Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe **3**
- 1.1 Mengen und Abbildungen . . . 3
- 1.2 Gruppen . . . 6
- 1.3 Ringe und Körper . . . 7

2 Vektorräume **11**
- 2.1 Definition und Beispiele . . . 11
- 2.2 Basis und Dimension . . . 13

3 Lineare Abbildungen **19**
- 3.1 Homomorphismen . . . 19
- 3.2 Eigenschaften linearer Abbildungen . . . 21
- 3.3 $\hom_K(V,W)$, $\mathrm{End}_k(V,W)$, $\mathrm{Aut}_K(V)$ . . . 24
- 3.4 Matrizen und lineare Abbildungen . . . 25
- 3.5 Der Rang . . . 31

4 Lineare Gleichungen und Determinanten **38**
- 4.1 Die Lösungsgesamtheit eines linearen Gleichungssystems . . . 38
- 4.2 Der Gaußsche Algorithmus . . . 40
- 4.3 Determinantenformen . . . 41
- 4.4 Die Determinante auf $\mathcal{M}(n,n;K)$ . . . 47

5 Mehr über Vektorräume **52**
- 5.1 Äquivalenzrelationen und Faktorstrukturen . . . 52
- 5.2 Dualräume . . . 56
- 5.3 Skalarenwechsel . . . 58

6 Eigenwerte und Normalformen von Endomorphismen **61**
- 6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 61
- 6.2 Das charakteristische Polynom . . . 63
- 6.3 Normalformen, elementare Theorie . . . 67
- 6.4 Die Jordansche Normalform . . . 70

7 Euklidische und unitäre Vektorräume **74**
- 7.1 Vektorräume mit Skalarprodukt (SKP) . . . 74
- 7.2 Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . 80
- 7.3 Selbstadjungierte und normale Endomorphismen . . . 85
- 7.4 Bilinearformen . . . 88
- 7.5 Quadriken . . . 93

8 Banach- und Hilberträume **98**
8.1 Basen von unendlich-dimensionalen Vektorräumen 98
8.2 Normierte Vektorräume 99
8.3 Hilberträume 108
8.4 Fourier-Reihen 112
8.5 Orthogonal-Polynome 116

9 Konvexe Mengen und lineare Optimierung **119**
9.1 Geometrische Eigenschaften konvexer Mengen 119
9.2 Lineare Optimierung 122
9.3 Weitere Eigenschaften konvexer Mengen 125
9.4 Die Simplex-Methode 126

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Mengen und Abbildungen

Menge = Zusammenfassung einzelner Objekte (Elemente) zu einem neuen Objekt.

1.1 Beispiele: i $A = \{1, 2, 3\}$

ii $N = \{1, 2, 3...\}$ natürliche Zahlen

iii $A_n = \{1, 2, .., n\},\ n \in N$

iv $Q = \{\frac{p}{q} :\ p \in N\ ,\ p, q$ teilerfremd $\}$

v $G = \{m \in Z :\ m = 2n,\ n \in Z\}$ gerade Zahlen

vi $R = \{$ Dezimalzahlen $\}$ reelle Zahlen

vii $Z = \{\ldots, -2, -1, 01, 2, \ldots\}$ ganze Zahlen

1.2 Definition : Es seien A,B Mengen

i A heißt Teilmenge von B (i.Z. : $A \subset B$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Anders ausgedrückt:

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

ii A = B $\Leftrightarrow$ ($A \subset B$ und $B \subset A$)

1.3 Beispiel: $N \subset Z \subset Q \subset$ R

1.4 Definition: A, B, C Mengen

i $A \cup B = \{x :\ x \in A$ oder $x \in B\}$ Vereinigung

ii $A \cap B = \{x :\ x \in A$ und $x \in B\}$ Verknüpfung, Schnittmenge

iii $A - B = \{x :\ x \in A$ und $x \notin B\} A \not\subset B$

1.5 Sätze: A, B, C Mengen, dann gilt

i $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ii $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

iii $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

iv $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

Beweis:

i "$\subset$ ": Es sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in (B \cap C)$.
Ist $x \in A$, dann ist auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Dann folgt auch $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Ist $x \in B \cap C$, dann ist $x \in B$ und $x \in C$. Dann ist auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Es folgt: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
"$\supset$ ": Es sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann ist $x \in (A \cup B)$ und $x \in (A \cup C)$. Wenn $x \in A$ ist, dann auch $x \in A \cup (B \cap C)$. Wenn $x \notin A$ ist, dann muß $x \in B$ und C sein, also $x \in B \cap C$. Wieder folgt $x \in A \cup (B \cap C)$.

ii

iii "$\Rightarrow$ ": Es sei $A \cup B = A$ und $x \in B$. Dann ist $x \in A \cup B = A$. Es folgt: $B \subset A$.
"$\Leftarrow$ ": Es sei $B \subset A$. Es gilt immer $A \subset A \cup B$. Zu zeigen bleibt, daß $A \cup B \subset A$. Es sei $x \in A \cup B$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in B$. Wenn $x \in A$, bin ich fertig. Wenn $x \in B$ ist auch $x \in A$, da nach Voraussetzung $B \subset A$ ist.

1.6 Definition: $A, B, A_1, \ldots, A_n$ Mengen

i $A \times B = \{(x, y) : \ x \in A, y \in B\}$ kartesisches Produkt

ii $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}$

iii $A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{\text{n-mal}}$

Beachte: $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x', \ y = y'$
$(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n) \Leftrightarrow x_1 = x'_1, \ldots, x_n = x'_n$
2. Eine Abbildung f einer Menge A in eine Menge B, in Zeichen $f : A \to B$, ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet. Schreibweise: $y = f(x)$
Beispiele: Funktionen x^2 , $\quad f : \ Q \to Q, \ x \mapsto x^2, \ f(x) = x^2$

1.7 Definition: Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung. f heißt auf A

i injektiv, wenn zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$; anders ausgedrückt $(x_1, x_2 \in A, \ f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$

ii surjektiv, wenn zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$; anders ausgedrückt $f(A) = B$.

iii bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist, wenn also zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$

1.8 Beispiele: i $f : R \to R, \ f(x) = x^2$. Ist weder injektiv noch surjektiv, denn es ist $f(-1) = f(1) = 1$ und es ist nie $f(x) < 0$.

ii $f : R \to R_+ = \{x \in R : \ x \geq 0\}$, nicht inj., aber surjektiv.

iii $f : R_+ \to R_+$ bijektiv.

1.9 Definition: i Für eine Menge A heißt die Abbildung $id_A : A \to A$ mit $id_A(x) = x, \ x \in A$, die identische Abbildung von A.

ii Sind $f : A \to B, \ g : B \to C$ Abbildungen, dann ist die Abb. $g \circ f : A \to C$ erklärt durch:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in A$$

$g \circ f$ heißt die Komposition von f und g.

1.10 Satz Sind Abbildungen $f : A \to B,\ g : B \to C$ beide $\begin{cases} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{cases}$ dann ist auch $g \circ f$ $\begin{cases} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{cases}$.

Beweis: Sind f,g injektiv, $x, x' \in A,\ (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, dann folgt $g(f(x)) = g(f(x'))$. Da g injektiv ist, folgt f(x) = f(x'), da f injektiv ist, folgt x = x'. Daher ist $g \circ f$ injektiv.
Sind f,g surjektiv, dann ist $f(A) = B$, also $g(f(A)) = g(B) = C$, also $(g \circ f)(A) = C,\ g \circ f$ surjektiv.
Setze $y = f(x)$. Dann ist $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. Daher ist g surjektiv.

1.11 Satz: Sind $f : A \to B,\ g : B \to C$ Abbildungen und ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv.
Beweis:

i f injektiv: Sind $x, x' \in A,\ f(x) = f(x')$, dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x')$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x = x'$.

ii Zu jedem $z \in C$ gibt es ein $x \in A$ mit $(g \circ f)(x) = z$, da $g \circ f$ surjektiv.
Setze $y = f(x)$. Dann ist $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. Daher ist g surjektiv.

1.12 Satz: Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung

i Wenn f bijektiv ist, dann gibt es genau eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = id_A$. Für g gilt auch $f \circ g = id_B$. Man schreibt $g = f^{-1}$ und nennt dies die inverse Abb. zu f.

ii Wenn eine Abb. $g : B \to A$ ex. mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$, dann ist f bijektiv und $g = f^{-1}$.

iii Ist f bijektiv, dann auch f^{-1} und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beweis:

i Es sei $y \in B$. Da f bijektiv ist, gibt es genau ein $x \in A$ mit $y = f(x)$. Setze $g(y) = x$. g ist eine Abb. $B \to A$, und es gilt: für alle $x \in A : (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x,\ y = f(x)$
Daher ist $g \circ f = id_A$.
Für alle $y \in B$ gilt: $(f \circ g)(y) = f(g(y))$: Es gibt genau ein $x \in A$ mit $y = f(x)$. Dafür gilt: $g(y) = x$. Daher ist $(f \circ g)(y) = f(x) = y$. Daraus folgt $f \circ g = id_B$.
Ist $h : B \to A$ eine weitere Abb. mit $h \circ f = id_A$. Dann gilt für alle $y \in B,\ y = f(x),\ x \in A :\ h(y) = h(f(x)) = (h \circ f)(x) = x = g(y)$. Daraus folgt h=g.

ii und (iii): $g \circ f = id_A \Rightarrow f$ injektiv, g surjektiv (nach 1.11)
$f \circ g = id_B \Rightarrow f$ surjektiv, g injektiv $\Rightarrow f, g$ bijektiv, aus (i) folgt $g = g^{-1}$.
Damit ist (ii) und der erste Teil von (iii) bewiesen.
Der zweite Teil von (iii) ($g = f^{-1}$): Für jedes $x \in A,\ y = f(x),\ x = f^{-1}(y) = (g^{-1} \circ g)(y) = y = f(x)$
Daher ist $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$.

1.13 Satz Sind $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$ Abbildungen zwischen Mengen, dann gilt:

i $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

ii falls f,g bijektiv sind, ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Beweis:

i Für alle $x \in A$ ist: $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f))(x)$.

ii $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A$. Zu zeigen daß $id_B \circ f = f$. Beweis: Für alle $x \in A$ ist $(id_B \circ f)(x) = id_B(f(x)) = f(x)$

1.2 Gruppen

2.1 Definition: Eine innere 2-stellige Verknüpfung auf einer Menge A ist eine Abbildung $f : A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto f(a,b) = a \bigodot b$ oder $a \cdot b,\ ab$.

2.2 Beispiele i $+: N \times N \to N,\ (m,n) \mapsto m+n$

ii $\cdot :\ Z \times Z \to Z,\ (m,n) \mapsto m \cdot n$

iii $- :\ Z \times Z \to Z,\ (m,n) \mapsto m - n$

iv M Menge, $A = \{f : M \to M :\ f \text{ Abb.}\}$
$\circ :\ A \times A \to A,\ (f,g) \mapsto f \circ g$

v (Anschauliche) Drehungen der Ebene um Winkel α bzw. β. Abb. Produkt ist Drehung um $\alpha + \beta$.

2.3 Definition: Eine innere 2-stellige Verknüpfung $\circ :\ A \times A \to A$ auf einer Menge A heißt

i assoziativ, wenn für alle $a,b,c \in A$ gilt: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,

ii kommutativ, wenn für alle $a,b,c \in A$ gilt: $a \circ b = b \circ a$.

2.4 Beispiele aus 2.2 (i),(ii) sind ass. und komm., (iii) ist gar nichts, (iv) assoziativ, aber nicht kommutativ, falls M mind. zwei Elemente enthält: $M = \{a,b,...\},\ a \neq b$. Def. $f,g :\ M \to M$ mit $f(a) = f(b) = a,\ g(a) = g(b) = b$: Dann ist $(g \circ f)(x) = b$ $(x \in \{a,b\})$. $(f \circ g)(x) = a$.
(v) assoziativ und kommutativ.

2.5 Definition: Eine Menge G mit einer 2-stelligen Verknüpfung $\cdot :\ G \times G \to G$ heißt eine Gruppe, wenn gilt:

(G1): $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ für alle $x,y,z \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2): Es gibt ein Element $e \in G$ (neutrales Element) mit folgenden Eigenschaften:

(G2a): $e \cdot x = x$ für alle $x \in G$

(G2b): Zu jedem $x \in G$ gibt es ein $x' \in G$ (inverses Element) mit $x' \cdot x = e$

G heißt abelsch oder kommutativ, wenn $\cdot$ kommutativ ist $(G, \cdot)$

2.6 Satz: Es sei G eine Gruppe.

i Ist $e \in G$ neutrales Element, dann gilt:

(a) wenn x' zu x invers ist, gilt: $x \cdot x' = e$

(b) $x \cdot e = x$ für alle $x \in G$

ii Es gibt nur ein neutrales Element.

iii Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein inverses Element, welches mit x^{-1} bezeichnet wird.

iv Für alle $x,y \in G$ gilt: $(x^{-1})^{-1} = x$ und $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$

Beweis:

i a) Zu x' gibt es ein $x'' \in G$ mit $x'' \cdot x' = e$. Dann gilt:$x \cdot x' = e \cdot (x \cdot x') = (x'' \cdot x')(x \cdot x') = x''(x'(x \cdot x')) = x''((x' \cdot x) \cdot x') = x'' \cdot (e \cdot x') = x'' \cdot x' = e$.
b) $x \cdot e = x \cdot (x' \cdot x) = (x \cdot x') \cdot x = e \cdot x = x$ für alle $x \in G$.

ii Ist e' neutrales Element, folgt: $e' = e \cdot e'$, da e neutral ist, und $ee' = e$, da e' neutral ist. Daher $e = e'$.

iii Falls $x'' \cdot x = x' \cdot x = e$ ist, folgt $x'' = x'' \cdot e = x'' \cdot (x \cdot x') = (x'' \cdot x) \cdot x' = e \cdot x' = x'$.

iv Es ist $x \cdot x^{-1} = e$, also x invers zu x^{-1}. Daher $(x^{-1})^{-1} = x$.
$(y^{-1}x^{-1})(x \cdot y) = y^{-1}(x^{-1} \cdot x) \cdot y = y^{-1} \cdot e \cdot y = y^{-1} \cdot y = e$

2.7 Beispiele: i $\{e\}$ ist eine Gruppe: $e \cdot e = e$

ii Z ist bzgl. + eine abelsche Gruppe (neugrales Element: 0, inverses Element: -x) Entsprechend für Q und R bzgl. Addition.

iii $G = \{e, a\}$

·	e	a
e	e	a
a	a	e

iv $Q^* = Q - \{0\}$ bzgl. $\cdot$ ist Gruppe.
$R^* = R - \{0\}$ abelsche Gruppe.

v Anschaulische Drehgruppe
$n \in N$, T = Drehung der Ebene um $\frac{2\pi}{2}$
$G = \{id,\ T, \ldots,\ T^n = T \cdot T ... T^{n-1}\}$, $T^n = id$ Abb.-Produkt als Verknüpfung. Abelsche Gruppe.

2.8 Satz: Ist M eine Menge, dann bezeichnet S(M) die Menge aller bijektiven Abbildungen von M auf sich. Bzgl. des Abbildungsproduktes $\circ$ ist S(M) eine Gruppe. Falls M mehr als 2 Elemente hat, ist S(M) nicht abelsch. S(M) heißt symmetrische Gruppe.

$$M = \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$S(M) = S_n$$

Beweis: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
Wenn $f, g \in S(M)$, also bijektiv, ist auch $f \circ g$ bijektiv, also $\in S(M)$ (nach 1.13). Das Assoziativ-Gesetz gilt nach 1.13.
Neutrales Element ist id_M: Wenn für alle $f \in S(M)$ und alle $x \in M$ gilt: $(id_M \circ f)(x) = id_M(f(x)) = f(x)$, also $id_M \circ f = f$
Invers zu $f \in S(M)$ ist f^{-1} : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$.
Wenn $x_1, x_2, x_3 \in M$ paarweise verschieden sind, dann definiere $f, g :\ M \to M$ durch

$$f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_1,\ f(x) = x \text{ für alle } x \in M - \{x_1, x_2\} ,$$
$$g(x_2) = x_3,\ g(x_3) = x_2,\ g(x) = x \text{ für alle } x \in M - \{x_2, x_3\} ,$$
$$\text{Dann ist } \left.\begin{array}{l}(g \circ f)(x_1) = g((f(x_1)) = g(x_2) = x_3 \\ (f \circ g)(x_1) = f((g(x_1)) = f(x_1) = x_2\end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \neq f \circ g$$

1.3 Ringe und Körper

3.1 Definition: i Ein Ring ist eine Menge R mit mindestens 2 Elementen, auf der zwei zweistellige innere Verknüpfungen $+, \cdot$ gegeben sind, so daß gilt:

(R1): (R,+) ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element wird mit 0 bezeichnet. Das Inverse zu x wird mit -x bezeichnet.

(R2): Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. für alle $x, y, z \in R$ gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(R3): Es gibt ein multiplikativ neutrales Element $1 \in R$ mit $1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\ x \in R$.

(R4): Es gelten die Distributivgesetze $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\ ,\ (x + y) \cdot z = xz + yz$.

ii R ist ein komutativer Ring, wenn xy = yx für alle $x, y \in R$

iii R ist ein Schiefkörper, falls $R^* = R - \{0\}$ bzgl. $\cdot$ eine Gruppe ist, ein Körper, falls diese Gruppe auch abelsch ist.

Beispiele:

i $(Z, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

ii $(Q, +, \cdot)$, $(R, +, \cdot)$ Körper.

3.2 Satz: In einem Ring R gelten folgende Regeln

i $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0,\ x \in R$

ii $-x \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)\ ,\ x, y \in R$

iii $1 \neq 0$

iv Falls R Schiefkörper ist, folgt aus xy = 0 stets x=0 oder y=0.

v Falls R Schiefkörper ist und $x \in R$, dann gilt $x \cdot x = x^2 = 1$ genau dann, wenn $x = 1$ oder $x = -1$.

Beweis:

i $0 \cdot x + x \cdot x = (0 + x) \cdot x = x \cdot x$, daher $0 \cdot x = 0$
$x \cdot 0 + x \cdot x = (0 + x) \cdot x = x \cdot x$, daher $x \cdot 0 = 0$

ii $0 = (x + (-x))y = xy + (-x)y$
$0 = (x(y + (-y)) = xy + x \cdot (-y)$

iii Es gibt ein $x \in R^* = R - \{0\}$ (wg. mind. 2 Elemente). Dann ist $1 \cdot x = x$, aber $0 \cdot x = 0 \neq x$. Dann kann nicht $1 = 0$ sein.

iv Aus $x, y \in R^*$ folgt $x \cdot y \in R^*$

v $1 \cdot 1 = 1,\ (-1)(-1) = -(1 \cdot (-1)) = -(-1) = 1$. Ist $x^2 = 1$, dann $0 = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; also x=1 oder x=-1

3.3 Beispiele: i Der Körper C der komplexen Zahlen $C = R^2 = \{(x, y) : x, y \in R\},\ z = (x, y)$

Definition:

(a) $z + z' = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

(b) $z \cdot z' = (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

Verifikation der Körperaxiome

(K1): (C,+) ist abelsche Gruppe; ist leicht, da (R,+) abelsche Gruppe.
$(x, y) + ((x', y') + (x'', y'')) = ((x, y) + (x', y')) + (x'', y'')$
neutrales Element $(0, 0) + (x, y) = (x, y)$
invers zu $(x, y)\ :\ (-x, -y)$

(K2): $(C^*, \cdot)$ ist abelsche Gruppe.

(a) zu zeigen ist, daß $\cdot$ innere 2-stellige Verknüpfung auf C^* ist.

$$z = (x, y),\ z' = (x', y'),\ z \cdot z' = (xx' - yy', xy' + yx') = 0$$

Falls $z \cdot z' = 0$, folgt

$$\begin{aligned} xx' - yy' &= 0 \quad | \cdot x' \\ xy' + yx' &= 0 \quad | \cdot y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xx'^2 - yx'y' &= 0 \\ xy'^2 - yx'y' &= 0 \quad | + \\ x(x'^2 + y'^2) &= 0 \end{aligned}$$

Wenn $z' \neq 0$, also $(x', y') \neq (0, 0)$, folgt $x = 0$, und darum $y = 0$, also $z = 0$. Für $z, z' \in C^*$ ist also $z, z' \in C^*$.

(b) Assoziativgesetz und Kommutativgesetz als Aufgabe

(c) Neutrales Element ist $(1, 0)$: $(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$

(d) Invers zu (x, y) ist $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0)$$

ii Es sei n eine natürliche Zahl. Wir nennen $x, y \in Z$ kongruent modulon (i.Z: $x \equiv y \bmod n$), wenn $x - y$ durch n teilbar ist. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn x und y bei Division durch n denselben Rest lassen:

$$\begin{aligned} &x = an + r \ , \quad a, b, r, s \in Z \\ &y = bn + s \ , \quad 0 \leq r, s < n \\ &\Rightarrow r = s \end{aligned}$$

Z zerfällt in n Restklassen:

$$\begin{aligned} &R_0 : \{a \cdot n : \ a \in Z\} \\ &R_1 : \{an + 1 : \ a \in Z\} \\ &\vdots \\ &R_{n-1} : \{an + (n - 1) : \ a \in Z\} \end{aligned}$$

$$Z \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k, \ R_k \cap R_l = \emptyset \text{ für } k \neq l \quad k, l = 0, \ldots, n - 1$$

$$Z_n = \{R_0, \ldots, R_{n-1}\}$$

Für $x \in Z$ sei $\overline{x}$ die Restklasse von x, wenn also $x = an + k, \ a, k \in Z, \ 0 \leq k < n$, dann ist $\overline{x} = R_k$.
$\overline{k} = R_k$, wenn $0 \leq k < n \ , \ 0, 1, \ldots, n - 1$
<u>Definition:</u>
$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$
$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$
Es muß gezeigt werden: $\overline{x} = \overline{x'}, \ \overline{y} = \overline{y'} \Rightarrow \overline{x + y} = \overline{x' + y'}$

$$\begin{aligned} n = 4 \quad R_0 &= \{..., -4, 0, 4, 8, ...\} \\ R_1 &= \{..., -3, 1, 5, 9, ...\} \\ R_2 &= \{..., -2, 2, 6, 10, ...\} \\ R_3 &= \{..., -1, 3, 7, 11, ...\} \end{aligned}$$

$$R_1 + R_2 = \overline{7} = R_3$$

z.z.: Die Definition von + und $\cdot$ ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten.

Beweis: Ist $\left.\begin{array}{l} x = an + r,\ x' = a'n + r' \\ y = bn + s,\ y' = b'n + s' \end{array}\right\}$ mit $a, a', b, b', r, r', s, s' \in Z,\ 0 \leq r, r', s, s' < n,$

dann folgt aus $\overline{x} = \overline{x'},\ \overline{y} = \overline{y'}:\ r = r',\ s = s'.$

Damit wird $\begin{array}{l} x + y = (a + b)n + r + s \\ s' + y' = (a' + b')n + r' + s' \end{array}$, also $\overline{x + y} = \overline{x' + y'}$ und

$xy = abn^2 + (as + br)n + rs$

$x'y' = a'b'n^2 + (a's + b'r)n + rs$

$\Rightarrow \overline{xy} = \overline{x'y'}$

Behauptung: $(Z_n, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

Beweis: (R1) $(Z_n, +)$ ist abelsche Gruppe

...

+ - neutrales Element : $\overline{0} = R_0$

Inverses zu $\overline{x}$ ist $\overline{-x}:\ \overline{x} + \overline{-x} = \overline{x - x} = \overline{0}$

(R2) ...

(R3) $\cdot$ - neutral: $\overline{1} = R_1$

$\overline{x}\overline{1} = \overline{an + r} \cdot \overline{a'n + 1} = \overline{(an + r)(a'n + 1)} = \overline{r} = \overline{x}$

Nullteiler: i.A. folgt aus $\overline{xy} = 0$ nicht $\overline{x} = 0$ oder $\overline{y} = 0$

Beispiel: $N = 4,\ x = 2,\ y = 2,\ \overline{xy} = \overline{4} = \overline{0}$

$n = 0,\ x = 2,\ y = 3,\ \overline{xy} = \overline{0}$

Ein Körper hat nie Nullteiler!

3.4 Satz: Z_n ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl p ist. Statt Z_p schreibt man auch F_p (field)

Beweis:

i Z_n ist genau dann nullteilerfrei, wenn n prim ist; denn es gilt $\overline{xy} = 0 \Leftrightarrow xy = an,\ a \in Z.$ Wenn n prim ist und das Produkt xy teilt, dann teilt sie einen Faktor. Dann ist $\overline{x} = 0$ oder $\overline{y} = 0$. In diesem Fall ist also Z_n nullteilerfrei.
Ist n nicht prim, $n = kl,\ k, l \neq n,\ k, l \in Z$, dann ist $\overline{kl} = \overline{n} = 0$: Daher gibt es Nullteiler.

ii Z_n ist also höchstens dann ein Körper, wenn n prim ist. Andererseits gilt, jeder endl. nullteilerfreie kommutative Ring R ist ein Körper.
Beweis: Ist $a \in R - \{0\}$, dann definiere $f_a : R \to R$ durch $f_a(x) = ax$. f_a ist injektiv, denn aus $ax = ay$ folgt: $ax - ay = a(x - y) = 0$. Da R nullteilerfrei und $a \neq 0$ ist, folgt $x = y$. Da R endl. ist, ist die injektive Abb. auch surjektiv. Daher gibt es ein $x \in R - \{0\}$ $ax = 1$. x ist invers zu a. $\cdot :\ (R - \{0\})^2 \to R - \{0\}$.

3.5 Beispiel: $F_2 = \{0, 1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

wg. $R - \{0\}$

Satz von Wilson p prim $\Rightarrow (p - 1)! = -1 \bmod p$, $(p - 1)! + 1$ durch p teilbar , $(p - 1)! = 1 \cdot 2 ... \cdot (p - 1).$, $p = 2^{127} - 1$)

Beweis: In F_p heißt die Behauptung $\overline{1} \cdot \overline{2} \cdot ... \cdot \overline{(p - 1)} = \overline{-1}$

$\overline{1} \cdot \overline{-1} \cdot \overline{2} \cdot ... \cdot \overline{p - 2} = \overline{-1}$

Da F_p Körper ist, gibt es zu jedem $x \in F_p$ genau ein $x' \in F_p$ mit $xx' = 1$. Wann kann $x = x'$ sein? Nur für $x = 1$ oder $x = -1$

$\overline{1} \cdot \overline{-1} \cdot \underbrace{\overline{2} \cdot ... \cdot \overline{p - 1}}_{=1} = \overline{-1}$

Kapitel 2

Vektorräume

2.1 Definition und Beispiele

Im Folgenden sei immer K ein fest gegebender Körper.

1.1 Definition: Ein Vektorraum (VR) V über K ist eine Menge V mit einer 2-stelligen inneren Verknüpfung $+: V \times V \to V$ und einer Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V,\ (\alpha, v) \in K \times V \to \alpha v \in V$ (Multiplikation von Vektoren mit Skalaren), so daß folgende Regeln gelten:

(V1) : (V,+) ist eine abelsche Gruppe. (neutrales Elt.: 0, Invers zu v ist -v)

(V2) : $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v\ ,\ \alpha, \beta \in K,\ v \in V$

(V3) : $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w\ ,\ \alpha \in K,\ v, w \in V$

(V4) : $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v\ ,\ \alpha, \beta \in K,\ v \in V$

(V5) : $1 \cdot v = v\ ,\ v \in V.$

Die Elemente von K heißen auch Skalare, die Elemente von V Vektoren.

1.2 Bemerkung: Das +-Zeichen und das ·-Zeichen werden in doppelter Bedeutung benutzt; einmal als Vektoraddition, einmal als Addition in K ...

1.3 Satz: Ist V ein Vektorraum über K, dann gilt:

i $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$

ii $(-1) \cdot v = -v$, für alle $v \in V$

iii $\alpha \cdot 0 = 0$, $\alpha \in K$

Beweis:

i $v = 1 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = v + 0 \cdot v$, also $0 \cdot v = 0$

ii $0 = 0 \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = v + (-1) \cdot v \Rightarrow (-1) \cdot v = -v$

iii $\alpha \cdot 0 = \alpha(v + (-v)) = \alpha v + \alpha(-v) = \alpha v + \alpha((-1)v) = \alpha v + (-\alpha)v = (\alpha + (-\alpha))v = 0 \cdot v = 0$

1.4 Beispiele i K ist VR über sich selbst.

ii R ist VR über Q; allgemeiner ist jeder Körper ein VR über jedem Unterkörper.

iii $K^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) :\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$ mit Operationen
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$
$\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n)$

iv I beliebige Menge, $V = \{f : I \to K \text{ Abb. }\}$
$(f+g)(i) = f(i) + g(i)\ ,\ f, g \in V\ ,\ i \in I$
$(\alpha f)(i) = \alpha \cdot f(i)$
V VR über K, $f(i) = \alpha_i\ ,\ I = \{1, \ldots, n\}\ ,\ f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$I = N\ ,\ f = (\alpha_i)_{i \in N}$

v $V = C^0[a,b]\ ,\ a, b \in R\ ,\ a < b$ stetige Funktionen von $[a,b] \to R$.
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)\ ,\ \alpha \in R,\ f, g \in V$

1.5 Definition: Ist V ein VR über K, dann heißt eine Teimenge $U \subset V$ Untervektorraum oder Teilraum von V, wenn U mit den von V geerbten Verknüpfungen ein K-VR ist.

1.6 Satz: Ist U eine nicht leere Teilmenge des VR V, dann ist U Teilraum von V genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i $(u, v) \in U \times U,\ \alpha \in K \Rightarrow u + v \in U,\ \alpha u \in U$

ii $(u, v) \in U \times U,\ (\alpha, \beta) \in K \times K \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$

Beweis: Wenn U ein Teilraum ist, dann sind (i) und (ii) trivialerweise erfüllt. Aus (ii) folgt natürlich (i). Noch zu zeigen: aus (i) folgt, daß U Teilraum ist. Als einziges wirklich zu zeigen:
(V1): (U,+) abelsche Gruppe.
Also: $0 \in U$ und $(u \in U \Rightarrow -u \in U)$
$0 \in U$, da $0 = 0 \cdot u$ für alle $u \in U$.
$-u \in U$, da für $u \in U$ und $(-1) \in K$ gilt: $-u = (-1) \cdot u \in U$

1.7 Beispiele (0) $\{0\}$

i Sind U,W Teilräume von V, dann auch $U \cap W$, für $\alpha, \beta \in K,\ u, v \in U \cap W$ gilt:
$\alpha u + \beta v \in U$, da U Teilraum ist, und $\alpha u + \beta v \in W$, da W Teilraum ist. Daher $\alpha u + \beta v \in U \cap W$.

ii Die Vereinigung ist i.A. kein Teilraum, wohl aber die Summe:

$$U + W = \{v \in V :\ v = u + w,\ u \in U,\ w \in W\}$$

iii $C^1[a,b]$: 1-mal stetig differenzierbare Funktionen auf $[a,b]$. Dies ist Teilraum von $C^0[a,b]$ (stetige Funktion auf $[a,b]$)

1.8 Definition: Es sei V ein VR über K, $M \subset V$.

i Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination von Vektoren aus M, wenn es $v_1, \ldots, v_n \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ gibt mit

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\ ,\ v_1 + \ldots + v_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

induktive Definition: $n = 1 :\ \sum_{k=1}^{1} v_k = v_1$

Annahme: $\sum_{k=1}^{n} v_k$ bereits definiert.

Definiere: $\sum_{k=1}^{n+1} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + v_{k+1}$

ii Wir bezeichnen mit Span(M) die Menge all dieser Linearkombinationen von Elementen aus M, nennen dies auch das Erzeugenden-System von M.

iii M heißt Erzeugendes System von V, wenn Span(M)=V ist.

iv $\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$

1.9 Satz: i Span(U) ist Teilraum von V

ii Span(M) ist der kleinste Teilraum von V, der M enthält.

iii Für $M' \subset M$ ist $\text{Span}(M') \subset \text{Span(M)}$

Beweis:

i Mit $\left.\begin{array}{l} v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \\ w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n \end{array}\right\} \in \text{Span(M)},\ \alpha, \beta \in K$ ist

$$\alpha v + \beta w = \alpha\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha\alpha_m v_m + \beta\beta_1 w_1 + \ldots + \beta\beta_n w_n \in \text{ Span(M)}$$

ii Ist U Teilraum von V, $M \subset U$ und sind $v_1, \ldots, v_m \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, dann ist wegen der Teilraum-Eigenschaft von U:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \in U\ ,\ u, v \in U,\ \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$$

iii trivial

2.2 Basis und Dimension

Jeder Vektorraum besitzt Erzeugenden-Systeme: V selbst ist eins. Gesucht sind möglichst „kleine "Erzeungenden-Systeme.

2.1 Definition: Ein Erzeugenden-System M für V heißt minimal, wenn für jede echte Teilmenge $M' \subset M$ gilt:

$$\text{Span } M' \neq V$$

2.2 Satz: i Ist $M \subset V,\ M \neq 0$ eine beliebige Teilmenge, $v \in \text{Span(M)}$, dann gilt: $\text{Span(M}\cup\{v\})$ $= \text{Span(M)}$.

ii Es sei M ein minimales Erzeugenden-System für V. Dann gilt für je endlich viele paarweise verschiedene $v_i \in M$ und alle $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in K$:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Beweis:

i Daß $\text{Span(M)} \subset \text{Span(M}\cup\{v\})$, ist klar. Da $v \in \text{Span(M)}$ gilt $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\ ,\ v_1, \ldots, v_n \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Ist $w \in \text{Span(M}\cup\{v\})$, dann ist $w = \alpha v + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m$, mit $w_1, \ldots, w_m \in M,\ \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K$
Es folgt

$$w = \alpha\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha\alpha_n v_n + \beta w_1 + \ldots + \beta_m w_m \in \text{Span(M)}\ .$$

Daher ist $\text{Span(M} \cup\{v\}) \subset \text{Span(M)}$.

ii Angenommen, es gibt paarweise verschiedene $v_1 \dots v_n \in M$ und $\alpha_1 \dots \alpha_n \in K$; nicht alle $\alpha_k = 0$, so daß $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Dannn gibt es ein $k \in \{1, \dots, n\}$, so daß $\alpha_k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 v_1 + \quad \dots \quad & + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0 \ , \\
-\alpha_k v_k &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \\
&= \alpha_1 v_1 + \dots + \overbrace{\alpha_k v_k} + \dots + \alpha_n v_n \ . \\
v_k &= -\frac{1}{\alpha_k}(\alpha_1 v_1 + \dots + \overbrace{\alpha_k v_k} + \dots + \alpha_n v_n) \\
&= \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_k} v\right) + \dots + \overbrace{\left(\frac{-\alpha_k}{\alpha_k}\right) v_k} + \dots + \left(\frac{-\alpha_n}{\alpha_k}\right) v_n \\
&\in \ \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n)
\end{aligned}$$

Setzt man $M' = M - \{v_k\}$, dann gilt $v_k \in \mathrm{Span}(M')$. Aus (i) folgt: $\mathrm{Span}(M') = \mathrm{Span}(M' \cup \{v\}) = \mathrm{Span(M)} = \mathrm{V}$, im Widerspruch zur Minimalität von M.

2.3 Definition: Eine Menge $M \subset V$ heißt linear unabhängig über K, wenn für K endlich viele paarweise verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in M$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gilt:

$$\alpha_1 \ v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \ \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \ .$$

Andernfalls heißt M linear abhängig.

2.4 Beispiele: i Im K^n sind die Vektoren

$$\begin{aligned}
&e_1 = (1, 0, \dots, 0) \ , \\
&e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \ , \\
&\vdots \\
&e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)
\end{aligned}$$

linear unabhängig über K: Sind nämlich $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ und $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 = (0, \dots, 0)$; dann ist $\alpha_1(1, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, \dots, 1) = (\alpha_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$
Es folgt: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

ii Es seien $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen. Dann sind die reellen Zahlen $\log p_1, \dots, \log p_n$ linear unabhängig über Q.
Beweis: Sind $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n} \in Q$, $\alpha_n \in Z$, $\beta_n \in N$ mit $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \log p_1 + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \log p_n = 0$
es folgt : $\gamma_1 \log p_1 + \dots + \gamma_n \log p_n = 0$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in Z$. $(\log x + \log y = \log xy)$
$\log(p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n}) = 0$ also $p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n} = 1$. Es folgt $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$.

2.4b Bemerkung: i Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

ii Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig.

2.5 Definition: i Ein l.u. Erzeugenden-System für V heißt eine Basis für V.

ii Eine l.u. Menge heißt maximal, wenn jede echte Obermenge l.a. ist.

2.6 Satz: Für eine Teilmenge $M \subset V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i M ist Basis für V.

ii M ist minimales Erzeugendensystem für V.

iii M ist maximal l.u. Menge für V.

Beweis:

a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii): a1) (ii) $\Rightarrow$ (i): folgt aus 2.2(ii).
a2) (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei M eine Basis, $v \in M,\ M' = M - \{v\}$. Wenn Span(M')=V wäre, dann wäre $v \in$ Span(M'), $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ mit paarweise versch. $v_1, \ldots, v_n \in M',\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.
$(-1)v + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, somit $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ l.a. Dann wäre aber M linear abhängig, im Widerspruch zur Annahme. Daher ist $v \notin$ Span(M') also M' nicht Erzeugendensystem.

b) (i) $\Leftrightarrow$ (iii): b1) (i) $\Rightarrow$ (iii): Es sei M Basis für V, $v \in V - M$: Da Span(M) =V ist, gibt es paarweise verschiedene $v_1, \ldots, v_n \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Wie oben folgt, daß $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ l.a. ist. Dann ist aber auch $M \subset \{v\}$ l.a. Daher ist M maximale l.u. Menge.
b2) (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei M max. l.u. Menge in V. Für jedes $v \in V - M$ ist dann $M \cup \{v\}$ l.a. Es gibt daher paarweise verschiedene $v_1, \ldots, v_n \in M,\ \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ nicht alle =0, so daß $\alpha v + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Wäre $\alpha = 0$, dann $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, also wg. der linearen Unabhängigkeit von M: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Daher ist $\alpha \neq 0$, also $(-\alpha)v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v = -\frac{1}{\alpha}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = (\frac{-\alpha_1}{\alpha})\, v_1 + \ldots + (-\frac{\alpha_n}{\alpha})\, v_n$. Es folgt $v \in$ Span(M) , V = Span(M).

2.7 Beispiele i Die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ bilden eine Basis:

$$\begin{aligned} K^n \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, \alpha_k, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, \alpha_n) \\ &= \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k + \ldots + \alpha_n e_n \end{aligned}$$

ii Die Vektoren $v_1 = (1,2,3),\ v_2 = (4,5,6),\ v_3 = (7,8,9) \in R^3$ sind über R l.a.
Beweis:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \\ &\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(4,5,6) + \alpha_3(7,8,9) = (0,0,0) \\ &(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \quad I \quad |I - II \\ &2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \quad II \\ &3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \quad III \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2I - II \quad & 3\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ 3I - III \quad & 6\alpha_2 + 12\alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Dies zeigt: nicht eindeutig bestimmt. Man wähle $\alpha_2 = 2$. Daher folgt $\alpha_3 = -1,\ \alpha_1 = -1$. Dies ist wirklich eine Lösung, wie man durch Einsetzen festellt.

Weiterhin: Wenn v Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist, soll das immer so verstanden sein, daß die $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind.

$$\left.\begin{aligned} v &\in Span(M) \\ w &\in Span(M) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v + w \in Span(M)$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \\ w &= \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow v + w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m$$

2.8 Satz: Eine Teilmenge $M \subset V$ ist genau dann Basis für V, wenn jeder Vektor aus V sich auf genau eine Weise (bis auf die Reihenfolge) als Linearkombination von Vektoren aus M darstellen läßt.
Beweis:

"$\Rightarrow$ ": Es sei M eine Basis für V. Dann hat jeder Vektor $v \in V$ eine Darstellung als Linearkombination von Elementen aus M.
Angenommen: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m$ Ist $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w_1, \ldots, w_m\} = \{u_1, \ldots, u_k\}$, $u_1, \ldots, u_k$ paarweise verschieden, dann ist

$$v = \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_k u_k = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_k u_k \ , \quad \gamma_1, \ldots \gamma_n, , \delta_1, \ldots, \delta_k \in K$$

Daraus folgt $(\gamma_1 - \delta_1)u_1 + \ldots + (\gamma_k - \delta_k)u_k = 0$, wg. der linearen Unabhängigkeit von$\{u_1, \ldots, u_k\}$ also $\gamma_1 = \delta_1, \ldots, \gamma_k = \delta_k$.

"$\Leftarrow$ ": Z.z.: M ist l.u. Angenommen es wäre l.a., dann gibt es paarweise verschiene $v_1, \ldots, v_n \in M$, $\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K}_{\text{nicht alle } 0}$, mit $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Der Nullvektor wäre auf zwei verschiedene Arten als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ dargestellt.

2.9 Satz: Besitzt V ein endliches Erzeugendensystem M, dann enthält M eine Basis für V.
Beweis: Wenn M schon l.u. ist, sind wir fertig.
Andernfalls konstruieren wir eine Folge $M_0, M_1, \ldots, M_n$ von Erzeugendensystemen von V mit folgenden Eigenschaften:

i $M_0 = M$

ii $M_{k+1} \subset M_k \ (\neq), \ k = 0, \ldots, n-1$

iii $M_1, \ldots, M_{n-1}$ sind l.a., M_n l.u.

Klar, daß dann $M_n \subset M$ Basis ist. Die Folge wird induktiv konstruiert: $M_0 = M$.
Sei M_k schon konstruiert. Ist M_k linear unabhängig, dann setze $n = k$, und wir sind fertig.
Ist M_k l.a., $M_k = \{v_1, \ldots, v_{n_k}\}$ paarweise verschieden, dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k} \in K$, nicht alle $=0$, so daß $\alpha_1 v_1 + \alpha_{n_k} v_{k_n} = 0$.
Sei $\alpha_i \neq 0$. Dann ist $v = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \widehat{\alpha_i v_i} + \ldots + \alpha_n v_n) \in \mathit{Span}(M_{k+1})$; wo $M_{k+1} = M_k - \{v_i\}$.
Nach 2.2 ist Span(M_{k+1})= Span(M_k)=V. M_{k+1} ist also Erzeugendensystem.
Da M endl. ist, kommt dieser Prozeß zum Stillstand dadurch, daß M_k l.u. wird.

2.10 Satz: (Austauschlemma)
Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis für V, $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Wenn $\alpha_k \neq 0$ ist, dann ist auch $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis für V.
Beweis:

i Z.z. $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ l.u. Sei also

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta w + \beta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \beta_n v_n \\ &= (\beta_1 + \beta\alpha_1)v_1 + \ldots + (\beta_{k-1} + \beta\alpha_{k-1})v_{k-1} + \beta\alpha_k v_k + \ldots + (\beta_n + \beta\alpha_n)v_n \end{aligned}$$

Da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.u., folgt $\beta\alpha_k = 0$, also $\beta = 0$, also auch $\beta_1, \ldots, \beta_n = 0$.

ii Erz.-System: Es ist
V = Span$\{v_1, \ldots, v_n\}$ =Span$\{w, v_1, \ldots, v_n\}$ =Span$\{w, v_1, \ldots, \widehat{v_k}, \ldots, v_n\}$ weil $v_k = -\frac{1}{\alpha_k}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + w + \alpha_k v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n) \in$ Span$\{w, v_1, \ldots, \widehat{v_k}, \ldots, v_n\}$

2.11 Satz: (Austauschsatz von Steinitz)
$n \geq 1$. Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis für V, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ l.u.
Dann gilt:

i $m \leq n$

ii Es gibt $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-m}}$ so daß $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-m}}, w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis für V ist.
Beweis: durch Vollständige Induktion über m.

$m = 1$: Durch Austauschlemma: ($\{w\}$ l.u. $\Leftrightarrow w + 0$) ($0 = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{m-1} w_{m-1} + (-1) w_n$)

$m > 1$: Schluß von m-1 auf m: Für m-1 ist die Aussage richtig. Dann ist $m - 1 \leq n$. Wäre $m - 1 = n$, dann wäre nach (ii) und evtl. Umnumerierung $\{w_n, \ldots, w_{m-1}\}$ Basis.
Aber $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ist l.u., also ist $m - 1 < n$, und daher $m \leq n$. Der Vektor w_m besitzt eine Darstellung $w_m = \alpha w_1 + \ldots + \alpha_{m-1} w_{m-1} + \alpha_m v_m + \ldots + \alpha_n v_n$. Wären $\alpha_m = \ldots = \alpha_n = 0$; hätten wir $w_m = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{m-1} w_{m-1}$, was der Linearen Unabhängigkeit von $\{w_1, \ldots, w_m\}$ widerspricht.
O.B.d.A. kann daher $\alpha_m \neq 0$ angenommen werden. Das Austauschlemma sagt, daß dann $\{w_1, \ldots, w_m, v_{n+1}, \ldots v_n\}$ eine Basis ist.
(ii) Nach evtl. Umnumerierung ist $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis.

2.12 Folgerungen: i Wenn V eine Basis mit n Elementen besitzt, dann hat jede Basis von V n Elemente.

ii Jede n-elementige l.u. Teilmenge von V ist ein Basis.

iii Ist $m < n$ und sind $w_1, \ldots, w_m$ l.u., dann gibt es Vektoren $v_{m+1}, \ldots, v_n$, so daß $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis ist.

Beweis:

i $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ Basen für V. Aus 2.11 folgt $m \leq n$ und $n \leq m$.

2.13 Definition: Der Vektorraum V über K hat die Dimension

n , wenn V eine Basis mit n Elementen besitzt: $\dim_K V = n$

∞ , wenn V keine endliche Base besitzt.

2.14 Beispiele: i $\dim_K K^n = n$: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Einheitsbasis (Kanonische Basis)

ii $\dim_R R = 1$, $\dim_Q R = \infty$ $\log_{p_1}, \ldots, \log_{p_n}$ l.u über Q

iii $\dim_R C = 2$, $\dim_C C = 1$

iv $\dim\{0\} = 0$ (Basis ist die leere Menge)

2.15 Satz: (Dimensionsformel für Unterräume)
Sind U, U' endlich-dimensionale Unterräume des VR V über K, dann gilt:

$$\dim(U + U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U')$$
$$(U + U' = Span(U \cup U') = \{v \in V : \ v = u + u'\}) \quad u \in U, u' \in U'$$

Beweis: Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis für $U \cap U'$, also $\dim(U \cap U') = m$ (Bemerkung: U Unterraum von V, $\dim U < \infty \Rightarrow \dim U \leq \dim V$)
Ist $n = \dim U$, $n' = \dim U'$, dann gilt: $m \leq n$, $m \leq n'$. Nach 2.12 (iii) gibt es Vektoren $v_{m+1}, \ldots, v_n$ und $w_{m+1}, \ldots, w_{n'}$, so daß $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots v_n\}$ eine Basis für U, $\{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_{n'}\}$ eine Basis für U' ist.

