Prof. Dr. K. Mathiak
Dr. W. Oelke

Lineare Ungleichungen

Braunschweig, Juli 1994

Prof. Dr. K. Mathiak
Technische Universität Braunschweig
Institut für Algebra und Zahlentheorie
Pockelsstraße 14
38106 Braunschweig

Dieses Skript wurde mit dem LaTeX 2$_\varepsilon$-Makropaket $\mathcal{AZ}$-LaTeX 2$_\varepsilon$ erstellt.
Satz: Dr. W. Oelke, Institut für Algebra und Zahlentheorie

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Geordnete Ringe **5**

Kapitel 2. Eliminationsverfahren **9**

Kapitel 3. Duale Vektorräume **13**

Kapitel 4. Konvexe Kegel **19**

Kapitel 5. Das Motzkin-Verfahren **31**

1. Das Motzkin-Verfahren für $Ax \leq 0,\ x \geq 0$ **36**

2. Das Motzkin-Verfahren für $Ax = 0,\ x \geq 0$ **38**

3. Das Motzkin-Verfahren für $Ax \leq 0$ **39**

Kapitel 6. Das Lemma von Farkas **43**

Kapitel 7. Affine Räume über geordneten Körpern **51**

Kapitel 8. Inhomogene lineare Ungleichungen **57**

Kapitel 9. Lineares Programmieren **63**

Kapitel 10. Die Simplexmethode **67**

Kapitel 11. Duale Programme **79**

Kapitel 12. Diophantische lineare Ungleichungen **89**

Anhang A. Aufgaben **97**

Literatur **101**

Index **103**

KAPITEL 1

Geordnete Ringe

Eine Menge H heißt *halbgeordnet* (oder teilweise geordnet), wenn auf H eine Relation $\leq$ mit folgenden Eigenschaften definiert ist:

(1) $\alpha \leq \alpha$

(2) $\alpha \leq \beta \ \wedge \ \beta \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leq \gamma$ (Transitivität)

(3) $\alpha \leq \beta \ \wedge \ \beta \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in H$. Gilt außerdem

(4) $\alpha \leq \beta \ \vee \ \beta \leq \alpha$

für alle $\alpha, \beta \in H$, so heißt H *linear geordnet*.

Beispiel.

(1) Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ (Menge aller Teilmengen einer Menge M) ist bezüglich der Inklusion $\subseteq$ halbgeordnet.

(2) Sei $H = \mathbb{Z}^n$. Definiere

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n) : \Longleftrightarrow \ \forall\, i : \alpha_i \leq \beta_i \text{ in } \mathbb{Z}$$

Beispiel: $(1, 2, -1) \leq (2, 2, 0)$. Bezüglich dieser Ordnung sind

$$(1, 2, -1) \quad \text{und} \quad (1, 1, 0)$$

nicht vergleichbar. Also wird H hierdurch nur zu einer halbgeordneten Menge.

(3) Sei $H = \mathbb{Z}^n$. Definiere

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < (\beta_1, \ldots, \beta_n) : \Longleftrightarrow \ \exists\, k \forall\, i < k : (\alpha_i = \beta_i \ \wedge \ \alpha_k < \beta_k)$$

Hierdurch wird H zu einer linear geordneten Menge. Man nennt diese Ordnung die *lexikographische* Anordnung. Bezüglich der lexikographischen Anordnung ist zum Beispiel $(1, 2, -1) > (1, 1, 0)$.

Ein Ring R heißt *geordneter Ring*, wenn gilt

(1) R ist linear geordnet.

(2) $\alpha \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

(3) $0 \leq \alpha \ \wedge \ 0 \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \alpha\beta$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

DEFINITION. Sei R ein geordneter Ring und $\alpha, \beta \in R$. Gilt $\alpha \leq \beta$ und $\alpha \neq \beta$, so schreibt man $\alpha < \beta$.

α heißt *positiv* (*negativ*), wenn $0 < \alpha$ ($\alpha < 0$) ist.

Eigenschaften

(A) $\alpha_1 \leq \beta_1 \ \wedge \ \alpha_2 \leq \beta_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \beta_2$
(Addition von Ungleichungen)
Beweis: Aus $\alpha_1 \leq \beta_1$ folgt $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \alpha_2$ nach (2). Aus $\alpha_2 \leq \beta_2$ folgt analog $\beta_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \beta_2$. Die Behauptung folgt damit aus der Transitivität.

(B) $\alpha_1 < \beta_1 \ \wedge \ \alpha_2 \leq \beta_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \beta_1 + \beta_2$.
Beweis: Nach (A) ist $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \beta_2$. Annahme: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$. Dann ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_1 + \beta_2 \ \wedge \ \alpha_1 + \beta_2 \leq \beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

also $\alpha_1 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_2$ und damit $\alpha_1 = \beta_1$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Durch Induktion folgt

(A′) $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq \beta_1 + \cdots + \beta_n$

(B′) $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 2, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n < \beta_1 + \cdots + \beta_n$

(C) $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0 \ \wedge \ 0 \leq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.
Beweis: Wäre ein α_i positiv, so wäre auch $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ positiv nach (B′).

(D) (1) $\alpha \leq \beta \ \wedge \ 0 \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \alpha\gamma \leq \beta\gamma \ \wedge \ \gamma\alpha \leq \gamma\beta$
(2) $\alpha \leq \beta \ \wedge \ \gamma \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\gamma \geq \beta\gamma \ \wedge \ \gamma\alpha \geq \gamma\beta$
(Umkehrung von $\leq$ bei Multiplikation mit negativen Elementen.)
Beweis:
(1) Aus $0 \leq \beta - \alpha$ und $0 \leq \gamma$ folgt

$$0 \leq (\beta - \alpha)\,\gamma = \beta\gamma - \alpha\gamma \quad \text{also}$$
$$\alpha\gamma \leq \beta\gamma.$$

Analog folgt $\gamma\alpha \leq \gamma\beta$.
(2) Aus $0 \leq \beta - \alpha$ und $0 \leq -\gamma$ folgt

$$0 \leq (\beta - \alpha)\,(-\gamma) = -\beta\gamma + \alpha\gamma \quad \text{also}$$
$$\beta\gamma \leq \alpha\gamma.$$

Analog folgt $\gamma\beta \leq \gamma\alpha$.

SATZ 1.1. *Ist R ein geordneter Ring, so gilt*

$$0 \leq \alpha^2$$

für alle $\alpha \in R$.

BEWEIS. Wir machen eine Fallunterscheidung.
(1) Ist $\alpha \geq 0$, so folgt $\alpha^2 \geq 0$ nach (D1).
(2) Ist $\alpha \leq 0$, so folgt $\alpha^2 \geq 0$ nach (D2). □

DEFINITION. Die Charakteristik eines Ringes R mit 1 ist die kleinste natürliche Zahl k mit $k \cdot 1 = 0$.
Gibt es kein solches k, so heißt R ein Ring der Charakteristik 0.

Folgerung für die Charakteristik
Besitzt ein geordneter Ring R ein Einselement $1 \neq 0$, so ist $1 = 1^2 > 0$, also

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} = n \cdot 1 > 0.$$

Also hat R die Charakteristik 0.

Die Abbildung $\mathbb{N} \to R$, $n \mapsto n \cdot 1$ ist injektiv, also eine Einbettung. Man kann daher $\mathbb{N} \subseteq R$ für jeden geordneten Ring mit $1 \neq 0$ annehmen. (Schreibe $n = n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1$. Es ist $n\alpha = \alpha n$.)

Ist R sogar ein Körper, so kann $\mathbb{Q}$ in R eingebettet werden. Es gibt keinen endlichen geordneten Ring.

Definiere

$$R_+ = \{\alpha \in R \mid \alpha \geq 0\}, \qquad R_- = \{\alpha \in R \mid \alpha \leq 0\}$$

Dann gilt $R_+ \cup R_- = R$, $R_+ \cap R_- = \{0\}$ und $R_- = -R_+$. Nach Satz 1.1 ist die Menge der Quadrate eine Teilmenge von R_+.

Wegen

$$(*) \qquad \alpha \leq \beta \iff 0 \leq \beta - \alpha \iff \beta - \alpha \in R_+$$

ist die Ordnung auf R durch R_+ festgelegt.

SATZ 1.2. *Ist S eine Teilmenge eines Ringes R mit*

(a) $S + S \subseteq S$, $S \cdot S \subseteq S$
(b) $S \cap -S = \{0\}$, $S \cup -S = R$,

so wird R durch

$$\alpha \leq \beta :\iff \beta - \alpha \in S$$

zu einem geordneten Ring mit $R_+ = S$.

BEWEIS.

(1) R ist durch $\leq$ linear geordnet. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta \ \wedge \ \beta \leq \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \beta - \alpha \in S \ \wedge \ \alpha - \beta \in S \\ &\Longrightarrow \quad \beta - \alpha \in S \cap -S = \{0\} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Ähnlich folgen die anderen Eigenschaften einer linearen Ordnung.

(2) Sei $\alpha \leq \beta$ und $\gamma \in R$. Dann folgt

$$\beta + \gamma - (\alpha + \gamma) = \beta - \alpha \in S,$$

also $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

(3) Gilt wegen $S \cdot S \subseteq S$.

Wegen $(*)$ ist $R_+ = S$. □

BEISPIEL.

(1) $\mathbb{Z}$ ist ein geordneter Ring, und $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper.
$\mathbb{Z}$ läßt sich nur auf eine Weise anordnen: Wegen $1 = 1^2 > 0$ ist $n = 1 + \cdots + 1 > 0$ und $-n < 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Dies gilt für jede Ordnung auf $\mathbb{Z}$. Also ist

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\},$$

und man erhält nur die gewöhnliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$.
Wegen

$$\underbrace{\frac{\alpha}{\beta} > 0}_{\text{in } \mathbb{Q}} \iff \underbrace{\alpha\beta > 0}_{\text{in } \mathbb{Z}} \qquad \text{Multiplikation mit } \beta^2 > 0$$

bestimmt die Ordnung von $\mathbb{Z}$ die Ordung von $\mathbb{Q}$, also besitzt $\mathbb{Q}$ nur die gewöhnliche Ordnung.

(2) $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper. Es gibt nur die gewöhnliche Ordnung auf $\mathbb{R}$.
Zunächst gilt folgender
Satz: $\forall\, \alpha \geq 0\, \exists\, \beta : \alpha = \beta^2$.
Sei nun $\sqsubseteq$ irgendeine Ordnung auf $\mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \text{ Quadrat} \quad \Longrightarrow \quad 0 \sqsubseteq a \\ 0 \geq \alpha \quad &\Longrightarrow \quad -\alpha \text{ Quadrat} \quad \Longrightarrow \quad 0 \sqsupseteq \alpha. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \sqsubseteq \beta.$$

$\mathbb{R}_+$ ist gleich der Menge der Quadrate von $\mathbb{R}$.

(3) Sei $K = \mathbb{Q}(\vartheta) = \{a + \vartheta b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Rechne so, daß $\vartheta^2 = 2$ gilt.
Auf K gibt es zwei Ordnungen:

$$0 \leq_1 a + b\vartheta :\iff 0 \leq a + b\sqrt{2} \text{ in } \mathbb{R}$$

oder

$$0 \leq_2 a + b\vartheta :\iff 0 \leq a - b\sqrt{2} \text{ in } \mathbb{R}$$

$1 + \vartheta$ ist positiv bezüglich $\leq_1$ und negativ bezüglich $\leq_2$.

KAPITEL 2

Eliminationsverfahren

On procédera comme il suit pour éliminer successivement x, y, z, ... Chacune des inégalités donne évidemment pour x une condition de la forme

$$x > A + By + Cz + \cdots$$

ou de la forme

$$x < \alpha + \beta y + \gamma z + \cdots.$$

On compare chacune des conditions de la première forme á chacune des conditions de la seconde, et l'on écrit, pour exprimer cette comparaison,

$$\alpha + \beta y + \gamma z + \cdots > A + By + Cz + \cdots.$$

FOURIER, *1826*

Gegeben sei ein System von linearen Ungleichungen

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & \leq & \beta_1 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & \leq & \beta_m \end{array}$$

über einem geordneten Körper K mit m Ungleichungen und n Unbekannten.

Sei $I = \{1, \ldots, m\}$ die Indexmenge der Ungleichungen.

Elimination von x_1

Sei $I = I_0 \cup I_+ \cup I_-$ mit

$$\begin{aligned} I_0 &= \{i \in I \mid \alpha_{i1} = 0\} \\ I_+ &= \{j \in I \mid \alpha_{j1} > 0\} \\ I_- &= \{k \in I \mid \alpha_{k1} < 0\} \end{aligned}$$

Man formt nun die Ungleichungen folgendermaßen um:

Für $j \in I_+$:

$$x_1 \leq \alpha_{j1}^{-1}\beta_j - \alpha_{j1}^{-1}\alpha_{j2}x_2 - \cdots - \alpha_{j1}\alpha_{jn}x_n$$

Für $k \in I_-$:

$$\alpha_{k1}^{-1}\beta_k - \alpha_{k1}^{-1}\alpha_{k2}x_2 - \cdots - \alpha_{k1}^{-1}\alpha_{kn}x_n \leq x_1$$

Dann ist $(*)$ gleichwertig mit

$$(**)\qquad \begin{array}{rcl} \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n & \leq & \beta_i \qquad\qquad i \in I_0 \\ \alpha_{k1}^{-1}\beta_k - \sum_{\nu=2}^{n} \alpha_{k1}^{-1}\alpha_{k\nu}x_\nu & \leq & x_1 \leq \alpha_{j1}^{-1}\beta_j - \sum_{\nu=2}^{n} \alpha_{j1}^{-1}\alpha_{j\nu}x_\nu \quad j \in I_+,\ k \in I_- \end{array}$$

Man erhält somit für die Unbekannten $x_2, \ldots, x_n$ ein neues System linearer Ungleichungen

$$(***)\qquad \begin{array}{rcll} \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n & \leq & \beta_i \qquad (i \in I_0) & \text{(A)} \\ \sum_{\nu=2}^{n} \left(\alpha_{j1}^{-1}\alpha_{j\nu} - \alpha_{k1}^{-1}\alpha_{k\nu}\right) x_\nu & \leq & \alpha_{j1}^{-1}\beta_j - \alpha_{k1}^{-1}\beta_k \qquad (j \in I_+,\ k \in I_-) & \text{(B)} \end{array}$$

Vom Typ (A) gibt es $|I_0|$ Ungleichungen, und vom Typ (B) gibt es $|I_+| \cdot |I_-|$ Ungleichungen. Also enthält $(***)$ $|I_0| + |I_+| \cdot |I_-|$ Ungleichungen mit $n-1$ Unbekannten.

SATZ 2.1. *Das System $(*)$ mit m Ungleichungen und n Unbekannten läßt sich auf das System $(***)$ in $n-1$ Unbekannten reduzieren. Dabei ist die Anzahl der Ungleichungen von $(***)$*

$$m' = |I_0| + |I_+| \cdot |I_-| \,.$$

BEWEIS. 1.) Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung von $(*)$, so ist $(x_2, \ldots, x_n)$ eine Lösung von $(***)$.

2.) Sei $(x_2, \ldots, x_n)$ eine Lösung von $(***)$. Aus den Ungleichungen (B) von $(***)$ folgt

$$\begin{array}{rcl} m_1 & = & \max\limits_{k \in I_-} \left(\alpha_{k1}^{-1}\beta_k - \alpha_{k1}^{-1}\alpha_{k2}x_2 - \cdots - \alpha_{k1}^{-1}\alpha_{kn}x_n\right) \\ \leq\ m_2 & = & \min\limits_{j \in I_+} \left(\alpha_{j1}^{-1}\beta_j - \alpha_{j1}^{-1}\alpha_{j2}x_2 - \cdots - \alpha_{j1}^{-1}\alpha_{jn}x_n\right) . \end{array}$$

Wähle x_1 mit $m_1 \leq x_1 \leq m_2$. Dann genügt $(x_1, \ldots, x_n)$ den Ungleichungen von $(**)$, also auch von $(*)$. □

BEMERKUNG. Falls $I_- = \emptyset$ oder $I_+ = \emptyset$, setze

$$\max_{k \in I_- = \emptyset} = -\infty \qquad \text{bzw.} \qquad \min_{j \in I_+ = \emptyset} = +\infty \,.$$

BEISPIEL. Wir betrachten das System

$$x_1 + x_2 \leq 1 \tag{1}$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1 \tag{2}$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 1 \tag{3}$$

Es ist

$$I_0 = \emptyset, \quad I_+ = \{1,2\}, \quad I_- = \{3\}.$$

Man erhält

$$\begin{array}{rcl} & x_1 & \le & 1 - x_2 \\ & x_1 & \le & 1 + 2x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} & \le & x_1 & \end{array}$$

und damit

$$(**) \qquad \begin{array}{rcccl} \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} & \le & x_1 & \le & 1 - x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} & \le & x_1 & \le & 1 + 2x_2 \end{array}$$

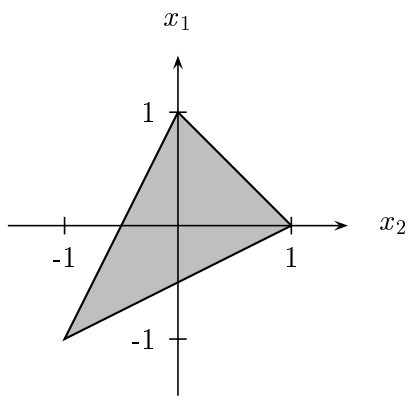
Als reduziertes System ergibt sich somit

$$(***) \qquad \begin{array}{rcl} \frac{3}{2}x_2 & \le & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}x_2 & \le & \frac{3}{2} \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 \le x_2 \le 1\,,$$

also für x_1

$$\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2} \le x_1 \le \min(1 - x_2, 1 + 2x_2)$$

Als Lösungsmenge erhält man damit den folgenden Bereich der Ebene



BEMERKUNG. 1.) Das System $(***)$ enthält $m' = |I_0| + |I_+| \cdot |I_-|$ Ungleichungen. Im ungünstigsten Fall ist für

$$m = 2k\text{:} \quad |I_+| = |I_-| = k \quad \Longrightarrow \quad m' = \left(\tfrac{m}{2}\right)^2$$

$$m = 2k+1\text{:} \quad |I_+| = k+1,\ |I_-| = k \quad \Longrightarrow \quad m' = (k+1)\,k \approx \left(\tfrac{m}{2}\right)^2$$

Für $m = 10$ ist dann $m' = 25$, und für $m = 100$ ist dann $m' = 2500$. Man wählt daher die zu eliminierenden Unbekannten so, daß m' möglichst klein wird.

Ein verbessertes Verfahren stammt von MOTZKIN (1936), wie wir später noch sehen werden.

2.) Man eliminiert nacheinander $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und erhält für x_n Ungleichungen der Art

$$\alpha_i' x_n \le \beta_i' \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Je nach dem Vorzeichen von α_i' erhält man $x_n \le \gamma_j$ oder $\gamma_k \le x_n$.
Hieraus folgt die Existenz bzw. Nichtexistenz von Lösungen von $(*)$.

3.) Setzt man $\vartheta_i = \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n$, so hat eine Ungleichung vom Typ (B) die Form

$$\underbrace{\alpha_{j1}^{-1}}_{\geq 0}\vartheta_j \underbrace{-\alpha_{k1}^{-1}}_{\geq 0}\vartheta_k \leq \alpha_{j1}^{-1}\beta_j - \alpha_{k1}^{-1}\beta_k\,,$$

ist also eine Folgeungleichung der j-ten und k-ten Ungleichung.

Man multipliziert die j-te und k-te Ungleichung mit positiven Faktoren, so daß bei Addition x_1 herausfällt.

Bei der Elimination einer Unbekannten x_i befolgt man die Regeln:

(a) Ungleichungen aus $(*)$, die x_i nicht enthalten, werden übernommen.

(b) Für $j \in I_+$, $k \in I_-$ bildet man eine positive Linearkombination der j-ten und der k-ten Ungleichung, so daß dabei x_i herausfällt.

AUFGABE. Gegeben sei

$$(*)\qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & -1 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \end{array}$$

Zeige, daß Lösungen von $(*)$ existieren, und berechne mindestens eine Lösung.

LÖSUNG. Eliminiere zuerst x_2. Man erhält

$$|I_0| + |I_+| \cdot |I_-| = 0 + 4 \cdot 1 = 4$$

neue Ungleichungen:

$$\begin{array}{rcrcl} & & 3x_3 & \leq & 4 \\ -4x_1 & - & x_3 & \leq & 0 \\ -6x_1 & - & x_3 & \leq & 6 \\ -x_1 & - & x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

Dies entspricht einer Projektion in die (x_1, x_3)-Ebene. Im zweiten Schritt ergibt sich nur eine Ungleichung vom Typ (A):

$$3x_3 \leq 4.$$

Eine untere Schranke existiert nicht. Somit folgt

$$-\infty < x_3 \leq \frac{4}{3}\,.$$

Lösungen sind zum Beispiel

$$\begin{array}{lll} x_3 = 1, & x_1 = 0, & x_2 = -1 \\ x_3 = 0, & x_1 = 0, & x_2 = -1. \end{array}$$

BEMERKUNG. Man erhält Schranken für die zuletzt übrigbleibende Unbekannte. Hieraus ergibt sich deren maximaler bzw. minimaler Wert, falls er existiert.

Nachteile des Verfahrens:

(1) Die Zahl der Ungleichungen wächst i.a. sehr stark an.

(2) Man erhält keine Strukturaussage für die Lösungsmenge.

KAPITEL 3

Duale Vektorräume

Es sei K ein beliebiger Körper.

Eine Menge V heißt *rechter* Vektorraum, wenn gilt:

(V1) Auf V ist eine Addition definiert, bezüglich der V eine abelsche Gruppe ist.

(V2) Es gibt eine multiplikative Verknüpfung $V \times K \to V$ mit

(a) $(x+y)\,\lambda = x\lambda + y\lambda$
$x(\lambda+\mu) = x\lambda + x\mu$

(b) $(x\lambda)\,\mu = x\,(\lambda\mu)$

(c) $x \cdot 1 = x$

für $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$.

Analog definiert man einen *linken* Vektorraum mit der Verknüpfung $K \times V \to V$.

Eine Abbildung $a : V \to K$ heißt eine *Linearform* auf V, wenn gilt:

$$a(x+y) = ax + ay \qquad \text{und} \qquad a(x\lambda) = (ax)\,\lambda$$

für $x \in V$, $\lambda \in K$.

V^* sei die Menge aller Linearformen auf V.

Definiere durch

$$(a+b)x := ax + bx \qquad \text{und} \qquad (\lambda a)x := \lambda(ax)$$

für $a, b \in V^*$, $\lambda \in K$, $x \in V$ eine Addition auf V^* und eine Multiplikation $K \times V^* \to V^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a+b)(x+y) &= a(x+y) + b(x+y)^* \\ &= (ax+ay) + (bx+by)^\dagger \\ &= (ax+by) + (ay+by)^\ddagger \\ &= (a+b)\,x + (a+b)\,y^*\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a+b)\,(x\lambda) &= a(x\lambda) + b(x\lambda) \\ &= (ax)\,\lambda + (bx)\,\lambda\end{aligned}$$

---

*Nach Definition

†Wegen $a, b \in V^*$

‡Assoziativität und Kommutativität der Addition

$$= \quad (ax + by)\,\lambda = \big(a + b)\,x\big)\,\lambda.$$

Also ist $a + b \in V^*$. Analog zeigt man $\lambda a \in V^*$.

SATZ 3.1. *V^* ist ein linker Vektorraum über K.*

BEWEIS. Nachprüfen der Axiome. □

DEFINITION. V^* heißt der zu V *duale* Vektorraum.

Sei $\dim V = n < \infty$ und

$$\{u_1, \ldots, u_n\}$$

eine Basis von V. Sei $a \in V^*$ und $au_i = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist für $x = \sum_{i=1}^n u_i x_i \in V$, $x_i \in K$

$$ax = a \sum_{i=1}^n u_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\,.$$

Also wird a durch $au_i = \alpha_i$ festgelegt.

Sind umgekehrt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beliebige Elemente von K, so wird durch

$$ax := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

eine Linearform auf V definiert.

