MULTILINEARE ALGEBRA

GIOVANNI FELDER, ETH ZÜRICH

Notizen zur Vorlesung Lineare Algebra II
ETH Zürich
Sommersemester 1998

1. Multilinearformen, multilineare Abbildungen

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einen Körper K. Wir schreiben hier die Koordinaten x^i eines Vektors bezüglich einer Basis $b_1, \dots, b_n$ von V mit *oberen* Indizen: $v = \sum_{i=1}^n x^i b_i$.[1]

Definition. Sei p eine positive ganze Zahl. Eine *p-Multilinearform* auf V ist eine Funktion von p Argumenten in V

$$\begin{aligned} \omega : \quad V \times \cdots \times V &\to K, \\ (v_1, \dots, v_p) &\mapsto \omega(v_1, \dots, v_p), \end{aligned}$$

die in jedem Argument linear ist: für jedes $i \in \{1, \dots, p\}$ und für alle $v_1, \dots, v_{i-1}$, v_i', v_i'', $v_{i+1}, \dots, v_p \in V$, $\lambda', \lambda'' \in K$ soll also gelten

$$\omega(v_1, \dots, \lambda' v_i' + \lambda'' v_i'', \dots, v_p) = \lambda' \omega(v_1, \dots, v_i', \dots, v_p) + \lambda'' \omega(v_1, \dots, v_i'', \dots, v_p).$$

Definiert man die Addition und skalare Multiplikation von p-Multilinearformen durch

$$\begin{aligned} (\omega + \omega')(v_1, \dots, v_p) &= \omega(v_1, \dots, v_p) \\ (\lambda\omega)(v_1, \dots, v_p) &= \lambda\, \omega(v_1, \dots, v_p) \end{aligned}$$

---

http://www.math.ethz.ch/~felder/Linalg/.

[1] Es stellt sich heraus, dass diese Schreibweise für die Mnemonik nützlich ist, da Summationsindizes in jeder Formel zwei mal vorkommen: einmal oben, und einmal unten. Oft wird dann in der physikalischen Literatur das Summationszeichen weggelassen und man schreibt etwa $v = x^i b_i$

so bilden p-Multilinearformen einen Vektorraum über K. Der Vektorraum aller p-Multilinearformen auf V wird mit $T^p(V^*)$ bezeichnet.

Beispiele.

1. $T^1(V^*)$ ist der Vektorraum V^* aller Linearformen auf V. Es ist also der zu V duale Vektorraum. $T^2(V^*)$ ist der Vektorraum aller Bilinearformen auf V.
2. Sind $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in K^n so definiert man $\det(v_1, \ldots, v_n)$ als die Determinante der Matrix mit Spalten $v_1, \ldots, v_n$. Die Abbildung det ist eine n-multilineare Form auf K^n.

Multilinearformen sind Spezialfälle von multilinearen Abbildungen:

Definition. Sind $V_1, \ldots, V_p, W$ Vektorräume über einem Körper K, so heisst eine Abbildung

$$f : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$$

multilinear falls für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$ und alle $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_p$, $(v_j \in V_j)$ die Abbildung von V_i nach W

$$v \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_p)$$

linear ist.

1.1. **Koordinatenausdrücke.** Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K mit Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

Definition Die *Koordinaten* (oder Komponenten) einer p-Multilinearform ω auf V bezüglich der Basis B sind die n^p Skalare

$$\omega_{i_1,\ldots,i_p} = \omega(b_{i_1}, \ldots, b_{i_p}), \qquad 1 \le i_1, \ldots, i_p \le n.$$

Hilfssatz 1.1. *Seien $v_1, \ldots, v_p \in V$ Vektoren,*

$$v_i = x_i^1 b_1 + \cdots + x_i^n b_n, \qquad x_i^j \in K,$$

ihre Koordinatenausdrücke bezüglich der Basis B. Dann gilt

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}$$

Die Summation erstreckt sich über alle p-Tupel $(i_1, \ldots, i_p)$ von ganzen Zahlen $i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Insbesondere ist eine p-Multilinearform eindeutig durch ihre Koordinaten bestimmt.

Beweis: Induktion: der Fall $p = 1$ (Linearformen) ist klar. Ist ω eine p-Multilinearform, so ist für jedes feste i die Abbildung $(v_1, \ldots, v_{p-1}) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_{p-1}, b_i)$ eine $p-1$-Multilinearform. Ihre Koordinaten sind $\omega_{i_1,\ldots,i_{p-1},i}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_{p-1} \leq n$. Also nach Induktionsannahme gilt:

$$\omega(v_1, \ldots, v_{p-1}, b_i) = \sum_{i_1,\ldots,i_{p-1}} \omega_{i_1,\ldots,i_{p-1},i} x_1^{i_1} \cdots x_{p-1}^{i_{p-1}} \tag{1}$$

Da aber die Abbildung $v \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_{p-1}, v)$ linear ist, folgt

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) = \sum_i \omega(v_1, \ldots, v_{p-1}, b_i) x_p^i.$$

Die Behauptung folgt dann aus (1) nach Umbenennen des Summationsindex i zu i_p. □

