so gilt

$$f \in (L^1(\mathbb{R}))^{(r)}$$

◁

Beweis.

(a) Fall $r = 1$: (vgl. Beweis zu Satz I 20(a)) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$ so daß $f' \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \Delta_1^1 f(x) &:= f(x+1) - f(x) \\ &= \int_0^1 f'(x+u)\, du \qquad [f \in AC_{loc}] \\ &\overset{u=-t}{=} \int_{-1}^0 f'(x-t)\, dt \end{aligned}$$

Sei

$$m(t) := \begin{cases} 1, & t \in [-1,0] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = 1_{[-1,0]}(t)$$

$\Longrightarrow \quad m \in NL^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ [Def. 3]

Dazu nach Ü8A4(a):

$$m^\wedge(v) = \begin{cases} \frac{e^{iv}-1}{iv}, & v \neq 0 \\ 1, & v = 0 \end{cases}$$

Def. 2:

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t) m(t)\, dt \\ &= (f' * m)(x) \end{aligned}$$

Lemma 1(a) und Satz 3 ($f' \in L^1(\mathbb{R})$ nach Vorauss.)

$$\Longrightarrow \quad (f')^\wedge m^\wedge(v) = \frac{e^{iv}-1}{iv} (f')^\wedge(v) \qquad \forall v \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad iv f^\wedge(v) = (f')^\wedge(v) \qquad \forall v \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\Longrightarrow \quad f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ [Satz 1]

$\Longrightarrow \quad f^\wedge, (f')^\wedge \in C_0$

$\Longrightarrow \quad ivf^\wedge(v) = (f')^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$ [stetige E.rgänzung]

Fall $r > 1$: Fall $r = 1$ r-fach iterieren:

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+k)$$

$$= \Delta_1^r f(x) := \Delta_1^1(\Delta_1^{r-1}) f(x) = \cdots$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^{(r)}(x + u_1 + \cdots + u_r)\, du_1 \cdots du_r \qquad [f \in AC_{loc}(\mathbb{R}^n)]$$

$$= (f^{(r)} * \underbrace{m * \cdots * m}_{r\text{-fach}})(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} e^{ikv} \right) f^\wedge(v) = (f^{(r)})^\wedge(v)(m^\wedge(v))^r \qquad \text{[Lemma 1(a)+Satz 3]}$$

$$\Longrightarrow \quad (e^{iv} - 1)^r f^\wedge(v) = (f^{(r)})^\wedge(v) \left(\frac{e^{iv} - 1}{iv} \right)^r$$

$\Longrightarrow \quad (iv)^r f^\wedge(v) = (f^{(r)})^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$ [wie für $r = 1$]

(b) Fall $r = 1$: (vgl. Beweis zu (a) für $r = 1$ (rückwärts)) Voraussetzung: Zu $f \in L^1$ existiert ein $g \in L^1$ mit

$\Longrightarrow \quad ivf^\wedge(v) = g^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$

Sei $h \neq 0$

$\Longrightarrow \quad (f(x) - f(x+h))^\wedge(v)$

$$= (1 - e^{ihv}) f^\wedge(v) \qquad \text{[Lemma 1(a)]}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{iv}} ivhg^\wedge(v)h$$

$$= -\left(\frac{1}{h} m\left(\frac{x}{h} \right) \right)^\wedge (v) g^\wedge(v) h \qquad [\text{Lemma 1(e)}, h \neq 0]$$

$$= -\left(m\left(\frac{x}{h} \right) \right)^\wedge (v) g^\wedge(v)$$

$$= -\left(\underbrace{m(\tfrac{\cdot}{h}) * g}_{\in L^1(\mathbb{R})} \right)^\wedge (v) \qquad [\text{Satz 3}, m(\tfrac{\cdot}{h}), g \in L^1 \text{ (Satz 2(a))}]$$

$$= -\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-u) m(\frac{u}{h})\, du \right)^\wedge (v) \qquad \text{[Def. 2]}$$

$$= -\left(\int_{-h}^{0} g(x-u)\, du \right)^\wedge (v) \qquad \text{[Def. von } m\text{]}$$

$$= \underbrace{\left(\int_{x+h}^{x} g(t)\, dt \right)^\wedge}_{\in L^1(\mathbb{R})} (v) \qquad \text{[x-u=t]}$$

wegen Satz 2(a), da $g, m \in L^1$

$$\Longrightarrow \quad \forall h \neq 0 : f(x) - f(x+h) \;=\; \int_{x+h}^{x} g(t)\; dt \quad \text{f.ü.} \qquad \text{[Folg. 6]}$$

bzw. mit h ersetzt durch $-h$

$$f(x) - f(x-h) \;=\; \int_{x-h}^{x} g(t)\; dt \quad \text{f.ü.}$$

Integration über x

$$\Longrightarrow \quad \int_0^y (f(x) - f(x-h))\; dx \;=\; \int_0^y \left(\int_{x-h}^{x} g(u)\; du \right)\; dx \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2.6)$$

Betrachte $\lim_{h \longrightarrow \infty}$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{h \longrightarrow \infty} \int_0^y ((f(x) - f(x-h))\; dx \;=\; \int_0^y f(x)\; dx - \underbrace{\lim_{h \longrightarrow \infty} \int_{-h}^{y-h} f(u)\; du}_{=0 \text{ L25}}$$

Einschub: Zur Ergänzung im Beweis zu Satz 7 und Folgerung 2 (ersetze L9 durch L25): Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_{\rho}^{\infty} |f(u)|\; du \;=\; 0$$

Denn:

$$\int_{-\infty}^{\rho} |f(u)|\; du \;=\; \int_{\mathbb{R}} \kappa_{[-\infty,\rho]}(u) |f(u)|\; du$$

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \kappa_{[-\infty,\rho]}(u) |f(u)| \;=\; |f(u)| \quad \text{f.ü.}$$

$$\kappa_{[-\infty,\rho]}(u) |f(u)| \;\leq\; |f(u)| \in L^1(\mathbb{R})$$

unabhängig von $\rho > 0$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\rho} |f(u)|\; du \;=\; \int_{\mathbb{R}} \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \kappa_{[-\infty,\rho]}(u) |f(u)|\; du \qquad \text{[L25 (maj. Konv.)]}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\; du$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_{\rho}^{\infty} |f(u)|\; du \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left| f(u)\; du - \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\rho} |f(u)| \right| du = 0$$

Für $h \longrightarrow \infty$ auf der rechten Seite von (2.6) wird L25 benutzt, dazu:

$$\lim_{h \longrightarrow \infty} \int_{x-h}^{x} g(u)\; du \;=\; \int_{-\infty}^{x} g(u)\; du \quad \exists \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad [g \in L^1(\mathbb{R})]$$

$$\left| \int_{x-h}^{x} g(u)\; du \right| \;\leq\; \int_{x-h}^{x} |g(u)|\; du$$

$$\leq \int_{-\infty}^{x} |g(u)|\; du$$

(letzteres ist stetig in x wegen L9)

$$\Longrightarrow \quad \lim_{h \longrightarrow \infty} \int_0^y \left(\int_{x-h}^{x} g(u)\; du \right)\; dx \;=\; \int_0^y \underbrace{\left(\lim_{h \longrightarrow \infty} \int_{x-h}^{x} g(u)\; du \right)}_{\int_{-\infty}^{x} g(u)\; du}\; dx \qquad \text{[L25]}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^y f(x)\; dx \;=\; \int_0^y \left(\int_{-\infty}^{x} \right)\; dx \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Betrachte Ableitung bzgl. y: Links $f(y)$ wegen L9, rechts $\int_{-\infty}^{y} g(u)\,du$ für alle (Integrand stetig) $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad f(y) &= \int_{-\infty}^{y} g(u)\,du \quad \text{f.ü.} \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} g(u)\,du}_{=:\alpha_1 \in \mathbb{C}} + \int_{0}^{y} g(u)\,du \\
&=: \phi(y) \in AC_{loc}(\mathbb{R}) && [g \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})]
\end{aligned}$$

und

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = g(x) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{f.ü.} \Longrightarrow f \in (L^1(\mathbb{R}))^{(1)} \qquad [\text{Def. 8}]$$

Fall $r > 1$: Voraussetzung: Zu $f \in L^1$ $\exists g \in L^1$ mit

$$(iv)^r f^\wedge(v) = g^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

Zunächst zeige

$$\exists g_1 \in L^1(\mathbb{R}) : iv f^\wedge(v) = g_1^\wedge(v) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dazu: Sei

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \eta \in NL^1(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \eta^\wedge(v) = \frac{1}{1+iv} \qquad \forall v \in \mathbb{R} \qquad [\text{Ü9A1(a)}]$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\eta * \cdots * \eta}_{(r-1)\times} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad (\eta * \cdots * \eta)^\wedge = \frac{1}{(1+iv)^{r-1}} \qquad [\text{Satz 2(a)}]$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad (\eta * \cdots * \eta * g)^\wedge(v) &= \frac{1}{(1+iv)^{r-1}} g^\wedge(v) && [\text{Satz 3}] \\
&= \frac{(iv)^r}{(1+iv)^{r-1}} f^\wedge(v) && [\text{Vorauss.}] \\
&= iv + \left(-(r-1) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{a_k}{(1+iv)^k} \right), && (2.7)
\end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\frac{(z-1)^r}{z^{r-1}} &= (z-1) \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} z^{j-r+1} (-1)^{r-1-j} \\
&= (z-1) + (z-1) \sum_{j=0}^{r-2} \binom{r-1}{j} z^{j-r+1} (-1)^{r-1-j} \\
&= (z-1) + \sum_{j=0}^{r-2} \binom{r-1}{j} z^{j-r+2} (-1)^{r-1-j} - \sum_{j=0}^{r-2} \binom{r-1}{j} z^{j-r+1} (-1)^{r-1-j}
\end{aligned}$$

HIER SCHON SCHLUSS?! CHECKEN!

□

Definition 9

(vgl. Def. in Ü6A7) Sei $e_k := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ der k-te *Standard-Einheitsvektor* in $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. f heißt *bzgl. x_k partiell differenzierbar in der L^p-Norm* bzw. f hat eine *starke partielle Ableitung nach x_k*, falls es ein $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| \frac{f(x + te_k) - f(x)}{t} - g(x) \right\|_{L^p} = 0$$

g heißt *partielle Ableitung in der L^p-Norm* bzw. *starke partielle Ableitung von f nach x_k*. Starke partielle Ableitungen höherer Ordnung seien wie üblich iterativ definiert. ◁

Beachte: Im allgemeinen $(p \neq \infty)$ bestehen zwischen punktweiser und starker Ableitung keine Inklusionen!

Satz 9

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ist f stark in L^1 partiell nach x_k diffbar mit Ableitung g, so gilt

$$(iv_k) f^\wedge(v) = g^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

◁

Beweis. Da $f, g \in L^1$ existieren $f^\wedge, g^\wedge$, und nach Lemma 1:

$$\left(\frac{f(x + te_k) - f(x)}{t} - g(x) \right) ftr(v) = \frac{e^{itv_k} - 1}{t} f^\wedge(v) - g^\wedge(v)$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \frac{e^{itv_k} - 1}{t} f^\wedge(v) - g^\wedge(v) \right| \leq \left\| \frac{f(x + te_k) f(x)}{t} - g(x) \right\|_{L^1} \qquad \text{[Satz 1]}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty) \qquad \text{[Vorauss.]}$$

$$\Longrightarrow \quad g^\wedge(v) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{itv_k} - 1}{t} f^\wedge(v)$$

$$= (iv_k) f^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

□

Bisher: Ableitung im Originalraum $\rightsquigarrow$ Multiplikation mit Potenzen im transformierten Raum. Jetzt: Umgekehrt.

Satz 10

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so daß $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f^\wedge(v)$ punktweise und in der Norm des Raumes $C_0(\mathbb{R}^n)$ partiell nach v_k differenzierbar und

$$(f^\wedge)_{v_k}(v) = ((-ix_k) f(x))^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

◁

Beweis.

$$\frac{f^\wedge(v + te_k) - f^\wedge(v)}{t} = \left(\frac{e^{-itx_k} - 1}{t} f(x) \right)^\wedge (v)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f^\wedge(v+te_k)-f^\wedge(v)}{t} - ((-ie_k)f(x))^\wedge(v) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{e^{-itx_k}-1}{t} - (-ix_k)\right) e^{-ivx} f(x)\; dx \qquad \text{[Def. 1]}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{e^{-itx_k}-1}{-itx_k} - 1\right)(-ix_k)e^{-ivx} f(x)\; dx}_{I}$$

Für $t \neq 0$:

$$\frac{e^{-ivt}-1}{-ivt} \;=\; \frac{1}{t}\int_0^t e^{-ivu}\; du$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{e^{-ivt}-1}{-ivt}\right| \;\leq\; 1$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t\longrightarrow 0} I = 0 \quad \text{f.ü.} \quad \text{und} \quad |I| \leq 2|x_k f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

unabhängig von t

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f^\wedge(v+te_k)-f^\wedge(v)}{t} \;=\; ((-ix_k)f(x))^\wedge(v) \quad \exists \qquad \text{[L25]}$$

Insbesondere: $(f^\wedge)_{v_k}$ existiert punktweise in jedem $v \in \mathbb{R}^n$ und

$$\left\| \frac{f^\wedge(v+te_k)-f^\wedge(v)}{t} - ((-ix_k)f(x))^\wedge(v) \right\|_{C_0}$$

$$\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{e^{-itx_k}-1}{-itx_k} - 1 \right| |x_k||f(x)|\; dx$$

$$\longrightarrow\; 0 \qquad \text{[wegen Majorante]}$$

□

Einige Bezeichnungen zur Formulierung von Analoga für Ableitungen höherer Ordnung: $\mathbb{Z}^n$ heißt Menge aller *Gitterpunkte* des $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}^n$ Menge aller *Multiindizes*. Für $k \in \mathbb{P}^n$ heißt

$$|k| := \sum_{j=1}^n k_j$$

die *Ordnung* des Multiindex k. *Beachte:* Für $k \in \mathbb{P}^n$ entspricht dies der ℓ^1-Norm, nicht der ℓ^2-Norm. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $l, k \in \mathbb{P}^n$ ist definiert:

$$x^k := {x_1}^{k_1} \cdots {x_n}^{k_n} \qquad \text{(Potenzen)}$$

$$l \leq k \;:\Longleftrightarrow\; l_j \leq k_j \quad \forall j = 1, \ldots, k \qquad \text{[(partielle Ordnung)]}$$

$$\binom{k}{l} \;:=\; \binom{k_1}{l_1} \cdots \binom{k_n}{l_n}$$

$$\binom{0}{0} \;:=\; 1$$

(Symbolischer) *Differentiationsvektor*

$$D := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Für $k \in \mathbb{P}^n$:

$$D^k := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$
$$= \frac{\partial^{|k|}}{\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}}$$

Vertauschung der ∂ ist kritisch (man braucht Stetigkeit der Ableitungen, vergleiche Heuser).

Algebraische Polynome in n reellen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit komplexen Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$:

$$P(x) := \sum_{\text{endl. viele } k \in \mathbb{P}^n} c_k x^k$$

d.h. endliche Linearkombination von Potenzen.

Sei $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ Menge aller algebraischen Polynome. Begriff des *Grades* eines Polynoms in $\mathbb{R}^n$ jetzt problematisch, z.B.:

(1) vom Grad $m \in \mathbb{P}$ in jeder Variablen:

$$\max_{j=1}^{n} k_j \leq m$$

(2) vom sphärischen Grad $m \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq m$$

(3) kumulativer Grad $m \in \mathbb{P}$:

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \leq m$$

(jeweils für alle Potenzen k im Polynom)

Ist

$$P(x) = \sum_{\text{endlich}} c_k x^k$$

ein Polynom, dann ist

$$P(D) := \sum_{\text{endlich}} c_k D^k$$
$$= \sum_{endlich} c_k \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

Dann ist der kumulative Grad des Polynoms die Ordnung des (linearen) Differentialoperators $P(D)$. Die zu erwartenden Ableitungsformeln für höhere Ableitungen werden motiviert durch

$$D_x^k e^{ivx} = (iv)^k e^{ivx}$$
$$= =$$
$$P(D)e^{ivx} = P(iv)e^{ivx}$$

Folgerung 12

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $P(x)$ ein Polynom. Unter den entsprechend iterativ erweiterten Bedingungen von Satz 9/10 gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$[P(D)f]^\wedge(v) = P(iv)f^\wedge(v)$$
$$[P(-ix)f(x)]^\wedge(v) = P(D)f^\wedge(v)$$

$\triangleleft$

(grundlegende Formeln des Kalküls; führt zu Übersichtlichkeit)

II.e Fourier-Transformation über $\mathfrak{s}$

Für $m \in \mathbb{P}$ sei $C^m(\mathbb{R}^n)$ definiert als Menge aller auf $\mathbb{R}^n$ definierten Funktionen f_i, fürdie im $\mathbb{R}^n$ die punktweisen partiellen Ableitungen $D^k f$ existieren und stetig sind $(\forall |k| \leq m)$. Dabei sei

$$C^0(\mathbb{R}^n) := C(\mathbb{R}^n)$$

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) := \text{Menge aller auf } \mathbb{R}^n \text{ beliebig oft stetig diffbaren Funktionen}$$

(z.b. $e^{x^2} \in C^\infty$, $\mathcal{P} \subset C^\infty$) Beachte:

Alle Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung stetig

$\Longrightarrow$ Reihenfolge der Differentiation hier beliebig [Schwarz]

Leibniz-Produktformel: Seien $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $k \in \mathbb{P}^n$ gilt:

$$D^k(fg)(x) = \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} D^l f(x) D^{k-l} g(x)$$

auf $\mathbb{R}^n$.

Motivation für $\mathfrak{s}$: Gesucht Menge *glatter* Funktionen ϕ, in der die Operationen Differentiation und Fourier-Transformation *beliebig* erlaubt sind und nicht aus der Menge führen, also:

$$\mathfrak{s} \subset C^\infty$$

und (Folgerung 13) mit ϕ gehört auch $x^k \phi(x)$ zur Menge $\forall k \in \mathbb{P}^n$.

Definition 10

$$\mathfrak{s} := \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n) := \left\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall k, m \in \mathbb{P}^m \; \exists C_{k,m} < \infty : |x^m D^k \phi(x)| \leq C_{k,m} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

$\mathfrak{s}$ heißt *Grund-* oder *Testraum* der *schnell abfallenden* Funktionen; $\phi \in \mathfrak{s}$ heißt *schnell abfallende Grund-* oder *Testfunktion* $\triangleleft$

Bemerkung

(1) $\mathfrak{s}$ ist definiert über Glattheit *und* Wachstum

(2) $(0 <) C_{k,m} < \infty$ sind Konstanten bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$, die von $k, m \in \mathbb{P}^n$ (und natürlich ϕ) abhängen

Also: $\mathfrak{s}$ besteht aus allen in $\mathbb{R}^n$ definierten komplexwertigen Funktionen ϕ, die dort beliebig oft differenzierbar sind und die zusammen mit allen ihren Ableitungen im Unendlichen schneller abfallen als jede Potenz x^{-m}, $m \in \mathbb{P}^n$, d.h.: Es ist

$$x^m D^k \phi(x) \in C_0(\mathbb{R}^n) \qquad \forall k, m \in \mathbb{P}^n$$

Lemma 4

(a) Für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{P}^m$ gilt mit gewissen Konstanten $a_{j_0,j} \in \mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$, $j_0 \in \mathbb{P}$, $j \in \mathbb{P}^n$

(i)
$$|x^m| \leq |x|^{|m|} \leq (1+|x|)^{|m|} \leq \sum_{j_0+|j|=|m|} a_{j_0,j} |x^j|$$

(ii)
$$|x^m| \leq (1+x^2)^{|m|} \leq \sum_{j_0+|j|=|m|} a_{j_0,j} |x^{2j}|$$

(b)
$$\mathfrak{s} = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | \forall k \in \mathbb{P}^n, r \in \mathbb{P} \exists C^*_{k,r} \leq \infty : |D^k \phi(x)| \leq \frac{C^*_{k,r}}{(1+|x|)^r} \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

(c)
$$\mathfrak{s} = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | \forall k \in \mathbb{P}^n, r \in \mathbb{P} \exists C^{**}_{k,r} \leq \infty : |D^k \phi(x)| \leq \frac{C^{**}_{k,r}}{(1+x^2)^r} \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

◁

Beweis.

(a) (i) Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{P}^n$ beliebig. Da $|x_i| \leq |x|$ $\forall 1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad |x^m| &:= \left| \prod_{i=1}^n x_i^{m_i} \right| \\
&= \prod_{i=1}^n |x_i|^{m_i} \\
&\leq \prod_{i=1}^n |x|^{m_i} =: |x|^{|m|} \\
|x| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \\
\Longrightarrow \quad (1+|x|)^{|m|} &\leq (1+\sum_{i=1}^n |x_i|)^{|m|} \\
&= \sum_{j_0+\cdots+j_n=|m|} \frac{|m|!}{j_0! j_1! \cdots j_n!} 1^{j_0} |x_1|^{j_1} \cdots |x_n|^{j_n} \\
&= \sum_{j_0+|j|=|m|} \frac{|m|!}{j_0! \cdots j_n!} |x^j|
\end{aligned}$$

$$:= \sum_{j_0+|j|=|m|} a_{j_0,j}\left|x^j\right|$$

$$\begin{aligned}
& |x| \leq 1 \\
\Longrightarrow\ & |x| \leq 1+x^2 \\
\Longrightarrow\ & |x^m| \leq |x|^{|m|} && \text{[(i)]} \\
& \leq (1+x^2)^{|m|} \\
& |x| > 1 \\
\Longrightarrow\ & |x^m| \leq |x|^{|m|} && \text{[(i)]} \\
& \leq (x^2)^{|m|} \\
& \leq (1+x^2)^{|m|}
\end{aligned}$$

(ii) Umgekehrt: Mit polynomialem Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^{|m|} &= \sum_{j_0+|j|=|m|} \frac{|m|!}{j_0!\cdots j_m!}(x_1^2)^{j_1}\cdots(x_n^2)^{j_n} \\
&= \sum_{j_0+|j|=|m|} a_{j_0,j}\left|x^{2j}\right|
\end{aligned}$$

(b) Seien $\phi \in \mathfrak{s}$, $k \in \mathbb{P}^n$, $r \in \mathbb{P}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ (1+|x|)^r\left|D^k\phi(x)\right| &\leq \sum_{j_0+|j|=|r|} a_{j_0,j}\left|x^j D^k\phi(x)\right| && \text{[(a)(i)]} \\
&\leq \sum_{j_0+|j|=|r|} a_{j_0,j}C_{k,j} =: C^*_{k,r} && \text{[Def. 10]}
\end{aligned}$$

Umgekehrt: Für beliebige $k, m \in \mathbb{P}^n$ und ϕ entspr. Bed. unter (b)

$$\begin{aligned}
\left|x^m D^k\phi(x)\right| &\leq (1+|x|)^{|m|}\left|D^k\phi(x)\right| \\
&\leq C^*_{k,|m|} =: C_{k,m} && \text{[Vorauss.]}\ \ \text{[(a)(i)]}
\end{aligned}$$

(c) Entsprechend mit (a)(ii).

□

Also: $\phi \in \mathfrak{s}$ bedeutet: ϕ zusammen mit allen Ableitungen strebt für $|x| \longrightarrow \infty$ stärker gegen 0 als jede Potenz von $\frac{1}{|x|}$

Lemma 5

$\mathfrak{s}$ ist ein Linearsystem über dem Körper $\mathbb{C}$, wobei $\mathfrak{s} \subsetneq C^\infty$. Weiterhin:

(a) $\mathfrak{s}$ ist abgeschlossen gegenüber Multiplikation mit Polynomen:

$$\phi \in \mathfrak{s} \Longrightarrow x^m\phi(x) \in \mathfrak{s} \qquad \forall m \in \mathbb{P}^n$$

(b) $\mathfrak{s}$ ist abgeschlossen gegen Multiplikation:

$$\phi, \psi \in \mathfrak{s} \Longrightarrow (\phi\psi)(x) \in \mathfrak{s}$$

d.h. (vgl. Def. I.14) $\mathfrak{s}$ ist unter dem *punktweisen* Produkt eine (kommutative) Algebra (ohne Eins)

(c) $\mathfrak{s}$ ist abgeschlossen gegen Ableitung:

$$\phi \in \mathfrak{s} \Longrightarrow D^k \phi(x) \in \mathfrak{s} \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

(d) $\mathfrak{s}$ ist abgeschlossen gegen reguläre affine Substitutionen:

$$\phi \in \mathfrak{s} \Longrightarrow \phi(Ax+b) \in \mathfrak{s} \qquad \forall b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n} (|A| \neq 0)$$

(e)

$$\mathfrak{s} \subset L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \forall p \in [1, \infty]$$

◁

Beweis. $\mathfrak{s}$ Linearsystem über $\mathbb{C}$: Klar. Da $e^{x^2} \in C^\infty$, aber $e^{x^2} \notin \mathfrak{s}$: $\mathfrak{s} \subsetneq C^\infty$. Beachte: $e^{-x^2} \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$, also $\mathfrak{s} \neq \emptyset$.

(a) Leibniz-Produktregel und Def. 10

(b) dito

(c) Definition 10

(d) elementar (aber lang)

(e) Sei $\phi \in \mathfrak{s}$

$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \exists C^*_{0,n+1} : (1+|x|)^{n+1} |\phi(x)| \ \leq \ C^*_{0,n+1}$ [Lemma 4(b): $k=0$, $r=n+1$]

$\Longrightarrow$ für $p \in [1, \infty]$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p \ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((1+|x|)^{n+1} |\phi(x)|)^p}{(1+|x|)^{(n+1)p}} \ dx$$

$$\leq \ (C^*_{0,n+1})^p \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{(n+1)p}} \ dr < \infty,$$

da $np + p - n + 1 = n(p-1) + 1 + p \geq 1 + p \geq 2$. Aussage für $p = \infty$ trivial nach Def. 10 (für $m = k = 0$)

□

Da $\mathfrak{s} \subset L^1$: Fourier-Transformation wohldefiniert über $\mathfrak{s}$.

Satz 11

Sei $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$:

(a)

$$[D^k \phi]^\wedge(v) = (iv)^k \phi^\wedge(v) \qquad v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{P}^n$$

(b) $\phi^\wedge \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$(D^k \phi^\wedge)(v) = [(-ix)^k \phi(x)](v) \qquad v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{P}^n$$

Bemerkung: Ableitungen hier im üblichen punktweisen Sinne ◁

Beweis.

(a) Benutze Satz 9 bzw. Folgerung 13. Dazu zeige:

$$\phi \in \mathfrak{s} \implies \phi \text{ beliebig oft stark in } L^1 \text{ diffbar}$$

Dazu:

$$\begin{aligned}
&\phi \in \mathfrak{s} \\
\implies\ & D^k\phi \in \mathfrak{s} \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n && \text{[Lemma 5(c)]} \\
\implies\ & \phi^\wedge, (D^k\phi)^\wedge \quad \text{wohldefiniert} && [\forall k \in \mathbb{P}^n]
\end{aligned}$$

Sei speziell $k = e_1$ und betrachte $D^{\mathrm{st}}_{x_1}$ (stark), $D^{\mathrm{pw}}_{x_1}$ (punktweise)

$$\begin{aligned}
\implies\ & \phi(x+te_j) - \phi(x) = \int_0^t D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x+se_1)\, dS && \text{[part. Int. nach } x_1] \\
\implies\ & \frac{\phi(x+te_1)-\phi(x)}{t} - D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x) = \frac{1}{t}\int_0^t \left(D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x+se_1) - D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x)\right) ds \\
\implies\ & \left\| \frac{\phi(x+te_1)-\phi(x)}{t} - D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x) \right\|_1 \le \frac{1}{|t|}\int_0^{|t|} \left\| D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x+se) - D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x)\right\|_1 ds && \text{[L22]} \\
& \qquad\qquad \le \sup_{0\le s\le |t|} \left\| D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x+se_1) - D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x)\right\|_1 < \epsilon
\end{aligned}$$

wegen L18 (Stetigkeit im Mittel) für $|t| \le \delta$ da $D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi \in \mathfrak{s} \subset L^1$ (Lemma 5(e))

$$\implies D^{\mathrm{st}}_{x_1}\phi \quad \exists \quad \text{und} \quad D^{\mathrm{st}}_{x_1}\phi(x) = D^{\mathrm{pw}}_{x_1}\phi(x) \quad \text{f.ü.}$$

Iteration $\rightsquigarrow$ ϕ beliebig oft stark in L^1 differenzierbar und

$$\begin{aligned}
& D^{k,\mathrm{st}}\phi = D^{k,\mathrm{pw}}\phi \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n \\
\implies\ & (D_{x_1}\phi)^\wedge(v) = (iv_1)\phi^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n && \text{[Satz 9]} \\
\implies\ & (D^k\phi)^\wedge(v) = (iv)^k\phi^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{P}^n && \text{[Folgerung 13]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\phi \in \mathfrak{s} \\
\implies\ & x^k\phi(x) \in \mathfrak{s} \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n && \text{[Lemma 5(a)]}
\end{aligned}$$

(b) $\implies$ Behauptung (Satz 10, Folgerung 13)

□

Folgerung 13

Seien $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$, $k, m \in \mathbb{P}^n$, dann gilt

$$(iv)^m D^k\phi^\wedge(v) = [D^m((-ix)^k\phi(x))]^\wedge(v) \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

◁

Satz 12

Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ und ihre Inverse $\mathcal{F}^{-1}$ sind lineare Abbildungen von $\mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ *auf* $\mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere: $\mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ ist abgeschlossen gegen $\mathcal{F}$. ◁

Beweis.

(i) Zeige: $\mathcal{F} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$, d.h.: $(\mathfrak{s})^\wedge \subset \mathfrak{s}$. Dazu: Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig. $\phi^\wedge \in C^\infty$ (Satz 11(b)). Seien $k, m \in \mathbb{P}^n$ beliebig

$$\Longrightarrow \quad \psi(x) := D^m((-ix)^k \phi(x)) \in \mathfrak{s} \subset L^1 \qquad \text{[Lemma 5(a+c+e)]}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|v^m D^k \phi^\wedge(v)\right| = \left|(iv)^m D^k \phi^\wedge(v)\right| \qquad \text{[Folgerung 14]}$$

$$= |\phi^\wedge(v)|$$

$$\leq \|\psi\|_1 =: C_{k,m} \qquad \forall v \in \mathbb{R} \qquad \text{[Satz 1]}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi^\wedge \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Def. 10]}$$

(ii) Klar: $\mathcal{F} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ linear.

(iii) Zeige: $\mathcal{F} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ ein-eindeutig, denn:

$$\Longrightarrow \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi_1^\wedge(v) = \phi_2^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi_1(x) = \phi_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{[Folgerung 6]}$$

da ϕ_1, ϕ_2 stetig.

(iv) Zeige: $\mathcal{F} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ *auf*, d.h.: $(\mathfrak{s})^\wedge = \mathfrak{s}$, dazu: Gegeben:

$$\phi \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi^\wedge \in \mathfrak{s} \subset L^1 \qquad \text{[(1)]}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = \mathcal{F}^{(1)}[\phi^\wedge](x) \qquad \text{[Folgerung 5, da } \phi \text{ stetig]}$$

$$:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^\wedge(v) e^{ixv} \, dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\phi^\wedge(-u)}_{=:(\phi^\wedge)^*(x)}) e^{-ixu} \, du$$

Setze

$$\psi(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} (\phi^\wedge)^*(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \psi \in \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \psi^\wedge(x) = \phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{[(1),(2)]}$$

Also: Zu gegebenem $\phi \in \mathfrak{s}$ existiert ψ, also alle Behauptungen bzgl. $\mathcal{F}$ bewiesen.

(v) Zeige: $\mathcal{F}^{-1} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ hat gleiche Eigenschaften. Dazu:

$$\mathcal{F}^{-1}[g](v) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{ivx} \, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[g^*](v) \qquad \text{[Lemma 1(d)]}$$

□

Folgerung 14

Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$:

(1)

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) := \psi^\vee(x) = (2\pi)^{-n} (\psi^*)^\wedge(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

(2)

$$(\psi^\wedge)^\wedge = (2\pi)^n \psi^*(v)$$

(3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)\ \overline{\psi(u)}\ du = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^\wedge(u)\ \overline{\psi^\wedge(u)}\ du$$

◁

Beweis.

(i) Nach Def., da $\psi \in L^1$.

(ii) Nach Def. und wegen Lemma 1(d) bzw. Folgerung 5, da ψ^* stetig, $(\psi^*)^\wedge \in L^1$.

$$\phi, \psi \in \mathfrak{s}$$
$$\Longrightarrow \quad \phi, \psi \in L^1 \quad \text{und} \quad \psi^\wedge \in \mathfrak{s} \in L^1 \qquad \text{[Lemma 5(e), Satz 12]}$$

(iii) $\Longrightarrow$ Behauptung (Ü12A1).

□

Satz 13

Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$:

$$\phi * \psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$$

d.h. $\mathfrak{s}$ abgeschlossen gegen Faltung, und $\mathfrak{s}$ ist mit Faltung als Produkt wieder eine kommutative Algebra (ohne Eins) (vgl. Folg. 8, vgl. Lemma 5(b)). Weiterhin:

(1)

$$[\phi * \psi]^\wedge(v) = \phi^\wedge(v)\psi^\wedge(v) \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

(2)

$$[\phi \cdot \psi]^\wedge(v) = (2\pi)^{-n}(\phi^\wedge * \psi^\wedge)(v) \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

◁

Beweis.

$$\phi, \psi \in \mathfrak{s} \subset L^1, \quad \psi \in C_0 \qquad \text{[Def. 10, Lemma 5(e)]}$$
$$\Longrightarrow \quad (\phi * \psi)(x) \quad \exists \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{[Satz 2]}$$

und $\psi * \psi \in L^1 \cap C_0$. Zeige: $\phi * \psi \in \mathfrak{s}$, dazu: Da $\phi, \psi \in \mathfrak{s} \in L^1$

$$\Longrightarrow \quad (\phi * \psi)^\wedge(v) \ = \ \phi^\wedge(v)\psi^\wedge(v) \qquad \text{[Satz 3]}$$

(d.h. insb. gilt (i)). Da (Satz 12):

$$\Longrightarrow \quad \phi^\wedge, \psi^\wedge \in \mathfrak{s}$$
$$\Longrightarrow \quad \phi^\wedge \psi^\wedge \in \mathfrak{s} \subset L^1 \qquad \text{[Lemma 5(b)]}$$
$$\Longrightarrow \quad (\phi * \psi)(x) \ = \ \mathcal{F}^{-1}(\phi^\wedge \psi^\wedge)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{[Folgerung 5, Ü12A1(a), } \phi * \psi \in C_0]$$

$$\begin{aligned} & \phi^\wedge\psi^\wedge \in \mathfrak{s} \\ \Longrightarrow\quad & \mathcal{F}^{-1}[\phi^\wedge\psi^\wedge] \in \mathfrak{s} && \text{[Satz 12]} \\ \Longrightarrow\quad & \phi * \psi \in \mathfrak{s} \end{aligned}$$

Zeige: (ii), dazu: Seien $\phi, \psi, \phi^\wedge, \psi^\wedge \in \mathfrak{s} \subset L^1$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad (\phi\psi)^\wedge(v) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi(x)e^{-ivx}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi^*(u)\psi^*(u)e^{ivu}\,du \\ &= (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\wedge\wedge}(u)\psi^{\wedge\wedge}(u)e^{ivu}\,du && \text{[Folg. 15(ii)]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{(\phi^\wedge * \psi^\wedge)}_{\in\mathfrak{s}}(v) && \text{[Folg. 5]} \end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Fourier(-Plancherel)-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < 2)$

Def. II 1 (L^1-Transformation) bzw. Satz II 1 ($\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow C_0$): Die Fourier-Transformation von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist als Lebesgue-Integral wohldefiniert für alle $v \in \mathbb{R}^n$ durch

$$f^\wedge(v) = \mathcal{F}^{(1)}[f](v) := \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-ivu}\, du$$

Aber: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ ist (Ü8A2) nicht notwendigerweise $\in L^1(\mathbb{R}^n)$, Integral so nicht möglich (vgl. dagegen L20 $\rightsquigarrow$ Kap. I (c)). Problem: Neue (möglichst erweiterte, nicht mehr als L-Integral über $\mathbb{R}^n$) Intepretation von $\int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-ivu}\, du$. Falls $f \in L^1 \cap L^p$, Konsistenz.

