KOMMUTATIVE ALGEBRA I

Robert W. Berger

Wintersemester 1996/97

Adresse des Autors:

Robert W. Berger
Fachbereich Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
D-66041 Saarbrücken
Germany

E-mail address: rberger@math.uni-sb.de

KOMMUTATIVE ALGEBRA I

Vorwort

Dies ist das Manuskript meiner vierstündigen Vorlesung „Kommutative Algebra I“, die ich im Wintersemester 1996/97 an der Universität des Saarlandes gehalten habe. Die Vorlesung ist die Fortsetzung der vorhergehenden Vorlesungen „Algebra I“ und „Algebra II“.

Während in der Algebra I im wesentlichen die Galoistheorie behandelt wurde, wurden in Algebra II neben den Grundlagen der Theorie der Differentialmoduln mit Anwendungen auf die Körpertheorie auch die Elemente der Theorie der noetherschen Ringe und Moduln betrachtet: Nenneraufnahme, ganze Abhängigkeit, Lying-over, Going-up, Going-down, ganzer Abschluß in einer Körpererweiterung, noethersche Normalisierung, additive Idealtheorie in der Fassung für noethersche Moduln. Insbesondere die Tatsachen über ganze Ringerweiterungen und die additive Idealtheorie werden also als bekannt vorausgesetzt.

Im Anschluß an die additive Idealtheorie werden in dieser Vorlesung zunächst die multiplikative Idealtheorie in Krull-Ringen behandelt. Dies leitet in natürlicher Weise über zu den Grundlagen der Bewertungstheorie. Wir behandeln dann die Charakterisierung von Krull-, ZPE-, und Dedekind-Ringen als Durchschnitte von diskreten Bewertungsringen. Komplettierung eines bewerteten Körpers, die Charakterisierung der kompletten archimedisch bewerteten Körper sowie die Fortsetzung von Bewertungen auf algebraische Körpererweiterungen schließen sich an. Damit sind dann die klassischen Grundlagen der Bewertungstheorie, wie man sie in der algebraischen Zahlentheorie und algebraischen Geometrie braucht, im wesentlichen abgehandelt.

Im zweiten Teil dieser Vorlesung betrachten wir filtrierte Ringe und Moduln, die zugehörigen Topologien, Komplettierung, assoziierte graduierte Ringe und Moduln. Besonderes Gewicht liegt dabei auf dem noetherschen Fall. Als Abschluß behandeln wir dann die Dimensionstheorie der noetherschen Ringe und Moduln, wobei als Hauptsatz die Berechnung der Dimension eines endlich erzeugten Moduls über einem semilokalen Ring durch den Grad des Hilbert-Samuel-Polynoms und durch die Länge eines Parametersystems bewiesen wird.

Im Sommersemester 1997 soll die Vorlesung zunächst mit der Darstellung der homologischen Methoden beim Studium von Moduln über semilokalen Ringen fortgesetzt werden.

Schließlich möchte ich nicht vergessen, den Hörern meiner Vorlesung für ihre Aufmerksamkeit zu danken. Mein besonderer Dank gilt dabei den Herren Dipl.-Math. Martin Baumgartner und Dipl.-Math. Johannes Heinrich, die in mühevoller Kleinarbeit das Manuskript auf Druck- und andere Fehler durchgesehen und wertvolle Verbesserungsvorschläge gemacht haben.

Saarbrücken, im Februar 1997

R. Berger

Inhaltsverzeichnis

Vorwort
1. Multiplikative Idealtheorie 1
1.1. Motivation 1
1.2. Definition und Grundeigenschaften der Sternideale 3
1.3. Multiplikation der Sternideale 6
1.4. Unzerlegbare Sternideale 9
1.5. Krull-Ringe 11
1.6. Dedekind-Ringe 15
1.7. Umkehrung der Ergebnisse 17
1.8. Lokalisierungen von Krull-Ringen 19
1.9. Zusammenhang zwischen multiplikativer und additiver Idealtheorie 21
2. Grundlagen der Bewertungstheorie 24
2.1. Grundbegriffe 24
2.2. Äquivalente Bewertungen 26
2.3. Exponentenbewertungen. Bewertungsringe 29
3. Schnitte von Bewertungsringen 35
3.1. Der endliche Approximationssatz 35
3.2. Schnitte endlicher vieler diskreter Bewertungsringe 38
3.3. Krull-Ringe 40
3.4. ZPE-Ringe 44
3.5. Dedekind-Ringe 45
4. Komplettierung eines Körpers 50
4.1. Cauchyfolgen und Limites 50
4.2. Konstruktion der Komplettierung 50
4.3. Diskret bewertete komplette Körper 54
5. Normierte Körper und Vektorräume 56
5.1. Der Satz von Gelfand-Tornheim 56
5.2. Normierte Vektorräume über kompletten bewerteten Körpern 61
6. Das Lemma von Hensel 65
7. Fortsetzung einer Bewertung auf eine algebraische Körpererweiterung. Kompletter Fall 70
8. Verzweigungsindex und Restklassengrad 73
9. Fortsetzung einer Bewertung auf eine algebraische Körpererweiterung. Allgemeiner Fall 81
10. Die allgemeine Gradrelation 87
11. Ganze Abschlüsse 90
11.1. Ganzer Abschluß eines Bewertungsrings 90
11.2. Ganzer Abschluß von Krull- und Dedekind-Ringen 91
12. Filtrierte Ringe und Moduln 93
12.1. Die durch eine Filtrierung definierte Topologie 94
12.2. Cauchyfolgen und Limites 95
12.3. Konstruktion der Komplettierung 96
13. Graduierte Ringe und Moduln 108
13.1. Definitionen 108
13.2. Leitformen (Anfangsformen) 109
14. Noethersche filtrierte Ringe und Moduln. $\mathfrak{q}$-adische Filtrierungen 115