Sei eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V weiterhin festgelegt. Wir führen spezielle Multilinearformen $\beta^{i_1,\ldots,i_p}$ $1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n$ ein:

$$\beta^{i_1,\ldots,i_p}(v_1, \ldots, v_p) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p},$$

wobei, wie im Hilfssatz 1.1, x_j^i die i-te Koordinate von v_j bezüglich der Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bezeichnet. Diese Abbildungen sind tatsächlich multilinear, da jede Koordinaten Abbildung $v_j \mapsto x_j^i$ linear ist. Nimmt man Basisvektoren anstelle von $v_1, \ldots, v_p$, so gilt

$$\beta^{i_1,\ldots,i_p}(b_{j_1}, \ldots, b_{j_p}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i_1 = j_1, \ldots, i_p = j_p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Im Fall $p = 1$ ist $\{\beta^1, \ldots, \beta^n\}$ die zu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ duale Basis von V^*. Im allgemeinen Fall hat man den

Satz 1.2. *Die Multilinearformen $\beta^{i_1,\ldots,i_p}$ bilden eine Basis von $T^p(V^*)$. Insbesondere ist* $\dim(T^p(V^*)) = n^p$.

Beweis: Für jede p-Multilinearform $\omega \in T^p(V^*)$ gilt

$$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} \beta^{i_1,\dots,i_p},$$

wie man durch Vergleich der Koordinaten der Multilinearformen auf beider Seiten der Gleichung, unter Benutzung von (2), nachweist. Also bilden $\beta^{i_1,\dots,i_p}$ ein Erzeugendensystem von V. Es bleibt zu zeigen, dass sie auch linear unabhängig sind: verschwindet eine Linearkombination $\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} \lambda_{i_1,\dots,i_p} \beta^{i_1,\dots,i_p}$ so verschwindet insbesondere $\omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_p})$ für beliebige $j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt nach (2), dass $\lambda_{j_1,\dots,j_p} = 0$. □

1.2. **Tensorprodukte.** Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K.

Ist ω eine p-Multilinearform auf V und η eine q-Multilinearform auf V, so können wir eine $p+q$-Multilinearform $\omega \otimes \eta$ definieren:

$$(\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \omega(v_1, \dots, v_p)\eta(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}).$$

Die Multilinearform $\omega \otimes \eta$ ist das *Tensorprodukt* der Multilinearformen ω, η.

Satz 1.3. *Sei eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V gegeben. Dann sind die Koordinaten von $\omega \otimes \eta$ Produkte von Koordinaten von ω und von η:*

$$(\omega \otimes \eta)_{i_1,\dots,i_{p+q}} = \omega_{i_1,\dots,i_p} \eta_{i_{p+1},\dots,i_{p+q}}\,.$$

Um diesen Satz zu beweisen, setzt man $v_1 = b_{i_1}, \dots, v_{p+q} = b_{i_{p+q}}$ in der Definition des Tensorproduktes.

Hilfssatz 1.4. *Für $p, q = 1, 2, \dots$, $\omega, \omega' \in T^p(V^*)$, $\eta, \eta' \in T^q(V^*)$, $\lambda, \lambda' \in K$ gilt:*
(i) $\omega \otimes (\lambda\eta + \lambda'\eta') = \lambda(\omega \otimes \eta) + \lambda'(\omega \otimes \eta')$
(ii) $(\lambda\omega + \lambda'\omega') \otimes \eta = \lambda(\omega \otimes \eta) + \lambda'(\omega' \otimes \eta)$
In anderen Worten, das Tensorprodukt ist eine bilineare Abbildung

$$T^p(V^*) \times T^q(V^*) \to T^{p+q}(V^*)$$

Beweis: Nach Einsetzen der Definitionen reduzieren sich diese Eigenschaften auf die Distributivität des Produktes in K. □

Hilfssatz 1.5. *Für alle $\omega \in T^p(V^*)$, $\eta \in T^q(V^*)$ und $\zeta \in T^r(V^*)$ gilt $(\omega \otimes \eta) \otimes \zeta = \omega \otimes (\eta \otimes \zeta)$.*

Beweis: Sei $m = p + q + r$. Es gilt

$$\begin{aligned}((\omega \otimes \eta) \otimes \zeta)(v_1, \ldots, v_m) &= (\omega \otimes \eta)(v_1, \ldots, v_{p+q})\zeta(v_{p+q+1}, \ldots, v_m) \\ &= \omega(v_1, \ldots, v_p)\eta(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q})\zeta(v_{p+q+1}, \ldots, v_m) \\ &= \omega(v_1, \ldots, v_p)(\eta \otimes \zeta)(v_{p+1}, \ldots, v_m) \\ &= (\omega \otimes (\eta \otimes \zeta))(v_1, \ldots, v_m).\end{aligned}$$

□

Es ist bequem $T^0(V^*) = K$ zu setzen und das Tensorprodukt eines Skalars λ in $T^0(V^*)$ mit einer Multilinearform ω (oder umgekehrt) als die skalare Multiplikation zu definieren: $\lambda \otimes \omega := \lambda\omega$, $\omega \otimes \lambda := \lambda\omega$. Das Tensorprodukt von Skalaren wird als das Produkt in K definiert. Mit diesen Konventionen gelten die Eigenschaften von Hilfssatz 1.4 und Hilfssatz 1.5 auch wenn p, q oder $r = 0$ (verifiziere dies).