Fall $p = 2$ (Kapitel III (a)): Hilbertraumtheorie (vgl. Kap I(a)+(b)), angesiedelt im Rahmen der "Spektraltheorie in Hilberträumen", und zwar (im Hinblick auf Fourier-Transformation) "Spektraltheorie beschränkter selbstadjungierter Operatoren", Kap I(a)+(b): "kompakter symmetrischer Operatoren".

Fall $1 < p < 2$ (Kapitel III(c)): Riesz-Thorin-Konvexitätssatz: Zwischen L^1- und L^2-Eigenschaften wird "interpoliert".

Fall $p > 2$ (Kapitel IV): Temperierte Distributionen.

III.a Der Fall $p = 2$

Satz von Plancherel (1885-1967):

Ü12A1(c): Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so daß $f^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$f, f^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(vgl. Satz II.1) und

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

(Parseval-Gleichung, vgl. Folgerung 1 + 3(c))

Beachte: Da $f, f^\wedge \in L^1$, ist

$$\begin{aligned} & f(x) \;=\; (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\; e^{ixv}\; dx \quad \text{f.ü.} \\ \Longrightarrow\quad & f \;\in\; L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \Longrightarrow\quad & f \;\in\; L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \forall 1 \le p \le \infty \end{aligned}$$ [trivial]

Entsprechend für $f^\wedge$.

Lemma 1

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$f^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\, \|f^\wedge\|_2$$

$\lhd$

Beachte: Satz II.1: $f^\wedge \in C_0$, also: *Vorauss.*:

$$\begin{aligned} & f \;\in\; L^1 \cap L^2 \\ \Longrightarrow\quad & f \;\in\; \mathrm{L}^p \qquad \forall 1 \le p \le 2 \\ \Longrightarrow\quad & f^\wedge \;\in\; L^2 \cap C_0 \\ \Longrightarrow\quad & f^\wedge \;\in\; L^q \qquad \forall 2 \le q \le \infty \end{aligned}$$ [Lemma 1]

(Dualität)

Beweis. Seien $f^\#(x) := \overline{f(-x)}$ und $h := f * f^\#$.

$$\begin{aligned} & f \;\in\; L^1 \cap L^2 \\ \Longrightarrow\quad & f^\# \;\in\; L^1 \cap L^2 \\ \Longrightarrow\quad & h \;\in\; L^1 \cap C_0 \end{aligned}$$ [nach Vorauss.]

nach Satz II.2(b), da $f, f^\# \in L^2$, also $f \in L^p$, $f^\# \in L^{p'}$ für $1 < p = p' = 2$, $1/p + 1/p' = 1$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{\rho \longrightarrow \infty} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} h^\wedge(v)\; e^{ixv} dv \;=\; h(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$ [Folg. II 4, Satz II 6(a)]

insbesondere in $x = 0$, also

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} h^\wedge(v)\; dv \;=\; h(0) \tag{3.1}$$

Da $f, f^\# \in L^1$:

$$\begin{aligned} h^\wedge(v) \;&=\; f^\wedge(v)(f^\#)^\wedge(v) && \text{[Satz II 3]} \quad (3.2) \\ &=\; f^\wedge(v)\overline{f^\wedge(v)} && \text{[Lemma II 1(c)]} \\ &=\; |f^\wedge(v)|^2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad & 0 \le e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} h^\wedge(v) \text{ monoton steigend in } \rho > 0 \\ & \lim_{\rho \longrightarrow \infty} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} h^\wedge(v) \;=\; h^\wedge(v) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} h^\wedge(v)\ dv = h^\wedge(v)}_{< \infty,\ \text{da wg. (3.1) konv gegen } (2\pi)^n h(0)} \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\rho \longrightarrow \infty} e^{-\left(\frac{v}{2\rho}\right)^2} dv = h^\wedge(v)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h^\wedge(v)\ dv$$

$$\Longrightarrow \quad h^\wedge \ \in \ L^1(\mathbb{R}^n) \qquad \text{[Levi, L24]}$$

d.h.: $f^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^n)$ wegen $(**)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} h^\wedge(v)\ dv \ = \ (2\pi)^n h(0) \qquad \text{[(3.2)]}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} h(0) \ &= \ (f * f^\#)(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-u)\ f^\#(u)\ du \qquad \text{[Def. II 2]} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-u)\ \overline{f(-u)}\ du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2 du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(v)|^2 dv \ &= \ \int_{\mathbb{R}^n} h^\wedge(v)\ dv \qquad \text{[(**)]} \\ &= \ (2\pi)^n h(0) \\ &= \ (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2 du \end{aligned}$$

Nochmal Wurzel $\Longrightarrow$ Behauptung. □

Lemma 2

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\rho > 0$ sei definiert

$$f_\rho(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } |x| \le \rho \\ 0 & \text{für } |x| > \rho \end{cases}$$

Dann ist $f_\rho \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $f_\rho^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^n)\ \forall \rho > 0$. Weiterhin konvergiert $f_\rho^\wedge$ für $\rho \longrightarrow \infty$ in der Norm des Raumes $L^2(\mathbb{R}^n)$ gegen eine Funktion in $L^2(\mathbb{R}^n)$. ◁

Beweis.

$$\begin{aligned} & f \ \in \ L^2 \\ \Longrightarrow \quad & \|f_\rho\|_2^2 \ := \ \int_{|u| \le \delta} |f(u)|^2 du \\ & \le \ \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2 du \\ & = \ \|f\|_2^2 \qquad \forall \rho > 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f_\rho \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\|f_\rho\|_1 := \int_{|u|\le\rho} |f(u)|\, du$$

$$\le \left(\int_{|u|\le\rho} |f(u)|^2 du\right)^{1/2} \left(\int_{|u|\le\rho} 1\, du\right)^{1/2} \qquad \text{[L19]}$$

$$= \left(\frac{\omega_n}{n}\rho^n\right)^{1/2} \|f\|_2 \qquad \text{[Lemma II.3]}$$

[Letzte Zeile stand in meiner Mitschrift, sieht aber komisch aus (habs wohl falsch abgeschrieben). IMHO muesste es entweder $\le$ heißen oder am Ende $\|f_\rho\|$ stehen (beides macht Sinn und tut der Aussage keinen Abbruch)]

$$\Longrightarrow \quad f_\rho \in L^1(\mathbb{R}^n) \qquad \text{[vgl. L20]}$$

$$\Longrightarrow \quad f_\rho \in L^1 \cap L^2 \qquad \forall \rho > 0$$

$$\Longrightarrow \quad f_\rho^\wedge \in L^2 \qquad \forall \rho > 0 \qquad \text{[Lemma 1]}$$

und für $\rho_1 < \rho_2$ gilt:

$$(2\pi)^{-n} \left\|f_{\rho_1}^\wedge - f_{\rho_2}^\wedge\right\|_2 = \|f_{\rho_1} - f_{\rho_2}\|_2$$

$$= \int_{\rho_1\le|u|\le\rho_2} |f(u)|^2 du$$

$$\longrightarrow 0 \qquad \text{mit } \rho_2 > \rho_1 \longrightarrow \infty, \text{ da } f \in L^1$$

$\Longrightarrow (f_\rho^\wedge)_{\rho>0}$ Cauchy-Folge im Banach-Raum (L17!) $L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\exists_1$ Element in $L^2(\mathbb{R}^n)$ so daß $(f_\rho^\wedge)_{\rho>0}$ dagegen in der L^2-Norm konvergiert für $\rho \longrightarrow \infty$. □

Bemerkung
Bis auf weiteres (vgl. Lemma 3) ist das Symbol ^ reserviert für die L^1-Fourier-Transformation ($\mathcal{F}^{(1)}$) entsprechend Def. II.1.

Definition 1 (Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{(2)}$)

$\mathcal{F}^{(2)}[f]$ von $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als die nach Lemma 2 (eindeutig) existierende Funktion, die gegeben ist durch

$$\lim_{\rho\longrightarrow\infty} \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f] - f_\rho^\wedge\right\|_2 = \lim_{\rho\longrightarrow\infty} \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f] - \int_{|u|\le\rho} f(u)\, e^{-ivu}\, du\right\|_2 = 0$$

Also: Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{(2)}$ ist definiert als Fortsetzung von $\mathcal{F}^{(1)}$ durch Abschluß von $L^1 \cap L^2$ in L^2.
◁

Satz 1

(vgl. Lemma 1, Satz II.1, Folgerung I.4) Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{(2)}$ ist ein eineindeutiger linear beschränkter Operator von $L^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, der bis auf einen konstanten Faktor Normen erhält, d.h. es gilt die Parseval-Gleichung (vgl. Folg. I.3(c))

$$\left\|\mathcal{F}^{(2)}[f]\right\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2 \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

◁

Beweis. Nach Lemma 2 und Def. 1: $\mathcal{F}^{(2)} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert. Wegen der Dreiecksungleichung für Normen (L15):

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f]\right\|_2 - \underbrace{\left\|\mathcal{F}^{(2)}[f] - f_\rho^\wedge\right\|_2}_{\longrightarrow 0 \text{ für } \rho \longrightarrow \infty} &\leq \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f] - (\mathcal{F}^{(2)}[f] - f_\rho^\wedge)\right\|_2 \\ &= \left\|f_\rho^\wedge\right\|_2 \\ &\leq \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f]\right\|_2 + \underbrace{\left\|\mathcal{F}^{(2)}[f] - f_\rho^\wedge\right\|_2}_{\longrightarrow 0 \text{ für } \rho \longrightarrow \infty} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\|f_\rho^\wedge\right\|_2 = \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f]\right\|_2 \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Ebenfalls

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \|f_\rho\|_2 &= \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left(\int_{|u| \leq \rho} |f(u)|^2 du\right)^{1/2} \\ &= \|f\|_2 \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Nach Lemma 2:

$$\begin{aligned} & f_\rho \in L^2 \cap L^1 \\ \Longrightarrow \quad & \|f_\rho\|_2 = (2\pi)^{-n/2} \left\|f_\rho^\wedge\right\|_2 && \text{[(a)]} \\ \Longrightarrow \quad & \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f]\right\|_2 = \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\|f_\rho^\wedge\right\|_2 \\ & = (2\pi)^{n/2} \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \|f_\rho\|_2 \\ & = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2 \end{aligned}$$

Klar: $\mathcal{F}^{(2)} : L^2 \longrightarrow L^2$ beschränkt (Def. I.11), linear und eineindeutig (wg. Parseval-Gleichung) □

Lemma 3

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Für die nach Def. II.1 bzw. Def. 1 gebildeten Fourier-Transformationen $\mathcal{F}^{(1)}[f]$ bzw. $\mathcal{F}^{(2)}[f]$ gilt

$$\mathcal{F}^{(1)}[f](v) = \mathcal{F}^{(2)}[f](v) \quad \text{f.ü.}$$

◁

Also: Def. II.1 und Def. 1 sind verträglich, so daß Def. 1 als Fortsetzung von Def. II.1 verstanden werden kann ⇝ Bezeichnung im folgenden wieder

$$f^\wedge(v) := \mathcal{F}^{(2)}[f] \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Beweis. Sei $f \in L^1 \cap L^2$

$$\Longrightarrow \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\|\mathcal{F}^{(2)}[f](v) - \int_{|u| \leq \rho} f(u)\, e^{-ivu}\, du\right\|_2 = 0 \qquad \text{[Def.1]}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists (\rho_j)_{j\in\mathbb{N}} : \mathcal{F}^{(2)}[f](v) \;=\; \underbrace{\lim_{\rho\longrightarrow\infty} \int_{|u|\le\rho_j} f(u)\; e^{-ivu}\; du \quad \text{f.ü.}}_{\exists \text{ da } f\,\in\, L^1} \qquad [\text{L26}]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\; e^{ivu}\; du \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$= \mathcal{F}^{(1)}[f](v) \qquad [\text{Def. 2}]$$

□

Satz 2 (Parseval-Formel)

(vgl. Satz II.4) Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\; g(v)\; dv = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\; g^\wedge(v)\; dv$$

◁

Beweis. Für $\rho_1, \rho_2 > 0$ seien f_{ρ_1}, g_{ρ_2} wie in Lemma 2 definiert.

$$f, g \;\in\; L^2$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge_{\rho_1}(v)\; g_{\rho_2}(v)\; dv \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f_{\rho_1}(v)\; g^\wedge_{\rho_2}(v)\; dv \qquad \forall \rho_1, \rho_2 > 0 \qquad [\text{Satz II 4}]$$

$$f \;\in\; L^2$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{m\longrightarrow\infty} \|f - f_{\rho_1}\|_1 \;=\; 0$$

$\Longrightarrow$ Für jedes (feste) $\rho_2 > 0$ gilt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{\rho_1}(v)\; g^\wedge_{\rho_2}(v)\; dv - \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\; g^\wedge_{\rho_2}\; dv \right| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^n} |f_{\rho_1}(v) - f(v)|\; |g^\wedge_{\rho_2}(v)|\; dv$$

$$\le \quad \underbrace{\|f_{\rho_1} - f\|_2}_{\longrightarrow 0} \quad \underbrace{\left\|g^\wedge_{\rho_2}\right\|_2}_{\exists \text{ nach Lemma 2}} \qquad [\text{L19}]$$

$$\longrightarrow\; 0 \qquad \text{für } \rho_1 \longrightarrow \infty$$

Nach Def. 1:

$$\lim_{\rho_1\longrightarrow\infty} \left\|f^\wedge - f^\wedge_{\rho_1}\right\|_2 \;=\; 0$$

Also gilt für jedes $\rho_2 > 0$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge_{\rho_1}(v)\; g_{\rho_2}(v)\; dv - \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\; g_{\rho_2}(v)\; dv \right| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^n} \left|f^\wedge_{\rho_1} - f^\wedge(v)\right|\; |g_{\rho_2}(v)|\; dv$$

$$\le \quad \left\|f^\wedge_{\rho_1} - f^\wedge\right\|\, \|g_{\rho_2}\| \qquad [\text{L19}]$$

$$\longrightarrow\; 0 \qquad \text{für } \rho_1 \longrightarrow \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\; g_{\rho_2}(v)\; dv \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\; g^\wedge_{\rho_2}(v)\; dv$$

Entsprechend nun für $\rho_2 \longrightarrow \infty$, $\Longrightarrow$ Behauptung □

Klar (vgl. Lx17): $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist Hilbert-Raum (Def. I 3+4) unter dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\ \overline{g(u)}\ du \qquad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Folgerung 1

$$\langle f^\wedge, f^\wedge\rangle = (2\pi)^n \langle f, f\rangle \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$\langle f^\wedge, \overline{g}\rangle = \langle f, \overline{g}^\wedge\rangle \qquad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

◁

Beweis. Satz 1+2. □

Satz 3

Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die *Umkehrformel*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| f(x) - (2\pi)^{-n} \int_{|v| \le \rho} f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

d.h. (Def. 1): $f(x) = (2\pi)^{-n}(f^\wedge)^\wedge(-x)$ fast überall. Weiterhin $\overline{f(x)} = (2\pi)^{-n}(\overline{f^\wedge})^\wedge(x)$ fast überall. ◁

Beweis. Sei $f \in L^2$ beliebig

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow && f^\wedge \in L^2 && \text{[Satz 1]}\\
&\Longrightarrow && (\overline{f^\wedge})^\wedge \in L^2 \text{ wohldefiniert} && \text{[Satz 1]}\\
&\Longrightarrow && \left\|(2\pi)^n \overline{f} - \overline{f^\wedge}^\wedge\right\|_2^2 &= \langle (2\pi)^n \overline{f} - (\overline{f^\wedge})^\wedge, (2\pi)^n \overline{f} - (\overline{f^\wedge})^\wedge\rangle\\
& && &= (2\pi)^{2n}\langle \overline{f}, \overline{f}\rangle - (2\pi)^n \langle \overline{f}, (\overline{f^\wedge})^\wedge\rangle\\
& && &\quad -(2\pi)^n \langle (\overline{f^\wedge})^\wedge, f\rangle + \langle (\overline{f^\wedge})^\wedge, (\overline{f^\wedge})^\wedge\rangle
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
\langle \overline{f}, (\overline{f^\wedge})^\wedge\rangle &= \overline{\langle (\overline{f^\wedge})^\wedge, f\rangle}\\
&= \overline{\langle \overline{f^\wedge}, \overline{f^\wedge}\rangle} && \text{[Satz 2, Folg. 1]}\\
&= \|f^\wedge\|_2^2\\
&= (2\pi)^n \|f\|_2^2 && \text{[Satz 1]}\\
&= \langle (\overline{f^\wedge})^\wedge, \overline{f}\rangle && \text{[zurück]}\\
\langle (\overline{f^\wedge})^\wedge, (\overline{f^\wedge})^\wedge\rangle &= (2\pi)^n \langle \overline{f^\wedge}, \overline{f^\wedge}\rangle && \text{[Satz 1, Folg. 1]}\\
&= (2\pi)^n \|f\|_2^2\\
&= \|f\|_2^2 && \text{[Satz 1]}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| (2\pi)^n \overline{f} - (\overline{f^\wedge})^\wedge \right\|_2^2 \;=\; 0$$

d.h. $\overline{f(x)} = (2\pi)^{-n}(\overline{f^\wedge})(x)$ fast überall, also (Def. 1):

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| \overline{f(x)} - \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|u| \le \rho} \overline{f^\wedge(u)}\; e^{-ixu}\; du \right\|_2 \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| f(x) - \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|u| \le \rho} f^\wedge(u)\; e^{ixu} du \right\|_2 \;=\; 0$$

□

Folgerung 2

Zu allen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(v) = g^\wedge(v) \qquad \text{f.ü.}$$

◁

d.h.: $\mathcal{F}^{(2)}$ surjektiv (vgl. Satz 1)

Beweis. Sei $f \in L^2$ beliebig

$$\Longrightarrow \quad f^\wedge \;\in\; L^2 \qquad \text{[Satz 1]}$$

also Kandidat:

$$g(x) = (2\pi)^{-n} f^\wedge(-x) \in L^2$$

wohldefiniert, also $g^\wedge \in L^2$ und

$$g^\wedge(v) = (2\pi)^{-n} \big(f^\wedge(v)\big)^\wedge(v)$$

Definition 1:

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}^{(2)}[f^\wedge(-x)](v) - \underbrace{\int_{|x| \le \rho} f^\wedge(-x)\; e^{-ivx}\; dx}_{= \int_{|x| \le \rho} f^\wedge(u)\; e^{ivu}\; du} \right\|_2 \;=\; 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad g^\wedge(v) \;&:=\; (2\pi)^{-n} \big(f^\wedge(-x)\big)^\wedge(v) \\ &=\; (2\pi)^{-n} (f^\wedge)^\wedge(-v) \\ &=\; f(v) \quad \text{f.ü.} \qquad \text{[Satz 3]} \end{aligned}$$

□

Satz 4 (Verallgemeinerte Parseval-Gleichung)

(vgl. Folg. I.3(b))

$$\langle f, g \rangle = (2\pi)^{-n} \langle f^\wedge, g^\wedge \rangle \qquad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

◁

Beweis.

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\ \overline{g(u)}\ du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)(2\pi)^{-n}(\overline{g^\wedge})^\wedge(u)\ du && \text{[Satz 3]} \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(u)\ \overline{g^\wedge(u)}\ du := (2\pi)^{-n}\langle f^\wedge, g^\wedge\rangle && \text{[Satz 2]}\end{aligned}$$

□

Folgerung 3 (Satz von Plancherel)

(vgl. Satz 1, Satz II.1, Folg. II.9, Folg. I.4) Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{(2)}$ definiert eine bijektive, lineare, beschränkte Abbildung des Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ auf sich, die die inneren Produkte und damit die Normen (bis auf einen konstanten Fehler) invariant läßt. ◁

Beweis. Satz 1, Folg. 2, Satz 4. □

Bemerkung

(i) Nach Satz 3: *Kein* Umkehrproblem in der $L^2(\mathbb{R}^n)$-Theorie, denn: Kandidat für die Unkehrtransformation ist gegeben durch

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\ e^{ixv}\ dv$$

und wieder Interpretationsprobleme, da $f^\wedge \in L^2$, aber *nicht* notwendigerweise $f^\wedge \in L^1$. Aber: Interpretation des Fourier-Umkehrintegrals nun symmetrisch zu Def. 1 möglich (siehe Satz 3), vgl. dagegen $L^1(\mathbb{R}^n)$-Theorie in Kapitel II(b), insbesondere für $n = 1$ (Dirichlet-Integral, Jordan-Kriterium) Ü10A1

(ii) $\mathcal{F}^{(2)} : L^2 \longrightarrow L^2$, also Fourier-Transformation über L^2 sehr symmetrisch, vgl. Kap. 1(b)

(iii) Für weitere Eigenschaften (z.B. Analoga zu Lemma II.1, Satz II.3 etc.) siehe Kap. 3(c) (zusammen mit Fall $1 < p < 2$)

III.b Interpolationssatz von Riesz-Thorin

Bisher: Definition der Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Ziel: Definition auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$, und zwar konsistent. Dazu: Nach Def. II 1: Abbildung $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)}$ wohldefiniert auf $L^1 \cap L^2 \subset L^1$, so daß

- Satz II 1: $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_1$, Typ $(1,\infty)$
- Lemma 1: $\|\mathcal{F}f\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2$, Typ $(2,2)$

Da $L^1 \cap L^2$ dicht (Def. I 9) in L^1 (Folgerung II 2/3, z.B. mittels Beispiel W) und in L^2 (Lemma 2 mittels f_ρ) und $\mathcal{F}$ stetig auf $L^1 \cap L^2$ bzgl. L^1 (Satz II 1): Diese Typ-Abschätzungen gelten auf ganz L^1 bzw. L^2 (Satz II 1, Satz 1).

Frage: Existiert für (interpolierendes) $1 < p < 2$ ein (interpolierendes, duales) $2 < q < \infty$, so daß

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq M_{p,q} \|f\|_p \qquad f \in S \subset L^1$$

mit S dicht in L^p? Antwort: Ja – Riesz-Thorin-Interpolationssatz mit q so daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Satz 5 (Drei-Linien-Theorem von Phragmén-Lindelöf)

Sei $F(z) = F(x+iy)$ eine komplexwertige, stetige, beschränkte Funktion auf dem abgeschlossenen Streifen

$$S_{\alpha,\beta} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \alpha \leq x \leq \beta, y \in \mathbb{R}\},$$

die im Innern von $S_{\alpha,\beta}$ holomorph ist. Gilt

$$|F(\alpha + iy)| \leq M_\alpha \quad \text{und} \quad |F(\beta + iy)| \leq M_\beta$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ (F beschränkt!), dann gilt

$$|F(x+iy)| \leq M_\alpha^{1-L(x)} M_\beta^{L(x)} \qquad \forall z = x + iy \in S_{\alpha,\beta},$$

wobei $L(x) := \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ die Gerade durch $(\alpha, 0)$ und $(\beta, 1)$ ist. ◁

Beweis. Zunächst seien $M_\alpha, M_\beta > 0$. Setze

$$f(z) := \frac{F(z)}{M_\alpha^{1-L(z)} M_\beta^{L(z)}}$$

mit

$$M_\beta^{L(z)} = e^{L(z) \log M_\beta}$$

und $\log M_\beta$ Hauptzweig $\Longrightarrow$ $f(z)$ erfüllt in $S_{\alpha,\beta}$ gleiche Bedingungen wie F, nur

$$\Longrightarrow \quad f(\alpha + iy) \leq 1 \quad \text{und} \quad |f(\beta + iy) \leq 1|$$

denn:

$$L(z) = L(x) + i\frac{y}{\beta - \alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|M_\beta^{L(z)}\right| = \left|e^{L(x)\log M_\beta} e^{\frac{i \log M_\beta}{\beta-\alpha} y}\right| = M_\beta^{L(x)}$$

Zeige:

$$|f(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in S_{\alpha,\beta},$$

hieraus folgt sofort die Aussage für $F(z)$. Dazu:

Fall I: Sei

$$\lim_{|y| \longrightarrow \infty} f(x+iy) = 0 \quad \text{gleichmäßig} \qquad \forall \alpha \leq x \leq \beta,$$

dann folgt die Aussage sofort aus dem Maximumprinzip (Analysis IV), denn: Sei y_0 so daß

$$|f(x+iy)| \leq 1 \qquad \forall |y| \geq y_0, \ \alpha \leq x \leq \beta$$

Sei A das Rechteck mit den Ecken $\alpha + iy_0$, $\beta + iy_0$, $\beta - iy_0$, $\alpha - iy_0$.

$$\Longrightarrow \quad |f(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in \partial A$$

Da $f(z)$ holomorph im Innern von A ist, liefert das Maximumprinzip

$$|f(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in A$$

Insgesamt:

$$|f(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in S_{\alpha,\beta}$$

Fall II: Im allgemeinen Fall betrachte für $k \in \mathbb{N}$, $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$:

$$f_k(z) := f(z)e^{\frac{z^2-\gamma^2}{k}}$$

$$\Longrightarrow \quad |f_k(z)| = |f(z)|e^{\frac{x^2-\gamma^2}{k}} \leq Be^{-y^2/k}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (|y| \longrightarrow \infty)$$

gleichmäßig auf $\alpha \leq x \leq \beta$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ (da F und damit f beschränkt: $|f(z)| \leq \beta \; \forall z \in S_{\alpha,\beta}$. Dazu

$$|f_k(\alpha+iy)| = |f(\alpha+iy)|e^{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{k}}e^{-\frac{y^2}{k}} \leq 1$$

$$|f_k(\beta+iy)| = |f(\beta+iy)|e^{\frac{\beta^2-\gamma^2}{k}}e^{-\frac{y^2}{k}} \leq 1$$

und jedes f_k erfüllt die übrigen Bedingungen von f (bzw. F) in $S_{\alpha,\beta} \rightsquigarrow$ Fall 1:

$$|f_k(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in S_{\alpha,\beta}, k \in \mathbb{N}$$

Also:

$$\left| f(z)e^{\frac{z^2-\gamma^2}{k}} \right| \leq 1 \qquad \forall z \in S_{\alpha,\beta}, k \in \mathbb{N}$$

Nun $k \longrightarrow \infty$:

$$|f(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in S_{\alpha,\beta}, k \in \mathbb{N},$$

also die Behauptung. Zuallerletzt: Sei z.B. $M_\alpha = 0$

$$\Longrightarrow \quad |F(\alpha+iy)| \leq M_{\alpha k} \qquad \text{[trivial]}$$

mit $M_{\alpha k} > 0$ und $\lim_{k\longrightarrow\infty} M_{\alpha k} = 0$

$$\Longrightarrow \quad |F(z)| \leq M_{\alpha k}^{1-L(x)} M_\beta^{L(x)} \qquad \forall k$$

$$\overset{k\longrightarrow\infty}{\Longrightarrow} |F(z)| \leq M_{\alpha k}^{1-L(x)} M_\beta^{L(x)}$$

(d.h. $F(z) = 0$ auf $S_{\alpha,\beta}$)

□

Definition 2 (logarithmisch konvex)

(vgl. Def. (a) in Ü12) Eine reellwertige Funktion g heißt *konvex* auf $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, falls

$$g((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)g(x_1) + tg(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in [\alpha,\beta], t \in [0,1]$$

Eine (echt) positive Funktion g heißt *logarithmisch konvex* auf $[\alpha, \beta]$, falls $\log g(x)$ auf $[\alpha, \beta]$ konvex ist. ◁

Folgerung 4

Sei $F \neq 0$ beschränkt und stetig auf S_{01} und holomorph im Innern von S_{01}. Ist

$$|F(iy)| \leq M_0 \quad \text{und} \quad |F(1+iy)| \leq M_1 \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$|F(x+iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x \qquad \forall x+iy \in S_{01}$$

Darüberhinaus ist

$$\Phi(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(x+iy)|$$

logarithmisch konvex auf $[0,1]$. ◁

Beweis. Satz 5 mit $[\alpha,\beta] := [0,1]$, $L(x) := x$. Weiter: Zeige: $\Phi(x)$ logarithmisch konvex auf $[0,1]$. Dazu: Seien $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit $x_1 \leq x_2$ und $t \in [0,1]$ beliebig. Satz 5 für $[\alpha,\beta] = [x_1,x_2]$, $M_{x_1} = \Phi(x_1)$, $M_{x_2} = \Phi(x_2)$, $L(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ liefert

$$\begin{aligned} & |F(x+iy)| \;\leq\; \Phi(x_1)^{1-L(x)} \Phi(x_2)^{L(x)} \qquad \forall x+iy \in S_{x_1 x_2} \\ \Longrightarrow \quad & \Phi(x) \;\leq\; \Phi(x_1)^{1-L(x)} \Phi(x_2)^{L(x)} \qquad \forall x \in [x_1,x_2] \end{aligned}$$

Klar: Für $x \in [x_1,x_2]$ existiert immer ein $t \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} & x \;=\; (1-t)x_1 + tx_2 \\ \Longrightarrow \quad & L(x) = t \quad \text{und} \quad \log \Phi((1-t)x_1 + tx_2) \;=\; \log \Phi(x) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq\; (1-t)\log \Phi(x_1) + t \log \Phi(x_2) \end{aligned}$$

□

Zur Erweiterung von Skript L auf $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$:

Definition *Maßraum*: Ein Tripel $(X,\mathcal{A},\mu)$, X Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algevra von Teilmengen von X, μ Maß, das heißt

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; & \mu(A) \leq \infty \qquad \forall A \in \mathcal{A} \\ \mu(\emptyset) \;=\; & 0 \\ \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; & \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \qquad A_k \in \mathcal{A} \text{ paarweise disjunkt} \qquad [\sigma\text{-Additivität}] \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{A}$ heißt *endlich*, falls $\mu(A) < \infty$.

Ein Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ habe hier die zusätzlichen Eigenschaften

1. σ-endlich: $\exists (A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, A_k μ-endlich mit

$$X \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

2. vollständig:

$$A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \vee B \subset A \;\Longrightarrow\; B \in \mathcal{A}$$

Definition 3

(vgl. Skript L, S.2) Vorgegeben ein Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$. Eine Funktion $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt μ-einfach, falls ϕ für ein $j \in \mathbb{N}$ darstellbar ist durch

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{j} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x) \qquad \forall x \in X,$$

wobei $c_k \in \mathbb{C}$ und $A_k \in \mathcal{A}$ μ-endlich $\forall 1 \leq k \leq j$ ($\mathbb{1}$ = char. Funktion).
Die (eindeutige) Darstellung (für $\phi \neq 0$) mit von 0 verschiedenen paarweise verschiedenen Koeffizienten c_k und nichtleeren, paarweise disjunkten Mengen A_k heißt *kanonisch*. $S = S_\mu$ sei die Menge aller μ-einfachen Funktionen. $\triangleleft$

Sei $S = S_\mu$ die Menge aller μ-einfachen Funktionen
$\rightsquigarrow$ Aufbau der Meßbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen analog zu Skript L – dort für $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, $\mu = m$ (L-Maß)
$\rightsquigarrow$ Die Räume $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p_\mu$ $(1 \leq p \leq \infty)$ bestehen aus den μ-Äquivalenzklassen der μ-meßbaren Funktionen $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$
$\rightsquigarrow \|f\|_{p,\mu} < \infty$ mit

$$\|f\|_{p,\mu} := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \ d\mu\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

$\Longrightarrow L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ (vgl. L17) ist Banach-Raum.

Lemma 4

Vorgegeben ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ist $S_\mu \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ linearer Teilraum. Dazu ist S_μ dicht (Def. I 9) in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, falls $1 \leq p < \infty$. Insbesondere: Ist $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ so daß f außerhalb einer μ-endlichen Menge $A \in \mathcal{A}$ verschwindet, so existiert eine Folge $(\phi_k) \subset S_\mu$ mit

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|f - \phi_k\|_{p,\mu} = 0$$

und ϕ_k verschwindet außerhalb von A für jedes $k \in \mathbb{N}$. Ist $\mu(X) < \infty$ (beachte: $X \in \mathcal{A}$), so ist S_μ auch dicht in $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. $\triangleleft$

Seien X, Y LNR und $D \subset X$ linearer Teilraum. Dann ist $(D, \|\cdot\|_X)$ LNR. Sei $T : D \longrightarrow Y$ linear. T heißt *beschränkt* (auf D; vgl. Def. I 11), falls

$$\|T\|_{[D,Y]} < \infty$$

mit

$$\|T\|_{[D,Y]} := \sup_{f \in D, f \neq 0} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X}$$

Lemma 5

Seien X LNR, Y BR, $D \subset X$ linear und dicht in X, $T : D \longrightarrow Y$ linear und beschränlt. Dann ist T eindeutig fortsetzbar von D auf ganz X bei gleicher Norm: Es gibt eine lineare beschränkte Abbildung $\widetilde{T} : X \longrightarrow Y$ mit

$$\widetilde{T}_{|D} = T$$

und

$$\left\|\widetilde{T}\right\|_{[X,Y]} = \|T\|_{[D,Y]}$$

$\triangleleft$

Beachte: In Anwendungen: Operatornorm nur über dichte lineare Teilmenge (der Einheitskugel) auszurechnen. Da Fortsetzung $\widetilde{T}$ eindeutig: Identifiziere $\widetilde{T}$ mit T.

Beweis. Ü?A? $\square$

Ist $Y = \Phi = \mathbb{C}$, dann heißt der Operator $T : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *Funktional*. Zu einem linearen normierten Raum X ist X^* der Raum der auf X definierten linearen beschränkten Funktionale. X^* ist mit der Operatornorm ein Banach-Raum ($\mathbb{C}$ vollständig).

Satz 6 (Darstellungssatz von F. Riesz)

Sei $1 \leq p < \infty$. $f^* \in (L^p(X, \mathcal{A}, \mu))^*$ genau dann, wenn es ein (eindeutiges) $g \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ gibt mit

$$f^*(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu$$

In diesem Falle gilt:

$$\|f^*\|_{(L^p_\mu)^*} = \|g\|_{L^{p'}_\mu}$$

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ μ-meßbar und integrierbar über jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$:

$$\int_A |f|d\mu := \int_X |f|\not\vert_A \; d\mu < \infty \qquad \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$$

Dann existiert

$$\int_X f(x)\phi(x)d\mu \in \mathbb{C}$$

für alle $\phi \in S_\mu$. ◁

Lemma 6

Vorgegeben $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Sei $f : X \longrightarrow \overline{C}$ μ-meßbar und integrierbar über jedes μ-endliche $A \in \mathcal{A}$ so daß

$$C = \sup_{\substack{\|\phi\|_{L^{p'}_\mu} = 1 \\ \phi \in S_\mu}} \left| \int_X f(x)\phi(x)d\mu \right| < \infty$$

Dann gilt:

$$f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^p_\mu} = C$$

◁

Beweis. Dieser Beweis dient mehr zur Motivation der Aussage. Beweis sonst für alle p durch elementares Approximationsargument auf der Integrationstheorie (Aufbau des Integrals).

Fall $1 < p \leq \infty$: $1 \leq p' < \infty$. Betrachte Funktional

$$F(\phi) \; := \int_X f(x)\phi(x) \; d\mu.$$

$F : S_\mu \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist wohldefiniert, linear und beschränkt. Da nach Lemma 4 $S_\mu \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ dicht ist für $1 \leq p' < \infty$, gibt es nach Lemma 5 eine eindeutige Fortsetzung f^* von F auf $L^{p'}_\mu$ bei gleicher Norm, insbesondere $f^* \in (L^{p'}_\mu)^*$

$$\Longrightarrow \quad \exists g \in L^{(p')'}_\mu = L^p_\mu : f^*(h) \; = \int_X g(x)h(x) \; d\mu \qquad \forall h \in L^{p'}_\mu \qquad \text{[Satz 6, } 1 \leq p' < \infty\text{]}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_X f(x)\phi(x) \; d\mu \; = \int_X g(x)\phi(x) \; d\mu \qquad \forall \phi \in S_\mu \qquad [f^* \text{ Forts. von } F] \quad (3.3)$$

$$\Longrightarrow \quad f = g \; \in \; L^p_\mu$$

und die Darstellung der Norm $\|f\|_{L^p_\mu}$ wegen Lemma 5, denn: Annahme:

$$\begin{aligned}
& \exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0 : f(x) \neq g(x) \qquad \forall x \in A \\
\Longrightarrow\ & \exists B \in \mathcal{A}, 0 < \mu(B) < \infty : f(x) - g(x) > 0 \qquad \forall x \in B \qquad \text{[z.B. reellw.; } (X, \mathcal{A}, \mu) \text{ } \sigma\text{-endlich]} \\
\Longrightarrow\ & \not\vdash_B \in S_\mu \quad \text{und} \quad 0 = \int_X (f(x) - g(x)) \not\vdash_B(x)\, d\mu \qquad \text{[(3.3)]} \\
& \qquad = \int_B \underbrace{(f(x) - g(x))}_{>0}\, d\mu > 0
\end{aligned}$$

Fall $p = 1$: Ohne Beweis.