Behauptung: $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n, w_{m+1}, \ldots, w_{n'}\}$ ist eine Basis für $U + U'$.
Beweis: Erzeugendensystem: Ist $v = u + u',\ u \in U,\ u' \in U'$, dann ist

$$\left.\begin{array}{l} u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n \\ u' = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m + \beta_{m+1} w_{m+1} + \ldots + \beta_{n'} w_{n'} \end{array}\right\} \Rightarrow v = u + u' \in \mathit{Span}(M)$$

Lineare Unabhängigkeit: Ist $\alpha_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_{m+1} w_{m+1} + \ldots + \beta_{n'} w_{n'} = 0$, dann gilt für $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n :\ v \in U$, $v = -(\beta_{m+1} w_{m+1} + \ldots + \beta_{n'} w_{n'}) \in U'$.
Daher ist $v \in U \cap U',\ v = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$.
Aus der Eindeutigkeit der Entwicklung von U nach der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von U folgt: $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0$: Daher

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \beta_{m+1} w_{m+1} + \ldots + \beta_{n'} w_{n'} = 0$$

Da $\{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_{n'}\}$ eine Basis für U' ist, folgt: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_{m+1} = \ldots = \beta_{n'} = 0$.

2.16 Definition: Sind U und U' Teilräume von V, dann heißt V die direkte Summe von U und U' (i.z.: $V = U \oplus U'$), wenn

i $V = U + U'$

ii $U \cap U' = \{0\}$

2.17 Folgerung: $V = U \oplus U',\ \dim V < +\infty \Rightarrow \dim V = \dim U + \dim U'$

Kapitel 3

Lineare Abbildungen

3.1 Homomorphismen

1. Gruppenhomomorphismen

1.1 Definition: Es seien G,H Gruppen, $f: G \to H$ eine Abbildung. f heißt homomorph, wenn für alle $x, y \in G$ gilt:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

1.2 Beispiele i $f: (Z,+) \to (Z,+),\ f(x) = 2x$
$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$

ii $f: (Q^*,\cdot) \to (Q^*,\cdot),\ f(x) = \frac{1}{x},\ f(x,y) = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}\frac{1}{y} = f(x) \cdot f(y)$

iii $f: (Z,+) \to (Z_n,+),\ f(x) = \overline{x}$ (nat. Projektion)
$f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y)$

iv sgn: $(R^*,\cdot) \to (\{-1,1\},\cdot),\ sgn\ x = \frac{x}{|x|}$

v exp: $(R,+) \to (R_+,\cdot):\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

1.3 Lemma: Ist $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt:

i $f(e) = e$

ii $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Beweis:

i $f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e) \Rightarrow f(e) = e$

ii $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(e) = e$

1.4 Definition: Ist $f: G \to H$ homomorph, dann heißt $\ker f = \{x \in G:\ f(x) = e\} = f^{-1}(\{e\})$ der Kern von f.

1.5 Satz: Ist $f: G \to H$ ein Homomorphismus, dann ist $\ker f$ eine Untergruppe von G und Im f=f(G) eine Untergruppe von H (Menge aller Bilder)

Beweis:

i Sind $x, y \in \ker f$, also $f(x) = f(y) = e$, dann ist $f(y^{-1}) = (f(y))^{-1} = e$, also $y^{-1} \in \ker f$. Es folgt $f(x \cdot y^{-1}) = f(x) \cdot f(y^{-1}) = e \cdot e = e$, also $x \cdot y^{-1} \in \ker f$.

ii Es seien $y_1, y_2^{-1} \in f(G) = Im\ f$: Es gibt dann $x_1, x_2 \in G$ mit $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Wegen $y_2^{-1} = (f(x_2))^{-1} = f(x_2^{-1})$ ist $y_1 \cdot y_2^{-1} = f(x_1) \cdot f(x_2^{-1}) = f(x_1 \cdot x_2^{-1}) \in Im\ f$.

1.5' Lemma: $f: G \to H$: Gruppenhomomorphismus. Dann gilt: f injektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$

Beweis: "$\Rightarrow$ ": Ist f injektiv, dann ist e_G das einzige Element von G, das unter f auf e_H abgebildet wird. Also gilt $\ker f = \{e\}$.
"$\Leftarrow$ ": Es seien $x, y \in G$ mit $f(x) = f(y)$. Dann ist $f(x \cdot y^{-1}) = f(x) \cdot f(y^{-1}) = f(x) \cdot (f(y))^{-1} = f(x) \cdot (f(x))^{-1} = e_H$. Es folgt $x \cdot y^{-1} \in \ker f = \{e\},\ x \cdot y^{-1} = e,\ x = y$.

2. Ring- und Körperhomomorphismen

1.6 Definition: Sind R, R' Ringe, $f: R \to R'$ eine Abb., dann heißt f ein Ringhomomorphismus, wenn für alle $x, y \in R$ gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

Wenn R, R' Körper sind, heißt f ein Körperhomomorphismus.

1.7 Beispiele i $f: Z \to Z_n,\ f(x) = \overline{x}$, ist Ringhomomorphismus, denn $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y},\ \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

ii Die Konjugationsabb. $: C \to C,\ \overline{(x,y)} = (x, -y)$, ist ein (bijektiver) Körperhomomorphismus

3. Vorktorraumhomomorphismen (oder lineare Abbildungen)

1.8 Definition: Es seien V,W Vektorräume über dem Körper K, $f: V \to W$ eine Abb. f heißt K-Vektorraumhomomorphismus (oder: K-lineare Abb.), wenn für alle $v, w \in V,\ \alpha \in K$ gilt:

$$f(v+w) = f(v) + f(w)$$
$$f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

Äquivalent $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) \quad \forall v, w \in V,\ \alpha, \beta \in K$

1.9 Beispiele i $f: R \to R$ ist linear genau dann, wenn es ein $a \in R$ gibt, so daß für alle $x \in R$ gilt: $f(x) = a \cdot x$.

Beweis: a) Daß jede Abb. f mit $f(x) = ax,\ a \in R$, linear ist, sieht man so: $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y),\ f(\alpha x) = a \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha(a \cdot x) = \alpha f(x)$
b) ist umgekehrt f linear, setze $a = f(1)$. Dann ist für alle $x \in R$: $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = a \cdot x$

ii Der Differential-Operator

$$\frac{d}{dx}: C^1[a,b] \to C^0[a,b]$$

ist R-linear:

$$\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx} \quad f, g \in C^1[a,b],\ \alpha, \beta \in R$$

iii Der Integraloperator

$$\int_a^x : C^0[a,b] \to C^1[a,b]\ ,\ f \mapsto g,\ g(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

ist linear, denn

$$\int_a^x (\alpha f_1(\xi) + \beta f_2(\xi)) d\xi = \alpha \int_a^x f_1(\xi) d\xi + \beta \int_a^x f_2(\xi) d\xi$$

iv $V = \text{Abb.}(R, R),\ a \in R$
$\delta_a: V \to R,\ \delta_a(f) = f(a)$ linear

1.10 Lemma: Ist $f : V \to W$ linear, dann gilt:

i $f(0) = 0$

ii $f(-v) = -f(v)$

1.11 Definition: Für eine lineare Abb. $f : V \to W$ heißt $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ der Kern von f.

1.12 Satz: Ist $f : V \to W$ linear, dann ist $\ker f$ ein Unterraum von V, Im f= f(V) ein Unterraum von W.

Beweis:

i $\ker f \neq \emptyset$, denn $0 \in \ker f$. Z.z.: für alle $v, w \in \ker f,\ \alpha, \beta \in K$, gilt: $\alpha v + \beta w \in \ker f$. Seien also $v, w \in \ker f$; also $f(v) = f(w) = 0$. Dann ist $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) = 0$. Also $\alpha v + \beta w \in \ker f$.

ii Seien $y_1, y_2 \in f(V),\ \alpha, \beta \in K$: Im $f \neq \emptyset$, da $0 \in Imf$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in V$ mit $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$: Es folgt:
$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in f(V) = Imf$

4. Isomorphismen

1.13 Definition: Ein bijektiver Homomorphismus (von Gruppen, Ringen, Körpern, Vektorräumen) heißt ein Isomorphismus.

1.14 Beispiel: $R^2 = C,\ (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

Basis: $(1, 0), (0, 1) : (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$. Die Abb. $f : R \to C,\ f(a) = (a, 0)$, ist ein injektiver Körperhomomorphismus:

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$
$$f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$$

Dieses f ist ein Körperisomorphismus von R auf den Unterkörper $f(R) = \{(a, 0) : a \in R\}$. Man identifiziert diese isomorphen Körper.
Also: $R \subset C,\ (x, y) \mapsto x + yi,\ i = (0, 1),\ i \cdot i = i^2 = -1\ (= (-1, 0)),\ (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$
$$(a + ib) \cdot (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$
$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \quad (a, b) \neq (0, 0),\ (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$$

3.2 Eigenschaften linearer Abbildungen

2.1 Satz: Es seien V,W,X VRe über dem Körper K.

i Sind $f : V \to W,\ g : W \to X$ linear, dann ist auch $g \circ f : V \to X$ linear.

ii Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist auch $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.

iii Sind $U \subset V,\ U' \subset W$ Untervektorräme, $f : V \to W$ linear, dann sind auch $f(U) \subset W,\ f^{-1}(U') \subset V$ Unterräume.

Beweis:

i Es seien $v, w \in V,\ \alpha, \beta \in K$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha v + \beta w) &= g(f(\alpha v + \beta w)) = g(\alpha f(v) + \beta f(w)) = \alpha g(f(v)) + \beta g(f(w)) \\ &= \alpha(g \circ f)(v) + \beta(g \circ f)(w)\end{aligned}$$

ii f^{-1} ist linear. Sind $w_1, w_2 \in W,\ \alpha, \beta \in K$, dann ist mit $v_1, v_2 \in V,\ w_1 = f(v_1),\ w_2 = f(v_2)$:

$$\begin{aligned}f^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) &= f^{-1}(\alpha f(v_1) + \beta f(v_2)) = f^{-1}(f(\alpha v_1 + \beta v_2)) = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ &= \alpha f^{-1}(w_1) + \beta f^{-1}(w_2)\end{aligned}$$

iii a) Es seien $w_1, w_2 \in f(U),\ \alpha, \beta \in K$. Z.z. $\alpha w_1 + \beta w_2 \in f(U)$. Es gibt $v_1, v_2 \in U$, so daß $w_1 = f(v_1),\ w_2 = f(v_2)$. Dann gilt: $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \in f(U)$, da U Unterraum ist, somit $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$ ist.
b) Sind $v_1, v_2 \in f^{-1}(U'),\ \alpha, \beta \in K$, ist zu zeigen, daß $\alpha v_1 + \beta v_2 \in f^{-1}(U')$. Es gibt $u_1', u_2' \in U'$ mit $u_1' = f(v_1),\ u_2' = f(v_2)$: Dann ist $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha u_1' + \beta u_2' \in U'$. Daher $\alpha v_1 + \beta v_2 \in f^{-1}(U')$.

2.2 Satz: Es seien V,W VRe über K, $f : V \to W$ linear.

i Ist $M \subset V$, dann ist $f(Span(M)) = Span(f(M))$.

ii Ist $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ linear abhängig, dann ist die Menge $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ auch linear abhängig.

iii Wenn für $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ die Menge $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ l.u. ist, dann ist auch $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.u.

Beweis:

i "$\subset$ ": Ist $w \in f(Span(M))$,dann gibt es $v \in Span(M)$ mit $w = f(v)$. Es gibt dann $v_1, \ldots, v_n \in M;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, so daß $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Es folgt: $w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \in Span(f(M))$.
"$\supset$ ": Es sei $w \in Span(f(M))$: Dann gibt es $w_1, \ldots, w_n \in f(M),\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, so daß $w = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) \in f(Span(M))$.

ii Wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig ist, dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$, mit $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Dann ist $f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = f(0) = 0,\ \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0$. Da $\{f(v_1) \ldots f(v_n)\}$ l.u. ist, folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

iii Es sei $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Zu zeigen ist $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Es ist $(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = f(0) = 0,\ \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0$. Da $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ linear unabhängig ist, folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

2.3 Satz: Es seien V,W VRe über K, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis für V. Sind $w_1, \ldots, w_n \in W$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $w_i = f(v_i),\ i = 1, \ldots, n$. Für dieses f gilt:

i $f(V) = Span(w_1, \ldots, w_n)$

ii f injektiv $\Leftrightarrow \{w_1, \ldots, w_n\}$ l.u.

Beweis: Angenommen, f wäre eine lineare Abb. $f : V \to W$ mit $w_i = f(v_i)$. Ist dann $v \in V$, gibt es (eindeutig bestimmte) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Dann folgt:

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$

Daraus folgt noch nicht die Existenz, wohl aber die Einzigeit (Eindeutigkeit) von f.
Existenz: Ist $v \in V,\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, dann setze $f(v) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$.

Dann ist f eine Abbildung von V nach W. Es bleibt zu zeigen: f ist linear.
Sind $v, w \in V,\ \alpha, \beta \in K,\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ w = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$, dann ist

$$\begin{aligned} f(\alpha v + \beta w) &= f(\alpha\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha\alpha_n v_n + \beta\beta_1 v_1 + \ldots + \beta\beta_n v_n) \\ &= f((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)w_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)w_n \quad \text{(nach Def. von f)} \\ &= \alpha(\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n) \\ &= \alpha f(v) + \beta f(w) \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $w_i = f(v_i),\ i = 1, \ldots, n$. Klar, das $v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_i + \ldots + 0 \cdot v_n$. Somit $f(v_i) = 0 \cdot w_1 + \ldots + 1 \cdot w_i + \ldots + 0 \cdot w_n = w_i$.

i $f(V) = Span(w_1, \ldots, w_n)$: klar.

ii "$\Rightarrow$ ": Es sei f injektiv. Dann folgt aus $f(v) = 0:\ v = 0$. Aus $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n = 0$ folgt also $\alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0$, $f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0$, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Daher $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ l.u.
"$\Leftarrow$ ": Sind $w_1, \ldots, w_n$ l.u., $f(v) = f(w),\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ w = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$, damit ist

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \\ &= \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n = f(w) \\ &\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)w_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)w_n = 0 \\ &\quad \alpha_1 = \beta_1\ , \ldots, \alpha_n = \beta_n,\ v = w \end{aligned}$$

2.4 Folgerungen: (von höchster Wichtigkeit)
Es seien V,W endlich dimensionale VRe über K. Dann gilt:
V und W sind isomorph $\Leftrightarrow\ \dim_K V = \dim_K W$.
Beweis: "$\Rightarrow$ ": $f:\ V \to W$ bijektive lineare Abbildung, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis für V, dann ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ eine Basis für W.
"$\Leftarrow$ ": Wenn $\{v_1, \ldots, v_n\},\ \{w_1, \ldots, w_n\}$ Basen für V bzw. W sind, gibt es nach dem vorigen Satz eine lineare Abbildung $f:\ V \to W,\ f(v_i) = w_i,\ i = 1, \ldots, n$.
Da $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Erzeugendensystem für W ist, ist f surjektiv. Da $\{w_1, \ldots, w_n\}$ l.u. ist, ist f injektiv.

2.4' Folgerung: Ist $f : V \to W$ linear, V,W endlich dimensional, dann ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn für jede Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ für V die Menge $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ Basis für W ist.
Beweis: "$\Rightarrow$ ": Es sei f ein Isomorphismus. Da f injektiv ist, ist für jede Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ die Menge $\{w_1, \ldots, w_n\},\ w_i = f(v_i,\ i = 1, \ldots, n$ linear unabhängig. Da f surjektiv ist, folgt $W = f(V) = Span(w_1, \ldots, w_n)$. Damit ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Basis für W.
"$\Leftarrow$ ": Es seien $\{v_1, \ldots, v_n\},\ \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ Basen. Dann ist f injektiv, und $Span(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = f(Span(v_1, \ldots, v_n)) = f(V)$, also f surjektiv.

2.5 Satz: Sind V,W VRe über K, $\dim V < +\infty,\ f:\ V \to W$ eine lineare Abbildung, dann gilt:

$$\dim V = \dim Im\ f + \dim \ker f$$

Beweis: Es sei $r = \dim Im\ f,\ s = \dim \ker f$. Dann ist $r \leq n$, ist nämlich $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis für Im f, und sind $v_1, \ldots v_r \in V$ mit $w_i = f(v_i),\ i = 1 \ldots r$, dann sind $\{v_1 \ldots v_r\}$ l.u.
Es sei $\{u_1 \ldots u_s\}$ eine Basis für $\ker f$. Wir zeigen: $\{v_1 \ldots v_r,\ u_1 \ldots u_s\}$ ist Basis für V. Daraus folgt n = r+s.

i Lineare Unabhängigkeit:
Ist $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s = 0$, dann auch

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s)$$
$$= \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_r f(v_r) + \beta_1 f(u_1) + \ldots + \beta_s f(u_s)$$

Wegen $u_1, \ldots, u_s \in \ker f$ ist $f(u_1) = \ldots = f(u_s) = 0$, also $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r = 0$. Da $\{w_1, \ldots, w_r\}$ l.u., folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.
Es folgt $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s u_s = 0$, also $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$, da $\{u_1, \ldots, u_s\}$ l.u.

ii Erzeudendensystem:
Es sei $v \in V$, $f(v) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_r f(v_r)$. Dann ist $f(v) - \alpha_1 f(v_1) - \ldots - \alpha_r f(v_r) = 0 \Rightarrow f(v - (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r)) = 0$, $v - (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r) \in \ker f$:
Daher gibt es $\beta_1, \ldots, \beta_s \in K$ mit

$$\begin{aligned} v &= (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r) + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s \\ &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s \qquad \in Span(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s) \end{aligned}$$

2.6 Satz: Sind V,W VRe über K, $\dim V = \dim W < +\infty$, $f : V \to W$ linear, dann gilt:

$$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}$$

Beweis: "$\Rightarrow$ ": Ist f injektiv, also $\ker f = \{0\}$, folgt aus 2.5: $\dim V = \dim f(V) = \dim W$; damit $f(V) = W$, f surjektiv.
"$\Leftarrow$ ": Ist f surjektiv, also Imf f = W, folgt aus 2.5: $\dim \ker f = 0$, $\ker f = \{0\}$, f ist injektiv.

3.3 $\hom_K(V,W)$, $\mathbf{End}_k(V,W)$, $\mathbf{Aut}_K(V)$

3.1 Definition: Es seien V,W VRe über dem Körper K. Mit $\hom_K(V,W)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W. Darauf werden Addition und Multiplikation mit Skalaren definiert durch

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
$$(\alpha \cdot f)(v) = \alpha f(v)\ ,\ f, g \in \hom_K(V,W),\ \alpha \in K, v \in V$$

3.2 Satz: i Mit diesen Verknüpfungen ist $\hom_K(V,W)$ ein Vektorraum über K.
ii Wenn $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$; dann ist $\dim_K \hom_K(V,W) = m \cdot n$.

Beweis:

i $(f+g)(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v + \beta w) + g(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) + \alpha g(v) + \beta g(w) = \alpha(f+g)(v) + \beta(f+g)(w)$.
$h = f + g$: $h(\alpha v + \beta w) = \alpha h(v) + \beta h(w)$.

ii Sind $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Basen für V,W , dann definiere man lineare Abbildungen $f_{\nu\mu} : V \to W$ durch:

$$f_{\nu\mu}(v_\nu) = w_\mu\ ,\quad \mu = 1, \ldots, m,\ \nu = 1, \ldots, n,\ f_{\nu\mu}(v_k) = 0,\quad k \neq \nu$$

Behauptung: $\{f_{11}, \ldots, f_{1m}, f_{21}, \ldots, f_{2m}, \ldots, f_{n1}, \ldots, f_{nm}\}$ ist Basis für $\hom(V,W) = \{f_{\nu\mu} : \nu = 1, \ldots, n,\ \mu = 1, \ldots, m\}$. Sie ist l.u., denn für $\alpha_{\nu\mu} \in K$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu} f_{\nu\mu} = 0$ folgt durch Anwenden dieser Gleichung auf den Vektor v_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu} f_{\nu\mu}(v_k) = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{k\mu} w_\mu$$

also $\alpha_{k1} = \ldots = \alpha_{kn} = 0$, für $k = 1, \ldots, n$.
Erzeugendensystem: Ist $f \in \hom_K(V, W)$, gibt es $\alpha_{\nu\mu} \in K$ mit

$$f(v_\nu) = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu} w_\mu \ , \ \nu = 1, \ldots, n$$

Wegen $f_{\nu\mu}(v_\nu) = w_n$ folgt:

$$\begin{aligned} f(v_k) &= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu} f_{\nu\mu}(v_k), \ k = 1, \ldots, n \\ \Rightarrow f &= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu} f_{\nu\mu} \ . \end{aligned}$$

3.3 Definition: Eine lineare Abbildung von V in sich heißt ein Endomorphismus. Ihre Gesamtheit:
$\mathrm{End}_K(V) = \hom_K(V, V) \quad (V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V \ f \circ g$ linear)

3.4 Satz: $(\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ ist ein Ring.
Beweis: Klar, daß + und $\circ$ innere Verknüpfung auf $\mathrm{End}_K(V)$ sind.

(R1): $(\mathrm{End}_K(V), +)$ ist abelsche Gruppe.

(R2): $\circ$ ist assoziativ

(R3): id_V ist $\circ$-neutral

(R4): $(f \circ (g + h))(v) = f((g + h)(v)) = f(g(v) + h(v)) = f(g(v)) + f(h(v)) = (f \circ g)(v) + (f \circ h)(v) = ((f \circ g) + (f \circ h))(v)$

3.5 Definition: Ein bijektiver Endomorphismus von V heißt Automorphismus. Gesamtheit: $\mathrm{Aut}_K(V)$.

3.6 Satz: $(\mathrm{Aut}_K(V), \circ)$ ist eine Gruppe.
Beweis: ...

3.4 Matrizen und lineare Abbildungen

4.1 Definition: Es sei K ein Körper.

i Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist ein rechteckiges Schema von Körperelementen $A = (a_{ij}), i = 1, .., m, \ j = 1, .., n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ii Die Gesamtheit aller (m,n)-Matrizen über K wird mit $\mathcal{M}$(m,n;K) bezeichnet.

iii Sind $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(m, n; K)$, dann wird definiert:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \ , \ \alpha A = (\alpha a_{ij}), \ \alpha \in K$$

4.2 Satz: i Mit den oben definierten Operationen ist $\mathcal{M}(m, n; K)$ ein Vektorraum über K.

ii dim $\mathcal{M}$(m,n;K) = mn

Beweis:

i Klar! $K^{m \cdot n}$

ii Setze für μ=1,..,m , ν=1,..,n :

$$A_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j) = (\mu,\nu) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$A_{\mu\nu}$ sieht folgendermaßen aus:

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 \dots & 1 & \dots 0 \\ & \vdots & \\ \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Beh.: $\{A_{\mu\nu},\ \mu = 1,..,m;\ \nu = 1,..,n\}$ ist Basis.

4.3 Definition: Sind $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m,n;K),\ B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}(m,p;K),$ dann ist das Produkt $C = A \cdot B \in \mathcal{M}(m,p;K)$ erklärt durch:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk};\ i = 1 \dots m,\ k = 1 \dots p$$

4.4 Beispiele: i

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -10 & -3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ii

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m,n;K)\ ,\ x = (x_j) \in \mathcal{M}(n,1;K)$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + & \dots & + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + & \dots & + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + & \dots & + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

4.5 Bemerkungen: i Für $A, B \in \mathcal{M}(m,n;K),\ C \in \mathcal{M}(n,p;K)$ gilt: $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
Für $A \in \mathcal{M}(m,n;K),\ B, C \in \mathcal{M}(m,p;K)$ gilt: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

ii Wenn $A \cdot B$ definiert ist, ist i.A. nicht auch $B \cdot A$ definiert. Auch wenn beide definiert sind, sind sie fast nie gleich.

4.6 Satz: $(\mathcal{M}(n,n;K), +, \cdot)$ ist ein Ring.
Beweis: Assoziativgesetz für $\cdot$:

$A, B, C \in \mathcal{M}(n,n;K)$. Setze $D = B \cdot C,\ E = A \cdot B$. Zu zeigen ist: $A \cdot D = E \cdot C$.

$$d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kk} c_{kj} \ , \ e_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kk}$$

$$\begin{aligned} (A \cdot D)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kk} c_{ki} \\ (E \cdot C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} e_{ik} c_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} a_{ik} b_{kh} c_{hi} \end{aligned}$$

$$\text{Einselement: } E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (e_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad , \ e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

4.7 Definition: Eine Matrix $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in \mathcal{M}(n,n;K)$ gibt mit $B \cdot A = E_n$.
Gesamtheit: GL(n;K) (General Linear Group)

4.8 Satz: GL(n;K) ist bezüglich $\cdot$ eine Gruppe
Beweis: Assoziativität klar!
Neutrales Element: E_n.
Inverses Element: durch Definition erzwungen.
Schreibweise: $B = A^{-1}$

dim V=n dim W=m	$Hom_K(V,W)$ dim = mn	$\mathcal{M}(m,n;K)$ dim = mn
V=W	$End_K(V)$ Ring bzgl. $+,\circ$	$\mathcal{M}(n,n;K)$ Ring bzgl. $+,\cdot$
bijektiv	$Aut_K(V)$ Gruppe bzgl. $\circ$	GL(n,K) Gruppe bzgl. $\cdot$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ -i \end{matrix} \begin{pmatrix} {\scriptstyle k} \\ \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}(n,n;K)$ invertierbar, wenn es ein $B \in \mathcal{M}(n,n;K)$ gibt mit $B \cdot A = E$. $B' \cdot A' = E$.
$(B' \cdot B)(A' \cdot A) = B' \cdot (B \cdot A) \cdot A' = B' \cdot A' = E$
$B = A^{-1}$, $(A \cdot A')^{-1} = (A')^{-1} \cdot A^{-1}$.

4.9 Satz: Jede Matrix $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$ definiert eine lineare Abbildung $f_A : K^n \to K^m$ durch:

$$f_A(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in K^m$$

Bew.: Z.z. f_A ist linear, d.h. $f_A(\alpha x + \beta y) = \alpha f_A(x) + \beta f_A(y), \ \forall x, y \in K^n, \ \alpha, \beta \in K$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y$$

4.10 Satz: i Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(m,n;K) & \to & Hom_K(K^n,K^m) \\ A & \mapsto & f_A \end{array}$$

ist ein K-VR-Isomorphismus

ii Im Fall m=n ist $L : \mathcal{M}(m,n;K) \to End_K(K^n)$ ein Ringisomorphismus. $L|_{GL(n,K)}$ ist ein Gruppenisomorphismus von GL(n,K) auf $Aut_K(K^n)$.

Beweis:

i Für alle $A, B \in \mathcal{M}(m,n;K), \alpha, \beta \in K$ gilt:

$$L(\alpha A + \beta B) = f_{\alpha A+\beta B} \overset{Z.z.}{=} \alpha f_A + \beta f_B$$
$$L(\alpha A + \beta B) \overset{Z.z.}{=} \alpha L(A) + \beta L(B)$$

Ist also $x \in K^n$, dann ist

$$\begin{aligned} f_{\alpha A+\beta B}(x) &= (\alpha A + \beta B)x = \alpha(Ax) + \beta(Bx) \\ &= \alpha f_A(x) + \beta f_B(x) \\ &= (\alpha f_A + \beta f_B)(x) \end{aligned}$$

Daher ist L linear.
L ist injektiv: Es gilt: $e_1, .., e_n$ Einheitsbasen des K^n

$$A \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Falls für $A, B \in \mathcal{M}(m,n;K)$ gilt: $f_A = f_B$, dann folgt für i= 1,..,n:

$$f_A(e_i) = A \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix} = B \cdot e_i = f_B(e_i)$$

also $A = B$.
L ist surjektiv: Wegen dim $\mathcal{M}(m,n;K) = mn$, dim $\hom_K(K^n, K^m) =$ mn folgt die Surjektivität von L aus der Injektivität.

ii Z.z.: Für alle $A, B \in \mathcal{M}(n,n;K)$ gilt:

$$L(AB) = L(A) \circ L(B), \text{ d.h. } f_{AB} = f_A \circ f_B$$

Ist $x \in K^n$ dann ist

$$F_{AB}(x) = (AB)x = A(Bx) = f_A(Bx) = f_A(f_B(x)) = (f_A \circ f_B)(x)$$

Es folgt: L ist Ringhomomorphismus.
Wenn $A \in GL(n,K)$ ist, ist $f_A \in Aut(K^n)$, denn aus $f_A(x) = f_A(y),\ x, y \in K^n$, folgt: Ax = Ay, A(x-y) =0, $A^{-1}A(x-y) = A^{-1} \cdot 0 = 0$, x-y = 0, x=y.

$$\left.\begin{array}{c} \text{Also die Injektivität von } f_A \\ \text{Also auch die Surjektivität von } f_A \end{array}\right\} \Rightarrow f_A \in Aut(K^n)$$

L ist Gruppenhomomorphismus von GL(n,K) nach $Aut(K^n)$.
L ist stets infektiv, also auch $L|_{GL(n,K)}$.
$L : GL(n,K) \to Aut(K^n)$ ist auch surjektiv: Zu $f \in Aut(K^n)$ ist z.z., daß ein $A \in GL(n,K)$ existiert mit $f = f_A$. Es gibt ein $A \in \mathcal{M}(n,n;K)$ mit $f = f_A$. Zu $f^{-1} \in Aut(K^n)$ gibt es ein $B \in \mathcal{M}(m,n;K)$ mit $f^{-1} = f_B$. Dann folgt: $L(BA) = L(B) \circ L(A) = f_B \circ f_A = f^{-1} \circ f = id_{K^n}$.
Wegen $L(E) = id_{K^n}$ und der Bijektivität von L folgt: BA=E, also $A \in GL(n,K)$.

4.11 Definition: Die Umkehrung von L wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Zu $f \in Hom(K^n, K^m)$ ist also $A = \mathcal{M}(f)$ diejenige Matrix $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$ mit $f = f_A$.

4.12 Satz: Sind $(e_1,..,e_n)$, $(e'_1,...,e'_n)$ die Einheitsbasen von K^n bzw. K^m, $f : K^n \to K^m$ linear, $A = (a_{ij}) = \mathcal{M}(f)$, dann gilt:

$$f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i \ , \ j = 1,..,n$$

Beweis:

$$(f(e_i)) = Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}e'_1 + ... + a_{mj}e'_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$$

4.13 Definition: Es seien V, W K-Vektorräume.

i Ist $\mathcal{A} = (v_1,..,v_n)$ eine geordnete Basis für V, dann gibt es genau einen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{A}} : V \to K^n \text{ mit } \Phi_{\mathcal{A}}(v_i) = e_i, \ i = 1,..,n.$$

ii Ist $\mathcal{B} = (w_1,..,w_m)$ geordnete Basis für W, dann gibt es zu jeder linearen Abb. $f : V \to W$ genau eine lineare Abbildung $f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : K^n \to K^m$, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ K^n & \xrightarrow{f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}} & K^m \end{array} \quad \text{, d.h. } \Phi_{\mathcal{B}} \circ f = f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}.$$

Man setze nämlich: $f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}$

iii Die Matrix $\mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \in \mathcal{M}(m,n;K)$ nennen wir die Matrix von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

4.14 Satz: Vorraussetzungen wie oben!

i Die Zuordnung $f \mapsto f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ liefert einen K-VR-Homomorphismus von $\hom(V,W)$ auf $\hom(K^n,K^m)$ und die Zuordnung $f \to \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$ liefert einen K-VR-Isomorphismus Hom(V,W) auf $\mathcal{M}(m,n;K)$.

ii Im Fall V=W sind die Abb. aus (i) ebenfalls Ringisomorphismen von End(V) auf End(K^n) bzw. $\mathcal{M}$(m,n;K).
Die Einschränkungen auf Aut(V) liefern Gruppenisomorphismen auf Aut(K^n) bzw. GL(n,K).

iii Es ist $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$, $j = 1,..,n$, wenn $A = (a_{ij}) = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$ ist. Durch die Gleichungen ist A eindeutig bestimmt.

Beweis: (i), (ii) Die Abb. $f \to f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ ist linear:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} &= \Phi_{\mathcal{B}} \circ (\alpha f + \beta g) \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \\ &= \alpha(\Phi_{\mathcal{B}} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}) + \beta(\Phi_{\mathcal{B}} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}) \\ &= \alpha f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} + \beta g_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\end{aligned}$$

$f, g \in Hom(V, W),\ \alpha, \beta \in K$

Sie ist bijektiv, denn $f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \to \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ ist ihre Umkehrung. Der Rest folgt aus 4.10 .

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{f}{\to} & W \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ K^n & \stackrel{f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}{\to} & K^m \end{array}$$

$\mathcal{A} = (v_1, .., v_n)$ geordnete Basis für V; $\mathcal{B} = (w_1, .., w_m)$ geordnete Basis für W.

$$\begin{aligned}&\Phi(v_i) = e_i \\ &f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \to \mathcal{M}(f_{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{B}}) = A = (a_{ij}) \\ &f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_i',\ j = 1, .., n\end{aligned}$$

Z.z. $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,\ j = 1, .., n$
Beweis:

$$f(v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}(v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(e_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i') = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i') = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

4.15 Satz: Sind U, V, W VRe über K mit geordneten Basen $\mathcal{A} = (u_1, .., u_m),\ \mathcal{B} = (v_1, .., v_n),\ \mathcal{C} = (w_1, .., w_p)$ und linearen Abbildungen f: $U \to V$, g: $V \to W$, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}),\ B = \mathcal{M}(g_{\mathcal{B},\mathcal{C}}), h = g \circ f : U \to W, C = \mathcal{M}(h_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$, dann gilt: C = BA.
Beweis: Für $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n, m; K)$, $B = (b_{ik}) \in \mathcal{M}(p, n; K)$ gilt:

$$\begin{aligned}f(u_j) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\ ,\ j = 1, .., m \\ g(v_i) &= \sum_{k=1}^{p} b_{ki} w_k\ ,\ i = 1, .., n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(u_j) &= g \circ f(u_j) = g(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{ki} w_k = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}) w_k = \sum_{k=1}^{p} c_{kj}' w_k\ ,\ j = 1, .., m,\end{aligned}$$

wo C'= BA gesetzt ist. Es folgt C = C'.

4.16 Satz: Sind V,W K-VRe, $f : V \to W$ linear, und $\mathcal{A} = (v_1, .., v_n),\ \mathcal{A}' = (v_1', .., v_n')$ Basen von V, $\mathcal{B} = (w_1, .., w_m),\ \mathcal{B}' = (w_1', .., w_m')$ Basen von W, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}),\ A' = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'})$, dann gibt es $S \in$ GL(m,K), $T \in$ GL(n,K) mit A'= SAT.
Beweis: A, A' sind gegeben durch

$$f(v_j') = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}' w_i'\ ,\ f(v_h) = \sum_{k=1}^{m} a_{kh} w_k\ ,\ j, h = 1, .., n$$

Ferner gibt es Matrizen $S \in \mathcal{M}(m,m;K),\ T \in \mathcal{M}(n,n;K)$ mit

$$v'_j = \sum_{h=1}^{n} t_{hj} v_h,\ j = 1,..,n\ , \quad w_k = \sum_{i=1}^{m} s_{ik} w'_i,\ k = 1,..,m$$

Da S die Matrix von id_W bzgl. der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ist, und T die Matrix von id_V bzgl. $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$, sind $S \in GL(m,K),\ T \in GL(n,K)$. Ferner ist

$$f(v'_j) = \sum_{h=1}^{n} t_{hj} f(v_h) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{kh} t_{hj} w_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} s_{ik} a_{kh} t_{hj} w'_i\ ,\ j = 1,..,n$$

Es folgt: $a'_{ij} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} s_{ik} a_{kh} t_{hj}\ ,\ i = 1,..,m\ ,\ j = 1,..,n$
$\Rightarrow A' = SAT$.

4.17 Satz: Es sei V ein K-VR, $f \in End_K(V)$, $\mathcal{A} = (v_1,..,v_n)$, $\mathcal{A}' = (v'_1,..,v'_n)$ geordnete Basen für V. Sind $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$, $A' = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A}',\mathcal{A}'})$, dann gibt es $T \in GL(n,K)$ mit $A' = T^{-1}AT$. $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,\ j = 1,..,n$.
Beweis: Setze in 4.16 : V = W, $\mathcal{A} = \mathcal{B}, \mathcal{A}' = \mathcal{B}'$. Dann ist $S = T^{-1}$.

4.18 Definition: i Zwei Matrizen $A, A' \in \mathcal{M}(m,n;K)$ heißen äquivalent, wenn es $S \in GL(m,K), T \in GL(n,K)$ gibt mit A'= SAT.

ii Zwei Matrizen $A, A' \in \mathcal{M}(n,n,K)$ heißen ähnlich, wenn es $T \in GL(n,K)$ gibt mit $A' = T^{-1}AT$.

3.5 Der Rang

5.1 Definition: Sind V,W endlich dimensionale VRe über K, $f : V \to W$ linear, dann heißt Rg f = dim Im f der Rang von f.

5.2 Definition: i Ist $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$ mit Spaltenvektoren $s_1, \ldots, s_n \in K^n$, d.h.

$$s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\ , \ldots ,\ s_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

dann heißt S-Rg A = dim $Span(s_1, \ldots, s_n)$ der Spaltenrang von A.

ii Sind $z_1, \ldots, z_m \in K^n$ die Zeilenvektoren von A, dann heißt Z-Rang A = dim $Span(z_1, \ldots, z_m)$ der Zeilenrang von A.

5.3 Bemerkung: S-Rg A , Z-Rg A $\leq \min(m,n)$.

5.4 Satz: Ist dim $V = n$, dim $W = m$, sind $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ Basen für V bzw. W, ist $f :\ V \to W$ linear und $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$; dann gilt:

$$Rg\ f = Rg\ f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = S - Rg\ A$$

Beweis: Ist $\phi : V \to K^n$ ein Isomorphismus, $U \subset V$ ein Teilraum dann gilt: dim $\phi(U) =$ dim U, denn $\phi|_U$ ist auch ein Isomorphismus von U auf $\phi(U)$. Daraus folgt: Rg f = Rg $f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, denn

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \phi_{\mathcal{B}} \\ K^n & \xrightarrow{f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}} & K^m \end{array} \qquad Rg\ f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = Rg\ (f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \circ \phi_{\mathcal{A}}) = Rg(\phi_{\mathcal{B}} \circ f) = Rg\ f\ .$$

Für g: $K^n \to K^m$ mit $A = \mathcal{M}(g)$ gilt: $g(e_j) = A \cdot e_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Für $g = f_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ folgt: $Rg\ f_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = S - Rg\ A$.

5.5 Lemma: Sind $A, A' \in \mathcal{M}(m,n;K),\ S \in GL(m,K),\ T \in GL(n,K)$ mit $A' = SAT$, dann gilt:

$$S - Rg\ A = S - Rg\ A'\ .$$

Beweis: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \stackrel{f_A}{\to} & K^m \\ f_T \uparrow & & \downarrow f_S \\ K^n & \stackrel{f_{A'}}{\to} & K^m \end{array}$$

kommutiert. Da f_S, f_T Isomorphismen sind, gilt: $Rg\ f_A = Rg\ f_{A'}$.

5.6 Definition: Ist $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m,n;K)$, dann heißt die Matrix $A^t = (a'_{ij}) \in \mathcal{M}(n,m;K)$ mit $a'_{ij} = a_{ji}$ die zu A transponierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5.7 Lemma: i $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t\ ,\ /A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

ii $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t,\ (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

5.8 Lemma: Unter den Vorraussetzungen von 5.5 gilt: Z-Rg A = Z-Rg A'.

Beweis: $Z - Rg\ A' = S - Rg(A')^t = S - Rg(T^t A^t S^t) = S - Rg\ A^t = Z - Rg\ A$

$$SAT = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

5.9 Definition: Alle Matrizen seien aus $\mathcal{M}(n,n;K)$.

$$E_i^j = (e_{\mu\nu}) \text{ mit } e_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j) = (\mu,\nu) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_i^j = E + E_i^j \qquad \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \ddots & 1 & \cdots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & \vdots & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_i^j(\alpha) = E + \alpha E_i^j$$

$$S_i(\alpha) = E + (\alpha - 1)E_i^i,\ \alpha \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \alpha & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_i^j = E - E_i^i - E_j^i + E_i^j + E_j^i \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

5.10 Satz: $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$.

i Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen bewirkt Zeichenumformungen und zwar:
$P_i^j \cdot A$: Vertauschung der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile,
$S_i(\alpha)A$: Multiplikation der i-ten Zeiel mit α,
$Q_i^j(\alpha)A$: Addition der α-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile.

ii Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen bewirkt Spaltenumformungen, und zwar:
$A \cdot P_i^j$: Vertauschen der i-ten mit der j-ten Spalte,
$A \cdot S_i(\alpha)$: Multiplikation der i-ten Spalte mit α,
$A \cdot Q_i^j(\alpha)$: Addition der α-fachen j-ten Spante zur i-ten Spalte.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Spalten: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
B Elementarmatrix $\Rightarrow$ B^t Elementarmatrix.

5.11 Lemma: Alle Elementarmatrizen sind invertierbar. Genauer:

$$(P_i^j)^{-1} = P_i^j,\ (S_i(\alpha))^{-1} = S_i\left(\frac{1}{\alpha}\right),\ \alpha \neq 0,\ (Q_i^j(\alpha))^{-1} = Q_i^j(-\alpha)$$

Beweis durch Nachrechnen.

5.12 Folgerung: Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen verändern Zeilen- und Spaltenrang nicht.

5.13 Definition: Eine Matrix $B \subset \mathcal{M}(m,n;K)$ hat (spezielle) Zeilenstufenform, wenn mit einem $r \leq \min(m,n)$ und $b_{11},\ldots,b_{rr} \in K^* = K - \{0\}$ gilt:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1r} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & b_{rr} & \ldots & b_{rn} \\ \vdots & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

5.14 Lemma: Für B gilt: Z-Rg B = r = S-Rg B.

Beweis: Sind $z_1,\ldots,z_r \in K^n$ die ersten r Zeilenvektoren, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in K$ mit $\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_r z_r = 0$, dann folgt daraus, daß $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ das Gleichungssystem löst:

$$\begin{aligned} \alpha_1 b_{11} &= 0 \\ \alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{22} &= 0 \\ &\ddots \\ \alpha_1 b_{1r} + \ldots + \alpha_r b_{rr} &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $b_{11} \neq 0$ folgt $\alpha_1 = 0$: Aus der zweiten Gleichung folgt wegen $b_{22} \neq 0:\ \alpha_2 = 0 \ldots \alpha_r = 0$.
Es folgt: Z-Rg B = r.
Die ersten Spalten von B sind ebenfalls linear unabhängig. Die Spalten von B liegen in dem Unterraum

$$U = \{(x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0) \in K^m\} \text{ von } K^m$$

der Dimension r. $\Rightarrow$ S-Rg B = r.

5.15 Satz: Jede Matrix $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$ kann durch Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementarmatizen auf spezielle Zeilenstufenform transfromiert werden. Für die Rechtsmultiplikationen braucht man nur Vertauschungsmatrizen P_i^j.

Beweis: Falls $A = 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es i,j mit $a_{ij} \neq 0$.
Für die Matrix $A' = P_1^i \cdot A \cdot P_1^j$ gilt: $a_{i1} = a_{ij} \neq 0$.
Man setze $\alpha_1 = -\frac{a_{i1}}{a_{11}},\ i = 2,\ldots,m,\ B_1 = Q_m^1(\alpha_m) \cdot \ldots \cdot Q_2^1(\alpha_2) \cdot A'$. Dann ist

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & — & — \\ \vdots & | & | \\ 0 & — & — \end{pmatrix}$$

Wenn der Kasten aus lauter Nullen besteht, ist schon eine spezielle Zeilenstufenform erreicht.
Wenn nicht, gibt es $i,j \geq 2$ mit $b_{ij} \neq 0$.

Nehmen wir an, für $p \in \{1, \ldots, \min(m,n)\}$ sei A durch Multiplikation mit Elementarmatrizen in die Form B_p überführt.

$$B_p = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ & \ddots & & & \\ & & b_{pp} & \ldots & b_{pn} \\ 0 & \ldots & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{$\ast$}} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Wenn der Kasten nur aus Nullen besteht, sind wir fertig. Andernfalls gibt es $i, j \geq p+1$ mit $b_{ij} \neq 0$. Durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen die den Hauptabschnitt von B_p nicht betreffen, kann b_{ij} an die Stelle (p+1,p+1) gebracht werden. Weiterhin sei also $b_{p+1,p+1} \neq 0$. Dann wird mit $\alpha_1 = \frac{b_{i,p+1}}{b_{p+1,p+1}}$, $i = p+1, \ldots, m$ und $B_{p+1} = Q_m^{p+1}(\alpha_n) \cdot \ldots \cdot Q_{p+1}^{p+1}(\alpha_{p+1}) \cdot B_p$,

$$B_{p+1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p+1} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & b_{p+1p+1} & \ldots & b_{p+1n} \\ \vdots & & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\ast$}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & & \end{pmatrix}$$

Dieses Verfahren bricht nach $r \leq m$ Schritten ab, indem der gerahmte Teil nur Nullen enthält, oder p+1 = m wird.

5.16 Folgerung: Für jede Matrix A ist Z-Rg A = S-Rg A.

Beweis: Durch Links- und Rechtsmultiplikatiuon mit Elementarmatrizen kann A auf die Form B_r gebracht werden. Dabei ändert sich Z-Rg und S-Rg nicht. Für B_r gilt die Behauptung nach 5.14.

5.17 Definition: Rg A = Z-Rg A = S-Rg A heißt der Rang von A.

$A, A' \in \mathcal{M}(m,n;K)$ heißen äquivalent, wenn es $S \in GL(m,K)$, $T \in GL(n,K)$ gibt, mit $A' = SAT$. Äquivalente Matrizen haben denselben Rang.

5.18 Satz i Jede (m,n)-Matrix über K vom Rang r ist äquivalent zur Matrix

$$Ar = \begin{matrix} \\ r \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

ii Zwei (m,n)-Matrizen über K sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Rang haben.

Beweis:

i Wir wissen, daß jedes $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$ zu

$$B_r = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ \vdots & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & & & 0 & \end{pmatrix} \quad , b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{rr} \neq 0$$

äquivalent ist. Es genügt daher zu zeigen, daß B_r zu A_r äquivalent ist. Da $b_{rr} \neq 0$ kann für $j = r+1, \dots, n$ gesetzt werden: $\alpha_j = -\frac{b_{rj}}{b_{rr}}$. Dann hat $B_r \cdot Q^r_{r+1}(\alpha_{r+1}) \cdot \ldots \cdot Q^r_n(\alpha_n)$ die Form

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} & — & — & — \\ 0 & \ddots & & |_ & — & —| \\ \vdots & & b_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ 0 \dots & & & 0 & & \end{pmatrix}$$

Entsprechend verfährt man mit der (r-1)-ten Zeile, usw. bis zur ersten, erhält so eine Matrix (zu A äquivalent)

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & & b_{rr} & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Links- oder Rechtmultiplikation mit $S_i\left(\frac{1}{b_{ii}}\right)$, $i = 1 \dots r$ führt zu A_r.

ii klar.