Nach der Assoziativität (Hilfssatz 1.5) des Tensorproduktes, können wir m-fache Tensorprodukte

$$\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_m = ((\omega_1 \otimes \omega_2) \otimes \cdots) \otimes \omega_m$$

unmissverständlich ohne Klammer schreiben.

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in V^*$ Linearformen auf V so haben wir insbesondere das p-fache Tensorprodukt $\omega = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$. Die p-Multilinearform ω ist durch die Formel

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) = \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_p(v_p) \tag{3}$$

gegeben.

Satz 1.6. *Jede p-Multilinearform auf V lässt sich als Summe von p-fachen Tensorprodukte von Linearformen schreiben.*

Bemerkung. Die Darstellung einer Multilinearform als Summe von Tensorprodukten von Linearformen ist nicht eindeutig.

Satz 1.6 folgt aus dem präziseren aber basisabhängigen Resultat:

Hilfssatz 1.7. *Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V, $\beta^1, \dots, \beta^n$ die duale Basis von V^*. Dann bilden, für jedes $p = 1, 2, \dots$, die n^p Multilinearformen $\beta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta^{i_p}$ eine Basis von $T^p(V^*)$.*

Beweis: Es gilt nach (3)

$$\beta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta^{i_p}(b_{j_1}, \dots, b_{j_p}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

Also sind $\beta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta^{i_p}$ die in (2) definierten Multilinearformen, die nach Satz 1.2 eine Basis von $T^p(V^*)$ bilden. □

Beweis von Satz 1.6: Wir schreiben

$$\begin{aligned} \omega &= \sum \omega_{i_1,\dots,i_p}(\beta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta^{i_p}) \\ &= \sum (\omega_{i_1,\dots,i_p}\beta^{i_1}) \otimes \cdots \otimes \beta^{i_p}. \end{aligned}$$

Somit ist ω eine Summe von Tensorprodukte von Linearformen. □

Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so haben wir die zu f duale Abbildung f^* als die lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ definiert, so dass $(f^*\alpha)(v) = \alpha(f(v))$, $v \in V$,$\alpha \in W^*$. Für Zusammensetzung von Abbildungen gilt $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Wählt man Basen von V und W, so ist die Matrix von f^* bezüglich der dualen Basen gleich der Transponierten der Matrix von f.

Diese Konstruktion hat folgende Verallgemeinerung:

Definition. Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung so ist die Abbildung $f^* : T^p(W^*) \to T^p(V^*)$ durch

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_p)), \qquad \omega \in T^p(W^*), \quad v_j \in V,$$

definiert.

Beispiele.

1. Für $p = 1$ ist f^* die zu f duale Abbildung.

2. Ist ϕ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum V und $f : V \to V$ eine lineare Selbstabbildung von V, so ist $f^*\phi(v_1, v_2) = \phi(f(v_1), f(v_2))$. Also ist f genau dann bezüglich ϕ orthogonal wenn $f^*\phi = \phi$.

Satz 1.8. (i) *f^* ist linear.*
(ii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus den Definitionen □

Satz 1.9. *Sei $f : V \to V'$ und $A = (a^i{}_j)$ die Matrix von f bezüglich Basen $B = \{b_i\}$ von V und $B' = \{b'_i\}$ von V': $f(b_i) = \sum_j a^j{}_i b'_j$. Für eine p-Multilinearform ω' auf V' mit Koordinaten $\omega'_{j_1,\dots,j_p}$ bezüglich B', sind die Koordinaten von $\omega := f^*\omega'$ bezüglich B durch*

$$\omega_{i_1,\dots,i_p} = \sum_{j_1,\dots,j_p} \omega'_{j_1,\dots,j_p} a^{j_1}{}_{i_1} \cdots a^{j_p}{}_{i_p}$$

gegeben.

2. Alternierende Multilinearformen und äusseres Produkt

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass K Charakteristik 0 hat: das bedeutet, dass für alle natürlichen Zahlen N, das entprechende Skalar $N = 1 + \cdots + 1 \in K$ (N Summanden $= 1$) nicht 0 ist. Beispiele sind $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, nicht aber endliche Körper.

2.1. Alternierende Multilinearformen.

Definition. Eine p-Multilinearform ω auf V heisst *alternierend* (auch: schiefsymmetrisch) falls

$$\omega(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p) = -\omega(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_p),$$

für alle $v_1, \dots, v_p \in V$ und alle $1 \le i \le p-1$.

Statt "alternierende p-Multilinearform" sagen wir im folgenden kurz *p-Form*. Linearkombinationen von p-Formen sind wieder alternierend. Also bilden p-Formen einen Unterraum von $T^p(V^*)$. Er wird mit $\wedge^p(V^*)$ bezeichnet, wobei $\wedge^0(V^*) = K$ gesetzt wird.

Also ist $\wedge^1(V^*) = V^*$ und $\wedge^2(V^*)$ ist der Raum der schiefsymmetrischen Bilinearformen.

Beispiel. Die Determinante $\det(v_1, \ldots, v_n)$ (der Matrix mit Spalten $v_1, \ldots, v_n$) ist eine alternierende n-Multilinearform auf K^n.