□

Definition 4

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume und $p, q \in [1, \infty]$. Sei T linear auf S_μ mit Werten im Raum der (komplexwertigen) ν-meßbaren Funktionen auf Y, die ν-integrierbar über ν-endlichen Mengen sind. T heißt vom (starken) *Typ* (p, q), falls es ein $M < \infty$ gibt mit

$$\|T\phi\|_{q,\nu} \leq M \|\phi\|_{p,\mu} \qquad \forall \phi \in S_\mu$$

Der kleinste Wert von M heißt die (starke) (p, q)-*Norm*[1] von T und wird mit $\|T\|_{p,q}$ bezeichnet. Die Typmenge von T ist definiert durch

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \mathbb{R}^2 : T \text{ ist vom Typ } (p, q) \right\} \subset [0, 1]^2$$

◁

Satz 7 (Konvexitätssatz/Interpolationssatz von M. Riesz/Thorin)

Die Typmenge von T ist konvex,
das heißt (vgl. Def. 2): Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume und T ein auf S_μ definierter linearer Operator mit Werten im Raum der ν-meßbaren, über ν-endliche Mengen ν-integrierbaren Funktionen auf Y, der gleichzeitig vom Typ (p_0, q_0), (p_1, q_1) ist. Dann ist T auch vom Typ (p_t, q_t) für

$$\frac{1}{p_t} = (1-t)\frac{1}{p_0} + t\frac{1}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = (1-t)\frac{1}{q_0} + t\frac{1}{q_1} \qquad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Weiter gilt

$$\|T\phi\|_{q_t,\nu} \leq M_t \|\phi\|_{p_t,\mu} \forall \phi \in S_\mu$$

mit

$$M_t \leq M_0^{1-t} M_1^t \qquad \forall 0 \leq t \leq 1$$

Insbesondere:

$$\|T\|_{p_t,q_t} \leq \|T\|^{1-t}_{p_0,q_0} \|T\|^t_{p_1,q_1}$$

Bezeichnung: $\|T\|_{p_t,q_t}$ ist logarithmisch konvex in $t \in [0, 1]$. Falls $p_t < \infty$, so kann T (mittels Lemma 4,5) eindeutig fortgesetzt werden zu einem Element aus $[L^{p_t}_\mu, L^{q_t}_\nu]$. ◁

Beweis. Seien für $k = 0, 1$ bzw. $0 \leq t \leq 1$

[1] Achtung: Nur Bezeichnung, muß nicht in jedem Fall eine Norm sein!

$$\alpha_k := \frac{1}{p_k}, \quad \beta_k := \frac{1}{q_k} \qquad (k = 0, 1)$$

$$\alpha_t := \frac{1}{p_t} := (1-t)\alpha_0 + t\alpha_1 \quad \beta_t := \frac{1}{q_t} := (1-t)\beta_0 + t\beta_1 \qquad (0 \le t \le 1)$$

Setze bzgl. t ins Komplexe fort mittels $z = \xi + iy$:

$$\begin{aligned} \alpha(z) &:= (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1, \\ \beta(z) &:= (1-z)\beta_0 + z\beta_1 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \\ \Longrightarrow \quad \alpha(k) &= \alpha_k, \quad \beta(k) = \beta_k \qquad (k = 0, 1), \\ \alpha(t) &= \alpha_t, \quad \beta(t) = \beta_t \qquad (t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

Zeige:

$$\|T\phi\|_{q_t,\nu} \le \|T\|_{p_0,q_0}^{1-t} \|T\|_{p_1,q_1}^{t} \|\phi\|_{p_t,\mu} \qquad \forall \phi \in S_\mu,\ 0 \le t \le 1$$

Da Aussage für $\phi \in S_\mu$ mit $\|\phi\|_{p_t,\mu} = 0$ (d.h.: $\phi(x) = 0$ μ-f.ü.) trivial (T linear), zeige:

$$\|T\phi\|_{q_t,\nu} \le \|T\|_{p_0,q_0}^{1-t} \|T\|_{p_1,q_1}^{t} \|\phi\|_{p_t,\mu} \qquad \forall \phi \in S_\mu,\ \|\phi\|_{p_t,\mu} = 1,\ 0 \le t \le 1$$

Nach Voraussetzung: Für jedes $\phi \in S_\mu$ ist $T\phi$ ν-meßbar, integrierbar über jede ν-endliche Menge

$$\Longrightarrow \quad \|T\phi\|_{q_t,\nu} = \sup_{\substack{\|\psi\|_{q_t',\nu}=1 \\ \psi \in S_\mu}} \left| \int_Y (T\phi)(x)\psi(x)\, d\nu \right| \qquad \text{[falls } < \infty\text{; Lemma 6]}$$

Zeige:

$$\left| \int_Y (T\phi)(x)\psi(x)\, d\nu \right| \le \|T\|_{p_0,q_0}^{1-t} \|T\|_{p_1,q_1}^{t} \qquad \forall \phi \in S_\mu, \psi \in S_\nu, \|\phi\|_{p_t,\mu} = 1, \|\psi\|_{q_t',\nu} = 1$$

für alle $0 \le t \le 1$. Dazu: Da $\phi \in S_\mu$, $\psi \in S_\nu$

$$\Longrightarrow \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j \mathbb{1}_{A_j}(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{1}_{B_k}(x) \qquad \text{[vgl. Def. 3]}$$

mit $a_j, b_k \neq 0$ jeweils paarweise verschieden, $A_j \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{B}$ nichtleer und jeweils paarweise disjunkt mit $\mu(A_j), \nu(B_k) < \infty$.

Fall I: Sei $t \in [0, 1]$ fest mit $p_t < \infty$, $q_t > 1 \Longrightarrow \alpha_t > 0$, $\beta_t < 1$. Seien $a_j = |a_j| e^{i\vartheta_j}$, $b_k = |b_k| e^{i\eta_k}$. Für $z \in \mathbb{C}$:

$$\phi(x; z) := \sum_{j=1}^{\ell} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha_t}} e^{i\vartheta_j} \mathbb{1}_{A_j}(x) \qquad \text{[beachte: } \alpha_t > 0\text{]}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(x; t) = \phi(x), \qquad \text{[Def.]}$$

$$\psi(x; z) := \sum_{k=1}^{m} |b_k|^{1-\beta(z)} 1 - \beta_t e^{i\eta_k} \mathbb{1}_{B_k}(x) \qquad \text{[beachte: } \beta_t < 1\text{]}$$

$$\Longrightarrow \quad \psi(x; t) = \psi(x)$$

Klar:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \phi(\cdot; z) \in S_\mu, \quad \psi(\cdot; z) \in S_\nu$$

Weiterhin:

$$|\phi(x;z)| = \left||\phi(x)|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha_t}}\right| = |\phi(x)|^{(1-\xi)\frac{\alpha_0}{\alpha_t}+\xi\frac{\alpha_1}{\alpha_t}}$$

$$|\psi(x;z)| = \left||\psi(x)|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta_t}}\right| = |\psi(x)|^{\frac{1-(1-\xi)\beta_0-\xi\beta_1}{1-\beta_t}} \tag{3.4}$$

denn: z.B. für $\phi(x;z)$: Sei z.B. $x \in \mathbb{A}_j$ (beachte: A_j punktweise disjunkt)

$$\Longrightarrow \quad |\phi(x;z)| = \left||a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha_t}} e^{i\vartheta_j}\right| = |a_j|^{\frac{(1-\xi)\alpha_0+\xi\alpha_1}{\alpha_t}}$$

und

$$|\phi(x)| = |a_j|$$

Für festes $z \in \mathbb{C}$ betrachte

$$F(z) := \int_Y (T\phi(\cdot;z))(x)\psi(x;z)\, d\nu \qquad \text{[wohldefiniert]}$$

$$\Longrightarrow \quad F(t) = \int_Y (T\phi(x))\psi(x)\, dx \qquad \text{[Def.]}$$

$$\Longrightarrow \quad (T\phi(\cdot;z))(x) = \sum_{j=1}^{\ell} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha_t}} e^{i\vartheta_h} (T\mathbb{1}_{A_j})(x) \qquad [T \text{ linear}]$$

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha_t}} |\beta_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta_t}} c_{j,k},$$

wobei

$$c_{j,k} := e^{i(\vartheta_j+\eta_k)} \int_Y (T\mathbb{1}_{A_j})(x)\mathbb{1}_{B_k}(x)\, d\nu \in \mathbb{C} \qquad \text{[wohldef., unabh. von } Z\text{]}$$

Betrachte *ganze* (auf $\mathbb{C}$ holomorphe) Funktion $F(z)$ auf Streifen

$$S_{0,1} := \{z = \xi + iy : 0 \le \xi \le 1, y \in \mathbb{R}\}$$

(vgl. Satz 5). Da z.B.

$$\left||a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha_t}}\right| = \left||a_j|^{(1-\xi)\frac{\alpha_0}{\alpha_t}+\xi\frac{\alpha_1}{\alpha_t}-i(\frac{\alpha_0}{\alpha_t}y-\frac{\alpha_1}{\alpha_t}y)}\right| = |a_j|^{(1-\xi)\frac{\alpha_0}{\alpha_t}+\xi\frac{\alpha_1}{\alpha_t}} \quad \text{beschränkt auf } S_{0,1},$$

ist $F(z)$ auf S_0 beschränkt und auf S_0 holomorph, da ganz. Zeige:

$$|F(iy)| \le \|T\|_{p_0,q_0}$$

$$|F(1+iy)| \le \|T\|_{p_1,q_1} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad |F(\xi+iy)| \le \|T\|_{p_0,q_0}^{1-\xi} \|T\|_{p_1,q_1}^{\xi} \qquad \text{[Satz 5, Folg. 4]}$$

das heißt: speziell für $z = t + i0$ mit dem vorgegebenen t des Falles I folgt die Behauptung von Satz 7. Dazu: Nach Def.

$$\alpha(iy) = \alpha_0 + iy(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$1 - \beta(iy) = (1-\beta_0) - iy(\beta_1 - \beta_0)$$

$$\Longrightarrow \quad |\phi(x;iy)|^{p_0} = |\phi(x)|^{\frac{\alpha_0}{\alpha_t}p_0} = |\phi(x)|^{p_t}$$

$$|\psi(x;iy)|^{q_0'} = |\psi(x)|^{\frac{1-\beta_0}{1-\beta_1}q_0'} = |\psi(x)|^{q_t'} \qquad \text{[wegen (3.4) für } \xi = 0\text{]} \quad (3.5)$$

denn:

$$\frac{1-\beta_0}{1-\beta_t}q_0' = \frac{1-\frac{1}{q_0}}{1-\frac{1}{q_t}}q_0' = \frac{\frac{1}{q_0'}}{\frac{1}{q_t'}}q_0' = q_t'$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad |F(iy)| &= \left| \int_Y (T\phi(\cdot;iy))(x)\psi(x)\ d\nu \right| && \text{[Def.]}\\
&\le \|T\phi(\cdot;iy)\|_{q_0,\nu}\, \|\psi(\cdot;iy)\|_{q_0',\nu} && \text{[L19 (Hölder)]}\\
&\le \|T\|_{p_0,q_0}\, \|\phi(\cdot;iy)\|_{p_0,\nu}\, \|\psi(\cdot;iy)\|_{q_0',\nu}\\
&= \|T\|_{p_0,q_0} \underbrace{\left(\|\phi\|_{p_t,\mu}\right)}_{=1}^{p_t/p_0} \underbrace{\left(\|\psi\|_{q_t',\nu}\right)}_{=1}^{q_t'/q_0'} && \text{[(3.5)]}\\
&= \|T\|_{p_0,q_0}
\end{aligned}$$

Entsprechend mit (3.4) für $\xi = 1$:

$$\begin{aligned}
|\phi(x;1+iy)|^{p_1} &= |\phi(x)|^{\frac{\alpha_1}{\alpha_t}p_1}\\
&= |\phi(x)|^{p_t} && (3.6)\\
|\psi(x;1+iy)|^{q_1'} &= |\psi(x)|^{q_t'}\\
\Longrightarrow \quad |F(1+iy)| &\le \|T\phi(\cdot;1+iy)\|_{q_1,\nu}\, \|\psi(\cdot;1+iy)\|_{q_1',\nu} && \text{[Hölder]}\\
&\le \|T\|_{p_1,q_1}\, \|\phi(\cdot;1+iy)\|_{q_1,\mu}\, \|\psi(\cdot;1+iy)\|_{q_1',y}\\
&= \|T\|_{p_1,q_1}\, \|\phi\|_{p_t,\mu}^{p_t/q_t}\, \|\psi\|_{q_t',\nu}^{q_t'/q_1'}\\
&= \|T\|_{p_1,q_1} && \text{[(3.6)]}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung für Fall I.

Fall II: Sei $t \in [0,1]$ fest, $p_t = \infty$, $q_t = 1 \Longrightarrow \alpha_t = 0$, $\beta_t = 1$, das heißt:

$$\begin{aligned}
\alpha_t := \frac{1}{p_t} &:= (1-t)\alpha_0 + t\alpha_1 = 0\\
\beta_t := \frac{1}{q_t} &:= (1-t)\beta_0 + t\beta_1 = 1\\
\Longrightarrow \quad (\alpha_0,\beta_0) &= (0,1) \quad \text{oder} \quad (\alpha_1,\beta_1) = (0,1),
\end{aligned}$$

da sonst der Punkt $(\alpha_t,\beta_t) = (0,1)$ nicht erreicht werden kann (vgl. Bild). Sei z.B. $(\alpha_0,\beta_0) = (0,1)$, dann ist entweder $t = 0 \Longrightarrow$ Behauptung = Voraussetzung für (p_0,q_0), oder $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1 \Longrightarrow (\alpha_0,\beta_0) = (\alpha_1,\beta_1) = (0,1)$ trivial.

Fall III: Sei $t \in [0,1]$ fest, so daß $p_t < \infty$, $q_t = 1 \Longrightarrow \alpha_t > 0$, $\beta_t = 1$. Die Behauptung folgt mit dem Beweis zu Fall I für

$$\psi(x;z) := \psi(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Fall IV: Sei $t \in [0,1]$ fest so daß $p_t = \infty$, $q_t > 1 \Longrightarrow \alpha_t,\ \beta_t < 1$. Die Behauptung folgt mit dem Beweis zu Fall I für

$$\psi(x;z) := \phi(x) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Beachte: Z.B. Fall IV: Ist $t = 0$ oder $t = 1$, dann ist Behauptung = Voraussetzung. Sei $t \in [0,1]$ mit $\alpha_t = 0$, dann ist $\alpha_0 = \alpha_1$, die Strecke durch die Punkte (α_0,β_0), (α_1,β_1) liegt auf der linken Kante (vgl. Bild). $\square$

Bemerkung: Für Anwendung siehe Kapitel III (c); VI; Ü3A? etc.

III.c Der Fall $1 < p < 2$

Satz 8 (Titchmarsh-Ungleichung)

Seien $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq p \leq 2$. Dann ist

$$\phi^\wedge \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\|\phi^\wedge\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{n/p'} \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \phi \in S$$

◁

Beweis. Da $S \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall 1 \leq p \leq \infty$, ist (Def. II 1) $\phi^\wedge$ wohldefiniert und

$$(T\phi)(v) \;:=\; \phi^\wedge(v) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u) e^{-ivu}\, du$$

als linearer Operator $T : S \longrightarrow C_0$ wohldefiniert (Satz II 1). Weiterhin:

$$\|T\phi\|_\infty \;\leq\; \|\phi\|_1 \qquad \forall \phi \in S \qquad \text{[Satz II 1]}$$
$$\|T\phi\|_2 \;=\; (2\pi)^{n/2} \|\phi\|_2 \qquad \forall \phi \in S,$$

das heißt: T ist vom Typ $(1, \infty)$, $(2, 2)$ mit $M_0 = 1$, $M_1 = (2\pi)^{n/2}$. Nach Satz 7 ist T damit auch vom Typ (p_t, q_t) $\forall 0 \leq t \leq 1$ mit

$$\frac{1}{p_t} \;=\; (1-t)\frac{1}{p_0} + t\frac{1}{p_1} = (1-t) + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2} \qquad (3.7)$$
$$\frac{1}{q_t} \;=\; (1-t)\frac{1}{q_0} + t\frac{1}{q_1} = 0 + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{q_t} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{p_t} \leq 1$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{p_t} \;=\; 1 - \frac{1}{q_t},$$

d.h.: $q_t' = p_t'$ und $1 \leq p_t \leq 2$ für $0 \leq t \leq 1$, das heißt: T ist vom Typ (p, p') für $1 \leq p \leq 2$,

$$M_t \;\leq\; M_0^{1-t} M_1^t = (2\pi)^{\frac{n}{2}t} = (2\pi)^{n/p'}$$

□

Folgerung 5

Für jedes $1 \leq p \leq 2$ kann der lineare Operator T, definiert auf S durch $T\phi := \phi^\wedge$ (Def. II 1), eindeutig fortgesetzt werden von S auf ganz $L^p(\mathbb{R}^n)$, so daß

$$T \in [L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n)]$$

und

$$\|Tf\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{n/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

◁

Beweis. Da $1 \le p \le 2$, ist nach Lemma 4 S dicht in L^p, also folgt aus Lemma 5 die Behauptung. □

Lemma 7

Sei $1 \le p \le 2$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\rho > 0$ sei definiert (vgl. Lemma 2):

$$f_\rho(x) := \begin{cases} f(x), & |x| \le \rho \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $f_\rho \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall \rho > 0$, und für den nach Folgerung 5 auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definierten Operator T gilt

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| Tf - f_\rho^\wedge \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 0 \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

◁

Beweis.

$$\begin{aligned}
& f \in L^p \quad \text{und} \quad \rho > 0 \\
\Longrightarrow \quad & \|f_\rho\|_p^p := \int_{|u| \le \rho} |f(u)|^p \, du \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p \, du =: \|f\|_p^p && \text{[vgl. Beweis zu Lemma 2]} \\
\Longrightarrow \quad & f_\rho \in L^p \\
& \|f_\rho\|_1 := \int_{|u| \le \rho} |f(u)| \, du \\
& \qquad \le \left(\int_{|u| \le \rho} |f(u)|^p \right)^{1/p} \left(\int_{|u| \le \rho} du \right)^{1/p'} && \text{[Hölder]} \\
& \qquad \le \left(\frac{\omega_n}{n} \rho^n \right)^{1/p'} \|f\|_p && \text{[vgl. Lemma II 3]} \\
\Longrightarrow \quad & f_\rho \in L^1 \\
\Longrightarrow \quad & f_\rho \in L^1 \cap L^p \qquad \forall \rho > 0
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \|f - f_\rho\|_p^p = \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_{|u| > \rho} |f(u)|^p \, du = 0 \qquad \text{[da } f \in L^p(\mathbb{R}^n)\text{]} \quad (3.8)$$

Sei $\rho > 0$ beliebig fest. Nach Lemma 4 gibt es zu f_ρ eine Folge $(\phi_k) \subset S$:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|f_\rho - \phi_k\|_p = 0$$

und $\phi_k(x) = 0$ f.ü. für $|x| > \rho$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Da

$$\begin{aligned}
\|f_\rho - \phi_k\|_1 &= \int_{|u| \le \rho} |f_\rho(u) - \phi_k(u)| \, du \\
&\le \left(\frac{\omega_n}{n} \rho^n \right)^{1/p'} \|f_\rho - \phi_k\|_p \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty) && \text{[L19]} \\
\Longrightarrow \quad & \lim_{k \longrightarrow \infty} \|f_\rho - \phi_k\|_1 = 0
\end{aligned}$$

Also: Da $f_\rho, \phi_k \in L^1$, sind (Def. II 1) $f_\rho^\wedge, \phi_k^\wedge$ wohldefiniert und (Satz II 1)

$$\left\| f_\rho^\wedge - \phi_k^\wedge \right\|_\infty \leq \left\| f_\rho - \phi_k \right\|_1 \overset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

das heißt:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \phi_k^\wedge(v) = f_\rho^\wedge(v) \quad \text{gleichmäßig} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (3.9)$$

Da f_ρ, ϕ_k L^p-Funktionen

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\| Tf_\rho - \phi_k^\wedge \right\|_{p'} &= \left\| Tf_\rho - T\phi_k \right\|_{p'} && [\text{Def. } T] \\
&= \left\| T(f_\rho - \phi_k) \right\|_{p'} && [T \text{ linear}] \\
&= (2\pi)^{n/p'} \left\| f_\rho - \phi_k \right\|_p \overset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 && [\text{Folgerung 5}] \\
\Longrightarrow \quad \exists (\phi_{k_j}) : \lim_{j \longrightarrow \infty} \underbrace{\phi_{k_j}^\wedge(v)}_{\longrightarrow f_\rho^\wedge(v) \ (3.8)} &= (Tf_\rho)(v) \quad \text{f.ü.} \\
\Longrightarrow \quad \forall \rho > 0 : (Tf_\rho)(v) &= f_\rho^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}
\end{aligned}$$

Beachte: Dies setzt die explizite Darstellung von T von S fort auf alle Funktionen vom Typ f_ρ mit $f \in L^p$, $\rho > 0$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\| Tf - f_\rho^\wedge \right\|_{p'} &= \left\| Tf - Tf_\rho \right\|_{p'} \\
&= (2\pi)^{n/p'} \left\| f - f_\rho \right\|_p && [T \text{ linear, Folg. 5}] \\
&\longrightarrow 0 \quad (\rho \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

□

Definition 5

(vgl. Def. II 1, Def. 1) Sei $1 < p < 2$. Der Operator T aus Folgerung 5 heißt die *Fourier-Transformierte* $\mathcal{F}^{(p)}$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, d.h. (Lemma 7): Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist die *Fourier-Transformierte* $\mathcal{F}^{(p)}[f](v) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}^{(p)}[f] - f_\rho^\wedge \right\|_{p'} = \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}^{(p)}[f](v) - \int_{|u| \leq \rho} f(u) e^{-ivu} \right\|_{p'} = 0$$

◁

Satz 9

(vgl. Satz II 1, 1): Sei $1 < p < 2$. Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{(p)}$ ist eine lineare beschränkte Abbildung von $L^p(\mathbb{R}^n)$ in (nicht: auf) $L^p(\mathbb{R}^n)$, für die die *Titchmarsh-Ungleichung* gilt:

$$\left\| \mathcal{F}^{(p)}[f] \right\|_{p'} \leq (2\pi)^{n/p'} \left\| f \right\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

◁

Beweis. Folgerung 5 + ? □

Lemma 8

(vgl. Lemma 3) Sei $f \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$ für zwei Werte $1 \leq q, r \leq 2$. Für die nach Def. II 1 ($p = 1$), Def. 1

($p = 2$) oder Def. 5 ($1 < p < 2$) gebildeten Fourier-Transformierten $\mathcal{F}^{(q)}[f]$ bzw. $\mathcal{F}^{(r)}[f]$ gilt.

$$\mathcal{F}^{(q)}[f](v) = \mathcal{F}^{(r)}[f] \quad \text{f.ü.}$$

$\triangleleft$

Also: Die drei Definitionen sind miteinander verträglich, insbesondere kann Def. 5 (und 1) als Fortsetzung von Definition II 1 verstanden werden.

Beweis. Ü3A1 (vgl. Beweis zu Lemma 3) $\square$

Lemma 9

(vgl. Lemma II 1) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$.

(a) Für jedes feste $h \in \mathbb{R}^n$:

$$(f(x+h))^\wedge(v) = e^{ihv} f^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}$$

(b) Für jedes feste $h \in \mathbb{R}^n$:

$$(e^{-ihx} f(x))^\wedge(v) = f^\wedge(v+h) \quad \text{f.ü.}$$

(c) $\forall \rho > 0$:

$$(\rho^n f(\rho x))^\wedge(v) = f^\wedge(\frac{v}{\rho}) \quad \text{f.ü.}$$

(d)

$$(\overline{f(-x)})^\wedge(v) = \overline{f^\wedge(v)} \quad \text{f.ü.}$$

$\triangleleft$

Beweis. Ü3A2 $\square$

Satz 10 (Faltungssatz)

(vgl. Satz II 3) Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\mathcal{F}^{(p)}[f * g](v) = \mathcal{F}^{(p)}[f](v)\mathcal{F}^{(1)}[g](v) \quad \text{f.ü.}$$

$\triangleleft$

Beweis. Nach Satz II 2(a):

$f * g \in L^p$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}^{(p)}[f * g]$, $\mathcal{F}^{(p)}[f]$, $\mathcal{F}^{(1)}[g]$ wohldefiniert [Def. 1,5, Def. II 1]

Zeige: Gleichheit, dazu:

$f \in L^1 \cap L^p$

$\Longrightarrow$ $f * g \in L^1 \cap L^p$ [Satz II 2(a)]

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}^{(1)}[f * g](v) = \mathcal{F}^{(1)}[f](v) \cdot \mathcal{F}^{(1)}[g](v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$ [Satz II 3]

Fall 1: $\Longrightarrow$ Behauptung (Lemma 8).

Fall 2: Sei $f \in L^p$ beliebig

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad f_\rho \in L^1 \cap L^p \qquad \forall \rho > 0 && \text{[Lemma 7]}\\
&\Longrightarrow \quad \forall \rho > 0 : \mathcal{F}^{(p)}[f_\rho * g] = \mathcal{F}^{(p)}[f_\rho](v) \cdot \mathcal{F}^{(1)}[g](v) \quad \text{f.ü.} && \text{[Fall 1]}\\
&\Longrightarrow \quad \left\| \mathcal{F}^{(p)}[f * g] - \mathcal{F}^{(p)} f \mathcal{F}^{(1)} g \right\|_{p'}\\
&\leq \quad \left\| \mathcal{F}^{(p)}[f * g] - \mathcal{F}^{(p)} f_\rho * g \right\| + \left\| \mathcal{F}^{(p)} f_\rho \cdot \mathcal{F}^{(1)} g - \mathcal{F}^{(p)} f \cdot \mathcal{F}^{(1)} g \right\|_{p'} && \text{[L15]}\\
&\leq \quad (2\pi)^{n/p'} \left\| (f - f_\rho) * g \right\|_p + \left\| \mathcal{F}^{(1)} g \right\|_\infty \left\| \mathcal{F}^{(p)} f_\rho - f \right\|_{p'} && \text{[Satz 1,9]}\\
&\leq \quad (2\pi)^{n/p'} \left\| f - f_\rho \right\| \left\| g \right\|_1 + \left\| g \right\|_1 (2\pi)^{n/p'} \left\| f_\rho - f \right\|_p && \text{[Satz II 2(a), II 1; Satz 1,9]}\\
&= \quad 2(2\pi)^{n/p'} \left\| g \right\|_1 \left\| f - f_\rho \right\|_p\\
&\longrightarrow \quad 0
\end{aligned}$$

□

Bzgl. Beweis zu Satz 9: $\mathcal{F}^{(p)} : L^p \longrightarrow L^{p'}$ $(1 \leq p \leq 2)$ beschränkt, linear, nicht surjektiv (siehe Lit. A I β 5 (Titchmarsh), Seite 111-113 für $n = 1$)

Satz 11 (Parseval-Formel)

(vgl. Satz II 4 ($p = 1$), Satz 2) Für $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v) g(v) dv = \int_{\mathbb{R}^n} f(v) g^\wedge(v) dv$$

◁

Beweis. Ü3A3 □

Umkehrproblematik: Vgl. Fall

- $p = 1$: Kapitel II (b)
- $p = 2$: Satz 3 und Folgerung 3

Fall $1 < p < 2$: Kandidat für Fourier-Transformation:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v) e^{ixv} \, dv$$

Gesucht: geeignete Interpretation, da $f^\wedge \in L^{p'}$ (nur)

Folgerung 6

(vgl. Folg II 3) Für einen beliebigen θ-Faktor (Def. II 4) gilt für $\rho > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$: Die *θ-Mittel* des *Fourier-Umkehrintegrals*

$$U(f; x; \rho) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{v}{\rho}\right) f^\wedge(v) e^{ixv} dv$$

existieren für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und $U(f;x;\rho) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|U(f;x;\rho)\|_p \leq \|\theta^\wedge\|_1 \, \|f\|_p \qquad \forall \rho > 0$$

Das Fourier-Integral ist θ-summierbar in dem Sinne, daß

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{v}{\rho}\right) f^\wedge(v) e^{ixv} dv - f(x) \right\|_p = 0 \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Gilt für den θ-Faktor darüberhinaus, daß $\theta^\wedge$ radial ist mit

$$\theta^\wedge(v) = \eta(|v|),$$

η positiv und monoton fallend auf $[0,\infty]$, dann ist das Fourier-Umkehrintegral auch θ-summierbar in dem Sinne, daß für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{v}{\rho}\right) f^\wedge(v) e^{ixv} dv = f(x) \quad \text{f.ü.}$$

◁

Beweis. Da (Def. II 4) $\theta, \theta^\wedge \in L^1$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \theta \in L^1 \cap L^\infty && \text{[Folg. II 5]} \\
&\Longrightarrow \quad \theta \in L^p \qquad \forall 1 \leq p \leq \infty && \text{[trivial]} \\
&\Longrightarrow \quad |U(f;x;\rho)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\theta(\tfrac{v}{\rho})\right| |f^\wedge(v)| \, dv \\
&\qquad\qquad \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left\|\theta(\tfrac{v}{\rho})\right\| \|f^\wedge\|_{p'} && \text{[Hölder]} \\
&\Longrightarrow \quad U \text{ existiert } \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad U(f;x;\rho) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \forall \rho > 0
\end{aligned}$$

Weiterhin (für $p = 1$ siehe Beweis zu Folgerung II 3)

$$\begin{aligned}
U(f;x;\rho) &:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\tfrac{v}{\rho}) f^\wedge(v) e^{ixv} \, dv \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\tfrac{v}{\rho}) (f(\cdot + x))^\wedge(v) \, dv && \text{[Lemma 9(a)]} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+v) (\theta(\tfrac{\cdot}{\rho}))^\wedge(v) \, dv && \text{[Satz 2/11 (Parseval)]} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+v) \rho^n \theta^\wedge(\rho v) \, dv && \text{[Lemma 9(c)]} \\
&= \rho^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) ((2\pi)^{-n} \theta^\wedge(\rho u)) \, du && [\theta, \theta^\wedge \text{ symm.}]
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ (Satz II 2 und Satz II 5+6) Behauptung (Beachte: $\theta^\wedge \in L^1 \cap C_0$) □

Folgerung 7

(vgl. Folg II 4) Das Fourier-Umkehrintegral von $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$, ist (Gauß-)Weierstraß-summierbar gegen $f(x)$ in der L^p-Norm und punktweise fast überall, das heißt: Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten die Umkehrformeln

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \left\| f(x) - \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\frac{v}{2\rho})^2} f^\wedge(v) e^{ixv} dv \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\frac{v}{2\rho})^2} f^\wedge(v) e^{ixv} dv = f(x) \quad \text{f.ü.}$$

$\triangleleft$

Beweis. Eigenschaften von Beispiel W (Kap. II). $\square$

Folgerung 8

(vgl. Folg II 5) Für $1 < p \leq 2$ sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ so, daß $f^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v) e^{ixv} dv \quad \text{f.ü.},$$

insbesondere in allen Stetigkeitspunkten x von f $\triangleleft$

Beweis. Ü3A4 $\square$

Folgerung 9 (Eindeutigkeitssatz)

(vgl. Folg II 6 ($p = 1$), Satz 1 ($p = 2$)) Sei $1 < p < 2$. Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ so daß $f^\wedge = 0$ f.ü., dann folgt $f(x) = 0$ f.ü. Sind also $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ so daß $f^\wedge(v) = g^\wedge(v)$ f.ü., dann folgt $f(x) = g(x)$ f.ü. Insbesondere: Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ so daß $f^\wedge(v) = 0$ f.ü., dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. $\triangleleft$

Beweis. Folgerung 8, da $f^\wedge = 0 \in L^1$ $\square$

Folgerung 10 (Abbildungseigenschaften)

(vgl. Satz 9 bzw. Folg. II 9 ($p = 1$), Folg. 3 ($p = 2$)) Sei $1 < p < 2$. Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{(p)} : f \in L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow f^\wedge \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist eine eineindeutige lineare beschränkte Abbildung des Banach-Raumes $L^p(\mathbb{R}^n)$ in (nicht: auf) $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\triangleleft$

Bemerkung
Die über Def. II 1 und Def. 1/5 vorgestellte Definitionsmethode für die Fourier-Transformation über $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq 2)$ ist *nicht* erweiterbar auf $p > 2$, denn:

$$f \in L^1 \Longrightarrow f^\wedge C_0 \quad \text{und} \quad \|f^\wedge\|_\infty \leq \|f\|_1 \qquad \text{[Satz II 1]}$$

$$f \in L^2 \Longrightarrow f^\wedge L^2 \quad \text{und} \quad \|f^\wedge\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2 \qquad \text{[Satz 1]}$$

$$f \in L^p (1 < p < 2) \Longrightarrow f^\wedge \in L^{p'} \quad \text{und} \quad \|f^\wedge\|_{p'} \leq (2\pi)^{n/p'} \|f\|_p$$

In diesem klassischen ("starken" im Sinne der Funktionalanalysis, vgl. Def. 1/5) Rahmen kann die Fourier-Transformation *nicht* auf L^p für $p > 2$ definiert werden; dazu: Sei $h \in S \subset L^1$, dann ist

$$h^\wedge(v) := \int_{\mathbb{R}^n} h(u) e^{-ivu} \, du$$

wohldefiniert (Def. II 1, Satz 8). Für $1 \leq p \leq 2$ ist $\mathcal{F}$ vom Typ (p, p') (Def. 4), insbesondere:

$$\mathcal{F}h = h^\wedge \in L^{p'} \quad \text{und} \quad \|h^\wedge\|_{p'} \leq (2\pi)^{n/p'} \|h\|_p \qquad \forall h \in S$$

Zeige: Dies ist *genau* die Typmenge von $\mathcal{F}$. Dazu: Annahme: $\mathcal{F}$ sei vom Typ (p, q) für ein beliebiges Paar $p, q \in [1, \infty]$, d.h. es gibt ein $C < \infty$ mit

$$\|h^\wedge\|_q \leq C \|h\|_p \qquad \forall h \in S$$

Für beliebige $h \in S$, $\rho > 0$ sei

$$h_\rho(x) := h(\rho x)$$

$$\Longrightarrow \quad h_\rho \in S \quad \forall \rho > 0 \quad \text{und} \quad h_\rho^\wedge(v) = \rho^{-n} h^\wedge(\frac{v}{\rho}) \qquad \text{[vgl. Def. 3, Lemma II 1(e)]}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \left\| h_\rho^\wedge \right\|_q &:= \rho^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| h^\wedge(\frac{v}{\rho}) \right|^q \, dv \right)^{1/q} \\ &= \rho^{-n} \rho^{n/q} \left\| h^\wedge \right\|_q \\ \|h_\rho\|_p &:= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(\rho x)| \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \|h_\rho\|_p \\ &= C \rho^{-n/p} \|h\|_p \qquad \text{[Annahme]} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho^{-n+n/p} \left\| h^\wedge \right\|_q = \left\| h_\rho^\wedge \right\|_q \leq C \|h_\rho\|_p = C \rho^{-n/p} \|h\|_p \qquad \text{[Annahme]}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| h^\wedge \right\|_q \leq C \|h\|_p \, \rho^{n(1-1/p-1/q)} \qquad \forall h \in S, \rho > 0$$

Fall $1 - 1/p - 1/q > 0$: Für $\rho \longrightarrow 0+$:

$$\left\| h^\wedge \right\|_q = 0$$

$$\Longrightarrow \quad h^\wedge(v) = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \qquad [h^\wedge \text{ stetig}]$$

$$\Longrightarrow \quad h = 0 \qquad \forall h \in S \qquad \text{[Folge II 6]}$$

Widerspruch!