15. Das Hilbert-Samuel-Polynom 124
15.1. Polynome mit ganzzahligen Werten 124
15.2. Das Hilbert-Samuel-Polynom eines graduierten Moduls 126
15.3. Höhe und Multiplizität eines Moduls bzgl. eines Ideals 129
16. Dimensionstheorie noetherscher Ringe 134
16.1. Höhe und Dimension (Cohöhe) von Idealen 134
16.2. Die Dimension eines Moduls 135
16.3. Moduln über semilokalen Ringen 135
16.4. Parametersysteme 139
Literatur 142
Index 143

1. Multiplikative Idealtheorie

1.1. **Motivation.** Bekanntlich gilt nicht in allen Integritätsbereichen der Satz von der Primelementzerlegung (ZPE). Das klassische Beispiel ist $R := \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$.
Hier sind $2,\ 3,\ 1+\sqrt{-5},\ 1-\sqrt{-5}$ paarweise nicht assoziierte unzerlegbare Elemente, die nicht prim sind; denn $6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})\cdot(1-\sqrt{-5})$ sind zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen der 6 in R.
Es stellt sich heraus, daß die Ideale (2), (3), $(1+\sqrt{-5})$, $(1-\sqrt{-5})$ zwar innerhalb der multiplikativen Halbgruppe der *Haupt*ideale von R unzerlegbar sind (d.h. sie sind als Elemente unzerlegbar), nicht aber innerhalb der multiplikativen Halbgruppen aller ganzen Ideale von R. Hier lassen sich die genannten Hauptideale in Produkte von Primidealen zerlegen. Solche Zerlegungen haben viele Eigenschaften der Primfaktorzerlegung, wie die allgemeine Theorie zeigen wird. Insbesondere sind sie (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig.
Wir führen nun das angegebene Beispiel näher aus. Daß die angegebenen Elemente unzerlegbar und paarweise nicht assoziiert sind, setzen wir dabei als bekannt voraus.

1.1.1. *$R := \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$ ist der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\,\right)$.*
Beweis. $(1, \sqrt{-5})$ ist eine Körperbasis von $K := \mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\,\right)$ über $\mathbb{Q}$. Jedes Element $a \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\,\right)$ hat also eine eindeutige Darstellung $a = \alpha' + \beta'\cdot\sqrt{-5}$. a ist ganz über $\mathbb{Z}$ genau dann, wenn die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von a über $\mathbb{Q}$, als $\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(a)$ und $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a)$ in $\mathbb{Z}$ liegen. In der angegebenen Darstellung ist $\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(a) = 2\alpha'$. Wir schreiben daher besser

$$a = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\cdot\sqrt{-5} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

Dann ist

$$\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(a) = \alpha, \qquad \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a) = \frac{\alpha^2 + 5\beta^2}{4}$$

Falls a ganz über $\mathbb{Z}$ ist, gilt also $\alpha \in \mathbb{Z}$ und auch $\frac{\alpha^2+5\beta^2}{4} \in \mathbb{Z}$, daher $5\beta^2 \in \mathbb{Z}$ und weiter $\beta \in \mathbb{Z}$, weil 5 keinen quadratischen Nenner wegheben kann.
Man hat also in $\mathbb{Z}$ die Kongruenz $\alpha^2 + 5\beta^2 \equiv 0 \pmod 4$ und daher wegen $5 \equiv 1 \pmod 4$ weiter $\alpha^2 \equiv -\beta^2 \pmod 4$. Nun sind die Restklassen $\bar{0}$ und $\bar{1}$ die einzigen Quadrate in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Wäre $\alpha^2 \equiv 1 \pmod 4$, so wäre $\beta^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$ kein Quadrat mod 4. Also muß $\alpha^2 \equiv 0 \pmod 4$ und daher auch $\beta^2 \equiv 0 \pmod 4$ sein. Folglich sind $\alpha \equiv 0 \pmod 2$ und auch $\beta \equiv 0 \pmod 2$ und daher $a = \alpha'' + \beta''\cdot\sqrt{-5}$ mit $\alpha'', \beta'' \in \mathbb{Z}$.
Der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\,\right)$ liegt also in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$. Da andererseits $\sqrt{-5}$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist, folgt, daß $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$ der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\,\right)$ ist.

Anmerkung. Der Beweis geht allgemeiner für $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, wenn D quadratfrei ist und $D \equiv -1 \pmod 4$ oder $D \equiv 2 \pmod 4$.

1.1.2. *Primidealzerlegung von (2) und (3) in $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$.* Sei $D = -5$ und $p = 2$ oder $p = 3$. In beiden Fällen ist $D \equiv 1 \pmod p$, da $D - 1 \equiv 6 \equiv 0 \pmod 2$ und $\pmod 3$. Wir betrachten daher zunächst allgemeiner die Situation

1.1.3. *Primideale über einer Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ in $R := \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ mit $D \equiv 1 \pmod p$.*
Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R mit $p \in \mathfrak{p}$. Da $p\cdot\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$ ist, gilt dann $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\cdot\mathbb{Z}$.