5.18 Bemerkung: $A \in \mathcal{M}(n,n;K)$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $Rg\ A = n$.

Beweis: A äquivalent zu $A_r = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, d.h. es gibt $S, T \in GL(n,K)$ mit $A_r = SAT$.

A invertierbar $\Leftrightarrow$ A_r invertierbar (Bew.: Ist A invertierbar $\Rightarrow$ A_r invertierbar; A_r invertierbar $\Rightarrow$ $A = S^{-1}A_rT^{-1}$ invertierbar).

Wenn $r = n$, $A_r = E$, dann ist A_r invertierbar.

Wenn $r < n$, kann A_r nicht invertierbar sein, denn f_{A_r} hat den Rang $r < n$, ist also weder surjektiv noch injektiv, daher kann A_r nicht invertierbar sein. $A_r \cdot e_i = 0$, $i = r+1, \dots, n$.

5.19 Folgerung: Die Elementarmatrizen erzeugen GL(n,K), d.h. jede invertierbare Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen.

Beweis: Ist $A \in GL(n,K)$, dann ist $Rg\ A = n$. Es gibt also Elementarmatrizen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_l$, so daß $A_k \cdot \ldots \cdot A_1 \cdot A \cdot B_1 \cdot \ldots \cdot B_l = E_n$. Es folgt $A = A_1^{-1} \cdot \ldots \cdot A_k^{-1} \cdot B_l^{-1} \cdot \ldots \cdot B_1^{-1}$.

5.20 Anwendung: Bei invertierbaren (quadratischen) Matrizen kommt man bei der Transformation auf A_r allein mit Zeilenoperationen, also Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen, aus.

Es gibt also Elementarmatrizen $A_1, \dots, A_k$, so daß $A_k \cdot \ldots \cdot A_1 \cdot A = E$. Es folgt: $A^{-1} = A_k \cdot \ldots \cdot A_1 \cdot E$.

Man schreibe A und E nebeneinander, transformiere durch Zeilenoperationen A in E, wende

dieselben Operationen auf E an. Dies liefert A^{-1}.

Beispiel:

2	-1	1	1	0	0
1	0	3	0	1	0
0	-2	-1	0	0	1
0	-1	-5	1	-2	0
1	0	3	0	1	0
0	-2	-7	0	-2	1
1	0	3	0	1	0
0	-1	-5	1	-2	0
0	-2	-7	0	-2	1
1	0	3	0	1	0
0	-1	-5	1	-2	0
0	0	3	-2	2	1
1	0	0	2	-1	-1
0	-1	-5	1	-2	0
0	0	3	-2	2	1
1	0	0	2	-1	-1
0	-1	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
0	0	3	-2	2	1
1	0	0	2	-1	-1
0	1	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Kapitel 4

Lineare Gleichungen und Determinanten

4.1 Die Lösungsgesamtheit eines linearen Gleichungssystems

1.1 Problemstellung: K sei ein Körper.

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$ und ein Spaltenvektor $b \in K^m$. Gesucht sind alle Vektoren $x \in K^n$, die die Gleichung $A \cdot x = b$, ausführlicher

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \ddots \qquad\quad &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

erfüllen.

Fragen:

i Gibt es Lösungen?

ii Wie sieht ihre Gesamtheit aus?

iii Wie kann man die Lösung bestimmen?

1.2 Satz: Ist $A \in \mathcal{M}(m,n;K)$, $Rg\ A = r$, dann ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ein (n-r)-dimensionaler Unterraum von K^n.

Beweis: Die lineare Abbildung: $f_A : \begin{array}{ccc} K^n & \to & K^m \\ x & \mapsto & A \cdot x \end{array}$, hat den Rang r.

Es ist $Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \ker f_A$. $\ker f_A$ ist also Lösungsgesamtheit von $Ax = 0$. Nach III.2.5 ist $n = \underbrace{\dim Im\ f_A}_{=r} + \dim \ker f_A$.

1.3 Satz: Das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn Rg A = Rg (A,b).

Beweis: Es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spaltenvektoren $\in K^m$ von A. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn es $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ gibt mit

$$x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n = b \ ,$$

also genau dann, wenn $b \in Span(s_1, \ldots, s_n)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn Rg A = $\dim Span(s_1, \ldots, s_n) = \dim Span(s_1, \ldots, s_n, b) = Rg(A, b)$.

1.4 Satz: Wenn das inhomogene System $Ax = b$ lösbar, x_0 eine Lösung und U die Lösungsgesamtheit des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$ ist, dann ist die Lösungsgesamtheit von $Ax = b$ gleich

$$x_0 + U = \{x \in K^n : \ x = x_0 + u \ , \ u \in U\}$$

Beweis: Falls $x_1, x_2 \in K^n$ Lösung von $Ax = b$ sind, also $Ax_1 = b = Ax_2$ ist, dann folgt $0 = Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2)$, also $x_1 - x_2 \in U$.
Ist also $Ax = b$, dann ist $x - x_0 = u \in U, \ x = x_0 + u \in x_0 + U$
Ist andererseits $x \in x_0 + U$, also $x = x_0 + u, \ u \in U$, dann ist $Ax = A(x_0 + u) = A_0 + A_u = b + 0 = b$.

1.5 Bemerkungen: i Die Lösungsgesamtheit eines inhomogenen Systems ($b \neq 0$) ist nie ein linearer Unterraum von K^n, sondern ein „affiner Unterraum ".

ii Falls der Rang von A = m ist, dann gilt für alle $b \in K^m : \ Rg \ A = Rg(A, b)$.
Dann gibt es also für jedes $b \in K^m$ eine Lösung von $Ax = b$.

iii Falls $Rg \ A = n$ ist, gibt es für jedes $b \in K^m$ höchstens eine Lösung von $Ax = b$.

iv Falls $A \in \mathcal{M}(n, n; K), \ Rg \ A = n$ ist, gilt: $A \in GL(n, K)$. Dann gibt es zu jedem $b \in K^n$ genau eine Lösung von $Ax = b$, nämlich $x = A^{-1}b$.

1.6 Satz: Ist V ein VR über K, $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von V, dann sind äquivalent:

i Es gibt $v_0 \in V$ und einen Untervektorraum U von V, so daß $A = v_0 + U = \{v \in V : \ v = v_0 + u, \ u \in U\}$

ii Für alle $v_1, \ldots v_n \in A, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in A$$

iii Für jedes $v_0 \in V$ ist $U = A - v_0 = \{v \in V : \ v = a - v_0, \ a \in A\}$ ein Untervektorraum von V.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii) ": Sind $u_1, \ldots, u_n \in U, \ v_1 = v_0 + u_1, \ldots, v_n = v_0 + u_n \in A, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n &= \alpha_1(v_0 + u_1) + \ldots + \alpha_n(v_0 + u_n) \\ &= \underbrace{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}_{=1} \underbrace{v_0 + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n}_{\in U} \\ &= v_0 + u \ \in A \end{aligned}$$

"(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist $v_0 \in A, U = A - v_0$ und sind $u_1, v_2 \in U, \ u_1 = a_1 - v_0, \ u_2 = a_2 - v_0, \ a_1, a_2 \in A, \ \alpha_1, \alpha_2 \in K$, dann gilt:

$$\begin{aligned} v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 u_2 &= v_0 + \alpha_1(a_1 - v_0) + \alpha_2(a_2 - v_0) \\ &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)v_0 \in A \ , \end{aligned}$$

dann $\alpha_1 + \alpha_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) = 1$ also $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$. Damit ist U Untervektorraum.
"(iii) $\Rightarrow$ (i) ": klar.

1.7 Definition: Eine Teilmenge $A \subset V$ mit den Eigenschaften heißt affiner Unterraum von V.

$A \in \mathcal{M}(m, n; K), \ b \in K^m, \ Ax = 0, \ r = Rg \ A$
1) $U = \{x \in K^n : \ Ax = 0\}$ Teilraum von $K^n, \ \dim U = n - r$
2) $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow Rg \ A = Rg(A, b)$
3) $Ax_0 = b \Rightarrow \{x : \ Ax = b\} = x_0 + U$

4.2 Der Gaußsche Algorithmus

$A \in \mathcal{M}(m,n;K),\ Rg\ A = r,\ b \in K^m$ gegeben.
Wir geben ein Verfahren an zur Berechnung der Lösungsgesamtheit von $Ax = b$. Wir bringen die Matrix (A,b) auf spezielle Zeilenstufenform:

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{ccccc|c} b_{11} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} & b'_1 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & b_{rr} & \dots & b_{rn} & b'_r \\ \vdots & & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ 0 & & & & & 0 \end{array}\right) \qquad b_{11}, \dots, b_{rr} \neq 0$$

$\overset{\approx}{B} = S \cdot A \cdot T,\ S \in GL(m,K),\ T \in GL(n,K)$
$Bx' = b',\ B = S \cdot A,\ X' = Tx$ äquivalent zu $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow\ b'_{r+1} = 0$.
Zu lösen $Bx' = b'$. Hat die Form

$$\begin{aligned} b_{11}x'_1 + \dots + b_{1r}x'_r + \dots + b_{1n}x'_n &= b'_1 \\ &\ddots \\ b_{rr}x'_r + \dots + b_{rn}x'_n &= b_r \end{aligned}$$

Setze: 1) $x'_{r+1} = 1,\ x'_{r+2} = 0 \dots x'_n = 0$ und löse das System

$$\begin{aligned} b_{11}x'_1 + \dots + b_{1r}x_r &= -b_{1_{r+1}} \\ &\ddots \\ b_{rr}x'_r &= -b_{r_{r+1}} \end{aligned}$$

2) $x'_{r+1} = 0,\ x'_{r+2} = 1 \dots x'_n = 0$ und löse das System... $= -b_{1_{r+2}}$

$$\begin{aligned} \text{Allgemein: } b_{11}x'_1 + \dots + b_{1r}x'_r &= -b_{1j} \\ &\ddots \\ b_{rr}x'_r &= -b_{rj} \qquad ,\ j = r+1, \dots, n \end{aligned}$$

Man erhält Lösungen von $Bx' = 0$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_{n-r} = \begin{pmatrix} v_{n-r,1} \\ \vdots \\ v_{n-r,r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis des Lösungsraumes von $Bx' = 0$, da sie linear unabhängig sind.
Eine partikuläre Lösung von $Bx' = b'$ erhält man, wenn man $x'_{r+1} = \dots = x'_n = 0$; und das Dreieckssystem

$$\begin{aligned} b_{11}x'_1 + \dots + b_{1r}x'_r &= b'_1 \\ &\ddots \\ b_{rr}x'_r &= b'_r \quad \text{löst.} \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 9 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 9x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 19x_4 &= 17 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 16 & 19 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid -2I \\ \mid -2I \\ \mid -3I \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 18 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid -2II \\ \mid -4II \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 26 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 26 \end{array}\right)$$

Basis des Lösungsraums von $Bx' = 0$.

$$\begin{aligned} x_4 = 1 \qquad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -6 \\ -x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 9x_3 &= -13 \end{aligned}$$

$x_1 = -\frac{13}{9},\ x_2 = -\frac{159}{27},\ x_3 = \frac{223}{27}$

Partikuläre Lösung: $x_4 = 1$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ -x_2 - 2x_3 &= -9 \\ 9x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$L = \{v_0 + \alpha v_1 \ \alpha \in R\}$$

4.3 Determinantenformen

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2;K)$, $\det A = ad - bc$ **Determinante von A.**

3.1 Satz: i $A \in GL(2,K) \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

ii Für $\det A \neq 0$ ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Beweis: $A \in GL(2,K)$ genau dann, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = e_1$ und für $b = e_2$ lösbar ist.

$$\begin{array}{rll|ll} ax + by & = 1 & & \mid \cdot b & \mid \cdot c \\ cx + dy & = 0 & & \mid \cdot b & \mid \cdot a \\ \hline adx + dby & = d & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} bcx + dby & = 0 & \\ (ad - bc)x_1 & = d & \mid \quad = (ad - bc)y_1 = -c \\ ax + by & = 0 & \\ cx + dy & = 1 & \\ \hline (ad - bc)x_2 & = -b & \mid \quad (ad - bc)y_2 = a \end{array}$$

Dies ist s.o. genau dann der Fall, wenn $\det A \neq 0$.

2.

3.2 Definition: i Es sei V ein VR über K, eine Abbildung $d : V^n \to K$ heißt n-fache Linearform, wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in V$ die Abbildung $v \mapsto d(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ auf V linear ist (d.h. für alle $v, w \in V,\ \alpha, \beta \in K$ gilt:

$$d(v_1, \ldots, v_{n-1}, \alpha v + \beta w, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \alpha d(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$
$$+\beta d(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

ii Eine n-fache Linearform auf einem n-dimensionalen VR V heißt Determinantenform, wenn für je linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

$$d(v_1, \ldots, v_n) = 0 \ .$$

3.3 Satz: Es sei d eine Determinantenform auf V. Dann gilt:

i Ist für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$: $v_i = 0$, dann ist $d(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

ii Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -d(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

iii Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\},\ \alpha \in K$, gilt:

$$d(v_1, \ldots, v_i + \alpha v_j, \ldots, v_n) = d(v_1, \ldots, v_n)$$

Beweis:

i $v_1, \ldots, v_n$ l.a.

ii

$$\begin{aligned} & d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + d(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \\ = \ & d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + d(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \\ & + d(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \\ = \ & d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) + d(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) \\ = \ & d(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) = 0 \end{aligned}$$

iii

$$d(v_1, \ldots, v_i + \alpha v_j, \ldots, v_n) = d(v_1, \ldots, v_n) + \alpha d(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

3.4 Beispiel: $d\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bd$ ist Determinantenform auf K^2.

3. Permutation

3.5 Definition: Eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich heißt eine Permutation.
Gesamtheit: S_n ist ein Gruppe bzgl. $\circ$, die symmetrische Gruppe.
Schreibweise: $\Pi = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ \Pi(1) \ldots \Pi(n) \end{pmatrix} \quad n \geq 1$

3.6 Satz: S_n hat n! Elemente.
Beweis: durch Induktion.

$n = 1 : S_1 = \{id\}$

$n \to n+1$: Ind.Ann.: S_n hat n! Elemente. Ist $\Pi \in S_{n+1}$, gibt es $n+1$ Möglichkeiten für den Wert $\Pi(n+1)$ nämlich $\Pi(n+1) = 1, = 2, \ldots, = n+1$. Ist $\Pi(n+1) = k$, dann gibt es n! Möglichkeiten, die Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ auf die Zahlen $\{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1\}$ abzubilden $\Rightarrow$ Behauptung.

3.7 Definition: Eine Permutation $\tau \in S_n$ heißt Transposition, wenn es $i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j$, mit $\tau(i) = j,\ \tau(j) = i,\ \tau(k) = k$ für $k \notin \{i, j\}$ gibt. Es sei stets $n \geq 2$.

3.8 Satz: Jede Permutation ($\neq id$) ist Produkt von Transpositionen.

Beweis: Induktion über n.

$n = 2$: $S_2 = \{id, \tau\},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$n-1 \to n$: Wir fassen S_{n-1} auf als Untergruppe von S_n derjenigen Permutationen, die n festhalten.
$S^* = \{\Pi \in S_n :\ \Pi(n) = n\}$
Beh.: S^* ist Untergruppe von S_n, isomorph zu S_{n-1}.
Bew.: $S^* \to S_{n-1},\ \phi(\Pi) = \Pi|_{\{1,\ldots,n-1\}}$
(Isomorphismus ist leicht zu beweisen...)
Ist $\Pi \in S_n$ mit $\Pi(n) = n$; dann gilt $\Pi \in S_{n-1}$, also ist Π Produkt von Transpositionen nach Ind.Ann. Wenn aber $\Pi(n) \neq n$ ist, dann sei $\tau \in S_n$ diejenigen Transposition, die n und $i = \Pi^{-1}(n)$ vertauscht. Setze $\Pi' = \Pi \circ \tau$.

$$\begin{array}{cc} \tau & \\ & \begin{pmatrix} 1 \ldots i \ldots n \\ 1 \ldots n \ldots i \\ \vdots \\ \ldots \Pi(n) \ldots n \end{pmatrix} \\ \Pi & \end{array} \quad \text{Dann ist } \Pi'(n) = n,\ \Pi' \in S_{n-1},$$

also Produkt von Transpostitionen, daher auch $\Pi = \Pi' \circ \tau$.

3.9 Definition: Für $\Pi \in S_n$ heißt

$$sgn\ \Pi = \prod_{i \leq i < j \leq n} \frac{\Pi(j) - \Pi(i)}{j - i} \quad \text{das Signum (oder Vorzeichen) von } \Pi.$$

3.10 Satz: i Für jede Transposition τ ist $sgn\ \tau = -1$.

ii sgn ist ein Homomorphismus von S_n auf die multiplikative Gruppe $\{-1, 1\}$.

Beweis:

i Ist τ die Transposition mit $\tau(i) = j,\ \tau(j) = i,\ \tau(k) = k$ für $k \neq i, j,\ i < j$.

$$\begin{aligned} sgn\ \tau &= \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \cdot \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ (k,l) \neq (i,j)}} \frac{\Pi(k) - \Pi(l)}{k - l} \\ &= \frac{i - j}{j - i} \cdot \prod 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

ii Durch Induktion nach n zeigen wir, daß stets gilt: $sgn\ \Pi \in \{-1,1\}$. Für $n=2$ ist $S_2=\{id,\tau\},\ sgn\ id=1,\ sgn\ \tau=-1$.
Ist für $n\geq 2$ $\Pi \in S_{n+1}$, dann ist τ diejenige Permutation S_{n+1}, mit $\tau(n+1)=\Pi(n+1),\ \tau(\Pi(n+1))=n+1,\ \tau(k)=k$, wenn $k\neq n+1,\ \Pi(n+1)$.
Falls $\Pi(n+1)=n+1$ ist, dann ist $\tau=id$, also $sgn\ \tau=1$. Falls $\Pi(n+1)\neq n+1$ ist, dann ist $sgn\ \tau=-1$.
Die Permutation $\sigma=\tau\circ\Pi$ hat die Eigenschaft $\sigma(n+1)=\tau(\Pi(n+1))=n+1$, daher ist "$\sigma\in S_n$", nach Ind.Ann. ist daher $sgn\ \sigma=\pm 1$.
Da (s.u.) $sgn\ \Pi = sgn(\tau\circ\sigma)=sgn\ \tau\cdot sgn\ \sigma\in\{-1,1\}$. Für $\Pi,\sigma\in S_n$ ist

$$\begin{aligned} sgn(\Pi\circ\sigma) &= \prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{(\Pi\circ\sigma)(j)-(\Pi\circ\sigma)(i)}{j-i}\cdot\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{\sigma(j)-\sigma(i)} \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{(\Pi\circ\sigma)(j)-(\Pi\circ\sigma)(i)}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\underbrace{\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}}_{sgn\ \sigma} \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß das erste Produkt gleich $sgn\ \Pi$ ist.

$$\begin{aligned} &\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{(\Pi\circ\sigma)(j)-(\Pi\circ\sigma)(i)}{\sigma(j)-\sigma(i)} \\ &= \prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{(\Pi\circ\sigma)(j)-(\Pi\circ\sigma)(i)}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\cdot\prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}\frac{(\Pi\circ\sigma)(j)-(\Pi\circ\sigma)(i)}{\sigma(j)-\sigma(i)} \\ &= \prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{(\Pi\circ\sigma)(j)-(\Pi\circ\sigma)(i)}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\Pi(\sigma(j))-\Pi(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \\ &= \prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ i\neq j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\Pi(\sigma(j))-\Pi(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \\ &= \prod_{1\leq k<h\leq n}\frac{\Pi(h)-\Pi(k)}{h-k}=sgn\ \Pi \end{aligned}$$

3.11 Folgerung: i Wenn $\Pi\in S_n$ ist, $\Pi=\tau_1\circ\ldots\circ\tau_k$, Tanspositionen, dann ist $sgn\ \Pi=(-1)^k$.

ii Jede Permutation ist entweder Produkt von geradzahlig vielen oder von ungeradzahlig vielen Transpositionen.

3.12 Definition: Eine Permutation heißt gerade (bzw. ungerade), wenn $sgn\ \Pi=1$ (bzw. -1) ist.

3.13 Satz: Die geraden Permutationen in S_n bilden eine Untergruppe A_n von S_n, welche die alternierende Gruppe heißt. A_n enthält $\frac{1}{2}n!$ Elemente.
Beweis: A_n ist der Kern des Homomorphismus sgn, also Untergruppe von S_n. Ist $\tau\in S_n$ eine Transposition, wird durch $f(\Pi)=\Pi\circ\tau,\ \Pi\in A_n$, eine bijektive Abbildung von A_n auf S_n-A_n definiert.
$\Pi_1\circ\tau=\Pi_2\circ\tau\Rightarrow\Pi_1=\Pi_2$ (Injektiv)
$\sigma\in S_n-A_n\ \Pi=\sigma\circ\tau\in A_n$
$f(\Pi)=\sigma\circ\tau=\sigma$ (Surjektiv)

4.

3.14 Satz: Ist d eine Determinantenform auf V, $\Pi \in S_n,\ v_1, \ldots, v_n \in V$, dann gilt:

$$d(v_{\Pi(1)}, \ldots, v_{\Pi(n)}) = sgn\ \Pi \cdot d(v_1, \ldots, v_n)$$

Beweis: Wenn Π Transposition ist, dann folgt dies aus 3.3. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus, wenn man Π als Produkt von Transpositionen schreibt.

3.15 Satz: Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis für V, d eine Determinantenform auf V. Sind $w_1, \ldots, w_n \in V$ mit

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\ ,\ \ j = 1, \ldots, n\ ,$$

dann gilt:

$$d(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi \cdot a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \cdot d(v_1, \ldots, v_n)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d(w_1, \ldots, w_n) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} v_i \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \cdot \ldots \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i1,1} \cdot \ldots \cdot a_{in,n} \cdot d(v_{i1}, \ldots v_{in}) \\ &= \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi \cdot a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \cdot d(v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

3.16 Satz: i Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis für V, dann existiert genau eine Determinanatenform d auf V mit $d(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

ii Ist d eine Determinantenform auf V, die nicht identisch verschwindet, dann gibt es zu jeder Determinantenform d' auf V genau ein $\alpha \in K$ mit $d' = \alpha d$.

iii Zwei Determinantenformen auf V sind gleich, wenn sie auf einer Basis übereinstimmen.

Beweis:

i Setze für $w_1, \ldots, w_n \in V,\ w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,\ j = 1, \ldots, n$:

$$d(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n}$$

Ist $u_j = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} v_i \in V,\ \alpha, \beta \in K$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & d(w_1 \ldots, w_{j-1}, \alpha w_j + \beta u_j, w_{j+1}, \ldots, w_n) \\ = & \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi \cdot a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(j-1),j-1} \cdot (\alpha \cdot a_{\Pi(j),j} + \beta a'_{\Pi(j),j}) \cdot a_{\Pi(j+1),j+1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \\ = & \alpha \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} + \beta \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(j-1),j-1} \cdot a'_{\Pi(j),j} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \\ = & \alpha d(w_1, \ldots, w_n) + \beta d(w_1, \ldots, w_{j-1}, u_j, w_{j+1}, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

Bereits gezeigt: d n-fach multilinear, noch zu zeigen: d ist Determinantenform.
Behauptung: Ist d n-fach multilinear auf V, und gilt $d(w_1, \ldots, w_n) = 0$; sobald für $i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j$, gilt: $w_i = w_j$, dann ist d Determinantenform.

Beweis: Es seien $w_1, \ldots, w_n$ l.a., also mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, nicht alle 0, $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n = 0$. Sei etwa $\alpha_k \neq 0$, dann ist

$$\begin{aligned} w_k &= -\frac{1}{\alpha_k}(a_1 w_1 + \ldots + \widetilde{\alpha_k w_k} + \ldots + \alpha_n w_n) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i w_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \; d(w_1, \ldots, w_n) &= d(w_1, \ldots, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i w_i, \ldots, w_n) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i d(w_1, \ldots, \underbrace{w_i}_{\text{k-teStelle}}, \ldots, w_n) = 0 \end{aligned}$$

Seien also $w_1, \ldots, w_n \in V$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $w_i = w_j$. Ferner sei τ diejenige Transposition, die i,j vertauscht. Dann ist $S_n = A_n \cup A_n\tau$; also

$$\begin{aligned} & d(w_1, \ldots, w_n) \\ = & \sum_{\Pi \in A_n} sgn\ \Pi \cdot a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} + \sum_{\substack{\sigma = \Pi\tau \\ \Pi \in A_n}} sgn\ \sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \\ & \sum_{\substack{\sigma = \Pi\tau \\ \Pi \in A_n}} sgn\ \sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \\ = & \sum_{\Pi \in A_n} (-1) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 \ldots i & j \ldots n \\ 1 \ldots j & i \ldots n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} = a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(j),i} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(i),j} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \\ & \left.\begin{aligned} w_i &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \\ w_j &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{ki} = a_{kj}\ , a_{\Pi(j),i} = a_{\Pi(i),j}\ ,\ k = 1, \ldots, n \\ & a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} = a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(i),i} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(j),j} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \end{aligned}$$

3.17 Satz: Ist d eine Determinantenform auf V, $d \neq 0$, dann gilt $d(v_1, \ldots, v_n) = 0$ genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ l.a. sind.
Beweis: Die eine Richtung ist Definition der Determinantenform. Ist umgekehrt $d(v_1, \ldots, v_n) = 0$, und wären $v_1, \ldots, v_n$ l.u., also eine Basis von V, dann gäbe es eine Determinantenform d' auf V mit $d'(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Dann gibt es $\alpha \in K^*$ mit $d = \alpha d'$. Es folgt $d(v_1, \ldots, v_n) = \alpha \neq 0$.

5. Die Determinante eines Endomorphismus

3.18 Definition: Ist $f \in End(V)$, $d : V^n \to K$ eine Determinantenform $\neq 0$, dann ist offenbar auch $d' : V^n \to K$, $d'(v_1, \ldots, v_n) = d(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine Determinantenform auf V.
Es gibt daher ein $\alpha \in K$ mit $d' = \alpha d$. $\alpha = \det f$ heißt die Determinante von f.

3.19 Bemerkung: Es ist zu zeigen, daß α nicht abhängt von der Auswahl von d. Ist also $d_1 \not\equiv 0$ eine Determinatenform $d_1' = d_1 \circ f$; dann gibt es also ein $\beta \in K$ mit $d_1 = \beta d$. Ist $\alpha' \in K$ und $d_1' = \alpha' d$, dann folgt

$$\begin{aligned} d_1' &= d_1 \circ f = \beta(d \circ f) = \beta d' \\ &= \beta d\alpha = \alpha\beta d = \alpha d_1 \ , \ \alpha = \alpha' \end{aligned}$$

3.20 Satz: Ist V ein n-dimensionaler VR über K, $f, g \in End(V)$, dann gilt:

i $f \in Aut(V) \Leftrightarrow \det f \neq 0$
ii $d(g \circ f) = \det g \cdot \det f$
iii $\det(id_V) = 1$
iv $f \in Aut(V) \Rightarrow \det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$

Beweis:

i Ist $d \neq 0$ eine Determinantenform auf V, $(v_1, \ldots, v_n)$ geordnete Basis von V, dann gilt $f \in Aut(V) \Leftrightarrow (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ Basis für V.

$$\Leftrightarrow d(f(v_1), \ldots, f(v_n)) \neq 0 \Leftrightarrow \det f = \frac{d(f(v_1), \ldots, f(v_n))}{d(v_1, \ldots, v_n)} \neq 0$$

ii Wenn $f \in Aut(V)$, dann ist auch $g \circ f \in Aut(V)$, also $\det f = \det(g \circ f) \neq 0$, daher die Behauptung. Wenn $f \in Aut(V)$; also $\det f \neq 0$, also $d(f(v_1), \ldots, f(v_n)) \neq 0$ für jede Determinantenform $d \not\equiv 0$ und jede geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, dann folgt

$$\begin{aligned} \det(g \circ f) &= \frac{d((g \circ f)(v_1), \ldots, (g \circ f)(v_n))}{d(v_1, \ldots, v_n)} \\ &= \frac{d(g(f(v_1)), \ldots, g(f(v_n)))}{d(f(v_1), \ldots, f(v_n))} \cdot \frac{d(f(v_1), \ldots, f(v_n))}{d(v_1, \ldots, v_n)} \\ &= \det g \cdot \det f \end{aligned}$$

iii $\det(id_V) = \frac{d(v_1, \ldots, v_n)}{d(v_1, \ldots, v_n)}$.
iv $\det(id_V) = \det(f \circ f^{-1}) = \det f \cdot \det f^{-1}$

4.4 Die Determinante auf $\mathcal{M}(n, n; K)$

4.1 Definition: Für $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n; K)$ sei definiert

$$\det A = \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n}$$

$\det A$ heißt die Determinante von A.

4.2 Beispiele i n=2: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

ii n=3: Sarrus-Regel

$$A = \left(\begin{array}{ccccccc|cc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & & a_{11} & a_{12} \\ & \ddots & & / \ddots & & / \ddots & & & / \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & & a_{21} & a_{22} \\ & / & & / \ddots & & / \ddots & & & \ddots \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & & a_{31} & a_{32} \end{array} \right)$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

4.3 Bemerkungen i $V = K^n$, det ist die Determinantenform d auf V mit $d(e_1, \ldots, e_n) = 1$, $(e_1, \ldots, e_n)$ Einheitsbasis, denn $\det E = 1$.

ii Ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis des n-dimensionalen VR V über K, $f \in End(V)$, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ die Matrix von f bzgl. der Basis $\mathcal{A}$, dann gilt: $\det f = \det A$.
Beweis: $A = (a_{ij})$ ist gegeben durch:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \ , \ j = 1, \ldots, n$$

Ist $d \not\equiv 0$ Determinantenform auf V, dann ist per Definition:

$$\det f = \frac{d(f(v_1), \ldots, f(v_n))}{d(v_1, \ldots, v_n)} = \frac{1}{d(v_1, \ldots, v_n)} \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \ ,$$

$$d(v_1, \ldots, v_n) = \det A$$

4.4 Lemma i Für Vertauschungsmatrizen P_i^j gilt: $\det P_i^j = -1$.

ii Für die Elementarmatrizen $Q_i^j(\alpha)$ gilt $\det Q_i^j(\alpha) = 1$.

Beweis:

i Nur für die Transposition τ, die i und j vertauscht, steht

$$a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \neq 0 \ .$$

ii Nur für $\Pi = id$ steht in $a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n}$ keine 0.

4.5 Satz: i Vertauscht man in der Matrix A zwei Zeilen (oder Spalten), dann ändert det A ihr Vorzeichen.

ii Addiert man zu einer Zeile (oder Spalte) eine Linearkombination der übrigen Zeilen (oder Spalten) ändert sich det A nicht.

iii Multipliziert man eine Zeile (oder Spalte) mit $\alpha \in K$, multipliziert sich det A mit α.

iv $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

v $\det A \neq 0 \Leftrightarrow Rg\ A = n \Leftrightarrow A \in GL(n, K)$

vi $\det A \neq 0 \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

vii $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Beweis:

i klar,

ii Addition des α-fachen ($\alpha \in K$) der i-ten Zeile zur j-ten Zeile: $\det(Q_i^j)(\alpha) \cdot A = \underbrace{\det Q_i^j}_{=1} \cdot \det A =$ $\det A$

iii

iv folgen aus Definition.

v $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Spalten von A eine Basis von $K^n \Leftrightarrow Rg\ A = n \Leftrightarrow A \in GL(n, K)$

vi

vii folgen aus 3.20

viii Es sei $f_A \in End(K^n)$ durch A definiert, d.h. $f_A(x) = Ax$. Dann gilt: $\det A^{-1} = \det f_A^{-1} = (\det f_A)^{-1} = (\det A)^{-1}$

4.6 Satz: $\det A^t = \det A$

Beweis: Für $\Pi \in S_n$ gilt:

$$a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} = a_{1,\Pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\Pi^{-1}(n)}$$

denn zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert genau ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i = \Pi^{-1}(j)$, also $j = \Pi(i)$. Dann ist $a_{\Pi(i),i} = a_{j,\Pi^{-1}(j)}$. Daher ist

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} \\ &= \sum_{\Pi^{-1} \in S_n} sgn\ \Pi^{-1} a_{1,\Pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\Pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn\ \sigma a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_n, \sigma(n) = \det A^t \end{aligned}$$

4.7 Definition: $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n; K)$ heißt obere (untere) Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ ist für alle i,j mit $i > j$ $(i < j)$. $\begin{pmatrix} \backslash & & 0 \\ & \backslash & \\ & & \backslash \end{pmatrix}$.

4.8 Satz: Für jede Dreiecksmatrix A gilt:

$$\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Beweis: Nur für $\Pi = id$ steht in $a_{\Pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n}$ keine 0. Für jedes andere $\Pi \in S_n$ gibt es ein i mit $i > \Pi(i)$ und ein j mit $j < \Pi(j)$.

4.9 Anwendung: Durch Zeilen- und Spaltenoperationen kann A auf obere Dreiecksform gebracht werden. Ist k die Zahl der Zeilen- und Spaltenvertauschungen, dann ist $\det A = (-1)^k \cdot \det B$, wobei B obere Dreieckmatrix ist. Daher ist $\det A = (-1)^k b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$.

4.10 Definition: Es sei $A \in \mathcal{M}(n, n; K)$.

i Die Matrix $A_{ij} \in \mathcal{M}(n, n; K)$ entsteht aus A, indem der i-te Zeilenvektor durch den Einheitsvektor e_j und der j-te Spaltenvektor durch den Einheitsvektor e_i ersetzt wird.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

ii Die Matrix $ad\ A = (\det A_{ij})^t_{1 \le j,i \le n} = (\det A_{ji})_{1 \le i,j \le n}$ heißt die zu A adjungierte Matrix.

iii Die Streichungsmatrix $S_{ij} \in \mathcal{M}(n-1, n-1; K)$ entsteht aus A durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

4.11 Hilfssatz: $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det S_{ij}$

Beweis: Zunächst seien i=j=1. Die Behauptung ist dann $\det A_{11} = \det S_{11}$. Es gilt $\det A_{11} = \sum_{\Pi \in S_n} sgn\ \Pi \cdot \delta_{\Pi(1),1} \cdot \delta_{\Pi(2),2} \cdot \ldots \cdot \delta_{\Pi(n),n}$. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Es treten nur von 0

verschiedene Summanden auf, wenn $\Pi(1) = 1$ ist. Die Menge dieser Permutationen wird mit S_{n-1} identifiezeirt. Daher

$$\det A_{11} = \sum_{\Pi \in S_{n-1}} sgn\ \Pi a_{\Pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\Pi(n),n} = \det S_{11}$$

Für $(i,j) \neq (1,1)$ braucht man $(i-1)+(j-1) = i+j-2$ Vertauschungen.

4.12 Satz: Für jedes $A \in \mathcal{M}(n,n;K)$ gilt:

$$A \cdot ad\ A = (\det A) \cdot E$$

4.12' Folgerung:

$$\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot ad\ A$$

Beweis: Sei $B = ad\ A = (b_{ij});\ b_{ij} = \det A_{ji}$. Sind $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von A, dann gilt nach 4.5 (ii): $\det A_{ij} = \det(z_1, \ldots, z_{i-1}, e_j, z_{i+1}, \ldots, z_n)$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
(AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det(z_1, \ldots, z_{j-1}, e_k, z_{j+1}, \ldots, z_n) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i = s_j \\
&= \det(z_1, \ldots, z_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k, z_{j+1}, \ldots, z_n) \\
&= \det(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_i, z_{j+1}, \ldots, z_n) = \delta_{ij} \cdot \det A
\end{aligned}$$

4.13 Satz: (Laplacescher Entwicklungssatz)
Für $A \in \mathcal{M}(n,n;K)$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \cdot S_{ji}$$

$$i = 1 \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det S_{1j}$$

Beweis: Ist $C = A \cdot ad\ A = (c_{ij})$, dann gilt für jedes i:

$$\det A = c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det S_{ij}$$

Die andere Formel folgt durch Transponieren.

4.14 Satz: (Cramersche Regel)
Ist $A \in \mathcal{M}(n,n;K),\ detA \neq 0,\ b \in K^n$, dann ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i = \frac{\det C_i}{\det A}\ ,\ i = 1, \ldots, n\ .$$

wo $C_i = (s_1, \ldots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \ldots, s_n),\ s_1, \ldots, s_n$ Spalten von A.
Beweis: $x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(ad\ A \cdot b)$; also

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \det A_{ji} b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det S_{ji} = \frac{\det C_i}{\det A}$$

4.15 Bemerkungen: Nehmen wir an $\det A \neq 0$. Zur Berechnung von $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ hat man n+1 Determinanten auszurechnen. Für jede Determinante müssen (n-1)n! Multiplikationen ausgeführt werden.

$$\varphi(n) = (n^2 - 1)n!$$

Sterlingsche Formel: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$
$\varphi(1) \approx 3.6 \cdot 10^8$, $\varphi(20) \approx 10^{21}$, $\varphi(30) \approx 2,4 \cdot 10^{35}$

4.16 Satz: Die Matrizen $A \in \mathcal{M}(n,n;K)$, $A = (a_{ij})$; mit $a_{ij} \in Z$, $\det A = 1$ bilden eine multiplikative Gruppe $SL(n,Z)$ (Spezielle Lineare Gruppe).
Beweis: Mit $A, B \in SL(n,Z)$ ist auch $A \cdot B \in SL(n,Z)$. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} ad\ A \in SL(n,Z)$.

Kapitel 5

Mehr über Vektorräume

5.1 Äquivalenzrelationen und Faktorstrukturen

1. Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

1.1 Definition: Es sei M eine Menge. Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Für $(a,b) \in R$ schreibt man $a\ R\ b$ und sagt, a steht mit b in der Relation R.

1.2 Beispiele: i $R = \{(a,a) : a \in M\}$ Gleichheit.

ii $R = \{(a,b) : a,b \in R,\ a < b\}$

iii $f : M \to M$. Abbildung, $R_f = \{(m, f(m)) : m \in M\}$

1.3 Definition: Eine Relation $R \subset M$. R heißt Äquivalenzrelation auf M, wenn R folgende Eigenschaften hat:

i $(a,b) \in R$, für alle $a \in M$ (Reflexivität)

ii $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ für $a,b \in M$ (Symmetrie)

iii $(a,b) \in R,\ (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$; für alle $a,b,c \in M$ (Transitivität)

1.4 Beispiele: i $M = Z,\ n \in N,\ R = \{(a,b) \in Z \times Z : (a-b)$ ist durch n teilbar $\}$ ist Äquivalenzrelation auf Z.

ii $M = \mathcal{M}(m,n;K),\ R = \{(A,B) \in M \times M :$ es gibt $S \in GL(m,K),\ T \in GL(n,K)$ mit $B = SAT\}$ ist Äquivalenzrelation.
$B = S_1AT_1,\ C = S_2BT_2 = S_2S_1AT_1T_2$

iii Ist V ein VR über K, $U \subset V$ ein Unterraum, dann ist $R = \{(v,w) \in V \times V,\ v - w \in U\}$ eine Äquivalenzrealtion auf V.
Beweis:

(a) Reflexivität: Für alle $v \in V$ ist $(v,v) \in R$, da $v - v = 0 \in W$.

(b) Symmetrie: $(v,w) \in R \Rightarrow v - w \in U \Rightarrow w - v = -(v-w) \in U \Rightarrow (w,v) \in R$.

(c) Transitivität: $(v,w),\ (w,t) \in R \Rightarrow v - w,\ w - t \in U \Rightarrow v - t = (v-w) + (w-t) \in U \Rightarrow (v,t) \in R$.

iv Ist G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe, dann ist $R = \{(a,b) \in G \times G : a \cdot b^{-1} \in H\}$ eine Äquivalenzrelation auf G. Beweis wie in (iii).

1.5 Definition: i Es sei M eine Menge. Eine Klasseneinteilung (Partition) von M ist ein System $(M_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $M_i \in M$ mit den Eigenschaften:

(a) $M = \bigcup_{i \in I} M_i$

(b) $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j,\ i, j \in I$

ii Ein vollständiges Repräsentationssystem einer Klasseneinteilung $(M_i)_{i \in I}$ für M ist eine Menge $A \subset M$, so daß A aus jedem M_i genau ein Element enthält.

1.6 Satz: i Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und setzt man für alle $a \in M:\ R_a = \{b \in M:\ (a,b) \in R\}$, dann gilt:

(a) für jedes $a \in M$ ist $a \in R_a$,

(b) für $(a,b) \in R$ ist $R_a = R_b$,

(c) für $(a,b) \notin R$ ist $R_a \cap R_b = \emptyset$.

Das System $(R_a)_{a \in M}$ liefert also eine Klasseneinteilung von M, wenn jede Klasse R_a darin nur einmal aufgeführt wird. Sie heißt die von R erzeugte Klasseneinteilung von M. Jedes R_a heißt eine Rest- (Äquivalenz-)klasse von M modulo R.

ii Ist eine Klasseneinteilung $(M_i)_{i \in I}$ von M gegeben, dann wird durch

$$R = \{(a,b) \in M \times M:\ \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } a, b \in M_i\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert, deren Klasseneintielung mit der gegebenen übereinstimmt.

Beweis:

i (a) Für alle $a \in M$ ist $(a,a) \in R$, daher ist $a \in R_a$.

(b) Es sei $c \in R_a$, d.h. $(a,c) \in R$. Dann ist $(c,a) \in R$. Wegen $(a,b) \in R$ ist auch $(c,b) \in R,\ (b,c)$, d.h. $c \in R_b$: Daraus folgt: $R_a \subset R_b$: Ebenso ist $R_b \subset R_a$.

(c) Wenn $c \in R_a \cap R_b$ ist, dann ist $(a,c),\ (b,c) \in R$, also auch $(c,b) \in R$ somit $(a,b) \in R$.

ii R ist Äquivalenzrelation:
Reflexivität: Für jedes $A \in M$ gibt es ein $i \in I$ mit $a \in M_i$. Daher ist $(a,a) \in R$.
Symmetrie: Wenn $(a,b) \in R$, also wenn $a, b \in M_i$ für ein $i \in I$; dann ist auch $(b,a) \in R$:
Transitivität: Sind $(a,b), (b,c) \in R$, gibt es $i, j \in I$ mit $a, b \in M_i,\ b, c \in M_j$. Daraus folgt: $i = j$, also $a, c \in M_i,\ (a,c) \in R$. Für jedes $a \in M$ ist R_a dasjenige M_i mit $a \in M_i$. Für $b \in R_a$ ist $(a,b) \in R$, also $b \in M_i$. Wir erhalten daher eine Abbildung $\Pi:\ \{R_a\} \to \{M_i\}$. ϕ ist offenbar bijektiv.

1.7 Beispiele: Die Klasseneinteilungen zu den Beispielen aus 1.4 sind:

i Die Kongruenzklassen $R_a = \overline{a} = \{b \in Z:\ n|(a-b)\},\ \{0, 1, \ldots, n-1\}$ vollständiges Repräsentantensystem.

ii Zwei Matrizen aus $\mathcal{M}(m, n; K)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie gleichen Rang haben. Wenn $\mu = \min(m,n)$ ist, dann gibt es genau $\mu + 1$ Restklassen, nämlich

$$R_r = \{A \in \mathcal{M}(m,n;K) : Rg\ A = r,\ r = 0, \ldots, \mu\}$$

vollständiges Repräsentantensystem : $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

iii Restklassen: $R_r = v + U = \{v + u:\ u \in U\}$ vollständiges Repräsentantensystem. $V = U \oplus W$, W vollständiges Repräsentantensystem.

iv Im Fall einer abelschen Gruppe genau wie in (iii). Im nicht-abelschen Fall wird die Sache subtiler:

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H \Leftrightarrow a \in H \cdot b$$

wo $H \cdot b = \{x \in G : \exists h \in H : x = h \cdot b\}$ Rechtsrestklasse.
Die Klasseneinteilung zu R ist die Menge der Rechtsnebenklassen .
Man hat auch eine Äquivalnezrelation

$$\tilde{R} = \{(a,b) \in G \times G : \ a^{-1} \cdot b \in H\} \ .$$

Restklassen: $a, b \in R \Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H \Leftrightarrow b \in a \cdot H$.
Tatsache: I.a. sind Rechts- und Linksnebenklassen verschieden.

Nebenklassen und Faktorgruppen

1.8 Definition: Es sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G.

$$\text{Die Mengen} \quad \begin{array}{l} a \cdot H = \{x \in G : \exists h \in H : x = a \cdot h\} \ , \\ H \cdot a = \{x \in G : \exists h \in H : x = h \cdot a\} \ , \end{array}$$

heißen Links- bzw. Rechtsnebenklassen von H in G.

1.9 Lemma: i $a \cdot H = b \cdot H \Leftrightarrow b^{-1} \cdot a \in H$,

ii $H \cdot a = H \cdot b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.

Beweis:

i Wenn $a \cdot H = b \cdot H$ ist, gibt es zu jedem $h \in H$ ein $h' \in H$ mit $a \cdot h = b \cdot h'$. Speziell für $e \in H$ gibt es $h' \in H$ mit $a \cdot e = b \cdot h', \ b^{-1} \cdot a = h' \in H$. Ist andererseits $b^{-1} \cdot a \in H$ und $h \in H$; dann ist auch $h' = b^{-1} \cdot a \cdot h \in H$, also $a \cdot h = b \cdot h' \in b \cdot H$. Daraus folgt $a \cdot H \subset b \cdot H$.
Die Inklusion $b \cdot H \subset a \cdot H$ folgt daraus wegen: $a^{-1} \cdot b = (b^{-1} \cdot a)^{-1} \in H$.

ii analog.

1.10 Definition: Eine Untergruppe H von G heißt Normalteiler (od. normale Untergruppe) in G, wenn für alle $a \in G$ gilt: $a \cdot H = H \cdot a$ (normal Subgroup).

$$a \cdot H = \{x \in G : \exists h \in H : \ x = a \cdot h\}$$

1.11 Lemma: H ist Normalteiler in G genau dann, wenn für jedes $a \in G$ und jedes $h \in H$ gilt: $a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$.
Beweis: Wenn H Normalteiler in G ist, dann gibt es zu jedem $h \in H$ und jedem $a \in G$ ein $h' \in H$ mit $a \cdot h = h' \cdot a, \ a \cdot h \cdot a^{-1} = h' \in H$.
Umgekehrt sei für alle $a \in G, \ h \in H : \ h' = a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$: Dann ist $a \cdot h = h'$. $a \in H \cdot a$: Daraus folgt: $a \cdot H \subset H \cdot a$.
Ist andererseits $h' \in H, \ a \in G, b = a^{-1}$, dann ist $h = b \cdot h' \cdot b^{-1} \in H$. Daraus folgt: $H \cdot a \subset a \cdot H$.
Daher ist H Normalteiler.