Fall $1 - 1/p - 1/q < 0$: Für $\rho \longrightarrow \infty$:

$$\left\| h^\wedge \right\|_q = 0 \qquad \forall h \text{ (in } \mathfrak{s})$$

Widerspruch!

Notwendig: $1 = 1/p + 1/q$, also $q = p'$ (dualer Index). Also: $\mathcal{F}$ kann nur vom Typ (p, p') sein mit $1 \leq p \leq \infty$. Satz 8: $\mathcal{F}$ ist vom Typ (p, p') $\forall 1 \leq p \leq 2$. Annahme: $\mathcal{F}$ vom Typ (r, r') mit $r > 2$:

$$\left\| h^\wedge \right\|_{r'} \leq C_r \|h\|_r \qquad \forall h \in S$$

Nach Lemma 5 kann $\mathcal{F}$ dann eindeutig, linear und stetig fortgesetzt werden auf $\overline{S}^{L^r} = L^r$ zu $\mathcal{F}^{(r)}$, insbesondere

$$\Longrightarrow \quad \left\| \mathcal{F}^{(r)} g \right\|_{r'} \leq C_r \|g\|_r \qquad \forall g \in \overline{S}^{L^r} = L^r$$

Zeige: Darstellung von $\mathcal{F}^{(r)}$ auf $L^1 \cap L^r$; dazu (vgl. mit Beweis zu Lemma 2,7): Sei $2 < r < \infty$ (Fall $r = \infty$ analog). Für $f \in L^r$, $\rho > 0$ beliebig fest ist (vgl. Lemma 2,7)

$$f_\rho \in L^1 \cap L^r \quad \text{und} \quad \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \|f - f_\rho\|_r = 0$$

Nach Lemma 4: Es gibt $(h_k)_{k=1}^\infty \subset S$ mit

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|f_\rho - h_k\|_r = 0 \quad \text{und} \quad \forall |x| > \rho, k \in \mathbb{N} : h_k(x) = 0 \quad \text{f.ü.}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{k \longrightarrow \infty} \|f_\rho - h_k\|_1 = 0 \qquad \text{[Lemma 19]}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{k \longrightarrow \infty} h_k^\wedge(v) = f_\rho^\wedge(v) \quad \text{gleichmäßig} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \qquad \text{[Satz 1]}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{F}^{(r)} f_\rho - \mathcal{F}^{(r)} h_k\right\|_{r'} \leq C_r \left\|f_\rho - h_k\right\|_r \\
&\qquad\qquad \longrightarrow 0 \\
\Longrightarrow\quad &\lim_{k\longrightarrow\infty} \left\|\mathcal{F}^{(r)} f_\rho - h_k^\wedge\right\|_{r'} = 0 \\
\Longrightarrow\quad &\exists (h_{k_j}) : \mathcal{F}^{(r)} f_\rho(v) = \lim_{\rho\longrightarrow\infty} h_{k_j}^\wedge(v) = f_\rho^\wedge(v) \quad \text{f.ü.} \qquad \text{[L26]} \\
\Longrightarrow\quad &\left\|\mathcal{F}^{(r)} f - f_\rho^\wedge\right\|_{r'} = \left\|\mathcal{F}^{(r)}[f - f_\rho]\right\| \\
&\qquad\qquad \leq C_r \left\|f - f_\rho\right\|_r \\
&\qquad\qquad \longrightarrow 0 \quad (\rho \longrightarrow \infty) \\
\Longrightarrow\quad &\lim_{\rho\longrightarrow\infty} \left\|(\mathcal{F}^{(r)} f)(v) - \int_{|u|\leq\rho} f(u) e^{-ivu}\, du\right\|_{r'} = 0 \qquad \forall f \in L^r
\end{aligned}$$

(vgl. Def. 1;5)

$$\begin{aligned}
&f \in L^1 \cap L^r \\
\Longrightarrow\quad &\mathcal{F}^{(r)} f = \mathcal{F} f = f^\wedge \quad \text{f.ü.} \qquad \text{[konsistent, vgl. Lemma 3,8]}
\end{aligned}$$

Betrachte $\phi(x) := \xi^{-n}\psi(\frac{x}{\xi})$ mit $\psi(x) = e^{-x^2}$, $\xi = \sqrt{1+i\delta}$ für $\delta > 0$

$$\Longrightarrow\quad \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{[Def. II 10]}$$

(komplex) und (vgl. Lemma II 1 (e), ÜI8A5(a))

$$\phi^\wedge(v) = \pi^{n/2} e^{-(1+i\delta)v^2/4} = \mathcal{F}^{(r)}\phi$$

da $\phi \in \mathfrak{s} \subset L^1 \cap L^r$ (entsprechend im Fall $r = \infty$) und

$$\left\|\phi^\wedge\right\|_{r'} \leq C_r \left\|\phi\right\|_r$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{|v|\leq 1} |\phi^\wedge(v)|\, dv &\leq \left(\frac{\omega_n}{n}\right)^{1/r} \left(\int_{|v|\leq 1} |\phi^\wedge(v)|^{r'}\, dv\right)^{1/r'} \qquad \text{[Hölder]} \\
&\leq C_{n,r} \left\|\phi^\wedge\right\|_{r'}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{|v|\leq 1} |\phi^\wedge(v)|\, dv = \pi^{n/2} \int_{|v|\leq 1} e^{-\frac{v^2}{4}}\, dv =: A > 0$$

unabhängig von $\delta > 0$, da $\left|e^{-i\delta v^2/4}\right| = 1$

$$\Longrightarrow\quad 0 < A \leq C_{n,r} \left\|\phi^\wedge\right\|_{r'} \leq C_r C_{n,r} \left\|\phi\right\|_r$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
\left\|\phi\right\|_r^r &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^{-n}\psi(\frac{x}{\xi})\right|^r dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{1+i\delta}} e^{-\frac{t^2}{1+i\delta}}\right|^r dt\right)^n \qquad \text{[Integrand zerfallend]} \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{1+i\delta}}\right|^{rn} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r}{1+\delta^2}t^2}\, dt\right)^n \\
&= \left|\frac{\sqrt{1-i\delta}}{\sqrt{1+\delta^2}}\right|^{rn} \left(\sqrt{\frac{1+\delta^2}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds\right)^n \qquad [s = \sqrt{\tfrac{r}{1+\delta^2}}t]
\end{aligned}$$

$$= \left|\frac{\sqrt{1-i\delta}}{\sqrt{1+\delta^2}}\right|^{rn} \left(\pi\frac{1+\delta^2}{r}\right)^{n/2}$$

$$= (1+\delta^2)^{-nr/4} \left(\frac{\pi}{r}(1+\delta^2)\right)^{n/2}$$

(denn: $\left|\sqrt{1-i\delta}\right| = \sqrt{|1-i\delta|} = (1+\delta^2)^{1/4}$)

$$\Longrightarrow \quad \|\phi\|_r = \left(\frac{\pi}{r}\right)^{n/(2r)} (1+\delta^2)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} \qquad \forall\delta > 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < A \leq \qquad C_r C_{n,r} \left(\frac{\pi}{r}\right)^{n/(2r)} (1+\delta^2)^{\frac{n}{2}(1/r-1/2)}$$

$$\stackrel{\delta\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \qquad [\text{da } r > 2]$$

Widerspruch!
Also: Die klassische Definition, die genau auf der Typ-Eigenschaft von $\mathcal{F}$ basiert, geht nur für $1 \leq p \leq 2$. Entsprechend auch über Gegenbeispiele des Typs $\exists f \in L^p$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$, aber $f\hat{} \in L^q$ nur für $q \geq 2$

Kapitel 4

Temperierte Distributionen

Aufgabe: Fourier-Transformation über $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Lösung der Aufgabe für $p > 2$ durch Übergang zu (schwachen) *distributionentheoretischen* Methoden

IV.a Der Grundraum $\mathfrak{s}$

Kapitel II (e): Definition von $\mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ und elementare Eigenschaften. Jetzt: Konvergenzbegriff in $\mathfrak{s}$.

Definition 1

(a) Folge $(\phi_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{s}$ *konvergiert in* $\mathfrak{s}$ *gegen 0* (Bezeichnung: $\lim_{j \to \infty} \phi_j = 0$ in $\mathfrak{s}$), falls gilt (vgl. Def. II 10)

(1) Zu jedem $k, m \in \mathbb{P}^n$ $\exists C_{k,m} < \infty$:

$$\left| x^m D^k \phi_j(x) \right| \leq C_{k,m} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$$

(2)

$$D^k \phi_j(x) \overset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \forall k \in \mathbb{P}^n$$

(b) $(\phi_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{s}$ *konvergiert in* $\mathfrak{s}$ *gegen* $\phi \in \mathfrak{s}$, falls

$$\lim_{j \to \infty} (\phi_j - \phi) = 0 \quad \text{in } \mathfrak{s}$$

(c) $(\phi_j)_{j=1}^{\infty}$ heißt *konvergent in* $\mathfrak{s}$, falls

(1)

$$\forall k, m \in \mathbb{P}^n \exists C_{k,m} : \left| x^m D^k \phi_j(x) \right| \leq C_{k,m}$$

(2)

$$\forall k \in \mathbb{P}^n : (D^k \phi_j)_{j=1}^{\infty} \text{ konvergiert gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n$$

◁

Lemma 1

Für $(\phi_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{s}$ sind äquivalent (vgl. Lemma II 4):

(a)
$$(\phi_j) \longrightarrow 0 \text{ (in } \mathfrak{s})$$

(b) (i) Zu jedem $k \in \mathbb{P}^n$, $r \in \mathbb{P}$ existieren $C^*_{k,r} < \infty$ mit
$$(1+|x|)^r \left|D^k \phi_j(x)\right| \leq C^*_{k,r} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$$

(ii)
$$D^k \phi_j(x) \overset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$
gleichmäßig auf jedem kompakten $K \subset \mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{P}^n$

(c)
$$(1+|x|)^r \left|D^k \phi_j(x)\right| \overset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$
gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{P}^n, r \in \mathbb{P}$

(d)
$$(1+x^2)^r \left|D^k \phi_j(x)\right| \overset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$
gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{P}^n, r \in \mathbb{P}$

(e)
$$x^m D^k \phi_j(x) \overset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$
gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{P}^n, r \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{P}$

$\triangleleft$

Beweis.

(a) $\longrightarrow$ (b): Nach Lemma II 4: (a)(i) $\Longrightarrow$ (b)(i). (a)(ii) $\Longrightarrow$ (b)(ii): trivial

(b) $\Longrightarrow$ (c): Seien $k \in \mathbb{P}^n$, $r \in \mathbb{P}$, $\epsilon > 0$ beliebig fest. Wähle $M > 0$ so daß $C^*_{k,r+1} \frac{1}{1+M} < \epsilon$

$\Longrightarrow$ $D^k \phi_j(x) \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf $\overline{S(0;M)}$ [(b)(ii); vgl Skript L]

das heißt: Zu diesem M $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$(1+|x|)^r \left|D^k \phi_j(x)\right| \leq (1+M)^r \left|D^k \phi_j(x)\right| < \epsilon \qquad \forall |x| \leq M, j \geq j_0$$
Wegen (b)(i) gilt für $|x| > M$
$$(1+|x|)^r \left|D^k \phi_j(x)\right| = (1+|x|)^{r+1} \left|D^k \phi_j(x)\right| \frac{1}{1+|x|}$$
$$\leq C^*_{k,r+1} \frac{1}{1+M} < \epsilon \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$
$\Longrightarrow$ Aussage (c)

(c) $\Longrightarrow$ (d): Lemma II 4

(d) $\Longrightarrow$ (e): Seien $k, m \in \mathbb{P}^n$ beliebig fest

$\Longrightarrow$ $\left|x^m D^k \phi_j(x)\right| \leq (1+|x|^2)^{|m|} \left|D^k \phi_j(x)\right| \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ [Lemma II 4]

(e) $\Longrightarrow$ (a): Wegen (e) für $m = 0$:

$$D^k\phi_j(x) \longrightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \text{ für jedes } k \in \mathbb{P}^n,$$

das heißt: (a)(ii). Seien $k, m \in \mathbb{P}^n$, $\epsilon > 0$ beliebig fest

$$\Longrightarrow \quad \exists j_0 : \left|x^m D^k \phi_j(x)\right| < \epsilon \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j > j_0 \qquad \text{[(e)]}$$

Da $\phi_j \in \mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow \quad \exists C_{k,m}(j) : \left|x^m D^k \phi_j(x)\right| \leq C_{k,m}(j) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N} \qquad \text{[Def. II 10]}$$

$$C_{k,m} := \max_{1 \leq j \leq j_0} \{\epsilon, C_{k,m}(j)\}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|x^m D^k \phi_j(x)\right| \leq C_{k,m} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$$

also (a)(ix)

□

Satz 1

Konvergiert $(\phi_j) \subset \mathfrak{s}$ in $\mathfrak{s}$, dann gibt es ein $\phi \in \mathfrak{s}$ mit

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \phi_j = \phi \text{ in } \mathfrak{s}$$

Also: $\mathfrak{s}$ ist *vollständig*. ◁

Beweis. Da (ϕ_j) auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig konvergiert (Def. 1(c),(ii): $k = 0$)

$$\Longrightarrow \quad \exists \phi \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{j \longrightarrow \infty} \phi_j(x) = \phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Da $(D^k\phi_j)_{j=1}^{\infty}$ auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig konvergiert für jedes $k \in \mathbb{P}^n$

$$\Longrightarrow \quad D^k\phi(x) \quad \exists \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, D^k\phi \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} D^k\phi_j(x) = D^k\phi(x) \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

$$\Longrightarrow \quad \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Nach Def. 1(c)(i):

$$\left|x^m D^k \phi_j(x)\right| \leq C_{k,m} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|x^m D^k \phi(x)\right| \leq C_{k,m} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longrightarrow \quad \phi \in \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} \phi_j = \phi \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \text{[Def. II 10]}$$

□

Bemerkung: Einbau in die Theorie der topologischen Vektorräume: Über

$$\rho_r(\phi) := \sup_{|k| \leq r} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + x^2)^r \left|D^k \phi(x)\right| \right) \qquad \forall r \in \mathbb{P}$$

wird ein (filtrierendes) System von (Halb-)Normen auf $\mathfrak{s}$ erklärt, das abzählbar ist. Lemma 1(a) $\Longleftrightarrow$ (d)

$$\phi_j \longrightarrow \infty \text{ (in } \mathfrak{s}) \Longleftrightarrow \lim_{j \longrightarrow \infty} \rho_r(\phi_j) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{P}$$

das heißt: Der (elementare) (Folgen-)Konvergenzbegriff auf Def. 1 ist genau der, der über das (abzählbare) System der (Halb-)Normen ρ_r gegeben ist; das heißt: $\mathfrak{s}$ ist ein *lokalkonvexer Raum*. Weiter: $\mathfrak{s}$ ist separiert und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom ($\Longrightarrow$ Folgenkonvergenz reicht aus)
$\Longrightarrow$ $\mathfrak{s}$ ist metrisisierbar, und Satz 1 besagt: $\mathfrak{s}$ ist vollständig
$\Longrightarrow$ $\mathfrak{s}$ ist ein Fréchet-Raum.

Lemma 2

(vgl. Lemma II 5) Multiplikation mit einer Potenz bzw. Element aus $\mathfrak{s}$ und Differentiation sind *stetige* lineare Operationen von $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{s}$, das heißt: Sei $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$):

(a)
$$x^m \phi_j(x) \longrightarrow x^m \phi(x) \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \forall m \in \mathbb{P}^n$$

(b)
$$\psi \phi_j \longrightarrow \psi \phi \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \forall \psi \in \mathfrak{s}$$

(c)
$$D^k \phi_j \longrightarrow D^k \phi \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

$\triangleleft$

Beweis.

(a) Da $\phi_j, \phi \in \mathfrak{s}$

$\Longrightarrow$ $x^m \phi_j, x^m \phi \in \mathfrak{s} \qquad \forall m \in \mathbb{P}^n$ [Lemma II 5(a)]

Da nach Voraussetzung $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$)

$\Longrightarrow$ $(1+|x|)^r \left| D^k(\phi_j - \phi)(x) \right| \leq C^*_{k,r} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$ [Lemma 1(a)$\Longrightarrow$(b)]

Sei $m \in \mathbb{P}^n$ beliebig fest

$\Longrightarrow$ $(1+|x|)^r \left| D^k(x^m(\phi_j(x) - \phi(x))) \right| \leq C^{\Delta}_{k,r} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$ [Leibniz, Lemma II 4 (a)]

Außerdem nach Lemma 1 (a)$\Longrightarrow$(b)(ii):

$D^k(\phi_j(x) - \phi(x)) \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf jedem kompakten $K \subset \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ $D^k(x^m(\phi_j(x) - \phi(x))) \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf jedem kompakten $K \subset \mathbb{R}^n$ [Leibniz]

$\Longrightarrow$ (a) wegen Lemma 1 (b)$\Longrightarrow$(a)

(b) Entsprechend über Lemma II 5(b)

(c) Da $\phi_j, \phi \in \mathfrak{s}$

$\Longrightarrow$ $D^k \phi_j, D^k \phi \in \mathfrak{s} \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$ [Lemma II 5(c)]

Da $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$)

$\Longrightarrow$ $x^\ell D^p(\phi_j - \phi)(x) \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n \qquad \forall \ell, p \in \mathbb{P}^n$ [Lemma 1(a)$\Longrightarrow$(e)]

Sei $x \in \mathbb{P}^n$ beliebig fest

$\Longrightarrow$ $x^\ell D^p(D^k \phi_j - D^k \phi)(x) = x^\ell D^{p+k}(\phi_j - \phi)(x)$

$\longrightarrow 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n \qquad \forall \ell, p \in \mathbb{P}^n$

$\Longrightarrow$ $D^k \phi_j \longrightarrow D^k \phi$ (in $\mathfrak{s}$) [Lemma 1(e)$\Longrightarrow$(a)]

□

Lemma 3

(vgl. Lemma II 5(a)) Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ gilt: $\mathfrak{s} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig, das heißt: Sind $(\phi_j), \phi \subset \mathfrak{s}$ mit $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$), dann gilt

$$\phi_j, \phi \in L^p \quad \text{und} \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} \phi_j = \phi \text{ in } L^p$$

d.h.: Der Identitätsoperator $I : \phi \in \mathfrak{s} \longrightarrow \phi \in L^p$ ist stetig ◁

Beweis. Lemma II 5(a):

$$\mathfrak{s} \subset L^p \qquad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

(mengentheoretisch). Zur stetigen Einbettung: Sei $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad (1+|x|)^{n+1}(\phi_j(x) - \phi(x)) \longrightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n && \text{[Lemma 1(c) für } k=0,\ r=n+1] \\
&\Longrightarrow \quad \forall 1 \leq p \leq \infty : \|\phi_j - \phi\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|)^{(n+1)p}|\phi_j(x) - \phi(x)|}{(1+|x|)^{(n+1)p}}\, dx \\
&\qquad\qquad < \epsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{(n+1)p}}\, dx \\
&\qquad\qquad = M\epsilon^p \qquad \forall j \geq j_0(\epsilon) \\
&\Longrightarrow \quad (\phi_j) \longrightarrow \phi \text{ (in } L^p)
\end{aligned}$$

Fall $p = \infty$: Trivial nach Def. 1(a)(ii) für $k = 0$. □

Folgerung 1

(vgl. Satz II 12) Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ und ihre Inverse $\mathcal{F}^{-1}$ sind *stetige* (lineare, eineindeutige) Abbildungen von $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{s}$. ◁

Beweis. Wegen Satz II 12: Zeige (z.B.): $\mathcal{F} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ stetig, dazu: Sei $(\phi_j) \subset \mathfrak{s}$ mit $\phi_j \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{s}$). Zeige:

$$\phi_j^\wedge \longrightarrow 0 \text{ (in } \mathfrak{s})$$

dazu: Seien $k, m \in \mathbb{P}^n$ beliebig fest und bilde

$$\begin{aligned}
&\psi_j(x) := D^m((-ix)^k \phi_j(x)) \\
&\Longrightarrow \quad (\psi_j) \subset \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \psi_j \longrightarrow 0 \text{ (in } \mathfrak{s}) && \text{[Lemma II 5, Lemma 2]} \\
&\Longrightarrow \quad (1+|x|)^{n+1}\psi_j(x) \longrightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n && \text{[Lemma 1(c) mit } k=0,\ r=n+1] \\
&\qquad \psi_j^\wedge(v) = (iv)^m D^k \phi_j^\wedge(v) && \text{[Folgerung II 14]} \\
&\Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} : \left|v^m D^k \phi_j^\wedge(v)\right| \leq \left|\psi_j^\wedge(v)\right| \\
&\qquad\qquad \leq \|\psi_j\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|)^{n+1}|\psi_j(x)|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx && \text{[Satz II 1]} \\
&\qquad\qquad \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx = \epsilon M \qquad \forall j \geq j_0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad v^m D^k \phi_j^\wedge(v) \longrightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \qquad \forall k, m \in \mathbb{P}^n$$

$$\Longrightarrow \quad \phi_j^\wedge(v) \longrightarrow 0 \text{ (in } \mathfrak{s}), \qquad \text{[Lemma 1(e)}\Longrightarrow\text{(a)]}$$

entsprechend für Abb. $\mathcal{F}^{-1}$. □

IV.b Der Raum $\mathfrak{s}'$ der temperierten Distributionen

Bezeichnung: Vor Def. I 1: Sei X Linearsystem über dem Körper $\Phi = \mathbb{C}$ (z.B. $X = \mathfrak{s}$). Sei $f \in X$, $T \in X^*$ (stetiges Funktional). Schreibweise:

$$\langle T, f \rangle := Tf$$

Definition 2 (Stetigkeit in $\mathfrak{s}'$)

Ein Funktional T über $\mathfrak{s}$ heißt *stetig* (vgl. Bezeichnung auf Lemma 2/3, Folg. 1), falls für $(\phi_j), \phi \subset \mathfrak{s}$ mit

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \phi_j = \phi \text{ (in } \mathfrak{s})$$

gilt, daß

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \langle T, \phi_j \rangle = \langle T, \phi \rangle$$

◁

Definition 3 (L. Schwartz)

Ein lineares, stetiges Funktional über $\mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ heißt *temperierte Distribution*. Die Menge aller temperierten Distributionen bildet den zu $\mathfrak{s}$ dualen Raum $\mathfrak{s}'$. ◁

Beispiel (Durch Funktion erzeugte Distribution)
Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Setze

$$T_f(\phi) = \langle Tf, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Longrightarrow \quad T_f \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n),$$

denn: Sei $f \in L^p$. Da $\phi \in \mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow \quad \phi \in L^{p'} \qquad \text{[Lemma II 5(e)]}$$

$$\Longrightarrow \quad |T_f(\phi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\phi(x)|\, dx$$

$$\leq \|f\|_p \, \|\phi\|_{p'} \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Hölder]}$$

$$\Longrightarrow \quad T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx$$

wohldefiniert als lineares Funktional über $\mathfrak{s}$. T_f ist stetig, denn: Sei $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$). Zeige:

$$T_f(\phi_j) \longrightarrow T_f(\phi)$$

Dazu:

$$|T_f(\phi_j) - T_f(\phi)| \leq \|f\|_p \, \|\phi_j - \phi\|_{p'} \qquad \text{[Hölder]}$$

$$\longrightarrow 0$$

da $\mathfrak{s} \subset L^{p'}$ stetig eingebettet (Lemma 3).

Also: Jeder Funktion f aus L^p $(1 \leq p \leq \infty)$, entspricht Funktional $T_f \in \mathfrak{s}'$. Frage: Zurückgewinnen von f aus den Werten des Funktionals T_f, d.h.: Ist die Zuordnung $f \mapsto T_f$ eindeutig?

Definition 4

Zwei Distributionen $T, S \in \mathfrak{s}'$ heißen *gleich*, falls

$$T\phi = S\phi \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

◁

Satz 2

Sind $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ mit

$$T_f = T_g,$$

dann gilt

$$f(x) = g(x) \qquad \text{f.ü.}$$

◁

Beweis. Voraussetzung:

$$T_f(\phi) \;=\; T_g(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s},$$

d.h.:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - g(u))\phi(u)\, du \;=\; 0 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}.$$

Da $e^{-x^2} \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Lemma II 5)

$$\Longrightarrow \quad \phi_{x,t}(u) \;:=\; e^{-(x-u)^2/(4t)} \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - g(u))\phi_{x,t}(u)\, du \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

$$\Longrightarrow \quad W(f-g;x;t) \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \qquad \text{[Kapitel II (b), Beispiel W]}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) - g(x) \;=\; \underbrace{(f(x) - W(f;x;t))}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{(W(f;x;t) - W(g;x;t))}_{=0} + \underbrace{(W(g;x;t) - g(x))}_{\longrightarrow 0}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \;=\; g(x) \quad \text{f.ü.}$$

□

Also: Ist $T_f \in \mathfrak{s}'$ die durch $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ erzeugte temperierte Distribution, dann können die Funktionswerte fast überall durch Auswertung von T_f zurückgewonnen werden, etwa über

$$f(x_0) = \lim_{t \longrightarrow 0+} T_f(\phi_{x_0,t}),$$

also gibt es zwei Möglichkeiten, eine Funktion $f \in L^p$ zu beschreiben:

1. In der bisher üblichen Weise durch die Funktionswerte
2. Distributionentheoretisch durch die Werte von T_f

Also: Identifiziere f und T_f.

Bezeichnung: Für $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ (beliebig, muß kein T_f sein):

$$T(\phi) = \langle T, \phi \rangle = \langle T(x), \phi(x), \qquad \rangle \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

Achtung: $T(x)$ ist kein Wert, nur Schreibweise, um die Variable x für das Einsetzen festzulegen, z.B.:

$$\langle T(x), \phi(x+y) \rangle := \langle T, \psi \rangle$$

mit $\psi(\cdot) := \phi(\cdot + y)$.

Bezeichnung: $T \in \mathfrak{s}'$ heißt *regulär*, falls eine Funktion f existiert so daß $T = T_f$.

Damit f eine Distribution T_f erzeugt, muß f gewissen Eigenschaften haben. Z.B: $f \in L^p$, kann aber durchaus allgemeiner sein, siehe z.B. Ü4A3 zu den *langsam wachsenden* Funktionen.

Beispiel (δ-Distribution)
Zu $\phi \in \mathfrak{s}$ sei

$$\delta(\phi) := \phi(0)$$

(δ-Distribution, nach Dirac). Zeige: $\delta \in \mathfrak{s}'$, dazu: $\delta : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert und linear. δ stetig, denn: Sei $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$)

$$\Longrightarrow \quad \phi_j(x) \longrightarrow \phi(x) \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \qquad \text{[Def. 1(ii), } k = 0\text{]}$$

Insbesondere: $\phi_j(0) \longrightarrow \phi(0)$, also:

$$\delta(\phi_j) \longrightarrow \delta(\phi)$$

δ ist *keine* reguläre Distribution. Z.B. Annahme: Es gibt eine Funktion $\delta(u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, die δ erzeugt:

$$\langle \delta, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u)\phi(u)\, du = \phi(0) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

Für ein beliebiges festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nehme

$$\phi(u) = \phi_{x_0,t}(u) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{(x_0-u)^2}{4t}} \in \mathfrak{s} \qquad \forall t > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \delta(x_0) = \lim_{t \longrightarrow 0+} W(\delta; x_0; t) \qquad \text{[Folg. II 2, Satz II 6]}$$

$$= \lim_{t \longrightarrow 0+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x_0^2}{4t}}$$

$$= \begin{cases} 0, & x_0 \neq 0 \\ \infty, & x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta = 0 \quad \text{f.ü.}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u)\phi(u)\, du = 0 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(0) = 0 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Def.]}$$

Widerspruch, z.B. $e^{-x^2} \in \mathfrak{s}$.

Da es nicht-reguläre Distributionen gibt, kann man Distributionen als "verallgemeinerte Funktionen" auffassen. Viele Operationen wie Translation, Differentiation, Fourier-Transformation sind auf Distributionen übertragbar, man kann wie mit Funktionen rechnen. Es gibt aber auch Probleme, beispielsweise die Übertragung der Faltung und des Produkts.

Definition 5

(a) Eine Folge $(T_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{s}'$ *konvergiert in* $\mathfrak{s}$ *gegen* $T \in \mathfrak{s}'$ (Bezeichnung: $\lim_{j\longrightarrow\infty} T_j = T$ (in $\mathfrak{s}'$)). falls

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \langle T_j, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

(b) $(T_j) \subset \mathfrak{s}'$ heißt *konvergent (in* $\mathfrak{s}'$*)*, falls für jedes $\phi \in \mathfrak{s}$ die Folge $(\langle T_j, \phi\rangle) \subset \mathbb{C}$ konvergiert.

◁

Sei $(T_j) \subset \mathfrak{s}'$ konvergent in $\mathfrak{s}'$. Def. 5: $(\langle T_j, \phi\rangle)$ hat für jedes $\phi \in \mathfrak{s}$ einen eindeutigen Grenzwert $(\langle T, \phi\rangle) \in \mathbb{C}$. Klar: T linear, Frage: Ist T stetig?

Satz 3

$\mathfrak{s}'$ ist vollständig (bzgl. der schwachen Konvergenz), das heißt: Konvergiert $(T_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{s}'$ im Sinne von Definition 5, dann $\exists T \in \mathfrak{s}'$ mit $\lim_{j\longrightarrow\infty} T_j = T$ (in $\mathfrak{s}'$). ◁

Beweis. Entweder elementar mit gleitendem Höcker (z.B. Lit. B II 2 (Zemanian) S. 104) oder mit Theorie (Banach-Steinhaus) per topologische Vektorräume. □

Lemma 4

Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ gilt: $\mathfrak{s} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow \mathfrak{s}'$ ◁

Beweis. $\mathfrak{s} \subset L^p$ stetig (Lemma 3). Seien $(f_j), f \subset L^p$ so daß $(f_j) \longrightarrow f$ (in L^p)

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \left|\langle T_{f_j}, \phi\rangle - \langle T_f, \phi\rangle\right| &\leq \int |f_j(u) - f(u)||\phi(u)|\, du \\ &\leq \underbrace{\|f_j - f\|_p}_{\longrightarrow 0} \|\phi\|_{p'} \\ &\longrightarrow 0 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad \square \\ \Longrightarrow \quad (T_{f_j}) &\longrightarrow T_f \text{ (in } \mathfrak{s}) \end{aligned}$$

□

Übertragen von Operationen für Funktionen (aus z.B. $A \subset L^p$) auf Distributionen über sogenanntes Permanenzprinzip:

(i) *Übersetzen* der Operation in Bezeichnungsweise bzgl. regulärer Distributionen (Ansatz)

(ii) *Dualisieren*

(iii) *Fortsetzen* auf $\mathfrak{s}'$ (falls möglich)

Beispiel (Translation)

(a) Translation: Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig fest.

$$(\tau_h f)(x) := f(x + h)$$

(1) Übersetzen auf reguläre Distributionen motiviert:

$$\tau_h T_f := T_{\tau_h f}$$

(2) Dualisieren über Substitution:

$$\begin{aligned}\langle \tau_h T_f, \phi\rangle &:= \langle T_{\tau_h f}, \phi\rangle \\ &:= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_h f)(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\phi(u-h)du \\ &=: \langle T_f, \tau_{-h}\phi\rangle\end{aligned}$$

Nach Lemma II 5(d) ist mit $\phi \in \mathfrak{s}$ auch $\tau_{-h}\phi \in \mathfrak{s}$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$

(3) Fortsetzen: Für jedes $T \in \mathfrak{s}'$, $h \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle T, \tau_{-h}\phi\rangle \in \mathbb{C}$ wohldefiniert $\forall \phi \in \mathfrak{s}$. Ist $(\phi_j) \longrightarrow \phi$ (in $\mathfrak{s}$), so gilt (Ü4A1(a))

$$\tau_{-h}\phi_j \longrightarrow \tau_{-h}\phi \text{ (in } \mathfrak{s})$$

das heißt: $\tau_{-h} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ linear und stetig.

(b)

Definition 6

Seien $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist $\tau_h T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert durch

$$\langle \tau_h T, \phi\rangle := \langle T, \tau_{-h}\phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$$

$\tau_h T$ heißt *Translation von T um h*. Bezeichnung:

$$\langle T(x+h), \phi(x)\rangle := \langle \tau_h T(x), \phi(x)\rangle$$

◁

Beispiel

$$\begin{aligned}\langle \tau_{-x_0}\delta, \phi\rangle &= \langle \delta(x-x_0), \phi(x)\rangle \\ &:= \langle \delta(x), \tau_{x_0}\phi(x)\rangle \\ &= \phi(x_0) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}, x_0 \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Beispiel (Ableitung)
Sei $n = 1$ und $f \in C_B^{(1)}(\mathbb{R}) := \{f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n) : f, f' \text{ beschränkt}\}$ f, f' erzeugen reguläre temperierte Distributionen.

(i) Ansatz: $(T_f)' := T_{f'}$

(ii) Dualisiere durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\langle (T_f)', \phi\rangle &:= \langle T_{f'}, \phi\rangle \qquad [\text{(i)}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\ dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{[f(x)\phi(x)]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\ dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\ dx \\
&= -\langle T_f, \phi' \rangle
\end{aligned}
$$

Da $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow \quad \phi' \in \mathfrak{s}(\mathbb{R})$ [Lemma II 5(c)]

(iii) Fortsetzen: Für jedes $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R})$ ist $-\langle T, \phi' \rangle \in \mathbb{C}$ wohldefiniert $\forall \phi \in \mathfrak{s}$.

Definition 7

Für $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ sind die *partiellen Ableitungen* (1. Ordnung)

$$D_{x_j} T := T_{x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j} T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$$

$(j = 1, \ldots, n)$ definiert durch

$$\langle T_{x_j}, \phi \rangle := -\langle T, \phi_{x_j} \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n), 1 \le j \le \infty$$

◁

Zeige: $T_{x_j} \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ (also Def. 7 sinnvoll), dazu: Sei $\phi \in \mathfrak{s}$

$\Longrightarrow \quad \phi_{x_j} \in \mathfrak{s}$ [Lemma II 5 (c)]

also $(T \in \mathfrak{s}')$ ist $T_{x_j} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert und linear, zeige: Stetigkeit. Dazu:

$(\phi_\ell)_{\ell=1}^{\infty} \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{s}$)

$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\phi_\ell \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{s}$) $\qquad \forall 1 \le j \le n$ [Lemma 2(c)]

$\Longrightarrow \quad \left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j}\phi_\ell \right\rangle \longrightarrow 0$ [T stetig]

$\Longrightarrow \quad \langle T_{x_j}, \phi_\ell \rangle \longrightarrow 0 \qquad \forall 1 \le j \le n,$

also ist T_{x_j} stetig.

Jedes $T \in \mathfrak{s}'$ ist also (partiell) differenzierbar, die partiellen Ableitungen sind temperierte Distributionen, also ist T auch beliebig oft differenzierbar.

Beispiel (δ)
Für $n \in \mathbb{N}, 1 \le j \le n$:

$$
\begin{aligned}
\langle \delta_{x_j}, \phi \rangle &= -\langle \delta, \phi_{x_j} \rangle \\
&= -\phi_{x_j}(0)
\end{aligned}
$$

Ist T regulär, erzeugt durch f, so hat man zwei Ableitungsbegriffe: den klassischen punktweisen und den distributionentheoretischen – Zusammenhang? Dazu: Ist $f \in C_B^{(1)}(\mathbb{R}^n)$, dann sind die beiden Begriffe konsistent, das heißt:

$$(T_f)_{x_j} = T_{f_{x_j}} \qquad \forall 1 \le j \le n$$

(vgl. Permanenzprinzip und Def. 4). Die distributionentheoretische Ableitung ist aber sehr allgemein, viele Funktionen sind distributionentheoretisch, aber nicht punktweise differenzierbar. Beispiel ($n = 1$):

$$f_0(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist unstetig in jedem $x \in \mathbb{R}$, also nirgendwo differenzierbar. Aber:

$$\begin{aligned} & f_0(x) = 1 \quad \text{f.ü.} && [\mu(\mathbb{Q}) = 0] \\ \Longrightarrow \quad & f_0 \in L^\infty \\ \Longrightarrow \quad & T_{f_0} \in \mathfrak{s} \\ \Longrightarrow \quad & (T_{f_0})' \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}) \quad \exists, \end{aligned}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \langle (T_{f_0})', \phi \rangle &:= -\langle T_{f_0}, \phi \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\phi'(x)\, dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)\, dx \\ &= -(\phi(\infty) - \phi(-\infty)) = 0 \\ \Longrightarrow \quad (T_{f_0}) &= 0 \end{aligned}$$

und 0 ist ist natürlich eine reguläre Distribution.