Betrachte den kanonischen Homomorphismus $\varphi : R \to R/\mathfrak{p}$:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R/\mathfrak{p} = \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}[\overline{\sqrt{D}}] \text{ Körper, weil Integritätsbereich und algebraisch über dem Körper } \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}. \\ \big| & & \big| \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z} \end{array}$$

$\overline{\sqrt{D}}$ genügt über $\mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}$ dem Polynom $\bar{f}(X) = X^2 - \bar{D} = X^2 - \bar{1}$ wegen $D \equiv 1 \pmod{p}$. Man hat also $\bar{f}(X) = (X + \bar{1})\cdot(X - \bar{1})$ und daher $\overline{\sqrt{D}} \in \{\bar{1}, -\bar{1}\}$ als Nullstelle von $\bar{f}$. insbesondere also $\overline{\sqrt{D}} \in \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}$ und somit $R/\mathfrak{p} = \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}$.
Wir versuchen den Ansatz:

$$\sqrt{D} \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

also $1+\sqrt{D} \in \mathfrak{p}$. Da nach Vorausetzung auch $p \in \mathfrak{p}$ gilt, hat man $\mathfrak{a} := (p, 1+\sqrt{D}) \subseteq \mathfrak{p}$.
Wir zeigen, daß

$$\mathfrak{p} = (p, 1 + \sqrt{D})$$

ist:

Beweis. Da R ganz über $\mathbb{Z}$ ist und in $\mathbb{Z}$ jedes von Null verschiedene Primideal maximal ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{a}$ ein Primideal in R ist; denn wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt dann die Gleichheit.
Zunächst folgt aus $p \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, sofort $p\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{a}\cap\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{p}\cap\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, und daher $\mathfrak{a}\cap\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.
Ferner gilt nach Definition von $\mathfrak{a}$, daß $\sqrt{D} \equiv -1 \pmod{\mathfrak{a}}$ ist. Also hat man $R/\mathfrak{a} = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]/\mathfrak{a} = \mathbb{Z} + \mathfrak{a}/\mathfrak{a} = \mathbb{Z}/\mathfrak{a}\cap\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}$ Integritätsbereich und daher $\mathfrak{a}$ Primideal in R. □

Mit $\mathfrak{p} = (p, 1 + \sqrt{D})$ ist auch das konjugierte Ideal $\mathfrak{p}'$
(entsprechend $\sqrt{D} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}'}$)

$$\mathfrak{p}' := (p, 1 - \sqrt{D})$$

Primideal in R.
Für $p = 2$ ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ denn $\mathfrak{p} \ni 2 - (1 + \sqrt{D}) = 1 - \sqrt{D}$ und daher $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Ebenso umgekehrt.

1.1.4. *Für $D = -5$ und $p = 2$ oder $p = 3$ gilt $p\cdot R = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}'$.*

Beweis. Allgemein gilt für $D \equiv 1 \pmod{p}$
$\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}' = (p^2, p\cdot(1 + \sqrt{D}), p\cdot(1 - \sqrt{D}), \underbrace{1 - D}_{\in p\cdot\mathbb{Z}}) \subseteq p\cdot R.$
Es bleibt also noch zu zeigen, daß in den angegebenen Fällen $p = 2, 3$ auch $p \in \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}'$ gilt:
Sei nun
$\mathfrak{p}_1 := (2, 1 - \sqrt{-5})$ und daher
$\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_1$,
$\mathfrak{p}_2 := (3, 1 + \sqrt{-5})$ und daher
$\mathfrak{p}_2' = (3, 1 - \sqrt{-5})$.
Dann ist
$2 = 1 - D - 2^2 \in \mathfrak{p}_1^2$, also

$$2\cdot R = \mathfrak{p}_1^2$$

und
$3 = 3^2 - (1 - D) \in \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2'$, also

$$3 \cdot R = \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2' \,.$$

□

1.1.5. *Primidealzerlegung von* $\left(1 + \sqrt{-5}\right)$ *und* $\left(1 - \sqrt{-5}\right)$ *in* $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$. Wegen $(1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5}) = (6) = (2) \cdot (3) = \mathfrak{p}_1^2 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2'$ müssen die beiden Ideale $(1+\sqrt{-5})$ und $(1-\sqrt{-5})$ Produkte der Primideale $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2'$ sein, derart, daß das Produkt der beiden Ideale die oben angegebene Darstellung hat. Aus Symmetriegründen bleibt nur übrig, daß das eine Ideal $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$ und das andere dann $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2'$ ist. Berechne daher

$$\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (\underbrace{2 \cdot 3}_{=(1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5})}, 2 \cdot (1 + \sqrt{-5}),\ 3 \cdot (1 + \sqrt{-5}),\ (1 + \sqrt{-5})^2) \subseteq R \cdot (1 + \sqrt{-5}).$$

Umgekehrt gilt aber auch
$1 + \sqrt{-5} = 3 \cdot (1 + \sqrt{-5}) - 2 \cdot (1 + \sqrt{-5}) \in \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$, also insgesamt

$$(1 + \sqrt{-5}) \cdot R = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \,.$$

Analog ergibt sich auch

$$(1 - \sqrt{-5}) \cdot R = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2' \,.$$

1.1.6. *Resultat.* **Den beiden wesentlich verschiedenen Zerlegungen**

$$\mathbf{6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})}$$

auf Elementebene entsprechen auf Idealebene die beiden *Reihenfolgen*

$$\boldsymbol{6 \cdot R = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2' = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2'}$$

der Primidealfaktoren.

Wir werden im Folgenden zunächst möglichst allgemein eine „multiplikative Idealtheorie“ in Integritätsbereichen entwickeln. Die obige Situation ist dann ein Beispiel für den Spezialfall der „Dedekind-Ringe“. Danach werden wir den Zusammenhang mit der „additiven Idealtheorie“ aufzeigen.