1.12 Beispiele: i In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe Normalteiler.

ii Ist $f : G \to G'$ eine Gruppenhomomorphismus, dann ist $H = \ker f$ Normalteiler in G.
Beweis: Ist $h \in H'$, also $f(h) = e, \ a \in G$, dann folgt: $f(a \cdot h \cdot a^{-1}) = f(a) \cdot f(h) \cdot f(a^{-1}) = f(a) \cdot (f(a))^{-1}) = e$.

iii Die alternierende Gruppe A_n ist Normalteiler in S_n, denn es ist $A_n = \{\sigma \in S_n : \ sgn\ \sigma = 1\} = \ker sgn$ ($sgn \ : S_n to \{-1, 1\}$ hom).

iv Die spezielle lineare Gruppe $SL(n,K) = \{A \in GL(n,K) : \det A = 1\}$ ist Normalteiler in $GL(n,K)$, denn sie ist Kern des Homomorphismus $\det : \ GL(n,K) \to K^*$.

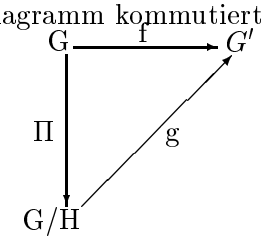
1.13 Satz: Es sei G eine Gruppe, H Normalteiler in G, G/H die Menge der Links-Nebenklassen von G nach H. Durch Vorschrift: $(a\cdot H)\cdot(b\cdot H) = (a\cdot b)\cdot H$. wird auf G/H eine Gruppenstruktur definiert. G/H mit dieser Gruppenstruktur heißt Faktorgruppe von G modulo H.
Beweis: Zu zeigen ist, daß die Definition des Produktes von Nebenklassen unabhängig ist von der Repräsentantenwahl:
Ist $a \cdot H = c \cdot H,\ b \cdot H = d \cdot H$, dann ist $a^{-1} \cdot c = h \in H,\ b^{-1} \cdot d = g \in H$, also $c = a \cdot h,\ d = b \cdot g$. $c \cdot d = a \cdot h' \cdot b \cdot g$ mit $h' \in H$.
Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(c \cdot d) \cdot H &= (h' \cdot a \cdot b \cdot g) \cdot H = (h' \cdot a \cdot b) \cdot (g \cdot H) \\ &= (h' \cdot a \cdot b)H = H(h' \cdot a \cdot b) = (H \cdot h')(a \cdot b) = H \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b) \cdot H\end{aligned}$$

Assoziativgesetz vererbt sich.
Neutrales Element ist $H = e \cdot H :\ (a \cdot H) \cdot (a^{-1} \cdot H) = (a \cdot a^{-1})H = H$

1.14 Satz: i Ist H Normalteiler in G, $\Pi : \ G \to G/H$ die natürliche Projektion (d.h. $\Pi(a) = a \cdot H$), dann ist Π ein surjektiver Homomorphismus und $\ker \Pi = H$:

ii Sind G, G' Gruppen, $f : G \to G'$ ein Homomorphismus, $H = \ker f$, dann gibt es einen injektiven Homomorphismus $g : G/H \to G'$; so daß $f = g \circ \Pi$ ist, d.h. daß das folgende Diagramm kommutiert:



Beweis:

i Π ist offensichtlich surjektiv. Sind $a, b \in G$, dann ist $\Pi(a\cdot b) = (a\cdot b)\cdot H = (a\cdot H)\cdot(b\cdot H) = \Pi(a) \cdot \Pi(b)$.
Es ist $\Pi(a) = a \cdot H = H$, genau dann, wenn $a \in H$. Daher ist $\ker \Pi = H$:

ii Wenn ein solches g existiert (mit $f = g \circ \Pi$), dann muß für alle $a \in G$ gelten: $f(a) = g(\Pi(a)) = g(a \cdot H)$: Definiere also für $a \in G :\ g(a \cdot H) = f(a)$.
Zu zeigen: g ist wohldefiniert. Ist $a \cdot H = G \cdot H$, dann ist $a^{-1} \cdot b \in H = \ker f$; also $f(a^{-1} \cdot b) = e,\ f(a^{-1}) \cdot f(b) = (f(a))^{-1} \cdot f(b) = e,\ f(b) = f(a)$.
Ferner ist $g((a\cdot H)\cdot(b\cdot H)) = g((a\cdot b)\cdot H) = f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$ (wg. Homomorphismus) $= g(a \cdot H) \cdot g(b \cdot H)$.
Daher ist g homomorph.
Es ist $g(a \cdot H) = f(a) = e$, wenn $a \in \ker f = H$ ist, also wenn $a \cdot H = H$. Daher ist $g(a \cdot H) = e \in G'$ genau dann, wenn $a \cdot H = H$, also das neutrale Element in G/H ist. Daher ist g injektiv. Die Gleichung $f = g \circ \Pi$ folgt aus der Definition von g.

3. Faktorräume:
Ist V ein K-VR, dann ist die additive Gruppe(V,+) abelsch, also ist jeder Untervektorraum Normalteiler in (V,+). Die Nebenklassen schreiben sich additiv: V+U = U+V.
Die Menge V/U der Nebenklassen von V nach U ist nach 2. eine Gruppe, mehr noch:

1.15 Satz: Die Menge V/U ist ein K-VR, wenn die Operationen folgendermaßen definiert werden.

$$(v+U)+(w+U)=(v+w)+U,\ v,w\in V\ ,\quad \alpha(v+U)=(\alpha v)+U,\ \alpha\in K$$

Beweis: Die Multiplikation mit Skalaren ist wohldefiniert, denn ist $v+U=w+U$; also $v-w\in U,\ v-u+w,\ u\in U$, dann ist $(\alpha v)+U=\alpha(u+w)+U=\alpha w+(\alpha u+U)=\alpha w+U$. Die VR-Axiome verifiziert man leicht.

1.16 Satz: i Die natürliche Projektion $\Pi:\ V\to V/U,\ \Pi(v)=v+U$, ist eine surjektive lineare Abbildung mit $\ker\Pi=U$.

ii Ist $f:V\to W$ eine lineare Abbildung, $U=\ker f$; dann gibt es genau eine injektive lineare Abbildung $g:V/U\to W$ mit $f=g\circ\Pi$.

Beweis: wie vorher.

1.17 Satz: Ist V ein endlich-dimensionaler K-VR, U ein Teilraum, dann gilt: $\dim V/U=\dim V-\dim U$

Beweis: Für $\Pi:V\to V/U$ gilt: $Im\ \Pi=V/U,\ \ker\Pi=U,\ \dim V=\dim Im\ \Pi+\dim\ker\Pi$.

1.18 Definition: Ist V ein K-VR, U ein Untervektorraum (beide nicht notwendig endlich-dimensional), und ist V/U endlich-dimensional, dann heißt

$$co\ \dim U=\dim V/U\quad \text{die Codimension von U in V.}$$

1.19 Beispiele: $V=C^\infty[a,b]$ einmal stetig differenzeibare Funktionen.
$d:V\to V$ lineare Abbildung, $\ker d=R\subset V,\ f\to f',\ W=V/U,\ g:V/U\to V$ bijektiv.

5.2 Dualräume

2.1 Definition: Es sei V ein VR über K. (Beachte: K selbst ist VR über K)

i Eine Linearform auf V ist eine lineare Abbildung $\varphi:\ V\to K$ (oder auch lineares Funktional).

ii $V^*=\hom(V,K)$ heißt der Dualraum.

2.1' Beispiele: i $V=K^n,\ \varphi(x_1,\dots,x_n)=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n,\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ fest, $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$.

ii $V=C^0[a,b]:\ \varphi(f)=\int_a^b f(x)dx,\ f\in V$

iii $V=C^0(R),\ a\in R:\ \delta_a(f)=f(a)$ linear.

2.2 Satz: Ist $(v_1,\dots v_n)$ eine geordnete Basis für V, dann definiert man für $i=1,\dots,n$ lineare Funktionale $v_i^*:V\to K$ durch

$$v_i^*(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ,i=j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Dann ist $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ eine geordnete Basis für V^*, die als die zu $(v_1,\dots,v_n)$ duale Basis bezeichnet wird.

Beweis:

i $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ ist linear unabhängig: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,\ \alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^* = 0$, dann folgt für $i = 1, \ldots, n:\ (\alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*)(v_i) = 0$, also $\alpha_1 v_1^*(v_i) + \ldots + \alpha_n v_n^*(v_i) = 0$. Daher ist $\alpha_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$.
Damit ist der Satz bewiesen, denn wegen $\dim V^* = n$ muß $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ Basis für V^* sein.

ii Trotzdem zeige ich explizit, wie $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ den VR V^* erzeugt. Ist $\varphi \in V^*,\ \alpha_i = \varphi(v_i),\ i = 1, \ldots, n$, dann setze $\Psi = \alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^* \in V^*$.
φ und Ψ nehmen auf den Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ von V die gleichen Werte an: $\Psi(v_j) = (\alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*)(v_j) = \alpha_1 v_1^*(v_j) + \ldots + \alpha_n v_n^*(v_j) = \alpha_j = \Psi(v_j),\ j = 1, \ldots, n$. Daraus folgt: $\varphi = \Psi = \alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*$.

2.3 Definition:

$$V^{**} = (V^*)^* \quad \text{Bidualraum.}$$

2.4 Satz: Die Abbildung $\mathrm{I}: \begin{array}{ccc} V & \to & V^{**} \\ v & \mapsto & f_v \end{array}$, $f_v(\varphi) = \varphi(v),\ \alpha \in V^*$, ist linear. Falls $\dim V < +\infty$, ist sie ein Isomorphismus.
Beweis: Klar ist, daß f_v eine Abbildung von V^* nach K ist. Zu zeigen ist zunächst, daß f_v linear ist. Sind also $\varphi, \Psi \in V^*,\ \alpha, \beta \in K$, dann ist

$$\begin{aligned} f_v(\alpha\varphi + \beta\Psi) &= (\alpha\varphi + \beta\Psi)(v) = \alpha\varphi(v) + \beta\Psi(v) \\ &= \alpha f_v(\varphi) + \beta f_v(\Psi) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $I(v) = f_v \in V^{**}$: Ferner ist zu zeigen, daß I linear ist. Seien also $v, w \in V,\ \alpha, \beta \in K$. Dann ist (für $\varphi \in V^*$)

$$\begin{aligned} I(\alpha v + \beta w)(\varphi) &= f_{\alpha v + \beta w}(\varphi) = \varphi(\alpha v + \beta w) \\ &= \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w) = \alpha f_v(\varphi) + \beta f_w(\varphi) \\ &= (\alpha f_v + \beta f_w)(\varphi) = (\alpha I(v) + \beta I(w))(\varphi) \end{aligned}$$

daher $I(\alpha v + \beta w) = \alpha I(v) + \beta I(w)$.
Es gilt: $I(v) = 0$ genau dann, wenn $f_v(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in V^*$, also wenn $\varphi(v) = 0$ für alle $\varphi \in V^*$.
Daraus folgt (s. Lemma 2.5) $v = 0$, falls $\dim V < +\infty$. Also ist dann $\ker I = 0,\ I$ injektiv.
Wenn $\dim V^{**} = \dim(V^*)^* = \dim V^* = \dim V$ ist, dann ist I auch surjektiv.

2.5 Lemma: Es sei $\dim V < +\infty,\ v \in V,\ v \neq 0$. Dann gibt es ein $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) = 1$.
Beweis: Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis für V, $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die dazu Duale Basis. Es ist $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, wobei nicht alle α_i Null sind. Ist etwa $\alpha_i \neq 0$, dann ist $v_i^*(v) = v_i^*(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_i \neq 0$. Setze $\varphi = \frac{1}{\alpha_i} v_i^*$.

2.6 Definition: Es seien V,W VRe über K, $f: V \to W$ linear. Dann definiert man $f^*: W^* \to V^*$ durch $f^*(\Psi) = \Psi \circ f,\ \Psi \in W^*$.

2.7 Satz: Es seien V,W endlich-dimensional. Die Abbildung $f^*: \hom(V, W) \to \hom(W^*, V^*)$ ist ein Isomorphismus.
Beweis: Nach Definition ist klar, daß f^* eine Abbildung von W^* nach V^* ist. Zu zeigen ist: sie ist linear. Für $\varphi, \Psi \in W^*,\ \alpha, \beta \in K$ ist

$$f^*(\alpha\varphi + \beta\Psi) = (\alpha\varphi + \beta\Psi) \circ f = \alpha(\varphi \circ f) + \beta(\Psi \circ f) = \alpha f^*(\varphi) + \beta f^*(\Psi)\ .$$

Damit ist f^* eine Abbildung von $\hom(V,W)$ nach $\hom(W^*,V^*)$. Es seien $f,g \in \hom(V,W),\ \alpha,\beta \in K$. Dann ist

$$(\alpha f+\beta g)^*(\varphi)(\text{für } \varphi \in W^*) = \varphi\circ(\alpha f+\beta g) = \alpha(\varphi\circ f)+\beta(\varphi\circ g) = \alpha f^*(\varphi)+\beta g^*(\varphi) = (\alpha f^*+\beta g^*)(\varphi)$$

Daraus folgt $(\alpha f+\beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$, also die Linearität von f^*.
Ist $f^* = 0$, also $f^*(\varphi) = 0$, für alle $\varphi \in W^*$, dann ist $\varphi \circ f = 0$, also $\varphi(f(v)) = 0$ für alle $v \in V$, also $f = 0$. Der Kern von f^* ist also trivial, somit f^* injektiv. Wegen $\dim \hom(V,W) = \dim V \cdot \dim W = \dim V^* \cdot \dim W^* = \dim \hom(W^*,V^*)$ ist dann f^* auch surjektiv.

2.8 Satz: Es seien V,W VRe über K, $\mathcal{A} = (v_1,\ldots,v_n),\ \mathcal{B} = (w_1,\ldots,w_m)$ geordnete Basen von V,W, $f : V \to W$ linear und $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$. Sind $\mathcal{A}^* = (v_1^*,\ldots,v_n^*),\ \mathcal{B}^* = (w_1^*,\ldots,w_m^*)$ die zu $\mathcal{A},\mathcal{B}$ dualen Basen von V^* und W^*, und ist $A^* = \mathcal{M}(f^*_{\mathcal{B}^*,\mathcal{A}^*})$, dann gilt: $A^* = A^t$.
Beweis: Ist $A^* = (a^*_{ij}),\ A = (a_{ij})$, dann gilt:

$$I \qquad w_i^* \circ f = f^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^{n} a^*_{ji} v_j^* \quad , i = 1,\ldots,n$$

$$II \qquad f(v_k) = \sum_{l=1}^{m} a_{lk} w_l \quad , k = 1,\ldots,n\ .$$

$$\text{Aus } I: \qquad w_i^* \circ f(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a^*_{ji} v_j^*(v_k) = a^*_{ki}$$

$$\text{Aus: } II \qquad w_i^* \circ f(v_k) = \sum_{l=1}^{m} a_{lk} w_i^*(w_l) = a_{ik}$$

5.3 Skalarenwechsel

1. Ist K ein Körper, $k \subset K$ ein Unterkörper von K, dann ist jeder VR über K auch VR über k, in dem die Multiplikation mit Skalaren auf die mit Skalaren aus k eingeschränkt wird.

Beispiel: $Q \subset R \subset C$. Jeder C-VR ist R-VR und jeder R-VR auch Q-VR.

3.2 Satz: Ist V endlich dimensional über K, $k \subset K$ Unterkörper, so daß K endlich dimensional über k ist, dann ist V endlich dimensional über k, und es gilt:

$$\dim_k V = \dim_K V \cdot \dim_k K$$
$$C^n = (R^2)^n = R^{2n},\ (z_1,\ldots,z_n) \mapsto (Re\ z_1, Im\ z_1, \ldots, Re\ z_n, Im\ z_n),\ (z_1,\ldots,z_n) \in C$$

Beweis: Mit $n = \dim V,\ m = \dim_k(K)$ seien $\{v_1,\ldots,v_n\},\ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ Basen von V und K. Wir zeigen, daß die Vektoren

$$w_{ij} = \alpha_i v_j,\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$$

eine Basis von V über k bilden.

i Lineare Unabhängigkeit: Sind $\beta_{ij} \in k,\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$ mit

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} w_{ij} = 0 \ \text{. Also ist } \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}\alpha_i\right) v_j = 0\ .$$

$$\text{Es folgt: } \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}\alpha_i = 0 \quad , \ j = 1,\ldots,n\ ,$$

weil $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig über k sind. Daher $\{w_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ linear unabhängig.

ii Zu zeigen: jedes $v \in V$ ist Linearkombination von $\{w_{ij}\}$, mit Koeffizienten aus k. Zunächst gibt es $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j$, da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ den VR V über K erzeugt.
Ferner gibt es $\gamma_{ij} \in k,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ mit

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij}\alpha_i,\ v = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij}\alpha_i v_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} w_{ij}$$

3.3 Beispiele: Jeder n-dimensionale VR über C ist ein 2n-dimensionaler VR über R. Für C^n kann man das auch leicht sehen:

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (Re\ z_1, Im\ z_1, \ldots, Re\ z_n, Im\ z_n)$$

ist ein R-Isomorphismus von C^n auf R^{2n}.

$$f(\alpha v) = \alpha f(v),\ f : C \to C : C \text{ ein } f(z) = \alpha z,\ \alpha \in C\ ;\ R \text{ ein } f(z) = \alpha z + \beta\overline{z},\ \alpha, \beta \in R$$

2. Wir beschränken uns auf die Körper R und C. Ist V ein C-VR, dann bezeichnen wir V, aufgefaßt als VR über R, mit V_R: Im endlich-dimensionalen Fall gilt dann:

$$\dim_R V_R = 2 \dim_C V$$

Auf V gibt es den Endomorphismus

$$J : V \to V,\ J(v) = iv,\ i = \sqrt{-1},\ \text{Es gilt: } J^2 = -id_V$$

3.4 Satz: Es sei U ein reeller VR.
$J \in End(U),\ J^2 = -id_U$. Dann kann auf der Menge U wie folgt eine C Vektorraumstruktur definiert werden. Die Addition sei dieselbe wie vorher auf U. Die Multiplikation von Vektoren mit komplexen Zahlen wird definiert durch $(\alpha, \beta \in R,\ v \in U)$

$$(\alpha + i\beta)v = \alpha v + \beta J(v)\ ,$$

wo αv die „alte"Multiplikation mit reellen Zahlen ist. Für diesen komplexen VR V gilt: $V_R = U$.
Beweis: eine Routineübung: z.B.:

$$\begin{aligned}
&a(bv) = (ab)v,\ a, b \in C,\ v \in V\\
&a(bv) = a((\gamma + i\delta)v) = a(\gamma v + \delta J(v)) = (\alpha + i\beta)(\gamma v + \delta J(v))\\
&= \alpha(\gamma v + \delta J(v) + \beta J(\gamma v + \delta J(v)) = \alpha\gamma v + \alpha\delta J(v) + \beta(\gamma J(v) - \delta v)\\
&= (\alpha\gamma - \beta\delta)v + (\alpha\delta + \beta\gamma)J(v) = (\alpha v + \beta\delta + i(\alpha\delta + \beta\gamma))v = (ab)v\ .
\end{aligned}$$

3.5 Bemerkung: Ein Endomorphismus J mit $J^2 = -id$ eines reellen VRes kann es nur im Fall gerader Dimensionen geben, da er eine komplexe Vektorraumstruktur tragen kann.

3.6 Definition: Es seien V,W VRe über K: Auf der Menge $V \times W$ der geordneten Paare (v, w), $(v', w'),\ v, v' \in V,\ w, w' \in W$, wird durch

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'),\ \alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$$

eine K-VR-Struktur definiert. Dieser VR heißt die direkte (äußere) Summe von V,W und wird mit $V \oplus W$ bezeichnet.
Bisher: $U, W \subset V$ Unterräume, $U + W = \{u + w :\ u \in U,\ w \in W\}$ direkt $\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$.

3.7 Satz: V,W VRe über K

i Durch $v \mapsto (v,0),\ w \mapsto (0,w)$ werden V,W linear und injektiv in $V \oplus W$ eingebettet.

ii Falls V,W von endlicher Dimension sind, ist es auch $V \oplus W$, und es gilt $\dim V \oplus W = \dim V + \dim W$.

Beweis:

i klar.

ii Wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}, \{w_1, \ldots, w_n\}$ Basen für V und W sind, dann ist $\{(v_1,0), \ldots, (v_n,0), (0,w_1), \ldots, (0,w_n)\}$ eine Basis für $V \oplus W$.

3.8 Satz: Es sei V ein R-VR

i Der Endomorphismus $J : V \oplus V \to V \oplus V,\ J(V \oplus W) = (-W) \oplus V$, ist eine komplexe Struktur für $V \oplus V$. (d.h.: $J^2 = -id$). Der so gegebende komplexe VR wird mit V_C bezeichnet und heißt die Komplexifizierung von V.
Identifiziert man V mit seinem Bild unter der Einbettung $V \to V \oplus V$ $(v \mapsto (v,0))$, dann gilt:

$$V_C = V \oplus iV$$

ii Falls $\dim_R V < +\infty$ ist, so gilt:

$$\dim_R V_C = 2 \cdot \dim_C V_C = 2 \dim_R V$$

Beweis: $J^2 = -id$.

Kapitel 6

Eigenwerte und Normalformen von Endomorphismen

Alle VRe seien von endlicher Dimension.

6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.1 Definition: Es sei V ein VR über K: $f \in End(V)$. Für jedes $\lambda \in K$ heißt

$$E_\lambda(f): \ \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

der Eigenraum von f zu λ. λ heißt Eigenwert von f, wenn $E_\lambda(f) \neq \{0\}$. Jeder von 0 verschiedene Vektor $v \in E_\lambda(f)$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.

1.2 Bemerkung: i $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id_V)$ ist Untervektorraum von V. Die Gleichung $f(v) = \lambda v$ ist für $v = 0$ stets erfüllt.

ii Wir werden sehen, daß „meistens“ $E_\lambda(f) = \{0\}$ ist (für die „meisten“ $\lambda \in K$)
Nur der Ausnahmefall $E_\lambda(f) \neq 0$ verdient Interesse.

1.3 Satz: $\lambda \in K$ ist Eigenwert von $f \Leftrightarrow \det(f - id_V) = 0$
Beweis: $\det(f - \lambda id_v) \neq 0 \Leftrightarrow f - id_V \in Aut(V) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda id_V) = 0 = E_\lambda(f)$.

1.4 Definition: Es sei $A \in \mathcal{M}(n, n; K)$. Dann heißt für $\lambda \in K$: $E_\lambda(A) = \{x \in K^n : \ Ax = \lambda x\}$ der Eigenraum von A zu λ. λ heißt Eigenwert von A, wenn $E_\lambda(A) \neq \{0\}$, jeder Vektor $x \in E_\lambda(A) - \{0\}$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

1.5 Satz: $\lambda \in K$ ist Eigenwert zu $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$
Beweis: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$. Dieses lineare homogene Gleichungssystem hat genau dann eine nicht triviale Lösung, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$.

$f \in End(V), \ \lambda \in K : \ E_\lambda(f) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$
λ heißt Eigenwert $\Leftrightarrow \det(f - \lambda id) = 0$
$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id_V)$. Sei λ Eigenwert $\Leftrightarrow \det(f - \lambda id) = 0$
$E_\lambda(A) = \{x \in K^n : Ax = \lambda x\}$.
λ heißt Eigenwert von $A \Leftrightarrow E_\lambda(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

1.6 Satz: Es sei V ein VR über K: $f \in End(V)$. Dann sind äquivalent:

i λ ist Eigenwert von f.

ii Es gibt eine Basis M für V, so daß die Matrix $A = \mathcal{M}(f_{M,M})$ den Eigenwert λ hat.

iii Für jede Basis M von V, $A = \mathcal{M}(f_{M,M})$ hat A den Eigenwert λ.

Beweis: Es sei $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ geordnete Basis für V, $A = \mathcal{M}(f_{M,M})$, $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, $j = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$(f - \lambda id_V)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} \lambda \delta_{ij}) v_i \ , \ j = 1, \ldots, n \text{ also ist}$$

$A - \lambda E = \mathcal{M}((f - \lambda id)_{M,M})$. Da $\det(f - \lambda id_V) = \det(A - \lambda E)$ ist, folgt der Satz.

1.7 Bemerkung: Daß $\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E)$ ist für zwei Matrizendarstellungen A,B für f, kann man auch direkt sehen. Es gibt (vgl. Kapitel III; Satz 4.17) $S \in GL(n, K)$ mit $B = SAS^{-1}$. Daher $\det(SAS^{-1} - S(\lambda E)S^{-1}) = \det(S(A - \lambda E)S^{-1}) = \det S \det(A - \lambda E) \det S^{-1} = \det(A - \lambda E)$.

1.8 Satz: Es sei V ein K-VR, $f \in End(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f. Wenn v_j Eigenvektor zum Eigenwert λ_j ist, $j = 1, \ldots, k$, dann ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig.
Beweis: Induktion über k.

$k = 1$ klar.

$k \to k + 1$: Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \in K$ und $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = 0, \\
&\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0, \\
&\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0, \\
&\alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) v_1 + \ldots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) v_k = 0
\end{aligned}$$

Da nach Induktionsanfang: $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, folgt:

$$\alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) = \ldots = \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0 \ ,$$

Da die $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ paarweise verschieden sind, folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Dann ist auch $\alpha_{k+1} = 0$.

1.9 Satz: V VR über K, $f \in End(V)$.

i Es sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ geordnete Basis für V, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ sei eine Diagonalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \ .$$

Dann sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ EW von f und v_i ist Eigenvektor zu λ_i , $i = 1, \ldots, n$.

ii Ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots v_n)$ geordnete Basis aus Eigenvektoren von f, dann ist $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ Diagonalmatrix.

Beweis: $A = (a_{ij})$ ist gegeben durch $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, $j = 1, \ldots, n$.

i Wenn $a_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}$, folgt $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $j = 1, \ldots, n$.

ii Falls $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $j = 1, \ldots, n$, folgt $a_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}$.

1.10 Definition: i $f \in End(V)$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ für V gibt, so daß $\mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ Diagonalmatrix ist.

ii $A \in \mathcal{M}(n,n;K)$ heißt diagonalisierbar (diagonalähnlich), wenn es eine Matrix $S \in GL(n,K)$ gibt, so daß SAS^{-1} Diagonalgestalt hat.

1.11 Beispiele i id_V hat 1 als einzigen EW, jeder Vektor $\neq 0$ ist Eigenvektor zu 1.

ii $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $R^2 \to R^2$

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 = 0$$

$\lambda = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}$. Reelle Lösungen gibt es nur für $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\varphi = 2\pi$

$(A_\varphi - \lambda E)\cdot x = 0$, $A_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C^2 \to C^2$, $\lambda = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$

iii $B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_\varphi : R^3 \to R^3$

$$\det(B_\varphi - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2)$$

iv $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -(2+\lambda) & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda(2+\lambda)(3-\lambda) + 6 + 6 - 2(2+\lambda) - 6\lambda - 3(3-\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \; Rg\,(A-E) = 1$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \; Rg\,(A+E) = 2$$

6.2 Das charakteristische Polynom

1.

2.1 Satz: Es sei V ein K-VR, $\dim f_K V = n$, $f \in End(V)$. Dann gibt es $a_1, \ldots, a_n \in K$, so daß für jedes $\lambda \in K$ gilt:

$$\det(f - \lambda id_V) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 \;,\; a_0, \ldots, a_n \in K$$

Induktion nach n: n=1: klar.
$n \to n+1$: Entwickeln wir $\det(A - \lambda B)$ nach der ersten Spalte, dann ist der i-te Summand gleich $(-q)^{i+1}(a_{i1} - \lambda b_{i1})$. $\det(A_{i1} - \lambda B_{i1})$, wo A_{i1} die Streichungsmatrix, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und ersten Spalte entsteht. ...
Nach Induktionsannahme ist $\det(A_{i1} - \lambda B_{[[i1}$ ein Polynom in λ höchstens vom Grad n-1 ...

2.2 Definition: $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda id_V) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ heißt das charakteristische Polynom auf A.

2.32 Beispiel: Für $K = F_2$ $(1 + 1 = 0)$ betrachte man das Polynom $p(x) = x^2 + x$. Dann ist $p(0) = 0 = p(1)$.
$x^4 + x^3 + x^2 + x$

2.4 Definition: Es sei R ein Ring.

i Ein Polynom mit Koeffizienten in R ist eine Folge $(a_0, a_1, \ldots) \in R^N$, so daß nur endlich viele $a_i \neq 0$ sind. Man schreibt dafür $p(x) = \sum a_i x^i$ und nennt x eine Unbestimmte. $R[x]$ Gesamtheit.
Beachte: $p(x) = \sum a_i x^i,\ q(x) = \sum b_i x^i$ sind genau dann gleich, wenn $a_i = b_i$ für alle $i \in N_0$.

ii Der größte Index i, für den $a_i \neq 0$ ist, heißt der Grad des Polynoms. Dieses A_i heißt der Leitkoeffizient.

iii Für $p(x) = \sum a_i x^i,\ q(x) = \sum b_i x^i$ definiert man

$$p(x) + q(x) = \sum (a_i + b_i) x^i \ ,$$
$$p(x) \cdot q(x) = \sum c_i x^i \ ,\ c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

2.5 Satz: Es sei R ein Ring.

i Die Menge $R[x]$ aller Polynome mit Koeffizienten aus R ist ein Ring.

ii Die Zuordnung $a \mapsto ax^0$, ist ein injektiver Ringhomomorphismus von R nach $R[x]$.

iii $grad(p + q) \leq \max(grad\ p, grad\ q)$.

iv $grad(p \cdot q) \leq grad\ p + grad\ q$, wobei hier Gleichheit gilt, wenn R nullteilerfrei ist.

v Wenn R nullteilerfrei ist, dann auch $R[x]$

Beweis: (iv),(v): $n = grad\ p,\ m = grad\ q,\ p, q \neq 0$, dann ist $a_n \cdot b_m \neq 0$ der Leitkoeffizient von $p \cdot q$.
$K = F_2 :\ p(x) = x^2 + x,\ p(x) = 0$ für alle $x \in K,\ (a_0, a_1, \ldots) \in R^N,\ c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$

2.6 Satz: Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, $p \in K[x]$. Wenn für alle $\lambda \in K$ gilt $p(\lambda) = 0$, dann ist p das Nullpolynom.
Beweis: Es sei $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Ferner seien $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ paarweise verschieden. Die Bedingungen $p(\lambda_0) = p(\lambda_1) = \ldots = p(\lambda_n) = 0$ übersetzen sich in das lineare Gleichungssystem für $a_0, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\lambda_0 + \ldots + a_n\lambda_0^n &= 0 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1\lambda_n + \ldots + a_n\lambda_n^n &= 0 \end{aligned}$$

Die Determinante dieses Systems ist die sogenannte Vandermond'sche Determinante:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^n \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$$

Daraus folgt, daß das Gleichungssystem nur die triviale Lösung $a_0 = \ldots = a_n = 0$ hat.

2.7 Satz: Es sei K ein Körper.

i Ist $p \in K[x]$ ein Polynom vom Grad n, $\alpha \in K$ eine Nullstelle von $p(x)$, d.h. $p(x) = 0$, dann gibt es $k \in N$ und ein Polynom $q \in K[x]$ vom Grad n-k mit $q(\alpha) \neq 0$ und $p(x) = (x - \alpha)^k q(x)$. k heißt Vielfachheit der Nullstelle α.

ii Jedes Polynom $p \in K[x]$ vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Beweis: Ist $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, dann gilt:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x^i - \alpha^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - \alpha) \sum_{j=0}^{i-1} x^j \alpha^{i-1-j} \\ &= (x - \alpha) q_1(x) \end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$$

$$(x - \alpha) \sum_{j=0}^{i-1} x^i \alpha^{i-1-j} = \sum_{j=0}^{i-1} x^{j+1} \alpha^{i-(1+j)} - \sum_{j=0}^{i-1} x^j \alpha^{i-j}$$

$$\sum_{j=1}^{i} x^j \alpha^{i-j} - \sum_{j=0}^{i-1} x^j \alpha^{i-j} (x^i - \alpha^i)$$

$grad\ q_1 = n - 1$. Wenn $q_1(\alpha) = 0$ ist, setzt man folgt. Solange bis $q_k(\alpha) \neq 0$ ist.

2.8 Bemerkung: Es mögen Zweifel daran aufkommen, daß im Beweis von 2.7 mit der Unbestimmten x so gerechnet werden darf, als ob x zum Körper K gehört. Tatsächlich gibt es einen Erweiterungskörper K(x), der aus K durch „Adjunktion" von x entsteht, und der $K[x]$ enthält. Dann ist x zwar nicht Element von K, aber von K(x).
Falls K unendlich ist, wird unser Vorgehen durch 2.6 gerechtfertigt.

2.9 Bemerkung: Natürlich hat nicht jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen. Über R haben z.B. die Polynome $x^{2n} + 1$ gar keine Nullstellen.
In C hat jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen (gemäß Vielfachheit gezählt).
Dieser sogenannte Fundamentalsatz der Algebra wurde 1799 von Gauß bewiesen.

2.10 Beispiel: Das Polynom x^2 hat im Z_{10} die Nullstellen 0, 4, 8, 12.

Zurück zum charakteristischen Polynom.
Es sei jetzt K ein Körper mit unendlich vielen Elementen.

$$\det(f - \lambda id_V) = a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_n + \lambda^n,\ a_0, \ldots, a_n \in K$$

2.11 Satz: Für $A \in \mathcal{M}(n, n; K)$ gilt:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + \det A$$
$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (a_{11} + \ldots - a_{nn}) = (-1)^{n-1} Spur\ A$$

Beweis: Nach Definition ist:

$$\det(A-\lambda E) = (a_{11}-\lambda)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-\lambda) + \sum_{\substack{\Pi\in S_n\\ \Pi\neq id}} sgn\ \Pi b_{1,\Pi(1)}\cdot\ldots\cdot b_{n,\Pi(n)}$$

In jedem Produkt in der Summe stammen mindestens 2 Faktoren nicht aus der Hauptdiagonale.. ($\Pi(i)=i$, enthalten also kein λ). Daher ist

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= (a_{11}-\lambda)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-\lambda)+q_1(\lambda) \quad ,\ q_1\in K[x],\ grad\ q_1\le n-1\\ &= (-1)^n\lambda^n-(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(a_{11}+\ldots+a_{nn})+q_2(\lambda) \quad ,\ grad\ q_2\le n-2\end{aligned}$$

$a_0=\det(A-0\cdot E)=\det A$.

2.12 Bemerkung: Ist V n-dimensionaler VR über K, $f\in End(V)$, dann gilt für jede geordnete Basis $\mathcal{A}$ für V und $A=\mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$: $\det(f-\lambda id_V)=\det(A-\lambda E)$ für jedes $\lambda\in K$.
Speziell ist Spur f = Spur A für jede Matrixdarstellung A für f. Das kann man auch direkt nachrechnen: Ist nämlich $B=W^{-1}AS,\ S^{-1}=(s^*_{ij})$, dann folgt:

$$\begin{aligned}Spur\ B &= \sum_{i=1}^n b_{ij}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n s^*_{ij}\sum_{k=1}^n a_{jk}s_{ki}\\ &= \sum_{j,k=1}^n a_{jk}\underbrace{\sum_{i=1}^n s_{ki}s^*_{ij}}_{=\delta_{kj}}=\sum_{j=1}^n a_{ij}=Spur\ A\end{aligned}$$

2.13 Satz: Ein Endomorphismus eines n-dimensionalen VRs (oder: eine Matrix $\mathcal{M}(n,n;K)$) hat höchstens n Eigenwerte, nämlich die Nullstellen in K des charakteristischen Polynoms.

2.14 Definition: Ist $\lambda\in K$ EW von $f\in End(V)$, dann heißt:

i $n(\lambda)=\dim E_\lambda(f)$ die geometrische Vielfachheit von R,

ii $m(\lambda)=$ Ordnung der Nullstelle λ von $p_f(x)$ die algebraische Vielfachheit von λ.

2.15 Satz: Es gilt stets $n(\lambda)\le m(\lambda)$
Beweis: Es sei $n_1=n(\lambda_1),\ (v_1,\ldots,v_n)$ geordnete Basis für $E_\lambda(f)$.
Ergänze sie zu einer Basis $\mathcal{A}=(v_1,\ldots,v_m,\ldots,v_n)$. Setze $A=\mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$, also $f(v_j)=\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i,\ j=1,\ldots,n$. Wegen $f(v_j)=\lambda_1 v_j,\ j=1,\ldots,n_1$, ist

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & * & \\ 0 & & \lambda_{n_1} & & & \\ \hline & 0 & & & * & * \end{array}\right),$$

also $\det(A-\lambda E)=(\lambda_1-\lambda)^m\cdot\det(**-\lambda E)$, wie Entwicklung nach der ersten Spalte und vollständige Induktion zeigt.

2.16 Beispiel: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}(2,2;R)$. $\det(A-\lambda E)=(1-\lambda)^2$. Der Eigenwert 1 hat die algebraische Vielfachheit 2, aber die geometrische Vielfachheit 1, denn $A-1\cdot E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

6.3 Normalformen, elementare Theorie

3.1 Definition: i Es sei V ein endlich dimensionale VR über K, $f \in End(V)$. f heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis $\mathcal{A}$ für V gibt, so daß $\mathcal{M}(n,n;K)$ Diagonalgestalt hat.

ii Es sei $A \in \mathcal{M}(n,n;K)$. A heißt diagonalähnlich, wenn es eine Matrix $S \in GL(n,K)$ gibt, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

3.2 Bemerkungen: i Ist $B = \mathcal{M}(f_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$ mit irgendeiner Basis $\mathcal{B}$ für V, dann ist die Frage nach der Diagonalisierbarkeit von f äquivalent zu der Frage nach der Diagonalähnlichkeit von B. Denn ist $\mathcal{A}$ eine andere Basis für V, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$, dann gibt es ein $S \in GL(n,K)$ mit $A = S^{-1}BS$ (vgl. Satz 4.17, Kap III).
A heißt zu B ähnlich.

ii Die Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}(n,n;K)$. Normalform bestimmen heißt: ein möglichst einfaches vollständiges Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen nach dieser Relation zu finden.

iii Die Äquivalenz von Matrizen, speziell für quadratische Matrizen, besitzt einfache Normalformen:
jede (n,n)-Matrix ist äquivalent zu $r \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$. Um einen Endomorphismus äquivalent zu diagonalisieren, kann man 2 Basen wählen: $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$.

3.3 Satz: Ein Endomorphismus $f \in End(V)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

i Das charakteristische Polynom p_f von f zerfällt über K in Linearfaktoren:

$$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - x =^{n_k} \quad , \ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K, \ n_1, \ldots, n_k \in N, \ n_1 + \ldots + n_i = n = \dim V$$

ii Für $\chi = 1, \ldots, k$ gilt:

$$n_\chi = \dim E_{\lambda_\chi} = \dim E_{\lambda_\chi}(f)$$

Beweis:

(a) f sei diagonalisierbar. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ für V, so daß $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ Diagonalgestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & 0 & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ n_1 \\ \\ \\ n_2 \\ \\ \vdots \\ n_k \end{matrix}$$

Das charakteristische Polynom von f ist dann:

$$p_f(x) = p_A(x) = \det(A - xE) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - x)^{n_k}$$

Die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von f, und es gibt: $f(v_j) = \mu_j \cdot v_j,\ j = 1, \ldots, n.$ mit

$$\begin{aligned}
&\mu_1 = \ldots = \mu_m = \lambda_1, \\
&\mu_{m+1} = \ldots = \mu_{m+n_2} = \lambda_2, \\
&\vdots \\
&\mu_{m_1+\ldots+n_{n-1}+1} = \ldots = \mu_{m+\ldots+n_k} = \lambda_k
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$e_{\lambda\chi}(f) = Span\{v_{n_1} + \ldots + v_{n_{\chi-1}+1}, \ldots, v_{n_1+\ldots+n_\chi}\},\ \text{also}:\ \dim E_{\lambda\chi}(f) = n_\chi$$

(b) Wenn (i),(ii) erfüllt sind, wähle für $\chi = 1, \ldots, k$ eine Basis $\mathcal{A} = \{v_{\chi,1}, \ldots, v_{\chi,n_\chi}\}$ für $E_{\lambda\chi}(f)$. $\approx \{v_1^{(\chi)}, \ldots, v_{n_\chi}^{(\chi)}\}$.
Setze $\mathcal{A} = \bigcup_{\chi=1}^{k} \mathcal{A}_\chi$. Dann ist $\mathcal{A}$ l.u. (1.8) und wegen $n_1 + \ldots + n_k = n$ ist daher $\mathcal{A}$ eine Basis für V. Nach 1.9 ist dann $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ eine Diagonalmatrix.

3.4 Folgerung: Ein Endomorphismus eines komplexen VRes V ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die geometrischen VFH gleich der algebraischen VFH ist.
Beweis: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt über C jedes Polynom in Linearfaktoren.

3.5 Definition: Ein Endomorphismus $f \in End(V)$ heißt trigonalisierbar, wenn es eine Basis $\mathcal{A}$ für V gibt, so daß $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

3.6 Satz: f ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom p_f von f über K in Linearfaktoren zerfällt.
Beweis:

i Es sei f trigonalisierbar, also $\mathcal{A}$ sei Basis für V, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ sei obere Dreiecksmatrix. Dann ist $A - xE,\ x \in K$, obere Dreiecksmatrix.. $p_f(x) = p_A(x) = (a_{11} - x) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - x)$.

ii Wenn p_f in Linearfaktoren zerfällt: $p_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - x)$, dann zeigen wir im nächsten Abschnitt, daß eine f-invariante Fahne existiert.
Dies ist eine Kette $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n$ von Unterräumen von V mit $\dim V_i = i,\ i = 0, \ldots, n,\ f(V_i) \subset V_i$. Aus der Existenz einer f-invarianten Fahne folgt die Trigonalisierbarkeit von f: Wähle eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, so daß $V_i = Span\{v_1, \ldots, v_i\},\ i = 1, \ldots, n$. Nach dem Basisergänzungssatz kann eine solche Basis induktiv konstruiert werden. Wegen $f(V_i) \subset V_i$
folgt für $i = 1, \ldots, n:\ f(v_i) \in Span\{v_1, \ldots, v_n\}$. Also $f(v_i) = \sum_{j=1}^{i} a_{ji} v_j,\ i = 1, \ldots, n$. Die Matrix $A = (a_{ij}) = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ hat also obere Dreiecksgestalt.

iii Die Existenz einer f-invarianten Fahne zeigen wir durch vollständige Induktion nach n. Für n=0 ist nichts zu zeigen.
Es sei also $n \geq 1$. Wähle einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ_1, und ergänze zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, w_2, \ldots, w_m)$ für V. Setze $V_1 = Span\{v_1\},\ W = Span\{w_2, \ldots, w_m\}$: Dann ist $V = V_1 \oplus W$.
Dann gibt es lineare Abbildungen $h : W \to V_1,\ g : W \to W$ mit $f|_W = h + g$.
Denn sind $p_1 : V \to V_1,\ p_2 : V \to W$ die Projektionen, d.h. für $v \in V,\ v = v_1 + w$ sind $p_1(v) = v_1,\ p_2(v) = w$, dann setze man $h = p_1(f|_W),\ g = p_2(f|_W)$. Die Matrix $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ sieht so aus:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{B}} \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad , \ f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} v_j$$

und es gilt: $B = \mathcal{M}(g_{\mathcal{B},\mathcal{B}}),\ \mathcal{B} = (w_2, \ldots, w_n)$. Weiter ist

$$p_f(x) = p_A(x) = \det(A - xE) = (\lambda_1 - x) \cdot \det(B - xE_{n-1}) = (\lambda_1 - x) \cdot p_g(x)$$

Das charakteristische Polynom von g zerfällt in Linearfaktoren. Nach Ind.Ann. gibt es eine g-invariante Fahne $W_0, \ldots, W_{n-1}$ in W. Definiere nun $V_0 = \{0\},\ V_{i+1} = V_1 + W_i,\ i = 0, \ldots, n-1$. Zu zeigen ist noch, daß dies eine f-invariante Fahne in V ist. Ist $v \in V_{i+1},\ v = \alpha v_1 + w,\ w \in W_i,\ \alpha \in K$, dann folgt:

$$f(v) = \alpha f(v_1) + f(w) = \alpha \underbrace{\lambda_1 v_1}_{\in V_1} + \underbrace{h(w)}_{\in V_1} + \underbrace{g(w)}_{\in W_i} \quad \in V_1 + W_i = V_{i+1}$$

3.7 Folgerung: Jeder Enomorphismus eines komplexen VRs ist trigonalisierbar.

3.8 Satz: (Cayley-Hamilton)
Es sei $K \in \{R, C\}$. Ist V ein endlich dimensionaler VR über K, $f \in End(V),\ p_f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, dann gilt:

$$f_f(f) = a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 \cdot id_V = 0\ .$$

Beweis:

i $K = C$. Dann zerfällt p_f in Linearfaktoren. Dann konstruiere man wie im Beweis von 3.6 eine f-invariante Fahne. Das ist eine Kette $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ von Unterräumen von V mit $\dim V_i = i,\ f(V_i) \subset V_i,\ i = 0, \ldots, n$.
Ferner kann man eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ angeben, so daß $V_i = Span\{v_1, \ldots, v_i\},\ i = 1, \ldots, n$. Für die Matrix $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ gilt dann: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von f.

Wir setzen: $\phi_i = (\lambda_1\ id_V - f) \circ \ldots \circ (\lambda_i id_V - f) \in End(V),\ i = 1, \ldots, n$.

Wir zeigen: $\phi_i(V_i) = \{0\}$. Wegen $\phi_n = p_f(f)$ $\quad (p_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - x))$ folgt daraus die Behauptung.

Induktion nach i:
i=1: $\phi_1 = \lambda_1 id_V - f,\ V_1 = Span\{v_1\},\ f(v_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} v_i = \lambda_1 v_1$ Daher ist $\phi_1(v_1) = \{0\}$.
Es sei $i \geq 2,\ v \in V_i$. Dann gibt es ein $w \in V_{i-1}$ und $\alpha \in C$ mit $v = w + \alpha v_i,\ (v_i = v_{i-1} \oplus Span\{v_i\})$. Es gibt $\lambda_1 w - f(w) \in V_{i-1},\ \lambda_i v_i - f(v_i) \in V_{i-1}$, $(f(v_i) - \sum_{j=1}^{i} a_{ji} v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} v_j + \lambda_i v_i)$.
Daraus folgt nach Ind.Ann.

$$\phi_i(w) = (\phi_{i-1} \circ (\lambda_i id_V - f))(w) = \phi_{i-1}(\lambda_i w - f(w)) = 0$$
$$\phi_i(v_i) = (\phi_{i-1} \circ (\lambda_i id_V - f))(v_i) = \phi_{i-1}(\lambda_i v_i\ - f(v_i)) = 0$$

Daher ist auch $\phi_i(v) = 0$, q.e.d.

ii Der Fall $K = R$ kann folgendermaßen auf (i) zurückgeführt werden. Ist $\mathcal{A}$ eine Basis für V, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$; dann definiert A bzgl. der Einheitsbasis von C^n einen Endomorphismus $C^n \to C^n$. Nach (i) ist $p_A(A) = 0$. Wegen $p_f(f) = p_A(A) = 0$.

6.4 Die Jordansche Normalform

1.