Satz 4

Für jedes $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ und $1 \le j \le n$ gilt (vgl. klassische Ableitung)

$$\lim_{h \longrightarrow \infty} \frac{T(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - T(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{h} = T_{x_j}(x) \text{ (in } \mathfrak{s})$$

◁

Beweis. Mit $e_j := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^\top$ (1 an der j-ten Stelle) gilt für beliebige $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$:

$$\left\langle \frac{T(x + he_j) - T(x)}{h}, \phi(x) \right\rangle = \left\langle T(x), \frac{\phi(x - he_j) - \phi(x)}{h} \right\rangle$$

Setze

$$\begin{aligned} & \psi_h(x) := \frac{\phi(x - he_j) - \phi(x)}{h} \\ \Longrightarrow \quad & \psi_h(x) \overset{h \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} -\phi_{x_j}(x) \text{ (in } \mathfrak{s}) && [\text{Ü4A1(c)}] \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{h \longrightarrow 0} \left\langle \frac{T(x + he_j) - T(x)}{h}, \phi(x) \right\rangle = \lim_{h \longrightarrow \infty} \langle T, \psi_h \rangle \\ & \qquad = -\langle T, \phi_{x_j} \rangle && [T \text{ stetig}] \\ & \qquad = \langle T_{x_j}, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && [\text{Def. 7}] \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung (Def. 5). □

Satz 5

Die distributionentheoretische Ableitung ist eine lineare stetige Operation von $\mathfrak{s}'$ in $\mathfrak{s}'$, d.h.:

(i)
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha S + \beta T) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} S + \beta \frac{\partial}{\partial x_j} T \qquad S, T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n), \alpha, \beta \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq \infty$$

(ii) Ist $T = \lim_{\ell \longrightarrow \infty} T_\ell$ (in $\mathfrak{s}'$), so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T = \lim_{\ell \longrightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_j} T_\ell \text{ (in } \mathfrak{s}') \qquad \forall 1 \leq j \leq n$$

◁

Beweis. Linearität: Klar. Stetigkeit: Sei $1 \leq j \leq n$, $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ beliebig

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T_\ell, \phi \right\rangle &= -\left\langle T_\ell, \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \right\rangle && \text{[Def. 7]} \\ &\longrightarrow -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \right\rangle && \text{[Def. 5(a)}, \phi_{x_j} \in \mathfrak{s}\text{]} \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T, \phi \right\rangle \end{aligned}$$

Da $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\ell \longrightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_j} T_\ell = \frac{\partial}{\partial x_j} T \text{ (in } \mathfrak{s}') \qquad \text{[Def. 5(a)]}$$

□

Bemerkung
In $\mathfrak{s}'$ konvergente Folgen von (temperierten) Distributionen können immer gliedweise differenziert werden (vgl. klassische Analysis).

Satz 6

Jedes $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ hat partielle Ableitungen beliebiger Ordnung, die Ableitungen sind unabhängig von der Reihenfolge, und für jedes $k \in \mathbb{P}^n$ gilt die *Darstellung*

$$\left\langle D^k T, \phi \right\rangle = (-1)^{|k|} \left\langle T, D^k \phi \right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$$

für die (partielle) Ableitung $|k|$-ter Ordnung $D^k T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ ◁

Bemerkung
Die Darstellung ermöglicht eine *direkte* Definition von $D^k T$ (ohne Iteration; vgl. klassische Analysis)

Folgerung 2

Für beliebige $k \in \mathbb{P}^n$ ist D^k eine lineare stetige Operation von $\mathfrak{s}'$ in $\mathfrak{s}'$. ◁

Beweis. Entweder iterative Anwendung von Satz 5 oder direkt mit Beweis zu Satz 5. □

IV.c Fourier-Transformation über $\mathfrak{s}'$

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq p \leq 2$. Nach Lemma 4: $L^p \subset \mathfrak{s}'$. Nach Satz II 1/III 1/9 und Lemma III 8: $f^\wedge \in L^{p'}$. Da $L^{p'} \subset \mathfrak{s}'$, erzeugen $f, f^\wedge$ reguläre temperierte Distributionen $\rightsquigarrow$ Permanenzprinzip:

Ansatz: $(T_f)^\wedge := T_{f^\wedge}$. Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle (T_f)^\wedge, \phi \rangle &= \langle T_{f^\wedge}, \phi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(v)\phi(v)\, dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\phi^\wedge(v)\, dv \qquad \text{[Dualisieren über Parseval-Formeln!]} \\
&= \langle T_f, \phi^\wedge \rangle
\end{aligned}$$

Da $\phi \in \mathfrak{s}$, ist auch $\phi^\wedge \in \mathfrak{s}$ (Satz II 12). Für *jedes* $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ ist $\langle T, \phi^\wedge \rangle \in \mathbb{C}$ wohldefiniert für alle $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 8 (blah)

Für $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ ist die *Fourier-Transformierte* $T^\wedge \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\langle T^\wedge, \phi \rangle := \langle T, \phi^\wedge \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$$

◁

Folgerung 3

Für jedes $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ gilt: $T^\wedge \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert. Ist $T = T_f$ regulär erzeugt durch $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq p \leq 2$, dann ist $T^\wedge$ regulär erzeugt durch $f^\wedge$:

$$(T_f)^\wedge = T_{f^\wedge}$$

◁

Beweis. Zeige: $T^\wedge \in \mathfrak{s}'$ (also Def. 8 sinnvoll). Dazu: Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\Longrightarrow \quad \phi^\wedge \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Satz II 12]}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle T, \phi^\wedge \rangle \in \mathbb{C} \quad \text{wohldefiniert} \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad [T \in \mathfrak{s}']$$

also ist $T^\wedge : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert und linear. Zeige: $T^\wedge$ stetig, dazu: Sei $(\phi_j)_{j=1}^\infty \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{s}$)

$$\Longrightarrow \quad \phi_j^\wedge \longrightarrow 0 \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \text{[Folg. 1]}$$

Da T stetig

$$\Longrightarrow \quad \langle T, \phi_j^\wedge \rangle \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \quad \langle T^\wedge, \phi_j \rangle \longrightarrow 0$$

also ist $T^\wedge$ stetig. □

Beispiel (δ)

$$\begin{aligned}\langle \delta^\wedge, \phi\rangle &= \langle \delta, \phi^\wedge\rangle \\ &= \phi^\wedge(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u) e^0 \, du && \text{[Def. II 1]} \\ &= \langle 1, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta^\wedge = 1 \qquad \text{[Def. 4]}$$

d.h. $\delta^\wedge \in \mathfrak{s}'$ ist regulär, erzeugt durch die Funktion $1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Einzelaussagen: Vgl. Ü4A4 für $A = -E$, $b = 0$.

Sei $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, dann ist $T(-x) \in \mathfrak{s}'$, definiert durch

$$\langle T(-x), \phi(x)\rangle = \langle T(x), \phi(-x)\rangle \qquad \text{[vgl. Lemma II 1(d)]}$$

Lemma 5

Seien $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Es gilt

(i)
$$\left\langle T^\wedge, \overline{\phi^\wedge}\right\rangle = (2\pi)^n \left\langle T, \overline{\phi}\right\rangle$$

(ii)
$$\langle T^\wedge, \phi^\wedge\rangle = (2\pi)^n \langle T, \phi^*\rangle$$

(iii)
$$T^{\wedge\wedge} = (2\pi)^n T^*$$

◁

Beweis.

$$\begin{aligned}\left\langle T^\wedge, \overline{\phi^\wedge}\right\rangle &= \left\langle T^\wedge, \overline{T^*}^\wedge\right\rangle && \text{[Lemma II 1(c)]} \\ &= \left\langle T, \overline{\phi^*}^{\wedge\wedge}\right\rangle && \text{[Def. 8]} \\ &= (2\pi)^n \left\langle T, \overline{\phi^*}^*\right\rangle && \text{[Folg. II 15(ii)]} \\ &= (2\pi)^n \left\langle T, \overline{\phi}\right\rangle\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}\langle T^\wedge, \phi^\wedge\rangle &= \langle T, \phi\rangle^{\wedge\wedge} \\ &= (2\pi)^n \langle T, \phi^*\rangle\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\langle T^{\wedge\wedge}, \phi\rangle &= \langle T^\wedge, \phi^\wedge\rangle \\ &= (2\pi)^n \langle T, \phi^*\rangle && \text{[(ii)]}\end{aligned}$$

$$= (2\pi)^n \langle T^*, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad T^{\wedge\wedge} = (2\pi)^n T^* \qquad \text{[Def. 4]}$$

(iii)

□

Sei $\mathcal{F} : \mathfrak{s}' \longrightarrow \mathfrak{s}'$ definiert durch

$$\mathcal{F}[T] := T^{\wedge} \qquad \text{[Def. 8]}$$

vgl. Bez. zu Def. II 4:

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u) e^{ixu}\, du \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

(macht Sinn für alle $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, insbesondere $\phi \in \mathfrak{s}$), entsprechend sei (vgl. Def. 8)

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1} T, \phi \right\rangle := \left\langle T, \mathcal{F}^{-1}[\phi] \right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

Satz 7

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathfrak{s}' \longrightarrow \mathfrak{s}'$ linear, stetig, bijektiv. ◁

Beweis. Zeige: $\mathcal{F} : \mathfrak{s}' \longrightarrow \mathfrak{s}'$ injektiv, dazu: Seien $T_1, T_2 \in \mathfrak{s}'$ mit $T_1^{\wedge} = T_2^{\wedge}$

$$\Longrightarrow \quad T_1^{\wedge\wedge} = T_2^{\wedge\wedge}$$

$$\Longrightarrow \quad T_1^* = T_2^* \qquad \text{[Lemma 5(iii)]}$$

$$\Longrightarrow \quad T_1 = T_2$$

Zeige: $\mathcal{F} : \mathfrak{s}' \longrightarrow \mathfrak{s}'$ surjektiv, dazu: Gegeben $T \in \mathfrak{s}'$, zeige: Es gibt ein $S \in \mathfrak{s}'$ mit $T = S^{\wedge}$. Dazu: Sei $T \in \mathfrak{s}'$

$$\Longrightarrow \quad \langle (T^*)^{\wedge}, \phi \rangle = \langle T^*, \phi^{\wedge} \rangle$$
$$= \langle T, (\phi^{\wedge})^* \rangle$$
$$= \langle T, (\phi^*)^{\wedge} \rangle \qquad \text{[Lemma II 1(d)]}$$
$$= \langle T^{\wedge}, \phi^* \rangle$$
$$= \langle (T^{\wedge})^*, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad (T^*)^{\wedge} = (T^{\wedge})^* \qquad \forall T \in \mathfrak{s}' \qquad \text{[Def. 4]}$$

Lemma 5(iii)

$$\Longrightarrow \quad T = (2\pi)^{-n} (T^{\wedge\wedge})^*$$
$$= (2\pi)^{-n} (T^{\wedge *\wedge})$$
$$= S^{\wedge}$$

mit $S = (2\pi)^{-n} (T^{\wedge})^* \in \mathfrak{s}' \Longrightarrow$ Behauptung für $\mathcal{F}$.

Bzgl. $\mathcal{F}^{-1}$: Sei $T \in \mathfrak{s}'$ beliebig. Nach Folgerung 1: $\mathcal{F}^{-1} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ linear und stetig, also wird durch

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \phi \right\rangle := \left\langle T, \mathcal{F}^{-1}[\phi] \right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

ist $\mathcal{F}^{-1}$ als Abbildung von $\mathfrak{s}'$ nach $\mathfrak{s}'$ wohldefiniert (zeige!). Weiter:

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}^{-1}[T^\wedge], \phi \right\rangle &:= \left\langle T^\wedge, \mathcal{F}^{-1}\phi \right\rangle \\
&= \left\langle T, (\mathcal{F}^{-1}\phi)^\wedge \right\rangle \\
&= \left\langle T, (2\pi)^{-n}\phi^{*\wedge\wedge} \right\rangle && \text{[Folg. II 15(i)]} \\
&= \langle T, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Folg. II 15(ii)]} \\
\Longrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}[T^\wedge] &= T && \text{[Def. 4]}
\end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$(\mathcal{F}^{-1}[T])^\wedge = T \qquad \forall T \in \mathfrak{s}',$$

also ist $\mathcal{F}^{-1} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ die inverse Abbildung zum bijektiven $\mathcal{F} : \mathfrak{s}' \longrightarrow \mathfrak{s}'$.

Zeige: $\mathcal{F} : \mathfrak{s}' \longrightarrow \mathfrak{s}'$ stetig, dazu: Sei $(T_j), T \subset \mathfrak{s}'$ mit $T_j \longrightarrow T$ (in $\mathfrak{s}$)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \left\langle \mathcal{F}^{-1}[T_j], \phi \right\rangle = \left\langle T_j, \mathcal{F}^{-1}\phi \right\rangle \\
&\Longrightarrow \quad \left\langle T, \mathcal{F}^{-1}\phi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \phi \right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Def. 5(a)]} \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} \mathcal{F}^{-1}[T_j] = \mathcal{F}^{-1}[T] \text{ (in } \mathfrak{s}')
\end{aligned}$$

□

Lemma 6

(vgl. Lemma II 1, III 9) Sei $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$.

(a)
$$(T(x+h))^\wedge(v) := (\tau_h T)^\wedge = e^{ihv} T^\wedge(v) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

(b)
$$(e^{-ihx} T(x))^\wedge(v) = T^\wedge(v+h) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

(c)
$$(\rho^n T(\rho x))^\wedge(v) = T^\wedge(\frac{v}{\rho}) \qquad \forall \rho > 0$$

(d)
$$(T^*)^\wedge = (T^\wedge)^*$$

(e)
$$\mathcal{F}^{-1}[T] = (2\pi)^{-n}(T^*)^\wedge$$

◁

Beweis.

(a) Bzgl. der Definition: Sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad T(x+h) \in \mathfrak{s}' \\
&\Longrightarrow \quad (T(x+h))^\wedge \in \mathfrak{s}' \quad \text{wohldefiniert} && \text{[Def. 8]}
\end{aligned}$$

Da $e^{ihv} \in \mathcal{O}_m$ (bzgl. v), ist $e^{ihv} T^\wedge(v) \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert (Ü4A2(c)). Zeige: Gleichheit, dazu: Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle (T(x+h))^\wedge, \phi\rangle &= \langle T(x+h), \phi^\wedge(x)\rangle && \text{[Def. 8]}\\
&= \langle T(x), \phi^\wedge(x-h)\rangle && \text{[Def. 6]}\\
&= \left\langle T(x), (e^{ihu}\phi(u))^\wedge(x)\right\rangle && \text{[Lemma II 1(b)]}\\
&= \left\langle T^\wedge(u), e^{ihu}\phi(u)\right\rangle && \text{[Def. 8]}\\
&= \left\langle e^{ihu}T^\wedge(u), \phi(u)\right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Def. aus Ü4A2(c)]}
\end{aligned}$$

(b) Wie unter (a): Alle Größen wohldefiniert. Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\langle (e^{-ihx}T(x))^\wedge, \phi\right\rangle &= \left\langle e^{-ihx}T(x), \phi^\wedge(x)\right\rangle && \text{[Def. 8]}\\
&= \left\langle T(x), e^{-ihx}\phi^\wedge(x)\right\rangle && \text{[Ü4A2]}\\
&= \langle T(x), (\phi(u-h))^\wedge(x)\rangle && \text{[Lemma II 1(a)]}\\
&= \langle T^\wedge(u), \phi(u-h)\rangle && \text{[Def. 8]}\\
&= \langle T^\wedge(u+h), \phi(u)\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Def. 6]}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-ihx}T(x) = T^\wedge(x+h)$$

(c) Def. von $T(Ax+b)$ aus Ü4A4 mit $A = \rho E$, $b = 0$

$$\Longrightarrow \quad \rho^n T(\rho x) \in \mathfrak{s}' \quad \text{wohldefiniert} \qquad \forall \rho > 0$$

Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\langle (\rho^n T(\rho x)^\wedge, \phi\rangle &= \langle \rho^n T(\rho x), \phi^\wedge(x)\rangle && \text{[Def. 8]}\\
&= \rho^n \langle T(\rho x), \phi^\wedge(x)\rangle\\
&= \rho^n \rho^{-n}\left\langle T(x), \phi^\wedge(\frac{x}{\rho})\right\rangle && \text{[Ü4A4]}\\
&= \left\langle T(x), \phi^\wedge(\frac{x}{\rho})\right\rangle\\
&= \langle T(x), (\rho^n\phi(\rho u))^\wedge(x)\rangle && \text{[Lemma II 1(e)]}\\
&= \langle T^\wedge(u), \rho^n\phi(\rho u)\rangle && \text{[Def. 8]}\\
&= \left\langle T^\wedge(\frac{u}{\rho}), \phi(u)\right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Ü4A4 mit } A = E/\rho,\ b = 0]
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ (Def. 4) Behauptung.

(d) Schon im Beweis zu Satz 7 gezeigt.

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \phi\right\rangle &= \left\langle T, \mathcal{F}^{-1}\phi\right\rangle && \text{[Def.]}\\
&= \left\langle T, (2\pi)^{-n}(\phi^*)^\wedge\right\rangle && \text{[Folg. II 15(i)]}\\
&= (2\pi)^{-n}\langle (T^\wedge)^*, \phi\rangle && \text{[Def.]}\\
&= (2\pi)^{-n}\langle (T^*)^\wedge, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[(d)]}
\end{aligned}$$

(e) $\Longrightarrow$ Behauptung.

□

Satz 8

(vgl. Folg II 13, Satz II 11) Seien $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{P}^n$ beliebig.

(a)
$$(D^k T)^\wedge(v) = (iv)^k T^\wedge(v)$$

(b)
$$(D^k T)^\wedge = ((-ix)^k T(x))^\wedge$$

(Bzgl. der Def. vgl. jeweils Ü4A2(c)) ◁

Beweis.

(a) Bzgl. der Def.: Seien $T \in \mathfrak{s}', k \in \mathbb{P}^n$ beliebig

$\Longrightarrow$ $D^k T \in \mathfrak{s}'$ [$Satz 6$]

$\Longrightarrow$ $(D^k T)^\wedge \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert [Def. 8]

Da $(iv)^k \in \mathcal{O}_m$, ist (Ü4A2) $(iv)^k T^\wedge(v) \in$ (in $\mathfrak{s}$)$'$ wohldefiniert. Zeige: Gleichheit, dazu: Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle (D^k T)^\wedge, \phi \rangle &= \langle D^k T, \phi \rangle && \text{[Def. 8]} \\
&= (-1)^{|k|} \langle T, D^k \phi^\wedge \rangle && \text{[Satz 6]} \\
&= (-1)^{|k|} \langle T, ((-ix)^k \phi(x))^\wedge \rangle && \text{[Satz II 11(b)]} \\
&= (-1)^{|k|} \langle T^\wedge(x), (-ix)^k \phi(x) \rangle \\
\langle T^\wedge(v), (ix)^k \phi(x) \rangle &= \langle (ix)^k T^\wedge(v), \phi(x) \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Def. aus Ü4A2(c)]}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung (Def. 4).

(b) Wie unter (a): Alle Größen wohldefiniert. Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle D^k T^\wedge, \phi \rangle &= (-1)^{|k|} \langle T^\wedge, D^k \phi \rangle && \text{[Satz 6]} \\
&= (-1)^{|k|} \langle T, (D^k \phi)^\wedge \rangle && \text{[Def. 8]} \\
&= (-1)^{|k|} \langle T(v), (iv)^k \phi^\wedge(k) \rangle && \text{[Satz II 11(a)]} \\
&= (-1)^{|k|} \langle (iv)^k T(v), \phi^\wedge(v) \rangle && \text{[Ü4A2]} \\
&= \langle (iv)^k T(v), \phi^\wedge(v) \rangle \\
&= \langle ((-iv)^k T(V))^\wedge, \phi \rangle \qquad \forall \phi \text{ (in } \mathfrak{s}) && \text{[Def. 8]}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung (Def. 4).

□

Beispiel (δ)
Seien $h \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{P}^n$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad (D_x^k \delta(x+h))^\wedge &= (iv)^k e^{ihv} \delta^\wedge(v) && \text{[Satz 8(a), Lemma 6(a)]} \\
&\overset{\delta^\wedge = 1}{=} (iv)^k e^{ihv}
\end{aligned}$$

$$(\delta(x+h))^\wedge(v) \;=\; e^{ihv} \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Fall $k = 0$:

$$(D^k\delta)^\wedge(v) \;=\; (iv)^k \qquad \forall k \in \mathbb{R}^n$$

Fall $h = 0$: reguläre temperierte Distribution, erzeugt durch Funktion aus $\mathcal{O}_m$.

$$\begin{aligned}
&\delta^\wedge \;=\; 1\\
\Longrightarrow\quad &1^\wedge \;=\; \delta^{\wedge\wedge}\\
\Longrightarrow\quad &1^\wedge \;=\; (2\pi)^n\delta^*\\
&\qquad\;\; = (2\pi)^n\delta, && \text{[Lemma 5(iii), } \delta \text{ radial (Ü4A4(d))]}\\
\Longrightarrow\quad &1^\wedge \;=\; (2\pi)^n\delta\\
\Longrightarrow\quad &((ix)^k e^{ikx})^\wedge(v) \;=\; (-1)^{|k|}((-ix)^k e^{ikx}1)^\wedge(v) && \text{[Satz 8(b), Lemma 6(b)]}\\
&\qquad\qquad\qquad\;\; = (-1)^{|k|}D^k 1^\wedge(v-h)\\
&\qquad\qquad\qquad\;\; = (-1)^{|k|}(2\pi)^n D^k\delta(v-h)
\end{aligned}$$

$$(e^{ihx})^\wedge(v) \;=\; (2\pi)^n\tau_{-h}\delta \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Fall $k = 0$:

$$((ix)^k)^\wedge(v) \;=\; (-1)^{|k|}(2\pi)^n D^k\delta \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

Fall $h = 0$:

$1 \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, also $1^\wedge$ klassisch nicht definiert, aber wohldefiniert als temperierte Distribution $(2\pi)^n\delta$.

Bemerkung
Hinsichtlich der Übertragung von Eigenschaften von Funktionen auf Distributionen fehlen (bis jetzt): Faltung (Def. II 2, Satz II 2), Faltungssätze (Satz II 3, III 10) – Problematik. Dazu Satz II 13:

$$\phi, \psi \in \mathfrak{s} \Longrightarrow \phi * \psi \in \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad (\phi * \psi)^\wedge = \phi^\wedge\psi^\wedge$$

Folgerung 1: $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}$ stetig

Lemma 7

Für $\phi, \psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $\phi * \psi$ stetig (in $\mathfrak{s}$) in jedem Faktor. ◁

Beweis.

$$\phi * \psi \;=\; \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\phi \cdot \mathcal{F}\psi)$$

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ stetig nach Folgerung 1, $\cdot$ stetig nach Lemma 2(b). □

Seien $\tau, \psi \in \mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow \quad \tau * \psi \;\in\; dS \qquad \text{[Satz II 13, Lemma 4]}$$

$\Longrightarrow T_{\tau*\psi} \in \mathfrak{s}'$ als reguläre temperierte Distribution wohldefiniert.

Permanenzprinzip: Ansatz:

$$T_\tau * T_\psi \;:=\; T_\tau * \psi := T_{\tau*\psi}$$

Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle T_\tau * \psi, \phi\rangle &:= \langle T_{\tau*\psi}, \phi\rangle && \text{[(i)]}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau * \psi)(x)\phi(x)\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau(x-u)\psi(u)\ du \right)\ dx && \text{[Def. II 2]}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau(\underbrace{x-u}_{:=v})\phi(x)\ dx \right)\ du && \text{[L22 (Fubini)]}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau(v)\phi(v+u)\ dv \right)\ du\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \tau 8v) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(u)\phi(v+u)\ du \right)}_{=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(-x)\phi(v-x)\ dx}\ dv && \text{[L22]}\\
&= \langle T_\tau, \psi^* * \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}
\end{aligned}$$

Sei $\psi \in \mathfrak{s}$ fest

$$\Longrightarrow \quad \psi^* * \phi \ \in\ \mathfrak{s} \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Satz II 13]}$$

Fortsetzen: Für jedes $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ (und jedes $\psi \in \mathfrak{s}$) ist $\langle T, \psi^* * \phi\rangle \in \mathbb{C}$ wohldefiniert für alle $\phi \in \mathfrak{s}$. Also gilt für das Funktional $T * \psi$, definiert durch

$$\langle T * \psi, \phi\rangle := \langle T, \psi^* * \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

$T * \psi : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert, linear, stetig, denn: T stetig und $\psi^* * \phi$ stetig in zweiter Komponente (Lemma 7), also $T * \psi \in \mathfrak{s}'$.

Satz 9

Seien $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Durch

$$\langle T * \psi, \phi\rangle := \langle T, \psi^* * \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$$

wird eine Distribution $T * \psi \in \mathfrak{s}'$ definiert, die *Faltung* von T und ψ. Ist $T = T_\tau$ regulär erzeugt durch $\tau \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $T_\tau * \psi$ regulär erzeugt:

$$T_\tau * \psi = T_{\tau*\psi}$$

Es gilt der *Faltungssatz*: $(T * \psi)\hat{} = \psi\hat{}\, T\hat{}$ (vgl. Ü4A2 bzgl. Def.). Dazu gilt folgendes *Assoziativgesetz*:

$$(T * \psi) * \theta = T * (\psi * \theta) \qquad \forall T \in \mathfrak{s}', \psi, \theta \in \mathfrak{s}$$

◁

Beweis. Noch zu zeigen: Faltungssatz; dazu: Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{s}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad (\psi^* * \phi\hat{})\hat{} &= (\psi^*)\hat{}\,\phi\hat{}\hat{} && \text{[Satz II 13]}\\
&= (\psi\hat{})^*(2\pi)^n\phi^* && \text{[Folg. II 15(ii)]}\\
&= (2\pi)^n(\psi\hat{}\,\phi)^*\\
\Longrightarrow \quad (\psi\hat{}\,\phi)\hat{} &= (2\pi)^{-n}(\psi^* * \phi\hat{})\hat{}*\hat{}
\end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-n}(\psi^* * \phi)^{\wedge\wedge *} \qquad \text{[Lemma II 1(d)]}$$
$$= \psi^* * \phi^{\wedge} \qquad \text{[Folg. II 15(ii)]}$$
$$\Longrightarrow \quad \langle (T*\psi)^{\wedge}, \phi\rangle = \langle T*\psi, \phi^{\wedge}\rangle \qquad \text{[Def. 8]}$$
$$= \langle T, \psi^* * \phi^{\wedge}\rangle \qquad \text{[Def.]}$$
$$= \langle T, (\psi^{\wedge}\phi)^{\wedge}\rangle$$
$$\langle T^{\wedge}, \psi^{\wedge}\phi\rangle \ [Def.8]$$
$$= \langle \psi^{\wedge} T^{\wedge}, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

($\psi^{\wedge}T^{\wedge}$ wohldefiniert nach Ü4A2, da $\psi^{\wedge} \in \mathfrak{s} \subset \mathcal{O}_m$)

$$\Longrightarrow \quad (T*\psi)^{\wedge} = \psi^{\wedge}T^{\wedge} \qquad \text{[Def. 4]}$$

Zeige: Assoziativgesetz; dazu: Seien $\psi, \phi, \theta \in \mathfrak{s}$ beliebig

$$\Longrightarrow \quad \langle (T*\psi)*\theta, \phi\rangle = \langle T*\psi, \theta^* * \phi\rangle \qquad \text{[Def.]}$$
$$= \langle T, (\psi^* * \theta^*) * \phi\rangle \qquad \text{[Fubini]}$$
$$= \langle T, (\psi * \theta)^* * \phi\rangle$$
$$= \langle T, (\psi * \theta)^* * \phi\rangle$$
$$= \langle T * (\psi * \theta), \phi\rangle \qquad \text{[Def.]}$$

□

Vergleiche Bemerkung in Kapitel IV (a): Seien über $\mathfrak{s}$ *Normen* definiert durch

$$\rho_r(\phi) := \sup_{|k|\le r} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+x^2)^r \left| D^k \phi(x) \right| \right), \qquad r \in \mathbb{P}$$

Lemma 1(a)$\Longleftrightarrow$(d) besagt:

$$(\phi_j) \longrightarrow 0 \text{ (in } \mathfrak{s}) \iff \rho_r(\phi_j) \longrightarrow 0 \quad \forall r \in \mathbb{P}$$

Lemma 8

(vgl. Def. I 11) Sei $T : \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein lineares Funktional.

$$T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n) \equiv \exists C < \infty, r \in \mathbb{P} : |\langle T, \phi\rangle| \le C\rho_r(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

◁

Beweis.

$\Longleftarrow$ Sei $T : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ linear mit

$$|\langle T, \phi\rangle| \le C\rho_r(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

mit gewissen $C < \infty, r \in \mathbb{P}$. Sei $(\phi_j) \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{s}$)

$$\Longrightarrow \quad \rho_r(\phi_j) \longrightarrow 0 \qquad \text{[Lemma 1(a)}\Longrightarrow\text{(d)]}$$
$$\Longrightarrow \quad \langle T, \phi_j\rangle \longrightarrow 0$$

d.h. T ist stetig.

$\Longrightarrow$ Sei $T \in \mathfrak{s}'$. Annahme: Aussage falsch, d.h.: Zu jedem $m \in \mathbb{P}$ gibt es ein $\phi_m \in \mathfrak{s} \setminus \{0\}$ mit

$$|\langle T, \phi_m \rangle| \; > \; (m+1)\rho_m(\phi_m)$$

Sei

$$\psi_m \; := \; \frac{\phi_m}{(m+1)\rho_m(\phi_m)}.$$

$\psi_m \in \mathfrak{s}$, denn $\rho_m(\phi_m) \neq 0$ für $\phi_m \neq 0$. Daher ist $|\langle T, \psi_m \rangle| > 1$ und $\rho_m(\psi_m) = \frac{1}{m+1}$ $\forall m \in \mathbb{P}$. Da für $r \leq m$ und $\phi \in \mathfrak{s}$:

$$\begin{aligned} \rho_r(\phi) \; &= \; \sup_{|k| \leq r} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^r \left| D^k \phi(x) \right| \right) \\ &\leq \; \sup_{|k| \leq m} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+x^2)^m \left| D^k \phi(x) \right| \right) =: \rho_m(\phi) \end{aligned}$$

Für jedes $r \in \mathbb{P}$ mit $r \leq m$ gilt:

$$\begin{aligned} &\rho_r(\phi_m) \; \leq \; \rho_m(\psi_m) = \frac{1}{m+1} \\ \Longrightarrow \quad &\lim_{m \longrightarrow \infty} \rho_r(\psi_m) \; = \; 0 \qquad \forall r \in \mathbb{P} \\ \Longrightarrow \quad &\psi_m \; \longrightarrow \; 0 \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \text{[Lemma 1(d)}\Longrightarrow\text{(a)]} \end{aligned}$$

Da T stetig: $\langle T, \psi_m \rangle \longrightarrow 0$, aber $|\langle T, \psi_m \rangle| > 1$ $\forall m \in \mathbb{P}$, also Annahme falsch.

□

Satz 10

Seien $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $T * \psi$ regulär, erzeugt durch $\eta \in \mathcal{O}_m$, definiert durch

$$\eta(x) := \langle T, \tau_{-x} \psi^* \rangle$$

(vgl. Ü4A2) ◁

Beweis. (Skizze) Die Funktion $\eta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ist wohldefiniert, denn mit $\psi \in \mathfrak{s}$ gilt auch $\psi^*(u) := \psi(-u) \in \mathfrak{s}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} (\tau_{-x}\psi^*)(u) \; &:= \; \psi^*(u-x) \\ &= \; \psi(x-u) \in \mathfrak{s} \end{aligned}$$

also ist für jedes $T \in \mathfrak{s}', \psi \in \mathfrak{s}$ (beliebig fest) $\langle T, \tau_{-x}\psi^* \rangle \in \mathbb{C}$ wohldefiniert für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Zeige: $\eta \in \mathcal{O}_m$, dazu: Sei $0 \neq t \in \mathbb{R}$ und e_j $(1 \leq j \leq n)$ der j-te Einheitsvektor. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\eta(x+te_j) - \eta(x)}{t} \; &:= \quad \left\langle T, \frac{\tau_{-(x+te_j)}\psi^* - \tau_{-x}\psi^*}{t} \right\rangle \\ &= \quad \left\langle (\tau_x T)(u), \frac{\psi^*(u-te_j) - \psi^*(u)}{t} \right\rangle \qquad \text{[Def. 6]} \\ &\overset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \; \langle \tau_x T, -(\psi^*)_{u_j} \rangle \end{aligned}$$

da Ü4A1(c):

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\phi(u - te_j) - \phi(u)}{t} \;=\; -\phi_{u_j}(u) \text{ (in } \mathfrak{s})$$

Def. 6: $\tau_x T \in \mathfrak{s}'$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, also existiert η_{x_j}, und

$$\begin{aligned} \eta_{x_j}(x) \;&=\; \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\eta(x + te_j) - \eta(x)}{t} \\ &=\; \big\langle T, \tau_{-x}(\psi^*)_{u_j} \big\rangle \end{aligned}$$

Da $(\psi^*)_{u_j} \in \mathfrak{s}$, ist Iteration möglich: $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$D^k \eta(x) \;=\; (-1)^{|k|} \big\langle T, \tau_{-x} D^k \psi^* \big\rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{P}^n$$

Beachte: $\eta(x)$ (und $D^k\eta(x)$ $\forall k \in \mathbb{P}^n$) stetig, denn: sei $\phi \in \mathfrak{s}$:

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \tau_h(\tau_x \phi) \;=\; \tau_x \phi \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \text{[Ü4A1(b)]}$$

für jedes feste x.

$$\eta(x) \;:=\; \langle T, \tau_{-x}\psi^* \rangle$$

(RICHTIGER ANSCHLUSS?)

$$\begin{aligned} & T \;\in\; \mathfrak{s}' && \text{[Lemma 8]} \\ \Longrightarrow \quad & \exists C < \infty, r \in \mathbb{P} : |\langle T, \phi \rangle| \;\leq\; C\rho_r(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\ \Longrightarrow \quad & |\eta(x)| \;:=\; |\langle T, \tau_{-x}\psi^* \rangle| \\ & \qquad \leq\; C\rho_r(\tau_{-x}\psi^*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \rho_r(\tau_{-x}\psi^*) \;&:=\; \sup_{|k| \leq r} \sup_{u \in \mathbb{R}^n} (1 + u^2)^r \left| D_u^k \psi(x - u) \right| \\ &=\; \sup_{|k| \leq r} \sup_{v \in \mathbb{R}^n} (1 + (v - x)^2)^r \left| D_v^k \psi(v) \right| \end{aligned}$$

Es ist

$$1 + (v - x)^2 \;\leq\; 4(1 + x^2)(1 + v^2) \qquad \forall x, v \in \mathbb{R}^n$$

denn:

$$\begin{aligned} 1 + (v - x)^2 \;&=\; 1 + \langle v - x, v - x \rangle \\ &=\; 1 + x^2 + v^2 - 2xv \\ &\leq\; 1 + x^2 + v^2 + 2|x||v| \end{aligned}$$

Zeige:

$$|x||v| \;\leq\; 1 + x^2 + v^2 + 2x^2v^2$$

Dazu:

$$\begin{aligned} |x||v| \;&<\; 1 \\ |x||v| \;&\leq\; 1 \leq 1 + x^2 + v^2 + 2x^2v^2 \\ |x||v| \;&>\; 1 \\ \Longrightarrow \quad |x||v| \;&\leq\; x^2v^2 \leq 1 + x^2 + v^2 + 2x^2v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 1+(v-x)^2 &\leq 1+x^2+v^2+2(1+x^2+v^2+2x^2v^2) \\
&\leq 4(1+x^2)(1+v^2) \\
\Longrightarrow \quad \rho_r(\tau_{-x}\psi^*) &\leq 4^r(1+x^2)^r \underbrace{\sup_{|k|\leq r}\sup_{v\in\mathbb{R}^n}(1+v^2)^r\left|D^k\psi(v)\right|}_{=\rho_r(\psi)} \\
\Longrightarrow \quad |\eta(x)| &\leq C4^r(1+x^2)^r\rho_r(\psi) \\
\Longrightarrow \quad &\eta \text{ langsam wachsend} \qquad [\text{Ü4A3}]
\end{aligned}$$

Ersetze ψ^* durch $D^k\psi^* \in \mathfrak{s}$, dann folgt, daß $D^k\eta$ langsam wächst für jedes $k \in \mathbb{P}^n$. Also (Ü4A2): $\eta \in \mathcal{O}_m$.