Hilfssatz 2.1. *Folgende Aussagen über $\omega \in T^p(V^*)$ sind äquivalent.*
(i) *ω ist alternierend.*
(ii) *Für jede Permutation $\sigma \in S_p$ und alle $v_1, \ldots, v_p \in V$ gilt:*

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_p)$$

.
(iii) *$\omega(v_1, \ldots, v_p) = 0$ falls zwei der Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ gleich sind.*

Beweis: Aus (i) folgt (ii): (i) bedeutet, dass (ii) für Transpositionen benachbarter Elementen gilt. Aber jede Permutation σ ist die Zusammensetzung von k solchen Transpositionen, wobei das Signum durch $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^k$ gegeben wird. Also folgt (ii) nach wiederholter Anwendung von (i).

Aus (ii) folgt (iii): ω erfülle (ii). Seien $v_1, \ldots, v_p$ mit $v_i = v_j$ für $i \neq j$ und sei σ die Transposition von i und j: $\sigma(k) = k$ für alle $k \neq i, j$, $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$. Da $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ gilt nach (ii), $\omega(v_1, \ldots, v_p) = -\omega(v_1, \ldots, v_p)$, oder $(1+1)\omega(v_1, \ldots, v_p) = 0$. Da $2 \neq 0$ mit unserer Annahme über K folgt $\omega(v_1, \ldots, v_p) = 0$.

Aus (iii) folgt (i): Sei ω eine p-Multilinearform, die (iii) erfüllt. Dann haben wir für $1 \leq i \leq n-1$, wegen der Multilinearität,

$$\begin{aligned} \omega(\ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots) + \omega(\ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots) \;=\; & \omega(\ldots, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, \ldots) \\ & -\omega(\ldots, v_i, v_i, \ldots) \\ & -\omega(\ldots, v_{i+1}, v_{i+1}, \ldots). \end{aligned}$$

In den Ausdrücken auf der rechten Seite sind jeweils zwei Argumente gleich, also verschwinden sie. Somit ist $\omega(\ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots) = -\omega(\ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots)$ und ω ist alternierend. □

Korollar 2.2. *$\wedge^p(V^*) = \{0\}$ für alle $p > \dim(V)$.*

Beweis: Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Ist ω eine p-Form mit $p > n$, so verschwinden alle Koordinaten $\omega(b_{i_1}, \ldots, b_{i_p})$ nach Hilfssatz 2.1 (iii), da $b_{i_1}, \ldots, b_{i_p}$ nicht alle verschieden sein können. Nach Hilfssatz 1.1 ist dann $\omega = 0$. □

Der *Alternierungsoperator* Alt: $T^p(V^*) \to T^p(V^*)$ ist[2]:

$$\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})$$

Alt ist eine lineare Selbstabbildung von $T^p(V^*)$. Folgendes Resultat zeigt, dass sie eine Projektion auf $\wedge^p(V^*)$ ist.

Proposition 2.3. *Sei $\omega \in T^p(V^*)$. Dann ist $\mathrm{Alt}(\omega) \in \wedge^p(V^*)$ und es gilt $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$ genau dann, wenn $\omega \in \wedge^p(V^*)$.*

Beweis: Sei s_i die Transposition von i und $i+1$. Dann ist

$$\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_p) = \sum_{\sigma} \frac{1}{p!} \mathrm{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma \circ s_i(1)}, \ldots, v_{\sigma \circ s_i(n)}).$$

Da aber $\sigma \to \sigma \circ s_i$ eine bijektive Abbildung von S_p nach S_p ist (die Umkehrabbildung ist die Abbildung selbst, da $s_i \circ s_i = \mathrm{id}$) und $(\sigma) = -\mathrm{sign}(\sigma \circ s_i)$, haben wir nach der Substitution $\sigma' = \sigma \circ s_i$,

$$\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_p) = -\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_p)$$

Also ist $\mathrm{Alt}(\omega)$ alternierend.

Ist $\omega = \mathrm{Alt}(\omega)$, so ist ω insbesondere, nach dem eben Bewiesenen, alternierend. Umgekehrt, sei ω alternierend. Dann sind alle $p!$ Terme in der Summe, die Alt definiert, nach Hilfssatz 2.1 gleich $\omega(v_1, \ldots, v_p)$. Also ist $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$. □

Insbesondere können wir p-Formen aus 1-Formen erzeugen: wir definieren für Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in V^*$

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = p!\, \mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p)$$

Nach Einsetzen der Definitionen erhält man die Formel

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)(v_1, \ldots, v_p) &= \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha_p(v_{\sigma(p)}) \\ &= \det\left((\alpha_i(v_j))\right). \end{aligned}$$

Beispiel. $\alpha \wedge \beta\,(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)$.

[2]Die Annahme über K ist nötig, damit $1/p!$ in K definiert ist.

Hilfssatz 2.4. *Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ Linearformen auf V.*

(i) $\alpha_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\sigma(p)} = \operatorname{sign}(\sigma)\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$ *für alle Permutationen* $\sigma \in S_p$.