4.1 Definition: Ist $\lambda \in K,\ n \in N$, dann heißt

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

die Jordanmatrix der Stufe n zu λ.
Speziell:

$$J_1(\lambda) = (\lambda),\ J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

4.2 Satz: Es sei V ein VR der Dimension n über K, $f \in End(V)$: Das charakteristische Polynom p_f zerfalle über K in Linearfaktoren. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{A}$ für V, so daß $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ Jordansche Normalform hat:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J(\lambda_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

die $J(\lambda_i)$ sind Jordanmatrizen der Stufen $n_i,\ n_1 + \ldots + n_k = k$. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von f die nicht paarweise verschieden sein müssen.

4.3 Definition: $f \in End(V)$ heißt nilpotent (nichts bewirkend), wenn $f^n = 0$ ist für ein $m \in N$. $A \in \mathcal{M}(n, n; K)$ heißt nilpotent,wenn $A^m = 0$ ist für ein $m \in N$. Die jeweils kleinste natürliche Zahl dieser Art heißt der Nilpotenzindex.

4.4 Beispiel:

$$A \in \mathcal{M}(n, n; K) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad ,\ a_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j$$

Behauptung: $A^n = 0$.
Beweis: In A^n ist $a^*_{ik} = 0$ für $k \leq i+1$, denn $a^*_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=i+1}^{k-1} a_{ij} \cdot a_{jk} = 0$, wenn $k \leq i+1$.

4.5 Bemerkungen: i Ist A nilpotent, dann auch jede zu A ähnliche Matrix B, ist $B = SAS^{-1},\ S \in GL(n, K)$; dann ist

$$B^m = (SAS^{-1})(SAS^{-1}) \cdot \ldots \cdot (SAS^{-1}) = SA^mS^{-1}$$

ii Wenn f nilpotent ist, dann auch jede Matrixdarstellung $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$; denn es ist $A^m = \mathcal{M}(f^m_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$.

iii Ein nilpotenter Endomorphismus hat 0 als einzigen Eigenwert. (0 ist Eigenwert von f $\Leftrightarrow f \notin Aut(V)$). Wenn λ Eigenwert von f ist, dann ist λ^m Eigenwert von f^m.

4.6 Satz: (Jordansche Normalform für nilpotente Endomorphismen)
Ist $f \in End(V)$ nilpotent, dann gibt es eine Basis $\mathcal{A}$ für V, so daß $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ folgende Gestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad , \ \alpha_i \in \{0,1\}, \ i = 1, \ldots, n-1$$

Beweis: (siehe Anhang von Fischer)

i Es sei m der Nilpotenzindex von f. Setze $V_i = \ker f^i, \ i = 0, \ldots, m$. Dann ist :

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V$$

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, m$ gilt:
(a) $V_{i-1} \neq V_i$,
(b) $f^{-1}(V_{i-1}) = V_i$,
(c) Ist $U \subset V$ ein Unterraum mit $U \cap V = \{0\}$, dann ist $f|_U$ injektiv.
Beweis:
(a) Da m minimal ist, gibt es ein $v \in V$ mit $f^{m-1}(v) \neq 0, \ f^m(v) = 0$.
Setze $w = f^{m-1}(v)$. Dann ist $f^i(w) = f^i(f^{m-i}(v)) = f^m(v) = 0$, aber $f^{i-1}(w) = f^{m-1}(v) \neq 0$. Daher ist $w \in V^i|V_{i-1}$.
(b) $v \in f^{-1}(V_{i-1}) \Leftrightarrow f(v) \in V_{i-1} \Leftrightarrow f^{i-1}(f(v)) = 0 \Leftrightarrow f^i(v) = 0 \Leftrightarrow v \in V_i$.
(c) Es gilt $V_1 = \ker f \subset V_i$. Aus $U \cap V_i = \{0\}$ folgt $U \cap \ker f = \{0\}, \ f|_U$ injektiv.

ii Behauptung: Es gibt Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ von V, so daß gilt:
(a) $V_i = V_{i-1} \oplus U_i$,
(b) $f(U_i) \subset U_{i-1}, \ f|_{U_i}$ ist injektiv.
(c) $V = U_n \oplus \ldots \oplus U_m$.
Beweis: Wir wählen zuerst einen beliebigen direkten Summanden U_m von V_{m-1} in $V_m = V$, also $V = V_m = V_{m-1} \oplus U_m$. Es ist $f(U_m) \cap V_{m-2} = \{0\}$, denn zu $v \in f(U_m) \cap V_{m-2}$ gibt es $u \in U_m$ mit $v = f(u) \in V_{m-2}$.
Wegen $V_{m-1} = f^{-1}(V_{m-2})$ ist $u \in V_{m-1}$, also $u = 0, v = 0$. Daher gibt es einen Unterraum $U_{m-1} \subset V_{m-1}$ mit $V_{m-1} = V_{m-2} \oplus U_{m-1}, \ f(U_m) \subset U_{m-1}$.
Dieses Verfahren wird iteriert: ist für ein $i \in \{n, \ldots, m\}$ die Zerlegung $V_i = V_{i-1} \oplus U_i$ schon konstruiert, findet man wie oben eine Unterraum U_{i-1} von V_{i-1}, so daß $V_{i-1} = V_{i-2} \oplus U_{i-1}, \ f(U_i) \subset U_{i-1}$. $f|_{U_i}$ ist injektiv, denn man hat $U_i \cap V_{i-1} = \{0\}$, und aus (i)c) folgt: $f|_{U_i}$ injektiv.
c) folgt so: $V = V_m = V_{m-1} \oplus U_m = V_{m-2} \oplus U_{m-1} \oplus U_m = \ldots = V_0 \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.

4.6 Satz: Es sei $f \in End(V)$ nilpotent. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ für V, so daß $A = \mathcal{M}(F_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ folgende Gestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad , \ \alpha_i \in \{0,1\}, \ n = \dim V \ .$$

Beweis:

i $V_i = \ker f^i,\ i = 0, \ldots, m,\ \{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = 0$

ii Es gibt Unterräume $U_1, \ldots, U_m$ von V, so daß

(a) $V_i = V_{i-1} \oplus U_i$,

(b) $f(U_i) \subset U_{i-1},\ f|_{U_i}$ injektiv,

(c) $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.

iii Wir wählen Basen von

$$\begin{aligned}
\|U_m &: u_1^{(m)}, \ldots, u_{k_m}^{(m)} \text{ . Dann ist } \{f(u_1^{(m)}, \ldots, f(u_{k_m}^{(m)})\} \subset U_{m-1} \text{ l.u.} \\
\|U_{m-1} &: f(u_1^{(m)}), \ldots, f(u_{k_m}^{(m)}), u_1^{(m-1)}, \ldots, u_{k_{m-1}}^{(m-1)} \ \| \\
&\vdots \\
\|U_1 &: f^{m-1}(u_1^{(m)}), \ldots, f^{m-1}(u_{k_m}^{(m)}), f^{m-2}(u_1^{(m-1)}), \ldots, f^{m-2}(u_{k_{m-1}}^{(m-1)}), \ldots, u_1^{(1)}, \ldots, u_{k_1}^{(1)} \ \|
\end{aligned}$$

Da $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ ist, bildet die Vereinigung dieser Basen eine Basis für V:

$$\begin{aligned}
&w_1 := f^{m-1}(u_1^{(m)}),\ w_2 = f^{m-2}(u_2^{(m)}), \ldots, w_m = u_1^{(m)} \\
&\vdots \\
&w_{m+1} := f^{m-1}(u_2^{(m)}),\ w_{m+2} = f^{m-2}(u_2^{(m)}), \ldots, w_{2m} = u_2^{(m)} \\
&\vdots \\
&w_{mk_m+1} := f^{m-2}(u_1^{(m-1)}), \ldots, w_{mk_m+m-1} := u_1^{(m-1)} \\
&\vdots \\
&w_{n-k_1+1} := u_1^{(1)} \\
&\vdots \\
&w_n := u_{k_1}^{(1)}
\end{aligned}$$

Die Vektoren aus der ersten Spalten gehören zu $U_1 = \ker f$, haben also das f-Bild Null. Im übrigen ist in jeder Zeile jeder Vektor das f-Bild seines Nachfolgers. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt also: $\beta_i w_i = f(w_{i+1}),\ \beta_i \in \{0, 1\}$. Daher ist $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis der gewünschten Art.

3.

4.7 Satz: Es sei V ein endlich dimensionaler VR über K, $f \in End(V),\ \lambda \in K$ ein EW von f der algebraischen VFH r. Wenn das charakteristische Polynom p_f über K in Linearfaktoren zerfällt, dann gibt es eine direkte Summenzerlegung. $V = U \oplus W$, so daß gilt:

i $W = \ker(f - \lambda id_V)^r$,

ii $\dim W = r$,

iii $f(W) \subset W,\ f(U) \subset U$,

iv $p_{f|_W}(x) = (\lambda - x)^r$,

v $(f|_W - \lambda id_W)^r = 0$.

4.8 Satz: Es sei V ein endlich dimensionaler VR über K, $f \in End(V),\ p_f$ zerfalle über K in Linearfaktoren: $p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - x)^{r_k}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, so daß gilt $(i = 1, \ldots, k)$:

i $W_i = \ker(f - \lambda_i id_V)^{r_i}$,

ii $\dim W_i = r_i$,

iii $f(W_i) \subset W_i$,

iv $p_{f|_{W_i}}(x) = (\lambda_i - x)^{r_i}$,

v $(f|_{W_i} id_{W_i})^{r_i} = 0$.

Beweis: Induktion über K.
Im Fall k=1 hat f nur einen Eigenwert λ der Vielfachheit n.
In 4.7 ist in der direkten Zerlegung $V = U \oplus W$ wegen $\dim W = n$: $U = \{0\}$.
Es sei nun $k \geq 2$. Aus 4.7 erhält man zum Eigenwert λ_1 eine Zerlegung $V = W_1 \oplus U$, so daß für $i = 2$ die Aussagen (i)-(v) gelten. Aus Basen für W_i und U füge man eine Basis für V zusammen. Wegen $f(W_1) \subset W_1, f(U) \subset U$ hat die Matrix von f bzgl. dieser Basis die Gestalt (vgl. 4.9) :

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Wo in den *-Kästen die Matrizen von $f|_{W_1}$ bzw. $f|_U$ bzgl. der gewählten Basen stehen. Daraus folgt: $p_f(x) = p_{f|_{W_1}}(x) \cdot p_{f|_U}(x)$, also $p_{f|_U}(x) = (\lambda_2 - x)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - x)^{r_k}$.
Nach Ind.Ann. gibt es eine Zerlegung $U = W_2' \oplus \ldots \oplus W_k'$ mit $W_i' = \ker(f|_U - \lambda_i id_U)^{r_i}$, $i = 2, \ldots, k$.
Für $W_i = \ker(f - \lambda_i id_V)^{r_i}$ gilt dann $W_i' \subset W_i$, und wegen $\dim W_i = \dim W_i' = r_i$ folgt $W_i' = W_i$: Daher ist $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ und die Eigenschaften (i)-(v) für $i = 2, \ldots, k$ folgen aus der Ind.Ann.

4.9 Lemma Es seien $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, $f \in End(V)$, $\mathcal{A}_\chi = (v_1^{(\chi)}, \ldots, v_{n_\chi}^{(\chi)})$ eine Basis für W_χ, $\mathcal{A} = (v_1^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}, v_1^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)}) = (v_1, \ldots, v_n)$, $n = m + \ldots + n_k$. Wenn $f(W_\chi) \subset W_\chi$, $\chi = 1, \ldots, k$, und wenn $A^{(\chi)} = \mathcal{M}(f|_{W_\chi})_{\mathcal{A}_\chi, \mathcal{A}_\chi})$,

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^{(1)}} & & & 0 \\ & \boxed{A^{(2)}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A^{(k)}} \end{pmatrix}$$

und $\det A = \det(A - 1) \cdot \ldots \cdot \det A_k$.
Beweis:Aus $f(W_\chi) \subset W_\chi$ folgt:

$$f(v_j^{(\chi)}) = \sum_{i=1}^{n_\chi} a_{ij}^{(\chi)} v_i^{(\chi)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \ , \ j = 1, \ldots, n_\chi$$

Zu $\det A = \det A_1 \det A_2$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$

kann durch Zeilen- und Spaltenumformungen so transformiert werden, daß A_1 in eine obere Dreiecksmatrix übergeht, und A_2 dabei unverändert bleicht. Entsprechend kann man mit A_2 verfahren, erhält man ein Dreiecksmatrix. Deren Determinante ist das Produkt der Diagonal-Elemente. Entsprechendes gilt für die Untermatrizen.

Kapitel 7

Euklidische und unitäre Vektorräume

Skalarprodukt : $x = (x_1, .., x_n), \quad y = (y_1, .., y_n) \in R^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \in R, \quad \|x\| = +\sqrt{\langle x, x\rangle} = +\sqrt{x_1^2 + .. + x_n^2}$$

In diesem Kapitel sei stets $K \in \{R, C\}$

7.1 Vektorräume mit Skalarprodukt (SKP)

1.1 Definition: Sei V ein VR über K. Eine Abbildung $\langle .., .. \rangle : V \times V \to K$ heißt Skalarprodukt auf V, wenn gilt:
(SK1): Für jedes $w \in V$ ist die Abb. $v \mapsto \langle v, x\rangle$ eine Linearform auf V.
(SK2): Für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$ (Hermitizität).
(SK3): Für alle $v \in V - \{0\}$ ist $\langle v, v\rangle > 0$ (positive Definitheit)

1.2 Bemerkungen: i Aus (SK2) folgt für $v \in V : \langle v, v\rangle \in R$. Daher ist (SK3) sinnvoll auch für K=C.

ii (SK1) bedeutet: für alle $u, v, w \in V,\ \alpha, \beta \in K$ ist

$$\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle \ .$$

Im Fall K=R folgt aus (SK2) auch die Linearität im zweiten Faktor. Dann ist $\langle .., .. \rangle$ eine Bilinearform auf V. Im Fall K=C gilt für alle $u, v, w \in V,\ \alpha, \beta \in C$:

$$\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \overline{\langle \alpha v + \beta w, u\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\beta}\overline{\langle w, u\rangle} = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle + \overline{\beta}\langle u, w\rangle$$

semilinear im zweiten Faktor. Sesquilinear.

1.1' Definition: Ein Skalarprodukt auf einem R- (bzw. C-) VR ist eine positiv definite symmetrische (bzw. hermitesche) Bilinear-(bzw. Sesquilinear-)Form.

1.3 Beispiele: i $V = R^n, \quad v = (v_1, .., v_n), \quad w = (w_1, .., w_n) \in R^n$

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \quad , \ \langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \quad , \ \langle 0, v\rangle = 0$$

ii $V = C^n, \quad v, w, .. \in C^n$

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_1\overline{w_i} \quad , \ \langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i\overline{v_i} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \geq 0$$

Standard-Skalarprodukte

iii $V = C^0[a, b]$ stetige Funktionen mit Werten in K.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \qquad \text{SKP auf V}$$

(SK1), (SK2) leicht.
(SK3): Zu zeigen ist: Wenn f reell, ≥ 0 ist und $\int_a^b f(t)dt = 0$, dann ist $f \equiv 0$.
Andernfalls gibt es ein $t_0 \in [a, b]$ mit $f(t_0) \neq 0$, also $c = f(t_0) > 0$. Da f in t_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - t_0| < \delta$ gilt: $|f(t) - f(t_0)| < \frac{c}{2}$. Für diese t ist $f(t) > \frac{c}{2}$. Es folgt:

$$\int_a^b f(t)dt \geq 2\delta \cdot \frac{c}{2} = \delta \cdot c > 0 \quad .$$

iv $A \in \mathcal{M}(n, n; C)$ heißt hermitesch, wenn $A = \overline{A^t}$, also $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Setze für $v = (v_1, .., v_n)$, $w = (w_1, .., w_n) \in C^n$

$$\langle x, y\rangle = x \cdot A \cdot \overline{y^t} \ .$$

Dies ist eine Sesquilinearform auf C^n, i.a. nicht positiv definit.
Im Fall einer reellen Matrix mit $A = A^t$ liefert dies eine symmetrische Bilinearform.

1.4 Definition: Es sei V ein VR über K mit Skalarprodukt $\langle .., ..\rangle$.

i Im Fall K=R heißt V ein euklidischer VR.

ii Im Fall K=C heißt V ein unitärer VR.

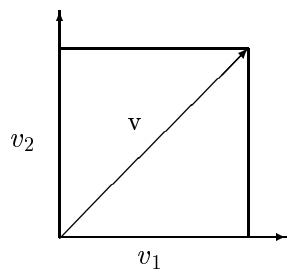
1.5 Definition: Sei V ein euklidischer oder unitärer VR.

i $v, w \in V$ heißen orthogonal (senkrecht), wenn $\langle v, w\rangle = 0$.

ii Eine Familie von Vektoren $\{v_i\}_{i\in I}$ aus V heißt orthogonal, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

iii Für $v \in V$ heißt die reelle Zahl

$$\|v\| = +\sqrt{\langle v, v\rangle} \qquad \text{die Norm (oder Länge) von v.}$$



1.6 Satz: Ist V ein euklidischer oder unitärer Raum, dann gilt für alle $v, w \in V$

i $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2Re\langle v, w\rangle + \|w\|^2$

ii $v \perp w \Rightarrow \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (Satz des Pythagoras)

iii $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ (Parrallelogramm-Gleichung)

iv $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| + \|w\|$ (Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung)

v $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis:

i $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v, v+w\rangle + \langle w, v+w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2Re\langle v, w\rangle + \|w\|^2$

ii folgt aus (i)

iii $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2Re\langle v, w\rangle + \|w\|^2$

iv Für $w = 0$ gilt sie in der Form 0=0. Für $w \neq 0,\ \alpha \in K$:
$0 \leq \langle v - \alpha w, v - \alpha w\rangle = \|v\|^2 - \langle v, \alpha w\rangle - \langle \alpha w, v\rangle + \langle \alpha w, \alpha w\rangle = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, w\rangle - \alpha\overline{\langle v, w\rangle} + \alpha\overline{\alpha}\|w\|^2$
Wähle $\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}$:

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2} - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}$$

v

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \|v\|^2 + 2Re\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

1.7 Beispiel: $C^n = R^{2n},\ z, w \in C^n,\ z = (z_1, .., z_n),\ w = (w_1, .., w_n)$

$$\langle z, w\rangle_{C^n} = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} \quad z_k = x_k + iy_k, \quad w_k = u_k + iv_k$$

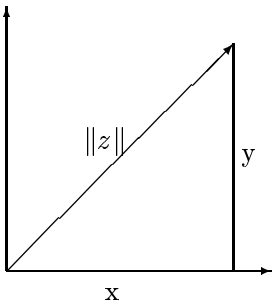
$$\langle z, w\rangle_{R^{2n}} = \sum_{k=1}^{n} (x_k u_k + y_k v_k) = Re\langle z, w\rangle_{C^n}$$

$\underline{k = 1:}$ $\quad C = R^n, \quad \langle z, w\rangle_C = z\overline{w}, \quad \langle z, w\rangle_{R^{2n}} = Re \quad z\overline{w}$

$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z} = |z|$

$|z + w| \leq |z| + |w|$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$



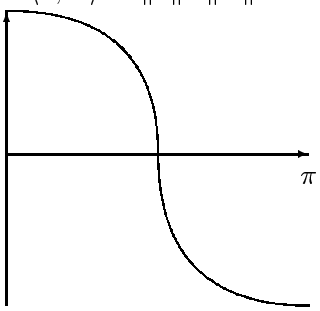
1.8 Definition: Es sei V ein euklidischer VR, $v, w \in V - \{0\}$. Dann ist

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \ , \ \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \in [-1, 1]$$

Es gibt daher genau ein $t \in [0, \pi]$ mit

$$\cos t = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} t = \angle(v, w)$$

heißt der Winkel zwischen v und w.
Beachte: $\langle v, w\rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cos \angle(v, w) \quad , \ v \perp w \Leftrightarrow \angle(v, w) = \frac{\pi}{2}$



1.9 Definition: Es sei V ein euklidischer oder unitärer Raum.

i Ein System $\{v_i\}_{i \in I}$ von Vektoren aus V heißt Orthogonalsystem (ON-System), wenn für alle $i, j \in I$ gilt:

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$$

ii Ein ON-System, das eine Basis für V ist, heißt Orthogonalbasis (ON-Basis)

1.10 Lemma: Dieses ON-System ist linear unabhängig.
Beweis: Ist $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, folgt für $i = 1, .., n$:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_i\rangle = 0$$

Denn: $\alpha_1 = \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_i\rangle + \ldots + \alpha_n \langle v_n, v_i\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_i\rangle = 0$

1.11 Satz: Es sei V ein euklidischer oder unitärer VR, $\{w_1, w_2, \ldots\}$ eine endliche oder abzählbar unendliche linear unabhängige Menge in V. Dann gibt es ein ON-System $\{v_1, v_2, \ldots\}$ für V, so daß für jedes n gilt:

$$\text{Span } \{v_1, .., v_n\} = \text{ Span } \{w_1, .., w_n\}$$

Beweis: Setze $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$. Wenn die orthonormalen Vektoren $v_1, .., v_n$ schon konstruiert sind, setze

$$v'_{n+1} = w_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle w_{n+1}, v_k\rangle v_k \ .$$

Es ist $\langle v'_{n+1}, v_i\rangle = \langle w_1 - \sum_{k=1}^{n} \langle w_{n+1}, v_k\rangle v_k, v_i\rangle = \langle w_{n+1}, v_i\rangle - \langle w_{n+1}, v_i\rangle = 0$.
Ferner ist $v'_{n+1} \neq 0$, da wegen Span $\{v_1, .., v_n\} =$ Span $\{w_1, .., w_n\}$ der Vektor w_{n+1} nicht aus $w_1, .., v_n$ linear konstruiert werden kann.
Setze $v_{n+1} = \frac{v'_{n+1}}{\|v'_{n+1}\|}$.
Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren.

1.12 Folgerung: Jeder endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Raum besitzt eine ON-Basis.

1.13 Beispiele: i Einheitsbasis $\{e_1, .., e_n\}$ ist ON-Basis in K^n bzgl. der Standard-Skalarprodukte.

ii Im VR $C^0[a,b](\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \qquad , L = b-a$

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i(n-m)t}{L}}\Big|_a^b \qquad , n \in Z$$

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_a^b f_n(t)\overline{f_m(t)}dt = \frac{1}{L}\int_a^b e^{\frac{2\pi i(n-m)t}{L}}dt = \delta_{nm}$$

$$m \neq m, \quad \frac{1}{\frac{2\pi(n-m)}{L}} e^{\frac{2\pi i(n-m)t}{L}}\Big|_a^b = 0$$

1.14 Definition: Es sei W ein Teilraum eines euklidischen oder unitären VR V. Dann setzt man

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \quad \text{für alle } w \in W\}.$$

1.15 Satz: i $W^\perp$ ist Unterraum von $V - \{i\}$

ii Wenn dim $V < +\infty$ ist, dann gilt:

$$V = W \oplus W^\perp$$

Beweis:

i trivial

ii Man wähle eine Basis für W, ergänze zu einer Basis für V. Orthonormalisiere diese Basis für V. $\{w_1, .., w_m\}$ Basis für W, $\{w_1, .., w_m, w_{m+1}, .., w_n\}$ Basis für V. Orthonormalisiere diese Basis für V. $\{v_1, .., v_n\}$ ON-Basis für V. Dann ist $v_1, .., v_m$ ON-Basis für W. Ferner ist $\{v_{m+1}, .., v_n\}$ ON-Basis für $W^\perp$. Zunächst sind $v_{m+1}, .., v_n$ senkrecht zu W, gehören also zu $W^\perp$. Daß sie $W^\perp$ erzeugen, sieht man so: Ist $w \in W^\perp$, $w = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n$, dann ist $\langle w, v_i\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n, v_i\rangle = \alpha_i\langle v_i, v_i\rangle = \alpha_i = 0$. Daher ist $w = \alpha_{m+1}v_{m+1} + .. + \alpha_n v_n$.

1.16 Satz: Es sei V ein euklidischer oder unitärer VR, $\{v_1, .., v_n\}$ ON-Basis für V. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

i $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle v_i$ (Fourier-Entwicklung)

ii $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle\overline{\langle w, v_i\rangle}$ (Parsevalsche Identität)

iii $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i\rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung)

$$V = K^n \ , e_1, .., e_n \ , v = \sum_{k=1}^n a_k e_k \ , a_k = v_k = \langle v, e_k\rangle = (v_1, .., v_n)$$

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n v_i\overline{w_i} = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle\overline{\langle w, e_i\rangle}$$

Beweis:

i Es sei $w = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$. Dann ist für k=1,..,n:

$$\begin{aligned} \langle v - w, v_k \rangle &= \langle v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i, v_k \rangle \\ &= \langle v, v_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \langle v, v_k \rangle - \langle v, v_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\langle v - w, v - w \rangle = \langle v - w, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \langle v - w, v_k \rangle = 0 \ \Rightarrow v = w$$

ii $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i \ w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, v_i \rangle v_i$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i, \sum_{k=1}^{n} \langle w, v_k \rangle v_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \overline{\langle w, v_k \rangle} \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \overline{\langle w, v_i \rangle} \end{aligned}$$

iii Setze in (ii): $v = w$.

1.17 Lemma: Ist $\{v_i\}_{i \in I}$ eine ON-Basis für V, und ist $v \in V$ mit $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $i \in I$, dann ist $v = 0$.
Beweis: Es gibt $v_1, .., v_n, \ \alpha_1, .., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n$. Für $i = 1, .., n$ ist $\langle v, v_i \rangle = 0$, daher $0 = \langle v, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle = \alpha_i$. Daher: $v = 0$.

1.18 Satz: (Riesz-Fischer)
Ist V ein endl.-dim. euklidischer oder unitärer Raum, $f \in V^*$ eine Linearform auf V, dann gibt es genau ein $w \in V$, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$f(v) = \langle v, w \rangle = f_w(v)$$

Beweis: Es sei $\{v_1, .., v_n\}$ ON-Basis für V, $\alpha_k = \overline{f(v_k)}, \ w = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n$. für jedes $v \in V$ ist $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + .. + \langle v, v_n \rangle v_n$,

$$\begin{aligned} f(v) &= \langle v, v_1 \rangle f(v_1) + .. + \langle v, v_n \rangle f(v_n) \\ &= \langle v, v_1 \rangle \overline{\alpha_1} + .. + \langle v, v_n \rangle \overline{\alpha_n} \\ &= \langle v, v_1 \rangle \langle w, v_1 \rangle + .. + \langle v, v_n \rangle \overline{\langle w, w_n \rangle} \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Ist $w' \in V$ mit $f(v) = \langle v, w' \rangle$ für alle $v \in V$, dann ist $\langle v, w - w' \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Insbesondere $\langle w - w', w - w' \rangle = 0 \Rightarrow w = w'$.

$$f \in V^*, \ f = f_w, \ w \in V, \ f_W(v) = \langle v, w \rangle$$

1.19 Fogerung: Die Zuordnung $w \mapsto f_W, \ V \to V^*$, ist eine semilineare bijektive Abbildung.
Beweis: Addition und Semilinearität ist klar.

Surjektivität nach Riesz-Fischer.
Injektivität: $f_w = f_u$, $u, w \in V$

$$\begin{aligned} & f_w(v) = f_u(v) \quad \text{für alle } v \in V \\ & \langle v, w\rangle = \langle v, u\rangle \quad \text{für alle } v \in V \\ & \langle v, u-w\rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V \\ \Rightarrow \quad & \langle u-w, u-w\rangle = 0 \ \Rightarrow u = w \end{aligned}$$

$v_1, .., v_n$ Basis von V; $v_1^*, .., v_n^*$ duale Basis von V^* : $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

7.2 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

2.1 Definition: Es sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) VR. Ein Endomorphismus $f \in End(V)$ heißt orthogonal (bzw. unitär), wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

2.2 Satz: Ist V ein euklidischer (bzw. unitärer) VR, $f \in End(V)$ orthogonal (bzw. unitär), dann gilt:

i $\|f(v)\| = \|v\|$ (Längentreue)

ii $\angle(f(v), f(w)) = \angle(v, w)\, v, w \in V$ (Winkeltreue)

iii f ist injektiv

iv Falls $\dim V < +\infty$, dann ist $f \in Aut(V)$ und f^{-1} ist ebenfalls orthogonal (bzw. unitär)

v Ist λ ein Eigenwert von f, dann ist $|\lambda| = 1$.

Beweis:

i $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$

ii $[-1, 1] \ni \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \cos\angle(v, w)$

iii $f(v) = 0 \Rightarrow 0 = \|f(v)\| = \|v\| \Rightarrow v = 0$
$Kerf = \{0\} \Rightarrow f$ injektiv

iv Im Fall endlicher Dimension folgt aus der Injektivität die Surjektivität.

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \langle f \circ f^{-1}(v), f \circ f^{-1}(w)\rangle \\ &= \langle f^{-1}(v), f^{-1}(w)\rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ orthogonal (bzw. unitär)

v Ist λ Eigenwert von f, dann gibt es ein $v \in V - \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$. Dann ist $\langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle$. Da $\langle v, v\rangle > 0$ ist, folgt $|\lambda| = 1$.

$f \in End(V)$, $(v_1, .., v_n) = \mathcal{A}$ geordnete Basis von V, A = $\mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$,
$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, $j = 1, .., n$

2.3 Definition: i Eine Matrix $A \in GL(n, R)$ heißt orthogonal, wenn $A^{-1} = \overline{A^t}$ ist. (Äquivalente Fassung: $A \in \mathcal{M}(n, n; R)$ heißt orthogonal, wenn $A \cdot A^t$ =E ist.)
Gesamtheit: Orthogonale Gruppe O(n)

ii Eine Matrix $A \in GL(n,C)$ heißt unitär, wenn $A^{-1} = \overline{A^t}$ ist. (Äquivalente Form: $A = \mathcal{M}(n,n;C)$ heit unitär, wenn $A \cdot \overline{A^t} = E$ ist.)
Gesamtheit: U(n) Unitäre Gruppe

2.4 Satz: i O(n), U(n) sind multiplikative Gruppen

ii Für jedes $A \in U(n)$ ist $|\det A| = 1$

iii $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ ist Normalteiler in O(n). Spezielle Orthogonale Gruppe. H Normalteiler in G $\Leftrightarrow$ 1. H Untergruppe von G, 2. gH = Hg für alle $g \in G$

Beweis:

i Für $A, B \in U(n)$ ist

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \overline{B^t} \cdot \overline{A^t} = \overline{(A \cdot B)^t} \Rightarrow A \cdot B \in U(n)$$
$$(A^{-1})^{-1} = A = \overline{(A^{-1})^t} \Rightarrow A^{-1} \in U(n)$$

ii

$$\begin{aligned} |\det A|^2 &= |\det A| \cdot \overline{|\det A|} \\ &= \det A \cdot \det \overline{A^t} \\ &= \det(A \cdot \overline{A^t}) = \det E = 1 \end{aligned}$$

iii SO(n) ist der Kern des Gruppenhomomorphismus $\det : O(n) \to \{-1, 1\}$

2.5 Satz: Es sei V endlich-dimensionaler euklidischer (bzw. unitärer) VR, $\mathcal{A} = (v_1, .., v_n)$ eine ON-Basis für V, $f \in End(V)$, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$. Dann gilt:
f ist orthogonal (bzw. unitär) $\Longleftrightarrow A \in O(n)$ (bzw.$A \in U(n)$).
Beweis:

i f ist orthogonal (bzw unitär) genau dann, wenn $\{f(v_1), .., f(v_n)\}$ ON-Basis ist. Die eine Richtung ist klar, denn $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. Ist andererseits $\{f(v_1), .., f(v_n)\}$ ON-Basis, und sind $v, w \in V$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(w)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle f(v_i), \sum_{k=1}^{n} \langle w, v_k\rangle f(v_k) \right\rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \langle v, v_i \cdot \overline{\langle w, v_k\rangle} \underbrace{\langle f(v_i), f(v_k)\rangle}_{\delta_{ik}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \overline{\langle w, v_i\rangle} = \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

Daher ist f orthogonal bzw. unitär.

ii A ist gegeben durch $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \qquad , j = 1, .., n$.

$$\begin{aligned} \langle f(v_j), f(v_k)\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kk} v_k\rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ij} \overline{a_{kk}} \underbrace{\langle v_i, v_k\rangle}_{\delta_{ik}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overline{a_{ik}} \ , A^* = \overline{A^t} = (a_{ij}^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^* \cdot a_{ij} = (\overline{A^t} \cdot A)_{kj} \end{aligned}$$

Es folgt: f orthogonal (bzw. unitär)
$\Longleftrightarrow \{f(v_1), .., f(v_n)\}$ ON-Basis
$\Longleftrightarrow \overline{A^t} \cdot A = E \Leftrightarrow A \in O(n)$ (bzw. $U(n)$)

2.6 Satz: (Spektralsatz für unitäre Endomorphismen)
Ist f ein unitärer Endomorphismus eines unitären endlich dimensionalen VRs V, dann besitzt V eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f.
Beweis: Durch Induktion über n= dim V. Für n = 0 ist nichts zu zeigen.
Es sei also $n \geq 1$ und $p_f(x) = (x - \lambda_1) \cdot .. \cdot (x - \lambda_n)$, $\lambda_1, .., \lambda_n \in C$. Wir wählen einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ_1 (d.h. $v_1 \neq 0, \quad f(v_1) = \lambda_1 v_1$).
Setze $W = \{w \in V : \langle w, v_1 \rangle = 0\}$. W ist (n-1)-dim. Unterraum von V. Wir zeigen, daß dann $f(w) \subset W$ ist. Wenn $w \in W$ ist, dann gilt:

$$\overline{\lambda_1}\langle f(w), v_1 \rangle = \langle f(w), \lambda_1 v_1 \rangle = \langle f(w), f(v_1) \rangle = \langle w, v_1 \rangle = 0$$

Da $|\lambda| = 1$ ist, folgt $\lambda_1 \neq 0$, also $\langle f(w), v_1 \rangle = 0, \ f(w) \in W$.
Der Endomorphismus $f|_W : W \to W$ ist wieder unitär und es ist dim W = n-1. Nach Induktions-Annahme gibt es eine ON-Basis $\{v_2, .., v_n\}$ von W aus Eigenvektoren von f. $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ ist ON-Basis für V aus Eigenvektoren von f.

2.7 Folgerung: Jeder unitäre Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären VR ist diagonalisierbar.
Beweis: f ist diagonalisierbar genau dann, wenn eine Basis aus Eigenvektoren von f existiert.

2.8 Folgerung: Zu jedem $A \in U(n)$ gibt es ein $S \in U(n)$, so daß gilt:

$$\overline{S^t} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \ , \lambda_i \in C \ , |\lambda_i| = 1 \ , i = 1, .., n.$$

Beweis: Zu $A : C^n \to C^n$ gibt es eine ON-Basis aus Eigenvektoren. Diese nehmen wir als Spalten von S. $S \in U(n)$.

$$\overline{S^t} = S^{-1} \ , \ S \cdot S^{-1} = E \ , \ S = (s_{ij}) \ , \ \overline{S^t} = S^* = (s^*_{ij})$$

$$\begin{aligned} (s \cdot \overline{s}^t)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} s_{ik} s^*_{kj} \ , s^*_{kj} = \overline{s_{jk}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} s_{ik} \overline{s_{jk}} = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij} \ , a_i = \begin{pmatrix} s_{i1} \\ \vdots \\ s_{in} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemma: $S \in \mathcal{M}(n, n; K)$ ist orthogonal (bzw. unitär) genau dann, wenn ihre Spalten (oder Zeilen) eine ON-Basis von K^n bilden. Beweis: s.o. (2.8)
$A \cdot S = S \cdot D = D \cdot S$; a_i = i-te Spalte von S; $A \cdot a_i = \lambda_i a_i$.

2.9 Satz: Es sei $A \in O(2)$. Dann gilt entweder:
Fall 1: $\det A = 1$; es gibt genau ein $\varphi \in R$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, so daß

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

A bewirkt eine Drehung des R^n um den Winkel φ. Es gilt

$$p_A(x) = x^2 - 2x \cdot \cos\varphi + 1,$$

und außer in den Fällen $\varphi = 0,\ A = E$ und $\varphi = \pi,\ A = -E$ hat A keine reellen Eigenwerte.
Fall 2: det A = -1. Es gibt genau ein $\varphi \in R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Es gilt $p_A(x) = (x-1)(x+1)$; A besitzt also die reellen Eigenwerte -1,1. Geometrisch bewirkt A eine Spiegelung an der Gerade $E_1(A)$. Die Gerade $E_2(A)$ steht senkrecht darauf.
Beweis:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; a, b, c, d \in R$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gibt eindeutig bestimmte $\varphi, \varphi' \in R,\ 0 \leq \varphi, \varphi' < 2\pi$, mit
$a^2 + c^2 = 1 \quad a = \cos\varphi,\ c = \sin\varphi,$
$b^2 + d^2 = 1 \quad b = \sin\varphi',\ d = \cos\varphi'$
Aus $ab - cd = 0$ folgt: $\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi' = \sin(\varphi + \varphi') = 0$.
Daraus folgt (da $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in Z$): $\varphi + \varphi' = k\pi,\ k \in Z$.
Je nachdem k gerade oder ungerade ist, ergibt sich

$$I \quad \varphi' = -\varphi + 2k\pi,\ \sin\varphi' = -\sin\varphi,\ \cos\varphi' = \cos\varphi \quad \text{oder}$$
$$II \quad \varphi' = -\varphi + (2k+1)\pi,\ \sin\varphi' = \sin\varphi,\ \cos\varphi' = -\cos\varphi$$
$$I \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$II \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Fall 1: $$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & +\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos t - \sin\varphi\sin t \\ \sin\varphi\cos t + \cos\varphi\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+t) \\ \sin(\varphi+t) \end{pmatrix}$$

Fall 2: $$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos t + \sin\varphi\sin t \\ \sin\varphi\cos t - \cos\varphi\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi-t) \\ \sin(\varphi-t) \end{pmatrix}$$

Die Gerade $t = \frac{\varphi}{2}$ ist die Fixgerade $E_1(A)$, während auf der Geraden $t = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$ jeder Punkt in sein Negatives übergeht.

$$A^2 = E\ ;\ A\left(\frac{1}{2}(x + Ax)\right) = \frac{1}{2}(Ax + A^2x) = \frac{1}{2}(x + Ax) \Rightarrow \frac{1}{2}(x + Ax) \in E_1(A)$$

2.10 Folgerung: Ist $A \in O(2),\ \det A = -1$, dann gibt es ein $S \in O(2)$, so daß

$$S^tAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.11 Satz: Es sei V ein endl.-dim. euklidischer VR und $f \in End(V)$ orthogonal. Dann gibt es eine ON-Basis $\mathcal{A}$ für V, so daß die Matrix $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$ die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & 0 & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & -1 & & \\ & & & & & & \boxed{A_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix},$$

wobei für $i = 1, .., k$ gilt: $A_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$, $0 < \alpha_i < 2\pi,\ \alpha_i \neq \pi$.

Beweis:

i Zunächst zeigen wir: Ist V ein VR über R mit $1 \leq \dim V < \infty,\ f \in End(V)$, dann gibt es einen Unterraum $W \subset V$ mit $f(W) \subset W$ und $1 \leq \dim W \leq 2$.
Wenn das charakteristische Polynom p_f eine Nullstelle hat, besitzt f diese als Eigenwerte, und damit hat man einen 1-dimensionalen invarianten Unterraum.
Im anderen Fall zerfällt das Polynom in das Produkt quadratischer Polynome über R: $p_f = p_k \cdot .. \cdot p_1$. Nach dem Satz von Cauchy-Hamilton ist $p_f(f) = 0$, also $p_f(f)(w) = 0$ für alle $w \in V$.
Es sei $w \neq 0$ und i die kleinste natürliche Zahl, für die gilt:
$p_i(f) \circ p_{i-1}(f) \circ \ldots \circ p_1(f)(w) = 0$,
aber $v = p_{i-1}(f) \circ \ldots \circ p_1(f)(w) \neq 0$. Es ist $p_i(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in R,\ \alpha \neq 0$, und aus $p_i(f)(v) = 0$ folgt: $\alpha f(f(v)) + \beta f(v) + \gamma v = 0$.
Es folgt $f^2(v) \in Span(v, f(v))$. Daher hat $W = \{v, f(v)\}$ die gewünschten Eigenschaften, denn $f(\lambda v + \mu f(v)) = \lambda f(v) + \mu f^2(v) \in W$ also $f(W) \subset W$.

ii Wir beweisen den Satz durch Induktion über n= dim V. Für n = 0 ist nichts zu beweisen.
Für $n \geq 1$ gibt es nach (i) einen Unterraum $W \subset V$ der Dimension 1 oder 2 mit $f(W) \subset W$, also $f(W) = W$, da $f \in Aut(V)$. Daraus folgt: $f(W^\perp) = W^\perp$, denn für $w \in W,\ v \in W^\perp$ ist $\langle f(v), w\rangle = \langle f^{-1}f(v), f^{-1}(w)\rangle$ (= da f^{-1} orthogonal) = $\langle v, f^{-1}(w)\rangle = 0$, da $f^{-1}(w) \in W$.
Nach Ind.-Ann. gilt die Behauptung für $g = f|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ (dim $W^\perp \in \{n-1, n-2\}$). In $W^\perp$ gibt es also eine ON-Basis $\mathcal{A}''$ bzgl. derer g durch eine Matrix der behaupteten Gestalt dargestellt wird.
Ist dim $W = 1,\ v \in V,\ \|v\| = 1$, dann ergänze $\mathcal{A}''$ durch v zu einer ON-Basis von V. Es ist $f(v) = \pm v$. Durch Umnumerierung erreicht man der Gewünschte.
Ist dim $W = 2,\ h = f|_W : W \to W$, dann gibt es eine Basis $\mathcal{A}'$ für W, so daß $B = \mathcal{M}(h_{\mathcal{A}',\mathcal{A}'})$ die Form $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $0 < \alpha < 2\pi,\ \alpha \neq \pi$ ... $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$.

7.3 Selbstadjungierte und normale Endomorphismen

3.1 Satz: Es sei V ein endl.-dim. euklidischer oder unitärer VR, $f \in End(V)$. Dann existiert genau ein $f^* \in End(V)$, so daß für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.$$

Beweis: Es sei $w \in W$ fest. Die Abbildung $\varphi : V \to K,\ \varphi(v) = \langle f(v), w\rangle,\ v \in V$ ist eine Linearform $\varphi \in V^*$.

$$\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \langle f(\alpha v_1 + \beta v_2), w\rangle = \alpha\langle f(v_1), w\rangle + \beta\langle f(v_2), w\rangle = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2)$$

Nach 1.18, 1.19 gibt es genau ein $u \in V$, so daß für alle $v \in V$ gilt: $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$. Setze $f^*(w) = u$. Damit ist $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$.
Bleibt zu zeigen, daß f^* linear ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}\langle v, f^*(\alpha w_1, \beta w_2)\rangle &= \langle f(v), \alpha w_1 + \beta w_2\rangle = \overline{\alpha}\langle f(v), w_1\rangle + \overline{\beta}\langle f(v), w_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle v, f^*(w_1)\rangle + \overline{\beta}\langle v, f^*(w_2)\rangle \\ &= \langle v, \alpha f^*(w_1) + \beta f^*(w_2)\rangle \text{ für alle } v \in V,\ w_1, w_2 \in V,\ \alpha, \beta \in K\end{aligned}$$

Wir haben zwei Darstellungen einer Linearform:

$$\begin{aligned} v &\longmapsto \langle v, f^*(\alpha w_1, \beta w_2)\rangle \\ v &\longmapsto \langle v, \alpha f^*(w_1) + \beta f^*(w_2)\rangle\end{aligned}$$

Es folgt (wegen der Eindeutigkeit der Darstellung $\varphi(v) = \langle v, w\rangle$ (s.o.))
$f^*(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f^*(w_2) - \beta f^*(w_2)$, also $f^* \in End(V)$.
Zur Eindeutigkeit von f^*: Wäre $g \in End(V)$, so daß für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle$. Dann ist $\langle v, g(w)\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle,\ \langle v, g(w) - f^*(w)\rangle = 0,\ g = f^*$.

3.2 Definition: f^* heißt der zu f adjungierte Endomorphismus.

3.3 Beispiel: $A \in \mathcal{M}(n, n; K),\ f_A(x) = A \cdot x,\ f_A \in End(K^n),\ \langle .., ..\rangle$ Standardskalarprodukt, $A^* = \overline{A^t}$.

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(Ax)_i \cdot \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k)\overline{a y_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{(\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ik}} y_i)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a^*_{ki} y_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{(A^*y)_k} = \langle x, A^*y\rangle\end{aligned}$$

Also: $f^*_A = f_{A^*}$.

3.4 Bemerkung: In LAI war der Begriff der dualen Abbildung zu einem $f \in \hom(V, W)$ vorgekommen, V, W endl. VR. Die duale Abb. $f^{du} : W^* \to V^*$ war definiert durch $f^{du}(\varphi) = \varphi \circ f,\ \varphi \in W^* \subset V^*$ wegen $f \in \hom(V, W)$.
Im Fall euklidischer oder unitärer Räume hat man ferner (nach 1.18, 1.19) semilineare Abbildungen $s : V \to V^*,\ t : W \to W^*,\ u \to \langle .., u\rangle$, die bijektiv sind. Setzt man: $f^* = s^{-1} \circ f^{du} \circ t$, macht also folgendes Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{f^*} & W \\ s\downarrow & & \downarrow t \\ V^* & \xleftarrow{f^{du}} & W \end{array}$$

Es ist $f^* \in \hom(W,V)$. Im Fall W=V liefert dies die vorherige Definition der adjungierten Abb.

3.5 Definition: Vor. wie oben, $f \in End(V)$.

i f heißt selbstadjungiert, wenn $f = f^*$ (also: $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ $v, w \in V$)

ii f heißt normal, wenn $f \circ f^* = f^* \circ f$

Beispiele:

i selbstadjungierte Endomorphismen sind normal.

ii Falls f orthogonal (oder unitär) ist, gilt für alle $v, w \in V$:
$\langle f(v), w\rangle = \langle f(v), f \circ f^{-1}(w)\rangle = \langle v, f^{-1}(w)\rangle$. Es ist also $f^* = f^{-1}$. Daher ist f normal.

3.6 Satz: Es sei V ein endl.-dim. euklidischer oder unitärer Raum, $\mathcal{A} = (v_1, .., v_n)$ ON-Basis, $f \in End(V)$, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$, $A^* = \mathcal{M}(f^*_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$.
Dann gilt: $A^* = \overline{A^t}$
Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \\ f^*(v_j) = \sum_{i=1}^n a^*_{ij} v_i \end{array}\right\} j = 1, .., n$$

Es folgt:

$$a_{kj} = \langle f(v_j), v_k\rangle = \langle v_j, f^*(v_k)\rangle = \overline{a^*_{jk}} \Rightarrow a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$$

3.7 Folgerung und Definition: i Selbstadjungkierte Endomorphismen werden bezüglich ON-Basen durch Matrizen mit $A = A^t$ dargestellt. Solche heißen symmetrisch (bzw. hermiesch).

ii Für die Matrixdarstellung eines normalen Endomorphismus bzgl. einer ON-Basis gilt: $A \cdot \overline{A^t} = \overline{A^t} \cdot A$. Solche Matrizen heißen normal.