In Koordinaten schreibt man $x \in V$ also Spaltenvektor und $a \in V^*$ als Zeilenvektor, also

$$ax = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\,.$$

BEMERKUNG. Häufig wird V^* durch

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

nach V abgebildet. ax ist dann das Skalarprodukt.

SATZ 3.2. *Sei $\dim V = n < \infty$. Ist $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von V, so gibt es eine Basis $\{d_1, \ldots, d_n\}$ von V^* mit*

$$d_i u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Es ist $\dim V^* = \dim V$.

BEWEIS. Definiere $d_1 : V \to K$ durch

$$d_1 u_1 := 1,\ d_1 u_2 := 0,\ \ldots,\ d_1 u_2 := 0$$

und analog $d_2, \ldots, d_n$, so daß $d_i u_j = \delta_{ij}$ gilt.

(1) Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i = 0$. Dann folgt

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \right) u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i u_j = \alpha_j \,.$$

Also sind $d_1, \ldots, d_n$ linear unabhängig.

(2) Sei $a \in V^*$ und $a u_i = \alpha_i$. Dann ist

$$\left(a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \right) u_j = a u_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i u_j = \alpha_j - \alpha_j = 0$$

für alle Basisvektoren u_j. Es folgt

$$\left(a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \right) x = 0$$

für alle $x \in V$. Damit ist

$$a - \sum_{i=1}^{n} d_i = 0 \qquad \text{also} \qquad a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \,.$$

Also ist $\{d_1, \ldots, d_n\}$ ein Erzeugendensystem von V^*

Insgesamt ist also $\{d_1, \ldots, d_n\}$ eine Basis von V^* und $\dim V^* = n = \dim V$. □

Entsprechend gilt

SATZ 3.2′. *Ist $\{d_1, \ldots, d_n\}$ eine Basis von V^*, so gibt es eine Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ von V mit $d_i u_j = \delta_{ij}$.*

Basen mit diesen Eigenschaften heißen *duale* Basen.

Es sei V ein rechter Vektorraum über K. Eine nicht-leere Teilmenge U von V heißt ein *Unterraum* von V, wenn gilt

(1) $$x, y \in U \quad \Longrightarrow \quad x + y \in U$$

(2) $$x \in U, \lambda \in K \quad \Longrightarrow \quad x\lambda \in U$$

Die Bedingungen (1) und (2) sind äquivalent zu

$$x, y \in U,\ \lambda, \mu \in K \quad \Longrightarrow \quad x\lambda + y\mu \in U.$$

Ist U von den Elementen $x_1, \ldots, x_r \in V$ erzeugt, so schreibt man

$$U = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle = \{x_1\lambda_1 + \cdots + x_r\lambda_r \mid \lambda_i \in K\}.$$

DEFINITION. Ist U ein Unterraum von V, so sei

$$U^\perp := \{a \in V^* \mid au = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

$U^\perp$ ist ein Unterraum von V^*.

HILFSSATZ 3.1. *Es sei $U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von V und $\{d_1, \ldots, d_n\}$ eine hierzu duale Basis von V^*, $d_i u_j = \delta_{ij}$. Dann ist*

$$U^\perp = \langle d_{r+1}, \ldots, d_n \rangle \,.$$

BEWEIS. Sei $D = \langle d_{r+1}, \ldots, d_n \rangle$.

(1) $D \subseteq U^\perp$: Sei

$$d = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i d_i \in D \qquad \text{und} \qquad u = \sum_{j=1}^{r} u_j \mu_j \in U\,.$$

Dann ist

$$du = \sum_{\substack{i>r \\ j\le r}} \lambda_i \underbrace{d_i u_j}_{=0} \mu_j = 0,$$

also $d \in U^\perp$.

(2) $U^\perp \subseteq D$: Sei $d \in U^\perp$, also $du = 0$ für alle $u \in U$. Insbesondere ist dann $du_j = 0$ für $1 \le j \le r$. Ist $d = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i$, so folgt

$$0 = du_j = \sum \lambda_i d_i u_j = \lambda_j, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Es folgt $d = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i d_i \in D$.

Insgesamt ist damit $U^\perp = D$. □

SATZ 3.3. *Sei* $\dim V = n < \infty$. *Dann gilt*

(A) $U_1 \subseteq U_2 \implies U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$. *Die Abbildung* $\perp$ *ist also antiton.*

(B) $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

(C) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

BEWEIS.

(A) Ist $a \in U_2^\perp$, so folgt $au = 0$ für alle $u \in U_2$. Wegen $U_1 \subseteq U_2$ folgt also $au = 0$ für alle $u \in U_1$ und damit $a \in U_1^\perp$.

(B) Folgt sofort aus Hilfssatz 3.1.

(C) $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$: Sei $a \in (U_1 + U_2)^\perp$. Dann ist $au = 0$ für alle $u \in U_1 + U_2$. Wegen $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$ folgt speziell $au = 0$ für alle $u \in U_1$ und $au = 0$ für alle $u \in U_2$, also $a \in U_1^\perp$ und $a \in U_2^\perp$. Damit folgt $a \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
$U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$: Sei $a \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$. Dann ist $au_i = 0$ für alle $u_i \in U_i$, $i = 1, 2$. Ist $u \in U_1 + U_2$, so besitzt u eine Darstellung $u = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Es folgt $au = a(u_1 + u_2) = au_1 + au_2 = 0 + 0 = 0$, also $a \in (U_1 + U_2)^\perp$. Also gilt auch $U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$.
Insgesamt folgt damit die Gleichheit.
$U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$: Sei $a \in U_1^\perp + U_2^\perp$. Dann besitzt a eine Darstellung $a = a_1 + a_2$ mit $a_i \in U_i^\perp$, $i = 1, 2$. Ist nun $u \in U_1 \cap U_2$, so folgt also $au = (a_1 + a_2)u)a_1 u + a_2 u = 0 + 0 = 0$ und damit $a \in (U_1 \cap U_2)^\perp$. Daher ist $U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp$.
Andererseits folgt mit der Dimensionsformel, Aussage (B) und der ersten Formel

$$\begin{aligned}
\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) &= \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) \\
&= \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1 + U_2)^\perp \\
&= \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - n + \dim(U_1 + U_2) \\
&= \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - n + \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)
\end{aligned}$$

$$= n - \dim(U_1 \cap U_2)$$
$$= \dim(U_1 \cap U_2)^\perp.$$

Also stimmen die Dimensionen überein. Wegen $\dim V < \infty$ folgt damit die Gleichheit. □

DEFINITION. Ist D ein Unterraum von V^*, so sei

$$D^\perp := \{x \in V \mid dx = 0 \text{ für alle } d \in D\}.$$

$D^\perp$ ist ein Unterraum von V.

Hilfssatz 3.1 und Satz 3.3 gelten entsprechend für Unterräume D von V^*. Außerdem folgt aus Hilfssatz 3.1

$$U^{\perp\perp} = U \qquad \text{und} \qquad D^{\perp\perp} = D.$$

Damit hat man folgende antitone Bijektion von der Menge der Unterräume von V auf die Menge der Unterräume von V^*:

$$\begin{array}{ccc} V^* & & V \\ U^\perp & \longleftarrow & U \\ D & \longrightarrow & D^\perp. \end{array}$$

KAPITEL 4

Konvexe Kegel

Den ersten wesentlichen Beitrag zur Theorie der linearen Ungleichungen lieferte MINKOWSKI *(Geometrie der Zahlen, 1896). Er bewies die Sätze*
Jede homogene Ungleichung, die redundant bezüglich eines endlichen Systems homogener linearer Ungleichungen ist, kann in der Form einer Summe seiner Ungleichungen mit geeignet gewählten nichtnegativen Koeffizienten dargestellt werden.
Der Lösungskegel eines homogenen Systems hat endlich viele erzeugende Elemente.
Von einer Ungleichung sagt man, daß sie redundant bezüglich eines lösbaren Systems ist, wenn sie von allen Lösungen des Systems befriedigt wird.
Diese Sätze bilden den Anfang der algebraischen Richtung in der Theorie der linearen Ungleichungen.

TSCHERNIKOW, *1966*

Sei K ein geordneter Körper und V ein rechter Vektorraum über K mit $\dim V = n < \infty$.

Wir betrachten ein lineares Ungleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} a_1 x & \leq & \beta_1 \\ & \vdots & \\ a_m x & \leq & \beta_m \end{array}$$

mit $a_i \in V^*$, $x \in V$, $\beta_i \in K$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$.

$(*)$ heißt *homogen*, wenn alle $\beta_i = 0$ sind.

DEFINITION. Eine nicht-leere Teilmenge C von V heißt ein *konvexer Kegel*, wenn gilt

(1) $x, y \in C \implies x + y \in C$
(2) $x \in C,\ \lambda \in K,\ \lambda \geq 0 \implies x\lambda \in C.$

BEISPIEL.

(1) Jeder Unterraum von V ist ein konvexer Kegel.
(2) Seien $y_1, \ldots, y_r \in V$. Dann ist

$$C = \{y_1\lambda_1 + \cdots + y_r\lambda_r \mid \lambda_i \in K_+\}$$

ein konvexer Kegel:

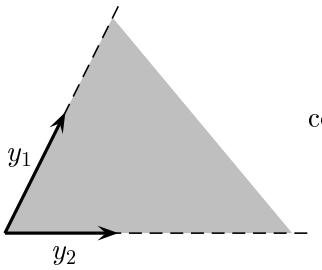
$$\sum y_i\lambda_i + \sum y_i\mu_i = \sum y_i \underbrace{(\lambda_i + \mu_i)}_{\in K_+}$$

$$\Big(\sum y_i\lambda_i\Big)\lambda = \sum y_i \underbrace{(\lambda_i\lambda)}_{\in K_+}$$

$C = \{y_1\lambda_1 + \cdots + y_r\lambda_r \mid \lambda_i \in K_+\}$ heißt der von $y_1, \ldots, y_r$ erzeugte konvexe Kegel, geschrieben

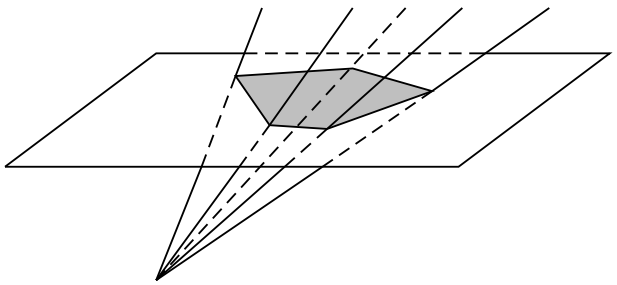
$$C = \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_r).$$

Geometrische Veranschaulichung:
$\mathbb{R}^2$:

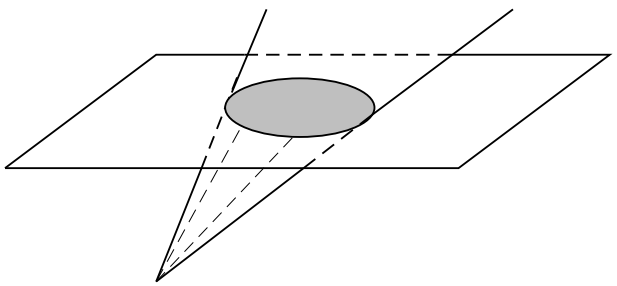


$\operatorname{cone}(y_1, y_2)$

$\mathbb{R}^3$: Zur besseren Veranschaulichung schneiden wir den Kegel mit einer Ebene.



endlich erzeugter konvexer Kegel



Kreiskegel, nicht endlich erzeugt

(3) Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Ungleichungssystems

$$L = \{x \in V \mid a_i x \leq 0,\ i \in I\}$$

ist ein konvexer Kegel. (Hier kann I auch unendlich sein.)

Beweis: Sei $x, y \in L$, $\lambda \in K_+$. Für alle $i \in I$ ist dann

$$a_i(x+y) = a_i x + a_i y \leq 0$$
$$a_i(x\lambda) = (a_i x)\lambda \leq 0.$$

Also ist $x + y, x\lambda \in L$. ✓

SATZ 4.1 (Lemma von CARATHÉODORY). *Ist* $\dim V = n < \infty$ *und*

$$y \in C = \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_r),$$

so ist y *bereits eine positive Linearkombination von* m *der Vektoren* y_i *mit* $m \leq n$.

BEWEIS. Es sei

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_{k_i}\lambda_i\,, \qquad \lambda_i > 0$$

mit minimaler Anzahl m von Summanden.
Annahme: $m > n$. Dann sind $y_{k_1}, \ldots, y_{k_m}$ linear abhängig, also

$$\sum_{i=1}^{m} y_{k_i}\lambda_i\alpha_i = 0$$

mit $\alpha_i > 0$ für ein i. (Falls alle Koeffizienten negativ sind, multipliziert man mit -1.) Sei j ein Index, für den α_j maximal ist, also

$$\alpha_j \geq \alpha_i$$

für alle i. Weil ein $\alpha_i > 0$ ist, folgt $\alpha_j > 0$, also

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_{k_i}\lambda_i - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} y_{k_i}\lambda_i\alpha_i\right)}_{=0}\alpha_j^{-1} = \sum_{i=1}^{m} y_{k_i}\lambda_i \underbrace{(\alpha_j - \alpha_i)\ \alpha_j^{-1}}_{\geq 0}\,.$$

Der j-te Koeffizient ist $= 0$. Man erhält eine kürzere Darstellung von y, im Widerspruch zur Minimalität von m. □

Sei

$$L = \{x \in V \mid a_i x \leq 0,\ i \in I\}$$

die Lösungsmenge von $(*)$. Nach Beispiel (3) ist L ein konvexer Kegel. Wir werden sehen, daß L sogar endlich erzeugt ist, d.h. es gibt $y_1, \ldots, y_k \in L$ mit

$$L = \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_k) = \left\{\sum_{i=1}^{k} y_i\lambda_i \mid \lambda_i \in K_+\right\}.$$

Man hat dann also eine Parameterdarstellung der Lösungen.

DEFINITION. Sei $W = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle$. Dann ist W ein Unterraum von V^*.
$r = \dim W$ heißt *Rang* von $(*)$.

$(*)$ heißt *normal*, wenn $W = V^*$, also

$$V^* = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle$$

ist.

Wegen

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{x \in V \mid ax = 0 \text{ für alle } a \in W\} \\ &= \{x \in V \mid a_i x = 0 \text{ für alle } i \in I\} \end{aligned}$$

ist $(*)$ offensichtlich genau dann normal, wenn $W^\perp = 0$ ist.

DEFINITION. Ein konvexer Kegel heißt *spitz*, wenn er keine Gerade (= 1-dimensionaler Unterraum) enthält.

SATZ 4.2. $(*)$ *ist genau dann normal, wenn L spitz ist.*

BEWEIS. 1.) Ist $(*)$ nicht normal, so ist $0 \neq W^\perp \subseteq L$, also enthält L einen 1-dimensionalen Unterraum.

2.) Sei U ein Unterraum von L und $x \in U$. Dann ist auch $-x \in U$, also

$$x \in U \subseteq L \quad \text{und} \quad -x \in U \subseteq L.$$

Also gilt für alle $i \in I$

$$a_i x \leq 0 \quad \text{und} \quad a_i(-x) \leq 0.$$

Insgesamt ist damit $a_i x = 0$, d.h. $x \in W^\perp$, also $U \subseteq W^\perp$.

Ist nun $0 \neq U \subseteq L$, so folgt also $0 \neq U \subseteq W^\perp$. Also ist $W^\perp \neq 0$, und damit ist $(*)$ nicht normal. □

BEISPIEL. Es sei $V = \mathbb{R}^3$.

(1) Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Dann ist $a_1 = (1, -1, 0)$ und $a_2 = (-1, 0, 0)$, also $W = \langle a_1, a_2 \rangle$. Wegen $\dim W = 2 < 3$ ist dieses Ungleichungssystem nicht normal. Man findet

$$W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

L_1 enthält eine Gerade, ist also nicht spitz.

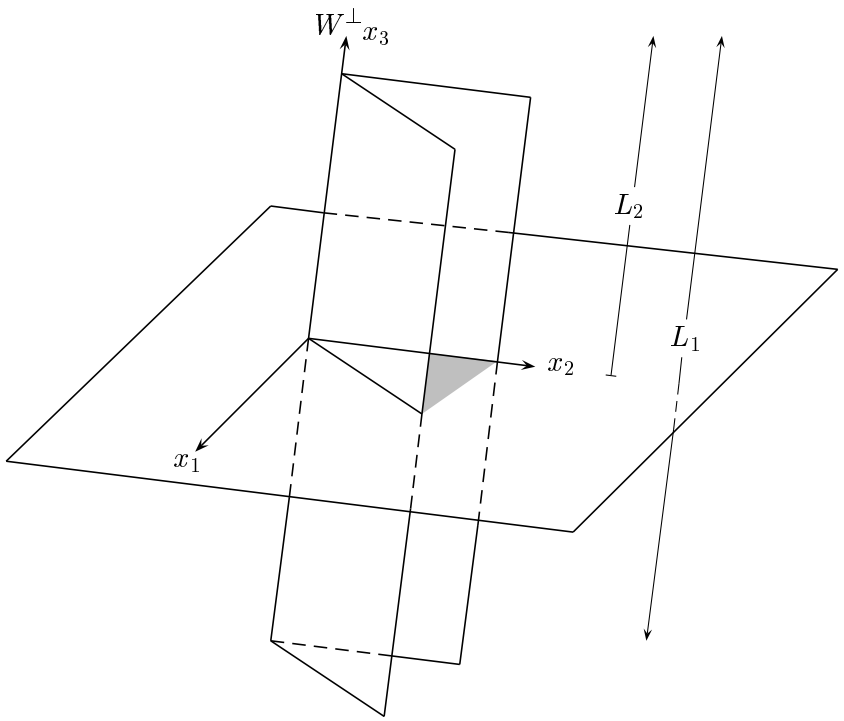
(2) Wir betrachten nun das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & - & x_3 & \leq 0 \end{array}$$

Dann ist $a_1 = (1, -1, 0)$, $a_2 = (-1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, -1)$ und damit

$$W = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = V^*.$$

Also ist L_2 spitz.



SATZ 4.3. *Es gibt eine Zerlegung*

$$V = W^\perp + V' , \qquad W^\perp \cap V' = 0 ,$$

so daß $L = W^\perp + L'$ *ist, wobei* $L' = L \cap V'$ *spitz ist.*

BEWEIS. Ergänze eine Basis $\{x_1, \ldots, x_k\}$ von $W^\perp$ zu einer Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von V und setze

$$V' = \langle x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle .$$

Sei $y = u + v \in L$ mit $u \in W^\perp$ und $v \in V'$. Für alle $i \in I$ ist $a_i y \leq 0$, also

$$\underbrace{a_i u}_{=0} + a_i v \leq 0,$$

und damit $v \in L \cap V' = L'$. Also ist $L \subseteq W^\perp + L'$.

Wegen $W^\perp, L' \subseteq L$ gilt auch die umgekehrte Inklusion, also ist $L = W^\perp + L'$.

Ist nun U ein Unterraum von $L' \subseteq L$, so ist

$$U \subseteq W^\perp \cap V' = 0.$$

Also ist $U = 0$, d.h. L' ist spitz. □

BEMERKUNG. Wegen

$$\begin{aligned} W^\perp &= \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \\ &= \operatorname{cone}(x_1, \ldots, x_k, -x_1, \ldots, -x_k) \end{aligned}$$

ist $W^\perp$ ein endlich erzeugter Kegel. Ist auch L' endlich erzeugt, so ist es auch L.

Es bleibt also noch zu zeigen, daß normale Systeme einen endlich erzeugten Lösungskegel besitzen.

DEFINITION. Die Ungleichung $a_m x \leq 0$ heißt *redundant*, wenn

$$\begin{aligned} L &= \{x \in V \mid a_i x \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\} \\ &= \{x \in V \mid a_i x \leq 0,\ i = 1, \ldots, m-1\} \end{aligned}$$

ist.

HILFSSATZ 4.1. *Sei* $\dim V = 2$ *und*

$$(*) \qquad a_i x \leq 0, \qquad I = \{1, \ldots, m\}$$

normal. Dann ist $L = 0$*, oder* L *wird bereits durch zwei Ungleichungen festgelegt, etwa*

$$L = \{x \in V \mid a_1 x \leq 0 \ \wedge \ a_2 x \leq 0\}.$$

Im letzten Fall ist

$$L = \operatorname{cone}(y_1, y_2)$$

mit $a_1 y_1 = 0$ *und* $a_2 y_2 = 0$.

BEWEIS. Da L sich nicht ändert, wenn man redundante Ungleichungen wegläßt, kann man annehmen, daß $(*)$ keine redundanten Ungleichungen enthält.

Annahme: $m \geq 3$. Wegen der Normalität ist $W = V^*$, etwa $V^* = \langle a_1, a_2 \rangle$. Sei

$$a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

(1) Sind $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, so ist $a_i x \leq 0$ redundant.

(2) Ist $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, so ist $a_2 = \lambda_2^{-1} a_i - \lambda_2^{-1} \lambda_1 a_1$, also $a_2 x \leq 0$ redundant.

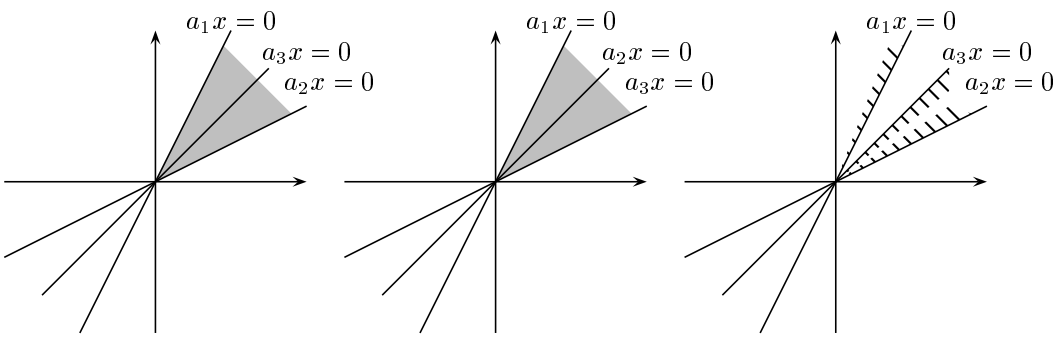
(3) Ist $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, so ist $a_1 = \lambda_1^{-1} a_i - \lambda_1^{-1} \lambda_2 a_2$, also $a_1 x \leq 0$ redundant.

(4) Seien nun $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$. Für $x \in L$ ist dann

$$\underbrace{-a_i x}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda_1 a_1 x}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda_2 a_2 x}_{\geq 0} = 0,$$

also $a_i x = 0$. Es folgt $x \in W^\perp = 0$, denn das System ist normal. Also ist $x = 0$ und damit $L = 0$.

Geometrisch gesehen, beschreibt $a_i x \leq 0$ eine Halbebene.



1. Fall 2. Fall 4. Fall

Sei also $L = \{x \in V \mid a_1 x \leq 0 \ \wedge \ a_2 x \leq 0\} \neq 0$.

Wähle $y_1, y_2 \in V$ mit

$$a_1 y_1 = 0 \qquad a_2 y_1 < 0$$
$$a_1 y_2 < 0 \qquad a_2 y_2 = 0.$$

y_1, y_2 sind linear unabhängig: Ist nämlich

$$y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 = 0,$$

so folgt

$$0 = a_1(0) = a_1(y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2) = a_1 y_2 \lambda_2$$

und damit $\lambda_2 = 0$. Analog folgt $\lambda_1 = 0$.
Also ist $V = \langle y_1, y_2 \rangle$.

Sei nun $x \in L$, also $a_1 x \leq 0$ und $a_2 x \leq 0$. Ist $x = y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2$, so folgt

$$a_1 x = \underbrace{a_1 y_2}_{<0} \lambda_2 \leq 0$$

und damit $\lambda_2 \geq 0$. Analog folgt $\lambda_1 \geq 0$.

Damit ergibt sich $L = \operatorname{cone}(y_1, y_2)$. □

Definiere für $x \in L$

$$I_x = \{i \in I \mid a_i x = 0\}$$
$$W_x = \langle a_i \mid i \in I_x \rangle \subseteq W$$
$$\operatorname{rg} x = \dim W_x \qquad \text{(Rang von } x\text{)}$$

Ist $I_x = \emptyset$ für $x \in L$, so heißt x *innerer Punkt* von L.