(ii) *Für alle linearen Abbildungen* $f : W \to V$ *gilt* $f^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = f^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\alpha_p)$

(iii) $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = 0$ *genau dann, wenn* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *linear abhängig sind.*

Beweis: (i) Es gilt

$$\alpha_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\sigma(p)}(v_1, \ldots, v_p) = \det\big((\alpha_{\sigma(i)}(v_j))\big) = \operatorname{sign}(\sigma) \det\big((\alpha_i(v_j))\big),$$

da die Determinante, als Funktion der Zeilen der Matrix aufgefasst, eine alternierende Multilinearform ist. (ii) folgt aus

$$\begin{aligned} f^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)(v_1, \ldots, v_p) &= \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p(f(v_1), \ldots, f(v_p)) \\ &= \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^p \alpha_j(f(v_{\sigma(j)})) \\ &= \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^p f^*(\alpha_j)(v_{\sigma(j)}) \\ &= f^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\alpha_p)(v_1, \ldots, v_p). \end{aligned}$$

(iii) wird als Übung überlassen. □

Satz 2.5. *Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V, $\{\beta^1, \ldots, \beta^n\}$ die duale Basis von V^*. Dann bilden für $p = 1, \ldots, n$ die $\binom{n}{p}$ p-Formen*

$$\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}, \qquad 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n, \tag{5}$$

eine Basis von $\wedge^p(V^*)$. Sind $\omega_{i_1,\ldots,i_p}$ die Koordinaten einer p-Form $\omega \in \wedge^p(V^*)$, so gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}. \tag{6}$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die zweite Aussage, die insbesondere impliziert, dass die p-Formen $\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}$ ein Erzeugendensystem bilden.

Wir vergleichen die Koordinaten der p-Formen auf beiden Seiten der Gleichung (6). Dafür ist folgende Bemerkung nützlich.

Hilfssatz 2.6. *Seien* $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ *und* $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$. *Dann ist*

$$\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}(b_{j_1}, \ldots, b_{j_p}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist nämlich genau dann von 0 verschieden, wenn $j_1, \ldots, j_p$ eine Permutation von $i_1, \ldots, i_p$ ist. Da aber beide Folgen geordnet sind, muss die Permutation die Identität sein. Der Hilfssatz ist bewiesen.

Es folgt, dass

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1, \ldots, i_p} \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}(v_1, \ldots, v_p), \tag{7}$$

falls $v_1 = b_{j_1}, \ldots, v_p = b_{j_p}$, mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$. Da aber beide Seiten alternierend sind, gilt das auch ohne die Einschränkung der Ordung der j_k. Somit sind die Koordinaten beider Seiten gleich und (6) ist bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, dass die p-Formen (5) linear unabhängig sind. Das wird genau wie in Satz 1.2 unter Verwendung von Hilfssatz 2.6 und(7) bewiesen. □

Ist V n-dimensional, so ist $\wedge^n(V)$ eindimensional. Eine nichtverschwindende n-Form heisst *Volumenform*.

Satz 2.7. *Sei* $n = \dim(V)$ *und* $\omega \in \wedge^n(V)$. *Dann gilt*

$$f^*(\omega) = \det(f)\,\omega.$$

Beweis: Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V, $A = (a^i_j)$ die Matrix von f bezüglich dieser Basis. Nach Definition ist $\det(f) = \det(A)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f^*(\omega)(b_1, \ldots, b_n) &= \omega(f(b_1), \ldots, f(b_n)) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_n} a^{j_1}_1 \cdots a^{j_n}_n \omega(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}). \end{aligned}$$

Da

$$\omega(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\sigma)\omega(b_1, \ldots, b_n), & j_1 = \sigma(1), \ldots, j_n = \sigma(n), \text{ mit } \sigma \in S_n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

haben wir $f^*(\omega)(b_1, \ldots, b_n) = \det(A)\omega(b_1, \ldots, b_n)$. □

2.2. **Das äussere Produkt.**

Definition. Sei ω eine p-Form auf V und η eine q-Form auf V. Dann definieren wir das *äussere Produkt* $\omega \wedge \eta \in \wedge^{p+q}(V^*)$ durch

$$\omega \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Für $\omega,\ \eta \in \wedge^1(V^*) = V^*$ ist $p! = q! = 1$ also ist diese Definition mit derjenigen in 2.1 konsistent. Die Bedeutung der (übrigens konventionsabhängigen) Fakultäten wird durch folgenden Satz, erklärt, der als alternative Definition des äusseren Produkts angesehen werden kann.

Proposition 2.8. *Sei $S_{p,q} \subset S_{p+q}$ die Teilmenge der "Kartenmischpermutationen":*

$$S_{p,q} = \{\sigma \in S_{p+q} \,|\, \sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \text{ und } \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)\}$$