Zeige: Darstellung $T * \psi = T_\eta$, dazu: Sei $\phi \in \mathfrak{s}$ beliebig. Einerseits:

$$\begin{aligned}
\langle T*\psi, \phi\rangle &= \langle T, \psi^* * \phi\rangle \qquad [\text{Def.}] \\
&= \left\langle T(x), \int_{\mathbb{R}^n} \psi^*(x-u)\phi(u)\,du \right\rangle \\
&= \left\langle T(x), \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-u}\psi^*)(x)\phi(u)\,du \right\rangle
\end{aligned}$$

Andererseits: $\eta \in \mathcal{O}_m \subset \mathcal{O}$, also $T_\eta \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert als reguläre temperierte Distribution

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle T_\eta, \phi\rangle &:= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u)\phi(u)\,du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle T(x), (\tau_{-u}\psi^*)(x)\rangle\phi(u)\,du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle T(x), \psi(u-x)\rangle\phi(u)\,du
\end{aligned}$$

Zeige: (Skizze)

$$\left\langle T(x), \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-u}\psi^*)(x)\psi(u)\,du \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle T(x), (\tau_{-u}\psi^*)(x)\rangle\phi(u)\,du \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

Dazu: Da $\psi^*, \phi \in \mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-u}\psi^*)(x)\phi(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^n} \psi^*(x-u)\phi(u)\,du \qquad [\text{z.B.}]$$

existiert als uneigentliches, aber absolut konvergentes Riemann-Integral. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$ sei

$$\int_a^b (\tau_{-u}\psi^*)(x)\phi(u)\,du = \lim_{\substack{\|z_j\|\longrightarrow 0 \\ j\longrightarrow\infty}} \underbrace{\sum_{S\in Z_j} \psi^*(x-\xi^S)\phi(\xi^S)v(S)}_{\text{Riemann-Zwischensumme}} \qquad [v(S) \text{ Volumen}]$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\langle T(x), \int_a^b (\tau_{-u}\psi^*)(x)\phi(u)\,du \right\rangle &= \left\langle T(x), \lim_{j\longrightarrow\infty} \sum_{S\in Z_j} \psi^*(x-\xi^S)\phi(\xi^S)v(S) \right\rangle \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} \left\langle T(x), \sum_{S\in Z_j} \psi^*(x-\xi^S)\phi(\xi^S)v(S) \right\rangle \qquad [T \text{ stetig}] \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} \sum_{S\in Z_j} \left\langle T(x), (\tau_{-\xi^S}\psi^*)(x)\right\rangle\phi(\xi^S)v(S) \qquad [T \text{ linear}]
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \underbrace{\langle T(x), (\tau_{-u}\psi^*)(x)\rangle \phi(u)\ du}_{=\eta(u)\in\mathcal{O}_m},$$

da R-Integral existiert. Zeige (z.B.):

$$\underbrace{\lim_{\substack{b\longrightarrow-\infty\\ a\longrightarrow\infty}}}_{\text{Noch zu def.}} \int_a^b (\tau_{-u}\psi^*)(x)\phi(u)\ du \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-u}\psi^*)(x)\phi(u)\ du \ (\text{in } \mathfrak{s})$$

$\Longrightarrow$ Behauptung. □

Folgerung 4

(vgl. Satz I 19)

(a) Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$.

$$D^k(\psi * \phi) = (D^k\psi) * \phi = \psi * (D^k\phi) \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

(b) Seien $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$:

$$D^k(T * \psi) = D^k T * \psi = T * D^k\psi \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

◁

Beweis.

(a) Lemma II 5, Satz II 13: $D^k\phi, D^k\psi, \psi*\phi, D^k(\psi*\phi) \in \mathfrak{s}$ wohldefiniert

$\Longrightarrow$ $(D^k(\psi*\phi))^\wedge(v) = (iv)^k\psi^\wedge(v)\phi^\wedge(v)$ [Satz II 11,13]

$(D^k\psi * \phi)^\wedge = (\psi * D^k\phi)^\wedge$

$\Longrightarrow$ Behauptung mit Folg. II 6 für stetige Funktionen.

(b) Lemma II 5, Satz 6,9: $\psi, D^k\psi \in \mathfrak{s}$, $T, D^kT, D^k(T*\psi) \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad (D^k(T*\psi))^\wedge &= (iv)^k(T*\psi)^\wedge && \text{[Satz 8(a)]}\\
&= (iv)^k(\psi^\wedge(v)T^\wedge(v)) && \text{[Satz 9]}\\
&= ((iv)^kT^\wedge(v))\psi^\wedge(v)\\
&= (D^kT)^\wedge\psi^\wedge(v)\\
&= (D^kT*\psi)^\wedge\\
&= T^\wedge(v)((iv)^k\psi^\wedge(v))\\
&= (T*D^k\psi)^\wedge
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung mit Satz 7

□

Bemerkung

Für beliebige $S, T \in \mathfrak{s}'$ kann $S * T$ *nicht* definiert werden. Entsprechend kann $S^\wedge T^\wedge$ (bzw. ST) *nicht* allgemein definiert werden. Allgemein: Jede Theorie des direkten Produktes liefert Beiträge zur Faltungsproblematik (hier nicht). Merkregel: Kann $S * T \in \mathfrak{s}'$ für gewisse Klassen von S, T definiert werden, dann gilt der Faltungssatz ($(S * T)^\wedge = S^\wedge T^\wedge$) einschließlich Definition und umgekehrt.

Zwei weitere Fälle zu elementarer Definition einer Faltung:

Fall I: Sei $T, S \in \mathfrak{s}'$, T beliebig, S so daß $S^\wedge$ regulär erzeugt wird durch $a \in \mathcal{O}_m$: $S^\wedge = T_a$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad S, T \in \mathfrak{s}' \quad \text{und} \quad S^\wedge, T^\wedge \in \mathfrak{s}' \quad \text{wohldefiniert} && \text{[Satz 7]}\\
&\qquad S^\wedge \;=\; T_a, \quad a \in \mathcal{O}_m \\
&\Longrightarrow \quad S^\wedge T^\wedge \;:=\; aT^\wedge \in \mathfrak{s}' && \text{[Ü4A2]}\\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}[aT^\wedge] \;\in\; \mathfrak{s}' \quad \text{wohldefiniert} && \text{[Satz 7]}
\end{aligned}$$

Satz 11

Sei $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Sei $S \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ mit $S^\wedge$ erzeugt durch $a \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}^n)$ (Ü4A2). Durch

$$S * T := \mathcal{F}^{-1}(aT^\wedge) \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$$

wird die *Faltung von S und T* definiert. Es gelten die üblichen Regeln:

- Faltungssatz: $(S * T)^\wedge = S^\wedge T^\wedge$, wobei
$$S^\wedge T^\wedge := aT^\wedge =: T_a T^\wedge$$
- Assoziativität:
$$R * (S * T) = (R * S) * T,$$
falls $R \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ mit $R^\wedge$ regulär erzeugt durch $b \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}^n)$.
- Differentiation:
$$D^k(S * T) = (D^k S) * T = S * (D^k T) \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

◁

Beweis.

$$\begin{aligned}
(S * T)^\wedge \;&=\; \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}[aT^\wedge]) \\
&=\; aT^\wedge =: S^\wedge T^\wedge
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
(R * (S * T))^\wedge \;&=\; b(aT^\wedge) \\
&=\; (R * S)^\wedge T^\wedge \\
&=\; ((R * S) * T)^\wedge
\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ Assoziativität (Satz 7), dazu beachte:

$$R * S \;:=\; \mathcal{F}^{-1}[T_{ab}]$$

it $a, b \in \mathcal{O}_m$, dazu beachte auch Ü4A2/3:

$$aT_b \;=\; T_{ab} = bT_a$$

und alles wohldefiniert.

$$\begin{aligned}(D^k(S*T))^\wedge &= (iv)^k(S*T)^\wedge && \text{[Satz 8(a)]}\\ &= (iv)^k(a(v)T^\wedge) && \text{[(i)]}\\ &= ((iv)^k a(v))T^\wedge\\ &= ((D^kS)*T)^\wedge\\ &= a(v)((iv)^kT^\wedge)\\ &= (S*D^kT)^\wedge\end{aligned}$$

(iii) beachte: $(iv)^k \in \mathcal{O}_m$ (vgl. (ii)).

□

Beispiel (δ)
$\delta^\wedge = 1$, also $T*\delta$ für alle $T \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert.

Folgerung 5

Für $T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$T = \delta * T$$
$$D^kT = \delta * D^kT = D^k\delta * T \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

◁

Fall II: Seien $S,T \in \mathfrak{s}'$, $S^\wedge, T^\wedge$ regulär, erzeugt durch $A \in L^s, B \in L^r$ (Vergleich mit Fall I: S hier allgemeiner, dort nämlich durch $A \in \mathcal{O}_m$ erzeugt, T hier spezieller (dort beliebig)). Sei $AB \in L^q$

$$\Longrightarrow \quad S^\wedge T^\wedge := T_{AB} \in \mathfrak{s}' \quad \text{wohldefiniert} \qquad \text{[Lemma 4]}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}[T_{AB}] \in \mathfrak{s}' \quad \text{wohldefiniert} \qquad \text{[Satz 7]}$$

Satz 12

Seien $S,T \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$, $S^\wedge, T^\wedge$ regulär erzeugt durch $A \in L^s(\mathbb{R}^n), B \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Sei $AB \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Durch

$$\delta * T := \mathcal{F}^{-1}(T_{AB}) \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$$

ist die *Faltung* von S,T definiert. ◁

Beispiel

$$1 \le s \le \infty,\ r = \infty \Longrightarrow q = s$$
$$1 \le s \le \infty,\ r' = s' \Longrightarrow q = 1$$

Zum Einbau der klassischen Def. II 2 von $f*g$ für $f \in L^p$ $(1 \le p \le \infty)$, $g \in L^1$ in die Distributionentheorie im Sinne von (Permanenzprinzip):

$$T_f * T_g = T_{f*g}$$

Def. II 2:

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)\,du \in L^p \qquad \text{[Satz II 2(a)]}$$

Sei $1 \le p \le 2$

$$\Longrightarrow \quad S^\wedge = (T_f)^\wedge$$

$$\Longrightarrow \quad A = f^\wedge \in L^{p'} \qquad \text{[Satz II 1, III 1, 9]}$$

$$T^\wedge = (T_g)^\wedge = T_{g^\wedge}$$

$$\Longrightarrow \quad B = g^\wedge \in C_0 \subset L^\infty \qquad \text{[Satz II 1]}$$

$$\Longrightarrow \quad AB \in L^{p'}$$

$$\Longrightarrow \quad S * T := \mathcal{F}^{-1}[T_{AB}] \qquad \text{[Satz 12]}$$

$= \mathcal{F}^{-1}[T_{f^\wedge g^\wedge}] \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert

Permanenz (Folg. 3):

$$(T_{f*g})^\wedge = T_{(f*g)^\wedge} \qquad [f * g \in L^p]$$

$$= T_{f^\wedge g^\wedge} =: (S * T)^\wedge \qquad \text{[Satz II 3, III 10]}$$

$$\Longrightarrow \quad S * T := T_{f*g} \qquad \text{[Satz 7]}$$

So nicht für $p > 2$: Zwar ist die Faltung $f * g \in L^p$ klassisch definiert (Satz II 2(a)), aber $(T_f)^\wedge$ ist im allgemeinen nicht regulär. Die distributionentheoretische Interpretation von $f * g$ erfordert eine allgemeine Theorie $\rightsquigarrow$ Theorie der $\mathcal{D}_{L^p}, \mathcal{D}'_{L^p}$-Räume – hier nicht.

Kapitel 5

Multiplikatoren

V.a Definitionen; ein grundlegender Darstellungssatz

Bezeichnung: *Fast überall* bedeute "fast überall" bei L-Räumen, "überall" bei stetigen Funktionen.

Definition 1 (Multiplikator $M^*[p,q]$)

Seien $1 \leq p,q \leq 2$ und $\tau(v)$ eine auf $\mathbb{R}^n$ (f.ü.) definierte Funktion. τ heißt *Multiplikator vom Typ* $M^*[p,q]$ (Bezeichnung: $\tau \in M^*(p,q)$), falls für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ein $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$\tau(v) f^\wedge(v) = g^\wedge(v) \qquad \text{f.ü.}$$

$\triangleleft$

Sei $\tau \in M^*(p,q)$. Dann gibt es zu jedem $f \in L^p$ genau ein $g \in L^q$, denn: Annahme: Es gebe $g_1, g_2 \in L^q$ mit

$$\begin{aligned} & \tau(v) f^\wedge(v) \;=\; g_1^\wedge(v) = g_2^\wedge(v) \\ \Longrightarrow \quad & g_1^\wedge(v) \;=\; g_2^\wedge(v) \quad \text{f.ü.} \\ \Longrightarrow \quad & g_1 \;=\; g_2 \end{aligned}$$

[Folg. II 6/III 6, Satz III 1]

Also wird durch die Zuordnung $f \mapsto g$ ein Operator $T : L^p \longrightarrow L^q$ definiert.

Definition 2

Sei $\tau \in M^*[p,q]$. Der Operator $T : L^p \longrightarrow L^q$, definiert durch $Tf = g$ mit

$$\tau(v) f^\wedge(v) = g^\wedge(v) \qquad \text{f.ü.}$$

heißt *Multiplikatoroperator* vom Typ $[p,q]^*_M$ $\triangleleft$

Bezeichnung:

$$T \in [p,q]^*_M = [L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)]^*_M$$

Entsprechend:

$$[L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)] = [p,q]$$

(vgl Def. 4: "vom Typ (p,q)")

Definition 3

(vgl. Def. in Folg. I 7) $T \in [p,q]$ heißt *translationsinvariant*, falls

$$\tau_h T = T\tau_h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

$\triangleleft$

Beachte: Da $L^p(\mathbb{R}^n)$-Räume translationsinvariant sind, sind

$$((\tau_h T)f)(x) := (Tf)(x+h)$$
$$((T\tau_h)f)(x) := T(f(\cdot + h))(x)$$

wohldefiniert. Seien X, Y lineare normierte Räume und $D \subset X$ eine lineare Mannigfaltigkeit. Sei $T : D = D(T) \subset X \longrightarrow Y$ linear. T heißt *abgeschlossen*, falls gilt:

$$\forall (f_k) \subset D \exists f \in X, g \in Y : \lim_{k \longrightarrow \infty} \|f_k - f\|_X = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \longrightarrow \infty} \|Tf_k - g\|_Y = 0$$
$$\Longrightarrow \quad f \in D \quad \text{und} \quad Tf = g$$

Sei $X \times Y$ das kartesische Produkt von X und Y, das heißt:

$$X \times Y := \{(f,g) : f \in X, g \in Y\}$$

$X \times Y$ ist ein linearer normierter Raum mit der Norm

$$\|(f,g)\|_{X\times Y} = \|f\|_X + \|g\|_Y$$

Der Graph von T ist definiert als die Teilmenge

$$\text{graph}(T) := \{(f, Tf) : f \in D(T)\} \subset X \times Y$$
$$T \text{ abgeschlossen} \iff \text{graph}(T) \text{ in } X \times Y \text{ abgeschlossen}$$

Ü7A1: Einfache Beziehungen zwischen abgeschlossenen und beschränkten Operatoren.

Definition 4

Seien $1 \le p, q \le \infty$ beliebig. $[p,q]_M \subset [p,q]$ ist die Teilmenge aller beschränkten linearen Operatoren von $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach $L^q(\mathbb{R}^n)$, die translationsinvariant sind (Def. 3). $T \in [p,q]_M$ heißt *Multiplikatoroperator* (vgl. Def. 2). $\triangleleft$

Satz 1

Seien X, Y Banach-Räume (Def. I 2) und $T : X \longrightarrow Y$ abgeschlossen, linear. Dann ist T beschränkt. $\triangleleft$

Satz 2

Sei $T \in [p,q]^*_M$. T ist linear, beschränkt, translationsinvariant, also insbesondere:

$$[p,q]^*_M \subset [p,q]_M \qquad \forall 1 \le p \le 2$$

$\triangleleft$

Beweis. Linearität: klar. Translationsinvarianz: Seien $f \in L^p, g \in L^q$ mit $\tau f^\wedge = g^\wedge$ und $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad (\tau_h T f)^\wedge(v) &= e^{ihv}(Tf)^\wedge(v) && \text{[Lemma II 1, III 9]}\\
&= e^{ihv}\tau(v)f^\wedge(v) && \text{[Def.]}\\
&= \tau(v)(f(\cdot+h))^\wedge(v)\\
&= (T(f(\cdot+h)))^\wedge(v)\\
&= (T\tau_h f)^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}\\
\Longrightarrow \quad \tau_h T f &= T_{\tau_h f} \qquad \forall f \in L^p && \text{[Eindeutigkeit]}\\
\Longrightarrow \quad \tau_h T &= T\tau_h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Beschränktheit: Da L^p, L^q Banachräume und $T : L^p \longrightarrow L^q$ linear, kann man Satz 1 anwenden. Zeige: T abgeschlossen, dazu: Seien $(f_k), f \in L^p$ mit $\|f_k - f\|_p \longrightarrow 0$ und $g \in L^q$ mit $\|Tf_k - g\|_q \longrightarrow 0$. Zeige: $Tf = g$. Dazu: Da $f \in L^p$, ist $Tf \in L^q$ wohldefiniert. Weiter nach Def.:

$$(Tf_k)^\wedge(v) = \tau(v) f_k^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}$$

Da $1 \le p, q \le 2$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \|f_k^\wedge - f^\wedge\|_{p'} &\le (2\pi)^{n/p'} \|f_k - f\|_p \longrightarrow 0 && \text{[Satz II 1, III 1, 9]}\\
\|(Tf_k)^\wedge - g^\wedge\|_{q'} &\le (2\pi)^{n/q'} \|Tf_k - g\|_q \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Also (L26) gibt es eine (gemeinsame) Teilfolge (k_j) mit

$$\begin{aligned}
\lim_{j\longrightarrow\infty} f_{k_j}^\wedge(v) &= f^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}\\
\lim_{j\longrightarrow\infty} (Tf_{k_j})^\wedge(v) &= g^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}\\
g^\wedge(v) &= \lim_{j\longrightarrow\infty} (Tf_{k_j})^\wedge(v)\\
&= \tau(v) \lim_{j\longrightarrow\infty} f_{k_j}^\wedge(v) && \text{[Def.]}\\
&= \tau(v) f^\wedge(v)\\
&= (Tf)^\wedge(v)\\
\Longrightarrow \quad g &= Tf && \text{[Eindeutigkeit]}
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2: $[p,q]^*_M \subset [p,q]_M$ für alle $1 \le p, q \le 2$. Problem: Gleichheit, also Konsistenz? Siehe Satz 13. Analogon zu Def. 1? Siehe Satz 4, Def. 6.

Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

$$\mathrm{Tr}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

heißt *Träger* von f. Der Träger von f ist immer abgeschlossen.

Also: Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \notin \mathrm{Tr}(f)$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in U(x_0)$. Das heißt: $\mathrm{Tr}(f)$ enthält alle "wesentlichen" Punkte von stetigen f. Ist $\mathrm{Tr}(f)$ beschränkt, dann ist $\mathrm{Tr}(f)$ kompakt $\rightsquigarrow$ Klassenindex "$_{00}$". Z.B.:

$$C_{00}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \mathrm{Tr}(f) \text{ kompakt}\}$$

(vgl. Def. von $C_0(\mathbb{R}^n)$). Entsprechend: $C_{00}^m(\mathbb{R}^n)$.

$$C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n) := \text{Menge aller beliebig oft differenzierbaren } C_{00}(\mathbb{R}^n)\text{-Funktionen}$$

Ü7A4: $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist nichttrivial (Identitätssatz). Bisher: Träger von stetigen Funktionen, jetzt für L-integrierbare Funktionen. Dazu: Vorgehen wie bei stetigen Funktionen zunächst sinnlos, denn:

$$f_0(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \Longrightarrow \overline{\{x \in \mathbb{R} : f_0(x) \neq 0\}} = \mathbb{R}$$

aber: $f_0(x) = 0$ f.ü., das heißt f_0 ist Nullelement. Die Definition ist also nicht sinnvoll. Deshalb: Sei f L-meßbar über $\mathbb{R}^n$. Die Nullmenge $\mathrm{Nul}(f)$ ist definiert als

$$\mathrm{Nul}(f) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^n : \exists U \in \mathcal{U}(x) : f(y) = 0 \text{ für fast alle } y \in U\}$$

$\mathrm{Nul}(f)$ ist offen.

$$\mathrm{Tr}(f) := \mathbb{R}^n\backslash\mathrm{Nul}(f)$$

heißt *Träger* von f und ist abgeschlossen. Beispiel: $\mathrm{Nul}(f_0) = \mathbb{R}$, also $\mathrm{Tr}(f_0) = \emptyset$.

$$S_{00}(\mathbb{R}^n) := \text{Menge aller bzgl. L-Maß einfachen Funktionen mit kompaktem Träger}$$

Lemma 1

(vgl. Lemma III 4)

$$S_{00}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{dicht} \qquad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

Weiterhin existiert zu jedem $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$ ein $g \in S_{00}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| < \epsilon$$

(vgl. Def. I 9), beachte: $g \in S_{00} \not\Longrightarrow g \in C_0$. ◁

Sei

$$L_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : f(x) = f_0(x) \quad \text{f.ü.}, \lim_{|x| \longrightarrow \infty} f_0(x) = 0 \right\}$$

Lemma 2

Für

$$f \in \begin{cases} L^p(\mathbb{R}^n), & 1 \leq p < \infty \\ L_0^\infty(\mathbb{R}^n), & p = \infty \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{|h| \longrightarrow \infty} \|f + \tau_h f\|_p = 2^{1/p} \|f\|_p$$

◁

Beweis. Sei $1 \leq p < \infty$

$$\Longrightarrow \quad \forall f \in L^p, \epsilon < 0 \exists d \in S_{00} : \|f - d\|_p \ < \ \infty$$

Darstellung: Zu $f \in L^p, \epsilon > 0$ gibt es $g, d \in L^p$ mit $f = g + d$, $\|g\|_p < \epsilon$, $\mathrm{Tr}(d) \subset \overline{S(0,r)}$ für ein $0 < r < \infty$. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig, fest

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}(\tau_h d) \ := \ \mathrm{Tr}(d(x+h)) \subset \overline{S(-h,r)}$$

Ist $|h| > 2r$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}(d) \cap \mathrm{Tr}(\tau_h d) \ = \ \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \|d + \tau_h d\|_p^p \ &= \ \int_{\mathbb{R}^n} |d(x) + d(x+h)|^p \ dx \\
&= \ \int_{\mathrm{Tr}(d) \cup \mathrm{Tr}(\tau_h d)} |d(x) + d(x+h)|^p \ dx \\
&= \ \int_{\mathrm{Tr}(d)} |d(x)|^p \ dx + \int_{\mathrm{Tr}(\tau_h d)} |d(x+h)|^p \ dx \\
&= \ \|d\|_p^p + \int_{\mathrm{Tr}(d)-h} |d(x+h)|^p \ dx \\
&= \ 2 \|d\|_p^p \\
\Longrightarrow \quad \|d + \tau_h d\|_p \ &= \ 2^{1/p} \|d\|_p \qquad \forall |h| > 2r
\end{aligned}$$

Zeige:

$$\left| \|f + \tau_h f\|_p - 2^{1/p} \|f\|_p \right| \ \leq \ (2^{1/p} + 2)\epsilon \qquad \forall |h| > 2r$$

$\Longrightarrow$ Behauptung für $1 \leq p < \infty$. Dazu:

$$\begin{aligned}
\|f + \tau_h f\|_p \ &= \ 2^{1/p} \|f\|_p \\
&\overset{f=g+d}{\leq} \ \|g + \tau_h g\|_p + \|d + \tau_h d\|_p - 2^{1/p} \|f\|_p \\
&\leq \ 2 \|g\|_p + 2^{1/p} (\|d\|_p - \|f\|_p) \\
&\leq \ 2\epsilon + 2^{1/p} (\|d - f\|_p) \\
&\leq \ (2 + 2^{1/p})\epsilon
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
2^{1/p} \|f\|_p - \|f + \tau_h f\|_p \ &= \ 2^{1/p} \|f\|_p - \underbrace{\|d + \tau_h d + g + \tau_h g\|_p}_{\geq \|d + \tau_h d\|_p - \|g + \tau_h g\|_p} \\
&\leq \ 2^{1/p} \|f\|_p - (\|d + \tau_h d\|_p - \|g + \tau_h g\|_p) \\
&= \ 2^{1/p} (\|f\|_p - \|d\|_p) + \|g + \tau_h g\|_p \\
&\leq \ 2^{1/p} \|f - d\|_p + 2 \|g\|_p \\
&\leq \ (2^{1/p} + 2)\epsilon
\end{aligned}$$

(ii) Sei $p = \infty$ und $f \in L_0^\infty$. Darstellung: Zu $f \in L_0^\infty$, $\epsilon > 0$ gibt es $g, d \in L_0^\infty$ mit $f = g + d$ mit $\|g\|_\infty < \epsilon$ und

$\mathrm{Tr}(d) \subset \overline{S(0,r)}$ für ein $0 < r < \infty$, denn: per Def.:

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{f.ü.} \quad \text{und} \quad \forall \epsilon > 0 \exists r < \infty \forall |x| > r : |f_0(x)| < \epsilon$$

Setze

$$d(x) := \begin{cases} f_0(x), & |x| \le r \\ 0, & |x| > r \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} 0, & |x| \le r \\ f_0(x), & |x| > r \end{cases}$$

Es gilt: $g, d \in L^\infty$, $\|g\|_\infty < \epsilon$, $\mathrm{Tr}(d) \subset \overline{S(0,r)}$, $f = g + d$. Sei $|h| > 2r$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}(d) \cap \mathrm{Tr}(\tau_h d) = \emptyset \\
&\Longrightarrow \quad \|d + \tau_h d\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{Tr}(d) \cup \mathrm{Tr}(\tau_h d)} |d(x) + d(x+h)| \\
&\qquad\qquad = \|d\|_\infty \\
&\Longrightarrow \quad |\|f + \tau_h f\|_\infty - \|f\|_\infty| \le 3\epsilon \qquad \forall |h| > 2r \qquad [\text{wie für } 1 \le p \le \infty]
\end{aligned}$$

□

Satz 3

Sei $T \in [p,q]_M$. Ist $p > q$, dann ist $T = 0$ $(p < \infty)$ bzw. $T_{|L_0^\infty} = 0$. ◁

Beweis. Sei $p > q$ und $T \in [p,q]_M$

$$\Longrightarrow \quad \|Tf\|_q \le \|T\| \, \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p \qquad [T \text{ beschränkt}]$$

Sei $p < \infty$. Annahme: $T \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \|Tf + \tau_h Tf\|_q = \|T(f + \tau_h f)\|_q \qquad [T \text{ linear, transl.-inv.}] \\
&\qquad\qquad \le \|T\| \, \|f + \tau_h f\|_p \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n \\
&\Longrightarrow \quad 2^{1/q} \|Tf\|_q = \lim_{|h| \longrightarrow \infty} \|Tf + \tau_h Tf\|_q \\
&\qquad\qquad \le \|T\| \lim_{|h| \longrightarrow \infty} \|f + \tau_h f\|_p \\
&\qquad\qquad = \|T\| \, 2^{1/p} \, \|f\|_p
\end{aligned}$$

(Lemma 2 mit $|h| \longrightarrow \infty$, $Tf \in L^q$, $f \in L^p$)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \|Tf\|_q \le 2^{1/p - 1/q} \, \|f\|_p \, \|T\| \qquad \forall f \in L^p \\
&\Longrightarrow \quad 2^{1/p - 1/q} \, \|T\| \ge \|T\| \\
&\Longrightarrow \quad 2^{1/p - 1/q} \ge 1 \qquad [\|T\| \neq 0] \\
&\Longrightarrow \quad q \ge p
\end{aligned}$$

Sei $p = \infty$ und $q < p = \infty$: wie vorhin, insbesondere

$$\|Tf\|_q \le \|T\|_{[L_0^\infty, L^q]} \, \|f\|_\infty \qquad \forall f \in L_0^\infty$$

Lemma 2 gilt nun für $f \in L_0^\infty$, $Tf \in L^q$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \|Tf\|_q \le 2^{-1/q} \, \|T\|_{[L_0^\infty, L^q]} \, \|f\|_\infty \qquad \forall f \in L_0^\infty \\
&\qquad\qquad \|T\|_{[L_0^\infty, L^q]} = 0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad T_{|L_0^\infty} \;=\; 0$$

□

Also: Ist $p = \infty$, $q < \infty$ und $T \in [\infty, q]_M$, dann muß T nicht der Nulloperator sein, aber

$$Tf \;=\; 0 \qquad \forall f \in L_0^\infty$$

(beachte: L_0^∞ nicht dicht in L^∞)

Abgesehen davon: Die Klassen $[p,q]_M$ enthalten nur für $p \le q$ nichttriviale Operatoren.

Lemma 3

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ stark partiell differenzierbar bis zur Ordnung $n+1$ (Def. II 9). Dann gibt es ein $g \in C(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x) = g(x) \quad \text{f.ü.}$$

und es gilt

$$|g(0)| \le B \sum_{|k| \le n+1} \left\| D^k f \right\|_p$$

und die Konstante B hängt nur von n, p ab. ◁

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es gibt eine Konstante B_1 (vgl. Lemma II 4) mit

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}} \;&\le\; (1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^{n+1} && [1+x_1^2+\ldots+x_n^2 \le (1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^2] \\
&= \sum_{j_0+|j|=n+1} \frac{(n+1)!}{j_0!j_1!\cdots j_n!} \left|x^j\right| \\
&\le\; B_1 \sum_{|k|\le n+1} \left|x^k\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad |f^\wedge(v)| \;&\le\; B_1(1+v^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|k|\le n+1} \left|v^k\right| |f^\wedge(v)| \\
&=\; B_1(1+v^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|k|\le n+1} \left|(iv)^k f^\wedge(v)\right| \\
&=\; B_1(1+v^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|k|\le n+1} \left|(D^k f)^\wedge(v)\right| && \text{[Folg. II 13]} \\
&\le\; B_1(1+v^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|k|\le n+1} \left\|D^k f\right\|_1 && \text{[Satz II 1]}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f^\wedge \;\in\; L^1(\mathbb{R}^n) \qquad [\,[\,](1+v^2)^{-\frac{n+1}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^n)]$$

Sei $p = 1$. und mit $B := B_1 \left\| (1+v^2)_1^{-(n+1)/2} \right\|$

$$\|f^\wedge\|_1 \;\le\; B \sum_{|k|\le n+1} \left\|D^k f\right\|_1$$

Mit

$$g^\vee(x) \;:=\; \mathcal{F}^{-1}[g](x)$$

$$:= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(u)e^{ixu}\,du$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = f^{\wedge\vee}(x) \quad \text{f.ü.}$$

$$=: g(x) \qquad \text{[Folg. 5]}$$

mit $g \in C(\mathbb{R}^n)$ und

$$|g(0)| \le \left\|f^{\wedge\vee}\right\|_q \le B\sum_{|k|\le n+1}\left\|D^k f\right\|_1$$

$\Longrightarrow$ Behauptung für $p = 1$.