Es gilt

$$0 \leq \operatorname{rg} x \leq r = \text{Rang} = \dim W$$

und

$$\operatorname{rg} x = 0 \iff x \text{ ist innerer Punkt},$$
$$\operatorname{rg} x = r \iff W_x = W$$
$$\iff I_x = 0$$
$$\iff x \in W^\perp.$$

Ist $(*)$ normal, also $r = n$, $W^\perp = 0$, so gilt

$$\operatorname{rg} x = n \iff x = 0.$$

DEFINITION. $x \in L$ heißt ein *Kantenvektor*, wenn

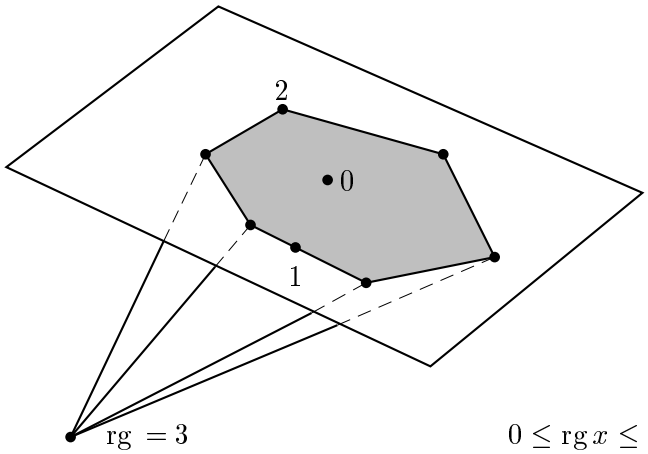
$$\operatorname{rg} x = n - 1$$

ist. x erzeugt dann eine *Kante*

$$\{x\lambda \mid \lambda \in K_+\}$$

von L.

BEISPIEL. Sei $V = \mathbb{R}^3$:



HILFSSATZ 4.2. *Ist $x \in L$ und $\operatorname{rg} x \leq n-2$, so gibt es $x_1, x_2 \in L$ mit $I_x \subseteq I_{x_1}, I_{x_2}$, $\operatorname{rg} x_1$, $\operatorname{rg} x_2 > \operatorname{rg} x$ und*

$$x = x_1 + x_2.$$

BEWEIS. Wegen

$$\dim W_x + \dim W_x^{\perp} = n$$

ist $\dim W_x^{\perp} \geq 2$. Sei U ein zweidimensionaler Unterraum von $W_x^{\perp}$ mit $x \in U$ und

$$\hat{L} = \{y \in U \mid a_i y \leq 0 \text{ für alle } i \in I \setminus I_x\}.$$

Ein Vektor $u \neq 0$ aus $\hat{L}$ genügt den Gleichungen $a_i u = 0$ für alle $i \in I_x$, aber nicht für alle $i \in I$, weil sonst $u \in W^{\perp} = 0$, also $u = 0$ wäre. Sei etwa $a_j u < 0$, also $a_j(-u) > 0$. Dann ist $-u \notin \hat{L}$. Also enthält $\hat{L}$ keine Gerade, d.h. $\hat{L}$ ist spitz.

Wegen $0 \neq x \in \hat{L}$ ist $\hat{L} \neq 0$. Nach Hilfssatz 4.1 ist

$$\hat{L} = \operatorname{cone}(y_1, y_2)$$

mit $a_i y_1 = 0$ und $a_j y_2 = 0$ für gewisse $i, j \in I \setminus I_x$. Außerdem ist $a_k y_1 = a_k y_2 = 0$ für $k \in I_x$. Also ist

$$\operatorname{rg} y_1,\ \operatorname{rg} y_2 > \operatorname{rg} x\,,$$

$$x = \underbrace{y_1 \lambda_1}_{x_1} + \underbrace{y_2 \lambda_2}_{x_2}$$

für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in K_+$ und $I_x \subseteq I_{x_1}, I_{x_2}$. □

SATZ 4.4 (MINKOWSKI 1896). *Der Lösungskegel*

$$L = \{x \in V \mid a_i x \leq 0,\ i \in I\}$$

von $(*)$ ist endlich erzeugt.

BEWEIS. 1.) Nach der Bemerkung zu Satz 4.3 können wir annehmen, daß $(*)$ normal ist.

2.) Jedes $x \in L$ besitzt nach Hilfssatz 4.2 eine Darstellung

$$x = y_1\lambda_1 + \cdots + y_k\lambda_k\,, \qquad \lambda_i \geq 0$$

und $\operatorname{rg} y_i = n-1$. Jedes y_i erfüllt $n-1$ homogene Gleichungen

$$a_j y_i = 0 \qquad \text{für } j \in J$$

mit $|J| = n-1$ und $\{a_j \mid j \in J\}$ linear unabhängig.

Durch J ist daher y_i bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Da es nur endlich viele solcher Teilmengen gibt, nämlich $\binom{m}{n-1}$, existieren auch nur endlich viele Kanten, also ist

$$L = \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_k)$$

mit $k \leq \binom{m}{n-1}$. □

BEMERKUNG.

(1) Eine beliebige $n-1$-elementige Teilmenge J von I führt nicht immer auf eine Kante, die Lösung von

$$a_j x = 0\,, \qquad j \in J$$

muß außerdem noch $a_i x \leq 0$ für $i \in I \setminus J$ erfüllen. $\binom{m}{n-1}$ ist im allgemeinen eine viel zu große Schranke für die Anzahl der Kanten.

(2) Die Kantenvektoren sind nicht echt zerlegbar, d.h. nicht als Summe zweier linear unabhängiger Vektoren $x_1, x_2 \in L$ darstellbar,

$$y = x_1 + x_2.$$

(Zum Beispiel ist $y = \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2}\,y$ keine echte Zerlegung.)
Beweis: Für $j \in J_y$ ist

$$a_j y = \underbrace{a_j x_1}_{\leq 0} + \underbrace{a_j x_2}_{\leq 0} = 0.$$

Also ist $a_j x_1 = a_j x_2 = 0$ für alle $j \in J_y$. Damit ist

$$x_1, x_2 \in W_y^{\perp} = \langle y \rangle,$$

d.h. x_1, x_2 sind linear abhängig. ✓
Ergebnis:

$$\begin{aligned} y \text{ Kantenvektor} &\iff y \in L \text{ und } \operatorname{rg} y = n-1 \\ &\iff y \text{ nicht echt zerlegbar} \end{aligned}$$

BEISPIEL.

(1) Wir betrachten das System

$$(1) \qquad \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

Es ist

$$I = \{1,2,3,4\}, \qquad n = 3, \qquad \binom{4}{2} = 6.$$

(a) $J = \{1, 2\}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

hat die Lösung

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Ungleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

sind erfüllt für $t \geq 0$. Damit ist

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Kante von (1).

(b) $J = \{3, 4\}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

hat die Lösung

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man x in die beiden ersten Ungleichungen ein, so folgt

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & t & \leq & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -t & \leq & 0, \end{array}$$

also $t = 0$. Also erhält man keine Kante.

(c) $J = \{2, 3\}$ ergibt die Kante

$$y_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $J = \{1, 3\}$ ergibt die Kante

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) $J = \{2, 4\}$ liefert keine Kante.

(f) $J = \{1, 4\}$ liefert keine Kante.

Ergebnis:

$$L = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Die vierte Ungleichung ist redundant.

(2) Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ das nicht-normale System

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \tag{2}$$

Es ist

$$W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad V = W^\perp + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) $J = \{1\}$

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

hat die Lösung $t \binom{1}{1}$ mit $t \geq 0$. Also ist

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Kante von (2).

(b) $J = \{2\}$:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 & & & = & 0 \end{array}$$

hat die Lösung $t \binom{0}{1}$ mit $t \geq 0$. Also ist

$$y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Kante von (2).

Nach Satz 4.3 ist damit

$$L = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

KAPITEL 5

Das Motzkin-Verfahren

A particular procedure of left multiplication is the elimination of the unknowns, one by one, and this method was proposed for linear inequalities by Fourier but seems to be entirely out of question because of the huge number of elementary operations involved, which grows extremely fast with the number of unknows and inequalities.
Right multiplication on the other hand, as represented by the successive solution of one, two, etc., inequalities until arriving at the whole system seems to be within the range of machine, and sometimes of hand, as we hope to corroberate in the present paper. ...
The idea was, as far as we know, first used in the dissertation of T. S. Motzkin (1936) for purely theoretical purposes (a proof of a generalization of Minkowski's theorem on the finiteness of a base for all solutions of a finite system of linear inequalities).

MOTZKIN, RAIFFA, THOMPSON, AND THRALL, *1953*

Der Lösungskegel von

$$(*) \qquad a_1 x \leq 0,\ \ldots,\ a_m x \leq 0$$

besitzt zwei Darstellungen

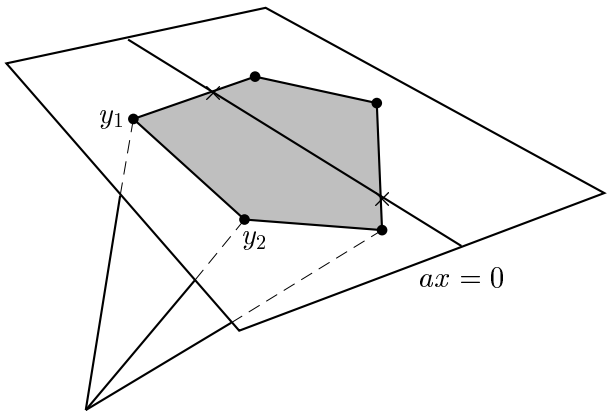
$$\begin{aligned} L &= \{x \in V \mid a_i x \leq 0,\ i \in I\} \\ &= \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_k). \end{aligned}$$

Fügt man zu $(*)$ eine weitere Ungleichung $ax \leq 0$ hinzu, so erhält man ein neues Ungleichungssystem. Es ist nun das Ziel, aus L den Lösungskegel

$$\hat{L} = \{x \in V \mid ax \leq 0 \ \wedge\ a_i x \leq 0 \text{ für } i \in I\} = \operatorname{cone}(z_1, \ldots, z_\ell)$$

dieses neuen Ungleichungssystems zu ermitteln.

Ist ein normales Ungleichungssystem gegeben, und ist der Lösungskegel eines normalen Teilsystems bekannt, so kann man auf diese Weise den Lösungskegel des Gesamtsystems berechnen, indem man nacheinander Ungleichungen hinzufügt.



Es sei

$$(*) \qquad a_i x \leq 0\,, \qquad i \in I = \{1, \ldots, m\}$$

normal. Ist L die Lösungsmenge von $(*)$, so heißt

$$\mathfrak{K} = \{y_1, \ldots, y_k\}$$

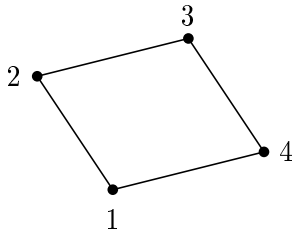
ein *vollständiges Kantensystem* von L, wenn jede Kante von L durch genau ein $y_i \in \mathfrak{K}$ erzeugt wird.

DEFINITION. Zwei Vektoren $y_1, y_2 \in \mathfrak{K}$ heißen *benachbart*, wenn

$$\dim \langle a_i \mid i \in J_{y_1} \cap J_{y_2} \rangle = n - 2$$

ist.

$\mathfrak{K}$ bildet bezüglich der Nachbarrelation einen Graphen. Jedes $y_i \in \mathfrak{K}$ wird durch einen Knoten repräsentiert. Knoten, die zu benachbarten Kantenvektoren gehören, werden miteinander verbunden.



BEISPIEL. Gegeben sei das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

Als Kantenvektoren findet man

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Tabelle zeigt die Werte $a_i y_j$:

	y_1	y_2	y_3
a_1	0	0	-4
a_2	0	-4	0
a_3	-4	0	0
a_4	-1	-1	-1

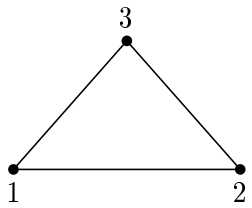
Also ist

$$J_{y_1} = \{1,2\}, \qquad J_{y_2} = \{1,3\}, \qquad J_{y_3} = \{2,3\}.$$

Wegen

$$\dim \langle a_i \mid i \in J_{y_1} \cap J_{y_2} \rangle = \dim \langle a_1 \rangle = 1 = 3 - 2$$

sind y_1, y_2 benachbart. Ebenso sind y_1, y_3 sowie y_2, y_3 benachbart. Damit erhält man folgenden Graphen:



BEMERKUNG. Man kann zeigen, daß $y_1, y_2 \in \mathfrak{K}$ genau dann benachbart sind, wenn kein dritter Vektor $y_3 \in \mathfrak{K}$ mit

$$J_{y_1} \cap J_{y_2} \subseteq J_{y_3}$$

existiert.

DEFINITION. Ein Paar (y_i, y_j) von Kantenvektoren aus $\mathfrak{K}$ heißt bezüglich einer Ungleichung $ax \leq 0$ *ausgewogen*, wenn gilt

(1) y_i, y_j sind benachbart, d.h.

$$\dim \langle a_k \mid k \in J_{y_i} \cap J_{y_j} \rangle = n - 2$$

(2) ay_i, ay_j haben verschiedene Vorzeichen, etwa $ay_i < 0$, $ay_j > 0$.

SATZ 5.1. *Gegeben sei ein normales System*

$$(*) \qquad a_i x \leq 0\,, \qquad i \in I = \{1, \ldots, m\}$$

und eine weitere Ungleichung $ax \leq 0$.

Ist $\mathfrak{K} = \{y_1, \ldots, y_k\}$ *ein vollständiges Kantensystem von*

$$L = \{x \in V \mid a_i x \leq 0,\ i \in I\},$$

so ist

$$\widehat{\mathfrak{K}} = \{y_i \in \mathfrak{K} \mid ay_i \leq 0\} \cup \{y_{ij} = y_j \cdot (ay_j)^{-1} - y_i \cdot (ay_i)^{-1} \mid y_i, y_j \in \mathfrak{K} \text{ ausgewogen}\}$$

ein vollständiges Kantensystem von

$$\hat{L} = \{x \in V \mid ax \leq 0 \ \wedge\ a_i x \leq 0 \text{ für } i \in I\}.$$

BEWEIS. 1.) Die angegebenen Vektoren sind Kanten von $\hat{L}$:
a) Ist $ay_i \leq 0$, so ist $y_i \in \hat{L}$.

Es ist $a_k y_i = 0$ für $n-1$ linear unabhängige a_k. Also ist $y_i \in \widehat{\mathfrak{K}}$.
b) Es ist

$$ay_{ij} = (ay_j)(ay_j)^{-1} - (ay_i)(ay_i)^{-1} = 0$$
$$a_k y_{ij} = \underbrace{(a_k y_j)(ay_j)^{-1}}_{\leq 0} - \underbrace{(a_k y_i)(ay_i)^{-1}}_{\geq 0} \leq 0.$$

Also ist $y_{ij} \in \hat{L}$.

Es ist $a_k y_{ij} = 0$ für $n-2$ linear unabhänge a_k, $k \in J_{y_i} \cap J_{y_j}$. Außerdem ist $ay_{ij} = 0$.

$$a = \sum_{k \in J_{y_i} \cap J_{y_j}} \lambda_k a_k$$

kann nicht gelten, weil sonst $ay_i = 0$ im Widerspruch zu $ay_i < 0$ folgen würde. Also ist $y_{ij} \in \widehat{\mathfrak{K}}$.

2.) Sei nun z ein Kantenvektor von $\hat{L} \subseteq L$.

Ist $az < 0$, so gehört z zur ersten Menge.

Sei $az = 0$ und $a_k z = 0$ für $n-2$ linear unabhängige a_k, also $\operatorname{rg} z = n-2$ in L. Nach Hilfssatz 4.2 ist

$$z = x_1 + x_2$$

mit $\operatorname{rg} x_1, \operatorname{rg} x_2 > \operatorname{rg} z = n-2$ und $J_{x_1}, J_{x_2} \subseteq J_z$. Also sind die x_1 Kantenvektoren von L, d.h. es gibt $y_i, y_j \in \mathfrak{K}$ und $\lambda_i, \lambda_j > 0$ mit

$$z = y_i \lambda_i + y_j \lambda_j$$

und

$$a_k y_i = a_k y_j = 0$$

für $k \in J_z$.

Es ist

$$(**) \qquad ay_i \lambda_i + ay_j \lambda_j = az = 0.$$

Hierbei ist $ay_i \neq 0$, denn $ay_i = 0$ impliziert $ay_j = 0$. Außerdem ist $a_k y_i = a_k y_j = 0$ für $k \in J_z$, d.h. y_1, y_2 sind linear abhängig, im Widerspruch zur Definition eines vollständigen Kantensystems.

Also ist $ay_i \neq 0$, und ay_i, ay_j haben wegen $(**)$ verschiedene Vorzeichen, etwa $ay_i < 0$ und $ay_j > 0$. Also sind y_i, y_j ausgewogen. Man erhält

$$-\lambda_i = (ay_i)^{-1} ay_j \lambda_j$$

und damit

$$\begin{aligned} z &= y_j \lambda_j + y_i \lambda_i \\ &= y_j (ay_j)^{-1} ay_j \lambda_j - y_i (ay_i)^{-1} ay_j \lambda_j \\ &= \left(y_j (ay_j)^{-1} - y_i (ay_i)^{-1} \right) ay_j \lambda_j \\ &= y_{ij} \cdot \underbrace{(ay_j \lambda_j)}_{>0}. \end{aligned}$$

Also ist z ein positives Vielfaches eines Vektors der zweiten Menge. □

Rechenschema

Sei $\mathfrak{K} = \{y_1, \ldots, y_k\}$ ein vollständiges Kantensystem zu dem normalen System

$$a_1 x \leq 0, \ \ldots, \ a_r x \leq 0\,,$$

also

	y_1	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_k
a_1	$a_1 y_1$				
$\vdots$					
a_i			$a_i y_i$		
$\vdots$					
a_r					
$a = a_{r+1}$	ay_1	$\cdots$	ay_i	$\cdots$	ay_k
$\vdots$					
a_m					

Die Koeffizienten der ersten r Zeilen sind ≤ 0.

(a) Sind die Koeffizienten der $(r+1)$-ten Zeile ≤ 0, so ist $a_{r+1}x \leq 0$ redundant, und man kann zur nächsten Ungleichung übergehen.

(b) Die Spalten mit $ay_i \leq 0$ bleiben erhalten.

(c) Für die ausgewogenen Paare y_i, y_j bilde

$$y_{ij} = y_i(ay_j) - y_j(ay_i)$$

(d.h. man addiert ein positives Vielfaches von y_i und y_j, so daß in der $(r+1)$-ten Zeile eine Null entsteht).

Bemerkung. Ist t die Anzahl der Spalten mit $a_{r+1}y_i \leq 0$, so ist

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathfrak{K}}| &= t + \text{Anzahl der ausgewogenen Paare} \\ &\leq t + \text{Anzahl der Paare mit } ay_i < 0,\ ay_j > 0. \end{aligned}$$

Vereinfachung der Schreibweise:

Definiere in K^m durch

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \leq c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} :\Longleftrightarrow\ \forall\, i : \beta_i \leq \gamma_i$$

eine Halbordung. Es gilt

$$\begin{aligned} b \leq c \quad &\Longrightarrow \quad b + d \leq c + d \\ b \leq c,\ \lambda \in K_+ \quad &\Longrightarrow \quad b\lambda \leq c\lambda. \end{aligned}$$

Des weiteren sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in V^{*m}, \qquad Ax = \begin{pmatrix} a_1 x \\ \vdots \\ a_m x \end{pmatrix}.$$

In Koordinaten ist A eine (m,n)-Matrix und Ax die gewöhnliche Matrizenmultiplikation. Ein System von linearen Ungleichungen läßt sich damit in der Form

$$Ax \leq b$$

schreiben, wobei mit $\leq$ die oben definierte Halbordnung gemeint ist.

1. Das Motzkin-Verfahren für $Ax \leq 0$, $x \geq 0$

Gesucht ist die Lösung des Ungleichungssystems $Ax \leq 0$ unter der zusätzlichen Bedingung $x \geq 0$.

Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V^*. Dann ergibt sich folgendes Schema:

	y_1	$\cdots$	$\cdots$	y_n	
$(1,0,\ldots,0) = b_1$	1	$\cdots$	$\cdots$	0	
$\vdots$					Koeff. ≥ 0
$(0,0,\ldots,1) = b_n$	0	$\cdots$	$\cdots$	1	
a_1	α_{11}	$\cdots$	$\cdots$	α_{1n}	
$\vdots$					A
a_m	α_{m1}	$\cdots$	$\cdots$	α_{mn}	

Ein vollständiges Kantensystem für das normale Teilsystem $\{x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$ sind die Einheitsvektoren

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad y_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$b_j y = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_j$$

liefert $b_j y$ die j-te Komponente von y.

Man formt nun unter Verwendung der Regeln (a) – (c) das Schema solange um, bis im unteren Teil nur Zahlen ≤ 0 stehen. Nach der Umformung sind die Spaltenvektoren im oberen Teil des Schemas die gesuchten Kantenvektoren.

Beispiel. Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige Schema ist

	y_1	y_2	y_3	y_4
b_1	1			
b_2		1		
b_3			1	
b_4				1
a_1	-1	1	-1	0
a_2	1	1	0	-1

wobei zur Vereinfachung die Nullen im oberen Teil weggelassen werden.

Wir betrachten zuerst die a_1-Zeile. Nach (b) bleiben y_1, y_3, y_4 erhalten. Wegen $\dim \langle b_3, b_4 \rangle = 2 = 4 - 2$ und $a_1 y_1 < 0$, $a_1 y_2 > 0$ sind y_1, y_2 ausgewogen bezüglich a_1. Das gleich egilt für y_2, y_3.

	y_1	y_3	y_4	$y_1 + y_2$	$y_2 + y_3$
b_1	1			1	
b_2				1	1
b_3		1			1
b_4			1		
a_1	-1	-1	0	0	0
a_2	1	0	-1	2	1

Im zweiten Schritt betrachten wir die a_2-Zeile.

Erhalten bleiben Spalte 2 und Spalte 3. Ausgewogen bezüglich a_2 sind

$$(1,3), \quad (3,4), \quad (3,5).$$

Es ergeben sich fünf Spalten. Das Endschema ist

	1	2	3	4	5
b_1			1	1	0
b_2				1	1
b_3	1				1
b_4		1	1	2	1
a_1	-1	-1	0	0	0
a_2	0	-1	0	0	0

Die Spalten des oberen Teils ergeben die Lösungsmenge

$$L = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aus dem Endschema kann man erkennen, welche der fünf Kanten benachbart sind. Man betrachtet die Zeilenvektoren a_i und b_j, für die gleichzeitig

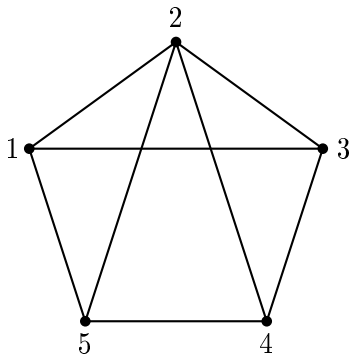
$$a_i y_k = a_i y_\ell = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad b_j y_k = b_j y_\ell = 0$$

ist. Hat der von ihnen aufgespannte Unterraum die Dimension $n - 2 = 4 - 2 = 2$, so sind y_k und y_ℓ benachbart.

Dies ist z.B. der Fall für y_1 und y_2.

Dagegen ist für y_1 und y_4 nur für die zweite Zeile $b_2 y_1 = b_2 y_4 = 0$, d.h. y_1 und y_4 sind nicht benachbart.

Insgesamt erhält man als Graph von L



BEMERKUNG. Für $n = 4$ erhält man stets einen planaren Graphen. Im obigen Beispiel erkennt man dies leicht, wenn man 2 innerhalb des Vierecks $\{1, 3, 4, 5\}$ plaziert.

2. Das Motzkin-Verfahren für $Ax = 0,\ x \geq 0$

Das Ungleichungssystem $Ax = 0,\ x \geq 0$ ist äquivalent zu dem Ungleichungssystem

$$Ax \leq 0 \ \wedge\ -Ax \leq 0 \ \wedge\ x \geq 0.$$

Man hat $n + 2m$ Ungleichungen zu betrachten.