3.8 Satz: Ist V ein euklidischer oder unitärer Raum, $n = \dim V < \infty$, $f \in End(V)$ selbstadjungiert, dann ist:

$$p_f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n) \quad \lambda_1, .., \lambda_n \in R$$

Beweis:

i Im Fall K=C gilt zunächst (nach dem Fundamentalsatz der Algebra)
$p_f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)$; $\lambda_1, .., \lambda_n \in C$; λ_k Eigenwerte von f.
Es ist also zu zeigen, daß jeder EW reell ist. Ist $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, dann gilt:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$, da $\langle vv\rangle > 0$.

ii Der reelle Fall kann darauf zurückgeführt werden. Ist $\mathcal{A}$ irgendeine ON-Basis für V, $A = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$, dann ist A als reelle symmetrische Matrix auch hermitesch, beschreibt also bzgl. der kanonischen Basis einen selbstadjungierten Endomorphismus $C^n \to C^n$. A hat also n reelle EW, p_A zerfällt über R in Linearfaktoren. Wegen $p_f = p_A$ folgt die Behauptung.

3.9 Satz: (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen)
Es sei V ein endl.-dim. euklidischer oder unitärer VR, $f \in End(V)$ selbstadjungiert. Dann besitzt V eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f.
Beweis: Induktion nach n = dim V. Für n=0 klar. Sei also $n \geq 1$. Nach 3.8 ist

$p_f(x) = (x-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n) \qquad \lambda_1, .., \lambda_n \in R$
Es sei v_1 ein Eigenvektor zu λ_1, $\|v_1\| = 1$ und $W = \{w \in V : \langle w, v_1\rangle = 0\}$. W ist (n-1)-dim. Unterraum von V und es ist $f(W) \subset W$.
Für $w \in W$ ist $\langle f(w), v_1\rangle = \langle w, f(v_1)\rangle = \langle w, \lambda_1 v_1\rangle = \overline{\lambda_1}\langle w, v_1\rangle = 0$
Wende die Induktionsannahme an auf $f|_W : W \to W$ (selbstadjungiert)
f selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ für alle $v, w \in V : \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$
Man erhält eine ON-Basis $(v_2, .., v_n)$ von W aus Eigenvektoren von f; $(v_1, .., v_n)$ ist ON-Basis von V.

3.10 Folgerung: Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endl.-dim. euklidischen oder unitären Raumes ist diagonalisierbar.

3.11 Folgerung: Ist $A \in \mathcal{M}(n, n; K)$ eine symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix, dann gibt es $S \in O(n)$ (bzw. $U(n)$), so daß

$$\overline{S}^t A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad ; \lambda_1, .., \lambda_n \in R$$

3.12 Lemma: Es sei V ein endl.-dim. unitärer VR, $f \in End(V)$ normal. Dann gilt:

i $Kerf = Kerf^*$

ii $E_\lambda(f) = E_{\overline{\lambda}}(f^*)$, $\lambda \in C$

Beweis:

i Für alle $v \in V$ ist
$\langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f^* \circ f(v)\rangle = \langle v, f \circ f^*(v)\rangle = \langle f^*(v), f^*(v)\rangle$(Bem.: $f^{**} = f$)
Daraus folgt (i): $f(v) = 0 \Leftrightarrow f^*(v) = 0$.

ii Setze $g = f - \lambda\, id_V$. Es ist $g \circ g^* = (f - \lambda\, id_V)(f^* - \overline{\lambda}\, id_V) = f \circ f^* - \overline{\lambda} f - \lambda f^* + |\lambda|^2\ id_V$
$g^* \circ g = (f^* - \overline{\lambda}\ id_V) \circ (f - \lambda\ id_V) = f^* \circ f - \overline{\lambda} f - \lambda f^* + |\lambda|^2\ id_V$
also ist g normal. Nach (i) folgt
$E_\lambda(f) = Kerg = Kerg^* = E_{\overline{\lambda}}(f^*)$.

3.13 Satz: Sei V ein endl.-dim. unitärer VR, $f \in End(V)$. Dann sind äquivalent:

i V besitzt eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f.

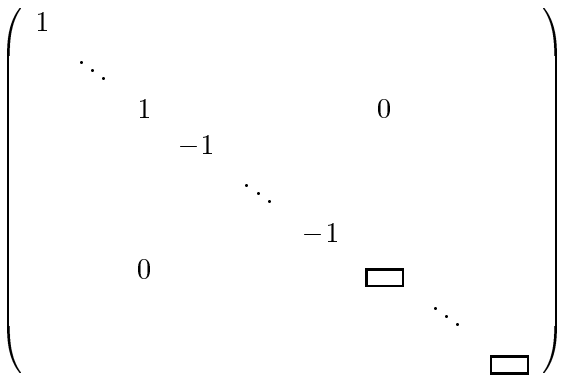
ii f ist normal.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii) ": Es sei v ein Vektor aus der gegebenen ON-Basis, $\lambda \in C$ ein Eigenwert mit $f(v) = \lambda v$. Es folgt $f^*(v) = \overline{\lambda} v$. (3.12). Damit ist $f(f^*(v)) = f(\overline{\lambda} v) = \overline{\lambda} f(v) = \overline{\lambda}\lambda v = \lambda\overline{\lambda} v = \lambda f^*(v) = f^*(\lambda v) = f^*(f(v))$. Die linearen Abbildungen $f \circ f^*$ und $f^* \circ f$ stimmen also auf einer Basis überein, also $f \circ f^* = f^* \circ f$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i) "Induktion über n. n= 0 klar.
Es sei also $n \geq 1$ und $\lambda \in C$ ein Eigenwert von f, $f(v) = \lambda v$, $\|v\| = 1$. Setze $W = \{w \in V : \langle w, v\rangle = 0\}$, $\dim W = n - 1$
Für $w \in W$ ist $\langle v, f(w)\rangle = \langle f^*(v), w\rangle = \langle \overline{\lambda} v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle = 0$.
Es folgt also $f(W) \subset W$.
Wende die Induktionsannahme an auf $f|_W : W \to W$, dann ist $f|_W$ normal.
$((f|_W)^* = f^*|_W)$: es gibt eine ON-Basis für W, $\{v_2, .., v_n\}$ aus Eigenvektoren von f. Dann ist $\{v, v_2, .., v_n\}$ eine Basis für V aus Eigenvektoren von f.

3.13' Bemerkung: Im reellen Fall ist die Richtung (i) $\Rightarrow$ (ii) ebenfalls richtig. Die andere Richtung ist dann falsch (Drehungen im R^2)



3.14 Folgerung: Für eine Matrix $A \in \mathcal{M}(n,n;C)$ sind äquivalent:

i Es gibt $S \in U(n)$, so daß $S^{-t}AS$ eine Diagonalmatrix ist. $(S^{-t} = S^{-1})$

ii A ist normal, d.h. $A^{-t} \cdot A = A \cdot A^{-t}$

7.4 Bilinearformen

4.1 Definition: Es sei V ein VR über $K \in \{R, C\}$

i Eine symmetrische Bilinearform (bzw. eine hermitesche Form) auf V ist eine Abbildung $s : V \times V \to K$ mit

(a) für jedes $w \in V$ ist die Abb. $V \to K,\ V \to s(v,w)$ linear.

(b) für alle $v, w \in V$ ist $s(w,v) = \overline{s(v,w)}$.

ii Ist V endlich dimensional, $\mathcal{A} = (v_1, .., v_n)$ geordnete Badsis für V, dann heißt die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s) = (s(v_i, v_j)_{1 \le i,j \le n}) \in \mathcal{M}(n,n;K)$ die Darstellungsmatrix von s bzgl. $\mathcal{A}$.

iii s heißt diagonalisierbar, wenn $\mathcal{A}$ für V existiert, so daß $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$ Diagonalmatrix ist.

Beispiele

i Ist s ein Skalarprodukt, $\mathcal{A}$ ON-Basis für den endl.-dim. VR V, dann ist

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s) = E_n$$

ii Im R^4 sei für $x = (x_1, .., x_4),\ y = (y_1, .., y_4)$:
$s(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$.
(Minkowski- (oder Lorentz-) Form) Für die Einheitsbasis $\mathcal{A} = (e_1, .., e_n)$ ist

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & 0 & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Definition: Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen des endl.-dim. VR V über K. Die Matrix $\mathcal{M}(id_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = s$ heißt die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Wenn $\mathcal{A} = (v_1, .., v_n),\ \mathcal{B} = (w_1, .., w_n)$ sind, dann ist s gegeben durch:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} w_i \quad , j = 1, .., n$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j s_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_{ij} \right) w_i$$

4.4 Satz: Es sei V ein endlich dimensionaler VR über K, s eine symmetrische Bilinearform (bzw. hermitesche Form) auf V, $\mathcal{A}$ eine Basis für V, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$.

i Ist $\mathcal{B}$ eine weitere Basis für V, $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s)$, S die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, dann gilt $T = S^t$:

$$A = TB\overline{T^t}$$

ii Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ für V, so daß gilt:

(a) $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \lambda_1, .., \lambda_n \in R$

(b) Die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ mach $\mathcal{B}$ ist orthogonal (bzw. unitär).

(c) $\lambda_1, .., \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A.

Bei G. Fischer lautet die Transformationsformel für Formen:

$$A = \overline{S^t} B S,$$

Es gibt ein $S \in GL(n, K)$ mit: $A = \overline{S^t} B S$

Beweis:

i Mit $\mathcal{A} = (v_1, .., v_n),\ \mathcal{B} = (w_1, .., w_n)$ ist $v_i = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} w_i \ , j = 1, .., n$ mit $S \in GL(n, K)$ und

$$\begin{aligned} a_{jk} &= s(v_j, v_k) = s(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} w_i, \sum_{k=1}^{n} s_{kk} w_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{ij} \overline{s_{kk}} \cdot s(w_i, w_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{ij} \overline{s_{kk}} b_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} t_{ij} b_{ik} t^*_{kk} = (TBT^*)_{ik} \end{aligned}$$

S, $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s) = A$
s symmetrisch $\Leftrightarrow$ A symmetrisch
s hermitesch $\Leftrightarrow$ A hermitesch

ii Nach 3.11 gibt es eine orthogonale bzw. unitäre Matrix S, so daß

$$D = \overline{S^t} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \ \lambda_1, .., \lambda_n \in R$$

Wegen $S^{-1} = \overline{S^t}$ ist $A = SDS^{-1} = SD\overline{S^t}$. Man setze nun $T = S^t$ und definierte die Basis $\mathcal{B} = (w_1, .., w_n)$ durch

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} (t^{-1})_{ij}, v_i \quad , \ j = 1, .., n$$

T ist Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, $T \in O(n)$ (bzw. $U(n)$), und nach (i) ist: $A = SB\overline{S^t}$, $B = \overline{S^t} A S = D$. Das beweist a),b),c) folgt aus der Tatsache, daß ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte haben.

4.5 Bemerkung: Die Transformationsformel für Endomorphismen und Bilinear-(bzw. hermitesche) Formen sind verschieden.
Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Basen , $f \in End(V)$, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$, $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s)$, $A' = \mathcal{M}(f_{\mathcal{A},\mathcal{A}})$, $B' = \mathcal{M}(f_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$, dann gibt es $S, T \in GL(n, K)$ mit:

$$A = \overline{S^t} B S, \qquad A' = T^{-1} B' T$$

Die Formeln stimmen überein bei orthogonalen (bzw. unitären) Basiswechseln.

4.6 Folgerung: Eine symmetrische Bilinearform (bzw. hermitesche Form) s ist genau dann positiv definit, wenn für eine Basis $\mathcal{A}$ von V die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$ lauter positive Eigenwerte hat.

4.7 Folgerung: Es sei s eine symmetrische Bilinearform (bzw. hermitesche Form) auf dem K^n. Dann gibt es bzgl. des Standardskalarproduktes eine Orthonormalbasis, so daß die $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$ Diagonalmatrix ist.
Beweis: Ist $\mathcal{B}$ die Einheitsbasis, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s)$, dann gibt es eine orthogonale (bzw. unitäre) Matrix S, so daß $D = \overline{S^t} A S$ Diagonalmatrix ist. $\mathcal{A} = S \cdot \mathcal{B}$ ON-Basis, und $D = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$.

4.8 Bemerkung: Die Transformationsformel 4.4 (i) besagt, daß bei orthogonalen (bzw. unitären) Basiswechseln die Matrizen A und B ähnlich sind ($A = \overline{S^t} B S = S^{-1} B S$), also gleiche Eigenwerte haben.
Bei beliebigen Basiswechseln ist dies natürlich nicht mehr richtig. Der folgende Satz sagt aber, daß die Vorzeichen der Eigenwerte erhalten bleiben.

4.9 Satz: (Trägheitssatz von Sylvester)
Es sei V ein endl.-dim. VR über K, s eine symmetrische Bilinearform (bzw. hermitesche Form) auf V. Ferner seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Basen für V, $A_i = \mathcal{M}_{\mathcal{A}_i}(s)$, $i = 1, 2$. Mit k_i sei die Zahl der positiven, mit l_i die der negativen Eigenwerte von A_i bezeichnet. Dann gilt:

i $k_1 = k_2$

ii $l_1 = l_2$

iii $rgA_1 = rgA_2$

Beweis: Nach 4.4 gibt es Basen $\mathcal{B}_i$ von V, so daß $D_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(s),\ i = 1, 2$, eine Diagonalmatrix ist mit denselben Eigenwerten. Es sei:

$$\begin{aligned} V_i^+ &= Span\{v \in \mathcal{B}_i : s(v,v) > 0\}, \\ V_i^- &= Span\{v \in \mathcal{B}_i : s(v,v) < 0\} \end{aligned}$$

Der Ausartungsraum von

$$s:\ V_0 = \{v \in V : s(v,w) = 0\ \forall w \in V\}$$

wird in beiden Fällen von den restlichen Basisvektoren aufgespannt. Da $\dim V_0 = n - rgA_i,\ i = 1, 2$, folgt (ii).
Man hat

$$V = V_1^+ \oplus V_1^- \oplus V_0 = V_2^+ \oplus V_2^- \oplus V_0\ ,$$

und es ist $k_i = \dim V_i^+,\ l_i = \dim V_i^-$. Daher genügt es zu zeigen: $k_1 = k_2$, denn es ist $k_1 + l_1 = k_2 + l_2$.
Es gilt $s(v,v) > 0$ für alle $v \in V_i^+ - \{0\}$ und $s(v,v) < 0$ für alle $v \in V_i^- - \{0\}$. Daher ist $V_2^+ \cap (V_1^- \oplus V_0) = \{0\}$. Es folgt $k_2 + l_1 + \dim V_0 \leq n$. Da aber $k_1 + l_1 + \dim V_0 = n$ ist, folgt daraus $k_2 \leq k_1$. Natürlich folgt genauso: $k_1 \leq k_2$.

4.10 Definition: Vor. wie oben, $\mathcal{A}$ Basis für V. Dann sind die Zahlen
Rang(s) = Rang $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s))$,
Index(s) = Anz. der positiven EW von $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$,
Signatur(s) = Index (s) - Anz. der negativen EW von $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$ unabhängig von $\mathcal{A}$.

4.11 Folgerung: Vor. wie oben. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ für V, so daß

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

k: Anzahl der Einsen; l: Anzahl der - Einsen, wo k + l = Rang(s); k = Index(s), k - l = Signatur(s).
Beweis: Nach 4.4 gibt es eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, .., v_n)$, so daß $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(s)$ Diagonalmatrix ist. Setze

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{s(v_i,v_i)}} & ,\ \text{falls } s(v_i,v_i) \neq 0 \\ v_i & ,\ \text{falls } s(v_i,v_i) = 0 \end{cases}$$

Nach evtl. Umnumerierung ist $\mathcal{B} = (w_1, .., w_n)$ eine Basis der gesuchten Art.

4.12 Satz: Es sei $A \in \mathcal{M}(n, n; R)$ symmetrisch, $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}(k, k; R)$. Dann gilt: A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det A_k > 0\ ,\ k = 1, .., n$. (A heißt positiv definit, wenn für alle $x \in R^n - \{0\}$ gilt: $x^t A x > 0$.
Beweis: "$\Rightarrow$ ". Es gibt ein $S \in O(n)$, so daß

$$S^t A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda_1, .., \lambda_n \in R$$

Da A positiv definit ist, sind alle λ_k (EWe von A) > 0. Daraus folgt $\det(S^tAS) = \det S^t \cdot \det A \cdot \det S = \det A(\det S)^2 = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n > 0 \qquad \Rightarrow \det A > 0$.
Denn die Matrix A_k beschreibt die Beschränkung der durch A gegebenen Bilinearform auf $\{(x_1, .., x_n) \in R^n : x_{k+1} = ... = x_n = 0\}$. Da diese Form dort positiv definit ist, folgt wie im Fall k=n : $\det A_k > 0$.
"$\Leftarrow$ "Induktion über n. n=1 trivial.
Nach Ind.Ann. ist A_{n-1} positiv definit. Es gibt also ein $S \in O(n-1)$,so daß

$$S^tA_{n-1}S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \ \lambda_1, .., \lambda_{n-1} > 0$$

$$\text{Setze } \tilde{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} & S & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right) \quad , \ \tilde{S}^tA\tilde{S} = B = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & b_{n-1} \\ \hline b_1 & ... & b_{n-1} & b_n \end{array}\right)$$

Nach Vor. ist $\det A = \det A_n > 0$, also $\det B = \det A \cdot (\det \tilde{S})^2 > 0$. Setze nun:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & c_{n-1} \\ \hline 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right) \quad , \ c_i = -\frac{b_i}{\lambda_1} \quad , \ i = 1, .., n-1.$$

$$T^tBT = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline c_1 & ... & c_{n-1} & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & b_{n-1} \\ \hline b_1 & ... & b_{n-1} & b_n \end{array}\right) \cdot$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & c_{n-1} \\ \hline 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & b_{n-1} \\ \hline \underbrace{c_1\lambda_1 + b_1}_{=0} & ... & 0 & c_1b_1 + ... + c_{n-1}b_{n-1} + b_n \end{array}\right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|c} & E_{n-1} & & c_1 \\ & & & \vdots \\ & & & c_{n-1} \\ \hline 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \lambda_1 c_1 + b_1 = 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wegen $\det T = 1$ ist $\det B = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n > 0$, also $\lambda_n > 0$. Wegen $(\tilde{S} \circ T)^t \cdot A \cdot (\tilde{S} \circ T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist auch A positiv definit.

$f(x_1, .., x_n)$ Extremum in $\varpi \Rightarrow f_{x_1}(\varpi) = ... = f_{x_n}(\varpi) = 0$

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \ldots \\ \vdots & & \\ f_{x_nx_1} & \ldots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \qquad Hf(\varpi) \text{ positiv definit } \Rightarrow \varpi \text{ Minimum.}$$

7.5 Quadriken

Der R^n sei stets mit dem Standardskalarprodukt versehen.

5.1 Lemma: Ist s eine Bilinearform auf R^n, $A = (a_{ij}) = (s(e_i, e_j))$, dann gilt:

$$s(x, y) = x^t \cdot A \cdot y \quad , \; x, y \in R^n$$

Beweis: Definiere $\tilde{s}(x, y) = x^t Ay$. Dann ist $\tilde{s}$ bilinear, und $\tilde{s}(e_i, e_j) = e_i^t A e_j = e_i^t a_j = a_{ij}$ (a_j = j-te Spalte von A)
$\Longrightarrow s = \tilde{s}$.

5.2 Definition: Eine quadratische Form auf R^n ist ein Abbildung $q : R^n \to R$, so daß eine symmetrische Bilinearform s existiert, mit $q(x) = s(x, x)$, $x \in R^n$.

5.3 Definition: Eine Quaddrik Q im R^n ist gegeben als Nullstellenmenge einer Funktion $p : R^n \to R$,

$$p(x) = q(x) + l(x) + \alpha \; ,$$

wo q eine quadratische, l eine Linearform auf R^n ist, $\alpha \in R$

5.4 Bemerkung:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \alpha \qquad , \; a_{ij} = a_{ji} \\ &= x^t A x + a^t x + \alpha \qquad , \; A \in \mathcal{M}(n, n; R) \text{ symmetrisch.} \end{aligned}$$

5.5 Definition: i Eine euklidische Bewegung des R^n ist eine Abbildung

$$p : R^n \to R^n \; , \; f(x) = Sx - b \qquad , \; S \in O(n), \; b \in R^n$$

ii Zwei Mengen $M, M' \in R^n$ heißen kongruent, wenn es eine euklidische Bewegung f gibt mit $M' = f(M)$.

5.5' Bemerkung: i Die euklidischen Bewegungen bilden bzgl. $\circ$ eine Gruppe.

ii Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge alle Quadriken des R^n.

5.6 Satz: (Euklidische Klassifikation der Quadriken im R^n)
Jede Quadrik Q im R^n ist kongruent zu einer der folgenden Normalformen:

i $a_1x_1^2 + .. + a_kx_k^2 - a_{k+1}x_{k+1}^2 - .. - a_mx_m^2 = 0$
ii $a_1x_1^2 + .. + a_kx_k^2 - a_{k+1}x_{k+1}^2 - .. - a_mx_m^2 = 1$
iii $a_1x_1^2 + .. + a_kx_k^2 - a_{k+1}x_{k+1}^2 - .. - a_mx_m^2 + x_{m+1} = 0$

Dabei seien stets $a_1, .., a_m > 0$.
Dei Eindeutigkeitsaussage ist so zu verstehen. Die Typen (i), (ii), (iii) sind paarweise kongruent. Wenn zwei Quadriken desselben Typs kongruent sind, dann sind die $a_1, .., a_n$ gleich bis auf Vertauschung und die Zahlen k,m stimmen überein.
Beweis:

i $Q : x^tAx + a^tx + \alpha = 0$. A ist symmetrisch, nach 3.11 gibt es daher ein $S \in O(n)$ mit

$$D = SAS^t = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_k & & & 0 & & & \\ & & & -a_{k+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -a_m & & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1, .., a_m > 0.$$

Dabei ist $m = rgA$. Wegen $A = S^tDS$ wird durch $y = Sx$ die Gleichung $x^tAx + a^tx + \alpha = 0$ in die Gleichung

$$\begin{aligned} x^t \cdot S^t \cdot D \cdot S \cdot x + a^t \cdot S^t \cdot y + \alpha &= (Sx)^t \cdot D \cdot (Sx) + (Sa)^t \cdot y + \alpha \\ &= y^t \cdot D \cdot y + b^t \cdot y + \alpha \qquad , \ b = Sa \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(*) \qquad a_1y_1^2 + ... + a_ky_k^2 - a_{k+1}y_{k+1}^2 - ... - a_my_m^2 + b_1y_1 + ... + b_ny_n + \alpha = 0$$

überführt. Durch quadratische Ergänzung werden nun die linearen Terme reduziert. Setze für $i = 1, .., n$:

$$z_i = y_i + \frac{b_i}{2a_i} \qquad \text{Translation des } R^n \text{ um den Vektor } (\frac{b_1}{2a_1}, .., \frac{b_m}{2a_m}, 0...0))$$

Dann ist $z_i^2 = y_i^2 + \frac{b_i}{a_i}y_i + \frac{b_i^2}{4a_i}$.
Daher ist (*) äquivalent zu:

$$(**) \qquad a_1z_1 + ... + a_kz_k^2 - a_{k+1}z_{k+1}^2 - ... - a_mz_m^2 + b_{m+1}z_{m+1} + ... + b_nz_n + \beta = 0$$

$\beta = \alpha - \frac{b_1^2}{4a_1} - .. - \frac{b_k^2}{4a_k} + \frac{b_{k+1}}{4a_{k+1}} + \frac{b_m^2}{4a_m}$
Wir unterscheiden 3 Fälle:
(a) $b_{m-1} = ... = b_n = 0$ Typ (i) erreicht.

(b) $b_{m+1} = ... = b_n = 0$ $\beta \neq 0$. Teile durch β. Dann wird $\beta = -1$ erreicht. Koordinatenvertauschung. Wenn $\beta > 0$ Typ (ii).

(c) Für wenigstens ein $i \in \{m+1, .., n\}$ ist $b_i \neq 0$. Wir können $i = m+1$ annehmen. Wir dividieren (**) durch $\sqrt{b_{m+1}^2 + .. + b_n^2}$ erhalten eine neue Gleichung (**), in der $b_{m+1}^2 + .. + b_n^2 = 1$ ist. Setze $c = \{0, .., 0, b_{m+1}, .., b_n\}$ $W = Span\{c, e_{m+2}, ..., e_n\}$. Es sei $(c, d_{m+2}, .., d_n)$ eine ON-Basis für W. Dann ist $(e_1, .., e_m, c, d_{m+2}, .., d_n)$ eine ON-Basis von R^n. Es sei T die Matrix mit diesen Basisvektoren als Zeilen. Dann ist $T \in O(n)$. Setze $W = Tz + (0, .., 0, \underbrace{\beta}_{m+1}, 0, .., 0)$. Dann ist $w_1 = z_1, .., w_m = z_m, w_{m+1} = b_{m+1}z_{m+1} + .. + b_n z_n + \beta$

Es folgt aus (**):

$$a_1 b_1^2 + ... + a_k b_k^2 - a_{k+1} b_{k+1}^2 - ... - a_m w_m^2 + w_{m+1} = 0$$

ii Zur Eindeutigkeit genügt es zu bemerken, daß die Diagonalmatrix D ähnlich zu A ist. Die Zeilen $a_1, .., a_k, -a_{k+1}, .., -a_m, 0, .., 0$ sind also die Eigenwerte von A. Daher ist der Quadratische Term in der Normalform eindeutig bestimmt.

5.7 Definition: Eine Quadrik $Q : x^t Ax + a^t x + \alpha = 0$ heißt ausgeartet, wenn sie vom Typ (i) oder wenn $rgA < n$ ist. $ax^2 - by^2 = 0$ (Typ (i), dim 2)

5.8 Satz: Die nicht ausgearteten Quadriken in Dimension 2 und 3 sind $(a, b, c > 0)$:

$n = 2$	:	$ax^2 + by^2 = 1$	Ellipse
		$ax^2 - by^2 = 1$	Hyperbel
		$ax^2 + y = 0$	Parabel
$n = 3$	:	$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$	Ellipsoid
		$ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$	einschaliges Hyperboloid
		$ax^2 - by^2 - cz^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid
		$ax^2 + by^2 + z = 0$	elliptisches Paraboloid
		$ax^2 - by^2 + z = 0$	hyperbolisches Paraboloid

5.9 Definition: Eine Affinität des R^n ist eine Abbildung $f : R^n \to R^n$, $\quad f(x) = Sx + b,\ S \in GL(n, R),\ b \in R^n$

5.10 Bemerkung: Die Affinitäten des R^n bilden eine Gruppe. Die Affinität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Quadriken des R^n.

5.11 Satz: (Affine Klassifiktion der Quadriken des R^n)

Jede Quadrik des R^n ist affin äquivalent zu genau einer der folgenden Normalformen:

i $x_1^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_m^2 = 0$

ii $x_1^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_m^2 = 1$

iii $x_1^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_m^2 + x_{m+1} = 0$

Beweis: $Q : x^t Ax + a^t x + \alpha = 0$. Zu A gibt es wie vorher ei $S \in O(n)$ mit

$$SAS^t = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & a_k & & & 0 & & \\ & & & -a_{k+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -a_m & & \\ & & 0 & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = D \qquad , \ a_1, .., a_m > 0.$$

Setzt man $\lambda_i = \sqrt{a_i}$,

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_m & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_m & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & 0 & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_m & & \\ & & & 1 & \\ & & 0 & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= T \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \cdot T,$$

Es folgt:

$$A = (TS)^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & 0 & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (TS),\ R = TS \in GL(n,R)$$

Mit $y = Rx$ wird aus $x^tAx + a^tx + \alpha = 0$.

$$y_1^2 + ... + y_k^2 - y_{k+1}^2 - ... - y_m^2 + b^ty + \alpha = 0 \qquad ,\ b = (a^tR^{-1})^t$$

Wie früher kann durch eine Translation (quadratische Ergänzung) der Term $b_1y_1 + .. + b_my_m$ zum Verschwinden gebracht werden.
Man erhält:

$$z_1^2 + ... + z_k^2 - z_{k+1}^2 - ... - z_m^2 + b_{m+1}z_{m+1} + ... + b_nz_n + \beta = 0$$

i $b_{m+1} = ... = b_n = \beta = 0$: Typ (i)

ii $b_{m+1} = ... = b_n = 0$ $b \neq 0$. Für $\beta > 0$ multipliziere die Gleichung mit -1, vertausche Koordinaten. Zu jedem Fall ist $\beta < 0$ zu erreichen.
Setze:

$$w = \frac{1}{\sqrt{-\beta}}z \qquad \Rightarrow \text{ Typ (ii)}$$

iii $b_{m+1} \neq 0$. Setze:

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1, ..., w_m = z_m, \\ w_{m+1} &= b_{m+1}z_{m+1} + ... + b_nz_n + \beta \\ w_{m+2} &= z_{m+2}, ..., w_n = z_n \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & b_{m+1} & \dots & \dots & b_n \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist Typ (iii) erreicht. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Trägheitssatz von Sylvester.

Kapitel 8

Banach- und Hilberträume

8.1 Basen von unendlich-dimensionalen Vektorräumen

1.1 Erinnerung: Beliebige VRe über beliebigen Körpern endlicher Linearkombination. Span $(M) = \{\alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n : \ v_1, .., v_n \in M, \ \alpha_1, .., \alpha_n \in K\}$
M Erzeugenden-System für V $\Leftrightarrow$ Span (M) = V.
M lin. unabh. $\Leftrightarrow$ jede endl. Teilmenge ist l.u.
Äquivalente Aussagen:

i M ist l.u. Erz.-System (Basis)

ii M ist minimales Erz.-System

iii M ist max. l.u. System

iv Jeder Vektor aus V kann auf genau eine Weise als Linearkombination von Vektoren aus M geschrieben werden.

M Erz. System endl. $\alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n = 0$

1.2 Zorn'sches Lemma: Eine Menge E heißt geordnet, wenn auf E eine Relation "$\leq$ "erklärt ist mit folgenden Eigenschaften:

i $a \leq a \ , \ a \in E$

ii $a \leq b \ , \ b \leq a \Rightarrow a = b$

iii $a \leq b \ , \ b \leq c \Rightarrow a \leq c$

E heißt total geordnet, wenn für alle $a, b \in E$ eine der beiden Relationen $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.
Ist $f \subset E$, dann heißt $a \in E$ obere Schranke für F, wenn für alle $b \in F$ gilt: $b \leq a$. a heißt maximales Element in E, falls aus $a \leq b$ stets folgt $b = a$.
Lemma: Wenn in der geordneten Menge E jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, dann existiert in E ein maximales Element.

1.3 Satz: Es sei M eine linear unabhängige Teilmenge des K-VR V. Dann gibt es eine Basis B von V mit $M \subset B$.
Beweis: Es sei E die Menge alle l.u. Teilmengen von V, die M enthalten.
$E \neq \emptyset$, $\dim M \in E$. E ist (teilweise) geordnet bzgl. "$\subseteq$ ". Es sei F eine total geordnete Teilmenge von E. Wir zeigen, daß $\mathcal{A} = \bigcup_{A \in F} A$ obere Schranke für F in E ist. Natürlich ist $A \subseteq \mathcal{A}$ für alle $A \in F$. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ l.u. ist. Seien also $a_1, .., a_n \in \mathcal{A}$. Dann gibt

es $A_1, .., A_n \in F$ mit $a_1 \in A_1, .., a_n \in A_n$. Da F total geordnet ist, gibt es ein $i \in \{i, .., n\}$ mit $A_i \supset A_k$, $k = 1, .., n$. Daher ist $a_1, .., a_n \in A_i$. Da A_i l.u. ist, sind $a_1, .., a_n$ l.u. Nach dem Lemma von Zorn folgt die Existenz eines maximalen Elements B in E. B ist Basis mit $M \subset B$.

1.4 Folgerung: Jeder VR besitzt eine Basis. $V \neq \{0\}$.

1.5 Folgerung: Ist U Unterraum von V, dann gibt es einen Unterraum W von V, so daß $V = U \oplus W$.
Beweis: Ergänze eine Basis $\mathcal{A}$ für U zu einer Basis $\mathcal{B}$ für V und setze W = Span $(\mathcal{B} - \mathcal{A})$.

8.2 Normierte Vektorräume

Es sei stets $K \in \{R, C\}$.

2.1 Definition: Es sei V ein VR über K. Eine Abb. $\|...\| : V \to R$ heißt eine Halbnorm auf V, wenn für alle $v, w \in V$, $\alpha \in K$ gilt:
($\frac{\text{N1}}{2}$): $\|v\| \geq 0$.
(N2): $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$,
(N3): $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung
(N1): $\|v\| \geq 0$ und = nur für v = 0.
V heißt (halb-)normierter Vektorraum.

2.2 Beispiele: i Ist $\langle .., .. \rangle$ SKP auf V, dann ist $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V.

ii Im K^n werden durch $(x = (x_1, .., x_n))$: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_\infty = max\{|x_k| : k = 1, .., n\}$ Normen definiert.

iii Für $i < p < \infty$ wird im K^n durch

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm definiert. (Dreiecksungleichung ist nicht leicht). Für p=2 kommt sie vom Standard-SKP.

iv In $C^0([a, b], K)$ wird für $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \ L^p\text{-Normen}$$

eine Norm definiert. Außer in den Fällen p = 1 und p = 2 ist die Dreiecksungleichung nicht leicht.
Ferner setzt man $\|f\|_\infty = max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ L^∞-Norm.

2.3 Hilfssatz: Es seien $z, w \in C$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$$|z \cdot w| = \frac{|z|^p}{p} + \frac{|w|^q}{q}$$

Beweis:

i Es sei $0 \leq \alpha \leq 1$, $\varphi(t) = t^{1-\alpha}$, $t \geq 0$. Dann ist $\varphi'(t) = (1 - \alpha)t^{-\alpha}$ und aus dem Mittelwertsatz folgt, daß für $0 < a < b$ ein ξ mit $a < \xi < b$ existiert, so daß

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \varphi(\xi) \ , \ b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = (1 - \alpha)(b - a)\xi^{-\alpha}$$

Wegen $\xi^{-\alpha} < a^{-\alpha}$ ist $b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} < (1-\alpha)(b-a)a^{-\alpha}$, $a^\alpha b^{1-\alpha} - a < (1-\alpha)(b-a) = \alpha a + (1-\alpha)b - a = a^\alpha b^{1-\alpha} < \alpha a + (1-\alpha)b$, $0 < a < b$
Daher ist $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ für alle $a, b \geq 0$.

ii Setze $\alpha = \frac{1}{p}$ $a = |z|^p$, $b = |w|^q$. Dann folgt $(1-\alpha) = \frac{1}{q}$.

$$|z| \cdot |w| \leq \frac{|z|^p}{p} + \frac{|w|^q}{q}$$

2.4 Satz: Für $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, gilt:

i Für alle $x = (x_1, .., x_n)$, $y = (y_1, .., y_n) \in K^n$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Hölder-Ungleichung)}$$

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Minkowski-Ungleichung)}$$

ii Für alle $f, g \in C^0([a,b], K)$ ist

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_a^b |g(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Hölder-Ungleichung)}$$

$$(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Minkowsky-Ungleichung)}$$

Beweis:

i Setze $A = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $B = (\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$, $x'_k = \frac{x_k}{A}$, $y'_k = \frac{y_k}{B}$, $k = 1, .., n$. (Falls A = 0 oder B = 0 ist nicht zu beweisen)
Aus 2.3 Folgt: $|x'_k \cdot y'_k| \leq \frac{|x'_k|^p}{p} + \frac{|y'_k|^q}{q}$. $k = 1, .., n$.
Aufsummieren: $\sum_{k=1}^n |x'_k y'_k| \leq \frac{1}{pA^p} \sum_{k=1}^n |x_k|^p + \frac{1}{qB^q} \sum_{k=1}^n |y_k|^q = 1$
also die Beh.: $\sum_{k=1}^n |x'_k y'_k| = \sum_{k=1}^n \frac{|x_k y_k|}{A \cdot B} \leq 1$.
Minkowski: $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq \sum |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$.
Wende Hölder-Ungleichung an: $((p-1)q = p)$

$$\begin{aligned} \sum |x_k + y_k|^p &\leq (\sum |x|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum |y_k|^p)^{\frac{1}{q}} (\sum |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{q}} \\ &= [(\sum |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum |y_k|^p)^{\frac{1}{q}}](\sum |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{q}} \\ &\Rightarrow \text{Beh.} \end{aligned}$$

2.5 Satz: Es sei V ein normierte K-VR. Genau dann, wenn die Norm die Parallelogramm-Gleichung $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ für alle $v, w \in V$ erfüllt, gibt es ein SKP $\langle .., .. \rangle$, so daß gilt:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Beweis: Im Fall K = R setze $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$, im Fall K = C: $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2)$.
Wir führen den Beweis nur für K = R.

Die Symmetrie von $\langle .., .. \rangle$ ist klar, ebenso $\langle v, v \rangle > 0$, $v \neq 0$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Es bleibt die Linearität im ersten Faktor zu zeigen. Für $u, u', w \in V$ ist

$$\begin{aligned}
\langle u+u', w\rangle + \langle u-u', w\rangle &= \frac{1}{4}(\|u+u'+w\|^2 - \|u+u'-w\|^2 + \|u-u'+w\|^2 - \|u-u'-w\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|u+u'+w\|^2 + \|u-u'+w\|^2) - \frac{1}{4}(\|u+u'-w\|^2 + \|u-u'-w\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 + \|u'\|^2) - \frac{1}{2}(\|u-w\|^2 + \|u'\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2) \\
&= 2\langle u, w\rangle
\end{aligned}$$

Für $u = u'$ ergibt sich: $\langle 2u, w\rangle = 2\langle u, w\rangle$. Es sei nun gegeben $v, v' \in V$. Finde $u, u' \in V$ mit $u + u' = 2v$, $u - u' = 2v'$. Es folgt:

$$\langle 2v, w\rangle + \langle 2v', w\rangle = 2\langle v+v', w\rangle = 2\langle v, w\rangle + 2\langle v', w\rangle$$

Daher ist $\langle .., .. \rangle$ im ersten Faktor additiv. Daraus folgt für alle $r \in Q$:

$$\begin{aligned}
\langle rv, w\rangle &= r\langle v, w\rangle. \\
\langle 2v, w\rangle &= 2\langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

Durch Induktion folgt : $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$, $n \in R$

$$0 = \langle v + (-v), w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle -v, w\rangle \Rightarrow \langle -v, w\rangle = -\langle v, w\rangle \ .$$

Damit für $r \in Z$ ableitbar.

$$\begin{aligned}
q\langle \frac{1}{q}v, w\rangle &= \langle v, w\rangle \\
\langle \frac{1}{q}v, w\rangle &= \frac{1}{q}\langle v, w\rangle \\
\langle \frac{p}{q}v, w\rangle = p\langle \frac{1}{q}v, w\rangle &= \frac{p}{q}\langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

Ist $\alpha \in R$, $r \in Q$, dann gilt für $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}
|\langle \alpha v, w\rangle - \alpha\langle v, w\rangle| &\leq |\langle \alpha v, w\rangle - \langle rv, w\rangle| + |r\langle v, w\rangle - \alpha\langle v, w\rangle| \\
&= \underbrace{|\langle (\alpha - r)v, w\rangle|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|\alpha - r|\langle v, w\rangle}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon
\end{aligned}$$

Daher ist $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$, $\alpha \in R$.

2.6 Definition: Es sei V ein normierter K-VR, $(v_n)_{n\in N}$ eine Folge von Vektoren aus V.

i Die Folge (v_n) heißt konvergent gegen$v \in V$, wenn zu jeden $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in N$ existiert, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $\|v_n - v\| < \epsilon$.

ii Die Folge (v_n) heißt eine Cauchyfolge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ien $n_0 \in N$ existiert, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $\|v_n - v_m\| < \epsilon$.

2.7 Satz: Vor. wie oben.

i Wenn (v_n) gegen v und v' konvergiert, dann ist $v = v'$.

ii Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis:

i Zu $\epsilon > 0$ gibt es n_0, n_1, so daß $\|v_n - v\| < \epsilon$ für $n \geq n_0$, $\|v_n - v'\| < \epsilon$ für $n \geq n_1$ ist. Für $n \geq max(n_0, n_1)$ folgt

$$\|v - v'\| = \|(v - v_n) + (v_n - v')\| \leq \|v - v_n\| + \|v_n - v'\| < 2\epsilon.$$

Daher ist $v = v'$.

ii Ist (v_n) konvergent gegen v, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0, so daß $\|v_n - v\| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq n_0$. Sind $n, m \geq n_0$, folgt

$$\|v_n - v_m\| = \|(v_n - v) + (v - v_m)\| \leq \underbrace{\|v_n - v\|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\|v - v_m\|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

2.8 Definition: Der normierte K-VR V heiß vollständig (oder auch: Banach-Raum), wenn in V, jede Cauchy-Folge konvergiert.

2.9 Beispiele: i R^n mit der Standard-Norm ist vollständig, denn es gilt für $k = 1, .., n$:

$$|x_k - y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|$$

Wenn also $(x^{(m)})$ eine Cauchy-Folge ist, ist für jedes k die Folge $(x_k^{(m)})_{m \in N}$, eine Cauchy-Folge in R. Da R vollständig ist, konvergiert jede Folge $(x_k^{(m)})_{m \in N}$ gegen ein $x_n \in R$. Dann konvergiert $(x^{(m)})_{m \in N}$ gegen $x = (x_1, .., x_n)$

ii $C = R^2$ ist nach (i) ebenfalls vollständig. Wie in (i) zeigt man, daß auch C^n vollständig ist.

iii $C^0([a, b], K)$ mit der L^∞-Norm ($\|f\| = max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ ist vollständig.

iv $C^0([a, b], K)$ ist für ein p mit $1 \leq p < \infty$ vollständig in der L^p-Norm. Wir zeigen das für p = 2 und das Intervall $[0, 2]$.

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|^2 &= \int_0^1 (t^n - t^m)^2 dt \\ &= \frac{2(m-n)^2}{(2m+1)(2n+1)(m+n+1)} \quad , \; M = n + k \\ &= \frac{2k^2}{(2n+2k+1)(2n+1)(2n+k+1)} \; \to 0 \; n \to \infty \end{aligned}$$

(f_n) ist L^2-Cauchy-Folge. Sie ist nicht L^2-konvergent, denn als L^2-Grenzfunktion kommt nur die p.w. Grenzfunktion in Frage. Diese ist aber nicht stetig, gehört daher nicht zu C^0 ...

2.10 Definition: V sei normierter K-VR.

i Für $v_0 \in V,\ r > 0$ heißt

$$B_r(v_0) = \{v \in V : \|v - v_0\| < r\} ,$$

die offene Kugel,

$$\overline{B_r(v_0)} = \{v \in V : \|v - v_0\| \leq r\} ,$$

die abgeschlossene Kugel vom Radius r mit Mittlepunkt v_0.

ii Eine Menge $O \subset V$ heißt offen, wenn zu jedem $v \in O$ ein $r > 0$ existiert, so daß $B_r(v) \subset O$ ist.

iii Eine Menge $A \subset V$ heißt abgeschlossen, wenn $V - A$ offen ist.

iv Eine Menge $K \subset V$ heißt kompakt, wenn sei die Heine-Borel-Eigenschaft hat: Aus jeder Überdeckung von K durch offene Mengen kann eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden.

2.11 Satz: Vor. wie oben.

i $A \subset V$ ist abgeschlossen genau dann, wenn jeder Häufungspunkt von A zu A gehört, d.h. wenn eine Folge $(a_i),\ a_i \in A$, gegen $a \in V$ konvergiert, dann ist $a \in A$.

ii Wenn $K \subset V$ kompakt ist, (a_i) eine Folge aus K, dann gibt es eine Teilfolge, die gegen einen Punkt aus K konvergiert.

iii Wenn $K \subset V$ kompakt ist, dann ist K abgeschlossen und beschränkt (d.h. in einer Kugel enthalten)

Beweis:

i "$\Rightarrow$ "Ist A abgeschlossen, dann ist $O = V - A$ offen. Falls die Folge $(a_i),\ a_i \in A$, gegen $a \in V$ konvergiert, und falls $a \in O$, gibt es ein $r > 0$, so daß $B_r(a) \subset O$, denn O ist offen. Dann gilt für alle i: $\|a_i - a\| > r$, denn $a_i \in A$. Dann kann (a_i) nicht gegen a konvergieren. Es folgt $a \in A$.
"$\Leftarrow$ ": Jeder HP von A gehört zu A. Zu zeigen ist, daß dann $O = V - A$ offen ist. Es sei $a \in O,\ r_i = \frac{1}{i}$. Wenn für jedes $i \in N$ gilt: $A \cap B_{r_i}(a) \neq 0$, dann wähle $a_i \in A \cap B_{r_i}(a)$. Die Folge (a_i) konvergiert dann gegen a: $\|a_i - a\| < \frac{1}{i}$. Dann wäre $a \in A$. Es gibt also wenigstens ein i mit $A \cap B_{r_i}(a) = \emptyset$, also $B_{r_i}(a) \subset O$. O ist offen.

ii Es sei K kompakt, (a_i) eine Folge aus K. Wenn (a_i) keine Teilfolge enthält, die gegen einen Punkt aus K konvergiert, dann existiert für jedes $b \in K$ eine offene Kugel $B_{r_b}(b)$, die höchstens endlich viele Folgenglieder a_i enthält. Aus der offenen Überdeckung $\{B_{r_b}(b)\}_{b \in K}$ von K kann eine endliche Teilüberdeckung $B_{r_{b_1}}(b_1), .., B_{r_{b_n}}(b_n)$ ausgewählt werden:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{r_{b_j}}(b_j).$$

Dann können in K nur endlich viele Folgenglieder a_i liegen. Wiederspruch.

iii K kompakt $\Rightarrow$ K abgeschlossen $\Rightarrow$ beschränkt: $a \in K$ fest.
$B_i(a),\ i \in N$ offene Überdeckung von V, also auch von K.
Da K kompakt ist, gibt es $i_1, .., i_n \in N$ mit
$K \subset B_{i_1}(a) \cup ... \cup B_{i_m}(a) = B_{i_n}(a) \ \Rightarrow \ K$ beschränkt.

2.12 Beispiel: Im Hilbertschen Folgenraum l^2 der Folgen $(a_n),\ a_n \in C$, mit der Norm

$$\|(a_n)\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist die abgeschlossene Einheitskugel. $\overline{B_1(O)}$ nicht kompakt.
Die Folge $e_1 = (1, 0, ...),\ e_2 = (0, 1, 0, ...), ...$ gehört zu $\overline{B_1(O)}$, und es ist $\|e_i - e_k\| = \sqrt{2}\ i \neq k$.
Sie enthält daher keine konvergente Teilfolge.