Sei $1 < p \le \infty$. Sei $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ so daß

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ ?, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & |x| \ge 2 \end{cases}$$

(vgl. Ü7A4(c)). dann erfüllt ϕf die Bedingungen von Lemma 3 für $p = 1$, denn:

$$\mathrm{Tr}(\phi f) \subset \overline{S(0,2)}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi f \in L^1 \qquad \text{[da } f \in L^p\text{, Hölder]}$$

Das gleiche für alle Ableitungen $D^j\phi \cdot D^k f$, $0 \le |j|, |k| \le n+1$. Da ϕ beliebig oft in $L^{p'}$ differenzierbar und f in L^p differenzierbar bis Ordnung $n+1$, ist ϕf in L^1 diffbar bis zur Ordnung $n+1$ (Leibniz)

$$\Longrightarrow \quad (\phi f)(x) = h(x) \quad \text{f.ü.,}$$

wobei $h = (\phi f)^{\wedge\vee}$,

$$|h(0)| \le B^* \sum_{|k|\le n+1}\left\|D^k(\phi f)\right\|_1$$

Da aber nach Leibniz (für L^1-Ableitungen)

$$D^k(\phi f) = \sum_{j+\ell=k} C_{j\ell} D^j f D^\ell \phi$$

$$\Longrightarrow \quad \left\|D^k(\phi f)\right\|_1 \le \int_{|x|\le 2}\left(\sum_{j+\ell=k} C_{j\ell}|D^j f||D^\ell\phi|\right)dx$$

$$\le \sum_{j+\ell=k} C_{j\ell} \sup_{|x|\le 2}\left|D^\ell\phi(x)\right| \int_{|x|\le 2}\left|D^j f(x)\right| dx$$

$$\le B - 1 \sum_{|m|\le|k|}\int_{|x|\le 2}|D^m f(x)|\,dx$$

$$\le B_2 \sum_{|m|\le|k|}\|D^m f\|_p \qquad \text{[L19]}$$

$$\Longrightarrow \quad |h(0)| \le B\sum_{|k|\le n+1}\left\|D^k f\right\|_p$$

Da $f(x) = \phi(x)f(x) = h(x)$ f.ü. für $|x| \le 1$, ist $f(x) = h(x)$ f.ü. auf $\overline{S(0,1)}$, wobei

$$h = (\phi f)^{\wedge\vee} \in C(\mathbb{R}^n)$$

mit

$$|h(0)| \leq B \sum_{|k|\leq n+1} \left\| D^k f \right\|_p$$

Zeige: Es gibt ein $g \in C(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) = g(x)$ f.ü. (nicht nur auf $\overline{S(0,1)}$) und $g(x) = h(x)$ auf $S(0,1)$. Dazu: Ersetze $\phi(x)$ durch

$$\phi_j(x) := \phi(\frac{x}{j}), \qquad j \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi_j \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

mit

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq j \\ 0, & |x| \geq 2j \end{cases}$$

$\Longrightarrow \phi_j f$ erfüllt die Bedingungen von Lemma 3 für $p = 1$

$$\Longrightarrow \quad \phi_j(x) f(x) = h_j(x) \quad \text{f.ü.}$$

mit $h_j \in C(\mathbb{R}^n)$ (beachte: $h_1(x) = h(x)$), und h_j ist gegeben durch

$$h_j(x) = (\phi_j f)^{\wedge\vee}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

mit $(\phi_j f)^{\wedge} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeige:

$$h_{j+1}(x) = h_j(x) \qquad \forall |x| < j$$

Dazu:

$$\begin{aligned} h_{j+1}(x) - h_j(x) &:= \mathcal{F}^{-1}[(\phi_{j+1} f)^{\wedge}](x) - \mathcal{F}^{-1}[(\phi_j f)^{\wedge}](x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[((\phi_{j+1} - \phi_j) f)^{\wedge}](x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[x^{\wedge}](x) \end{aligned}$$

mit

$$\xi(x) := \begin{cases} 0, & |x| \leq j \\ (\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)) f(x) \quad \text{f.ü.}, & j < |x| < 2(j+1) \\ 0, & |x| \geq 2(j+1) \end{cases}$$

und

$$\Longrightarrow \quad \xi(x) = (\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)) f(x) \quad \text{f.ü.}$$

und $\xi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}[\xi^{\wedge}](x) = \xi(x) \quad \text{f.ü.} \qquad [\text{Folg II } 5, \xi, \xi^{\wedge} \in L^1]$$

(da $\xi^{\wedge} = ((\phi_{j+1} - \phi_j) f)^{\wedge} = (\phi_{j+1} f)^{\wedge} - (\phi_j f)^{\wedge} \in L^1(\mathbb{R}^n)$), insbesondere in allen Stetigkeitspunkten von ξ, also insbesondere für alle $|x| < j$.

$$\Longrightarrow \quad h_{j+1}(x) - h_j(x) = \mathcal{F}^{-1}[\xi^{\wedge}](x) = \xi(x) = 0 \qquad \forall |x| < j$$

Setze

$$g(x) := \begin{cases} h_1(x) = h(x), & |x| < 1 \\ h_2(x), & 1 \leq |x| < 2 \\ h_j(x), & j - 1 \leq |x| < j \end{cases}$$

$\Longrightarrow g \in C(\mathbb{R}^n)$ mit $g(x) = h(x)$ auf $S(0,1)$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $|x| < j$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad f(x) &= \phi_j(x) f(x) \\ &= h_j(x) = g(x) \quad \text{f.ü.} \qquad [\phi_j(x) = 1 \text{ auf } S(0,j)] \end{aligned}$$

□

Lemma 4

Sei $T \in [p,q]_M$, $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$. $T\phi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ist beliebig oft stark differenzierbar in $L^q(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$D^k(T\phi) = T(D^k\phi) \qquad \forall k \in \mathbb{P}^n$$

◁

Beweis. Für $1 \le j \le n$ sei $h = te_j$, $0 \neq t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \frac{(T\phi)(x+te_j) - (T\phi)(x)}{t} &= \frac{(\tau_h T\phi)(x) - (T\phi)(x)}{t} \\
&= \frac{(T\tau_h\phi)(x) - (T\phi)(x)}{t} && [T \text{ translationsinvariant}] \\
&= T\left(\frac{\tau_h\phi - \phi}{t}\right)(x) && [T \text{ linear}] \\
&= T\left(\frac{\phi(\cdot + te_j) - \phi(\cdot)}{t}\right)(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow \quad &\phi_{x_j} \in \mathfrak{s} \subset L^p && [\text{Lemma II 5(c+e)}] \\
\Longrightarrow \quad &\frac{(T\phi)(x+te_j) - (T\phi)(x)}{t} - (T\phi_{x_j})(x) = T(\frac{\phi(\cdot + te_j) - \phi(\cdot)}{t})(x) - (T\phi_{x_j})(x) \\
\Longrightarrow \quad &\left\| \frac{(T\phi)(x+te_j) - (T\phi)(x)}{t} - (T\phi_{x_j})(x) \right\|_q \\
&\le \|T\|_{[p,q]} \left\| \frac{\phi(x+te_j) - \phi(x)}{t} - \phi_{x_j}(x) \right\|_p && [T \text{ beschränkt}]
\end{aligned}$$

Ü4A1(c):

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \longrightarrow 0} \left(\frac{\phi(x+te_j) - \phi(x)}{t} - \phi_{x_j}(x) \right) = 0 \text{ (in } \mathfrak{s}) \\
\Longrightarrow \quad &\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| \frac{\phi(x+te_j) - \phi(x)}{t} - \phi_{x_j}(x) \right\|_p = 0 && [\text{Lemma IV 3}] \\
\Longrightarrow \quad &\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| \frac{(T\phi)(x+te_j) - (T\phi)(x)}{t} - (T\phi_{x_j})(x) \right\|_q = 0
\end{aligned}$$

d.h.: $D_{x_j}(T\phi)$ existiert in L^q (im starken Sinne) und $D_{x_j}T\phi = TD_{x_j}\phi$. Da $\phi \in \mathfrak{s}$, ist Iteration möglich $\Longrightarrow$ Behauptung. □

Bemerkung

Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{P}^n$ beliebig. Falls $D^k f \in L^p$ existiert (im starken Sinne, entsprechend oft iteriert), dann gilt für $T \in [p,q]_M$:

$$D^k Tf = TD^k f$$

Satz 4 (Hörmander)

Sei $T \in [p,q]_M$, $1 \le p,q \le \infty$. Dann gibt es ein eindeutiges $A \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$ so daß

$$T\phi = A * \phi \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$$

$\triangleleft$

Beweis. Zeige: $\exists_1\ A \in \mathfrak{s}'$ mit dieser Darstellung. Dazu: Seien

$$T \in [p,q]_M, \phi \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad T\phi \ \in \ L^q \qquad \text{[Lemma II 5(e)]}$$

$$\Longrightarrow \quad T\phi \in L^q \text{ insbesondere bis zur Ordnung } n+1 \text{ stark differenzierbar} \qquad \text{[Lemma 4]}$$

$$\Longrightarrow \quad (T\phi)(x) \ = \ g_\phi(x) \quad \text{f.ü.,} \qquad \text{[Lemma 3]}$$

wobei $g \in C(\mathbb{R}^n)$ (eindeutig) und

$$\begin{aligned} |g_\phi(0)| \ &\le \ B \sum_{|k| \le n+1} \left\| D^k T\phi \right\|_q \\ &= \ B \sum_{|k| \le n+1} \left\| T D^k \phi \right\|_q \qquad \text{[Lemma 4]} \\ &\le \ B \, \|T\| \sum_{|k| \le n+1} \left\| D^k \phi \right\|_p \end{aligned}$$

Also: $\phi \in \mathfrak{s} \Longrightarrow g_\phi(0) \in \mathbb{C}$ wohldefiniertes Funktional. Sei $A_1 : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\langle A_1, \phi \rangle \ := \ g_\phi(0)$$

A_1 ist linear:

$$g_{x_1\phi_1 + x_2\phi_2}(x) \ = \ x_1 g_{\phi_1}(x) + x_2 g_{\phi_2}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(da T linear und $g_{x_1\phi_1+x_2\phi_2} = T(x_1\phi_1 + x_2\phi_2)$).

A_1 ist stetig, denn

$$(\phi_j) \longrightarrow \phi \text{ in } \mathfrak{s} \ \Longrightarrow \ D^k\phi_j \longrightarrow 0 \qquad \text{[Lemma IV 2(c)]}$$

$$\phi_j \ \longrightarrow \ 0 \text{ in } \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{|k| \le n+1} \left\| D^k \phi_j \right\|_p \ \longrightarrow \ 0 \qquad \text{[Lemma IV 3: } \mathfrak{s} \hookrightarrow L^p \text{ stetig]}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle A_1, \phi_j \rangle \ := \ g_{\phi_j}(0) \longrightarrow 0 \qquad \text{[(V.a)]}$$

Also: $A_1 \in \mathfrak{s}'(\mathbb{R}^n)$.

Setze $A := A_1^*$ $(:= A_1(-x))$. Zunächst gilt für beliebiges, festes $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} g_{\tau_h\phi}(u) \ &= \ (T(\tau_h\phi))(u) \quad \text{f.ü.} \\ &= \ (\tau_h T\phi)(u) \qquad [T \text{ transl.inv.}] \\ &= \ \tau_h g_\phi(u) \quad \text{f.ü.} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad g_{\tau_h\phi}(u) \ = \ \tau_h g_\phi(u) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n \qquad [g \text{ stetig}]$$

$$\overset{\text{insb.}}{\Longrightarrow} \quad \langle A_1, \tau_h\phi \rangle \ := \ g_{\tau_h\phi}(0) = \tau_h g_\phi(0) = g_\phi(h) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad (A * \phi)(x) &= \langle A, \tau_{-x}\phi^* \rangle && \text{[Satz IV 10]} \\
&= \langle A, (\tau_x \phi)^* \rangle \\
&= \langle A^*, \tau_x \phi \rangle && \text{[Def. bzw. Ü4A4]} \\
&=: \langle A_1, \tau_x \phi \rangle \\
&= g_\phi(x) && \text{[(V.a)]} \\
&= (T\phi)(x) \quad \text{f.ü.} \\
\Longrightarrow \quad T\phi &= A * \phi \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[vgl. Bez.]}
\end{aligned}
$$

Zur Eindeutigkeit: Annahme:

$$
\begin{aligned}
& \exists A_1, A_2 \in \mathfrak{s}' : T\phi = A_1 * \phi = A_2 * \phi \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow \quad & 0 = ((A_1 - A_2) * \phi)(x) = \langle A_1 - A_2, \tau_{-x}\phi^* \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Satz IV 10]} \\
\Longrightarrow \quad & \langle A_1 - A_2, \phi \rangle = 0 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow \quad & A_1 = A_2 && \text{[Def. IV 4]}
\end{aligned}
$$

□

Folgerung 2

Seien $T \in [p,q]_M$, $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$. $T\phi \in L^q$ stimmt f.ü. mit einer Funktion aus $\mathcal{O}_m(\mathbb{R}^n)$ überein, nämlich mit der die reguläre Distribution $A * \phi$ erzeugenden Funktion $\eta(x) = \langle A, \tau_{-x}\phi^* \rangle$ ◁

Beweis. Satz 4 und Satz IV 10. □

Folgerung 3

Falls $p < \infty$, so gilt $(T\phi := A * \phi)$

$$[p,q]_M \cong L^{pq}$$

Im Falle $p = \infty$ gilt:

$$[C_0, L^q]_M \cong L^{\infty q}$$

◁

Definition 5

Seien $1 \le p, q \le \infty$.

$$L^{pq} := \left\{ A \in \mathfrak{s}' : \|A\|_{pq} < \infty \right\}$$

◁

Folgerung 4

Für *alle* $1 \le p, q \le \infty$ gilt $L^{pq} = \{0\}$, falls $q < p$. ◁

Definition 6

(vgl. Def. 1) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$.

$$M(p,q) := (L^{pq})^\wedge := \{B \in \mathfrak{s}' : B = A^\wedge, A \in L^{pq}\}$$

versehen mit der Norm

$$\|B\|_{M(p,q)} := \|A\|_{pq}$$

$B \in M(p,q)$ heißt *Multiplikator vom Typ* $M(p,q)$. ◁

V.b Allgemeine Relationen

Lemma 5

(vgl. Lemma 6) Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sei $f \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}^n)$ (Ü4A2) so daß

$$C = \sup_{\substack{\|\phi\|_{p'}=1 \\ \phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \right| < \infty$$

Dann gilt

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \|f\|_p = C$$

◁

Beweis. Hier nicht (vgl. Beweis zu Lemma III 6). Beachte: Lemma II 5(e): $\mathfrak{s} \in L^{p'}$ $\forall 1 \leq p' \leq \infty$; Def. auf Ü4A2: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \in \mathbb{C}$ existiert $\forall f \in \mathcal{O}_m$, $\phi \in \mathfrak{s}$. □

Satz 5 (Dualität)

Für jedes $1 \leq p, q \leq \infty$ gilt

$$L^{pq} = L^{q'p'} \qquad \text{isometrisch}$$

◁

Beweis. Zeige:

$$L^{pq} \subset L^{q'p'} \quad \text{und} \quad \|A\|_{q'p'} \leq \|A\|_{pq}$$

Sei $A \in L^{pq}$ d.h. (Def. 5):

$$\begin{aligned}
&\|A * \phi\|_q \leq \|A\|_{pq} \|\phi\|_p \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow\ & A * \phi \in \mathcal{O}_m \cap L^q \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Satz IV 10]} \\
\Longrightarrow\ & (A * \phi) * g \in C_B(\mathbb{R}^n) \qquad \forall g \in L^{q'}, && \text{[Satz II 2(b)]}
\end{aligned}$$

insbesondere für alle $\phi \in \mathfrak{s} \subset L^{q'}$, und (vgl. Def. II 2)

$$\begin{aligned}
|(A * \phi) * \psi(0)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(A * \phi)(u)||\psi(-u)|du \\
&\leq \|A * \phi\|_q \|\psi\|_{q'} && \text{[L19 (Hölder)]} \\
&\overset{\text{Vor.}}{\leq} \|A\|_{pq} \|\phi\|_p \|\psi\|_{q'} \qquad \forall \phi, \psi \in \mathfrak{s}
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle $A \in \mathfrak{s}'$, $\phi, \psi \in \mathfrak{s}$ (Satz IV 9, II 13):

$$\begin{aligned}(A * \phi) * \psi &= A * (\phi * \psi) \\ &= A * (\psi * \phi) \\ &= (A * \psi) * \phi,\end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned}&(A * \phi) * \psi(0) = (A * \psi) * \phi(0) \\ \Longrightarrow\ &\left| \int_{\mathbb{R}^n} (A * \psi)(u)\phi(-u)du \right| \leq \|A\|_{pq} \|\phi\|_p \|\psi\|_{q'} \qquad \forall \phi, \psi \in \mathfrak{s} \\ \Longrightarrow\ &\sup_{\phi \in \mathfrak{s}, \|\phi\|_p = 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(A * \psi)(u)}_{\in \mathcal{O}_m} \phi(-u)du \right| \leq \|A\|_{pq} \|\psi\|_{q'} < \infty \\ \Longrightarrow\ &A * \psi \in L^{p'} \qquad \forall \psi \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Lemma 5]}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|A * \psi\|_{p'} &= \sup_{\phi \in \mathfrak{s}, \|\phi\|_p = 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (A * \psi)(u)\phi(-u)du \right| \\ &\leq \|A\|_{pq} \|\psi\|_{q'} \qquad \forall \psi \in \mathfrak{s},\end{aligned}$$

d.h.:

$$A \in L^{q'p'} \quad \text{und} \quad \|A\|_{pq} \leq \|A\|_{q'p'}$$

$$L^{q'p'} \subset L^{pq} \quad \text{und} \quad \|A\|_{pq} \leq \|A\|_{q'p'}$$

Zeige: dazu:

$$\begin{aligned}&A \in L^{q'p'} \\ \Longrightarrow\ &A \in L^{p''q''} = L^{pq}\end{aligned}$$

und

$$\|A\|_{pq} = \|A\|_{p''q''} \leq \|A\|_{q'p'}$$

□

Betrachte das Tripel $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ mit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$: Familie der Borel-Mengen des $\mathbb{R}^n$ (die kleinste σ-Algebra, die die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält). λ: Borel-Maß, d.h. ein *verallgemeinertes* (signiertes) Maß: λ ist eine auf $\mathcal{B}$ definierte Funktion mit

$$\begin{aligned}\lambda(B) &\in \overline{\mathbb{R}} \qquad \forall B \in \mathcal{B} \\ \lambda(\emptyset) &= 0 \\ \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \qquad \forall (B_k) \in \mathcal{B} \text{ paarweise disjunkt}\end{aligned}$$

Sei

$$|\lambda|(B) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\lambda(B_k)| : B = \bigcup_{k=1}^{m} B_k, B_k \in \mathcal{B} \text{ paarw. disjunkt}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

$|\lambda|$ ist ein übliches (nicht-negatives) Maß über $\mathbb{R}^n$ und heißt die *totale Variation von* λ. $|\lambda|(\mathbb{R}^n) < \infty \Longrightarrow$ das Borel-Maß λ heißt *beschränkt*.

Sei $\Lambda = \Lambda(\mathbb{R}^n)$ die Menge der beschränkten Borel-Maße des $\mathbb{R}^n$. Λ ist ein LNR mit der totalen Variation als Norm:

$$\|\lambda\|_\Lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} d|\lambda| := |\lambda|(\mathbb{R}^n)$$

Es ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ (vgl. Def. in Skript L). Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lambda(B) \;:=\; \int_B g(u)du \qquad \forall B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda \in \Lambda(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \|\lambda\|_\Lambda = \|g\|$$

Satz 6 (Darstellungssatz von F. Riesz)

(vgl. Satz III 6)

$$f^* \;\in\; (C_0(\mathbb{R}^n))^*$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists_1 \lambda \in \Lambda(\mathbb{R}^n) : f^*(f) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(u)d\lambda(u) \qquad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

In diesem Fall gilt

$$\|f^*\|_{(C_0)^*} \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} d|\lambda|(u) = \|\lambda\|_\Lambda$$

Also:

$$(C_0)^* \;=\; \Lambda \quad \text{isometrisch}$$

◁

Für ein verallgemeinertes Maß λ existiert eine Jordan-Zerlegung in zwei normale Maße. Der Aufbau der Meßbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen verläuft damit analog zu Skript L. Man erhält das *Lebesgue-Stieltjes-Integral* $\int_{\mathbb{R}^n} f(u)d\lambda(u)$, die Räume $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ $(1 \le p \le \infty)$ mit z.B.

$$\|f\|_{p,\lambda} \;:=\; \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p d|\lambda|(u)\right)^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(u)d\lambda(u)\right| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|d|\lambda|(u)$$

Man erhält eine entsprechende Liste von Eigenschaften, z.B. Analoga zu L15 (Minkowski), L19 (Hölder), L22 (Fubini), L25 (Lebesgue, Majorisierte Konvergenz)...

Sei $\lambda \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$ und f eine auf $\mathbb{R}^n$ definierte, (Borel-)meßbare Funktion.

$$(f * d\lambda)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)d\lambda(u) \;\; \text{[vgl. Def. II 2]}$$

heißt *Faltung* von f und λ (falls existent).

Lemma 6

(vgl. Satz II 2 bzw. Satz I.7+8) Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ und $\lambda \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert $(f * d\lambda)(x)$ fast überall als ein absolut konvergentes Integral, $f * d\lambda \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f * d\lambda\| \le \|\lambda\|_\Lambda \, \|f\|_p$$

Ist $f \in C_B(\mathbb{R}^n)$, so existiert $(f * d\lambda)(x)$ überall, $(f * d\lambda) \in C_B$ und

$$\|f * d\lambda\|_C \leq \|\lambda\|_\Lambda \, \|f\|_C \qquad \forall f \in C_B$$

$\triangleleft$

Beweis. Sei $p \in [1, \infty]$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} d|\lambda|(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)|^p \, dx \right) = \|f\|_p^p \, \|\lambda\|_\Lambda < \infty$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} dx \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)|^p d|\lambda|(u) \right) = \|f\|_p^p \, \|\lambda\|_\Lambda \quad \text{existiert auch} \qquad \text{[Fubini]} \quad (5.1)$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)|^p \, d|\lambda|(u) \quad \exists \quad (5.2)$$

und ist $\in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$ Behauptung für $p = 1$.

Ist $1 < p < \infty$

$$\Longrightarrow |(f * d\lambda)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot |f(x-u)| d|\lambda|(u) \qquad \text{[Hölder]}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)|^p \, d|\lambda|(u) \right)^{1/p} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} 1^{p'} \, d|\lambda|(u) \right)^{1/p'}}_{<\infty}$$

$$\Longrightarrow (f * d\lambda) \quad \exists \qquad \text{[(5.2)]}$$

als absolut konvergentes Integral und

$$\|f * d\lambda\|_p \leq \|\lambda\|_\Lambda^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)|^p d|\lambda|(u) \right)^{1/p}$$

$$= \|\lambda\|_\Lambda^{1/p'} \left(\|f\|_p^p \, \|\lambda\|_1 \right)^{1/p} \qquad \text{[(5.1)]}$$

$$= \|\lambda\|_\Lambda \, \|f\|_p$$

Entsprechend für $p = \infty$ bzw. $f \in C_B$. $\square$

Bemerkung
Falls allgemein $f \in L^p_\lambda$, $g \in L^1_\lambda$ mit beliebigem (nicht notwendig beschränktem Borel-)Maß

$$\Longrightarrow (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) g(u) \, d\lambda(u)$$

$$\lambda \in \Lambda$$

$$\Longrightarrow g(x) = 1 \in L^1_\lambda$$

$\Longrightarrow$ Spezialfall $f * d\lambda$ aus Lemma 6.

Bisher: Reguläre Distribution gegeben durch

$$\langle A_f, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u) f(u) \, du \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s},$$

z.B. Lemma IV 4:

$$f \in L^p \qquad 1 \le p \le \infty$$
$$\Longrightarrow \quad A_f \in \mathfrak{s}'$$

Jetzt: Seien $\lambda \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$, dann wird durch

$$\langle A_{d\lambda}, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)\, d\lambda(u) \qquad \text{[Lemma 6]}$$

ein $A_{d\lambda} \in \mathfrak{s}'$ definiert, denn: $A_{d\lambda} : \phi \in \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert, linear. Sei $(\phi_j) \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{s}$)

$$\Longrightarrow \quad \phi_j(u) \longrightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \qquad \text{[insbesondere, Def. IV 1]}$$
$$\Longrightarrow \quad |\langle A_{d\lambda}, \phi \rangle| \le \|\lambda\|_\Lambda \, \|\phi_j\|_C \qquad \text{[Lemma 6]}$$
$$\longrightarrow 0$$
$$\Longrightarrow \quad A_{d\lambda} \in \mathfrak{s}'$$

Also: $\Lambda \subset \mathfrak{s}'$ als Erweiterung von Lemma III 4: $L^1 \subset \mathfrak{s}'$, denn: Sei $f \in L^1$.

$$\lambda_f(B) := \int_B f(u)\, du \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

Ist $\lambda_f \in \Lambda$ wohldefiniert mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)\, d\lambda_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u) f(u)\, du \qquad \text{[absolut stetig (? das Maß)]}$$

$\rightsquigarrow$ Erweiterung von *regulären* Distributionen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(u) f(u)\, du \qquad (f \in L^1)$$

auf *Distributionen der Ordnung 0*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)\, d\lambda(u) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

Z.B.: Die δ-Distribution ist eine Distribution der Ordnung 0 (aber *nicht* regulär, vgl. Kap. IV(b)). Korrespondenz zwischen $A_{d\lambda}$ und λ wieder eineindeutig (vgl. Satz IV 2), denn: Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ so daß

$$A_{d\lambda_1}\phi = A_{d\lambda_2}\phi \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$
$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, d\lambda_1(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, d\lambda_2(u) \qquad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n) \qquad \text{[Ü8A1: } \mathfrak{s} \subset C_0 \text{ dicht]}$$
$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \qquad \text{[Satz 6]}$$

Lemma 7

$$\Lambda \subset \mathfrak{s}',$$

insbesondere:

$$A_{d\lambda} * \psi = A_{\psi * d\lambda} \qquad \forall \psi \in \mathfrak{s}$$

◁

Beweis. Seien $\lambda \in \Lambda$, $\phi, \psi \in \mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow \quad \langle A_{d\lambda} * \psi, \phi \rangle = \langle A_{d\lambda}, \psi^* * \phi \rangle \qquad \text{[Satz IV 9]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(-u)\phi(x-u)\ du \right)\ d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(v-x)\phi(v)\ dv \right)\ d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(v) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(v-x)\ d\lambda(v)\ dv \qquad \text{[Fubini]} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi * d\lambda)(v)\phi(v)\ dv \\
&= \langle A_{\psi * d\lambda}, \phi \rangle
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Behauptung. □

Satz 7 (Charakterisierung)

(vgl. Kap V c)

$$L^{11} \cong L^{\infty\infty} \cong \Lambda \quad \text{isometrisch}$$

◁

Beweis. Satz 5: $L^{11} = L^{\infty\infty}$. Also: Zeige:

$$L^{\infty\infty} \subset \Lambda \quad \text{und} \quad \|\lambda\|_\Lambda \leq \|A\|_{\infty\infty}$$

(i)

$$\Lambda \subset L^{\infty\infty} \quad \text{und} \quad \|A\|_{\infty\infty} \leq \|\lambda\|_\Lambda$$

(ii)

mittels $A = A_{d\lambda}$. Dazu:

(i) $A \in L^{\infty\infty}$, d.h.:

$$
\begin{aligned}
&\|A * \phi\|_\infty \ \leq\ \|A\|_{\infty\infty}\, \|\phi\|_\infty \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow\ & A * \phi \in \mathcal{O}_m \cap C_B \quad \text{und} \quad \|(A*\phi)(0)\| \leq \|A\|_{\infty\infty}\, \|\phi\|_\infty \qquad \text{[Satz IV 10, Bez.]} \\
\Longrightarrow\ & F(\phi) \ :=\ (A*\phi)(0)
\end{aligned}
$$

ist wohldefiniert als beschränktes lineares Funktional über $\mathfrak{s} \subset L^\infty$. Nach Lemma III 5, Ü8A1 gibt es genau eine beschränkte lineare Fortsetzung F auf $\overline{\mathfrak{s}}^{L^\infty} = C_0$ bei gleicher Norm, d.h.: $F \in (C_0)^*$ und $\|F\|_{(C_0)^*} \leq \|A\|_{\infty\infty}$. Satz 6: Es gibt genau ein $\lambda \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$ mit

$$F(f) \ =\ \int_{\mathbb{R}^n} f(-u)\ d\lambda(u) \qquad \forall f \in C_0$$

und

$$\|\lambda\|_1 \ =\ \|F\|_{(C_0)^*} \leq \|A\|_{\infty\infty}$$

Nach Satz IV 10:

$$(A*\phi)(x) \ =\ \langle A, \tau_{-x}\phi^* \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle A, \phi \rangle &= (A * \phi^*)(0) && \text{[für } x = 0\text{]} \\
&= F(\phi^*) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)\, d\lambda(u) \\
&=: \langle A_{d\lambda}, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow \quad A &= A_{d\lambda}, \\
\text{also: } L^{\infty\infty} &\subset \Lambda.
\end{aligned}$$

(ii) Sei $\lambda \in \Lambda$ und betrachte $A_{d\lambda}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad A_{d\lambda} * \phi &= A_{\phi * d\lambda} \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Lemma 7]} \\
\Longrightarrow \quad \|A_{d\lambda} * \phi\|_\infty &= \|\phi * d\lambda\|_\infty && \text{[Lemma 6]} \\
&\leq \|\lambda\|_\Lambda \, \|\phi\|_\infty \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow \quad A_{d\lambda} &\in L^{\infty\infty} && \text{[Def. 5]}
\end{aligned}$$

und

$$\|A_{d\lambda}\|_{\infty\infty} \leq \|\lambda\|_\Lambda$$

$\Longrightarrow$ (ii) mit $A = A_{d\lambda}$.

Klar: (i) und (ii) $\Longrightarrow L^{\infty\infty} = \Lambda$ isometrisch isomorph. □

Problem: Gegeben $A \in \mathfrak{s}'$: Für welches (p, q) gilt $A \in L^{pq}$? Hier insbesondere: Ist diese Menge konvex? Folgerung 3: Zusammenhang mit der Typ-Menge (Def. III 4) der entsprechenden Operatoren. Aber: Operator $T \in [p, q]_M$, definiert durch $T\phi := A * \phi$, ist zunächst nur auf $\mathfrak{s}$ definiert, nicht auf $S = S_m$ (vgl. mit Def. III 3 bzw. Beginn von Kapitel III (c)). Dazu: $A = 0 \Longrightarrow A \in L^{pq}\ \forall (p, q)$, also Menge konvex. Denn nach Folgerung 4 gilt $L^{pq} = \{0\}$ für $q < p$, also ist nur $p \leq q$ zu diskutieren.

Sei $p < \infty$: Folgerung 3: $L^{pq} = [p, q]_M$, d.h.:

$$A \in L^{pq} \Longleftrightarrow T \in [p, q]_M,$$

insbesondere ist T auf $S \subset L^p$ definiert (vgl. Lemma III 4).

$p = \infty$: $q = \infty$, also (Folg. 3) $L^{\infty\infty} = [C_0, L^\infty]_M$, aber: Fortsetzung auf S? Jedoch nach Satz 7: $L^{\infty\infty} = \Lambda$, das heißt:

$$A \in L^{\infty\infty} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : A = A_{d\lambda},$$

insbesondere

$$\begin{aligned}
T\phi &= A_{d\lambda} * \phi \\
&= A_{\phi * d\lambda} && \text{[Lemma 7]} \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - u)\, d\lambda(u)}_{\text{als LS-Int. von } S \text{ auf } \mathfrak{s} \text{ forts.}} && \text{[Bez.]}
\end{aligned}$$

Insgesamt: $0 \neq A \in L^{pq} \Longleftrightarrow T$ vom Typ (p, q) im Sinne von Def. III 4.

Definition 7

Für $0 \neq A \in \mathfrak{s}'$ ist die Typmenge von A definiert durch

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in R^2 : A \in L^{pq} \right\}$$

◁

Satz 8

Sei $0 \neq A \in \mathfrak{s}'$. Dann ist die Typ-Menge von A eine konvexe Teilmenge des Dreiecks $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ $(b \leq a)$, die symmetrisch zur Geraden $b = 1 - a$ liegt. In dieser Menge ist

$$\log \|A\|_{\frac{1}{a}\frac{1}{b}}$$

eine konvexe Funktion von (a, b) (vgl. Def. III 3) mit der entsprechenden Symmetriebedingung (genauer: konvex in t, t Geradenparameter). ◁

Beweis. Typ-Menge von A ist Teilmenge des Dreiecks, denn: Folgerung 4: $L^{pq} = \{0\}$ für $q < p$, also: Für $\frac{1}{p} = a < b = \frac{1}{q}$. Typ-Menge von A ist konvex nach Satz III 7 (und den Vorbemerkungen). Symmetrie folgt aus Satz 5, denn: Sei $A \in L^{p_0 q_0}$, d.h.:

$$\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0} \right) \;:=\; (a_0, b_0) \in \text{Typ-Menge}(A)$$

$$\Longrightarrow \quad A \;\in\; L^{q_0' p_0'} \qquad \text{[Satz 5]}$$

d.h.:

$$\left(\frac{1}{q_0'}, \frac{1}{p_0'} \right) \;=:\; (b_0', a_0') \in \text{Typ-Menge}(A)$$

Nun sind (b_0', a_0') die Koordinaten des an der Geraden $b = 1 - a$ gespiegelten Punktes (a_0, b_0), denn: ... $\Longrightarrow$ (b_0', a_0') liegt auf dieser Geraden, denn:

$$a_0 + a_0' \;=\; b_0 + b_0' = 1$$

$$\Longrightarrow \quad a_0' \;=\; b_0' + (b_0 - a_0)$$

Betrachte Mittelpunkt der Strecke zwischen (a_0, b_0) und (b_0', a_0'), dieser liegt auf der Geraden $b = 1 - a$, denn:

$$\frac{b_0 + a_0'}{2} \;=\; 1 - \frac{a_0 + b_0'}{2} = \frac{2 - a_0 - b_0'}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad b_0 - b_0' \;=\; 2 - a_0 - a_0' = 1$$

□

Folgerung 5

Sei $A \in L^{pp}$. Dann ist $A \in L^{ss}$ und

$$\|A\|_{ss} \leq \|A\|_{pp}$$

für $p \leq s \leq p'$, falls $1 \leq p \leq 2$, für $p' \leq s \leq p$ falls $2 \leq p \leq \infty$, insgesamt also für

$$\left| \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \right| \leq \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|$$

Also: mit $A \in L^{pp}$ gilt auch $A \in L^{ss}$ für alle Werte $(1/s, 1/s)$ auf der Strecke zwischen $(1/p, 1/p)$ und $(1/p', 1/p')$. ◁

Beweis. Sei $A \in L^{pq}$. Dann ist nach Satz 5 $A \in L^{p'p'}$, d.h.: $(a,a),(a',a') \in$ Typ-Menge(A). Satz 8: Die ganze Strecke zwischen (a,a) und (a',a') liegt in der Typ-Menge, d.h.:

$$a_t = (1-t)a + ta' \ , \ b_t = (1-t)a + ta',$$
$$\Longrightarrow \quad (a_t, b_t) \ \in \ \text{Typ-Menge}(A) \qquad \forall 0 \le t \le 1$$

Fall $1 \le p \le 2$: $2 \le p' \le \infty$, d.h.: $\frac{1}{2} \le a \le 1$, $0 \le a' \le \frac{1}{2} \Longrightarrow a \le a_t \le a' \Longrightarrow p' \le s \le p$. Beide Fälle sind äquivalent zu

$$\left|\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right| \ \le \ \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

bzgl. $\|A\|_{ss}$: Satz 5:

$$\begin{aligned}
\|A\|_{pp} &= \|A\|_{p'p'} \\
\|A\|_{ss} &= \|A\|_{p_t,q_t} \\
&= \|A\|_{\frac{1}{a_t},\frac{1}{b_t}} \\
&\le \|A\|_{pp}^{1-t} \|A\|_{p',p'}^{t} \\
&= \|A\|_{pp} \qquad \forall 0 \le t \le 1 \qquad \text{[Satz 8 bzw. in Satz III 7]}
\end{aligned}$$

(vgl. Formulierung in Satz 8).

□

V.c Charakterisierungen

Satz 9

(vgl. Satz 7): Für $1 \le p \le \infty$ ist

$$L^{p\infty} = L^{1p'} \cong L^{p'} \quad \text{isometrisch}$$

◁

Beweis. Da nach Satz 5 $L^{p\infty} = L^{1p'}$: Zeige: $L^{p\infty} = L^{p'}$, dazu:

Sei $A \in L^{p\infty}$, das heißt (Def. 5):

$$\|A * \phi\|_\infty \ \le \ \|A\|_{p\infty} \|\phi\|_p \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$
$$\Longrightarrow \quad A * \phi \in \mathcal{O}_m \cap C_B \quad \text{und} \quad |(A*\phi)(0)| \le \|A\|_{p\infty} \|\phi\|_p,$$

also ist $F \in \mathfrak{s}'$, $F(\phi) := (A*\phi)(0)$ wohldefiniert. Somit (Lemma III 5, Ü8A1 ($p < \infty$)) existiert eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung F auf $\overline{\mathfrak{s}}^{L^p} = L^p$ bei gleicher Norm, das heißt:

$$F \in (L^p)^* \quad \text{und} \quad \|F\|_{(L^p)^*} \le \|A\|_{p\infty}$$

Nach Satz IV 10:

$$(A*\phi)(x) \ \stackrel{?}{=} \ \langle A, \tau_{-x}\phi^* \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle A,\phi\rangle = (A*\phi^*)(0) \;=\; F(\phi^*) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)g(u)du := \langle A_g,\phi\rangle \qquad \forall \phi\in\mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad A \;=\; A_g,$$

das heißt: $L^{p\infty} \subset L^{p'}$ mit $\|g\|_{L^{p'}} \le \|A\|_{p\infty}$.