Man erhält folgendes Rechenschema:

	y_1	$\cdots$	$\cdots$	y_n
b_1	1	$\cdots$	$\cdots$	0
$\vdots$				
b_n	0	$\cdots$	$\cdots$	1
a_1	α_{11}	$\cdots$	$\cdots$	α_{1n}
$-a_1$	$-\alpha_{11}$	$\cdots$	$\cdots$	$-\alpha_{1n}$
$\vdots$				
a_m	α_{m1}	$\cdots$	$\cdots$	α_{mn}
$-a_m$	$-\alpha_{m1}$	$\cdots$	$\cdots$	$-\alpha_{mn}$

Nach dem ersten Schritt enthält die a_1-Zeile nur Zahlen ≤ 0, die $-a_1$-Zeile die davon negativen, also Zahlen ≥ 0.

Im nächsten Schritt bleiben nur die Spalten mit dem Eintrag 0 bestehen.

In der Rechnung läßt man die $-a_1$-Zeile weg und benutzt anstelle der Regel (b) die Regel

(b′) Spalten mit $ay_i = 0$ bleiben erhalten.

Am Ende des Verfahrens stehen im unteren Teil nur Nullen.

BEISPIEL. Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

	y_1	y_2	y_3	y_4
b_1	1			
b_2		1		
b_3			1	
b_4				1
a_1	-1	1	-1	0
a_2	1	1	0	-1

b_1		1		1	
b_2		1	1	1	1
b_3			1		1
b_4		1		2	1
a_1	0	0	0	0	0
a_2	-1	2	1	0	0

Ergebnis:

$$L = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

3. Das Motzkin-Verfahren für $Ax \leq 0$

Es sei ein lineares Ungleichungssystem $Ax \leq 0$ gegeben. Man führt nun neue Unbekannte $u_1, \ldots, u_m$ ein und setzt

$$\begin{array}{rcccccccl} -u_1 & = & \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & \leq & 0 \\ & \vdots & & & & & & \vdots & \\ -u_m & = & \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & \leq & 0. \end{array}$$

Gaußsche Elimination liefert

$$(*)\qquad \begin{array}{rcccccccl} \beta_{11}x_1 & + & \beta_{12}x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \beta_{1n}x_n = \sum_{j=1}^m \gamma_{1j}u_j \\ & & \beta_{22}x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \beta_{2n}x_n = \sum_{j=1}^m \gamma_{2j}u_j \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \beta_{rr}x_r & + & \cdots & + & \beta_{rn}x_n = \sum_{j=1}^m \gamma_{rj}u_j \end{array}$$

$$(**)\qquad \begin{array}{rcl} 0 & = & \sum_{j=1}^m \gamma_{r+1,j}u_j \\ & \vdots & \\ 0 & = & \sum_{j=1}^m \gamma_{kj}u_j \end{array}$$

mit $\beta_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Führt man für $x_{r+1}, \ldots, x_n$ Parameter $t_1, \ldots, t_{n-r} \in K$ ein, so folgt aus $(*)$

$$x = v_1 t_1 + \cdots + v_{n-r}t_{n-1} + Bu\,, \qquad t_i \in K$$

mit einer (n, m)-Matrix B und Spaltenvektoren v_i. Hierbei können die t_i auch negative Werte annehmen.

$(**)$ mit $u_i \geq 0$ ist ein System vom Typ 2. für u. Es folgt

$$u = y_1\lambda_1 + \cdots + y_k\lambda_k, \qquad \lambda_k \in K_+,$$

also

$$x \in \operatorname{cone}(v_1, -v_1, \ldots, v_{n-r}, -v_{n-r}, By_1, \ldots, By_k).$$

BEISPIEL. Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & \leq & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 0 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

Nach Einführung von $u_1, \ldots, u_4$ erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -u_1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & -u_2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -u_3 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -u_4 \end{array}$$

mit $u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$.

Anwenden des Gaußschen Eliminationsverfahrens ergibt

$$(*) \qquad \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_4 & = & 2u_1 & & & - & 3u_3 & - & 4u_4 \\ & x_2 & & + & x_4 & = & -2u_1 & & & + & 2u_3 & + & 3u_4 \\ & & x_3 & - & x_4 & = & u_1 & & & - & u_3 & - & u_4 \end{array}$$

$$(**) \qquad 0 = 2u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4$$

Aus $(*)$ folgt, wenn man $x_4 = t$ setzt,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} u$$

Nun löst man noch das System

$$(**) \qquad \begin{array}{rcl} 2u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4 & = & 0 \\ u_i & \geq & 0 \end{array}$$

mit dem Verfahren aus Abschnitt 2 und erhält

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_4, \qquad \lambda_i \geq 0.$$

Es folgt

$$Bu = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_4.$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist

$$L = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

BEMERKUNG. 1.) Die Menge

$$\{x \mid Ax = 0\}$$

heißt *Kern* des Ungleichungssystems. Ein Ungleichungssystem ist genau dann normal, wenn sein Kern $= 0$ ist.

Ist das Ungleichungssystem nicht-normal, so sind die Kanten der Lösungsmenge nicht eindeutig bestimmt.

2.) Im obigen Beispiel ist

$$\text{Kern} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und wird von den beiden ersten Vektoren aufgespannt.

KAPITEL 6

Das Lemma von Farkas

Jetzt soll ermittelt werden, ob in einem System von Ungleichungen etwa eine oder die andere Ungleichung sich als eine Folge der übrigen darstellt.

MINKOWSKI, *1896*

SATZ 6.1.

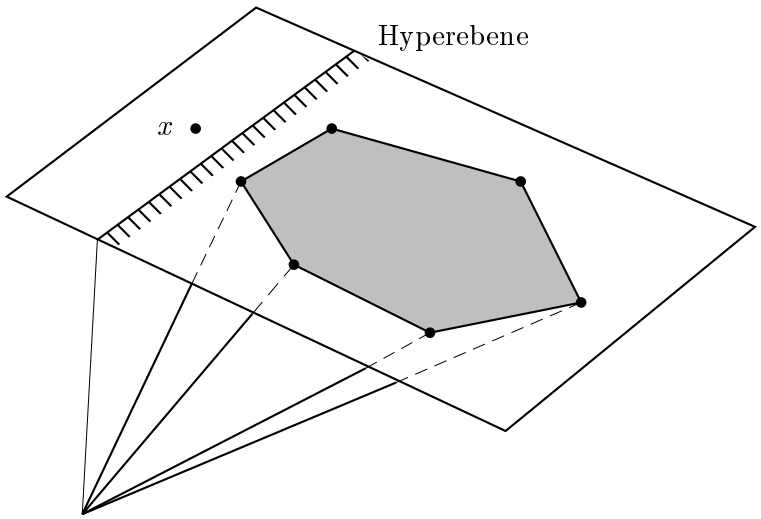
(a) *Seien* $a, a_1, \ldots, a_m \in V^*$ *und* $a \notin cone\,(a_1, \ldots, a_m)$.
Dann gibt es ein $x \in V$ *mit*

$$ax > 0 \ \wedge \ (a_1 x \leq 0, \ldots, a_m x \leq 0).$$

(b) *Seien* $x, x_1, \ldots, x_m \in V$ *und* $x \notin cone\,(x_1, \ldots, x_m)$.
Dann gibt es ein $a \in V^*$ *mit*

$$ax > 0 \ \wedge \ (ax_1 \leq 0, \ldots, ax_m \leq 0).$$

BEMERKUNG. (a) und (b) sind dual.
(b) heißt „Satz von der trennenden Hyperebene“.



BEWEIS. Wir beweisen (b) (nach A. SCHRIJVER: Linear and integer programming, Wiley 1986).

(i) Sei

$$U = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle \qquad \text{und} \qquad \dim U = r.$$

Ist $x \notin U$, so wähle eine Linearform $a \in V^*$ mit

$$ax > 0 \quad \text{und} \quad ax_1 = \cdots = ax_m = 0.$$

(Für eine Linearform kann man die Werte linear unabhängiger Vektoren beliebig vorgeben!).
Wir können also

(1) $$x \in U$$

voraussetzen.

(ii) Wähle eine beliebige Basis

$$B_1 = \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}\}$$

von U mit $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq m$. Wegen (1) ist dann

(2) $$x = \sum_{i=1}^{r} x_{k_i} \lambda_i \,, \qquad \lambda_i \in K.$$

Wegen $x \notin \text{cone}\,(x_1, \ldots, x_m)$ ist mindestens ein Koeffizient negativ. Sei j der kleinste Index mit

(3) $$\lambda_j < 0.$$

Definiere $a \in V^*$ mit

$$ax_{k_j} < 0 \quad \text{und} \quad ax_{k_i} = 0 \text{ für } i \neq j.$$

(Die Basisvektoren sind linear unabhängig!) Dann ist

$$ax = \sum_{i=1}^{r} ax_{k_i} \cdot \lambda_i = ax_{k_j} \cdot \lambda_j > 0.$$

Gilt außerdem $ax_k \leq 0$ für alle $k = 1, \ldots, m$, so hat a die gewünschte Eigenschaft (Fall $(*)$).

(iii) Andernfalls sei k der kleinste Index mit

(4) $$ax_k > 0.$$

Dann ist x_k linear unabhängig von x_{k_i}, $i \neq j$: Wäre nämlich

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} x_{k_i} \mu_u,$$

so würde mit (4) der Widerspruch

$$0 < ax_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \underbrace{ax_{k_i}}_{=0} \mu_i = 0$$

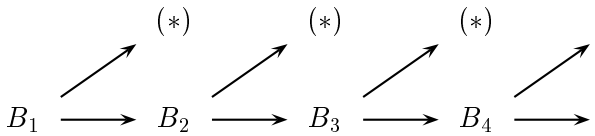
folgen.

Also ist

$$B_2 = \big(B_1 \setminus \{x_{k_j}\}\big) \cup \{x_k\}$$

wieder eine Basis von U.

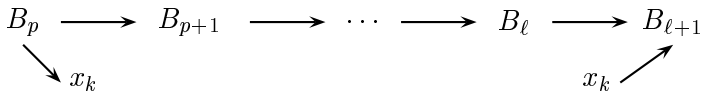
(iv) Wiederhole das Verfahren für B_2.
Entweder tritt der Fall $(*)$ ein, oder man erhält eine eindeutig bestimmte Basis B_3 von U usw.



Da für die Basen nur endlich viele Vektoren zur Verfügung stehen, kommt man auf den Fall $(*)$, oder es tritt in der Folge der Basen B_i eine Periode auf:

$$B_s \longrightarrow B_{s+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_{s+t} = B_s$$

Bei jedem Schritt wird ein x_i ersetzt. Sei x_k der Vektor mit größtem Index, der beim Durchlauf der Periode – etwa in B_p – ersetzt wird. Beim Übergang $B_\ell \longrightarrow B_{\ell+1}$ werde x_k wieder eingefügt. (Wegen $B_s = B_{s+t}$ tritt dieser Fall ein.)



(v) Sei

$$B_p = \{x_{k_1}, \ldots, x_k, \ldots, x_{k_r}\} \qquad \text{und}$$
$$x = \sum_{k_i<k} x_{k_i}\lambda_i + x_k\lambda + \sum_{k_i>k} x_{k_i}\lambda_i.$$

Wegen der Maximalität von k ist $x_{k_i} \in B_\ell$ für $k_i > k$. Sei $a \in V^*$ die für $B_\ell \longrightarrow B_{\ell+1}$ definierte Linearform. Dann ist

$$ax_{k_i} = 0 \qquad \text{für } k_i > k.$$

Da x_k bei $B_p \longrightarrow B_{p+1}$ ersetzt wird, ist $k = j$ definiert durch (3), also

$$ax_{k_i} \le 0\,, \qquad \lambda_i \ge 0$$

für $k_i < k$ und

$$ax_k > 0\,, \qquad \lambda < 0.$$

Damit folgt der Widerspruch

$$0 < ax = \sum_{k_i<k} \underbrace{ax_{k_i}\lambda_i}_{\le 0} + \underbrace{ax_k\lambda}_{<0} + \sum_{k_i>k} \underbrace{ax_{k_i}}_{=0}\lambda_i < 0.$$

Also existiert keine Periode, d.h. der Fall $(*)$ muß einmal eintreten. □

SATZ 6.2 (H. WEYL, 1935). *Jeder Kegel*

$$C = \operatorname{cone}(x_1, \ldots, x_m)$$

ist Lösungskegel eines linearen Ungleichungssystems

$$C = \{x \in V \mid a_1 x \leq 0, \ldots, a_k x \leq 0\}.$$

Dabei erhält man die Ungleichungen aus

$$\begin{aligned} ax_i &\leq 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m \\ ax_j &= 0 \qquad \text{für } j \in J, \end{aligned}$$

wobei J eine Teilmenge der Indexmenge $\{1, \ldots, m\}$ ist mit

$$|J| = r - 1, \qquad r = \dim \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$$

und $\{x_j \mid j \in J\}$ linear unabhängig

BEWEIS. Nach Satz 6.1(b) gibt es zu jedem $x \notin \operatorname{cone}(x_1, \ldots, x_m)$ ein $a \in V^*$ mit

$$ax > 0, \qquad ax_i \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m.$$

Also ist

$$\begin{aligned} x &\notin \{y \in V \mid ay \leq 0\}, \\ C = \operatorname{cone}(x_1, \ldots, x_m) &\subseteq \{y \in V \mid ay \leq 0\}. \end{aligned}$$

a wird in $U^\perp$, wo bei $U = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ ist, (siehe Beweis von Satz 6.1(b)) durch

$$ax_{k_i} = 0 \qquad \text{für } r - 1 \text{ linear unabhängige } x_{k_i}$$

und

$$ax_i \leq 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

bis auf einen positiven Faktor durch $J = \{k_1, \ldots, k_{r-1}\}$ festgelegt. Schreibe $a = a_J$. Dann ist

$$C = \bigcap_{x \notin C} \{y \in V \mid a_J y \leq 0\}.$$

Es gibt aber nur endlich viele solche Teilmengen J, etwa $J_1, \ldots, J_k$. Also ist

$$\begin{aligned} C &= \bigcap_{J_i} \{y \in V \mid a_{J_i} y \leq 0\} \\ &= \{y \in V \mid a_{J_1} y \leq 0, \ldots, a_{J_k} y \leq 0\}. \end{aligned}$$ □

BEISPIEL. Es sei

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $r = \dim \langle x_1, \ldots, x_4 \rangle = 3$.

Betrachte nun alle 2-elementigen Teilmengen J:

(1) $J = \{1, 2\}$, $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & \leq & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & \leq & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = (1, 1, -3).$$

(2) $J = \{3, 4\}$, $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & \leq & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & \leq & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad a = (0, 0, 0).$$

Weitere Lösungen sind

$$a_2 = (1, -3, 1), \qquad a_3 = (-3, 1, 1).$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} C &= \operatorname{cone}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \{y \in V \mid a_1 y \leq 0,\ a_2 y \leq 0,\ a_3 y \leq 0\}. \end{aligned}$$

DEFINITION. Ein Kegel, der Durchschnitt von Halbräumen

$$H_i = \{x \in V \mid a_i x \leq 0\}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

ist, heißt ein *polyedrischer Kegel*.

Aus den Sätzen von WEYL und MINKOWSKI folgt

SATZ 6.3. *C ist genau dann ein polyedrischer Kegel, wenn C endlich erzeugt ist.*

KOROLLAR 6.1. *Sind C_1 und C_2 polyedrische Kegel, so ist auch $C_1 + C_2$ ein polyedrischer Kegel.*
Sind C_1 und C_2 endlich erzeugte konvexe Kegel, so ist auch $C_1 \cap C_2$ endlich erzeugt.

SATZ 6.4 (Lemma von FARKAS). *Ist jede Lösung von*

$$(*) \qquad a_1 x \leq 0,\ \ldots,\ a_m x \leq 0$$

auch Lösung von $ax \leq 0$, so ist

$$a \in \operatorname{cone}(a_1, \ldots, a_m).$$

BEWEIS. Nach Satz 6.1(a) gilt

$$a \notin \operatorname{cone}(a_1, \ldots, a_m) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x \in L : ax > 0.$$

Durch Kontraposition folgt

$$\forall\, x \in L : ax \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad a \in \operatorname{cone}(a_1, \ldots, a_m). \qquad \square$$

Mit anderen Worten: Jede bezüglich eines Systems von Ungleichungen redundante Ungleichung ist eine positive Linearkombination der Ungleichungen. (a heißt *redundant* bezüglich $(*)$, wenn die Hinzunahme von $ax \leq 0$ die Lösungsmenge nicht verändert.)

Daß umgekehrt positive Linearkombinationen von Ungleichungen redundant sind, ist trivial: durch Addition folgt

$$\frac{\begin{array}{c}\lambda_1 a_1 x \leq 0 \\ \vdots \\ \lambda_m a_m x \leq 0\end{array}}{(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m)x \leq 0 \qquad \text{für } \lambda_i \geq 0}$$

Polarität konvexer Kegel

Es sei $A \subseteq V^*$ und $X \subseteq V$. Definiere

$$A^* := \{x \in V \mid ax \leq 0 \text{ für alle } a \in A\}$$
$$X^* := \{a \in V^* \mid ax \leq 0 \text{ für alle } x \in X\}.$$

EIGENSCHAFTEN.

(A) (1) A^* ist ein konvexer Kegel in V.
(2) X^* ist ein konvexer Kegel in V^*.
Beweis:

(1)
$$\begin{array}{rcl} x, y \in A^* & \Longrightarrow & \forall\, a \in A : ax \leq 0 \ \wedge \ ay \leq 0 \\ & \Longrightarrow & \forall\, a \in A : a(x+y) \leq 0 \\ & \Longrightarrow & x + y \in A^* \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} x \in A^*,\ \lambda \in K_+ & \Longrightarrow & \forall\, a \in A : ax\lambda \leq 0 \\ & \Longrightarrow & x\lambda \in A^* \end{array}$$

(2) analog. ✓

(B) (1) Die Abbildung $A \mapsto A^*$ ist antiton.
(2) Die Abbildung $X \mapsto X^*$ ist antiton.
Beweis:

(1)
$$\begin{array}{rcl} A_1 \subseteq A_2 & \Longrightarrow & A_2^* = \{x \in V \mid ax \leq 0 \text{ für alle } a \in A_2\} \\ & & \subseteq \{x \in V \mid ax \leq 0 \text{ für alle } a \in A_1\} \\ & & = A_1^* \end{array}$$

(2) analog. ✓

(C) (1) $A \subseteq A^{**}$.
(2) $X \subseteq X^{**}$.
Beweis:

(1)
$$a \in A \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in X^* : ax \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad a \in A^{**}$$

(2) analog. ✓.

(D) (1) Ist A ein endlich erzeugter Kegel in V^*, so ist A^* ein endlich erzeugter Kegel in V.
(2) Ist X ein endlich erzeugter Kegel in V, so ist X^* ein endlich erzeugter Kegel in V^*.
Beweis:
(1) Sei $A = \text{cone}\,(a_1, \ldots, a_m)$. Dann ist

$$\begin{aligned} A^* &= \{x \in V \mid ax \leq 0 \,\text{für alle}\, a \in A\} \\ &= \{x \in V \mid a_1 x \leq 0,\ \ldots,\ a_m x \leq 0\} \end{aligned}$$

endlich erzeugt nach dem Satz von Minkowski.
(2) ergibt sich aus dem Satz von Weyl. ✓

(E) Sind A und X endlich erzeugte konvexe Kegel, so gilt

$$(1) \quad A = A^{**} \qquad\qquad (2) \quad X = X^{**}.$$

Beweis:
(1) Sei $A = \text{cone}\,(a_1, \ldots, a_m)$. Dann ist

$$\begin{aligned} A^* &= \{x \in V \mid ax \leq 0 \,\text{für alle}\, a \in A\} \\ &= \{x \in V \mid a_1 x \leq 0,\ \ldots,\ a_m x \leq 0\} \\ &= \text{cone}\,(x_1, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Sei $a \in A^{**}$, also $ax \leq 0$ für alle $x \in A^*$. Es folgt

$$ax_1 \leq 0,\ \ldots,\ ax_k \leq 0.$$

Mit dem Lemma von Farkas folgt dann

$$a \in \text{cone}\,(a_1, \ldots, a_m) = A.$$

(2) analog. ✓

Bemerkung. Ohne die Voraussetzung, daß die Kegel endlich erzeugt sind, gilt (E) nicht: Sei

$$A = \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1, a_2 > 0 \text{ oder } a = (0,0)\}.$$

Dann ist $A^{**} = \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1, a_2 \geq 0\}$.

Definition. Eine Halbordnung, in der Supremum und Infimum von je zwei Elementen existieren, heißt ein *Verband*.

Sind C_1, C_2 konvexe Kegel, so sind auch

$$C_1 + C_2 = \{x + y \mid x \in C_1,\ y \in C_2\} \qquad \text{und}$$

konvexe Kegel. Die konvexen Kegel bilden einen Verband mit

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \text{ kleinster konvexer Kegel, der } C_1 \text{ und } C_2 \text{ enthält} \\ &= \sup(C_1, C_2) = \text{kleinste obere Schranke} \\ C_1 \cap C_2 &= \inf(C_1, C_2) = \text{größte untere Schranke} \end{aligned}$$

Nach Korollar 6.1 bilden die endlich erzeugten konvexen Kegel einen Unterverband.

(F) Seien C_1, C_2 endlich erzeugte konvexe Kegel von V bzw. V^*. Dann gilt
  (a) $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$
  (b) $(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^*$
((a) gilt für beliebige konvexe Kegel.)
Beweis:
(a) Aus $C_1, C_2 \subseteq C_1 + C_2$ folgt nach (B)

$$(C_1 + C_2)^* \subseteq C_1^*,\ C_2^*, \qquad \text{also}$$
$$(C_1 + C_2)^* \subseteq C_1^* \cap C_2^*.$$

Sei $C_1, C_2 \subseteq V$ und $a \in C_1^* \cap C_2^*$, also

$$ax \leq 0 \quad \text{für alle } x \in C_1$$
$$ay \leq 0 \quad \text{für alle } y \in C_2.$$

Es folgt $a(x+y) \leq 0$ für alle $x+y \in C_1+C_2$, also $a \in (C_1+C_2)^*$. Insgesamt ist damit $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$.
Sind $C_1, C_2 \in V^*$, so verläuft der Beweis analog.
(b) Sind C_1, C_2 endlich erzeugt, so gilt nach (E)

$$C_1^* + C_2^* = (C_1^* + C_2^*)^{**} = (C_1^{**} \cap C_2^{**})^* = (C_1 \cap C_2)^*. \qquad \checkmark$$

Zusammenfassend ergibt sich damit

SATZ 6.5. *Die Abbildung $C \mapsto C^*$ bildet bijektiv die endlich erzeugten konvexen Kegel von V auf die von V^* ab, so daß* (A) – (F) *gilt.*

BEWEIS. Zu zeigen ist nur noch die Bijektivität. Diese folgt aber aus $C = C^{**}$:
Wegen $C = (C^*)^*$ ist $C \mapsto C^*$ surjektiv.
Sei $C_1^* = C_2^*$. Dann folgt

$$C_1 = C_1^{**} = C_2^{**} = C_2,$$

also ist $C \mapsto C^*$ injektiv. □

KAPITEL 7

Affine Räume über geordneten Körpern

Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n < \infty$.

DEFINITION. Eine nicht-leere Menge $\mathfrak{A}$ heißt *affiner Raum* zu V, wenn eine Verknüpfung $\mathfrak{A} \times V \to \mathfrak{A}$, $(P, x) \mapsto P \dotplus x$ definiert ist, die folgenden Axiomen genügt

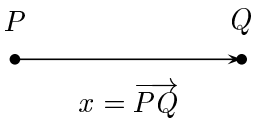
(A1) Ist $P, Q \in \mathfrak{A}$ gibt es genau ein $x \in V$ mit $Q = P \dotplus x$.

(A2) $(P \dotplus x) \dotplus y = P \dotplus (x + y)$ für alle $x, y \in V$, $P \in \mathfrak{A}$.

BEMERKUNG.

1.) Die Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen *Punkte*.