1.2. **Definition und Grundeigenschaften der Sternideale.** Es seien im Folgenden
R ein Intergritätsbereich,
$K = \mathrm{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper,
V, V_ι, W, A, B nichtleere Teilmengen von K.

1.2.1. Definition.

$$V^{-1} := \{x \mid x \in K, x \cdot V \subseteq R\}$$
$$V^* := \left(V^{-1}\right)^{-1}$$
$$V \cdot W := \{v \cdot w \mid v \in V, w \in W\}$$

1.2.2. Eigenschaften.

(0) $V \cdot W = W \cdot V$
(1) $R^{-1} = R = R^*$
(2) $V \subseteq W \Rightarrow V^{-1} \supseteq W^{-1}, \quad V^* \subseteq W^*$
(3) $V \subseteq V^*$
(4) $\left(V^{-1}\right)^* = (V^*)^{-1} = V^{-1}, \quad V^{**} = V^*$

(5) Für beliebige Indexmengen I gilt:
$$\left(\bigcup_{\iota\in I} V_\iota\right)^{-1} = \bigcap_{\iota\in I} V_\iota^{-1}$$
$$\left(\bigcap_{\iota\in I} V_\iota\right)^{-1} \supseteq \bigcup_{\iota\in I} V_\iota^{-1}.$$
(6) $0 \neq a \in K \Rightarrow (a\cdot V)^{-1} = a^{-1}\cdot V^{-1}, \quad (a\cdot V)^* = a\cdot V^*$
(7) $V^{-1} = W^{-1} \Rightarrow (A\cdot V)^{-1} = (A\cdot W)^{-1}$
(8) $V^* = W^* \Rightarrow (A\cdot V)^* = (A\cdot W)^*$
(9) $(W\cdot V^*)^* = (W\cdot V)^*$
(10) $x, y \in V^{-1} \Rightarrow (x, y) := R\cdot x + R\cdot y \subseteq V^{-1}$, d.h. jedes V^{-1} ist ein R-Modul.
$V^{-1} = (R\langle V\rangle)^{-1}$. (Dabei bezeichnet $R\langle V\rangle$ den von V erzeugten R-Modul.)

Beweis. (0), (1), (2) sind klar.
(3): Nach Definition von V^{-1} ist $V\cdot V^{-1} \subseteq R$. Nach Definition von $\left(V^{-1}\right)^{-1}$ folgt dann $V \subseteq \left(V^{-1}\right)^{-1} = V^*$.
(4): Nach (3) gilt $V \subseteq V^*$. daraus folgt mit (2) $V^{-1} \supseteq (V^*)^{-1}$.
Andererseits gilt nach Definition von V^*, daß $V^{-1}\cdot V^* \subseteq R$, also nach Definition von $(V^*)^{-1}$ dann auch $V^{-1} \subseteq (V^*)^{-1}$. Insgesamt also $(V^*)^{-1} = V^{-1}$ und daher auch $V^* = \left(V^{-1}\right)^{-1} = \left((V^*)^{-1}\right)^{-1} = (V^*)^*$.
Ferner trivialerweise $\left(V^{-1}\right)^* = \left(\left(V^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} = (V^*)^{-1}$.
(5): $x \in (\bigcup_{\iota\in I} V_\iota)^{-1} \Leftrightarrow x\cdot V_\iota \subseteq R$ für alle $\iota \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\iota\in I} V_\iota^{-1}$.
$x \in \bigcup_{\iota\in I} V_\iota^{-1} \Rightarrow x\cdot V_\iota \subseteq R$ für mindestens ein $\iota \in I$, also jedenfalls $x\cdot(\bigcap_{\iota\in I} V_\iota) \subseteq R$ $\Rightarrow x \in (\bigcap_{\iota\in I} V_\iota)^{-1}$.
(6): $x \in (a\cdot V)^{-1} \Leftrightarrow x\cdot a\cdot V \subseteq R \Leftrightarrow x\cdot a \in V^{-1} \Leftrightarrow x \in a^{-1}\cdot V^{-1}$. Also $(a\cdot V)^{-1} = a^{-1}\cdot V^{-1}$. Nochmalige Bildung von $^{-1}$ liefert dann $(a\cdot V)^* = a\cdot V^*$.
(7): Sei $V^{-1} = W^{-1}$ und $A \subseteq K$ beliebig. Es gilt $x \in (A\cdot V)^{-1} \Leftrightarrow x\cdot A\cdot V \subseteq R \Leftrightarrow x\cdot A \subseteq V^{-1} = W^{-1} \Leftrightarrow x\cdot A\cdot W \subseteq R \Leftrightarrow x \in (A\cdot W)^{-1}$.
(8): Sei $V^* = W^*$. Dann folgt mit (4) $V^{-1} = (V^*)^{-1} = (W^*)^{-1} = W^{-1}$. Aus (7) folgt dann $(A\cdot V)^{-1} = (A\cdot W)^{-1}$ und daraus durch nochmaliges Bilden von $^{-1}$ $(A\cdot V)^* = (A\cdot W)^*$.
(9): Nach (4) ist $(V^*)^* = V^*$. Wende darauf (8) an mit $A := W$ und erhalte $(W\cdot V^*)^* = (W\cdot V)^*$.
(10): $x, y \in V^{-1} \Rightarrow x\cdot V \subseteq R, \quad y\cdot V \subseteq R \Rightarrow (R\cdot x + R\cdot y)\cdot V \subseteq R + R = R.$
$\Rightarrow R\cdot x + R\cdot y \subseteq V^{-1}$.
Aus $V \subseteq R\langle V\rangle$ folgt nach (2) zunächst $V^{-1} \supseteq (R\langle V\rangle)^{-1}$. Umgekehrt folgt aus $x\cdot V \subseteq R$ wie oben $x\cdot(R\langle V\rangle) \subseteq R$, also auch $V^{-1} \subseteq (R\langle V\rangle)^{-1}$. □