Für $\omega \in \wedge^p(V^*)$, $\eta \in \wedge^q(V^*)$ und $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$ gilt dann:

$$\omega \wedge \eta(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Beweis: Die Summe über alle Permutationen in $\omega \wedge \eta$, die Alt definiert, zerlegen wir zuerst in einer Summe von Termen, die von Teilmengen $A \subset \{1, \ldots, p+q\}$ mit p Elementen indiziert sind. Im von A indizierten Term fassen wir alle Permutationen σ zusammen, für die $\sigma(i) \in A$ für $1 \leq i \leq p$. Es bezeichne $S_{p+q}(A)$ die Menge aller solchen Permutationen. Für sie gilt, dass $\sigma(p+1), \ldots, \sigma(p+q)$ im Komplement A^c sind. Da ω und η alternierend sind, liefern alle Permutationen in $S_{p+q}(A)$ (davon gibt es $p!q!$) denselben Beitrag zur Summe. Dass die Vorzeichen stimmen, sieht man am besten in dem man Permutationen als Zusammensetzung von Transpositionen schreibt; Permutationen in $S_{p+q}(A)$ die sich um eine Transposition unterscheiden haben ein verschiedenes Vorzeichen $\operatorname{sign}(\sigma)$. Verwendet man die Tatsache, dass ω und η alternierend sind, so kommt ein Vorzeichen wieder vor, und die beiden Permutationen geben denselben Beitrag. Zudem gibt es in $S_{p+q}(A)$ genau eine Permutation in $S_{p,q}$: wenn $A = \{i_1 < \cdots < i_p\}$, $A^c = \{j_1 < \cdots < j_q\}$, setze $\sigma(k) = i_k$ für $k \leq p$ und $\sigma(k) = j_{k-p}$ für $k > p$. Also haben wir

$$\begin{aligned}(p+q)!&\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\ &= p!\, q! \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).\end{aligned}$$

□

Satz 2.9. *Das äussere Produkt* $\wedge : \wedge^p(V^*) \times \wedge^q(V^*) \to \wedge^{p+q}(V^*)$ *ist eine bilineare Abbildung. Es gilt die Assoziativität*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$$

für $\omega \in \wedge^p(V^*)$, $\eta \in \wedge^q(V^*)$, $\zeta \in \wedge^r(V^*)$.

Beweis: Die Bilinearität folgt aus der Definition, denn Alt ist linear und das Tensorprodukt ist bilinear (Hilfssatz 1.4). Wegen der Bilinearität reicht es, die Assoziativität für Basiselementen $\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}$ mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ (Siehe Satz 2.5) zu beweisen. Diese folgt aus der Identität:

$$(\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}) \wedge (\beta^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_{p+q}}) = \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_{p+q}}, \tag{8}$$

wobei angenommen wird, dass $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ und $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$.

Um diese Identität zu beweisen, setzen wir als Argumenten der $(p+q)$-Formen auf beiden Seiten Basisvektoren $b_{j_1}, \ldots, b_{j_{p+q}}$ mit geordneten Indizes $j_1 < \cdots < j_{p+q}$ ein. Da beide Seiten multilinear und alternierend sind, ist dies genug. Das äussere Produkt auf der linken Seite schreiben wir nach Proposition 2.8 als Summe über $S_{p,q}$. Nach Hilfssatz 2.6 ist die linke Seite nur dann verschieden von null, wenn $j_1, \ldots, j_{p+q}$ eine Permutation von $i_1, \ldots, i_{p+q}$ sind; zur Summe trägt dann nur eine Permutation bei, nämlich die Permutation $\sigma \in S_{p,q}$ mit $i_1 = \sigma(j_1)$, ... $i_{p+q} = \sigma(j_{p+q})$. Also ist für $j_1 < \cdots < j_{p+q}$,

$$\begin{aligned}(\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}) \wedge (\beta^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_{p+q}})(b_{j_1}, \ldots, b_{j_{p+q}}) \\ = \begin{cases} \operatorname{sign}(\sigma), & \text{wenn} \quad i_\alpha = \sigma(j_\alpha), \qquad \forall \alpha = 1, \ldots p+q, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Das selbe gilt für die rechte Seite: der Ausdruck ist nur dann nicht verschwindend, wenn $i_\alpha = \sigma(j_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots p+q$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_{p+q}}(b_{j_1}, \cdots, b_{j_{p+q}}) &= \operatorname{sign}(\sigma)\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_{p+q}}(b_{\sigma(j_1)}, \cdots, b_{\sigma(j_{p+q})}) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma).\end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Standard-Basis. Dann ist $\wedge^0(V^*) = \mathbb{R}$ mit Basis 1; $\wedge^1(V^*) = V^*$ mit Basis ϵ^1, ϵ^2, ϵ^3, der zur Standard-Basis dualen Basis; $\wedge^1(V^*)$ ist dreidimensional mit Basis $\phi_1 = \epsilon^2 \wedge \epsilon^3$, $\phi_2 = -\epsilon^1 \wedge \epsilon^3$, $\phi_3 = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2$; $\wedge^3(V^*)$ ist eindimensional mit Basis $\omega = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \epsilon^3$. Die Multiplikationsregeln sind dann: $1 \wedge x = x \wedge 1 = x$ für alle x; $\epsilon^i \wedge \epsilon^j = \phi_k = -\epsilon^j \wedge \epsilon^i = \phi_k$ für zyklische Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$; $\epsilon^i \wedge \phi_i = -\phi_i \wedge \epsilon^i = \omega$, $i = 1, 2, 3$; alle anderen Produkte von Basiselementen verschwinden.