2.13 Satz: Ein normierte K-VR V ist endlich-dimensional geanu dann, wenn $\overline{B_1(O)}$ kompakt ist.
Beweis:

"$\Rightarrow$ "(siehe Analysis)

"$\Leftarrow$"Zu jedem $a \in \overline{B_1(O)}$ betrachte die offene Kugel $B_{\frac{1}{2}}(a)$. Diese bilden eine offene Überdeckung von $\overline{B_1(O)}$. Wenn $\overline{B_1(O)}$ kompakt ist, gibt es $a_1, .., a_n \in \overline{B_1(O)}$ mit $\overline{B_1(0)} = B_{\frac{1}{2}}(a_1) \cup ... \cup B_{\frac{1}{2}}(a_n)$

Beh.: $W = Span\{a_1, .., a_n\} = V$. Angenommen das wäre nicht so, dann gibt es ein $v \in V - W$. Dann ist $\alpha = inf\{\|v - w\| : w \in W\} > 0$. (W ist endlich dimensional, also abgeschlossen) Es gibt also ein $w \in W$ mit $\alpha \leq \|v - w\| \leq \frac{3}{2}\alpha$. Setze $u = \frac{v-w}{\|v-w\|}$. Wegen $\|u\| = 1$ gibt es ein i, so daß $\|u - a_i\| < \frac{1}{2}$. Ferner ist

$$v = w + \|v - w\|\ u = \underbrace{w + \|v - w\|a_i}_{=z \in W} + \|v + w\|(u - a_i)$$

$$\|v - z\| \geq \alpha$$
$$\|v - w\|\|u - a_i\| \geq \alpha$$
$$\|v - w\| \geq 2\alpha \qquad \text{Widerspruch!}$$

2.14 Definition: i Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen normierten K-VR heißt stetig in $v_0 \in V$, wenn zu jeden $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $\|f(v) - f(w)\| < \epsilon$ für alle v mit $\|v - v_0\| < \delta$.

ii f heißt stetig (auf V), wenn f stetig in jedem $v_0 \in V$ ist.

2.15 Satz: Die Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $O \subset W$ die Urbildmengen $f^{-1}(O) \subset V$ offen ist.
Beweis: ...

2.16 Satz: Ist $f : V \to W$ stetig, $K \subset V$ kompakt, dann ist $f(K) \subset W$ kompakt.
Beweis: Es sei $\{O_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K),\ U_i = f^{-1}(O_i) \subset V$ offen.
$\{U_i\}$ offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es $i_1, .., i_n \in I$ mit $K \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$.
Dann ist $f(K) \subset O_{i_n} \cup ... \cup O_{i_n}$. Daher ist $f(K)$ kompakt.

2.17 Folgerung: Ist V normierte K-VR, $f : V \to K stetig,\ K \subset V$ kompakt, dann gibt es ein $v_0, v_1 \in K$ mit
$f(v_0) = min\{f(v) :\ v \in K\}$,
$f(v_1) = max\{f(v) :\ v \in K\}$.

2.18 Folgerung: Sind $\|...\|_1,\ \|...\|_2$ Normen auf dem endlich-dimensionalen K-VR V, dann gibt es $c, C > 0$, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1 \ .$$

(solche Normen heißen äquivalent).
Beweis: $K = \{v \in V :\ \|v\|_1 = 1\}$ kompakt, $f : V \to R,\ f(v) = \|v\|_2$. f ist stetig bzgl. $\|...\|_1$.
Da f auf K nicht 0 wird, gibt es $c, C > 0$ mit $c \leq f(v) \leq C,\ v \in K$

$v \in V - \{0\},\ u = \frac{v}{[\|v\|_1} \in K,\ c \le f(n) \le C$

$$c \le \frac{\|v\|_2}{\|v\|_1} \le C$$

2.18' Folgerung: Auf einem endlich-dimensionalen K-VR sind je zwei Normen äquivalnet (d.h. es gibt $c, C > 0$, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$$

Beweis: Ist $\{v_1, .., v_n\}$ eine Basis für V, dann setze man

$$\|v\|_\infty = max\{|\alpha_k| \ :\ k = 1, .., n\},\ v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Dies ist eine Norm für V, und die Menge $K = \{v \in V \ :\ \|v\|_\infty = 1\}$ ist kompakt (bzgl. $\|...\|_\infty$). Ferner ist die Funktion $f : V \to R,\ f(v) = \|v\|_1$, stetig:

$$\|v\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot v_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot \|v_k\|_1 \le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \|v_k\|_1 \right)}_{=c} \|v\|_\infty = C$$

$$|f(v) - f(w)| = |\|v\|_1 - \|w\|_1| \le \|v - w\|_1 \le C\|v - w\|_\infty$$

Auf K gilt: $c \le f(v) \le C,\ c \le \|v\|_1 \le C,\ \|v\|_\infty = 1$
$w \in V :\ v = \frac{w}{\|w\|_\infty}\ c \le \frac{\|w\|_1}{\|w\|_\infty} \le C$
$v \to CF(v),\ \|(v_n)\|_1 = \lim \|v_n\|$. Halbnorm.

2.19 Satz: Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen normierten K-VRen sind äquivalent:

i f ist stetig
ii f ist stetig in 0
iii f ist beschränkt, d.h. es gibt ein $c > 0$, so daß $\|f(v)\| \le c \cdot \|v\|\ \ v \in V$.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii) ": trivial
"(ii) $\Rightarrow$ (iii) ": Zu $\epsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\|f(v)\| < 1$ für $\|v\| < \delta$. Für alle $v \neq 0$ ist $\|\frac{\delta}{2}\frac{v}{\|v\|}\| < \delta$, also

$$\|f(\frac{\delta}{2}\frac{v}{\|v\|})\| < 1\ ,\ \frac{\delta}{2\|v\|}\|f(v)\| < 1\ ,\ \|f(v)\| < \frac{2}{\delta}\|v\|\ ,\ c = \frac{2}{\delta}\ v \in V$$

"(iii) $\Rightarrow$(i) ": Es sei $\epsilon > 0\ ,\ \delta = \frac{\epsilon}{c}$. Wenn $\|v - v_0\| < \delta$ ist, dann ist $\|f(v) - f(v_0)\| = \|f(v - v_0)\| \le c \cdot \|v - v_0\| < c \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

2.20 Beispiele: i Ist V endlich-dimensional, dann ist jede lineare Abbildung $f : V \to W$ stetig. Wenn mit $\|...\|_V,\ \|...\|_W$ die Normen bezeichnet sind, $(v_1, .., v_n)$ eine Basis für V ist, dann wird durch

$$\|v\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_n|\ ,\ v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

eine Norm auf V definiert, welche zu $\|...\|_V$ äquivalent ist.
Daher ist für $v \in V$:

$$\|f(v)\|_W = \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(v_k)\|_W \le \underbrace{max\{\|f(v_k)\|_W : k = 1, .., n\}}_{c_1} \cdot \|v\| \le c_1 \cdot c_2 \cdot \|v\|_W$$

Daher ist f stetig.

ii Es sei $C^n([a,b],K)$ der K-VR der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f:[a,b]\to K,\ k=0,1,2....$ Die Abbildung $d: C^k \to C^{k-1},\ f\mapsto f'$ ist linear.
Für die L^∞-Norm $\|f\|_\infty = max\{|f(t)| : t\in[a,b]\}$ ist d unstetig.

2.21 Definition: Eine lineare surjektive Abbildung $f: V\to W$ zwischen normierten K-VRen heißt Normisomorphie, wenn für alle $v\in V$ gilt:

$$\|f(v)\| = \|v\|$$

2.22 Bemerkungen: 0 Normisomorphien sind Isomorphien

i Normisomorphe VRe sind gleichzeitig vollständig oder nicht vollständig.

ii Jeder endl.-dim. normierte VR ist vollständig, da er normisomorph zu K^n mit L^1-Norm ist. K^n ist vollständig.

2.23 Satz: Es sei V ein normierter VR über K. Dann gilt:

i Es gibt einen normierten K-VR $\hat{V}$ mit folgenden Eigenschaften:
(a) $\hat{V}$ ist vollständig
(b) V normisomorph zu einem dichten Teilraum von $\hat{V}$

ii Durch a), b) ist $\hat{V}$ bis auf Normisomorphie eindeutig bestimmt und heißt „die "Vervollständigung von V.

Beweis:
a) Es sei CF(V) die Menge alle Cauchyfolgen in V. Dies ist in natürlicher Weise ein K-VR. Für $(v_n)\in CF(V)$ ist

$$|\ \|f_n\| - \|v_m\|\ | \le \|v_n - v_m\|\ ,$$

daher ist $(\|v_n\|)$ ebenfalls Cauchy-Folge (in R). Wir setzen $\|(v_n)\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|v_n\|$ Dieses ist eine Halbnorm auf CF(V).
(N$\frac{1}{2}$): $\|(v_n)\|_1 \ge 0$ klar.
(N2): $\|\alpha(v_n)\|_1 = \|(\alpha\cdot v_n)\|_1 = \lim\|\alpha - v_n\| = \lim(|\alpha|\cdot\|v_n\|) = |\alpha|\cdot\lim\|v_n\| = |\alpha|\cdot\|(v_n)\|_1$
(N3): ... (Dreiecksungleichung) b) Es gilt $\|(v_n)\|_1 = 0$ genau dann, wenn $\lim\|v_n\| = 0,\ \lim v_n = 0$. Diese Folgen heißen Nullfolgen, bilden einen Untervektorraum NF(V) von CF(V). Bilde den Faktorraum $\hat{V} = CF(V)\backslash NF(V)$.
($W\subset V$ Unterraum: $v+w = \{v+w :\ w\in W\}$)
Die Norm auf $\hat{V}$ wird repräsentantenweise definiert: ist $\hat{V}$ die Klasse von $v=(v_n)\in CF(V)$, dann setze

$$\|\hat{v}\|_2 = \|v\|_1 = \|(v_n)\|_1 = \lim\|v_n\|\ .$$

Falls $w\in\hat{V},\ w=(w_n)\in CF(V)$, also w-v eine Nullfolge ist, dann folgt aus $|\|w_n\| - \|v_n\|| \le \|w_n - v_n\|$:

$$\lim\|v_n\| = \lim\|w_n\|\ .$$

Daher ist die Def. von $\|\hat{v}\|_2$ unabhängig von der Repräsentantenwahl. Die Gesetze (N$\frac{1}{2}$), (N2), (N3) übertragen sich unmittelbar.
Es sei außerdem $\|\hat{v}\|_2 = 0$. Für jede Cauchy-Folge (v_n) aus $\hat{V}$ gilt dann $\lim\|v_n\| = 0$, also $(v_n)\in NF(V) = O_{\hat{V}}$
c) Die Abbildung $f: V\to\hat{V}$ ordne jedem $v\in V$ die Klasse der konstanten Folge (v_n). $v_n = 0$, zu. Offenbar ist f linear. Sie ist normisomorph auf dem Teilraum f(v):

$$\|f(v)\|_2 = \|(v)\|_1 = \|v\|$$

Ist $\hat{v} \in \hat{V},\ v = (v_n)_{n\in N}$ Repräsentant von $\hat{V},\ \epsilon > 0$; es gibt ein $n_0 \in N$, so daß $\|v_n - v_m\| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Wähle $N \geq n_0$ fest, und setze $\hat{W} = f(v_N),\ w = (w_n),\ w_n = v_N$.
Dann ist $\|\hat{w} - \hat{v}\|_2 = \|(w_n) - (v_n)\|_1 = \|(v_N) - (v_n)_{n\in N}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|v_N - v_n\| < \epsilon$. Also : $f(V) \subset \hat{V}$ liegt dicht.
d) Die Vollständigkeit von $\hat{V}$ ergibt sich so:
Es sei $(\hat{v}_n)_{n\in N}$ eine Cauchy-Folge in $\hat{V}$. Zu jedem $n \in N$ gibt es ein $w_n \in V$ mit $\|f(w_n) - \hat{v}_n\|_2 < \frac{1}{n}$. (w_n) ist Cauchy-Folge: Es sei $\epsilon > 0$. Dann gilt:

$$\|w_n - w_m\| = \|f(w_n) - f(w_m)\|_2 \leq \underbrace{\|f(w_n) - \hat{v}_n\|_2}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{\|\hat{v}_n - \hat{v}_m\|_2}_{<\epsilon} + \underbrace{\|\hat{v}_m - f(w_m)\|_2}_{<\frac{1}{m}} \text{ für } n, m \geq n_0$$

Es sei $\hat{w} = (\hat{w}_n)_{k\in N} \in \hat{V}$. Dann gilt $W = \lim \hat{v}_n$, denn

$$\|\hat{w} - \hat{v}_n\|_2 \leq \underbrace{\underbrace{\|\hat{w} - f(w_n)\|_2}_{=\lim_{k\to\infty}\|w_k - w_n\|} + \underbrace{\|f(w_n) - \hat{v}_n\|_2}_{<\frac{1}{n}},}_{<\epsilon \text{ für } n\geq n_0} \ f(w_n) = (u_k)_{k\in N},\ u_k = w_n.$$

e) Zur Eindeutigkeit nehmen wir an, wir haben einen Banachraum $\hat{V}$ mit Norm $\|..\|_3$, so daß $g : V \to \hat{V}$ normisomorphe Einbettung auf einen dichten Teilraum von $\hat{V}$ ist. Dann ist $h = g \circ f^{-1}$ eine Normisomorphie von $f(V) \subset \hat{V}$ auf $g(V) \subset \hat{V}$
Dieses h setzt sich (eindeutig) zu einer Normisomorphie von $\hat{V}$ auf $\hat{V}$ fort. (s. Aufg.)

2.24 Definition: Für $1 \leq p < \infty$ bezeichne $L^p([a,b], K)$ die Vervollständigung von $C^0([a,b], K)$ bzgl. der L^p-Norm:

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

2.25 Bemerkung: i Mit Hilfe der Integrationstheorie von Lebesgue läßt sich zeigen, daß die L^p-Räume tatsächlich aus Funktionen (genauer: Funktionenklassen) bestehen.

ii Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt: $L^q < L^p$,echte Inklusion für $p \neq q$.

2.26 Definition: Es sei V ein normierter K-VR.

i Mit L(V) bezeichnen wir die Menge der stetigen Endomorphismen von V.

ii Für $f \in L(V)$ sei: $\|f\|_O = max\{\|f(v)\| - \|v\| = 1\}$.

2.27 Satz: Ist V ein K-Banachraum, dann ist L(V) eine K-Banach-Algebra, d.h.

i L(V) ist ein K-Banachraum.

ii L(V) ist ein Ring btgl. $+, \circ$, und es gilt für $f, g \in L(V),\ \alpha \in K :\ \alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$.

iii $\|f \circ g\|_O \leq \|f\|_0 \cdot \|g\|_0,\ f, g \in L(V)$

iv $\|id_v\|_0 = 1$

Beweis:

i Für $f \in L(V)$ gibt es ein $k > 0$, so daß fÜr $\|v\| = 1$ gilt: $\|f(v)\| \leq k\ \|f\|_0$ ist das Infimum dieser k. Klar, daß dies eine Norm ist. Ferner hat man $\|f(v)\| \leq \|f\|_0 \cdot \|v\|,\ v \in V$.
Es sei (f_n) Cauchy-Folge in L(V). Für $v \in O$ ist

$$\|f_n(v) - f_m(v)\| = \|(f_n - f_m)(v)\| \leq \|f_n - f_m\|_O \cdot \|v\|$$

also $(f_n(v))_{n\in N}$ Cauchy-Folge. Definiere $f(v) = \lim f_n(v),\ v \in V$. Natürlich ist f linear, f ist auch stetig:
(f_n) ist Cauchy-Folge, also auch $(\|f_n\|_O)$: Daher gibt es ein $M > 0$ mit $\|f_n|_O \leq M$ für alle n. Es folgt: $\|f_n(v)\| \leq \|f_n\|_O \cdot \|v\| \leq M \cdot \|v\|$, also $\|f(v)\| \leq M \cdot \|v\|,\ f \in L(V)$.
Z.z. $\|f_n - f\|_O < \epsilon$ für $n \geq n_0$.
Zu $\epsilon > 0$ gibt es $n_0 \in N$, so daß $\|f_n - f_m\|_O < \epsilon$, für $n, m \geq m_0$. Für alle $v \in V$ ist:

$$\|f_n(v) - f(v)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_n(v) - f_m(v)\| \leq \epsilon\|v\|$$
$$\|f_n - f\|_0 < \epsilon$$

2.28 Definition: Es sei V ein normierter K-VR, (v_n) eine Folge aus V. Wenn die Folge der Partialsummen $s_n = v_1 + ... + v_n$ konvergent ist, nennt man die „unendliche Reihe " $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ konvergent, und schreibt $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \lim_{n\to\infty} s_n$.

2.29 Satz: Es sei V ein K-Banachraum, $f, g \in L(V)$, g bijektiv und $\|f - g\|_O < \|f^{-1}\|_O^{-1}$. Dann ist f bijektiv.

Folgerung: Die Menge GL(V) der invertierbaren stetigen linearen Abbildungen von V in sich ist offen in L(V).

Beweis von 2.29: $f = g \circ (id - g^{-1} \circ (g - f))$
$h = (\sum_{n=0}^{\infty}(g^{-1}(g - f))^n) \circ g^{-1}$ Beh. : konvergiert in L(V)

$$\| \sum_{n=n_0}^{n_1} (g^{-1}(g - f))^n\|_O \leq \sum_{n=n_0}^{n_1} \|g^{-1}(g - f)\|_O^n = \sum_{n=n_0}^{n_1} k^n \ , k < 1$$

h ist invers zu f.

8.3 Hilberträume

K-Vektorräume mit SKP $\langle .., .. \rangle$ sind stets normierte Räume:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

3.1 Definition: Eine K-VR mit SKP heißt Hilbertraum, wenn V als normierter Raum vollständig ist.

3.2 Bemerkungen und Beispiele:
i Jeder SKP-Raum kann nach dem Vorbild von 2.25 vervollständigt werden.
(Die Norm auf V erfüllt die Parallelogramm-Gleichung, kommt also von einem SKP, daß auf V mit dem alten übereinstimmt)
ii Jeder endlich-dimensionale SKP-Raum ist ein Hilbertraum
iii $L^2([a, b], K)$ ist als Vervollständigung von $C^0([a, b], K)$ bzgl. des SKP $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.
iv Der Hilbertsche Folgenraum l^2 aller quadratsummierbaren Folgen aus K ist ein Hilbertraum bzgl. des SKP

$$\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b_n}$$

quadratsummierbar: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert. Vollständigkeit als Aufgabe.

$f \in V^* :\ f(v) = \langle v, w\rangle$

3.3 Satz: Es sei V ein Hilbertraum, $W \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum. Zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $w \in W$ mit $\|v-w\| = inf\{\|v-u\| : \ u \in W\}$. Und für dieses w gilt: $v-w \in W^{\perp}$.
Beweis: Es sei $\alpha = inf\{\|v-u\| : \ U \in W\}$.
Eindeutigkeit: Wenn $w_1, w_2 \in W$ sind mit $\|v-w_1\| = \|v-w_2\| = \alpha$, dann folgt aus der Parallelogramm-Gleichung:

$$\begin{aligned} \|w_1-w_2\|^2 &= \|(v-w_2)-(v-w_1)\|^2 = 2\|v-w_2\|^2 + 2\|v-w_1\|^2 - \|2v-(w_1-w_2)\|^2 \\ &= 4\alpha^2 - 4\|v - \frac{w_1+w_2}{2}\|^2 \\ &\leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0, \text{ da } \frac{w_1+w_2}{2} \in W. \end{aligned}$$

Daher ist $w_1 = w_2$.
Existenz von w: Es gibt eine Folge (w_n), $w_n \in W$, mit $\lim_{k\to\infty} \|v-w_n\| = \alpha$. Wir zeigen, daß (w_n) Cauchy-Folge ist:

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\|^2 &= 2\|v-w_n\|^2 + 2\|v-w_m\|^2 - 4\|v - \frac{w_n+w_m}{2}\|^2 \\ &\leq 2\|v-w_n\|^2 + 2\|v-w_m\|^2 - 4\alpha^2. \end{aligned}$$

Da V vollständig ist, existiert $w = \lim w_n \in V$. Da W abgeschlossen ist, folgt $w \in W$.

$$\|v-w\| = \|(v-w_n)+(w_n-w)\| \leq \underbrace{\|v-w_n\|}_{\to\alpha} + \underbrace{\|w_m - v\|}_{\to 0} \ \to \infty$$

$\Rightarrow \|v-w\| \leq \alpha$, also Gleichheit. w ist der gesuchte Faktor.
Es sei $u \in W, \ \|u\| = 1, \ \beta \in K$. Dann ist $(z = v-w)$ wegen $w - \beta u \in W$:

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\leq \|z-\beta u\|^2 (z-\beta u) = v - (w+\beta u) \\ &= \langle z-\beta u, z-\beta u\rangle = \|z\|^2 - \beta\langle u,z\rangle - \overline{\beta}\langle z,u\rangle + |\beta|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\beta\langle u,z\rangle\overline{\beta}\langle z,u\rangle + |\beta|^2 \ \text{, setze } \beta = \langle z,u\rangle \\ 0 &\leq -\langle z,u\rangle\overline{\langle z,u\rangle} - \overline{\langle z,u\rangle}\langle z,u\rangle + \langle z,u\rangle\overline{\langle z,u\rangle} \\ 0 &\leq -|\langle z,u\rangle|^2 \ \Rightarrow \langle z,u\rangle = 0 \\ &\Rightarrow z = v-w \in W^{\perp} \end{aligned}$$

3.4 Satz: Ist V ein Hilbertraum, $f : V \to D$ ein stetig lineares Funktional, dann gibt es genau ein $w \in V$, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$f(v) = \langle v, w\rangle \ .$$

Beweis: Falle $f = 0$, wähle $w = 0$.
Andernfalls ist $W = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ein abgeschlossener Unterraum von V mit $W \neq V$. Nach 3.3 existiert ein $u \in W^{\perp}$ mit $\|u\| = 1$. Für $v \in V$ setze $z = f(v)\cdot u - f(u)\cdot v$. Dann ist $f(z) = f(v)\cdot f(u) - f(u)\cdot f(v) = 0$, also $z \in W \ , \ \langle z,u\rangle = 0$,

$$0 = \langle f(v)\cdot u - f(u)\cdot v, u\rangle = f(v)\cdot \underbrace{\langle u,u\rangle}_{=1}\cdot f(u)\cdot\langle v,u\rangle$$

$f(v) = f(u)\langle v,u\rangle = \langle v, \overline{f(u)}\cdot u\rangle$. Setze $w = \overline{f(u)}\cdot u$.
Eindeutigkeit: Falls $w' \in V$ mit $f(v) = \langle v,w'\rangle$ für alle $v \in V$, folgt: $\langle v, w-w'\rangle = 0, \ v \in V, \ \langle w-w', w-w'\rangle = 0, \ w = w'$

3.5 Folgerung: (Riesz-Fischer) Ist V ein Hilbertraum, dann ist die Abl. $J(v) = \langle ..., v\rangle$, ein Semi-Isomorphismus.

3.6 Bemerkung: Wie im endlich-dim. Fall kann man zu $f \in L(v)$ die adjungierte Abb. $f^* \in L(v)$ definiert werden: für jedes $w \in V$ ist $\varphi(v) = \langle f(v), w\rangle$, $v \in V$, ein stetiges lineares Funktional. Daher gibt es genau ein $u \in V$ mit $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$, $v \in V$. Setze $f^*(w) = u$.
Zeige: $f^* \in L(v)$. Es gilt:

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \ , \ v, w \in V \ .$$

Definiere jetzt: „selbstadjungiert “, „normal “.

3.7 Satz: Es sei V ein Hilbertraum, $W \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Beweis: Für $v \in W \cap W^{\perp}$ ist $\langle v, v\rangle = 0, \ v = 0$.
Zu jedem $v \in V$ gibt es nach 3.3 genau ein $w \in W$ mit $\|v - w\| = inf\{\|v - w\| : u \in W\}$, und es ist $v - w \in W^{\perp}$.
Daher ist $v = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{(v - w)}_{\in W^{\perp}}$.

3.8 Definition: i Ein System $\{v_i\}_{i\in I}$ von Vektoren aus V heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, für alle $i, j \in I$.

ii Ein ONS $\{v_i\}_{i\in I}$ heißt Hilbert-Basis für V, wenn Span $\{v_i \ , \ i \in I\}$ in V dicht liegt.

3.9 Bemerkungen: i Jedes ONS ist lin. unabhängig.

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_i\rangle = 0, \ i = 1, \ldots, n$$

ii Eine Hilbert-Basis ist keine Basis im algebraischen Sinne.

iii Wenn $\{v_i\}_{i\in O}$ Hilbert-Basis ist, dann gibt es zu jedem $v \in V$ eine Folge $(v_n)_{n\in N}$ von Vektoren dieser Basis und ein Folge $(\alpha_n)_{n\in N}$, $\alpha_n \in K$, so daß

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$$

im Sinne der Normkonvergenz.

3.10 Definition: Es sei V ein Banachraum. Ein System $\{v_i\}_{i\in I}$ von Vektoren aus V heißt summierbar zur Summe $v \in V$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $J_\epsilon \subset I$ existiert, so daß für jede endliche Menge J mit $J_\epsilon \subset J \subset I$ gilt:

$$\|v - \sum_{i\in J} v_i\| < \epsilon$$

3.11 Satz: Es sei V ein Banachraum, $\{v_i\}_{i\in I}$, $\{w_i\}_{i\in I}$ Systeme von Vektoren aus V.

i $\{v_i\}_{i\in I}$ ist summierbar genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Menge $J_0 \subset I$ existiert, so daß für jede endliche Menge $J \subset I$ mit $J \cap J_0 = \emptyset$ gilt:

$$\|\sum_{i\in J} v_i\| < \epsilon$$

ii $\{v_i\}_{i\in J}$ ist summierbar zur Summe v genau dann, wenn $v_i \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $i \in I$ und für jede Abzählung $v_1, v_2, \ldots$ dieser v_i gilt:

$$v = \lim_{n\to\infty} v_j \ .$$

iii Wenn $\{v_i\}_{i\in I},\ \{w_i\}_{i\in I}$ summierbar sind, dann auch $\{\alpha v_i\}_{i\in I},\ \alpha \in K,\ \{v_i + w_i\}_{i\in I}$ und es gilt:

$$\alpha \sum_{i\in I} v_i = \sum_{i\in I} \alpha v_i \ , \quad \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} w_i = \sum_{i\in I} v_i w_i$$

iv Wenn V ein Hilbertraum ist, $\{v_i\}_{i\in I}$ summierbar, dann gilt für alle $w \in V$:

$$\left\langle \sum_{i\in I} v_i, w \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle v_i, w\rangle \ .$$

Beweis:

i "$\Rightarrow$ ": Ist $\{v_i\}_{i\in I}$ summierbar zu v, $\epsilon > 0$, dann gibt es eine endliche Menge $J_0 \subset I$ mit $\|\sum_{i\in J'} v_i - v\| < \frac{\epsilon}{2}$ für $J' \supset J$.
Für jede endliche Menge $J \subset I$ mit $J \cap J_0 = \emptyset$ gilt:

$$\|\sum_{i\in J} v_i\| = \|\sum_{i\in J\cup J_0} v_i - \sum_{i\in J_0} v_i\| \leq \underbrace{\|\sum_{i\in J\cup J_0} v_i - v\|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\|v - \sum_{i\in J_0} v_i\|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

"$\Leftarrow$ ": Zu jedem $n \in N$ gibt es eine MengeJ_n, so daß aus $J \cap J_n = \emptyset$ folgt: $\|\sum_{i\in J} v_i\| < \frac{1}{n}$. Setze $I_n = J_1 \cup \ldots \cup J_n,\ w_n = \sum_{i\in I_n} v_i$. Für $m > n$ ist $\|w_m - w_n\| = \|\sum_{i\in I_m - I_n} v_i\| < \frac{1}{n}$. (w_n) ist Cauchy-Folge im Banachraum V, daher existiert $v = \lim w_n$. Wir zeigen $\sum_{i\in I} v_i = 0$. Ist $\epsilon > 0$, n so groß, daß $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ und $\|w_n - v\| < \frac{\epsilon}{2}$: Für jede endliche Menge $J \supset I_n$ ist dann

$$\|\sum_{i\in J} v_i - v\| \leq \underbrace{\|\sum_{i\in J - I_n} v_i\|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\|\sum_{i\in I_n} v_i - v\|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

ii Ist $\{v_i\}_{i\in I}$ summierbar und haben die J_n dieselbe Bedeutung wie eben, dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$ abzählbar. Für $i \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$ ist $\|v_i\| < \frac{1}{n}$ für alle n, also $v_i = 0$. Der Rest ist klar.

iii leicht.

iv Nach (ii) ist $v = \sum_{i\in I} v_i = \sum_{j=1}^{\infty} v_j$. Dann folgt $|\langle v, w\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, w\rangle| = |\langle \sum_{j=n+1}^{\infty} v_j, w\rangle| \leq \|\sum_{j=n+1}^{\infty} v_j\| \cdot \|w\| \leq \epsilon \cdot \|w\|$

3.12 Satz: Es sei V ein Hilbertraum, $\{v_i\}_{i\in I}$ ien ON-System: Dann gilt:

i $\sum_{i\in I} |\langle v, v_i|^2 \leq \|v\|^2,\ v \in V$ (Besselsche Ungleichung)

ii $\sum_{i\in I} |\langle v, v_i\rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung) genau dann, wenn $v = \sum_{i\in I} \langle v, v_i\rangle v_i$.

Beweis:

i Für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle v - \sum_{i\in J} \langle v, v_i\rangle v_i, v - \sum_{i\in J} \langle v, v_i\rangle v_i \right\rangle \\ &= \|v\|^2 - \left\langle v, \sum_{i\in J} \langle v, v_i\rangle v_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i\in J} \langle v, v_i\rangle v_i, v \right\rangle + \sum_{i\in J} |\langle v, v_i\rangle|^2 \\ &= \|v\|^2 - \sum_{i\in J} |\langle v, v_i\rangle|^2 \end{aligned}$$

ii $\|v - \sum_{i\in I}\langle v, v_i\rangle v_i\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i\in I}|\langle v, v_i\rangle|^2 = 0$ genau dann, wenn $v = \sum \ldots$

3.13 Satz: Es sei V ein Hilbertraum, $\{v_i\}_{i\in I}$ ein ONS. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i $\{v_i\}_{i\in I}$ ist max. ONS

ii Falls für $v \in V$ gilt: $\langle v, v_i\rangle = 0$ für alle $i \in I$, dann ist $v = 0$.

iii $\{v_i\}_{i\in I}$ ist Hilbertbasis.

iv Für alle $v \in V$ ist $v = \sum_{i\in I}\langle v, v_i\rangle v_i$ (Fourier-Entwicklung)

v Für alle $v, w \in V$ ist $\langle v, w\rangle = \sum_{i\in I}\langle v, v_i\rangle\overline{\langle w, v_i\rangle}$ (Parsevalsche Identität)

vi Für alle $v \in V$ ist $\|v\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle v, v_i\rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung)

Beweis:

i $\Rightarrow$ ii : Es sei $v \in V$ und $\langle v, v_i\rangle = 0$ für alle $i \in I$. Wenn $v \neq 0$ ist, können wir $\|v\| = 1$ annehmen. Dann ist $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{v\}$ ONS, im Widerspruch zur Maximalität von $\{v_i\}_{i\in I}$.

ii $\Rightarrow$ iii : W = Abschluß Span $\{v_i : i \in I\}$: Wenn $W \neq V$ ist, dann gibt es $v \in W^{\perp}$, $v \neq 0$. Es ist $\langle v, v_i\rangle = 0$ für alle $i \in I$, also $v = 0$ nach (ii).

iii $\Rightarrow$ iv : Wenn $\{v_i\}$ Hilbertbasis ist, gibt es zu jedem $v \in V$ Koeff. $\alpha_i \in K$ mit $v = \sum_{i\in I}\alpha_i v_i$: Aus $\langle v, v_j\rangle = \langle\sum_{i\in I}\alpha_i v_i, v_j\rangle = \sum_{i\in I}\alpha_i\langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j$ folgt die Beh.

iv $\Rightarrow$ v : leichte Rechnung

v $\Rightarrow$ vi : v = w

vi $\Rightarrow$ i : Wenn es $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $\langle v, v_i\rangle = 0$ für alle $i \in I$ gibt, dann folgt: $\|v\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle v, v_i|^2 = 0$. Widerspruch.

3.14 Satz: Jeder Hilbertraum besitzt eine Hilbertbasis. Genauer: Jedes ONS kann zu einem maximalen ONS erweitert werden.

Beweis: Es sei M ONS in V. Mit E sei die Menge aller ONS in V bezeichnet, die M enthalten. E ist teilweise geordnet bzgl. "$\subseteq$ ". Es sei F eine total geordnete Teilmenge von E. Dann ist $\mathcal{A} = \cup_{A\in F}A$ obere Schranke für F. Natürlich ist für jedes $A \in F$: $A \subseteq \mathcal{A}$.
Sind $v, w \in \mathcal{A}$, dann gibt es $A, B \in F$ mit $v \in A$, $w \in B$. Da F total geordnet ist, gilt $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. O.B.d.A. ist $v, w \in A$. Da A orthonormal ist, gilt

$$\langle v, w\rangle = \begin{cases} 1 & \text{, wenn v=w ,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ ist obere Schranke für F.
Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein max. Element in E.

8.4 Fourier-Reihen

4.1 Definition: Eine Funktion $f : R \to C$ heißt periodisch mit der Periode 2π, wenn für alle $t \in R$ gilt:

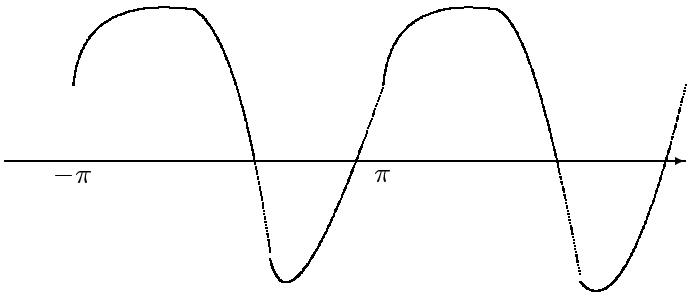
$$f(t + 2\pi) = f(t) \ .$$

4.2 Bemerkungen: i Ist $T = \{z \in C : |z| = 1\}$, dann definiert jede 2π-periodische Funktion $f : R \to C$ eine Funktion $F : T \to C$:

$$F(z) = f(t),\ z = e^{it} \quad t \mapsto t + 2k\pi$$

Ist umgekehrt $F : T \to C$ gegeben, dann ist $f(t) = F(e^{-it}),\ t \in R$, eine 2π-periodische Funktion $f : R \to C$.

ii Ist $f : [-\pi, \pi] \to C$ stetig, $f(-\pi) = f(\pi)$, dann gibt es genau eine 2π-periodische Funktion $\tilde{f} : R \to C$, die auf $[-\pi, \pi]$ mit f übereinstimmt.



Für $\tilde{f}$ schreiben wir wieder f.

4.3 Definition: i Mit $C^0(T)$ sei der C-VR der stetigen Funktionen mit $f : T \to C$ bezeichnet. Wir identifizieren diese Funktion mit den stetigen 2π-periodischen Funktionen $f : R \to C$.

ii Auf $C^0(T)$ wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

ein SKP definiert.

iii $L^2(T)$ sei die Vervollständigung $C^0(T)$.

4.4 Satz: Für $n \in U$ sei

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \ , \ t \in R \ .$$

Dann ist $\{f_n\}_{n \in Z}$ ein ONS für $L^2(T)$:

Beweis:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{e(n-m)t} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$n \neq m : \ \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)t}$$

4.5 Definition: Die Elemente von Span $\{f_n : \ n \in Z\}$ heißen trigonometrische Polynome.

4.6 Bemerkung: Jedes trigonometrische Polynom hat eine Darstellung

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \ , \ C_n \in C \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n (e^{it})^n = \sum c_n \xi^n \end{aligned}$$

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt \rightsquigarrow P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \ a_n, b_n \in C$$

4.7 Satz: (Approximationssatz von Weierstraß)

Die trigonometrischen Polynome liegen dicht im Banachraum $C^0(T)$ bzgl. der L^∞-Norm.

Beweis:

i Setze für $k \in N$:

$$Q_k(t) = c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k , \ t \in [-\pi, \pi] \ c_k \in R$$

trigonometrische Polynome, da man jede Potenz $\cos mt$ datrstellen kann als Linearkombination von Funktionen $\cos lt$.

$$Q_k(t) \geq 0 (*)$$

Bestimme c_k so, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1 \ \text{ ist.}$$

Die Q_k sind gerade Funktionen (d.h. $Q_k(-t) = Q_k(t)$)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \\ &\geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^t \sin t dt = \frac{c_k}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k dx = \frac{2c_k}{\pi(k+1)} \ , \ \text{also} \end{aligned}$$

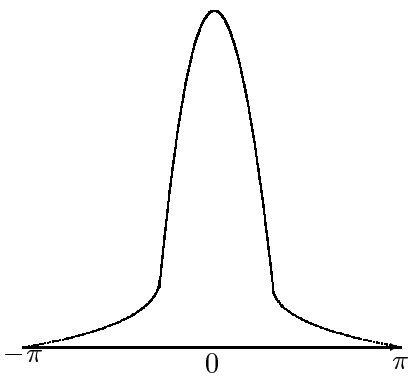
$$\boxed{c_k \leq \tfrac{\pi(k+1)}{2}} \quad x = \cos t$$

Die Q_k sind auf $[0, \pi]$ monoton fallend, daher gibt es für jedes $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} Q_k(t) &\leq Q_k(\delta) \leq \frac{\pi(k+1)}{2} \left(\underbrace{\frac{1+\cos\delta}{2}}_{=\alpha}\right)^k \\ &= \frac{\pi}{2}(k+1)\alpha^k \ \longrightarrow 0 \text{ für } k \to \infty \\ &\quad 0 \leq \delta \leq |t| \leq \pi \quad 0 \leq \alpha < 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt: wenn $y_n(\delta) = sup\{Q_k(t) : \ \delta \equiv |t| \leq \pi\}$, dann gilt:

$$\lim_{k \to \infty} y_k(\delta) = 0 \ . \qquad (***)$$



ii Für $f \in C^0(T)$ definiere

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds \ , \ t \in R$$

Dei Substitution $\tau = t - s$ liefert

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi} f(\tau) Q_k(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) Q_k(t-s) ds \end{aligned}$$

Wegen der 2π-Periodizität des Integranden. Q_k ist trigonomisches Polynom:

$$Q_k(t-s) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{in(t-s)}$$

Daher:

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_k}^{N-k} a_{n,k} e^{int} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \\ &= \sum_{n=-N_k}^{N_k} b_{n,k} e^{int} \end{aligned}$$

Die P_k sind also trigonometrische Polynome.

iii Wir zeigen nun,daß die P_k auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

$$\begin{aligned} P_k(s) f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t-s) - f(t) \right) Q_k(s) ds \ . \\ |P_k(t) - f(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \end{aligned}$$

Es sei $\epsilon > 0$. Da f auf R gleichmäßig stetig ist, gibt ees ein $\delta > 0$, so daß $|f(t) - f(s)| < \epsilon$ für $|t - s| < \delta$. Dann ist

$$|P_k(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(t-s) - f(t)|}_{I_1} Q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \underbrace{|f(t-s) - f(t)|}_{I_2} Q_k(s) ds$$

$$I_1 \leq \frac{1}{2\pi} \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s) ds = \epsilon$$

$$I_2 \leq 2 \|f\|_\infty \ y_k(\delta) < \epsilon$$

$$|P_k(t) - f(t)| < \epsilon \text{ für k groß und alle } t \in [-\pi, \pi]$$

4.7' Bemerkung: Q_k stetige Funktionen auf $[-\pi, \pi]$

i $Q_k \geq 0$

ii $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1$

iii Für $|t| \geq d > o$ konvergiert die Q_k gleichmäßig gegen 0.

$$P_k = f * Q_k \ , \ P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds$$

1. allg. Prinzip: $f * Q_k$ konv. glm. gegen $f \in C^0$
2. allg. Prinzip: eine Faltung ist so „gut "wie der beste Teilnehmer.

4.8 Folgerung:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}_{n\in Z} \quad \text{ist eine Hilbertraumbasis für } C^2(T)\ .$$

Beweis: Ist $f \in C^0(T),\ \epsilon > 0$, dann gibt es ein trigonometrisches Polynom P mit $\|f-P\|_\alpha < \epsilon$. Es folgt

$$\|f-P\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-P(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi}\|f-P\|_\infty < \sqrt{2\pi}\cdot\epsilon$$

Die trigonometrischen Polynome dicht in $C^0(T)$ bzgl. der L^2-Norm, also auch in $L^2(T)$.

4.9 Folgerung: Für jede Funktion $f \in C^0(T)$ konvergiert ihre Fourier Reihe

$$\sum_{n\in Z} a_n e^{int},\ a_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\rangle - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

im L^2-Sinne gegen f.

4.10 Warnung: Selbst für stetige Funktionen folgt daraus keineswegs, daß die Fourier-Reihe punktweise gegen f konvergiert. (Gibsches Phänomen) 1958 L. Larleson

8.5 Orthogonal-Polynome

5.1 Definition i Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall in R, die Funktion $w_b :\ (a,b) \to R$ sei stetig und positiv. Ferner existiere

$$\int_a^b w(t)dt = \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\int_{a+\epsilon_1}^{b-\epsilon_2} w(t)dt$$

Für $f,g \in C^0[a,b]$ (reellwertig) setze man

$$\langle f,g\rangle_w = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$$

Wie früher zeigt man, daß dies ein SKP auf $C^0[a,b]$ ist (gewichtetes l^2-SKP). Mit $L^2([a,b],w)$ sei die Vervollständigung von $C^0[a,b]$ in der daraus abgeleiteten Norm bezeichnet.

ii P sei der R-VR der Polynome mit reellen Koeffizienten. Wir fassen P als Unterraum von $C^0[a,b]$ auf.

5.2 Satz (Approximationssatz von Weierstraß)
P ist dicht in $C^0[a,b]$ bzgl. der L^∞-Norm.

5.2' Folgerung: P ist dicht in $L^2([a,b],w)$.

5.3 Satz: i Es gibt eine Folge $(p_n)_{n\in N\cup\{0\}}$ von reellen Polynomen mit folgenden Eigenschaften.

(a) grad $p_n = n$.
(b) $\langle p_n, p_m\rangle_w = \delta_{nm}$
(c) Span $\{p_o, p_1, \ldots, p_n\}$ = Span $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$.

ii $(p_n)_{n\in N\cup\{0\}}$ ist Hilbertbasis für $L^2([a,b],w)$.

iii Ist $(q_n)_{n\in N\cup\{0\}}$ eine weitere Folge mit den Eigenschaften a), b), c), dann gibt es eine Folge $(\alpha_n)_{n\in N\cup\{0\}}$, $\alpha_n \in \{-1,1\}$, mit $q_n = \alpha_n p_n$.

Beweis:

i Die Monome $1, t, t^2, \ldots, t^n$ bilden eine allgemeine Basis von P. Nach dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt (Satz 1.11 in Kap. VII) kann diese Basis orthonormalisiert werden, so daß c) erfüllt ist. a) ergibt sich auf c) per Induktion.

ii $p = \text{Span}\,\{p_0, p_1, \ldots\}$ ist dicth in L^2 nach 5.2' .

iii Wegen a) und c) gibt es für jedes $n \in N$ Konstanten $\beta_0, \ldots, \beta_n \in R$ mit $q_n = \beta_0 p_0 + \ldots + \beta_n p_n$. Es folgt für $k = 0, \ldots, n$.

$$\langle q_n, p_k\rangle_w = \beta_k \, box, daher q_n = \langle q_n, p_0\rangle_w p_0 + \ldots + \langle q_n, p_n\rangle_w p_n \ .$$

Induktion über n. Für $n = 0$ klar, denn p_0 ist Konstante der Norm 1. Wenn für $k = 0, \ldots, n-1$ die Beh. gilt, dann ist $q_k = \alpha_k p_k$, $\alpha_k \in \{-1,1\}$, $K = 0, \ldots, n-1$. Dann folgt $\langle q_n, p_k\rangle = \langle q_n, \frac{1}{\alpha_k} q_k\rangle = 0$, $q_n = \langle q_n, p_n\rangle p_n = \beta_n p_n$, $|\beta_n| = 1$.

5.4 Bezeichnung: Wir schreiben

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_n^{(n)} t^k$$

Beachte: $\alpha_n^{(n)} \neq 0$.

5.5 Rekursionsformel: Für $n \in N$ gilt:

$$p_{n+1}(t) = (a_n t + b_n) p_n(t) - c_n p_{n-1}(t) \ ,$$
$$a_n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{(n)}} \ , \ b_n = a_n \left(\frac{\alpha_n^{(n+1)}}{\alpha_{(n+1)}^{(n+1)}} - \frac{\alpha_{n-1}^{(n)}}{\alpha_n^{(n)}} \right) \ , \ c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \ .$$

Beweis: Für $n \in M$ ist $p_{n+1}(t) - a_n + p_n(t)$ ein Polynom vom Grad $\leq$ n. Daher gibt es eindeutig bestimmte $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in R$ mit $p_{n+1}(t) - a_n + p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k p_k(t)$. Für $j \in \{0, \ldots, n\}$ ist $\langle p_{n+1} - a_n + p_n, p_j\rangle_w = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \langle p_k, p_j\rangle_w = \beta_j$, $\beta_j = -a_n \langle t p_n, p_j\rangle_w = -a_n \langle p_n, t p_j\rangle_w$. Für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ folgt: $\beta_j = 0$.
Also: $p_{n+1}(t) - a_n t p_n(t) = \beta_{n-1} p_{n-1}(t) + \beta_n p_n(t)$. Vergleicht man die Koeffizienten von t^n, erhält man $\alpha_n^{(n+1)} - a_n \, \alpha_{n-1} \beta_{n-1}^{(n)} = \beta_n \alpha_n^{(n)}$, $\beta_n = \frac{\alpha_n^{(n+1)}}{\alpha_n^{(n)}} - a_n \frac{\alpha_{n-1}^{(n)}}{\alpha_n^{(n)}} = a_n \left(\frac{\alpha_n^{(n+1)}}{\alpha_{n+1}^{(n+1)}} - \frac{\alpha_{n-1}^{(n)}}{\alpha_n^{(n)}} \right) = b_n$.
Daher

$$-\beta_{n-1} p_{n-1}(t) = -p_{n+1}(t) + (a_n t + b_n) p_n(t) \text{Es folgt:}$$

$$\begin{aligned} -\beta_{n-1} &= -\beta_{n-1} \langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle_w \\ &= a_n \langle t p_n, p_{n-1}\rangle_w = a_n \langle p_n, t p_{n-1}\rangle_w \\ &= a_n \langle p_n, \alpha_{n-1}^{(n-1)} t^n\rangle = a \alpha_{n-1}^{(n-1)} \langle p_n, t^n\rangle_w \\ &= a_n \frac{\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{\alpha_n^{(n)}} \langle p_n, p_n\rangle_w = \frac{a_n}{a_{n-1}} \end{aligned}$$

5.6 Beispiele: i $[a,b] = [-1,1]$, $w \equiv 1$

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} 2^{-n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-2k \\ n \end{pmatrix} t^{n-2k}$$

Legendre-Polynome

ii $[a,b] = [-1,1],\ w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-.t^2}}$

$$p_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2t)^{n-2k}$$

$$T_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} p_n(t)$$

heißen Tschebysscheff-Polynome 1. Art. Es gilt:

$$T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi \ .$$

Kapitel 9

Konvexe Mengen und lineare Optimierung

9.1 Geometrische Eigenschaften konvexer Mengen

1.1 Definition: i Für $x, y \in R^n$ sei

$$L(x,y) = \{\alpha x + (1-\alpha)y \ : \ \alpha \in R\}$$

affine Gerade, und

$$S(x,y) = \{\alpha x + (1-\alpha)y \ : \ \alpha \in [0,1]\}$$

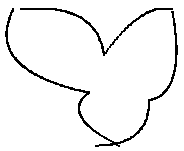
die Strecke zwischen x,y.

ii Eine Menge $k \subset R^n$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in k$ gilt:

$$S(x,y) \subset k \ .$$

konvex

nicht konvex



nicht konvex

iii Eine Menge $H \subset R^n$ heißt Halbraum, wenn es eine Linearform $\varphi : \ R^n \ \to R$ gibt und ein $b \in R$ mit

$$H = \{x \in R^n \ : \ \varphi(x) + b \geq 0\} \ ,$$
$$\{x \in R^n \ : \ \varphi(x) + b = 0\} \text{ affine Hyperebene.}$$

1.2 Satz: i Jeder Halbraum ist konvex, auch jede Hyperebene.

ii Ist $\{k_i\}_{i \in I}$ ein System konvexer Mengen, dann ist $\bigcap_{i \in I} k_i$ konvex.

iii Die Lösungsgesamtheit eines linearen Ungleichunssstems:

$$k = \{x \in R^n : \varphi_i(x) + b_i \geq 0 \ , \ i \in I\}$$

ist konvex.