1.2.3. Definition.

(1) Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von K heißt *(gebrochenes) R-Ideal*, wenn gilt:
(a) $\mathfrak{a}$ ist ein R-Untermodul von K.
(b) Es gibt ein $0 \neq y \in K$ mit $y\cdot\mathfrak{a} \subseteq R$. („$\mathfrak{a}$ hat beschränkte Nenner“.)
Ein R-Ideal $\mathfrak{a}$ heißt „ganzes“ R-Ideal $\Longleftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq R$.
In diesem Fall ist die Bedingung (1b) von selbst erfüllt.

Ein gewöhnliches Ideal aus R ist also stets ein R-Ideal.
Ein R-Ideal $\mathfrak{a}$ heißt „invertierbar“, wenn gilt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1} = R$.

(2) Eine nicht leere Teilmenge $\mathfrak{a}$ von K heißt *(R-) Sternideal*, wenn gilt:
   (a) $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ und $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$.
   (b) Es gibt ein $0 \neq y \in K$ mit $y\cdot\mathfrak{a} \subseteq R$. („$\mathfrak{a}$ hat beschränkte Nenner“.)
   Ein (R-) Sternideal $\mathfrak{a}$ heißt „ganzes“ (R-) Sternideal $\Longleftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq R$.

1.2.4. *Anmerkung.* Nach Eigenschaft 1.2.2. (10) ist jedes Sternideal ein R-Ideal; denn $\mathfrak{a}$ ist ja wegen $\mathfrak{a} = \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1}$das $^{-1}$ einer nichtleeren Teilmenge von R.

1.2.5. *Anmerkung.* Sei $\mathfrak{a}$ ein R-Ideal.
Dann ist $\mathfrak{a}^{-1} \neq (0)$ und daher auch $\mathfrak{a}^{-1} \cap R \neq (0)$.

Beweis. das $y \neq 0$ aus Definition 1.2.3. (1) liegt offenbar in $\mathfrak{a}^{-1}$. Schreibe $y = y_1/y_2$ mit $y_i \in R$. Dann ist $0 \neq y_1 = y_2\cdot y \in \mathfrak{a}^{-1} \cap R$. □

1.2.6. *Anmerkung.* Sei $\mathfrak{b}$ eine beliebige nichtleere Teilmenge $\neq \{0\}$ von K mit $\mathfrak{b}^{-1} \neq (0)$.
Dann sind $\mathfrak{b}^{-1}$ und $\mathfrak{b}^*$ Sternideale.
(Die Voraussetzung $\mathfrak{b}^{-1} \neq (0)$ ist nach Anmerkung 1.2.5. insbesondere stets erfüllt, wenn $\mathfrak{b}$ ein R-Ideal ist.)

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{b}^{-1} \neq (0)$ und nach Eigenschaften 1.2.2. (4) ist $\left(\mathfrak{b}^{-1}\right)^* = \mathfrak{b}^{-1}$. Wegen $\mathfrak{b} \neq \{0\}$ existiert ferner ein $0 \neq y \in \mathfrak{b}$, für das dann gilt $y\cdot\mathfrak{b}^{-1} \subseteq R$. Also ist $\mathfrak{b}^{-1}$ ein Sternideal.
Ferner ist nach Voraussetzung $\mathfrak{b} \neq \{0\}$ und $\left(\mathfrak{b}^{-1}\right)^{-1} = \mathfrak{b}^* \supseteq \mathfrak{b}$. Also ist $\left(\mathfrak{b}^{-1}\right)^{-1} \neq (0)$, und die Voraussetzungen des eben gezeigten Teils sind auch für $\mathfrak{b}^{-1}$ anstelle von $\mathfrak{b}$ erfüllt. Also ist $\left(\mathfrak{b}^{-1}\right)^{-1} = \mathfrak{b}^*$ ein Sternideal. □

1.2.7. *Anmerkung.* Ist $\mathfrak{a}$ ein Sternideal, dann ist auch $\mathfrak{a}^{-1}$ ein Sternideal.

Beweis. Nach Definition ist $\mathfrak{a} \neq (0)$ und nach Anmerkung 1.2.4. ist $\mathfrak{a}$ ein R-Ideal. Aus Anmerkung 1.2.6. folgt dann, daß $\mathfrak{a}^{-1}$ ein Sternideal ist. □

1.2.8. *Anmerkung.* Sei $0 \neq a \in K$. Dann ist $R \cdot a$ ein Sternideal.

Beweis. Es ist $R\cdot a \neq (0)$ und nach Eigenschaft 1.2.2 (6) mit $V = R$ ist $(R\cdot a)^* = R\cdot a$.
Beschränkte Nenner: $a = a_1/a_2$ mit $a_i \in R$. Dann ist $a_2\cdot(R\cdot a) = R\cdot a_1 \subseteq R$. □

1.2.9. *Anmerkung.* Sei $\mathfrak{a}$ eine nichtleere Teilmenge von K, $R \subsetneq K$. Es gilt:
$\mathfrak{a}$ ist Sternideal $\Leftrightarrow \mathfrak{a} \neq (0), K$ und $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$.