Also haben wir für das Produkt $\wedge^1(V^*) \times \wedge^1(V^*) \to \wedge^2(V^*)$ folgende Formel: für $\alpha = \sum_{i=1}^3 x_i \epsilon^i$, $\beta = \sum_{i=1}^3 y_i \epsilon^i$, gilt

$$\alpha \wedge \beta = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\phi_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\phi_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\phi_3.$$

Wir erkennen die Formel für das *Vektorprodukt* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Satz 2.10. *Seien $\omega \in \wedge^p(V^*)$, $\eta \in \wedge^q(V^*)$.*
(i) $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$.
(ii) *Für alle lineare Abbildungen $W \to V$ gilt $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$*

Beweis: Da das äussere Produkt bilinear und f^* linear ist, genügt es, diese Aussagen für Basiselemente zu zeigen. Die Behauptungen folgen dann aus Hilfssatz 2.4 unter Verwendung von (8). □

2.3. **Orientierung.** Sei hier $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler *reeller* Vektorraum. Wir führen eine Äquivalenzrelation auf die Menge aller geordneten Basen von V. Zwei geordnete Basen $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ sind äquivalent ($B \sim B'$) wenn die Determinante der Matrix des Basiswechsels positiv ist. Es ist einfach nachzuweisen, dass diese tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Eine *Orientierung* eines reellen Vektorraums V ist eine Äquivalenzklasse von geordneten Basen. Ein *orientierter Vektorraum* ist ein reeller Vektorraum versehen mit einer Orientierung. Die Basen der Orientierung nennen wir dann *positiv orientiert*, die anderen *negativ orientiert*.

Also definiert jede geordnete Basis von V eine Orientierung und zwei Basen definieren die selbe Orientierung genau dann, wenn die Matrix des Basiswechsels positive Determinante hat. Jeder reelle endlichdimensionale Vektorraum $\neq \{0\}$ hat genau zwei Orientierungen. Nämlich, für jede Wahl einer geordneten Basis, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist jede andere Basis entweder äquivalent zu $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ oder zu $\{-b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Satz 2.11. *Sei V ein orientierter reeller Vektorraum. Dann gibt es eine Volumenform ω, so dass $\omega(b_1, \ldots, b_n) > 0$ für positiv orientierte Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\omega(b_1, \ldots, b_n) < 0$ für negativ orientierte Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}$positiv orientiert ist.*

Ist umgekehrt eine Volumenform ω auf einem reellen Vektorraum gegeben, so gibt es genau eine Orientierung von V, so dass $\omega(b_1, \ldots, b_n) > 0$ für positiv orientierte Basen. Zwei Volumenformen ω, ω' definieren die selbe Orientierung genau dann, wenn $\omega = \lambda\omega'$, mit $\lambda > 0$.

Beweis: Sei V orientiert und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine positiv orientierte Basis.

Sei $\{\beta^1, \ldots, \beta^n\}$ die duale Basis von V^* und setze $\omega = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n$. Dann ist $\omega(b_1, \ldots, b_n) = 1 > 0$. Ist $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ eine andere Basis, wobei $b'_i = \sum_j a_i^j b_j$ so ist $\omega(b'_1, \ldots, b'_n) = \det\big((a_j^i)\big)\omega(b_1, \ldots, b_n)$ genau dann positiv wenn $B \sim B'$.

Aus obigem Argument folgt auch, dass für jede Volumenform ω auf einem reellen Vektorraum die Basen für welche $\omega(b_1, \ldots, b_n) > 0$ eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ bilden. Also definiert eine Volumenform dadurch eine Orientierung.

Die letzte Aussage des Satzes ist offensichtlich. □

2.4. **Plücker Koordinaten.** Als weitere Anwendung wollen wir eine Parametrisierung der Menge $\mathrm{Gr}(k, n)$ ("Grassmann Varietät") aller k-dimensionalen Unterräume von K^n geben ($0 \leq k \leq n$).

Ein k-dimensionaler Unterraum $U \subset K^n$ kann als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems beschrieben werden:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x^1 + \cdots + a_{1,n}x^n &= 0 \\ &\cdots \\ a_{n-k,1}x^1 + \cdots + a_{n-k,n}x^n &= 0, \end{aligned}$$

wobei die Matrix (a_{ij}) Rang $n - k$ hat (d.h. ihre Zeilen sind linear unabhängig). Definiert man Linearformen α_i auf K^n durch $\alpha_i(x) = \sum_j a_{ij}x^j$, so können wir dieses Gleichungsystem in der Form

$$\alpha_i(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n - k.$$

schreiben. Die Linearformen α_i sind linear unabhängig. Es folgt nach Hilfssatz 2.4 dass $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k}$ eine nicht verschwindende $(n - k)$-Form ist.

Das nächste Resultat zeigt, dass diese $(n - k)$-Form, bis auf Multiplikation mit einem Skalar, nur von U und nicht von der Wahl des Gleichungssystems abhängt, und dass U eindeutig durch $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k}$ bestimmt wird.