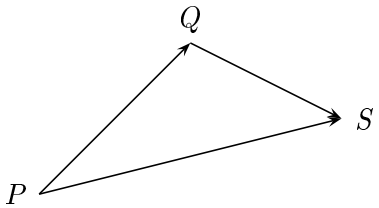
2.) Die Operation $Q = P \dotplus x$ heißt „Abtragen des Vektors x an den Punkt P“. Nach (A1) ist x eindeutig bestimmt. Man schreibt $x = \overrightarrow{PQ}$ (Verbindungsvektor).



3.) Durch $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$ wird V selbst zu einem affinen Raum.

FOLGERUNGEN.

(A) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$



Beweis: Es ist

$$P \dotplus (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}) \overset{\text{A2}}{=} (P \dotplus \overrightarrow{PQ}) \dotplus \overrightarrow{QS} = Q \dotplus \overrightarrow{QS} = S.$$

Andererseits gilt auch $P \dot{+} \overrightarrow{PS} = S$.

Wegen der Eindeutigkeit des Verbindungsvektors folgt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$. ✓

(B) (a) $\overrightarrow{PP} = 0$, (b) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

Beweis: (a) Nach (A) ist

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}\,,$$

also $\overrightarrow{PP} = 0$.

(b) Aus

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$$

folgt $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$. ✓

(C) Aus $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$ folgt $Q = Q'$.

Beweis: $Q = P \dot{+} \overrightarrow{PQ} = P \dot{+} \overrightarrow{PQ'} = Q'$. ✓

DEFINITION. Seien $P_1, \ldots, P_r \in \mathfrak{A}$. Dann heißt

$$P = \sum_{i=1}^{r} P_i \lambda_i, \qquad \sum \lambda_i = 1$$

Baryzenter der Punkte P_i mit den Gewichten λ_i, definiert durch

$$P = Q \dot{+} \sum_{i=1}^{r} \overrightarrow{QP_i} \lambda_i\,,$$

wobei Q ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{A}$ ist (MÖBIUS, 1790 – 1860).

Die Definition von P ist unabhängig von Q:

$$\begin{aligned} Q \dot{+} \sum_{i=1}^{r} \overrightarrow{QP} \lambda_i &= (Q' \dot{+} \overrightarrow{Q'Q}) \dot{+} \sum_{i=1}^{r} (\overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_i}) \lambda_i \\ &\overset{\text{A2}}{=} Q' \dot{+} \left(\overrightarrow{Q'Q} + \overrightarrow{QQ'} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i}_{=1} + \sum_{i=1}^{r} \overrightarrow{Q'P_i} \lambda_i \right) \\ &= Q' \dot{+} \sum_{i=1}^{r} \overrightarrow{Q'P_i} \lambda_i\,. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\sum \lambda_i = 1$ ist wesentlich für die Wohldefiniertheit.

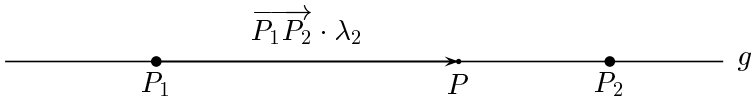
BEISPIEL. 1.) Es sei $P_1 \neq P_2$ und $P = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, also

$$P = Q \dot{+} (\overrightarrow{QP_1} \lambda_1 + \overrightarrow{QP_2} \lambda_2).$$

Wähle speziell $Q = P_1$. Dann ist

$$P = P_1 \dot{+} (\overrightarrow{P_1P_1} \lambda_1 + \overrightarrow{P_1P_2} \lambda_2) = P_1 \dot{+} \overrightarrow{P_1P_2} \lambda_2.$$

Geometrisch:



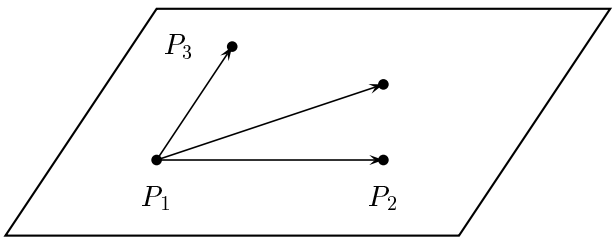
(1) P liegt auf der Verbindungsgeraden g von P_1 und P_2.
(2) Jeder Punkt P von g ist Baryzenter von P_1 und P_2:
Wähle λ so, daß $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{P_1P_2}\lambda$ ist.
(3) K sei ein geordneter Körper. Ist $0 \leq \lambda_2 \leq 1$, so liegt P zwischen P_1 und P_2, also ist

$$[P_1, P_2] = \{P = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

die Strecke zwischen P_1 und P_2.

2.) Sei $P = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 + P_3\lambda_3$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.
Wähle $Q = P_1$. Dann ist

$$P = P_1 \dot{+} (\overrightarrow{P_1P_2}\lambda_2 + \overrightarrow{P_1P_3}\lambda_3).$$



(1) P liegt in der von P_1, P_2, P_3 aufgespannten Ebene.
(2) Jeder Punkt P der Ebene ist ein Baryzenter von P_1, P_2, P_3: sei

$$\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{P_1P_2}\lambda_2 + \overrightarrow{P_1P_3}\lambda_3,$$

dann ist

$$P = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 + P_3\lambda_3$$

mit $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$.
(3) Ist $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, so liegt P in dem von P_1, P_2, P_3 gebildeten Dreieck.

HILFSSATZ 7.1. *Seien*

$$P = \sum_{i=1}^{r} P_i\lambda_i, \qquad Q = \sum_{i=1}^{r} P_i\mu_i$$

zwei Baryzenter und $\alpha + \beta = 1$. *Dann ist*

$$R = P\alpha + Q\beta = \sum_{i=1}^{r} P_i(\lambda_i\alpha + \mu_i\beta).$$

(*Einsetzen von Baryzentern.*)

BEWEIS. Zunächst ist

$$\sum(\lambda_i\alpha + \mu_i\beta) = \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1}\cdot\alpha + \underbrace{\sum \mu_i}_{=1}\cdot\beta = 1.$$

Für beliebiges $S \in \mathfrak{A}$ ist

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{SP}\alpha + \overrightarrow{SQ}\beta \\ &= \sum \overrightarrow{SP_i}\lambda_i\alpha + \sum \overrightarrow{SP_i}\mu_i\beta \\ &= \sum \overrightarrow{SP_i}(\lambda_i\alpha + \mu_i\beta)\,,\end{aligned}$$

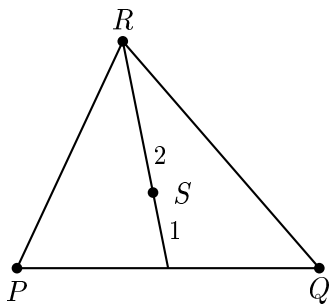
also

$$R = \sum_{i=1}^{r} P_i(\lambda_i\alpha + \mu_i\beta). \qquad \square$$

Geometrische Anwendung:

Sei $\operatorname{char} K \neq 2, 3$. Dann ist

$$\begin{aligned}S &= P\cdot\frac{1}{3} + Q\cdot\frac{1}{3} + R\cdot\frac{1}{3} \\ &= \left(P\cdot\frac{1}{2} + Q\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3} + R\cdot\frac{1}{3}.\end{aligned}$$



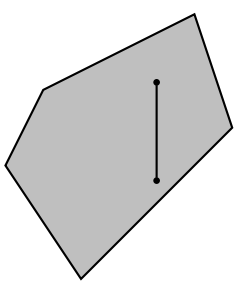
Also liegt S auf der Seitenhalbierenden.
Vertauschung der Punkte ergibt:
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in S (Schwerpunkt).

DEFINITION. Sei $\mathfrak{A}$ ein affiner Raum über einem geordneten Körper. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathfrak{A}$ heißt *konvex*, wenn A mit P_1, P_2 auch jeden Punkt der *Verbindungsstrecke*

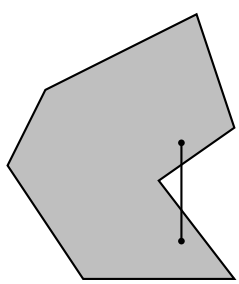
$$[P_1, P_2] = \{P = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

enthält.

BEISPIEL.



konvex



nicht konvex

DEFINITION. Ein Baryzenter

$$P = \sum_{i=1}^{r} P_i \lambda_i \,, \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

mit $\lambda_i \geq 0$ heißt eine *Konvexkombination*.

BEMERKUNG. Ist A konvex, so ist jede Konvexkombination von Punkten aus A wieder ein Punkt von A. (A ist gegen Bildung von Konvexkombination abgeschlossen.)

BEWEIS. Induktion nach der Länge r der Konvexkombination.
Für $r = 1$ ist nichts zu zeigen.
Sei nun $P = P_1\lambda_1 + \cdots + P_r\lambda_r$ eine Konvexkombination mit $r > 1$. Wegen $\sum \lambda_i = 1$ ist mindestens ein $\lambda_i \neq 0$, etwa λ_1. Da die $\lambda_i \geq 0$ sind, ist damit auch $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Weil A konvex ist, ist daher

$$Q := P_1\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} + P_2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \in A.$$

Es folgt

$$P = P_1\lambda_1 + \cdots P_r\lambda_r = Q(\lambda_1 + \lambda_2) + P_3\lambda_3 + \cdots + P_r\lambda_r.$$

Nach Induktion ist damit $P \in A$. □

SATZ 7.1. *Der Durchschnitt konvexer Mengen ist wieder konvex.*

BEWEIS. Seien A_i, $i \in I$, konvexe Teilmengen von $\mathfrak{A}$ und $P_1, P_2 \in A = \bigcap_i A_i$. Dann ist

$$P_1, P_2 \in A_i \quad \text{für alle } i \in I,$$

also, weil die A_i konvex sind,

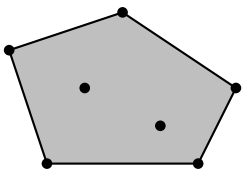
$$[P_1, P_2] \subseteq A_i \quad \text{für alle } i \in I,$$

also

$$[P_1, P_2] \subseteq \bigcap_i A_i = A.$$

Also ist A konvex. □

DEFINITION. Sei S eine nicht-leere Teilmenge von $\mathfrak{A}$. Die *konvexe Hülle* von S, geschrieben $[S]$, ist die kleinste konvexe Teilmenge von $\mathfrak{A}$, die S enthält (= Durchschnitt aller konvexen Teilmengen von $\mathfrak{A}$, die S enthalten.)



$[S]$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus S.

BEWEIS. Weil S konvex ist, liegen alle Konvexkombinationen

$$P = \sum P_i \lambda_i \,, \qquad P_i \in S$$

in $[S]$. Umgekehrt ist nach Hilfssatz 7.1 diese Menge konvex. □

DEFINITION. Ist S endlich, so heißt S ein *konvexes Polytop*.

$$C = [P_1, \dots, P_r] = \left\{ \sum P_i \lambda_i \;\middle|\; \sum \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

$P \in C$ heißt *Extremalpunkt* oder *Ecke* von C, wenn P nicht Konvexkombination zweier Punkte $P_1, P_2 \neq P$ aus C ist.

$P \in C$ ist genau dann eine Ecke von C, wenn aus $P = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i \geq 0$, stets $P_1 = P_2 = P$ folgt.

SATZ 7.2. *Ist $C = [P_1, \dots, P_r]$ und P eine Ecke von C, so ist P einer der Punkte P_i, $i = 1, \dots, r$.*

BEWEIS. Wegen $P \in [P_1, \dots, P_r]$ ist

$$P = \sum_{i=1}^{r} P_i \lambda_i, \qquad \sum \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0.$$

Sei $\lambda_1 > 0$. Aus $\lambda_1 = 1$ folgt $\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$, also $P = P_1$.

Sei $0 < \lambda_1 < 1$. Dann ist

$$P = P_1\lambda_1 + \left(P_2\lambda_2 (1-\lambda_1)^{-1} + \cdots + P_r\lambda_r (1-\lambda_1)^{-1}\right)(1-\lambda_1).$$

Also ist P keine Ecke. □

SATZ 7.3. *Jedes konvexe Polytop C ist die konvexe Hülle seiner Ecken.*

BEWEIS. Sei $C = [P_1, \dots, P_r]$, r minimal.
Behauptung: Alle P_i sind Ecken.
Sei etwa

$$P_1 = Q\alpha + R\beta, \qquad \alpha + \beta = 1,\ 0 < \alpha, \beta < 1$$

mit

$$Q = \sum_{i=1}^{r} P_i\lambda_i,\ R = \sum_{i=1}^{r} P_i\mu_i \in C, \qquad \sum \lambda_i = \sum \mu_i = 1,\ \lambda_i\mu_i \geq 0.$$

Dann ist

$$P_1 = \sum_{i=1}^{r} P_i(\lambda_i\alpha + \mu_i\beta) = \sum_{i=1}^{r} P_i\delta_i.$$

1. Fall: $\delta_1 < 1$. Dann ist

$$P_1 = P_2\delta_2 (1-\delta_1)^{-1} + \cdots + P_r\delta_r (1-\delta_1)^{-1},$$

also $C = [P_2, \dots, P_r]$, im Widerspruch zur Minimalität von R.

2. Fall: $\delta_1 = \lambda_1\alpha + \mu_1\beta = 1 = \alpha + \beta$. Dann folgt

$$\underbrace{(1-\lambda_1)}_{\geq 0}\alpha + \underbrace{(1-\mu_1)}_{\geq 0}\beta = 0,$$

d.h. es ist $\lambda_1 = \mu_1 = 1$. Also ist

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0, \quad \mu_2 = \cdots = \mu_r = 0$$

und damit

$$Q = \sum P_i\lambda_i = P_1, \qquad R = \sum P_i\mu_i = P_1.$$

Also ist P_1 eine Ecke von C. □

KAPITEL 8

Inhomogene lineare Ungleichungen

With the rise of interest in such areas as linear programming and the theory of games, new emphasis has been placed on the study of systems of linear inequalities.

BRAUNSCHWEIGER, CLARK, *1962*

In diesem Kapitel untersuchen wir die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Ungleichungssystems

$$(*) \qquad Ax \leq b \iff a_1 x \leq \beta_1, \ldots, a_m x \leq \beta_m, \quad a_i \in V^*.$$

Es sei $L = \{x \in V \mid Ax \leq b\}$ die Lösungsmenge von $(*)$.

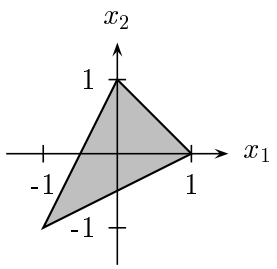
Sei $\mathfrak{A}$ ein affiner Raum zu V und $\mathcal{O}$ ein ausgezeichneter Punkt in $\mathfrak{A}$ (Ursprung, fest gewählt).

DEFINITION. $\mathfrak{L} := \mathcal{O} \dotplus L$ heißt *Lösungspolyeder* von $(*)$.

BEISPIEL.

1.) Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

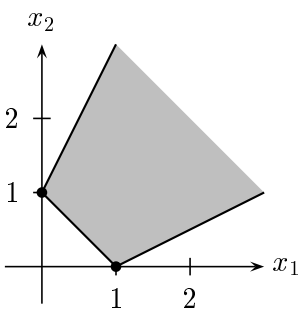


Als Lösungmenge erhält man das Polytop

$$\mathfrak{L} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

2.) Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$



Als Lösungemenge erhält man

$$\mathfrak{L} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \dotplus \operatorname{cone} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

SATZ 8.1. *Das Lösungspolyeder $\mathfrak{L}$ ist konvex.*

BEWEIS. Sei $P = Q_1\lambda + Q_2(1-\lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$ mit $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{L}$. Ist

$$x_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}Q_1}, \quad x_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}Q_2}, \quad x = \overrightarrow{\mathcal{O}P},$$

so folgt

$$x = x_1\lambda + x_2(1-\lambda),$$

also

$$\begin{aligned} Ax &= Ax_1\lambda + Ax_2(1-\lambda) \\ &\le b\lambda + b(1-\lambda) = b. \end{aligned}$$

Damit ist $x \in L$, also $P = \mathcal{O} \dotplus x \in \mathfrak{L}$. □

Definiere

$$\widehat{V} := K \times V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in K,\, x \in V \right\}.$$

Bezüglich

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \cdot \beta := \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ x\beta \end{pmatrix}$$

wird $\widehat{V}$ ein rechter Vektorraum über K mit

$$\dim \widehat{V} = 1 + \dim V = 1 + n.$$

Ist $\{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis von V, so ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\widehat{V}$.

Dualer Vektorraum $\widehat{V}^*$:

$$K \times V^* = \{(\beta, a) \mid \beta \in K,\, a \in V^*\}$$

ist ein linker K-Vektorraum der Dimension $1+n$.

HILFSSATZ 8.1. *Durch*

$$(\beta, a) \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} := \beta\alpha + ax \in K$$

wird eine Linearform $\widehat{V} \to K$ definiert. Der Dualraum $\widehat{V}^*$ ist isomorph zu $K \times V^*$.

HILFSSATZ 8.2. *Es sei L die Lösungsmenge von*

$$(*) \qquad a_i x \le \beta_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

und $H = \left\{ \binom{1}{x} \in \widehat{V} \right\}$. *Ist*

$$\widehat{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \in \widehat{V} \;\middle|\; (-1, 0) \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \le 0 \ \wedge \ (-\beta_i, a_i) \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \le 0 \text{ für } i = 1, \dots, m \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \ge 0 \ \wedge \ a_i x \le \beta_i \alpha \text{ für } i = 1, \dots, m \right\},$$

so gilt

$$\widehat{L} \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in L \right\}.$$

SATZ 8.2. *Das Lösungspolyeder $\mathfrak{L} = \mathcal{O} \dotplus L$ von $(*)$ ist leer oder hat die Form*

$$\mathfrak{L} = [P_1, \dots, P_r] \dotplus \operatorname{cone}(y_{r+1}, \dots, y_k).$$

BEWEIS. $\widehat{L}$ ist Lösungskegel eines homogenen Systems, ist also nach dem Satz von MINKOWSKI endlich erzeugt,

$$\widehat{L} = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_k \\ y_k \end{pmatrix} \right), \qquad \alpha_i \ge 0.$$

Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$ und $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_k = 0$. Weil die Erzeugenden um einen positiven Faktor abgeändert werden können, kann man

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1$$

annehmen, also

$$\widehat{L} = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ y_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_{r+1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ y_k \end{pmatrix} \right).$$

Für $\binom{1}{x} \in \widehat{L} \cap H$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \begin{pmatrix} 1 \\ y_i \end{pmatrix} \lambda_i + \sum_{i=r+1}^{k} \begin{pmatrix} 0 \\ y_i \end{pmatrix} \lambda_i, \qquad \lambda_i \ge 0,$$

also

$$1 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i, \qquad \lambda_i \ge 0$$

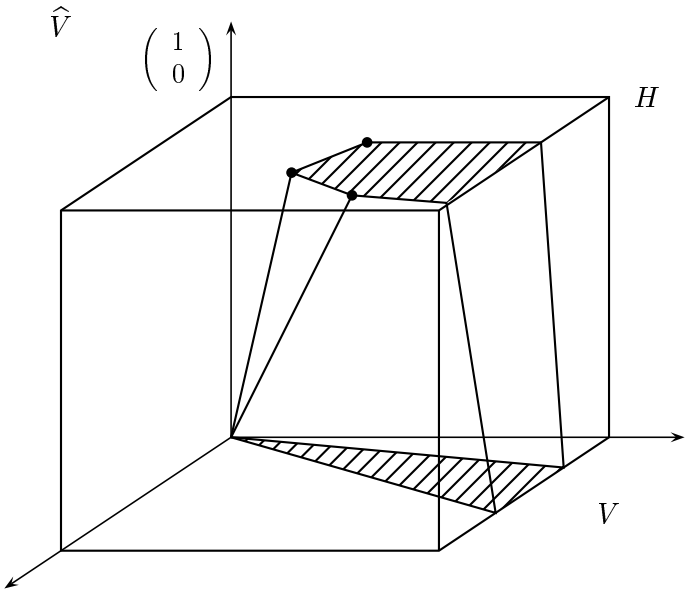
$$x = \sum_{i=1}^{r} y_i \lambda_i + \sum_{i=r+1}^{k} y_i \lambda_i.$$

Nach Hilfssatz 8.2 ist für $x = \overrightarrow{\mathcal{O}P} \in L$, $P \in \mathfrak{L}$ und $y_i = \overrightarrow{\mathcal{O}P}_i$

$$\begin{aligned} P = \mathcal{O} \dotplus x &= \left(\mathcal{O} \dotplus \sum_{i=1}^{r} \overrightarrow{\mathcal{O}P}_i \lambda_i \right) \dotplus \sum_{i=r+1}^{k} y_i \lambda_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} P_i \lambda_i \dotplus \sum_{i=r+1}^{k} y_i \lambda_i \\ &\in [P_1, \ldots, P_r] \dotplus \operatorname{cone}(y_{r+1}, \ldots, y_k). \end{aligned}$$

Aus $P \in [P_1, \ldots, P_r] \dotplus \operatorname{cone}(y_{r+1}, \ldots, y_k)$ folgt umgekehrt $P \in \mathfrak{L}$ nach Hilfssatz 8.2. Also ist

$$\mathfrak{L} = [P_1, \ldots, P_r] \dotplus \operatorname{cone}(y_{r+1}, \ldots, y_k). \qquad \square$$



Ergänzungen

(A) $C = \operatorname{cone}(y_{r+1}, \ldots, y_k)$ heißt *Rezessionskegel* oder *charakteristischer Kegel*. Es ist die homogene Lösung: $C = \{x \mid Ax \leq 0\}$. $\mathfrak{L}$ ist genau dann ein Polytop, wenn $C = 0$ ist.

(B) Ist das Ungleichungssystem normal, also $\operatorname{Rang} A = n$, so sind $\{P_1, \ldots, P_r\}$ die Ecken von $\mathfrak{L}$ und damit eindeutig bestimmt.

(C) Jede Menge $\mathfrak{L} = [P_1, \ldots, P_r] \dotplus \operatorname{cone}(y_{r+1}, \ldots, y_k)$ ist Lösungspolyeder eines linearen Ungleichungssystems. (Satz von WEYL.)

Verfahren

Gegeben sei das Ungleichungssystem

$$(*) \qquad a_i x \leq \beta_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Man erhält das homogene System

$$(**) \qquad \begin{cases} -\alpha & \leq 0 \\ -\beta_i\alpha + a_i x & \leq 0 \end{cases}$$

mit $n+1$ Unbekannten und $m+1$ Ungleichungen.

Man löst $(**)$ mit dem Verfahren von MOTZKIN und erhält

$$\widehat{L} = \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ y_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_{r+1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ y_k \end{pmatrix}\right)$$

Dann ist

$$\mathfrak{L} = [P_1, \ldots, P_r] \dotplus \operatorname{cone}(y_{r+1}, \ldots, y_k)$$

mit $\overrightarrow{\mathcal{O}P}_i = y_i$.

BEISPIEL. Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & \leq & -1 \\ x & + & 2y & + & z & \leq & -1 \\ x & + & y & + & 2z & \leq & -1 \\ x & + & y & + & z & \leq & -1 \end{array}$$

Im ersten Schritt erhalten wir das homogene Ungleichungsssystem

$$(**) \qquad \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -u_1 & = & -\alpha & & & & & & & \leq & 0 \\ -u_2 & = & \alpha & + & 2x & + & y & + & z & \leq & 0 \\ -u_3 & = & \alpha & + & x & + & 2y & + & z & \leq & 0 \\ -u_4 & = & \alpha & + & x & + & y & + & 2z & \leq & 0 \\ -u_5 & = & \alpha & + & x & + & y & + & z & \leq & 0 \end{array}$$

Gaußelimination liefert

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} u = Bu$$

und

$$0 = u_1 - u_2 - u_3 - u_4 + 4u_5, \qquad u_i \geq 0.$$

Das Motzkin-Verfahren liefert für u die folgenden Spaltenvektoren

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Damit ergibt sich für Bu

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}$$

Die Vektoren, deren erste Komponente 1 ist, ergeben das Lösungspolytop, die mit erster Komponente 0 den Rezessionskegel.

Ergebnis:

$$\mathfrak{L} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \dotplus \operatorname{cone} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

KAPITEL 9

Lineares Programmieren

To compute n! sums of n terms and to choose a greatest sum is mathematical trivial; there remains a typical problem of numerical analysis: to find the solution, or an approximation of it, in a fast and convenient way, even for large n, or for a large set of matrices.