Beweis. $\underline{\Leftarrow:}$ Bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{a}$ beschränkte Nenner hat: Gäbe es kein $y \neq 0$ mit $y\cdot\mathfrak{a} \subseteq R$, so wäre $\mathfrak{a}^{-1} = (0)$ und daher $\mathfrak{a} = \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1} = (0)^{-1} = K$ gegen Voraussetzung.
$\underline{\Rightarrow:}$ Bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{a} \neq K$ ist.
Wäre $\mathfrak{a} = K$ so gäbe es, weil $\mathfrak{a}$ Sternideal ist, ein $0 \neq y \in K$ mit $y\cdot K \subseteq R$. Es ist aber $y \cdot K = K$, weil K ein Körper ist. Also wäre $K \subseteq R$ und damit $K = R$ gegen Voraussetzung. □

1.2.10. Satz. *Sei $\mathfrak{a}$ ein R-Ideal, $\{a_\iota \mid \iota \in I\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{a}^{-1}$ als R-Modul mit $a_\iota \neq 0$ für alle $\iota \in I$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{a}^* = \bigcap_{\iota\in I} R \cdot a_\iota^{-1}$$

Beweis. Stelle das R-Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ durch das Erzeugendensystem dar:
$\mathfrak{a}^{-1} = R\langle a_\iota \mid \iota \in I\rangle$. Nach Eigenschaften 1.2.2. (10) und (5) hat man:
$\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = (R\langle a_\iota \mid \iota \in I\rangle)^{-1} = \{a_\iota \mid \iota \in I\}^{-1} = \left(\bigcup_{\iota\in I}\{a_\iota\}\right)^{-1} = \bigcap_{\iota\in I}\{a_\iota\}^{-1} = \bigcap_{\iota\in I}\{R\cdot a_\iota\}^{-1} = \bigcap_{\iota\in I} R\cdot a_\iota^{-1}$. □

1.2.11. Korollar. *Sei $\mathfrak{a}$ ein R-Ideal. Dann gilt:*

$$\mathfrak{a}^* = \bigcap_{\substack{x\in K\\ R\cdot x\supseteq \mathfrak{a}}} R\cdot x$$

(Bei Bourbaki [6] *wird diese Bildung mit $\tilde{\mathfrak{a}}$ bezeichnet.)*

Zusatz*: Wenn R noethersch ist, kann man $\mathfrak{a}^*$ als Schnitt* endlich vieler *Hauptideale $\supseteq \mathfrak{a}$ darstellen.*

Beweis. „$\subseteq$“: $R\cdot x \supseteq \mathfrak{a} \Rightarrow R\cdot x = (R\cdot x)^* \supseteq \mathfrak{a}^*$ (s. Anmerkung 1.2.8 und Eigenschaften 1.2.2. (2)). Also gilt $\mathfrak{a}^* \subseteq \bigcap_{R\cdot x\supseteq\mathfrak{a}} R\cdot x$.
Stelle nun das R-Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ durch Erzeugende $\neq 0$ dar: $\mathfrak{a}^{-1} = R\langle a_\iota \mid \iota \in I\rangle$.
Nach Satz 1.2.10. ist dann $\mathfrak{a}^* = \bigcap_{\iota\in I} R\cdot a_\iota^{-1}$ und daraus folgt noch $R\cdot a_\iota^{-1} \supseteq \mathfrak{a}^* \supseteq \mathfrak{a}$. Nach dem unter „$\subseteq$“ gezeigten ändert sich dieser Schnitt nicht, wenn man zusätzlich zu den $R\cdot a_\iota^{-1}$ noch alle weiteren $R\cdot x$ mit $R\cdot x \supseteq \mathfrak{a}$ hinzunimmt. □
Beweis des Zusatzes: Wenn R noethersch ist, ist jedes R-Ideal, also insbesondere auch $\mathfrak{a}^{-1}$, endlich erzeugt. Für die Indexmenge I im obigen Beweis kann man also eine endliche Menge wählen. Dann ist $\mathfrak{a}^*$ der Schnitt über die endlich vielen Hauptideale $R\cdot a_\iota^{-1} \supseteq \mathfrak{a}$. □

1.2.12. *Anmerkung.* Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Sternideale. Dann ist $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^* = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.

Beweis. Da die Inklusion „$\supseteq$“ nach Eigenschaft 1.2.2. (3) stets gilt, bleibt nur „$\subseteq$“ zu zeigen:
$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^* \subseteq \mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$. Ebenso $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^* \subseteq b$, also $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^* \subseteq \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. □

1.3. **Multiplikation der Sternideale.**

1.3.1. Definition. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Sternideale.

$$\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b} := (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^*$$

heißt das „(Stern-) Produkt“ der beiden Sternideale.

1.3.2. *Anmerkung.*

(1) Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Sternideale und $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{a}\circ\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}\circ\mathfrak{c}$.
(2) Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Sternideale, $\mathfrak{c}\subseteq R$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\circ\mathfrak{c}$. Dann ist $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}$.

Beweis. (1): $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}$. Mit Eigenschaft 1.2.2. (2) folgt $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})^* \subseteq (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})^*$. □
(2): $\mathfrak{c}\subseteq R \Rightarrow \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$. Mit Eigenschaft 1.2.2. (2) folgt $\mathfrak{a} = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})^* \subseteq \mathfrak{b}^* = b$. □

Ein entscheidender Begriff für die Theorie der Sternideale ist der Begriff eines „vollständig ganz abgeschlossenen“ Integritätsbereichs.
Dazu definieren wir zunächst:

1.3.3. Definition. Ein Element $x\in K$ heißt *fast ganz über R* oder auch *fast ganz abhängig von R*, wenn die Potenzen von x beschränkte Nenner haben, d.h. wenn es ein $y\in R$ gibt mit $y\cdot x^n \in R$ für *alle* $n\in\mathbb{N}$.