Satz 2.12. *Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ linear unabhängige Linearformen auf K^n und $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ ebenfalls. Dann haben die zwei Gleichungssysteme*

$$\alpha_i(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n - k,$$

und

$$\beta_i(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n - k,$$

genau dann die selbe Lösungsmenge U, wenn $c \in K - \{0\}$ existiert mit $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k} = c\,\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_{n-k}$.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, die beide Systeme haben die selbe k-dimensionale Lösungsmenge U. Wir sagen dass eine Linearform α auf U verschwindet wenn $\alpha(u) = 0$ für alle $u \in U$. Dann verschwinden nebst $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ auch alle Linearkombinationen von $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ auf U. Zuedem gilt, dass jede auf U verschwindende Linearform eine Linearkombination von $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ ist. Hätten man nämlich mehr als $n-k$ linear unabhängige Linearformen, die auf U verschwinden, so wäre die Dimension von U kleiner als k. Insbesondere sind also $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ Linearkombinationen von $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$. Es folgt dass $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k}$ eine Linearkombination der $(n-k)$-Formen $\beta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{i_{n-k}}$. Nach Hilfssatz 2.4 verschwinden diese $(n-k)$-Formen ausser wenn $i_j = \sigma(j)$ für eine Permutation $\sigma \in S_{n-k}$ und sind in diesem Fall proportional zu $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_{n-k}$. Es folgt, dass

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k} = c\, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_{n-k}, \tag{9}$$

mit $c \in K$. Die selbe Überlegung mit α_i und β_i ausgetauscht zeigt, dass $c \neq 0$ ist.

Umgekehrt, sei die Gleichung (9) erfüllt, und seien U_1, U_2 die Lösungsmengen von $\alpha_i(x) = 0$ bzw. $\beta_i(x) = 0$. Wir erweitern die linear unabhängigen Linearformen $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ zu einer Basis $\beta_1, \ldots, \beta_n$ von $(K^n)^*$. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die dazu duale Basis von K^n, so dass $\beta_i(b_j) = \delta_{ij}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_{n-k}(b_1, \ldots, b_{i-1}, u, b_{i+1}, \ldots, b_{n-k}) &= \beta_1(b_1) \cdots \beta_i(u) \cdots \beta_{n-k}(b_{n-k}) \\ &= \beta_i(u) \end{aligned}$$

Anderseits gilt, dass $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k}$ verschwindet wenn ein Argument in U_1 ist. Also hat man für $u \in U_1$,

$$\beta_i(u) = \frac{1}{c}\, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k}(b_1, \ldots, b_{i-1}, u, b_{i+1}, \ldots, b_{n-k}) = 0,$$

für alle i, also $u \in U_2$. Wir haben gezeigt, dass $U_1 \subset U_2$. Da $\dim(U_1) = \dim(U_2)$, folgt $U_1 = U_2$. $\square$

Eine p-Form heisst *zerlegbar* falls sie sich als äusseres Produkt von p Linearformen schreiben lässt.

Wir haben also eine, bis auf skalare Multiplikation eineindeutige, Beziehung zwischen k-dimensionale Unterräume von K^n und zerlegbare $(n-k)$-Formen auf K^n. Diese Beziehung kann expliziter beschrieben werden, wenn wir die Basis $\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_{n-k}}$ $(i_1 < \cdots < i_{n-k})$ von $\wedge^{n-k}\big((K^n)^*\big)$ verwenden, wobei $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}$ die zur Standardbasis duale Basis ist.

Die *Plückerkoordinaten* $z_{i_1,\ldots,i_{n-k}}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-k} \leq n$ eines durch das System

$$\alpha_i(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-k,$$

gegebenen Unterraums $U \in \mathrm{Gr}(k,n)$ sind dann die Koordinaten von $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k}$ bezüglich dieser Basis:

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_{n-k}} z_{i_1,\ldots,i_{n-k}} \epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_{n-k}}$$

Nach Satz 2.12 sind diese Koordinaten bis auf Multiplikation aller Koordinaten mit einem Skalar definiert. Ist $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\epsilon^j$ so erhalten wir

$$z_{i_1,\ldots,i_{n-k}} = \sum_{\sigma \in S_{n-k}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(i_1)} \cdots a_{n-k,\sigma(i_{n-k})}.$$

Also haben wir das Resultat:

Die Plückerkoordinate $z_{i_1,\ldots,i_{n-k}}$ eines als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $\sum_{j=1}^n a_{ij}x^j = 0$ gegebenen Unterraums ist die Determinante der Matrix, die aus den Spalten $i_1, \ldots, i_{n-k}$ von $A = (a_{ij})$ besteht.

Beispiele.

1. Eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ wird durch eine Gleichung $ax^1 + bx^2 = 0$ gegeben, wobei a und b nicht beide 0 sind. Also kann man die Menge aller Geraden durch zwei bis auf skalare Multiplikation bestimmte Zahlen a, b parametrisieren. Diese sind gerade die Plückerkoordinaten z_1, z_2.
2. Eine Ebene in K^4 wird durch ein System

$$\begin{aligned} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + a_{14}x^4 &= 0, \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + a_{24}x^4 &= 0, \end{aligned}$$

gegeben. Die Plückerkoordinaten sind dann

$$z_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}, \ldots 1 \leq i < j \leq 4$$

Diese Koordinaten sind nicht unabhängig. Man kann zeigen, dass sie die *Plückerrelation* $z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{14}z_{23} = 0$ erfüllen, und dass alle Lösungen dieser quadratischen Gleichung Plückerkoordinaten eines Elementes von $\mathrm{Gr}(2,4)$ sind. Diese ist eine allgemeine Tatsache: die Koordinaten von zerlegbaren p-Formen sind die Lösungen von einem System von quadratischen Gleichung. Eine andere Charakterisierung dieser p-Formen wird in den Übungen diskutiert.