MOTZKIN, *1956*

Allgemeines Problem:
Gegeben seien $a_1, \ldots, a_m, c \in V^*$ und $\beta_i \in K$. Gesucht ist eine Lösung x von

$$(*) \qquad a_i x \leq \beta_i, \qquad i \in I = \{1, \ldots, m\},$$

für die cx minimal wird.

Sei

$$\delta = \min\{cx \mid Ax \leq b\}.$$

Jedes $x \in L = \{x \mid Ax \leq b\}$ heißt *zulässig*. c heißt *Zielfunktion* oder *Kostenfunktion*. $x_0 \in L$ heißt optimal, wenn $\delta = cx_0$ ist. Es ist dann

$$cx_0 \leq cx$$

für alle $x \in L$.

BEMERKUNG. Ein Minimalproblem geht in ein Maximalproblem über, wenn man c durch $-c$ ersetzt. Bei einem Maximalproblem spricht man dann von einer *Gewinnfunktion*.

SATZ 9.1. *Sei*

$$\mathfrak{L} = [P_1, \ldots, P_r] \dotplus \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_k)$$

das Lösungspolyeder von $(*)$. *Das lineare Optimierungsproblem*

$$\delta = \min\{cx \mid Ax \leq b\}$$

besitzt genau dann eine Lösung, wenn

$$cy_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

ist. Der optimale Wert wird in einem der Punkte P_i *angenommen, also*

$$\delta = cx_i$$

für $x_i = \overrightarrow{OP_i}$.

BEWEIS. Jeder Punkt aus $\mathfrak{L}$ hat die Form

$$P = \sum_{i=1}^{r} P_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{k} y_i\mu_i$$

mit $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$. Ist $x = \overrightarrow{OP}$, so ist

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{k} y_i\mu_i,$$

also

$$cx = \sum_{i=1}^{r} cx_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{k} cy_i\mu_i.$$

Ist $cy_i < 0$ für ein i, so ist cx nicht nach unten beschränkt, da μ_i beliebig groß werden kann. Also ist

$$cy_i \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, k$$

für die Existenz des Minimums notwendig.

Sei nun umgekehrt $cy_i \geq 0$ für alle i und

$$\mu = \min\{cx_i \mid i = 1, \ldots, r\},$$

etwa $\mu = cx_j$ für ein j. Dann ist für $x \in L$

$$cx = \sum_{i=1}^{r} cx_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{cy_i}_{\geq 0}\mu_i$$

$$\geq \sum_{i=1}^{r} cx_j \cdot \lambda_i = cx_j \cdot \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = cx_j,$$

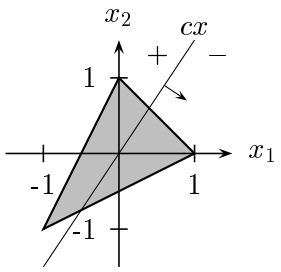
also x_j optimal. □

KOROLLAR 9.1. *Ist* $\operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_k) = 0$, *so existieren optimale Lösungen für das Minimal- und Maximalproblem.*

BEISPIEL.

1.) Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$



Als Lösungmenge erhält man das Polytop

$$\mathfrak{L} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

Nach Korollar 9.1 ist also jedes Maximal- und Minimalproblem lösbar. Ist nun die Zielfunktion

$$cx = 3x_1 - 2x_2,$$

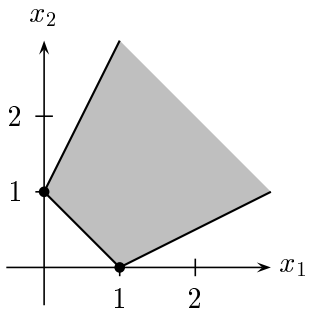
gegeben, so gilt nach Satz 9.1

$$\delta = \min\{cx \mid x \in L\} = \min\{-1, 3, -2\} = -2.$$

Der optimale Wert wird angenommen in $\binom{0}{1}$.

2.) Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$



Als Lösungemenge erhält man

$$\mathfrak{L} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \dot{+} \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Für die Zielfunktion $cx = 3x_1 - 2x_2$ existiert wegen

$$cy_1 = (3, -2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$cy_2 = (3, -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

weder das Maximum noch das Minimum.

Anwendungen des linearen Programmierens

Beispiel 1: Diätproblem (Stigler 1945).
Ziel ist es, einen wöchentlichen Speiseplan zu erstellen, bei dem die Kosten minimal sind.

Speisesorten : $S_1, \ldots, S_n$ (Brot, Milch, Obst, ...)
Nährstoffe : $N_1, \ldots, N_k$ (Eiweiße, Kohlenhydrate, ...)

$\alpha_{ij} =$ Menge des Nährstoffes N_i, der in einer Gewichtseinheit der Speisesorte S_j enthalten ist.

$\beta_i =$ minimale Menge des Nährstoffes N_i, die eine Person pro Woche benötigt

$x_j =$ Menge der Speisesorte S_j pro Person

$c_j =$ Kosten pro Gewichtseinheit von S_j

Somit ergibt sich folgende Optimierungsaufgabe

$$cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \stackrel{!}{=} \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i$$

(jede Person erhält die benötigte Menge von Nährstoffen).

BEISPIEL 2: Fabrikationsproblem

$$\begin{aligned} S_1, \ldots, S_n: &\ \text{Produkte} \\ x_1, \ldots, x_n: &\ \text{Anzahl der Produkte, die hergestellt werden} \\ c_1, \ldots c_n: &\ \text{Gewinn pro Einheit des Produktes } S_i \\ \text{Zielfunktion}: &\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \stackrel{!}{=} \max \end{aligned}$$

Die Restriktionen ergeben sich durch vorhandene Kapazitäten (Maschinen, Arbeiter, Material, ...):

$$\begin{aligned} \sum \alpha_{ij} x_j &\leq \beta_i \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

z.B.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} = &\ \text{Anzahl der Arbeitsstunden, die für die Herstellung einer} \\ &\ \text{Einheit von } S_j \text{ benötigt werden.} \\ \beta_i = &\ \text{verfügbare Arbeitsstunden.} \end{aligned}$$

KAPITEL 10

Die Simplexmethode

The simplex method was designed by Dantzig (1951), and is, at the moment, the method for linear programming. Although some artificial examples show exponential running time, in practice and on average the method is very efficient. – The idea of the simplex method is to make a trip on the polyhedron underlying a linear program, from vertex to vertex along edges, until an optimal vertex is reached.

SCHRIJVER, *1986*

Austauschverfahren

Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$, $\{b_1, \dots b_n\}$ eine Basis von V und $\{a_1, \dots, a_m\}$ beliebige Vektoren aus V. Dann besitzt jedes a_i eine eindeutige Darstellung

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_k, \qquad \alpha_{ik} \in K, \;\; i = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Man erhält folgendes Schema:

	b_1	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n
a_1	α_{11}				α_{1m}
$\vdots$					
a_i			$\boxed{\alpha_{ij}}$		
$\vdots$					
a_m	α_{m1}				α_{mn}

Ein Basisvektor b_j soll nun gegen ein a_i ausgetauscht werden, so daß

$$b_1, \dots, b_{j-1}, a_i, b_{j+1}, \dots, b_m$$

eine Basis von V bilden.

Dies ist möglich, wenn $\alpha_{ij} \neq 0$ ist. Löst man (1) nach b_j auf, so erhält man

$$b_j = \alpha_{ij}^{-1} a_i - \alpha_{ij}^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_{ik} b_k. \tag{2}$$

Für $r \neq i$ ist dann

$$a_r = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_{rk} b_k + \alpha_{rj} b_j.$$

Einsetzen ergibt nun

$$a_r = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\alpha_{rk} - \alpha_{rj}\alpha_{ij}^{-1}\alpha_{ik})\, b_k + \alpha_{rj}\alpha_{ij}^{-1} a_i. \tag{3}$$

α_{ij} heißt *Pivot* (Drehpunkt).

Regeln

(1) Der Pivot wird durch sein Inverses ersetzt.
(2) In der Pivotspalte werden alle Koeffizienten außerhalb des Pivots durch den Pivot geteilt.
(3) In der Pivotzeile werden alle Koeffizienten außerhalb des Pivots durch den negativen Pivot geteilt.
(4) Für $r \neq i$, $k \neq j$ wird α_{rk} ersetzt durch

$$\alpha_{rk} - \alpha_{rj}\alpha_{ij}^{-1}\alpha_{ik}.$$

BEISPIEL.

	b_1	b_2	b_3
a_1	-3	0	$\boxed{-1}$
a_2	-3	-6	-2
a_3	-10	-5	-1
a_4	350	260	100

	b_1	b_2	a_1
b_3	-3	0	-1
a_2	3	$\boxed{-6}$	2
a_3	-7	-5	1
a_4	50	260	-100

	b_1	a_2	b_3
b_2	-3	0	-1
a_2	$\frac{3}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
a_3	$-\frac{19}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$
a_4	180	$-\frac{260}{6}$	$-\frac{40}{3}$

Die Simplexmethode (Dantzig 1951)

Wir betrachten das lineare Programm $\delta = \min\{cx \mid Ax \leq b\}$ unter den Nebenbedingungen

$$a_i x \leq \beta_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{$*$}$$

mit $a_i, c \in V^*$.

VORAUSSETZUNG. Sei $(*)$ normal und eine Ecke $x_0 \in L$ bekannt.

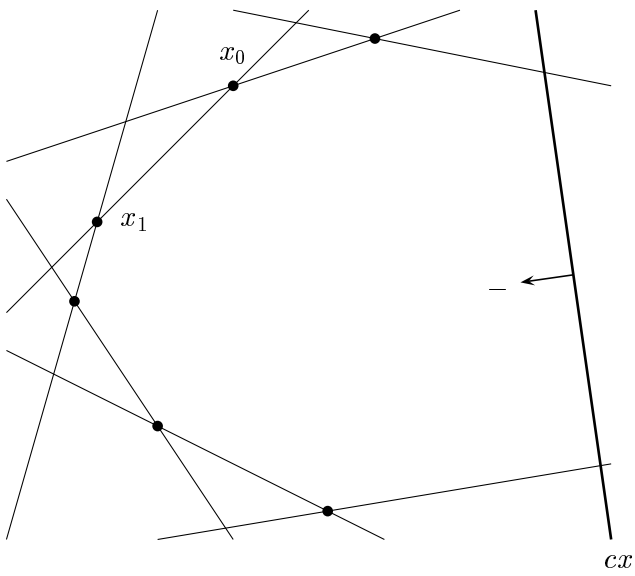
Es gibt dann n linear unabhängige $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ mit

$$a_{i_k} x_0 = \beta_i, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Zur Vereinfachung seien dies $a_1, \ldots, a_n$, also

$$a_i x_0 = \beta_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$
$$a_i x_0 \leq \beta_i \quad \text{für } i > n$$

Da $(*)$ normal ist, ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V^*.



Bezüglich $\{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzen a_i für $i > n$ sowie c eine Darstellung

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j, \qquad i = n+1, \ldots, m$$

$$c = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Man erhält folgendes Tableau für x_0:

	β_1	$\cdots$	β_i	$\cdots$	β_n	Werte	β_k
	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n	für x_0	
a_{n+1}	$\alpha_{n+1,1}$	$\cdots$		$\cdots$	$\alpha_{n+1,n}$	$a_{n+1}x_0$	β_{n+1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	α_{i1}	$\cdots$	α_{ij}	$\cdots$	α_{in}	$a_i x_0$	β_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	α_{m1}	$\cdots$		$\cdots$	α_{mn}	$a_m x_0$	β_m
c	γ_1	$\cdots$	γ_j	$\cdots$	γ_n	cx_0	

Hierbei ist

$$a_i x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j, \qquad i = n+1, \ldots, m$$

$$cx_0 = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j x_0 = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \beta_j.$$

Man erhält $a_i x_0$, indem man das Skalarprodukt der obersten Zeile mit der i-ten Zeile bildet, und cx_0, indem man das Skalarprodukt der obersten Zeile mit der untersten Zeile bildet.

ZIEL: Tausche a_i und a_j, so daß $cx_1 \leq cx_0$ ist.

SATZ 10.1. *Sind die $\gamma_j \leq 0$ für $j = 1, \ldots, n$, so ist x_0 optimal.*

BEWEIS. Sei $x \in L$, also $a_i x \leq \beta_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Dann ist

$$cx = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\gamma_j}_{\leq 0} \underbrace{a_j x}_{\leq \beta_j} \geq \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j x_0 = cx_0.$$

Also ist x_0 optimal. □

SATZ 10.2. *Existiert ein optimaler Vektor, so tritt in jeder k-ten Spalte mit $\gamma_k > 0$ ein negativer Koeffizient α_{ik} auf.*

BEWEIS. Annahme: $\alpha_{ik} \geq 0$ für alle $i > n$.
Weil $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V^* ist, gibt es ein $x \in V$ mit

$$\begin{cases} a_k x = 0 & \text{für } k = 1, \ldots, n,\ k \neq j \\ a_j x = -1 \end{cases}$$

Für $i > n$ ist

$$a_i x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_k x = \alpha_{ij} \cdot (-1) \leq 0,$$

also $Ax \leq 0$. Da ein optimaler Vektor existiert, ist $cx \geq 0$ nach Satz 9.1. Es ist aber

$$cx = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k a_k x = \underbrace{\gamma_j}_{>0} \cdot (-1) < 0.$$

Also ist die Annahme falsch. □

Nach Austausch von a_i und a_j erhält man eine neue Basis

$$\{a_1, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n\}, \qquad i > n.$$

Es ist nun das Ziel, einen Vektor $x_1 \in L$ mit $cx_1 \leq cx_0$ zu finden.
Definiere x_1 durch

$$\begin{cases} a_r x_1 = \beta_r, & 0 \leq r \leq n,\ r \neq j \\ a_i x_1 = \beta_i \end{cases}$$

HILFSSATZ 10.1. *Ist*

$$\delta_i = \alpha_{ij}^{-1}(\beta_i - a_i x_0),$$

so gilt

(1) $a_j x_1 = \beta_j + \delta_i$
(2) $a_r x_1 = a_r x_0 + \alpha_{rj}\delta_i,\ r > n,\ r \neq i$
(3) $cx_1 = cx_0 + \gamma_j \delta_i$

BEWEIS.

(1) Wegen $a_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_k$ ist

$$\alpha_{ij} a_j = a_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_{ik} a_k,$$

also

$$\alpha_{ij} a_j x_1 = \beta_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_{ik} \beta_k = \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_k + \alpha_{ij} \beta_j = (\beta_i - a_i x_0) + \alpha_{ij} \beta_j.$$

Hieraus folgt (1).

(2) Mit (1) ergibt sich

$$\begin{aligned} a_r x_1 &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{rk} a_k x_1 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_{rk} a_k x_1 + \alpha_{rj} \cdot a_j x_1 \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_{rk} \beta_k + \alpha_{rj} (\beta_j + \delta_i) = a_r x_0 + \alpha_{rj} \delta_i \end{aligned}$$

(3) Analog. □

Wahl eines geeigneten Pivots

(1) Wähle j mit $\gamma_j > 0$. Dies ist möglich, falls x_0 nicht optimal ist.

(2) Betrachte in der j-ten Spalte alle Indizes i mit $\alpha_{ij} < 0$. Solche gibt es nach Satz 10.2, falls optimale Lösungen existieren. Bilde

$$\delta_i = \alpha_{ij}^{-1} (\beta_i - a_i x_0) \leq 0.$$

Wähle ein i mit größtem δ_i.

SATZ 10.3. *x_1 ist eine Ecklösung mit*

$$c x_1 = c x_0 + \gamma_j \delta_i \leq c x_0.$$

BEWEIS. 1.) Wir zeigen zuerst, daß x_1 eine Ecklösung ist, also

$$a_r x_1 \leq \beta_r \qquad \text{für } r = 1, \ldots, m.$$

Nach Definition von x_1 gilt dies für r mit

$$1 \leq r \leq n,\ r \neq j, \qquad \text{und } r = i.$$

Für die übrigen Indizes gilt

(a) $r = j$: Weil $\delta_i \leq 0$ ist, folgt

$$a_j x_1 = \beta_j + \delta_i \leq \beta_j$$

nach Hilfssatz 10.1.

(b) $r > n$, $r \neq i$: nach Hilfssatz 10.1 ist

$$a_r x_1 = a_r x_0 + \alpha_{rj}\delta_i.$$

Ist $a_{rj} \geq 0$, so ist $a_r x_1 \leq a_r x_0 \leq \beta_r$.
Ist $a_{rj} < 0$, so ist nach Definition von i

$$\alpha_{rj}^{-1}(\beta_r - a_r x_0) \leq \alpha_{ij}^{-1}(\beta_i - a_i x_0) = \delta_i,$$

also

$$a_r x_1 \leq a_r x_0 + \alpha_{rj}\alpha_{rj}^{-1}(\beta_r - a_r x_0) = \beta_r.$$

Damit ist x_1 eine Ecklösung.

2.) Nach Definition von j ist $\gamma_j > 0$, also nach Hilfsatz 10.1

$$cx_1 = cx_0 + \gamma_j\delta_i \leq cx_0. \qquad \square$$

BEMERKUNG. Im Fall $\delta_i = 0$, also $a_i x_0 = \beta_i$, ist $cx_1 = cx_0$. Es können daher Zyklen

$$x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_0$$

auftreten. Ein Beispiel hierzu findet man bei BEALE (1955).

Bei geeigneter Pivotwahl läßt sich dies vermeiden (BLAND's pivoting rule, 1977). Nach endlich vielen Schritten erhält man eine optimale Lösung.

BEISPIEL. (Fabrikationsmodell).
Ein Bauer bewirtschaftet einen Hof von 20 ha. Er besitzt einen Stall für 10 Kühe. Anstelle einer Kuh kann er 3 Schweine unterbringen. Pro Jahr bringt er 2400 Arbeitsstunden auf und benötigt

pro Kuh	200 Arbeitsstunden + $\frac{1}{2}$ ha Land
pro Schwein	20 Arbeitsstunden + $\frac{1}{3}$ ha Land

Für den Anbau von 1 ha Weizen benötigt er zusätzlich 100 Arbeitsstunden.
Der jährliche Gewinn beträgt

pro Kuh	350 DM
pro Schwein	100 DM
für 1 ha Weizen	260 DM

Für x_1 Kühe, x_2 ha Weizen, x_3 Schweine ergibt sich also

$$350x_1 + 260x_2 + 100x_3 \quad \text{Max}$$

oder

$$cx = -350x_1 - 260x_2 - 100x_3 \quad \text{Min}.$$

An Restriktionen ergeben sich

Arbeitszeit:		$200x_1 + 100x_2 + 20x_3 \leq 2400$
Land	:	$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 20$
Stall	:	$3x_1 + x_3 \leq 30$
	:	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Damit lautet das lineare Programm:

$$cx = -350x_1 - 260x_2 - 100x_3 \quad \text{Min}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
a_1x & = & -x_1 & & & & & \leq & 0 \\
a_2x & = & & & -x_2 & & & \leq & 0 \\
a_3x & = & & & & & -x_3 & \leq & 0 \\
a_4x & = & 3x_1 & & & + & x_3 & \leq & 30 \\
a_5x & = & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & \leq & 120 \\
a_6x & = & 10x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 120
\end{array}$$

Als Tableau für $x_0 = (0, 0, 0)$ erhält man

	0	0	0	Wert	β	$\delta_i = \alpha_{ij}^{-1}(\beta_i - a_i x_0)$
	a_1	a_2	a_3			
a_4	-3	0	$\boxed{-1}$	0	30	$-\ 30$
a_5	-3	-6	-2	0	120	$-\ 60$
a_6	-10	-5	-1	0	120	-120
c	350	260	100	0		

Tausche a_3 gegen a_4:

	0	0	30	Wert	β	δ_i
	a_1	a_2	a_4			
a_3	-3	0	-1	-30	0	
a_5	3	$\boxed{-6}$	2	60	120	-10
a_6	-7	-5	1	30	120	-18
c	50	260	-100	-3000		

Tausche a_2 gegen a_5:

	0	120	30	Wert	β	δ_i
	a_1	a_5	a_4			
a_3	-3	0	-1	-30	0	-10
a_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	-10	0	
a_6	$\boxed{-\frac{19}{2}}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	80	120	$-\frac{80}{19}$
c	180	$-\frac{130}{3}$	$-\frac{40}{3}$	-5600		

Tausche a_1 gegen a_6:

	120	120	30	Wert
	a_6	a_5	a_4	
a_3	$\frac{6}{19}$	$-\frac{5}{19}$	$-\frac{15}{19}$	$-\frac{330}{19}$
a_2	$-\frac{1}{19}$	$-\frac{7}{57}$	$\frac{17}{57}$	$-\frac{230}{19}$
a_1	$-\frac{2}{19}$	$\frac{5}{57}$	$-\frac{4}{57}$	$-\frac{80}{19}$
c	$-\frac{360}{19}$	$-\frac{1570}{57}$	$-\frac{1480}{57}$	$-\frac{120800}{19}$

Nach Satz 10.1 ist

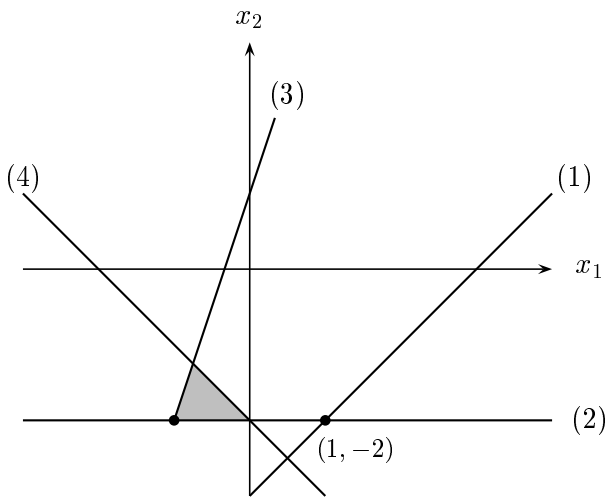
$$x_3 = \left(\frac{80}{19}, \frac{230}{19}, \frac{330}{19}\right)$$

optimal. Der maximale Gewinn beträgt ≈ 6358 DM.
(Beispiel aus [3].)

Ermittlung einer Anfangsecke

Beispiel. Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned}
(1) \qquad x_1 - x_2 &\leq 3 \\
(2) \qquad -x_2 &\leq 2 \\
(3) \qquad -3x_1 + x_2 &\leq 1 \\
(4) \qquad x_1 + x_2 &\leq -2
\end{aligned}$$



$(-1, -2)$ ist Ecklösung für die ersten drei Ungleichungen, jedoch nicht zulässig, weil (4) nicht erfüllt ist.

Betrachte nun das System (1) – (3) mit der Ecklösung $(-1, -2)$ und der Zielfunktion

$$cx = x_1 + x_2 \quad \text{Min}.$$

Ist das Minimum $\delta \leq -2$, so ist die optimale Lösung eine Ecklösung für (1) – (4). Andernfalls existiert keine Lösung.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall

$$(*) \qquad a_1 x \leq \beta_1, \ \ldots, \ a_m x \leq \beta_m,$$

setzen aber zunächst voraus, daß $(*)$ normal, also $\operatorname{Rang} A = n$ ($\iff \langle a_1, \ldots, a_m \rangle = V^*$) ist. Ausgeschrieben erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Für jedes a_i hat man

$$\begin{aligned} a_i &= (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \\ &= \alpha_{i1} \cdot (1, 0, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_{in} \cdot (0, \ldots, 0, 1) \\ &= \alpha_{i1} b_1 + \cdots \alpha_{in} b_n. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgendes Tableau:

	b_1	$\cdots$	b_n
a_1	α_{11}	$\cdots$	α_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	α_{m1}	$\cdots$	α_{mn}

Tausche nun nach dem Pivotverfahren $b_1, \ldots, b_n$ gegen Vektoren a_i aus. Man erhält

	a_1	$\cdots$	a_n
b_1			
$\vdots$			
b_n			
a_{n+1}			
$\vdots$			
a_m			

Definiere x_0 durch

$$a_1 x_0 = \beta_1, \ \ldots, \ a_n x_0 = \beta_n.$$

Weiterhin gelte

$$\begin{gathered} a_{n+1} x_0 \leq \beta_{n+1}, \ \ldots, \ a_{k-1} x_0 \leq \beta_{k-1} \\ a_k x_0 > \beta_k, \ \ldots \ a_m x_0 > \beta_m, \end{gathered}$$

also

	$\beta_1 \cdots \beta_n$ / $a_1 \cdots a_n$	Wert	β
b_1		b_1x_0	Koord. von x_0
$\vdots$		$\vdots$	
b_n		b_nx_0	
a_{n+1}		$a_{n+1}x_0$	$\leq \beta_{n+1}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_{k-1}		$a_{k-1}x_0$	$\leq \beta_{k-1}$
a_k		a_kx_0	$> \beta_k$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_m		a_mx_0	$> \beta_m$

Fasse a_k als Zielfunktion auf und ermittle

$$\delta = \min\{a_k x \mid a_1 x \leq \beta_1, \ldots, a_{k-1}x \leq \beta_{k-1}\}$$

ausgehend von der Ecklösung x_0.