Für den Zusammenhang mit „ganz abhängig“ siehe Satz 1.3.7.

1.3.4. Definition. R heißt *vollständig ganz abgeschlossen*, wenn jedes $x \in K$, das fast ganz über R ist, schon in R liegt.

1.3.5. *Beispiel.* Jeder ZPE-Ring ist vollständig ganz abgeschlossen.

Beweis. Sei $0 \neq x \in K$ fast ganz über K. Dann gibt es also ein $0 \neq y \in R$ mit $y \cdot x^n \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.. Stelle x dar mit paarweise verschiedenen Primelementen p_i, q_k in gekürzter Form: $x = \frac{p_1^{\nu_1} \ldots p_r^{\nu_r}}{q_1^{\mu_1} \ldots q_s^{\mu_s}}$. Dann ist $y \cdot x^n = \frac{y \cdot p_1^{n \cdot \nu_1} \ldots p_r^{n \cdot \nu_r}}{q_1^{n \cdot \mu_1} \ldots q_s^{n \cdot \mu_s}}$. Wegen der gekürzten Darstellung bedeutet $y \cdot x^n \in R$ für alle n dann $\frac{y}{q_1^{n \cdot \mu_1} \ldots q_s^{n \cdot \mu_s}} \in R$ für alle n. Da in y nur eine endliche Anzahl von Primfaktoren vorkommen, unabhängig von n, geht das nur, wenn $\mu_1, \ldots, \mu_s = 0$ ist. Es folgt $x \in R$. □

1.3.6. Hauptsatz.

(1) *Die Sternideale bilden bzgl. „$\circ$“ eine kommutative Halbgruppe mit R als Einselement.*
(2) *Diese Halbgruppe ist eine Gruppe $\Leftrightarrow$ R ist vollständig ganz abgeschlossen. In diesem Fall ist $\mathfrak{a}^{-1}$ das Inverse von $\mathfrak{a}$.*

Beweis. (1): a) $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ ist Sternideal: $\mathfrak{a} \neq (0)$ und $\mathfrak{b} \neq (0)$ als Sternideale nach Definition, also ist auch $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \neq (0)$. Nach Anmerkung 1.2.5 sind auch $\mathfrak{a}^{-1} \neq (0)$ und $\mathfrak{b}^{-1} \neq (0)$. Dann ist aber auch $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{-1} \supseteq \mathfrak{a}^{-1} \cdot \mathfrak{b}^{-1} \neq (0)$. Nach Anmerkung 1.2.6 ist dann $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^*$ ein Sternideal.
b) Assoziativ: $(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \circ \mathfrak{c} = ((\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c})^* = ((\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^* \cdot \mathfrak{c})^*$
$= ((\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c})^*$ nach Eigenschaft 1.2.2. (9)
$= (\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}))^*$
$= (\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})^*)^*$ nach Eigenschaft 1.2.2. (9)
$= \mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b} \circ \mathfrak{c})$
c) $R \circ \mathfrak{a} = (R \cdot \mathfrak{a})^* = \mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} \Rightarrow R$ ist Einselement.
d) Kommutativ ist klar nach Definition.
(2): $\underline{\Leftarrow}$: Sei R vollständig ganz abgeschlossen und $\mathfrak{a}$ ein Sternideal. Wir zeigen: $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a}^{-1} = R$.
(Da nach Anmerkung 1.2.7 auch $\mathfrak{a}^{-1}$ ein Sternideal ist, folgt dann, daß die Sternideale eine Gruppe mit $\mathfrak{a}^{-1}$ als Inversem von $\mathfrak{a}$ bilden.)
Beweis: Nach Definition von $\mathfrak{a}^{-1}$ ist zunächst stets $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq R$, also auch $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a}^{-1} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})^* \subseteq R^* = R$.
Zeige also noch $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a}^{-1} \supseteq R$, wenn R vollständig ganz abgeschlossen ist.
Dazu genügt es zu zeigen: $\left(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1} \subseteq R$;
denn dann folgt $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a}^{-1} = \left(\left(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \supseteq R^{-1} = R$.
Beweis: Sei $x \in \left(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1}$ beliebig. $\overset{!}{\Rightarrow} x \in R$.
(Daraus folgt dann die Behauptung.)
Beweis: $x \cdot (\mathfrak{a}^{-1} \cdot \mathfrak{a}) \subseteq R \Rightarrow$
$x \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}$
$x^2 \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq x \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1} \Rightarrow$
$x^3 \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq x \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}$ usw.
Induktionsvoraussetzung: $x^n \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}$
$\Rightarrow x^{n+1} \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq x \cdot \left(x^n \cdot \mathfrak{a}^{-1}\right) \subseteq x \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}$.