Beweis:

i Sind $x, y \in H$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, dann ist $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \geq (\alpha + \beta)(-b) = -b$, also $\alpha x + \beta y \in H$

ii Für $x, y \in \bigcap k_i$ ist $x, y \in k_i$ für jedes $i \in I$. Da die k_i konvex sind, ist $s(x, y) \subset k_i$ für alle $i \in I$, also auch $s(x, y) \subset \bigcap k_i$.

iii Folgt aus (i),(ii)

1.3 Definition: i Ist $M \subset R^n$, so bezeichnen wir als konvexe Hülle von M (i.Z. kon(M)) die kleinste konvexe Menge k mit $M \subset k$. (Diese existiert: Durchschnitt aller konvexen Mengen, die M enthalten.)

ii Sind $x_0, \ldots, x_k \in R^n$, so heißt eine Linearkombination $\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k$ mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in R$ konvex (oder: Konvexkombination), wenn $\alpha_0 \geq 0, \ldots, \alpha_k \geq 0$, $\alpha_0 + \ldots + \alpha_k = 1$.

1.4 Satz: i Ist $k \subset R^n$ konvex, und sind $x_0, \ldots, x_k \in k$, dann enthält k jede Konvexkombination $\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k$.

ii Für jede Menge $M \subset R^n$ ist kon(M) gleich der Menge der Konvexkombinaltion von Punkten aus M.

Beweis:

i Durch Induktion

ii Nach (i) enthält jede konvexe Menge k mit $M \subset k$ sämtliche Konvexkombinationen von Punkten aus M. Daher gilt dies auch für kon(M) als Durchschnitt all dieser konvexen Mengen.
Wir zeigen, daß andererseits die Menge L aller Konvexkombinationen von M konvex ist. Sind $x, y \in L$, dann gibt es endlich viele $z_0, \ldots, z_n \in M$ mit

$$x = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z_j \ , \ y = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z_j \ , \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n \geq 0 \ ,$$

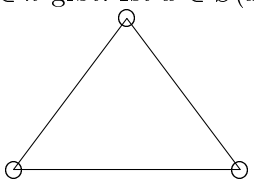
$$\alpha_0 + \ldots + \alpha_k = \beta + \ldots + \beta_k = 1$$

$$\alpha x + \beta y = \sum_{j=0}^{k} (\alpha\alpha_j + \beta\beta_j) z_j \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha\alpha_j + \beta\beta_j) = \alpha \sum \alpha_j + \beta \sum \beta_j = \alpha + \beta = 1$$

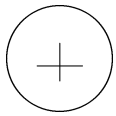
1.5 Definition: Eine Teilmenge $k \subset R^n$ heißt konvexes Polyeder, wenn es endlich viele $x_0, \ldots, x_k \in R^n$ gibt mit $k = kon\{x_0, \ldots, x_k\}$.

1.6 Definition: Ist $k \subset R^n$ konvex, $x \in k$, dann heißt x Extremalpunkt von k, wenn für alle $x_1, x_2 \in k$ gibt. Ist $x \in S(x_1, x_2)$, dann ist $x = x_1$ oder $x = x_2$.

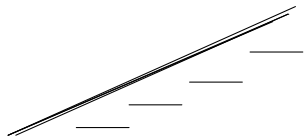


1.7 Bemerkungen und Beispiele i In einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist jeder Randpunkt Extremalpunkt.

ii In einem abgeschlossenen Quadrat sind die (geometrischen) Ecken Extremalpunkte. Dies sind alle Extremalpunkte.



iii Innere Punkte sind nie Extremalpunkte.



iv Ein Halbraum hat überhaupt keine Extremalpunkte.

v $x \in k$ ist Extremalpunkt von k genau dann, wenn $k - \{x\}$ konvex ist.

vi In einem konvexen Polyeder $k = kon(x_0, \ldots, x_k)$ müssen die Punkte $x_0, \ldots, x_k$ nicht alle Extremalpunkte sein.

1.8 Definition: i $x_0, \ldots, x_k \in R^n$ heißen „in allgemeiner Lage "oder „affin unabhängig ", wenn $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ linear unabhängig sind.

ii Eine Menge $S \subset R^n$ heißt k-Simplex, wenn es affin unabhängige $x_0, \ldots, x_n \in R^n$ gibt mit $S = kon\{x_1, \ldots, x_k\}$

1.9 Definition: Wenn $x_0, \ldots, x_k$ affin unabhängig sind, dann gilt dies auch für jede Permutation dieser Punkte.
Ist $\sigma \in S_{k+1}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in R$.

$$\alpha_1(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(0)}) + \ldots + \alpha_k(x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(0)}) = 0$$

dann ist mit $\sigma(i) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 x_{\sigma(1)} + \ldots + \alpha_i x_{\sigma(i)} + \ldots + \alpha_k x_{\sigma(k)} - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) x_{\sigma(0)} = 0 \\
&\alpha_1(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(i)}) + \ldots + \alpha_i(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i)}) + \ldots + \alpha_k(x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(i)}) \\
&-(\alpha_1 + \ldots \alpha_k)(x_{\sigma(0)} - x_{\sigma(i)}) = 0 \\
&\alpha_1(x_{\sigma(1)} - x_0) + \ldots + \alpha_{i-1}(x_{\sigma(i-1)} - x_0) + \alpha_{i+1}(x_{\sigma(i+1)} - x_0) + \ldots \\
&+\alpha_k(x_{\sigma(k)} - x_0) - \alpha_0(x_{\sigma(0)} - x_0) = 0
\end{aligned}$$

$\alpha_0 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$. Nach Vorraussetzung der affinen Unabhängigkeit von $x_0 \ldots x_k$ folgt:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_k = 0 \ .$$

Dann ist $\alpha_i = 0$.

1.10 Bemerkung Ist $S = kon\{x_0, \ldots, x_k\}$ ein k-Simplex, dann sind die $x_0, \ldots, x_k$ Extremalpunkte von S.
Beweis:

$$\begin{aligned}
&x = \alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k \ , \ y = \beta_0 x_0 + \ldots + \beta_k x_k \ , \\
&\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \ldots, \beta_k \geq 0 \\
&\alpha_0 + \ldots + \alpha_k = \beta_0 + \ldots + \beta_k = 1
\end{aligned}$$

Es sei $x_j = \alpha x + (1-\alpha)y$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$

$$x_j = (\alpha\alpha_0 + (1-\alpha)\beta_0)x_0 + \ldots + (\alpha\alpha_k + (1-\alpha)\beta_k)x_k$$

Daher ist

$$(\alpha\alpha_0 + (1-\alpha)\beta_0)(x_0 - x_j) + \ldots + (\alpha\alpha_k + (1-\alpha)\beta_k)(x_k - x_j) = 0$$

Es folgt:

$$\alpha\alpha_i + (1-\alpha)\beta_i = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

Wegen $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ folgt: $\alpha \in \{0, 1\}$.

9.2 Lineare Optimierung

2.1 Problemstellung: Landwirt: 20 ha Land, Stall für 10 Kühe, 2400 Arbeitsstunden / Jahr.

Kuh: 0,5 ha Land, 200 h/Jahr, 340,- DM/Jahr.

1 ha Weizen: 100 h/Jahr, 260,- DM/Jahr.

Frage:

(a) Wie heißt die Kuh?

(b) Mit wieviel Kühen und wieviel ha Weisen läßt sich der größte Gewinn erzielen?

(a) Elsa

(b) Es sei $x \in R$ die Zahl der Kühe, $y \in R$ die Zahl der ha Weizen.
Der Gewinn ist dann $\Psi(x, y) = 350x + 260y$, $\Psi : R^2 \to R$ linear. Das Maximum von Ψ unter den Nebenbedingungen:

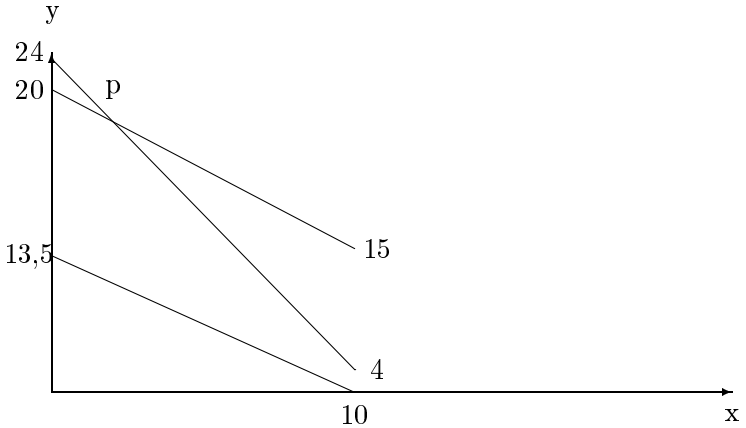
i $x \geq 0$

ii $y \geq 0$

iii $x \leq 10$

iv $0,5x + y \leq 20$

v $200x + 100y \leq 240$



$$X_C = \{(x, y) \in R^2 : \ \Psi(x, y) = C\}$$

$$0,5x + y = 20 \ , \ 2x + y = 24$$

$$P = \left(\frac{8}{3}, \frac{56}{3}\right) = (x_0, y_0)$$

$$C_0 = \Psi(x_0, y_0) = 5786,67 \quad \text{Maximum}$$

2.2 Die allgemeine Optimierungsaufgabe: Gegeben seien Linearformen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ und reelle Zahlen $b_1, \ldots, b_m$. Die Lösungsmenge k des linearen Ungleichungssystems

$$\varphi_1(x) + b_1 \geq 0 \ldots \varphi_m(x) + b_m \geq 0 \text{ ist konvex.}$$

Weiter seien eine Linearform $\Psi : R^n \to R$ gegeben (das Kostenfunktional). Gesucht ist ein $p \in k$ mit $\Psi(x) \geq \Psi(p),\ x \in R$. Solch ein Punkt p heißt optimal.
Die Richtung der Ungleichung bedeutet keine Einschränkung, denn: $\varphi(x) + b \geq 0 \Leftrightarrow -\varphi(x) - b \leq 0$.
$\Psi(p)$ maximal $\Leftrightarrow\ -\Psi(p)$ minimal.
Auch Restriktionen durch lineare Gleichungen sind enthalten:

$$\varphi(x) + b = 0 \ \Leftrightarrow\ \varphi(x) + b \geq 0\ ,\ -\varphi(x) - b \geq 0$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ \varphi_m(x) &= a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Mit $A = (a_{ij}),\ b = (b_1, \ldots, b_m)^z,\ x = (x_1, \ldots, x_n)^z$ wird das System zu

$$Ax + b \geq 0$$

2.3 Lemma: Ist $k \subset R^n$ konvex, $\varphi : R^n \to R$ linear, $x_0 \in k$ mit $\beta = \varphi(x_0) = \min\{\varphi(x) :\ x \in k\}$, dann setze $k' = k \cap \{x \in R^n :\ \varphi(x) = \beta\}$. Dann ist jeder Extremalpunkt von k' auch Extremalpunkt von k.
Beweis: Wenn $p \in k'$ Extremalpunkt ist, dann nehmen wir an, es gäbe $x_1, x_2 \in k$. $0 \leq \alpha \leq 1$, mit $p = \alpha_{x_1} + (1 - \alpha)x_2$.
Da p Extremalpunkt von k' ist, können x_1, x_2 nicht beide in k' liegen. Ist etwa $x_1 \notin k$; dann ist $\varphi(x_1) > \beta$, also folgt aus $\varphi(x_2) \geq \beta :\ \beta = \varphi(p) = \alpha p(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2) > \beta$.

2.4 Satz: Die Lösungsmenge k des linearen Ungleichungssystems $\varphi_1(x) + b_1 \geq 0, \ldots, \varphi_m(x) + b_m \geq 0$ sei kompakt, $\neq 0$. Dann gilt:

i k besitzt mindestens einen Extremalpunkt.

ii Ist $\Psi :\ R^n \to R$ ein lineares Funktional, dann gibt es einen Extremalpunkt $p \in k$ mit $\Psi(p) = \min\{\Psi(x) :\ x \in k\}$.

$$k \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1(x) + b_1 \geq 0 & ,\ \varphi_1, \ldots, \varphi_m :\ R^n \to R \text{ linear} \\ \vdots & \Psi : R^n \to R \text{ linear} \\ \varphi_m(x) + b_m \geq 0 & \end{array} \right.$$

Minimum von Ψ auf k suchen

k konvex $\subset R^n$, $\varphi :\ R^n \to R$ linear, $x_0 \in k :\ \varphi(x_0) = \min\{x \in R^n :\ \varphi(x) = \beta\}$
$p \in k'$ Extremalpunkt $\Rightarrow$ p Extremalpunkt in k.

Beweis:

i Setze $k_0 = k$: Auf k_0 φ_1, da es stetig ist, sein Minimum $a_n :\ \beta_1 = \min\{\varphi_1(x) :\ x \in k_0\} \geq -b_1$.

Definierte $k_1 = d_0 \cap \{x \in R^n : \ \varphi_1(x) = \beta_1\}$.
$k_1 \neq 0$, kompakt. Daher nimmt φ_2 auf k_1 ein Minimum an:

$$\beta_2 = \min\{\varphi_2(x) : \ x \in k_1\} \geq -b_2$$

Definiere k_2 analog , ...
Wir erhalten

$$\begin{aligned} k_m &= k_{m-1} \cap \{x \in R^n : \ \varphi_m(x) = \beta_m\} \\ &= \{x \in R^n : \ \varphi_1(x) = \beta_1, \ldots, \varphi_m(x) = \beta_m\} \end{aligned}$$

k_m ist Lösungsgesamtheit eines linearten Gleichungssystems, also affiner Unterraum des R^n. Da k_m kompakt ist, bleibt nur die Möglichkeit, daß $k_m = \{p\}$. p ist Extremalpunkt von k_m, nach dem Lemma von $k_{m-1}, \ldots, k_0 = k$.

ii Ist $\beta = \min\{\Psi(x) : \ x \in k\}$, dann ist $k' = k \cap \{x \in R^n : \ \Psi(x) = \beta\}$ wieder kompakt und Lösungsgesamtheit eines linearen Unglichungssystems. Nach (i) gibt es einen Extremalpunkt p von k', der nach dem Lemma 2.3 Extremalpunkt von k ist. Natürlich ist $\Psi(p) = \beta$.

2.5 Lemma: Es sei $A \subset R^n$ ein affiner Unterraum, $\dim A \geq 1$. Im R^n sei das lineare Ungleichungssystem $\varphi_1(x) + b_1 \geq 0, \ldots, \varphi_m(x) - b_m \geq 0$ gegeben,

$$k = \{x \in A : \ \varphi_1(x) + b_1 \geq 0, \ldots, \varphi_m(x) + b_m \geq 0\} \ .$$

Ist p ein Extremalpunkt von k, dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit

$$\varphi_i(p) + b_i = 0 \ , \ \varphi_i(x) + b_i \neq 0$$

für wenigstens ein $x \in A$.
Beweis: Wie lassen alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ weg, für die $\varphi_j)(x) + b_j = 0$ für alle $x \in A$. Da k einen Extremalpunkt hat (p), können das nicht alle j sein. Diese seien schon weggelassen. Angenommen, es wäre $\varphi_i(p) + b_i > 0, \ i = 1, \ldots, m$. Dann wäre aber p innerer Punkt von k, wegen der Stetigkeit der φ_i. Innere Punkte können nie Extremalpunkte sein.

2.6 Satz: $k \subset R^n$ sei Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems $\varphi_1(x) + b_1 \geq 0, \ldots, \varphi_m(x) + b_m \geq 0$: Für $p \in k$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i p ist Extremalpunkt von k.

ii Es gibt Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$ derart, daß $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$ linear unabhängig sind und

$$\varphi_{i_1}(p) + b_{i_1} = 0, \ldots, \varphi_{i_n}(p) + b_{i_n} = 0 \ .$$

2.7 Vorläufige Lösung der Optimierungsaufgabe: k sei kompakt , $\neq 0$.

i Man bestimme alle l.u. Teilmengen $\{\varphi_{i_1} \ldots, \varphi_{i_n}\}$ von $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$. ($\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ Gl.Systeme untersuchen), berechne die Lösungen der zugehörigen lin. Gleichungssysteme. Dies ergibt Punke $p_1, \ldots, p_n \in R^n$ $k \leq \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

ii Man kontrolliere durch Einsetzen in die übrigen Ungleichungen, welche der $p_1, \ldots, p_k$ zu k gehören. Dies ergibt Extremalpunkte $p_1, \ldots, p_r \in k$ $r \leq ?$.

iii Ist ein zu optimierendes Funktional $\Psi : R^n \to R$ gegeben, berechne $\Psi(p_1), \ldots, \Psi(p_r)$ und bestimme das Minimum.

Beispiel: Bauernhof mit Kühen, Schweinen, Hühnern, Weizen, Kartoffeln unter 30 Nebenbedingungen zu optimieren, bedeutet $\begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} = 142506$ lineare Gleichungen untersuchen.

Beweis: 2.6: "(ii) $\Rightarrow$ (i) ": Setzt $k_0 = k$,

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 \cap \{x \in R^n : \varphi_{i_1}(x) + b_{i_1} = 0\} \\ &\vdots \\ k_n &= k_{n-1} \cap \{x \in R^n : \varphi_{i_n}(x) + b_{i_n} = 0\} = \{p\} \end{aligned}$$

p ist Extremalpunkt von k_n, nach dem Lemma 21.3 auch von $k_{n-1}, \ldots, k_0 = k$.
"(i) $\Rightarrow$ (ii) ": Wende 2.5 an auf $A_0 = R^n$, $k_0 = k$. Dann gibt es ein i_1 mit $\varphi_{i_1} \neq 0$ und $\varphi_{i_1}(p) + b_{i_1} = 0$. Setze $A_1 = \{x \in R^n : \varphi_{i_1}(x) + b_{i_1} = 0\}$, $k_1 = k_0 \cap A_1$. Da $\varphi_{i_1} \neq 0$ ist, ist $\dim A_1 = n - 1$. p ist auch Extremalpunkt von k_1. Nach 2.5 gibt es $i_2 \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\varphi_{i_2}(p) + b_{i_2} = 0$. Ψ_{i_2} nicht konstant auf A_1. Daher hat $A_2 = \{x \in A_1 : \varphi_{i_2}(x) + b_{i_2} = 0\}$ die $\dim n - 2$. Wir fahren so fort: Schließlich erhalten wir $A_n = \{x \in A_{n-1} : \varphi_{i_n}(x) + b_{i_n} = 0\}$. Es ist $\dim A_n = 0$, $A_n = \{p\}$. Die $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$ sind linear unabhängig, da die Lösung p des Systems $\varphi_{i_1}(x) + b_{i_1} = \ldots = \varphi_{i_n}(x) + b_{i_n} = 0$ eindeutig bestimmt ist.

9.3 Weitere Eigenschaften konvexer Mengen

3.1 Lemma: Ist $k \subset R^n$ kompakt und konvex, $q \in R^n - k$, dann gibt es eine Linearform $\varphi : R^n \to R$ mit $\varphi(x) > \varphi(q)$, $x \in k$.
Beweis: Wir können $q = 0$ annehmen. Die stetige Funktion $x \to \|x\|$ nimmt auf k das Minimum an (in $x_0 \in k$). Definiere $\varphi(x) = \langle x_0, x\rangle$. Ist $x_0 = (a_1, \ldots, a_n)$, dann ist $\varphi(x_0) = a_1^2 + \ldots + a_n^2 = \|x\|^2$. Wir zeigen, daß man $\{\varphi(x) : x \in k\} = \varphi(x_0) > 0 = \varphi(0)$. Wäre $y_0 \in k$ mit $\varphi(y_0) < \varphi(x_0)$, dann enthielte k die Strecke $s(x_0, y_0) = \{x \cdots x = x_0 + \alpha(y_0 - x_0),\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Für $cx \in S(x_0, y_0)$ ist:

$$\begin{aligned} \langle x_0, x_0\rangle - \langle x, x\rangle &= \langle x_0, x_0\rangle - \langle x_0 + \alpha(y_0 + x_0), x_0 + \alpha(y_0 - x_0)\rangle \\ &= -\alpha^2\langle y_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle - 2\alpha\langle x_0 c y_0 x x_0\rangle \\ &= f(\alpha)\ . \end{aligned}$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = -2\langle x_0, y_0 - x_0\rangle = 2(\langle x_0, x_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle = 2(\varphi(x_0) - \varphi(y_0)) > 0$$

Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für $0 \leq \alpha \leq \epsilon$ gilt: $f(\alpha) > 0$. Für die zugehörigen x wäre $\|x\| < \|x_0\|$ Widerspruch!

3.2 Satz: Ist $k \subset R^n$ die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems, dann ist k die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte, insbesondere also ein konvexes Polyeder.
Beweis: Es seien $p_1, \ldots, p_k$ die Extremalpunkte von k und $L = kon(p_1, \ldots, p_k)$. $L \subset k$, da k konvex. Angenommen, es gäbe $q \in k - L$. Dann gibt es eine Linearform φ auf R^n mit $\varphi(q) < \varphi(x)$ für alle $x \in L$.
Definiere $\beta = \min\{\varphi(x) : x \in k\} \leq \varphi(q)$. $k' = k \cap \{x \in R^n : \varphi(x) = \beta\}$. Nach 2.4 besitzt k' einen Extremalpunkt p, der nach 2.3 Extremalpunkt von k ist. Daher ist $p \in L$, somit $\beta \leq \varphi(q) < \varphi(p) = \beta$. Widerspruch.

3.3 Satz: Jedes konvexe Polyeder $k \subset R^n$ ist Lösungsmenge eines endlichen Systems linearer Ungleichungen.
Beweisskizze: Wir können annehmen, daß der affine Raum, der von den Extremalpunkten von k aufgespannt wird, gleich dem R^n ist. Wir betrachten diejenigen von Ecken von k

aufgespannten affinen Hyperebenen, für die k ganz auf einer Seite der Hyperebene liegt. Dies sind endlich viele Hyperebenen, und k ist Durchschnitt der dadurch bestimmten Halbräume.

3.4 Lemma: Ist $k = kon(x_0, \ldots, x_1) \subset R^n$ ein konvexes Polyeder, $p \in k$ eine Ecke von k, dann ist $p \in \{x_0, \ldots, x_k\}$
Beweis: Es gibt $\alpha_0 \ldots \alpha_k \geq 0,\ \alpha_0 + \ldots + \alpha_k = 1,\ p = \alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k$. Wenn $p \notin \{x_0, \ldots, x_k\}$ dann müssen mindestens zwei $\alpha_j > 0$ sein, sagen wir $\alpha_0, \alpha_1 > 0$. Dann sind die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = (\alpha_0 + \alpha_1)x_0 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k \\ p_2 = (\alpha_0 + \alpha_1)x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k \end{array}\right\} \in k$$

und es gilt: $p = \frac{\alpha_0}{\alpha_0+\alpha_1} q_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1} q_2$. Damit ist p innerer Punkt der Strecke $S(q_1, q_2) \subset k$. Dann ist p kein Extremalpunkt von k.

3.5 Satz: (Minkowski)
Jedes konvexe Polyeder ist die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte.
Beweis: Es sei $k = kon(x_0, \ldots, x_k)$, wobei die x_j paarweise verschieden sind. Wenn x_0 Ecke von k ist, dann folgt aus 3.4: $(x_0 \in kon(x_1 \ldots x_k) = L)$. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, dann muß x_0 Ecke von k sein. Es gibt nämlich eine Linearform φ mit $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ für alle $x \in L$. Jeder Punkt von k liegt auf einer Strecke von x_0 nach einem Punkt von L.

$$x \in k:\ x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \alpha x_0 + (1 - \alpha)\ ,\ \alpha_0 + \ldots + \alpha_k\ = 1,\ q_1 \in L$$

Daher ist $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ für alle $x \in k - \{x_0\}$. Nach 2.4 ist dann x_0 Ecke von k.
Damit ist gezeigt, daß x_0 genau dann Ecke von k ist, $k \neq kon(x_1, \ldots, x_k)$. Wenn man in $(x_0, \ldots, x_k)$ sukzessive alle Punkte wegläßt, die zur Erzeugung von k entbehrlich sind, dann behältman die Ecken übrig.

9.4 Die Simplex-Methode

4.1 Definition: i Es sei $k \subset R^n$ ein konvexes Polyeder, $p, q \in k$ Ecken. Die Strecke $s(p, q)$ heißt Kante von k, wenn kein Punkt $x \in s(p, q)$ innerer Punkt einer Strecke $S(p_1, p_2)$ mit $p_1, p_2 s \in k - S(p, q)$ ist.

ii p,q heißen benachbart, wenn $s(p, q)$ eine Kante ist.

4.2 Bemerkung: Offenbar ist $S(p, q)$ Kante von k, wenn $k - S(p, q)$ konvex ist.

4.3 Lemma: Es sei $k \subset R^n$ konvex, $\varphi:\ R^n \to R$ linear, $x_0 \in k$ mit $\beta = \varphi(x_0) = \min\{\varphi(x):\ x \in k\}$, $k' = k \cap \{x \in R^n:\ \varphi(x) = \beta\}$.
Ist $S(p, q)$ Kante von k', dann auch von k.
Beweis: Wenn $x \in S(p, q),\ x = \alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2,\ p_1, p_2 \in k - S(p, q),\ 0 \leq \alpha < 1$, dann können p_1, p_2 nicht beide zu k' gehören, da $S(p, q)$ Kante in k' ist. Ist etwa $p_1 \in k'$, also $\varphi(p_1) < \beta$, dann folgt: $\beta = \varphi(x) = \alpha\varphi(p_1) + (1 - \alpha)\varphi(p_2) > \beta$. Daher ist $S(p, q)$ auch Kante in k.

4.4 Satz: Es sei $m \geq n,\ k \in R^n$ die Lösungsmenge des Linearen Ungleichungssystems $\varphi_0(x) + b_0 \geq 0$. Ferner seien $\{\varphi_0, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\},\ \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ linear unabhängig, $G = \{x \in R^n : \varphi_2(x) + b_2 = \ldots = \varphi_n + b_n = 0\}$. Wenn $p, q \in G$ sind mit $\varphi_0(p) + b_0 = 0,\ p_1(q) + b_1 = 0$, dann sind die Ecken von k und $S(p, q)$ ist Kante von k. Weiter ist $S(p, q) = \{x \in G:\ \varphi_0(x) + b_0\ \geq 0,\ \varphi_1(x) + b_1 \geq 0\} \in G \cap k$.

Beweis: Nach 2.6 sind p, q Ecken von k.Wir setzen

$$\begin{aligned} k_1 &= k \ , \\ k_2 &= k_1 \cap \{x \in R^n : \ \varphi_2(x) + b_2 = 0\} \ , \\ &\vdots \\ k_n &= k_{n-1} \cap \{x \in R^n : \ \varphi_n(x) + b_n = 0\} \ . \end{aligned}$$

Offenbar ist $k_n = k \cap G = S(p,q)$, denn G ist eine ???. $S(p,q)$ ist natürlich Kante von k_n , nach 4.3 auch von $k_{n-1}, \ldots, k_1 = k$.

4.5 Grobe Beschreibung der Methode: i Es sei $k \subset R^n$ die Lösungsmenge $\varphi_0(x) + b_0 \geq 0, \ldots, \varphi_n(x) + b_n > 0$, k kompakt. Dann ist $m \geq n$: Ferner sei $\Psi : \ R^n \to R$ lineares Funktional, welches auf k zu minimieren ist.

ii Das Minimum von Ψ wird in einer Ecke von k angenommen. Man beginnt in einer beliebigen Ecke p_1 von k, die man bestimmt als Lösung eines Gleichungssystems

$$\varphi_{i_1}(x) + b_{i_1} = \ldots = \varphi_{i_n}(x) + b_{i_n} = 0, \ \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n} \text{ l.a.}$$

iii Die zu p_1 benachbarten Ecken findet man, indem man je eine der Formen $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$ durch andere so ersetzt, daß man eine neue ???? den Rang n hat.

iv Man vergleicht den Wert $\Psi(p_1)$ mit den Ψ-Werten in denbenachbarten Ecken. Sind alle $\geq \varphi(p_1)$, ist man fertig. Andernfalls sei p_2 diejenige unter den benachbarten Ecken mit dem kleinsten Ψ-Wert.

v Man suche die zu p_2 benachbarten Ecken wie in (iii) und verfahre wie in (iv); um p_3 zu finden ... Nach endlich vielen Schritten bricht das Verfahren ab.

4.6 Erinnerung: Es sei $(v_1 \ldots v_n)$ eine geordnete Basis des K-VR V. $w_1, \ldots, w_k \in V$. Wann kann man v_i austauschen gegen w_j, so daß $(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis ist? Für $j = 1 \ldots k$ gilt:

$$w_j = a_{1j}v_1 + \ldots + a_{i-1,j}v_{i-1} + a_{ij}v_i + a_{i+1,j}v_{i+1} + \ldots + a_{nj}v_n \ .$$

Genau dann, wenn $a_{ij} \neq 0$ ist, kann v_i gegen w_j ausgetauscht werden:

$$\begin{aligned} v_i &= -\frac{a_{1j}}{a_{ij}}v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}v_{i-1} + \frac{1}{a_{ij}}w_{ij} \\ &\quad -\frac{a_{i+1,j}}{a_{ij}}v_{i+1} - \ldots - \frac{a_{nj}}{a_{ij}}v_n \\ \varphi(x) &= \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \langle \alpha, x \rangle, \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

$\in \{1, \ldots, k\} - \{j\}$

$$\begin{aligned} w_\chi &= \left(a_{1\chi} - a_{i\chi}\frac{a_{1j}}{a_{ij}}\right)v_1 + \ldots + \left(a_{i-1,\chi} - a_{i\chi}\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right)v_{i-1} + \frac{a_{i\chi}}{a_{ij}}w_j + \\ &\quad + \left(a_{i+1,\chi} - a_{i\chi}\frac{a_{i+1,j}}{a_{ij}}\right)v_{i+1} + \ldots + \left(a_{n\chi} - a_{i\chi}\frac{a_{nj}}{a_{ij}}\right)v_n \end{aligned}$$

Tableau

	$w_1 \dots w_j \dots w_k$
v_1	$a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{ik}$
$\vdots$	
v_i	$a_{i1} \dots \boxed{a_{ij}} \dots a_{ik}$ Pivot
$\vdots$	
v_n	$a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn}$

	w_1	$\dots$	v_i	$\dots$	w_k
v_1	$\left(a_{11} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{ij}}\right)$	$\dots$	$-\frac{a_{1j}}{a_{ij}}$	$\dots$	$\left(a_{1k} - a_{ij}\frac{a_{1j}}{a_{ij}}\right)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
w_i	$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}$	$\dots$	$\frac{1}{a_{ij}} \dots$	$\frac{a_{ik}}{a_{ij}}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
v_n	$\left(a_{n1} - a_{i1}\frac{a_{nj}}{a_{ij}}\right)$	$\dots$	$-\frac{a_{nj}}{a_{ij}}$	$\dots$	$\left(a_{nk} - a_{ik}\frac{a_{nj}}{a_{ij}}\right)$

4.7 Schreibweise: $\varphi_i(x) + b_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m$ im R^n.

Lösungsgesamtheit $k : p$ sei eine Ecke von k. Dann gibt es l.u. $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in}$ mit

$$\varphi_{i1}(p) + b_{i1} = \dots = \varphi_{in}(p) + b_{in} = 0$$

$\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in}$ Basis von $(R^n)^*$. Es gibt daher eindeutige Darstellungen $\varphi_{i\chi} = a_{i\chi}\varphi_{i1} + \dots + a_{n\chi}\varphi_{in},\ \chi = 1, \dots, k$. ($\varphi_{ji}, \dots, \varphi_{jk}$ seien die übrigen Linearformen).
Ist φ daKostenfunktional, gibt es eine eindeutige Darstellung

$$\varphi = c_1\varphi_{i1} + \dots + c_n\varphi_{in}$$

Werte $\varphi_{ji}(p) + b_{ji} \geq 0, \dots, \varphi_{jk}(p) + b_{jk} \geq 0,\ \Psi(p)$.

Eckentableau von p:

	φ_{j1}	$\dots$	φ_{jk}	Ψ
φ_{i1}	a_{11}	$\dots$	a_{1k}	c_1
φ_{i2}	a_{21}		a_{2k}	c_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
φ_{in}	a_{n1}		a_{nk}	c_n
Werte	$\varphi_{j1}(p) + b$	$\dots$	$\varphi_{jk}(p) + b_{jk}$	$Psi(p)$

4.8 Lemma: i Sind $c_1, \dots, c_n \geq 0$, dann ist $\Psi(p) = \min\{\Psi(x) :\ x \in k\}$

ii Ist $c_\nu < 0$ für $\nu \in \{1, \dots, n\}$

$$G = \{x \in R^n : \varphi_{i\mu(x)+b_{i\mu}=0} \text{ für } {}_{\mu\in\{1,\dots,n\}-\{\nu}\}\}$$
$$G_+ = \{x \in G : \varphi_{i\nu}(x) + b_{i\nu} \geq 0\}\ ,$$

dann ist für alle $x \in G_+ - \{p\} : \Psi(x) < \psi(p)$.

Beweis: Für alle $x \in R^n$ gilt:

$$\varphi(x) - \Psi(p) = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu(\varphi_{i\mu}(x) - \varphi_{i\mu}(p) = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu(\varphi_{i\mu}(x) + b_{i\mu})$$

Im Fall (i) ist $\Psi(x) \geq \Psi(p)$ für alle $x \in k$. Im Fall (ii) folgt für $x \in G_+ :\ \Psi(x) - \Psi(p) = c_\nu(\varphi a_{i\nu}(x) + b_{i\nu}) \leq 0$. Gleichheit nur für p.

4.9 Bemerkung: Im Fall (ii) von 4.8 wird man auf dem „Suchpfad“G_+ nach einer besseren benachbarten Ecke suchen. Es kann aber passieren, daß G_+ die Menge k nur in p trifft: $k \subset R^3$

i $x_1 \geq 0$

ii $x_2 \geq 0$

iii $x_3 \geq 0$

iv $-x_1 + x_3 + x_3 \geq 0,\ \Psi(x) = -x_1.$

Die Gerade G im Lemma ist die x_1-Achse, sie trifft k nur in 0. Das Besondere hier ist, daß in der Ecke 0 mehr als $3 = \dim R^3$ Ungleichungen als Gleicheit gelten.

4.10 Definition: Ist $k \subset R^n$ lös. $\varphi_i(x) + b_i \geq 0,\ i = 1 \ldots n$, dann heißt die Ecke p von k einfach, wenn für genau n der gegebenden Ungleichungen gilt:

$$\varphi_{i1}(p) + b_{i1} = \ldots = \varphi_{in}(p) + b_{in} = 0\ .$$

4.11 Bemerkung: p ist einfach genau dann, wenn in der Wertezeile (außer bei Ψ) keine 0 vorkommt.

4.12 Satz: Die Lösungsgesamtheit $k \subset R^n$ des Ungleichungssystems $\varphi_i(x)+b_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$ sei kompakt. p sei eine bzgl. Ψ nicht optimale einfache Ecke. Dann gibt es eine zu p benachbarte Ecke q mit $\Psi(q) \subset \Psi(p)$, und diese erreicht man nach den in 4.8 beschriebenem Verfahren.
Beweis: Zur Vereinfachung der Schreibweise sei so umnumeriert, daß $\varphi_1(p)+b_1 = \ldots = \varphi_n(p)+ b_n = 0,\ \varphi_{n+1}(p) + b_{n+1} > 0, \ldots, \varphi_m(p) + b_m > 0$. In der Darstellung $\Psi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$ ist ein c_i, etwa $c_1 < 0$.
Die Gerade $G = \{x \in R^n : \varphi_2(x) + b_2 = \ldots = \varphi_n(x) + b_n = 0\}$ enthält p, und auf den Suchstrahl $G_+ = \{x \in G : p_1(x)+b_1 \geq 0\}$ nehmen die Werte $\Psi(x)$ von p aus ab. Da p einfach ist, gilt für alle x aus einer Umgebung von p: $\varphi_{n+1}(x) + b_{n+1} > 0, \ldots, \varphi_m(x) + b_m > 0$.
Die Punkte auf G_+ in dieser Umgebung von p gehören also zu k. Wir laufen solgange auf G_+, bis für ein $j \in n+1, \ldots, m\}$ der Wert $\varphi_j(x)+b_j = 0$ wird. Schreibe $\varphi_j = a_1\varphi_1+\ldots+a_{nj}\varphi_n,\ j = n+1, \ldots, m$. Wäre $a_{ij} = 0$ für alle $j = n+1, \ldots, m$, dann wäre für $x \in G_+$:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= a_{j2}\varphi_2(x) + \ldots + a_{jn}\varphi_n(x) \\ &= -a_{j2}b_2 - \ldots - a_{jn}b_n = \varphi_j(p) \end{aligned}$$

also $\varphi_j(x) + b_j = \varphi_j(p) \geq 0$.
Es folgt $x \in k$, also $G_+ \subset k$. Widerspruch.
Es gibt also ein $j \in \{n+1, \ldots, m\}$ mit $a_{ij} \neq 0$: Dann sind $\varphi_j, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ l.u., und daher gibt es genau ein $q \in G$ mit $\varphi_j(q) + b_j = 0$.

$$\begin{aligned} &\varphi_j(p) = a_{1j}\varphi_1(p) + \ldots + a_{nj}\varphi_n(p) = -(a_{1j}b_1 + \ldots + a_{nj}b_n) \\ &\varphi_j(q) = a_{1j}\varphi_1(q) + \ldots + a_{nj}\varphi_n(q) = a_{1j}\varphi_1(q) - (a_{1j}b_2 + \ldots + a_{nj}b_n), \\ &a_{1j}(\varphi_1(q) + b_1 = \varphi_j(q) - \varphi_j(p) = -(p_j(p) + b_j) \end{aligned}$$

Wegen $\varphi_j(p) + b_j > 0$ ist $q \in G_+$ genau dann, wenn $a_{1j} < 0$.
Da k nicht ganz G_+ enthalten kann, muß für wenigstens ein j gelten: $a_{1j} < 0$.
Damit q Ecke von k ist, wähle man dasjenige j aus, für das die positive Zahl $-\frac{\varphi_j(p)+b_j}{a_{1j}}$ minimal wird, bzw. die negative Zahl $\Psi_j = \frac{\varphi_j(p)+b_j}{a_{1j}}$ maximal wird.
Der so erhaltene Punkt q ist von p ausgehend, der letzte in k gelegene Punkt auf G_+: Aus 4.4 folgt, daß q Ecke und S(p,q) Kante von k ist.

4.13 Beispiel: $k \subset R^2$:

i $x_1 \geq 0$

ii $x_2 \geq 0$

iii $-x_1 + x_2 + 1 \geq 0$

iv $x_1 + x_2 + 1 \geq 0$

v $-x_1 + 2 \geq 0$

vi $x_2 + 3 \geq 0$

$\Psi(x) = x_1$. 0 ist Ecke von k.

	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	Ψ	
φ_1	$\boxed{\text{-1}}$		-1	0	-1	Pivot-Zeile
φ_2	1	1	0	-1		0
Werte	1	1	2	3		0
χ	-1	x	-2	x		x
	Pivot-Spalte					

4.14 Pivotsuche Im Tableau einer einfachen Ecke:

i Kontrolliere, ob die Wertezeile (außer bei Ψ) keine 0 enthält. Dann ist die Ecke einfach.

ii Man bestimme eine Pivot-Zeile durch Auswahl eines beliebigen negativen c_j in der Ψ-Zeile.

iii In der Pivot-Zeile suche man alle negativen Einträge (es muß wenigstens einer vorhanden sein), und trage die zugehörigen χ-Werte in der letzten Zeile ein.

$p \in k,\ \varphi_1(x) + b_1 \geq 0, \ldots, \varphi_m(x) + b_m \geq 0,\ \varphi_{i_1}(p) + b_1 = \ldots = \varphi_{i_n}(p) + b_n = 0.$
$\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{jk},\ \varphi_{j\chi} = a_{1\chi}\varphi_{i1} + \ldots + a_{n\chi}\varphi_{in},\ \Psi = c_1\varphi_{i1} + \ldots + c_n\varphi_{in}$

	φ_{j1}	$\ldots$	φ_{jk}	Ψ		
φ_{11}	a_{11}		a_{ik}	c_1		
$\vdots$		$\boxed{a_{nk}}$		c_k	$\leftarrow$	$c_k < 0$
φ_{1i}	a_{n1}		a_{nk}	c_n		
Werte	$\varphi_{j1}(p) + b_{ji}$	$\ldots$	$\varphi_{jk}(p) + b_{jk}$	$\Psi(p)$		
χ		$\uparrow$				

k kompakt, nur auf Ecken.

4.16 Beispiel: Bauernhof mit Schweinen. Statt einer Kuh: 3 Schweine. Ein Schwein benötigt $\frac{1}{3}$ ha Land, 20 h/Jahr, x_3 Anzahl der Schweine.

i $x_1 \geq 0$

ii $x_2 \geq 0$

iii $x_3 \geq 0$

iv $x_1 + \frac{1}{3}x_3 \leq 10,\ -3x_1 - x_3 + 30 \geq 0$

v $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 20,\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 120 \geq 0$

vi $200x_1 + 100x_2 + 20x_3 \leq 2400,\ -10x_1 - 5x_2 - x_3 + 120 \geq 0$
$\Psi(x) = -350x_1 - 260x_2 - 100x_3$ zu minimieren.

Ecke (0,0,0)

	φ_4	φ_5	φ_6	Ψ
φ_1	-3	-3	-10	-350
φ_2	0	-6	-5	-260
φ_3	$\boxed{-1}$	-2	-1	-100
Werte	30	120	120	0
	-30	-60	-120	x

Ecke (0,0,30)

	φ_3	φ_5	φ_6	Ψ
φ_1	-3	3	-7	-50
φ_2	0	-6	-5	-260
φ_4	-1	2	1	100
Werte	30	60	90	-3000
χ	χ	-10	-18	x
		$\uparrow$		

Ecke (0,10,30)

	φ_3	φ_2	φ_6	Ψ
φ_1	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{-19}{2}$	-180
φ_5	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{130}{3}$
φ_4	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{40}{3}$
Werte	30	10	40	-5000
χ	-10	χ	$-\frac{80}{19}$	x

Ecke $(\frac{80}{19}\ ,\ \frac{230}{19}\ ,\ \frac{330}{19}\ ) \approx (4{,}21\ ;\ 12{,}11\ ;\ 17{,}37\ )$

	φ_3	φ_2	φ_1	Ψ
φ_6	$\frac{6}{19}$	$-\frac{1}{19}$	$-\frac{2}{19}$	$\frac{330}{19}$
φ_5	$-\frac{5}{19}$	$-\frac{7}{57}$	...	$\frac{230}{19}$
φ_4	brauch man	nicht	mehr ausr.	$\frac{80}{19}$
Werte				-6357,89

Gewinn: 6357,89
Mehrfachentwicklung fasch!!

Mehrfache Ecken: R^2

i $x_1 \geq 0$
ii $x_2 \geq 0$,
iii $-x_2 + 3 \geq 0$,
iv $-x_1 + 2 \geq 0$,
v $-.x_1 + x_2 \geq 0$

$\Psi(x) = -x_1$

a	φ_3	φ_4	φ_5	Ψ
φ_1	0	-1	-1	-1
φ_2	-1	0	1	0
Werte	3	2	0	0

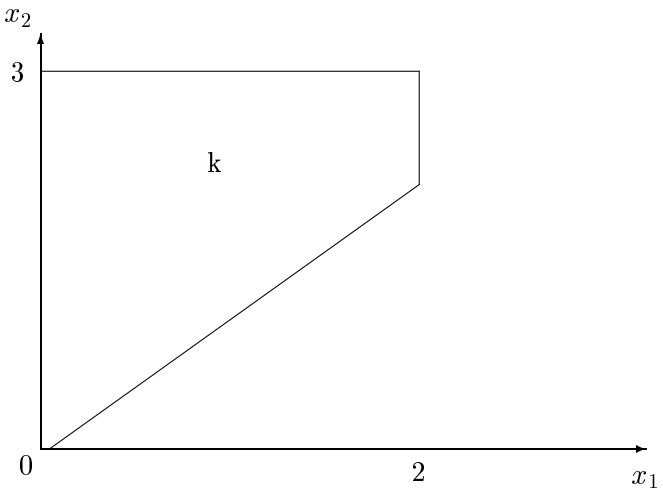
b	φ_3	φ_4	φ_1	Ψ
φ_5	0	1	-1	1
φ_2	-1	-1	1	-1
Werte	3	2	0	0

c	φ_3	φ_4	φ_c	Ψ
φ_1	-1	-1	1	-1
φ_5	-1	0	1	0
Werte	3	2	0	0

(a) $G_+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 : \ x_2 = 0, \ x_1 \geq 0\}$

(b) $G_+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 : \ x_1 = x_2, \ x_2 \geq 0\}$

(c) $G_+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = x_2, \ x_1 \geq 0\}$



Collatz/Wetterling: „Optimierungsaufgaben “ , Springer 1966

Danzig (Erfinder der Simplex-Methode) „Lineare Programmierung und Erweiterungen “, Springer 1966.