Mit dem Austauschverfahren erhält man eine optimale Lösung x_1 mit

$$a_{i_1}x_1 = \beta_{i_1},\ \ldots,\ a_{i_n}x_1 = \beta_{i_n}.$$

Ist $\delta > \beta_k$, so existiert keine optimale Lösung des Gesamtsystems. Andernfalls gilt für die ersten k Ungleichungen

$$a_1x_1 \leq \beta_1,\ \ldots,\ a_kx_1 = \delta \leq \beta_k.$$

x_1 erfüllt gegenüber x_0 mindestens eine weitere Ungleichung.
Gibt es ein a_j mit $a_jx_1 > \beta_j$, so wiederhole das Verfahren mit a_j.

Beispiel. Wir betrachten wieder das Ungleichungssystem von Seite 74.

	b_1	b_2
a_1	$\boxed{1}$	-1
a_2	0	-1
a_3	-3	1
a_4	1	1

	a_1	b_2
b_1	1	1
a_2	0	$\boxed{-1}$
a_3	-3	-2
a_4	1	2

	a_1	a_2
b_1	1	-1
b_2	0	-1
a_3	-3	2
a_4	1	-2

Damit sind b_1 und b_2 eliminiert. Aus

	3 / a_1	2 / a_2	Wert	
b_1	1	-1	1	
b_2	0	-1	-2	
a_3	$\boxed{-3}$	2	-5	≤ 1
a_4	1	-2	-1	> -2

	1 / a_3	2 / a_2	Wert	
b_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	
b_2	0	-1	-2	
a_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	≤ 3
a_4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-3	≤ -2

ergibt sich die Ecklösung $(-1, -2)$.

Im Standardfall

$$\delta = \min\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

vereinfacht sich das Verfahren. Wegen

$$x \geq 0 \iff \begin{cases} -b_1 x = a_1 x = -x_1 & & & \leq 0 \\ -b_2 x = a_2 x = & -x_2 & & \leq 0 \\ \vdots \quad \vdots & & \ddots & \vdots \\ -b_n x = a_n x = & & -x_n & \leq 0 \end{cases}$$

vereinfacht sich das Anfangstableau zu

	$0 \cdots 0$	Wert	β
	$a_1 \cdots a_n$		
a_{n+1}		$a_{n+1}x_0$	β_{n+1}
$\vdots$	$-A$	$\vdots$	$\vdots$
a_m		$a_m x_0$	β_m
c	$\gamma_1 \cdots \gamma_n$		

Sei nun $r = \dim\langle a_1, \ldots, a_m\rangle = \dim\langle a_1, \ldots, a_r\rangle \leq n$. Man erhält nach Austausch

	$\beta_1 \cdots \beta_r$	$\tau_1 \cdots \tau_{n-r}$	Wert	β
	$a_1 \cdots a_r$	$b_{r+1} \cdots b_n$		
b_1				
$\vdots$				
b_r				
a_{r+1}			$a_{n+1}x_0$	β_{r+1}
$\vdots$		0	$\vdots$	$\vdots$
a_m			$a_m x_0$	β_m
c	$\gamma'_1 \cdots \gamma'_r$	$\gamma'_{r+1} \cdots \gamma'_n$		

Im rechten unteren Teil stehen Nullen. (Andernfalls könnte man noch ein weiteres b_k gegen ein a_j austauschen.) Setze

$$a_1 x_0 = \beta_1,\ \ldots,\ a_r x_0 = \beta_r$$
$$b_{r+1} x_0 = \tau_1,\ \ldots,\ b_n x_0 = \tau_{n-r},$$

wobei die $\tau_i \in K$ beliebige Parameter sind und x_0 abhängig von den τ_i ist.

Existiert das Optimum, so ist $\gamma'_{r+1} = \cdots = \gamma'_n = 0$.

KAPITEL 11

Duale Programme

Associated with every linear programming problem is another linear programming problem called the dual. This fundamental notion was introduced by John von Neumann (in conversations with the author in October 1947) and appears implicitely in a working paper he wrote a few weeks later. Subsequently Gale, Kuhn, and Tucker (1951) formulated an explicit Duality Theorem which they proved by means of the classical lemma of Farkas (1902).

DANTZIG, *1963*

SATZ 11.1. *Sei*

$$(*) \qquad a_1 x \le \beta_1,\ \ldots,\ a_m x \le \beta_m$$

lösbar (etwa durch x_0). Gilt für jede Lösung x von $(*)$ auch $ax \le \beta$, so ist

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \ge 0 \qquad \textit{und} \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \le \beta.$$

BEMERKUNG. Die Umkehrung ist trivial. Ist nämlich $a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ mit $\lambda_i \ge 0$ und x eine Lösung von $(*)$, so folgt

$$ax = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m)x = \lambda_1(a_1 x) + \cdots + \lambda_m(a_m x) \le \lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_m\beta_m \le \beta.$$

BEWEIS. 1.) Es sei α eine Unbekannte. Dann ist $ax \le \beta\alpha$ redundant bezüglich

$$(**) \qquad a_i x \le \beta_i \alpha,\ i = 1, \ldots, m \qquad \text{und} \qquad \alpha \ge 0.$$

Beweis: Sei $\binom{\alpha}{x}$ eine Lösung von $(**)$.

(1) Ist $\alpha > 0$, so ist

$$a_i(x\alpha^{-1}) \le \beta_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

Nach Voraussetzung gilt dann

$$a(x\alpha^{-1}) \le \beta, \quad \text{also } ax \le \beta\alpha.$$

(2) Sei $\alpha = 0$, also

$$a_i x \leq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

Sei x_0 eine Lösung von $(*)$, also

$$a_i x_0 \leq \beta_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

Dann folgt für $t > 0$

$$a_i (x_0 + xt) \leq \beta_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m,$$

also nach Voraussetzung

$$a (x_0 + xt) \leq \beta,$$
$$ax_0 + ax \cdot t \leq \beta.$$

Wäre $ax > 0$, so hätte man einen Widerspruch für genügend große t. Daher ist $ax \leq 0$. ✓

2.) In

$$\widehat{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \in K \times V \right\}$$

gilt also:

$$(-\beta, a) \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \leq 0$$

ist redundant bezüglich

$$(-\beta_i, a_i) \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \leq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$
$$(-1, 0) \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} \leq 0.$$

Nach dem Lemma von Farkas (Satz 6.4) gilt

$$(-\beta, a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (-\beta_i, a_i) + \lambda (-1, 0)$$

mit $\lambda_i \geq 0$, $\lambda \geq 0$, also

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i + \lambda \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i,$$
$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i. \qquad \square$$

SATZ 11.2. *Das System*

$(*)$ $$a_i x \leq \beta_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

besitzt genau dann keine Lösung, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *gibt mit*

$(**)$ $$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0 \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i < 0.$$

BEWEIS. 1.) Sei $(*)$ unlösbar.
Dann ist in $\widehat{V}$ die Ungleichung $(1,0)\binom{\alpha}{x} \leq 0$ redundant bezüglich

$$(-\beta_i, a_i)\begin{pmatrix}\alpha\\ x\end{pmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Beweis: Sei $\binom{\alpha}{x}$ eine Lösung, also

$$a_i x \leq \beta_i \alpha, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Nehmen wir $\alpha > 0$ an, so folgt $a_i\,(x\alpha^{-1}) \leq \beta_i$. Dann hätte $(*)$ eine Lösung. Also ist $\alpha \leq 0$ und damit $(1,0)\binom{\alpha}{x} = \alpha \leq 0$. ✓

Nach dem Lemma von Farkas ist

$$(1,0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,(-\beta_i, a_i)$$

und damit

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i = -1 < 0$$

$$\text{und} \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0,$$

also $(**)$.

2.) Es gelte jetzt $(**)$. Gibt es eine Lösung x von $(*)$, so folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i x \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i < 0,$$

also ein Widerspruch. □

BEMERKUNG. Aus Satz 11.2 folgt umgekehrt das Lemma von Farkas: Sei $ax \leq 0$ redundant bezüglich

$$(*) \qquad a_i x \leq \beta_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

Dann ist

$$a_1 x \leq 0,\ \ldots,\ a_m x \leq 0,\ ax \geq 1$$

unlösbar. Nach Satz 11.2 gibt es $\lambda_i \geq 0$, $\lambda \geq 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i - \lambda a = 0 \qquad \text{und} \qquad -\lambda < 0.$$

Damit folgt

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{-1} \lambda_i a_i.$$

Satz 11.2 ist also sozusagen eine „Variante“ des Lemmas von Farkas.

Zur Vereinfachung führen wir folgende Schreibweise ein: Sei

$$u = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K^m.$$

Dann ist

$$ub = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \in K$$

und

$$uA = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \in V^*.$$

SATZ 11.2′. *Das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ ist genau dann nicht lösbar in V, wenn das Ungleichungssystem*

$$u \geq 0,\ uA = 0,\ ub < 0$$

lösbar in K^m ist.

BEMERKUNG. Man formuliert diesen Satz häufig als strikte Alternative: Entweder

$$Ax \leq b \qquad \text{ist lösbar}$$

oder

$$u \geq 0,\ uA = 0,\ ub < 0 \qquad \text{ist lösbar.}$$

SATZ 11.3. *Das Ungleichungssystem $Ax \leq b$, $x \geq 0$ ist genau dann nicht lösbar, wenn das System*

$$u \geq 0,\ uA \geq 0,\ ub < 0$$

lösbar ist.

BEWEIS. Es ist

$$x \geq 0 \iff -x \leq 0 \iff \begin{array}{ccc} -x_1 & & \leq\ 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & -x_n \leq\ 0 \end{array}$$

Also ist das Ungleichungssystem $Ax \leq b$, $x \geq 0$ äquivalent zu

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} -E \\ A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 11.2′ ist $(**)$ genau dann nicht lösbar, wenn

$$(u, v) \geq 0, \quad (v, u) \begin{pmatrix} -E \\ A \end{pmatrix} = 0, \qquad (v, u) \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} < 0$$

in K^{n+m} lösbar ist. Dieses System ist aber äquivalent zu $uA = v \geq 0$, $ub < 0$. □

Analog beweist man

SATZ 11.4. *$Ax = b$, $x \geq 0$ ist genau dann nicht lösbar, wenn $uA \geq 0$, $ub < 0$ lösbar ist.*

BEISPIEL. (Aufgabe 7) Es gibt keine Lösung $x \geq 0$ von

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}x_3 = \begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}.$$

Mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u = (u_1, u_2)$$

ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcl} 2u_1 & + & u_2 & \geq & 0 \\ 3u_1 & + & 2u_2 & \geq & 0 \\ -5u_1 & - & 6u_2 & \geq & 0 \\ -4u_1 & - & 3u_3 & < & 0 \end{array}$$

Dieses System hat die Lösung $u = (1, -1)$. Damit ist nach Satz 11.4 die obige Gleichung unlösbar.

DEFINITION. Ist

$$\delta = \max\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \tag{1}$$

ein lineares Programm, so heißt

$$\delta' = \min\{ub \mid uA \geq c,\ u \geq 0\} \tag{2}$$

das hierzu *duale* lineare Programm.

BEMERKUNG. Das primale Programm bezieht sich auf $x \in V$, ist also n-dimensional, das duale auf $u \in K^m$, ist also m-dimensional.

Es seien

$$L_1 = \{x \in V \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$
$$L_2 = \{u \in K^m \mid uA \geq c,\ u \geq 0\}$$

die Mengen der zulässigen Vektoren von (1) bzw. (2).

SATZ 11.5. *Es gilt*

(1) *Ist $x \in L_1$, $u \in L_2$, so gilt*

$$cx \leq ub.$$

(2) *Gilt für $x_0 \in L_1$, $u_0 \in L_2$*

$$cx_0 = u_0 b,$$

so ist x_0 optimale Lösung von (1) und u_0 optimale Lösung von (2).

BEWEIS. Wegen $x, u \geq 0$ ist

$$cx \leq uAx \leq ub. \tag{1}$$

(2) Für jedes $x \in L_1$ ist nach (1)

$$cx \leq u_0 b = cx_0.$$

Also ist x_0 optimal. Analog zeigt man, daß u_0 optimal ist. □

BEISPIEL. Wir betrachten das primale Programm

$$cx = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \quad \text{Max}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 9 \end{array}$$

$$x \geq 0.$$

Dual hierzu ist

$$ub = 8u_1 + 6u_2 + 6u_3 + 9u_4 \quad \text{Min}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} u_1 & + & 2u_2 & & & + & u_4 & \geq & 2 \\ 3u_1 & + & u_2 & + & u_3 & & u_4 & \geq & 4 \\ & & & & u_3 & + & u_4 & \geq & 1 \\ u_1 & & & + & u_3 & & & \geq & 1 \end{array}$$

$$u \geq 0.$$

(a) $u = (1, 1, 1, 1)$ ist zulässig für (2), und

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist zulässig für (1). Es ist

$$cx = 8 \leq ub = 29.$$

(b) $u_0 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0\right)$ ist zulässig für (2), und

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist zulässig für (1). Wegen

$$cx_0 = 16 \leq u_0 b = 16$$

sind x_0 und u_0 optimal.

SATZ 11.6 (Dualitätstheorem). *Gibt es zulässige Lösungen des primalen und des dualen Problems, so gibt es optimale Lösungen, und es gilt*

$$\begin{aligned} \delta &= \max\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq\} \\ &= \min\{ub \mid uA \geq c,\ u \geq 0\} = \delta'. \end{aligned}$$

BEWEIS. Betrachte für $x \geq 0$, $u \geq 0$ das System

$$(*) \qquad \begin{aligned} Ax &\leq b \\ uA &\geq c \\ ub - cx &\leq 0. \end{aligned}$$

Für eine Lösung $(x_0, u_0) \geq 0$ gilt $x_0 \in L_1$, $u_0 \in L_2$ und und $u_0 b \leq c x_0$, nach Satz 11.5(a) sogar $u_0 b = c x_0$. Nach Satz 11.5(b) ist dann x_0 optimal für (1), u_0 optimal für (2) und

$$\delta = c x_0 = u_0 b = \delta'.$$

Annahme: Das System $(*)$ ist unlösbar.
Schreibe das System in der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \\ -c & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u^T \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -c^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Unlösbarkeit folgt nach Satz 11.3 die Existenz einer Lösung $(v, w, \lambda) \geq 0$ aus K^{m+n+1} mit

$$\begin{aligned} (v, w, \lambda) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \\ -c & b^T \end{pmatrix} &\geq 0 \\ (v, w, \lambda) \begin{pmatrix} b \\ -c^T \\ 0 \end{pmatrix} &< 0, \end{aligned}$$

also

$$(**) \qquad \begin{aligned} vA - \lambda c &\geq 0 \\ -wA^T + \lambda b^T &\geq 0 \\ vb - wc^T &< 0. \end{aligned}$$

Wegen $L_1, L_2 \neq \emptyset$ gibt es $x, u \geq 0$ mit $Ax \leq b$, $uA \geq 0$.

Für $\lambda = 0$ steht

$$vb - wc^T \geq vAx - wA^T u^T \geq \lambda cx - \lambda b^T u^T = \lambda (cx - ub) = 0$$

im Widerspruch zu $(**)$.

Ist $\lambda > 0$, so folgt wegen $vb = (vb)^T = b^T v^T$ und $v, w \geq 0$

$$\lambda (vb - wc^T) = \lambda b^T v^T - w (\lambda c^T) \geq wA^T v^T - w (vA)^T = 0$$

also auch

$$vb - wc^T \geq 0,$$

im Widerspruch zu $(**)$. □

BEMERKUNG. Es gibt lineare Programme mit zulässigen Vektoren, aber ohne Optimum. So existiert z.B. $\max\{cx = x_1 + x_2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ nicht, denn cx kann beliebig groß werden.

Die Voraussetzung $L_1, L_2 \neq \emptyset$ aus Satz 11.6 läßt sich daher nicht zu $L_1 \neq \emptyset$ abschwächen. Aus der Existenz einer optimalen Lösung des primalen Problems jedoch folgt die Existenz einer zulässigen und damit optimalen Lösung des dualen

Problems:
Beweis durch Widerspruch: Aus der Unlösbarkeit von

$$uA \geq c, \quad u \geq 0$$

folgt nach Satz 11.3 die Existenz eines $x \geq 0$ mit

$$Ax \leq 0, \quad cx > 0.$$

Ist nun x_0 eine optimale Lösung des primalen Problems, so folgt

$$A(x_0 + x) \leq Ax_0 \leq b,$$

also ist $x_0 + x \geq 0$ zulässig, und es ist

$$c(c_0 + x) = cx_0 + cx > cx_0,$$

im Widerspruch zur Optimalität von x_0.

Umwandlung linearer Programme

(1) Wegen

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\} = -\min\{-cx \mid Ax \leq b\}$$

läßt sich jedes Maximal- in ein Minimalproblem überführen und umgekehrt.

(2) Wegen

$$Ax = b \iff Ax \leq b \ \wedge \ -Ax \leq -b$$

können Gleichungen in Ungleichungen umgewandelt werden.

(3) Aus $Ax \leq b$, $x \geq 0$ kann durch Einführung von *Schlupfvariablen* eine Gleichung gemacht werden. Setze $z = b - Ax \geq 0$, also $Ax + z = b$. Für

$$A' = (A, E), \quad x' = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},$$

wobei E die Einheitsmatrix ist, gilt

$$A'x' = b, \quad x' \geq 0.$$

(4) Falls x nicht vorzeichenbeschränkt ist, setzt man $x = y - z$ mit $y, z \geq 0$ und erhält Ungleichungen für nicht-negative Vektoren.

DEFINITION. Das Duale eines Minimalproblems

$$\delta = \min\{cx \mid Ax \leq b, \ x \geq 0\}$$

ist

$$\delta' = \max\{ub \mid uA \leq c, \ u \leq 0\}.$$

KOROLLAR 11.1. *Gibt es zulässige Vektoren des Minimalproblems und seines Dualen, so gibt es optimale Lösungen beider Probleme, und ihre Werte sind gleich.*

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} -\delta &= \max\{-cx \mid Ax \le b,\, x \ge 0\} \\ &= \min\{ub \mid uA \ge -c,\, u \ge 0\} \\ &= \min\{-ub \mid -uA \ge -c,\, -u \ge 0\} \\ &- \max\{ub \mid uA \le c,\, u \ge 0\} = -\delta' \end{aligned}$$

und damit $\delta = \delta'$. □

KOROLLAR 11.2. *Zweimaliges Dualisieren führt wieder auf das Ausgangsproblem.*

BEWEIS. Sei $\delta = \min\{cx \mid Ax \le c,\, x \ge 0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \delta' &= \max\{ub \mid uA \le c,\, u \le 0\}^* \\ &= \max\{-b^T x \mid (-A^T)x \le c^T,\ x \ge 0\}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \delta'' &= \min\{uc^T \mid -uA^T \ge -b^T,\, u \ge 0\}^\dagger \\ &= \min\{cx \mid Ax \le b,\, x \ge 0\} = \delta. \end{aligned}$$

Analog für ein Maximalproblem. □

Anwendung: Sensitivitätsanalysis

Sei $\delta = \max\{cx \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}$ ein lineares Programm. Wie ändert sich δ bei Änderung von b zu $b^* = b + \varepsilon$?

Die Restriktionen des dualen Problems bleiben erhalten:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \max\{cx \mid Ax \le b^*,\, x \ge 0\} \\ &= \min\{ub^* \mid uA \ge c,\, u \ge 0\} = u_0 \cdot b^*. \end{aligned}$$

Bei kleinem ε bleibt u_0 optimal, also

$$\delta^* = u_0\,(b + \varepsilon) = u_0 b + u_0 \varepsilon = \delta + u_0 \varepsilon,$$

d.h. $u_0\varepsilon$ gibt die Änderung von δ an.

BEISPIEL. (Fabrikationsmodell) Die erste Ungleichung beziehe sich auf die Arbeitsstunden,

$$a_1 x \le \beta_1.$$

Durch Einstellen einer weiteren Arbeitskraft erhält man

$$\beta_1^* = \beta_1 + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei ε_1 die Zahl der Arbeitsstunden ist, die pro Person in der zugrundeliegenden Zeiteinheit erbracht werden.

*Setze $x := -u^T$

†Setze $x = u^T$

Der Gewinn erhöht sich um $u_0\varepsilon$. Hierbei ist die erste Komponente von u_0 wesentlich. Je nach ihrer Größe erhöht sich der Gewinn, z.B. ergibt sich kein zusätzlicher Gewinn, wenn sie Null ist.

Ganzzahlige lineare Programmierung

In der Praxis ist man häufig an einer ganzzahligen Lösung eines linearen Programmes interessiert. Wegen $cx \leq uAx \leq ub$ gilt

$$\begin{aligned} \delta &= \max\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^n\} \\ &\leq \min\{ub \mid uA \geq 0,\ u \geq 0,\ u \in \mathbb{Z}^m\}. \end{aligned}$$

1). Die Gleichheit gilt im allgemeinen nicht:
Beispiel: Sei $A = (2)$, $b = 1$, $c = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x \leq 1,\ x \geq 0\} = \{0\} \\ L_2 &= \{u \in \mathbb{Z} \mid 2u \geq 1,\ u \geq 0\} = \{1, 2, \ldots\} \end{aligned}$$

und damit

$$\max\{x \mid x \in L_1\} = 0 < 1 = \min\{u \mid u \in L_2\}.$$

2.) Satz 11.4 ($Ax = b$, $x \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}^n$ unlösbar $\iff$ $uA \geq 0$, $ub < 0$ lösbar) und damit das Lemma von Farkas gelten nicht.
Beispiel: Sei $A = (2, 3)$, $b = 1$. Dann ist das System

$$(2, 3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 + 3x_2 = 1, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

unlösbar, aber auch das System

$$\begin{aligned} 2u &\geq 0 \\ 3u &\geq 0 \\ ub = u &< 0 \end{aligned}$$

besitzt keine Lösung.

KAPITEL 12

Diophantische lineare Ungleichungen

V sei ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ der Dimension n. Bezüglich einer fest gewählten Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von V definiere für $x = \sum_{i=1}^n w_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^n w_i y_i$

$$x \leq y \ :\Longleftrightarrow \ \forall\, i : x_i \leq y_i$$
$$x \text{ ganz } :\Longleftrightarrow \ \forall\, i : x_i \in \mathbb{Z}.$$

Die ganzen Vektoren aus V bilden eine abelsche Gruppe

$$\mathfrak{G} = \left\{ \sum w_i x_i \;\middle|\; x_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

geometrisch ein Gitter.

Ist

$$(*) \qquad a_1 x \leq \beta_1, \ \ldots, \ a_m x \leq \beta_m$$

bzw. $Ax \leq b$ ein lineares Ungleichungssystem und

$$L = \{x \in V \mid Ax \leq b\},$$

so heißt

$$L_g := L \cap \mathfrak{G}$$

Menge der *diophantischen* Lösungen (DIOPHANT, ca. 250).

SATZ 12.1. *Ist C ein endlich erzeugter Kegel,*

$$C = \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_k) = \left\{ \sum y_i \lambda_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{Q}_+ \right\},$$

so gibt es $\mathfrak{Z} = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$ mit

$$C_g = C \cap \mathfrak{G} = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} z_i \alpha_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

BEWEIS. Da die y_i nur bis auf einen positiven Faktor bestimmt sind, kann man annehmen, daß sie ganz sind. (Da die Koordinaten der y_i rational sind, multipliziert man sie gegebenenfalls mit den Hauptnennern.)