Sei $g\in L^{p'}$, betrachte die reguläre Distribution A_g. Da (Lemma II 5(e)) $\mathfrak{s}\subset L^p$ und

$$A_g * \phi \;=\; A_{\phi * g} \qquad \forall\phi\in\mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \|A_g*\phi\| = \|\phi * g\| \;\le\; \|g\|_{L^{p'}}\,\|\phi\|_p \qquad \text{[Satz II 2(b)]}$$

$$\Longrightarrow \quad A_g \in L^{p\infty} \quad\text{und}\quad \|A_g\|_{p\infty} \le \|g\|_{p'} \qquad \text{[Def. 5]}$$

also: mit $A = A_g$ folgt $L^{p'}\subset L^{p\infty}$ isometrisch. □

Satz 10

Für $A\in\mathfrak{s}'$ und $a=\frac{1}{p}$, $b=\frac{1}{q}$ gilt:

$$A\in L^{pq} \quad \forall 1\le p\le q\le\infty \Longleftrightarrow A\in L^1\cap L^\infty$$

Also:

$$\bigcap_{\substack{b\le a\\ (a,b)\in[0,1]^2}} L^{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} = L^1\cap L^\infty,$$

d.h.: Kriterien bzgl. individueller Paare, d.h: (p,q) erfordern weniger als $L^1\cap L^\infty$. ◁

Beweis. Sei $A\in L^1\cap L^\infty$. Da $A\in L^1 = AC\subset\Lambda$ (isometrisch)

$$\Longrightarrow \quad A \;\in\; L^{11} = L^{\infty\infty} \qquad \text{[Satz 7]}$$

Da $A\in C^\infty = L^{1'}$

$$\Longrightarrow \quad A \;\in\; L^{1\infty} \qquad \text{[Satz 9 für } p=1\text{]}$$

$$\Longrightarrow \quad (0,0),(1,1),(1,0) \;\in\; \text{Typ-Menge}(A) \qquad \text{[vgl. Def. 7]}$$

Satz 8: Mit den drei Ecken gehört auch das ganze Dreieck zur Typ-Menge, das heißt:

$$\big\{(a,b)\in[0,1]^2 : b\le a\big\} \;\subset\; \text{Typ-Menge}(A)$$

Sei $A\in L^{pq}$ $(1\le p\le q\le\infty)$, dann gilt

$$A\in L^{1\infty} \;\Longrightarrow\; A\in L^\infty \qquad \text{[Satz 9]}$$

$$A\in L^{\infty\infty} \;\Longrightarrow\; A\in\Lambda \qquad \text{[Satz 7]}$$

$$\Longrightarrow \quad A \;\in\; \Lambda\cap L^\infty$$

$$\exists\lambda\in\Lambda, g\in L^\infty : \langle A,\phi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\phi(u)\;d\lambda(u)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\phi(u)g(u)\;du \qquad \forall\phi\in\mathfrak{s}$$

Zeige: $g\in L^1$, dazu: Da $g\in L^\infty$, ist $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Beginn von Kapitel II(d)). Für beliebige beschränkte Borel-Mengen $B\subset\mathbb{R}^n$ setze

$$\nu(B) := \int_B g(u)\ du$$

Da $g \in L^1_{loc}$, ist ν ein (nicht notwendigerweise beschränktes) Borel-Maß mit

$$\int_B d|\lambda|(u) = \int_B |g(u)|\ du$$

Sei $\phi \in C^\infty_{00} \subset \mathfrak{s}$ beliebig. Da $\mathrm{Tr}(\phi) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)\ d\lambda(u) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(u)\phi(u)\ du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)\ d\nu(u) \qquad \forall \phi \in C^\infty_{00} \subset \mathfrak{s} \end{aligned}$$

Ist insbesondere $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges kompaktes Intervall, dann gilt

$$\int_I \phi(u)\ d\lambda(u) = \int_I \phi(u)\ d\nu(u) \qquad \forall \phi \in C^\infty_{00}$$

mit $\mathrm{Tr}(\phi) \subset I$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{|I} = \nu_{|I}, \qquad \text{[ohne Beweis, vgl. Ü10A2, Satz IV 2]}$$

insbesondere $|\lambda|(I) = |\nu|(I)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |g(u)|\ du &= \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_{-j}^{j} |g(u)|\ du \\ &= \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_{-j}^{j} d|\nu|(u) \\ &= \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_{-j}^{j} d|\lambda|(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d|\lambda|(u) < \infty, \end{aligned}$$

da $\lambda \in \Lambda$, $\Longrightarrow g \in L^1$ □

Satz 11

$$M(2,2) \cong L^\infty,$$

also (Def. 6):

$$L^{22} \cong \mathcal{F}^{-1} L^\infty \quad \text{isometrisch}$$

◁

Beweis. Sei $g \in L^\infty$. Da (Lemma IV 4) $L^\infty \subset \mathfrak{s}'$, ist $A_g \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert. Sei $A := (A_g)^\vee = \mathcal{F}^{-1}(A_g)$. Nach Satz IV 7 ist $A \in \mathfrak{s}'$ wohldefiniert und $A^\wedge = A_g$. Satz IV 9:

$$\begin{aligned} (A * \phi)^\wedge &= A^\wedge \phi^\wedge \\ &= A_g \phi^\wedge \\ &= A_{g\phi^\wedge} \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(u)\phi^\wedge(u)du$$
$$= \langle A_{g\phi^\wedge}, \psi\rangle$$

denn für beliebige $\phi \in \mathfrak{s}$ gilt:

$$\langle A_g\phi^\wedge, \phi\rangle = \langle A_g, \phi^\wedge\psi\rangle$$

(Satz II 12: $\mathfrak{s}^\wedge = {}^\wedge\subset \mathcal{O}_m$) Weiter: Nach Satz II 12, Lemma II 5 (e):

$$\phi, \phi^\wedge \in \mathfrak{s} \subset L^2$$
$$\Longrightarrow \quad g\phi^\wedge \in L^2 \qquad [g \in L^\infty]$$
$$\Longrightarrow \quad (A * \phi)^\wedge \overset{\text{Bez.}}{=} g\phi^\wedge \in L^2$$
$$\Longrightarrow \quad A * \phi \in L^2 \qquad \text{[HIERFEHLTWAS]}$$

und

$$\|A * \phi\|_2 = (2\pi)^{-n/2} \|(A * \phi)^\wedge\|_2 \qquad \text{[Satz III 4]}$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \|g\phi^\wedge\|_2$$
$$\leq \|g\|_\infty (2\pi)^{-n/2} \|\phi^\wedge\|_2$$
$$= \|g\|_\infty \|\phi\|_2 \qquad \forall\phi \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Satz III 1]}$$
$$\Longrightarrow \quad A \in L^{22} \quad \text{und} \quad \|A\|_{22} \leq \|g\|_\infty$$

das heißt (Def. 6):

$$A^\wedge = A_g \in M(2,2) \quad \text{und} \quad \|A_g\|_{M(2,2)} \leq \|g\|_\infty$$

das heißt (Bez.):

$$L^\infty \subset M(2,2) \quad \text{und} \quad \|g\|_{M(2,2)} \leq \|g\|_\infty$$

Sei $B \in M(2,2)$, das heißt (Def. 6): $B = A^\wedge$ mit $A \in L^{22}$, also

$$\|A * \phi\|_2 \leq \|B\|_{M(2,2)} \|\phi\|_2 \qquad \forall\phi \in \mathfrak{s}$$
$$\Longrightarrow \quad A * \phi \in \mathcal{O}_m \cap L^2 \qquad \forall\phi \in \mathfrak{s} \qquad \text{[insb., Satz IV 10]}$$
$$\Longrightarrow \quad \|B\phi^\wedge\|_2 = \|A^\wedge\phi^\wedge\|_2$$
$$= \|(A * \phi)^\wedge\|_2 \qquad \text{[Satz IV 4]}$$
$$= \|A * \phi\|_2 (2\pi)^{n/2} \qquad \text{[Satz III 4, Folg. IV 4]}$$
$$\leq \|B\|_{M(2,2)} (2\pi)^{n/2} \|\phi\|_2$$
$$= \|B\|_{M(2,2)} \|\phi^\wedge\|_2 \qquad \forall\phi \in \mathfrak{s}$$
$$\overset{\text{insb.}}{\Longrightarrow} \quad B\phi^\wedge = (A * \phi)^\wedge \in L^2 \qquad \forall\phi \in \mathfrak{s} \qquad (5.3)$$

das heißt: für jedes $\phi \in \mathfrak{s}$ ist $B\phi \in \mathfrak{s}'$ regulär erzeugt durch eine L^2-Funktion. Aber: Das Produkt $B\phi^\wedge$ ist definiert über Ü4A2(c):

$$\langle B\phi^\wedge, \psi\rangle := \langle B, \phi^\wedge\psi\rangle \qquad \forall\psi \in \mathfrak{s}$$

Zeige: B selbst ist regulär erzeugt durch eine Funktion $\in L^\infty$: $B = A_g$; insbesonere: Zeige: B ist Funktion. Dazu:

Sei $\phi_0 \in \mathfrak{s}$ so daß $\phi_0^\wedge(x) = e^{-x^2} \in \mathfrak{s}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Lemma II 5, Satz II 12). Dann ist $B\phi_0^\wedge$ regulär, erzeugt durch $\sigma_0 \in L^2$ ((5.3)). Setze

$$
\begin{aligned}
& g(x) \;:=\; e^{x^2}\sigma_0(x) = \frac{(B\phi_0^\wedge)(x)}{(\phi_0^\wedge)(x)} \\
\Longrightarrow\quad & g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \\
\Longrightarrow\quad & g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \\
\Longrightarrow\quad & \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)g(x)dx \text{ wohldefiniert} \qquad \forall \eta \in C^\infty_{00}(\mathbb{R}^n) \\
& e^{x^2} \;\in\; C^\infty \\
\Longrightarrow\quad & \eta(x)e^{x^2} \;\in\; C^\infty_{00} \qquad \forall \eta \in C^\infty_{00}
\end{aligned}
$$

Also gilt für alle $\phi \in \mathfrak{s}, \eta \in C^\infty_{00} \subset \mathfrak{s}$:

$$
\begin{aligned}
\langle B\phi^\wedge, \eta\rangle \;&=\; \langle B, \phi^\wedge\eta\rangle \qquad\qquad [\text{Ü4A2}] \\
&= \left\langle B, \phi_0^\wedge \frac{\phi^\wedge\eta}{\phi_0^\wedge} \right\rangle \\
&= \left\langle B\phi_0^\wedge, \frac{\phi^\wedge\eta}{\phi_0^\wedge} \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_0(x)\phi^\wedge(x)\eta(x)e^{x^2}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi^\wedge(x)\eta(x)dx \\
&= \langle A_{g\phi^\wedge}, \eta\rangle
\end{aligned}
$$

(Beachte: $A_{g\phi^\wedge}$ zunächst nur auf C^∞_{00} definiert). Also: $B\phi^\wedge \in L^2 \subset L^1_{loc}$ wegen (5.3); $g\phi^\wedge \in L^1_{loc}$ und

$$
\begin{aligned}
& \langle B\phi^\wedge, \eta\rangle \;=\; \langle A_{g\phi^\wedge}, \eta\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}, \eta \in C^\infty_{00} \qquad (5.4) \\
\Longrightarrow\quad & (B\phi^\wedge)(x) \;=\; g(x)\phi^\wedge(x) \qquad [\text{Ü10A2}] \\
\Longrightarrow\quad & g\phi^\wedge \;\in\; L^2 \forall \phi \in \mathfrak{s}
\end{aligned}
$$

(nicht nur $g\phi_0^\wedge$) und

$$
\begin{aligned}
& \|g\phi^\wedge\|_2 = \|B\phi^\wedge\|_2 \;\le\; \|B\|_{M(2,2)}\,\|\phi^\wedge\|_2 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow\quad & g\phi \;\in\; L^2 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad [\text{Satz II 12}]
\end{aligned}
$$

und

$$
\|g\phi\|_2 \;\le\; \|B\|_{M(2,2)}\,\|\phi\|_2 \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad (5.5)
$$

Es gilt sogar (beachte: Bisher nur $g \in L^2_{loc}$, noch nicht $g \in L^\infty$):

$$
\|gf\|_2 \;\le\; \|B\|_{m(2,2)}\,\|f\|_2 \qquad \forall f \in L^2 \qquad (5.6)
$$

denn: Sei $f \in L^2$ beliebig. Ü8A1: Da $\mathfrak{s} \in L^2$ dicht, gibt es $(\phi_j) \in \mathfrak{s}$ mit $\|f - \phi_j\|_2 \longrightarrow 0$. Wegen (5.5):

$$
\begin{aligned}
& \|g(\phi_j - \phi_m)\|_2 \;\le\; \|B\|_{M(2,2)}\,\|\phi_j - \phi_m\| \longrightarrow 0 \\
\Longrightarrow\quad & (g\phi_j) \subset L^2 \text{ Cauchy-Folge}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \quad \exists h \in L^2 : \|g\phi_j - h\|_2 \longrightarrow 0 \qquad \text{[L17]}$$

Also gibt es eine Teilfolge (ϕ_{j_k}) mit

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} g(x)\phi_{j_k}(x) = h(x) \quad \text{f.ü.}$$

und

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \phi_{j_k} \longrightarrow f(x) \quad \text{f.ü.}$$
$$\Longrightarrow \quad g(x)f(x) = h(x) \quad \text{f.ü.,}$$

insbesondere: $gf \in L^2 \ \forall f \in L^2$ und Abschätzung (5.6)

Zeige: $g \in L^\infty$ und $\|g\|_\infty \leq \|B\|_{M(2,2)}$. Dazu: Annahme: $\exists E \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt mit $m(E) > 0$, so daß $|g(x)| > \|B\|_{M(2,2)} \ \forall x \in E$.

$$\kappa_E \in L^2$$
$$\Longrightarrow \quad \|B\|_{M(2,2)} < \frac{1}{m(E)} \int_E |g(x)|^2 dx \qquad \text{[Annahme; Lemma 5]}$$
$$= \frac{1}{m(E)} \|g\kappa_E\|_2^2$$
$$\leq \frac{1}{m(E)} \|B\|_{M(2,2)} \|\kappa_E\| \qquad \text{[(5.6)]}$$
$$= \|B\|_{M(2,2)}^2$$

Widerspruch! Also: $\|g\|_\infty \leq \|B\|_{M(2,2)}$ (beachte: $\mathbb{R}^n$ σ-endlich bzgl. λ)

Zeige: $B = A_g$, dazu: nach Voraussetzung $B \in \mathfrak{s}'$; Lemma IV 4: $g \in L^\infty \subset \mathfrak{s}'$, also $A_g \in \mathfrak{s}'$. Für jedes $\phi \in \mathfrak{s}, \eta \in C_{00}^\infty$:

$$\langle B, \phi^\wedge \eta\rangle = \langle B\phi^\wedge, \eta\rangle \qquad \text{[Ü4A2]}$$
$$= \langle A_{g\phi^\wedge}, \eta\rangle \qquad \text{[(5.4)]}$$
$$= \langle A_g, \phi^\wedge \eta\rangle \qquad \text{[Ü4A2]}$$

Vgl. Beweis zu Ü8A2: Sei $(\eta_j) \subset C_{00}^\infty = \mathfrak{d}$ unabhängig von $\phi^\wedge$ so, daß

$$\phi^\wedge \eta_j \longrightarrow \phi^\wedge \text{ (in } \mathfrak{s}) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$
$$\Longrightarrow \quad \langle B, \phi^\wedge\rangle = \lim_{j\longrightarrow\infty} \langle B, \phi^\wedge \eta_j\rangle \qquad \text{[Def IV 2/3; } B, A_g \in \mathfrak{s}']$$
$$= \lim_{j\longrightarrow\infty} \langle A_g, \phi^\wedge \eta_j\rangle$$
$$= \langle A_g, \phi_j\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$
$$\Longrightarrow \quad \langle B, \phi\rangle = \langle A_g, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad \text{[Satz II 12]}$$
$$\Longrightarrow \quad B = A_g \quad \text{und} \quad \|g\|_\infty \leq \|B\|_{M(2,2)}$$

□

V.d Notwendige Bedingungen

Folgerung 6

Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$M(p,p) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{stetig}$$

d.h. ist $B \in M(p,p)$ (Def. 6), dann ist $B = B_j$, $g \in L^\infty$, und es gilt

$$\|g\|_\infty \leq \|B\|_{M(p,p)}$$

d.h.: Jeder Multiplikator vom Typ (p,p) ist *notwendig* eine beschränkte Funktion. $\triangleleft$

Beweis. Satz 11 liefert den Fall $p = 2$ (und sogar die Umkehrung). Sei $B \in M(p,p)$, $(p \neq 2)$ (und damit $p' \neq 2$)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad B \in M(s,s) \quad \text{und} \quad \|B\|_{M(s,s)} \leq \|B\|_{M(p,p)} \qquad \forall \left|\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right| \leq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| && \text{[Folg. 5]}\\
&\Longrightarrow \quad B \in M(2,2) \quad \text{und} \quad \|B\|_{M(2,2)} \leq \|B\|_{M(p,p)} && \text{[insbesondere, } s = 2\text{]}\\
&\Longrightarrow \quad B \in L^\infty \quad \text{und} \quad \|B\|_\infty = \|B\|_{M(2,2)} \leq \|B\|_{M(p,p)} && \text{[Satz 11]}
\end{aligned}$$

$\square$

Ist $p \neq q$, dann ist $B \in M(p,q)$ nicht notwendigerweise eine beschränkte Funktion. Gewisse Regularitätseigenschaften sind aber dennoch notwendigerweise erfüllt. Zur Konsistenz bzgl. Def. 1 ($M^*(p,q)$) und Def. 6 ($M(p,q)$):

Satz 12

Sei $1 \leq p,q \leq \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
M(p,q) &\subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{falls } p \geq 2\\
M(p,q) &\subset L^{q'}_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{falls } q \leq 2
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

D.h.: nicht für alle Paare (p,q). Dazu zunächst Bezeichnung: Gemeint ist die Restriktion von $M(p,q)$ auf $\mathfrak{d}$. Sei $A \in \mathfrak{s}'$: Was bedeutet $A \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$? Eine *Distribution* (allg., ohne Zusatz, vgl. Def. IV 3) ist ein stetiges lineares Funktional über $\mathfrak{d}$ (vgl. Ü8: Def.), insbesondere (vgl. Def. IV 2) heißt ein lineares Funktional $A : \mathfrak{d} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, falls für jede Folge $(\phi_j) \subset \mathfrak{d}$ mit $\phi_j \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{d}$) gilt:

$$\langle A, \phi_j \rangle \longrightarrow 0$$

Sei $\mathfrak{d}'(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Distributionen. *Reguläre* Distributionen:

$$\begin{aligned}
\langle A, \phi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\phi(u)\, du\\
&= \langle A_f, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{d}(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Jetzt: $A \in \mathfrak{d}'$ regulär $\Longleftrightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Ü7A4(a)). Insbesondere: Ü10A1: Seien $f, g \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&\langle A_f, \phi \rangle = \langle A_g, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{d}\\
\Longrightarrow \quad &f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Ü10A2: Seien $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle A_f, \phi \rangle = \langle A_g, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{d}$$
$$\Longrightarrow \quad f = g \qquad \text{f.ü.}$$

Ü10A3: $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{s}$ stetig, also: Ist $A \in \mathfrak{s}'$, dann ist $A_{|\mathfrak{d}} \in \mathfrak{d}'$, also: Jede temperierte Distribution (Def. IV 3) ist eine Distribution, genauer (Ü10A4): $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{d}'$ ist ein echter linearer Unterraum. Ist $A \in \mathfrak{s}'$ so daß $A_{|\mathfrak{d}} 0$, dann gilt $A = 0$ (über ganz $\mathfrak{s}$). Insbesondere: Seien $A, B \in \mathfrak{s}'$:

$$\langle A, \phi \rangle = \langle B, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{d}$$
$$\Longrightarrow \quad \langle A, \phi \rangle = \langle B, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

Problem: Umkehrung, d.h.: gegeben $A \in \mathfrak{d}'$, also ein lineares stetiges Funktional über $\mathfrak{d}$. Existiert eine lineare stetige Fortsetzung von $\mathfrak{d}$ auf $\mathfrak{s}$? Diese Teilklasse von Distributionen heißt temperiert. Ü8A2: Falls die Fortsetzung existiert, ist sie eindeutig. Also: temperierte Distributionen lassen sich äquivalent definieren als

- lineare stetige Funktionale über $\mathfrak{s}$ oder
- Distributionen, die eine lineare stetige Fortsetzung von $\mathfrak{d}$ auf $\mathfrak{s}$ haben.

Beispiel: Reguläre Distributionen: Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Über

$$\langle A_f, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\phi(u)\, du \qquad \forall \phi \in \mathfrak{d}$$

wird eine reguläre Distribution $A_f \in \mathfrak{d}'$ wohldefiniert. Wann ist sie fortsetzbar zu $A_f \in \mathfrak{s}'$? Dazu: Nicht für jedes $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Fortsetzung $A_f \in \mathfrak{s}'$. Z.B.: $f(x) = e^{x^2} \in C \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\phi(u)\, du$$

existiert nicht für alle $\phi \in \mathfrak{s}'$, z.B.: $\phi(x) = e^{-x^2}$. Also: Soll A_f auf $\mathfrak{s}$ fortsetzbar sein, dann muß $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ zusätzlich gewisse Wachstumseigenschaften haben (f verhält sich im Unendlichen wie ein Polynom). Ü4A3: $f \in \mathcal{O} \Longrightarrow A_f \in \mathfrak{s}'$. Da (vgl. L19, L20)

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

erzeugt jedes $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ eine reguläre Distribution $A = A_g \in \mathfrak{d}'$. Aber:

$$\langle A_g, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} g(u)\phi(u)\, du$$

existiert nicht für alle $\phi \in \mathfrak{s}$ (z.B.: $g(x) = e^{x^2} \in \mathbb{C} \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$) und $\phi(x) = e^{-x^2} \in \mathfrak{s}$. $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sicher also nicht, daß $A_g \in \mathfrak{d}'$ temperiert ist. Die Aussage (vgl. Satz 12): "Für $A \in \mathfrak{s}'$ gilt $A \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$" bedeutet: $A_{|\mathfrak{d}} = A_g$ für ein $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Klar: Da $A \in \mathfrak{s}'$ nach Voraussetzung: Falls $A_{|\mathfrak{d}} = A_g$ für ein $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ist A_g temperiert. Dies bedeutet aber nicht unbedingt, daß die analytische Darstellung als $\int g\phi$ auf $\mathfrak{s}$ fortsetzbar wäre!

Satz 13

Sei $1 \leq p, q \leq \infty$.

$$M(p,q) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{falls } p \geq 2$$
$$M(p,q) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{falls } q \leq 2$$

$\triangleleft$

Beweis.

(i) Zeige: Für $q \leq 2$ gilt $M(p,q) \subset L^{q'}_{loc}$, das heißt: Ist $B \in M(p,q) \in \mathfrak{s}'$ (Def. 6) für ein $q \leq 2$, dann ist $B_{|\mathfrak{d}} = A_g$ für ein $g \in L^{q'}_{loc}$. Dazu: Vorgehen wie im Beweis zu Satz 11(ii). Sei $B \in M(p,q)$, d.h. (Def. 6): $B = A^\wedge$ mit $A \in L^{pq}$, also:

$$\begin{aligned}
& \|A * \phi\|_q \leq \|B\|_{M(p,q)} \|\phi\|_p \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \\
\Longrightarrow \quad & A * \phi \in \mathcal{O}_m \cap L^q \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} && \text{[Satz IV 10]} \\
\Longrightarrow \quad & \|B\phi^\wedge\|_{q'} = \|A^\wedge \phi^\wedge\|_{q'} \\
& = \|(A * \phi)^\wedge\|_{q'} && \text{[Satz IV 9]} \\
& \leq (2\pi)^{n/q'} \|A * \phi\|_q && \text{[Folg. IV 3 (Permanenz)]} \\
& \leq (2\pi)^{n/q'} \|B\|_{M(p,q)} \|\phi\|_p \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}
\end{aligned}$$

insbesondere:

$$B\phi^\wedge = (A * \phi)^\wedge \in L^{q'} \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

d.h. für jedes $\phi \in \mathfrak{s}$ ist $(B\phi^\wedge) \in \mathfrak{s}'$ regulär, erzeugt durch eine $L^{q'}$-Funktion. Zeige: Die Restriktion von B auf $\mathfrak{d}$ ist regulär erzeugt durch eine Funktion $g \in L^{q'}_{loc}$. Dazu: Sei $\phi_0 \in \mathfrak{s}$ mit $\phi_0^\wedge(x) = e^{-x^2} \in \mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow \quad (B\phi_0^\wedge)(x) = \sigma_0(x) \in L^{q'}$$

Setze:

$$\begin{aligned}
g(x) &:= e^{x^2} \sigma_0(x) \\
&= \frac{(B\phi_0^\wedge)(x)}{\phi_0^\wedge(x)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad g \in L^{q'}_{loc}$$

$$\Longrightarrow \quad g \in L^1_{loc}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\eta(x)\, dx \quad \text{wohldefiniert} \qquad \forall \eta \in \mathfrak{d}$$

Also: Für beliebige $\phi \in \mathfrak{s}$, $\eta \in \mathfrak{d} \subset \mathfrak{s}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle B\phi^\wedge, \eta \rangle &= \langle B, \phi^\wedge \eta \rangle \\
&= \left\langle B, \phi_0^\wedge \frac{\phi^\wedge \eta}{\phi_0^\wedge} \right\rangle \\
&= \left\langle B\phi_0^\wedge, \frac{\phi^\wedge \eta}{\phi_0} ftr \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_0(x) \phi^\wedge(x) \eta(x) e^{x^2}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \phi^\wedge(x) \eta(x)\, dx \\
&= \langle A_{g\phi^\wedge}, \eta \rangle
\end{aligned}$$

Also: $B\phi^\wedge \in L^{q'} \subset L^1_{loc}$, $g\phi^\wedge \in L^1_{loc}$ und

$$\langle B\phi^\wedge, \eta \rangle = \langle A_{g\phi^\wedge}, \eta \rangle \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}, \eta \in \mathfrak{d} \tag{5.7}$$

$$\Longrightarrow \quad (B\phi^\wedge)(x) \;=\; g(x)\phi^\wedge(x) \quad \text{f.ü.} \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s} \qquad [\ddot{\text{U}}10\text{A}2] \quad (5.8)$$

Zeige: $B_{|\mathfrak{d}} = A_g$. Dazu: Da $B \in M(p,q)$, gilt insbesondere $B \in \mathfrak{s}' \subset \mathfrak{d}'$, da $g \in L^{q'}_{loc} \subset L^1_{loc}$, gilt $A_g \in \mathfrak{d}'$. Sei $\eta \in \mathfrak{d}$ beliebig fest

$$\Longrightarrow \quad \exists \alpha = \alpha_\eta \in \mathfrak{d} : \alpha(x) \;=\; 1 \qquad \forall x \in \mathrm{Tr}(\eta) \qquad [\ddot{\text{U}}7\text{A}4,\ \mathrm{Tr}(\eta) \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}]$$

$$\Longrightarrow \quad (\alpha\eta - \eta)(x) \;=\; \alpha(x) - B\eta(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Also: Für beliebige $C \in \mathfrak{d}'$ gilt:

$$\langle C, \alpha\eta - \eta\rangle \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \quad \langle C, \alpha\eta\rangle \;=\; \langle C, \eta\rangle \qquad \forall C \in \mathfrak{d}'$$

Da $\alpha \in \mathfrak{d} \subset \mathfrak{s}$

$$\Longrightarrow \quad \alpha^\vee \;\in\; \mathfrak{s} \qquad [\text{Satz II } 12]$$

$$\Longrightarrow \quad \forall \eta \in \mathfrak{d} : \langle B, \eta\rangle \;=\; \langle B, \alpha\eta\rangle$$

$$= \left\langle B, \alpha^{\vee\wedge}\eta \right\rangle \qquad [(5.7)]$$

$$= \left\langle A_{g(\alpha^\vee)^\wedge}, \eta \right\rangle$$

$$= \langle A_g, \alpha\eta\rangle$$

$$= \langle A_g, \eta\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad B_{|\mathfrak{d}} \;=\; A_g$$

(ii) Sei $p \geq 2$ (also $p' \leq 2$). Sei $B \in M(p,q)$. Satz 5: $B \in M(q',p')$ mit $p' \leq 2$

$$\Longrightarrow \quad B \;\in\; L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad [(??)]$$

$$\Longrightarrow \quad M(p,q) \;\subset\; L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

□

Jetzt: Zum Konsistenzproblem im Anschluß an Def. 4: Sei $1 \leq p,q \leq 2$. Bisher zwei verschiedene Definitionen von Multiplikatoren bzw. Multiplikatoroperatoren. Klassische Definition (1,2): $M^*(p,q), [p,q]^*_M$ Distributionentheoretische Definition (4–6): $M(p,q), [p,q]_M, L^{pq}$

Satz 14

Die Definitionen von $M^*(p,q)$ und $M(p,q)$ (und damit die von $[p,q]^*_M$ und $[p,q]_M$ bzw. L^{pq}) sind konsistent in folgendem Sinne: Sei $1 \leq p,q \leq 2$:

(i)
$$\tau(v) \in M^*(p,q) \Longrightarrow \exists B \in \mathfrak{s}' : B_{|\mathfrak{d}} = A_\tau \quad \text{und} \quad B \in M(p,q)$$

(ii)
$$B \in M(p,q) \Longrightarrow \exists \tau \in M^*(p,q) : B_{|\mathfrak{d}} = A_\tau$$

◁

Beweis.

(i) Sei $\tau \in M^*(p,q)$. Def. 1: $\tau(v)$ ist eine auf $\mathbb{R}^n$ f.ü. definierte Funktion mit der Eigenschaft: Zu jedem $f \in L^p$ gibt es ein $g \in L^q$ mit

$$\tau(v) f^\wedge(v) \;=\; g^\wedge(v)$$

Setze: $Tf := g$, d.h. (Def. 2): $T \in [p,q]^*_M$

$$\Longrightarrow \quad T \;\in\; [p,q]_M \qquad \text{[Satz 2, Def. 4]}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists A \in L^{pq} : T\phi \;=\; A * \phi \qquad \text{[Satz 4, Def. 5]}$$

$$\Longrightarrow \quad B \;=\; A^\wedge \in M(p,q) \qquad \text{[Def. 6]}$$

$$\Longrightarrow \quad B \;\in\; L^{q'}_{loc} \qquad \text{[Satz 12, } q \le 2\text{]}$$

d.h.: $B_{|\mathfrak{d}} = A_\lambda$ mit $\lambda \in L^{q'}_{loc}$. Nach (??) im Beweis zu Satz 12:

$$(B\phi^\wedge)(v) \;=\; \lambda(v)\phi^\wedge(v) \quad \text{f.ü.} \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

Aber nach Def. von T:

$$\begin{aligned} \tau(v)\phi^\wedge(v) \;&=\; (T\phi)^\wedge(v) \\ &=\; (B\phi^\wedge)(v) \qquad \text{[Satz 4, IV 9]} \\ &=\; (A*\phi)^\wedge \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau(v)\phi^\wedge(v) \;=\; \lambda(v)\phi^\wedge(v) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau(v) \;=\; \lambda(v) \quad \text{f.ü.,}$$

insbesondere: $\tau \in L^{q'}_{loc} \subset L^1_{loc} \subset \mathfrak{d}'$, d.h.: die Distribution $A_\tau = A_\lambda = B_{|\mathfrak{d}} \in \mathfrak{d}'$ ist temperiert, fortsetzbar zu $B \in M(p,q)$

(ii) Sei $B \in M(p,q)$. Satz 12 ($q \le 2$): $B_{|\mathfrak{d}} = A_\tau$ mit $\tau \in L^{q'}_{loc}$ nach (??) aus dem Beweis zu Satz 12:

$$\tau(v)\phi^\wedge(v) \;=\; (B\phi^\wedge)(v) \qquad \forall \phi \in \mathfrak{s}$$

d.h.: $\tau(v)$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert (sogar $\in L^{q'}_{loc}$): Zu jedem $\phi \in \mathfrak{s} \subset L^p$ gibt es ein $g_\phi := A * \phi \in L^q$ mit

$$\tau(v)\phi^\wedge(v) \;=\; (A*\phi)^\wedge(v)$$

Zeige: $\tau \in M^*(p,q)$, d.h.: Zu jedem $f \in L^p$ gibt es ... Dazu: $B \in M(p,q)$, d.h.: $B = A^\wedge$ mit $A \in L^{pq}$. Folg. 3 ($p \neq \infty$): $T\phi := A * \phi$ hat eine eindeutige Fortsetzung zu $T \in [p,q]_M$. Sei $f \in L^p$ beliebig

$$\Longrightarrow \quad \exists (\phi_j) \subset \mathfrak{s} : \|f - \phi_j\|_p \;\longrightarrow\; \infty \qquad \text{[Ü8A1, } 1 \le p \le 2\text{]}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\|f^\wedge - \phi_j^\wedge\right\| \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{[Satz III 9]}$$

Da T stetig:

$$\Longrightarrow \quad \|Tf - T\phi_j\|_q \;\longrightarrow\; 0$$

$$\Longrightarrow \quad \|(Tf)^\wedge - (T\phi_j)^\wedge\|_{q'} \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{[Satz III 9]}$$

Also L26 gibt es eine Teilfolge mit

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \phi^\wedge_{j_k}(v) \;=\; f^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}$$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} (T\phi_{j_k})^\wedge(v) \;=\; (Tf)^\wedge(v) \quad \text{f.ü.}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \tau(v)\phi^\wedge_{j_k}(v) \;&=\; (B\phi^\wedge_{j_k})(v) \\ &=\; (T\phi_{j_k})^\wedge(v) \\ \Longrightarrow \quad \tau(v) f^\wedge(v) \;&=\; (Tf)^\wedge(v) \end{aligned}$$

d.h.: Zu jedem $f \in L^p$ gibt es ein $g = Tf \in L^q$ mit

$$\tau(v) f^{\wedge}(v) \;=\; g^{\wedge}(v) \quad \text{f.ü.}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau \;\in\; M^*(p,q)$$

□

Folgerung 7

Sei $\tau \in M^*(p,q)$:

(i)

$$\tau(v) = 0 \quad \text{f.ü.} \qquad \forall p > q$$

(ii)

$$\tau \in L^{q'}_{loc}$$

(vgl. Folg. 6)

◁

Beweis. Wegen Konsistenz (und $1 \leq p, q \leq 2$) folgt dies sofort aus Satz 3, Satz 12. □

Index

abstract harmonic analysis, 22
Algebra, **17**
  Banach-, **17**, 20, 22, 56
  kommutativ, **17**
  mit Eins, **17**
  normiert, **17**

Banach-Algebra, 18
  mit Eins, 18
Bernoulli-Spline, 35, 36
Bernoulli-Splines, 27, 30
Beschränkte Variation, 28
Beschränktheitsprinzip, 32

Carleson, 32

Dini-Bedingung, 26
Dini-Kriterium, 26
Dirichlet-Kern, 38, 39
Dreiecksmatrix
  unendliche, 33

Eindeutigkeitssatz, 41
Eins, **17**
  approximierende, 19, 41

Féjer-Kern, 40, 45
Faltung, 21, 22, 46, **54**
  $L^1_{2\pi}$, 16
  Normungleichungen, 16, 19
Faltungssatz, 21, 56
Fourier-Koeffizient, 6
Fourier-Reihe
  trigonometrische, **12**
Fourier-Reihen
  Ableitungen, 46
  Divergenz, 30
  Konvergenz
    gleichmäßige, 22, 30
    punktweise, 24, 26–28
Fourier-Transformation
  2π-periodische, 22
  n-dimensionale, **51**
Fourierkoeffizient
  trigonometrischer, **12**

Gibbs-Phänomen, 35

Identität
  approximierende, 39, **39**

Integral
  singuläres
    periodisches, **37**
    von Dirichlet, 38, **38**
    von Féjer, 40

Jordan-Kriterium, 28
Jordan-Zerlegung, **28**

Kategorie, 32
Kolmogorov, 32
Kondensationsprinzip, 32
konjugiert-komplex, 53
Konvergenz
  im quadratischen Mittel, 9
Konvergenzfaktor, **44**

Lebesgue-Konstanten, 38
Lemma
  von Riemann-Lebesgue, 51
    für Fourier-Reihen, 23
Lipschitz-Bedingung
  lokale, 27
Lipschitz-Kriterium
  lokales, 27
Lokalisationsbedingung
  Riemannsche, 24
Lokalisationsprinzip
  Riemannsches, 24, 29

Operatornorm, 37
Orlicz, 32

Parseval-Formel, 56
Parseval-Gleichung, 10
  verallgemeinerte, 9
Partialsummen
  symmetrische, 10
Polynom
  trigonometrisches, **6**
    Grad, **6**
Projektionseigenschaft, 38

radial, **54**
Raum
  Banach-, 17
Riesz
  M., 32
Ring, **17**

Satz
von Banach-Steinhaus, 32
von Du Bois-Reymond, 30
von Féjer, 41
Singuläre Integrale, 37
Sobolev-Raum, 48
stetig
absolut, **45**
r-fach, **45**
Stetigkeitsmodul
erster radialer, **51**
Summationsverfahren, **44**
Symmetrie, 53

Totale Variation, **28**
Translation, **22**, 53
translationsinvariant, 22

Ungleichung
von Hardy-Littlewood-Sidon, 34

Variation
beschränkte, 28
totale, 28

Weierstraßscher Approximationssatz, 42

zerfallend, **53**

Symbolverzeichnis

Π, 6
Π_m, 6
æ$B30D$·æ $B30D_C$, 50
$f * g$, 16
$f\hat{}(k)$, 12
$(L^p_{2\pi})^{(r)}$, 45
$AC^{(r)}_{2\pi}$, 45
$C^{(r)}_{2\pi}$, 45
$L^2_{2\pi}$, 6
ℓ^p, 14
ℓ^∞_0, 14