Sei

$$\mathfrak{B} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} y_i \lambda_i \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

und

$$\mathfrak{Z} = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$$

die Menge aller ganzen Vektoren aus $\mathfrak{B}$. Weil insbesondere $y_1, \ldots, y_k$ dazugehören, erzeugt $\mathfrak{Z}$ den Kegel C, also

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} z_i \lambda_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{Q}_+ \right\}.$$

Behauptung: Es gilt

$$C_g = C \cap \mathfrak{G} = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} z_i \alpha_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Beweis: Sei $u \in C \cap \mathfrak{G}$, also

$$u = \sum_{i=1}^{k} y_i \lambda_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{Q}_+.$$

Ist $\lfloor x \rfloor$ die kleinste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, so lassen sich die λ_i schreiben als

$$\lambda_i = \lfloor \lambda_i \rfloor + \varepsilon_i, \qquad 0 \le \varepsilon_i < 1.$$

Dann ist

$$u = \sum_{i=1}^{k} y_i \lfloor \lambda_i \rfloor + \sum_{i=1}^{k} y_i \varepsilon_i,$$

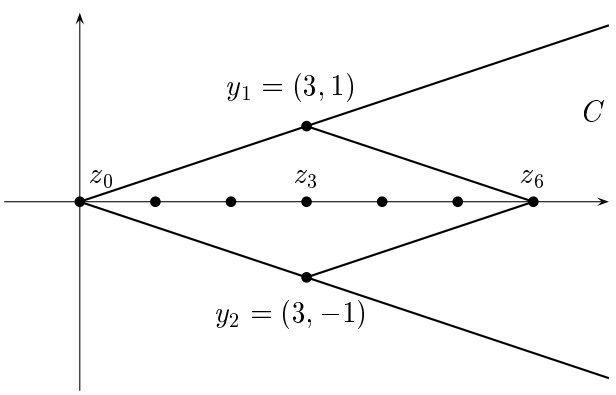
also

$$v := u - \sum_{i=1}^{k} y_i \lfloor \lambda_i \rfloor = \sum y_i \varepsilon_i \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{G}.$$

Damit ist $v = z_j$ für ein j. Es folgt

$$u = \sum_{i=1}^{k} y_i \lfloor \lambda_i \rfloor + z_j. \qquad \square$$

Beispiel. Es sei $C = \operatorname{cone}(y_1, y_2)$ mit $y_1 = \binom{3}{1}$ und $y_2 = \binom{3}{-1}$.



Dann ist $\mathfrak{B}$ ein Parallelogramm und

$$\mathfrak{Z} = \{y_1, y_2, z_0, \ldots, z_6\} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{G}.$$

$\{y_1, y_2, z_1\}$ ist ein minimales Erzeugendensystem für C_g.

DEFINITION. $x \in C_g$ heißt *unzerlegbar*, wenn $x \neq 0$ ist und keine Darstellung

$$x = u + v$$

mit $u, v \in C_g$, $u, v \neq 0$ existiert.

SATZ 12.2. *Ist C spitz, so existiert ein eindeutig bestimmtes minimales Erzeugendensystem $\mathfrak{H}$ von $C_g = C \cap \mathfrak{G}$* (VAN DER CORPUT 1931).

BEWEIS. Sei $\mathfrak{H} = \{x \in C_g \mid x \text{ unzerlegbar}\}$. Ist $\mathfrak{Z}$ ein Erzeugendensystem von C_g, so gilt

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Z},$$

denn jede echte Linearkombination läßt sich zerlegen:

$$x = \sum z_i \alpha_i$$

ist zerlegbar bis auf den Fall $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0$ für $j \neq i$, also $x = z_i$. Ist also x unzerlegbar, so folgt $x \in \mathfrak{Z}$. Also ist $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Z}$.

Nach Satz 12.1 gibt es ein endliches Erzeugendensystem $\mathfrak{Z}$ von C_g, also ist $\mathfrak{H}$ endlich.

Zu zeigen bleibt noch, daß $\mathfrak{H}$ ein Erzeugendensystem ist, also

$$C_g = \langle \mathfrak{H} \rangle = \left\{ \sum h_i \alpha_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Annahme: $S = C_g \setminus \langle \mathfrak{H} \rangle \neq \emptyset$. Weil C_g von den z_i aufgespannt wird, ist dann auch $S \cap \mathfrak{Z} \neq \emptyset$.

Da C spitz ist, gibt es ein $a \in V^*$ mit

$$ax > 0$$

für alle $x \in C$, $x \neq 0$. Sei

$$\alpha = \min\{az_i \mid z_i \in S \cap \mathfrak{Z}\},$$

etwa $\alpha = az_1$. Ist $x \in S$ und

$$x = \sum z_i \alpha_i, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+,$$

so muß in der Summe ein z_i mit $\alpha_i > 0$ auftreten, das in S liegt, weil sonst $x \in \langle \mathfrak{H} \rangle$ wäre. Für alle $x \in S$ gilt daher

$$ax = \sum az_i \alpha_i \geq az_i \geq az_1.$$

Weil z_1 nicht in $\mathfrak{H}$ liegt, ist z_1 zerlegbar. Also gibt es $u, v \in C_g$, $u, v \neq 0$ mit

$$z_1 = u + v.$$

Es folgt

$$az_1 = au + av \quad \Longrightarrow \quad az_1 > au, av.$$

Also ist $u, v \notin S$. Es folgt $u, v \in \langle \mathfrak{H} \rangle$. Da $\langle \mathfrak{H} \rangle$ abgeschlossen ist gegen Addition, folgt $z_1 = u + v \in \langle \mathfrak{H} \rangle$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

ERGEBNIS. Die ganzen Lösungen eines normalen homogenen linearen Ungleichungssystems

$$Ax \leq 0$$

besitzen die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{k} y_i \alpha_i, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+,$$

wobei die y_i die unzerlegbaren Elemente von $C_g = \{x \in V \mid Ax \leq 0,\ x \text{ ganz}\}$ sind.

BEMERKUNG. Die konvexe Hülle von C_g ist wieder C.

BEWEIS. Auf den Kanten von C liegen ganze Elemente, die Vielfachen davon sind ebenfalls ganz. Damit liegen alle Kantenpunkte in der konvexen Hülle, also ganz C. □

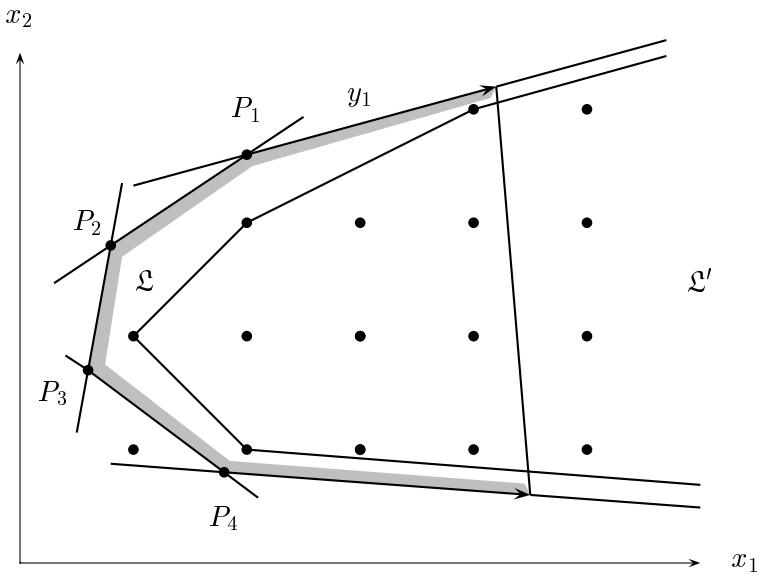
SATZ 12.3. *Ist $\mathfrak{L}$ ein Polyeder, so ist $\mathfrak{L}_g = \emptyset$ oder*

$$\mathfrak{L}_g = \{Q_1, \ldots, Q_s\} \dot{+} C_g.$$

Die konvexe Hülle von $\mathfrak{L}_g$ ist

$$\mathfrak{L}' = \text{convex}\,(\mathfrak{L}_g) = [Q_1, \ldots, Q_s] \dot{+} C.$$

$\mathfrak{L}'$ heißt ganze Hülle *von $\mathfrak{L}$. Es ist $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}$.*



BEWEIS. Sei $C = \text{cone}\,(y_1, \ldots, y_k)$ mit ganzen y_i. Definiere

$$B = [P_1, \ldots, P_r] \dot{+} \left\{ \sum_{i=1}^{k} y_i \alpha_i \;\middle|\; 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}.$$

B ist beschränkt und enthält daher nur endlich viele Punkte $Q_1, \ldots, Q_s$ mit ganzen Koordinaten.

Sei P ein beliebiger ganzer Punkt des Polyeders,

$$P = \sum_{i=1}^{r} P_i\lambda_i \dotplus \sum_{i=1}^{k} y_i\alpha_i, \qquad \sum \lambda_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$$

Schreibt man wieder $\alpha_i = \lfloor\alpha_i\rfloor + \varepsilon_i$, $0 \leq \varepsilon_i < 1$, so erhält man

$$P = \Big(\sum P_i\lambda_i \dotplus \sum y_i\varepsilon_i\Big) \dotplus \sum y_i\lfloor\alpha_i\rfloor =: Q \dotplus \sum y_i\lfloor\alpha_i\rfloor.$$

Q liegt in B. Da $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ und $\sum y_i\lfloor\alpha_i\rfloor$ ganz sind, ist Q wegen

$$\overrightarrow{\mathcal{O}P} = \overrightarrow{\mathcal{O}Q} + \sum y_i\lfloor\alpha_i\rfloor$$

ebenfalls ganz. Also ist $Q = Q_i$ für ein i und damit

$$P \in S = \{Q_1, \ldots, Q_s\} \dotplus C_g.$$

Umgekehrt ist jeder Punkt aus S ganz, also gilt $S = \mathfrak{L}_g$.

Wegen $\mathfrak{L}_g \subseteq T := [Q_1, \ldots, Q_s] \dotplus C$ und T konvex gilt $[\mathfrak{L}_g] \subseteq T$.

Sei nun umgekehrt $Q \dotplus z \in T$ mit $Q \in [Q_1, \ldots, Q_s]$ und $z = \sum y_i\alpha_i$, $\alpha_i \geq 0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum \alpha_i \leq k.$$

Dann ist

$$Q \dotplus z = \sum_{i=1}^{k} (Q \dotplus y_i k)\frac{\alpha_i}{k} + Q\left(1 - \frac{\sum \alpha_i}{k}\right) \in [\mathfrak{L}_g].$$

Insgesamt ist damit $[\mathfrak{L}_g] = T$. □

Bemerkung. Die ganze Hülle eines Polyeders ist wieder ein Polyeder mit gleichem Rezessionskegel, also nach dem Satz von Weyl Lösungspolyeder eines Ungleichungssystems $A'x \leq b'$. Man kennt jedoch keine einfache Methode, A' und b' aus A und b zu berechnen.

Für ganzzahlige lineare Programme gilt

$$\begin{aligned}\delta &= \max\{cx \mid Ax \leq b, x \text{ ganz}\}\\ &= \max\{cx \mid A'x \leq b'\}.\end{aligned}$$

Die optimale Lösung ist einer der Punkte Q_i.

Verzweigungsverfahren

Das *Verzweigungsverfahren* oder *branch-and-bound-Verfahren* (Little 1963, Dakin 1965) beruht darauf, daß das ursprüngliche lineare Programm durch zwei neue lineare Programme ersetzt wird usw., bis nach endlich vielen Schritten eine optimale Lösung des Ausgangsproblems gefunden ist, falls eine solche existiert.

Sei

$$\delta = \max\{cx \mid Ax \leq b,\ x \text{ ganz}\}.$$

Es seien bereits disjunkte Polyeder

$$H_1, \ldots, H_k \subseteq \mathfrak{L}$$

mit $\mathfrak{L}_g \subseteq H_1 \cup \cdots \cup H_k$ bestimmt:

$$H_i = \{x \mid A_i x \leq b_i\}.$$

Man berechnet nach dem Simplexverfahren

$$\mu_i = \max\{cx \mid x \in H_i\}$$

und wählt H_i mit maximalem μ_i und optimalem Vektor $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

1. Fall: Ist z ganz, so ist z optimal für das Ausgangsproblem.
2. Fall: Ist z nicht ganz, etwa $z_j \notin \mathbb{Z}$, so betrachte anstelle von H_i

$$H_i' = \{x \mid A_i x \leq b_i,\ x_j \leq \lfloor z_j \rfloor\}$$
$$H_i'' = \{x \mid A_i x \leq b_i,\ x_j \geq \lfloor z_j \rfloor + 1\}.$$

Man erhält $k+1$ Polyeder

$$H_1, \ldots, H_{i-1}, H_i', H_i'', \ldots, H_k.$$

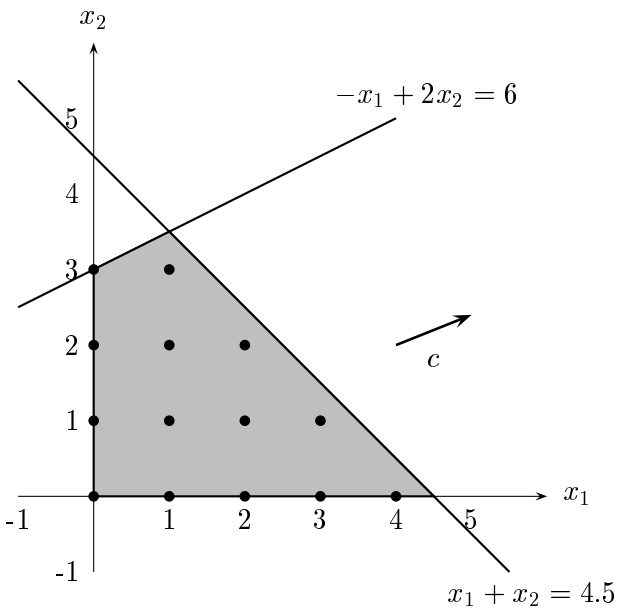
Setze hiermit das Verfahren fort.

Beispiel (Beale [1]). Wir betrachten das ganzzahlige lineare Programm

$$cx = 5x_1 + 2x_2 \quad \text{Max}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4.5 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ ganz} \end{aligned}$$



Man beginnt mit

$$H_1 = \{x \mid x_1 + x_2 \leq 4.5,\ -x_1 + 2x_2 \leq 6,\ x \geq 0\}.$$

Nach dem Simplexverfahren berechnet man einen optimalen Vektor

$$(4.5, 0) \quad \text{mit} \quad \delta = 22.5.$$

Da der optimale Vektor nicht ganz ist, setzt man das Verfahren fort mit

$$H_2 = H_1 \cap \{x \mid x_1 \leq 4\}$$
$$H_3 = H_1 \cap \{x \mid x_1 \geq 5\} = \emptyset.$$

Ein optimaler Vektor zu H_2 ist

$$(4, 0.5) \quad \text{mit} \quad \delta = 21.$$

Im nächsten Schritt erhält man

$$H_4 = H_2 \cap \{x \mid x_2 \geq 1\}$$

mit dem optimalen Vektor $(3.5, 1)$ und $\delta = 19.5$ sowie

$$H_5 = H_2 \cap \{x \mid x_2 \leq 0\}$$

mit dem optimalen Vektor $(4, 0)$ und $\delta = 20$.

Damit ist $(4, 0)$ die Lösung des Problems.

ANHANG A

Aufgaben

AUFGABE 1. Es sei R ein geordneter Ring. Definiere für $\alpha \in R$ den *Absolutbetrag*

$$|\alpha| := \mathrm{Max}\{\alpha, -\alpha\}$$

und zeige (mit Fallunterscheidungen)

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$
$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

für alle $\alpha, \beta \in R$.

AUFGABE 2. Es sei K ein geordneter Körper und $\alpha, \beta \in K$ mit $\alpha < \beta$. Zeige, daß die Ungleichungskette

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

besteht, und definiere hiermit induktiv eine streng monoton wachsende Folge

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

von Elementen zwischen α und β.

AUFGABE 3. Zeige, daß $R = \mathbb{R}^2$ bezüglich der Verknüpfungen

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

und lexikographischer Anordnung ein geordneter Ring ist.

AUFGABE 4. Welchen maximalen Wert kann x_3 in dem Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq & -5 \\
-x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 1 \\
2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & \leq & -2 \\
-3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 3 \\
-3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 1
\end{array}$$

annehmen?

AUFGABE 5. Es sei $I = I_0 \cup I_+ \cup I_-$ eine Zerlegung von $I = \{1, \ldots, m\}$. Sei $|I_0| = a$, $|I_+| = b$, $|I_-| = c$. Zeige für $m \geq 4$:

$$a + bc \leq \left(\frac{m}{2}\right)^2 .$$

AUFGABE 6. Im $\mathbb{R}^3$ seien

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Stelle

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

als positive Linearkombination von drei der Vektoren x_i dar.

AUFGABE 7. Im $\mathbb{R}^2$ seien

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeige unter Verwendung des Lemmas von CARATHÉODORY, daß sich der Vektor y nicht als positive Linearkombination von x_1, x_2, x_3 darstellen läßt.

AUFGABE 8. Ermittle sämtliche Lösungen von

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\leq 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

durch Berechnung aller Vektoren x mit $\operatorname{rg} x = 3$.

AUFGABE 9. Ermittle sämtliche Lösungen von

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\leq 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

nach dem Motzkin-Verfahren und skizziere den Graphen des Lösungskegels.

AUFGABE 10. Ermittle sämtliche Lösungen von

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

AUFGABE 11. Ermittle die Lösungen von

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & \leq & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & \leq & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & \leq & 0 \\ x_1 & & & & & & & + & x_n & \leq & 0 \end{array}$$

AUFGABE 12. Ermittle die Anzahl der Kanten der Lösungsmengen von

a) $x_1 + \cdots + x_r - x_{r+1} - \cdots - x_n \leq 0, \quad x_i \geq 0,$
b) $x_1 + \cdots + x_r - x_{r+1} - \cdots - x_n = 0, \quad x_i \geq 0.$

AUFGABE 13. Es sei

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne nach dem Motzkin-Verfahren $a_1, \ldots, a_k \in V^*$, so daß

$$\operatorname{cone}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{x \in V \mid a_i x \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k\}$$

ist.

AUFGABE 14. Es sei $C \mapsto C^*$ eine Polarität zwischen den endlich erzeugten konvexen Kegeln von V und V^*.

(a) Ist $C = U$ ein Unterraum, so gilt $U^* = U^\perp$.
(b) Ein endlich erzeugter Kegel heißt *nicht-ausgeartet*, wenn die erzeugenden Vektoren den gesamten Raum aufspannen. Zeige, daß C genau dann spitz ist, wenn C^* nicht-ausgeartet ist.

AUFGABE 15. Zeige, daß das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & 3y & \leq & 3 \\ 2x & - & y & \leq & 5 \\ -x & & & \leq & 2 \\ x & + & y & \leq & -12 \end{array}$$

keine Lösung besitzt.

AUFGABE 16. Ermittle in $\mathbb{R}$ die Lösungen von

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & \leq & 3 \\ -8x & - & 17y & + & 19z & \leq & 15 \\ x & + & y & - & 2z & \leq & 0 \\ -4x & - & 7y & + & 8z & \leq & 9 \end{array}$$

AUFGABE 17. Sei $\dim V = n$ und

$$L = \{x \in V \mid a_i x \leq \beta_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

mit linear unabhängigen $a_i \in V^*$. Zeige, daß ein Lösungspolyeder der Form

$$\mathfrak{L} = \mathcal{O} \dotplus L = P \dotplus \operatorname{cone}(y_1, \ldots, y_n)$$

existiert.

AUFGABE 18. Prüfe die Existenz optimaler Lösungen der linearen Programme

$$\text{(a)}\quad 2x_1 + 3x_2 \quad \text{Min} \qquad\qquad \text{(b)}\quad 2x_1 + 3x_2 \quad \text{Max}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcl} -5x_1 + 4x_2 & \leq & -1 \\ x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

AUFGABE 19. Löse mit dem Simplexverfahren ausgehend vom Nullpunkt das lineare Programm

$$x_1 + 2x_2 \quad \text{Min}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{r} x_1 + x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \leq 0 \end{array}$$

AUFGABE 20. Ermittle mit dem Motzkinverfahren die Menge der zulässigen Vektoren von

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -1 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Prüfe, ob bezüglich der Zielfunktionen

$$\text{(a)}\quad cx = -2x_1 + x_2 \quad \text{Min} \qquad\qquad \text{(b)}\quad cx = x_2 - x_3 \quad \text{Min}$$

optimale Lösungen existieren. Berechne im Fall der Existenz alle optimalen Lösungen.

AUFGABE 21. Ermittle mit der Simplexmethode die $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das lineare Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & -1 \\ 3x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & -1 \\ -x_2 & \leq & \alpha \end{array}$$

eine Lösung besitzt.

AUFGABE 22. Es seien $a_1, \ldots, a_4$ die Linearformen der Ungleichungen $a_i x \leq \beta_i$ aus Aufgabe 21. Ermittle nach dem Motzkinverfahren $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \geq 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i = 0.$$

Welche Bedingungen für α ergeben sich dann aus $\sum \lambda_i \beta_i < 0$?

Literatur

[1] Beale, E. M. L.: *Introduction to Optimization.* Wiley 1968

[2] Dantzig, G. B.: *Linear Programming and Extensions.* Princ. Univ. Press 1963

[3] Fischer, G.: *Analytische Geometrie.* Vieweg 1978

[4] Papadimitriou, C. H., Steiglitz, K.: *Combinatorial Optimization.* Prentice-Hall 1982

[5] Schrijver, A.: *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley 1986

[6] Simmonard, M.: *Linear Programming.* Prentice-Hall 1966

[7] Solodownikow, A. S.: *Lineare Ungleichungssysteme.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973

[8] Stoer, J., Witzgall, Ch.: *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I.* Springer 1970

[9] Tschernikow, S. N.: *Lineare Ungleichungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971

[10] Ziegler, G. M.: *Lectures on Polytopes.* Preprint, Berlin 1993

Index

affiner Raum, 51
Anordnung
    lexikographische, 5
ausgewogen, 33
ausgewogenes Paar, 33

Baryzenter, 52
Basis
    duale, 15
benachbart, 32
branch and bound, 93

Carathéodory
    Lemma von, 21
Charakteristik, 7
charakteristischer Kegel, 60

diophantische Lösung, 89
Drehpunkt, 68
duale Basen, 15
duales Programm, 83
Dualitätstheorem, 84

Ecke, 56
Eliminationsverfahren, 9
Extremalpunkt, 56

Farkas
    Lemma von, 47

ganze Hülle, 92
geordneter Ring, 5
Gewinnfunktion, 63

halbgeordnet, 5
Hülle
    ganze, 92
    konvexe, 55

innerer Punkt, 25

Kante, 25
Kantensystem
    vollständiges, 32
Kantenvektor, 25
Kegel
    charakteristischer, 60
    konvexer, 19
    polyedrischer, 47
    spitzer, 22
Kern, 41
konvex, 54
konvexe Hülle, 55
konvexer Kegel, 19
konvexes Polytop, 56
Konvexkombination, 55
Kostenfunktion, 63

Lemma von Carathéodory, 21
Lemma von Farkas, 47
lexikographische Anordnung, 5
linear geordnet, 5
Linearform, 13
Lösung
    diophantische, 89
Lösungspolyeder, 57

Minkowski
    Satz von, 26

negativ, 6
normales Ungleichungssystem, 21

Paar
    ausgewogenes, 33
Pivot, 68
polyedrischer Kegel, 47
Polytop
    konvexes, 56
positiv, 6
Programm
    duales, 83
Punkt, 51
    innerer, 25

Rang, 21, 25
Raum
    affiner, 51
redundant, 24
Rezessionskegel, 60

Satz von Minkowski, 26
Satz von Weyl, 46
Schlupfvariable, 86
spitzer Kegel, 22

Ungleichungssystem
    lineares, 19

homogenes, 19
normales, 21
Unterraum, 15
unzerlegbar, 91

Vektorraum
dualer, 14
linker, 13
rechter, 13
Verband, 49
Verbindungsstrecke, 54
Verzweigungsverfahren, 93
vollständiges Kantensystem, 32

Weyl
Satz von, 46

Zielfunktion, 63
zulässig, 63