Also gilt $x^n \cdot \mathfrak{a}^{-1} \cdot \mathfrak{a} \subseteq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $0 \neq y \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$. (Ein solches y existiert, weil $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^{-1}$ als Sternideale $\neq (0)$ sind. Ferner ist $y \in R$, weil $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq R$.)
Speziell hat man dann auch $x^n \cdot y \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist x fast ganz über R und daher $x \in R$, weil R nach Voraussetzung vollständig ganz abgeschlossen ist. □
$\underline{\Rightarrow}$: Wir setzen nun voraus, daß die Sternideale bzgl. „$\circ$“ eine Gruppe bilden. Das inverse Element von $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{a}}$, da wir noch nicht wissen, daß dies $\mathfrak{a}^{-1}$ ist.
Behauptung: R ist vollständig ganz abgeschlossen.
Beweis: Sei $x \in K$, so daß es ein $0 \neq y \in R$ gibt mit $y \cdot x^n \in R$ für alle $n \in N$. Es ist zu zeigen, daß daraus folgt $x \in R$: O.B.d.A $x \neq 0$, weil sonst nichts mehr zu zeigen ist. Sei $\mathfrak{a} := \big(R\langle x, x^2, x^3, \dots \rangle\big)^*$ Dann ist $\mathfrak{a} \neq (0)$ und nach Eigenschaft 1.2.2. (4) ist $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$. Ferner ist nach Eigenschaft 1.2.2. (6)

$$y \cdot \mathfrak{a} = \big(y \cdot R\langle x, x^2, x^3, \dots \rangle\big)^* = \left(R\langle \underbrace{y \cdot x}_{\in R}, \underbrace{y \cdot x^2}_{\in R}, \underbrace{y \cdot x^3}_{\in R}, \dots \rangle \right)^* \subseteq R^* = R.$$

Also hat $\mathfrak{a}$ beschränkte Nenner und ist daher ein Sternideal.
Ferner gilt nach Eigenschaft 1.2.2. (9):
$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} =$
$\big(R\langle x, x^2, \dots \rangle \cdot R\langle x, x^2, \dots \rangle\big)^* = \big(R\langle x^2, x^3, x^4 \dots \rangle\big)^* \subseteq \big(R\langle x, x^2, x^3, x^4 \dots \rangle\big)^* = \mathfrak{a}.$
Nach Voraussetzung bilden die Sternideale bzgl. „$\circ$“ eine Gruppe. Multipliziere also die Beziehung $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ mit $\tilde{\mathfrak{a}}$:
$\mathfrak{a} = (\underbrace{\tilde{\mathfrak{a}} \circ \mathfrak{a}}_{=R}) \circ \mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}} \circ (\underbrace{\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a}}_{\subseteq \mathfrak{a}}) \subseteq \tilde{\mathfrak{a}} \circ \mathfrak{a} = R$, wobei die Inklusion nach Anmerkung 1.3.2 gilt. Wegen $x \in \mathfrak{a}$ folgt daraus $x \in R$.
Nach dem Teil „$\underline{\Leftarrow}$“ weiß man nun auch, daß $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{-1}$ ist. □

1.3.7. Satz.

(1) *$x \in K$ ganz über $R \Rightarrow x$ fast ganz über R.*
(2) *R vollständig ganz abgeschlossen $\Rightarrow R$ ganz abgeschlossen.*
(3) *Sei R noethersch. $x \in R$ fast ganz über $R \Rightarrow x$ ganz über R.*
(4) *R noethersch und ganz abgeschlossen $\Rightarrow R$ vollständig ganz abgeschlossen.*

Beweis. (1): Sei $x \in K$ ganz über R. Dann ist $R[x] = R\langle 1, x, x^2, \dots x^n \rangle$ ein endlich erzeugter R-Modul. Wenn $x = x_1/x_2$ ist mit $x_i \in R$, setze $y := x_2^n$. Dann ist $y \cdot R[x] \subseteq R$, also insbesondere $y \cdot x^\nu \in R$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$, d.h.
x ist fast ganz über R. □
(2): Unmittelbare Folge von (1): Wenn R vollständig ganz abgeschlossen ist, liegen alle über R fast ganzen Elemente aus K schon in R. Nach (1) liegen dann auch alle über R ganzen Elemente aus K in R. □
(3): Sei nun R noethersch und $x \in K$ fast ganz über R. Dann gibt es also ein $0 \neq y \in R$ mit $y \cdot x^\nu \in R$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$, woraus folgt $R[x] \subseteq R \cdot \frac{1}{y}$. Also ist $R[x]$ Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls und daher, weil R noethersch ist, selbst ein endlich erzeugter R-Modul. Es folgt: x ist ganz über R. □
(4): Unmittelbare Folge von (3): Wenn R ganz abgeschlossen ist, liegen alle über R ganzen Elemente aus K schon in R. Nach (1) liegen dann auch alle über R fast ganzen Elemente aus K in R. □

Ohne die Voraussetzung „R noethersch“, sind die Aussagen von Satz 1.3.7. (3), (4) i.a. falsch, wie die folgenden Gegenbeispiele zeigen:

1.3.8. *Gegenbeispiele.*

(1) Sei R ein zweistufiger diskreter Bewertungsring, $\pi_1, \pi_2 \in R$ mit den Werten $\nu(\pi_1) = (1,0)$ und $\nu(\pi_2) = (0,1)$. Da die Wertegruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexikographisch geordnet ist, ist $\nu(\frac{\pi_1}{\pi_2^n}) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\pi_1 \cdot \left(\frac{1}{\pi_2}\right)^n \in R$ für alle $n \in N$, aber $\frac{1}{\pi_2} \notin R$. Also ist R nicht vollständig ganz abgeschlossen, obwohl R als Bewertungsring ganz abgeschlossen ist.

(2) Sei K ein Körper, X, Y Unbestimmte. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $R_n := K\left[X, \frac{Y}{X^n}\right]$. Dann gilt $R_n \subseteq R_{n+1}$ für alle n. Setze $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$.
Bilde den Polynomring $k[X,Z]$. Vermöge $Z \mapsto \frac{Y}{X^n}$ ist $k[X,Z] \simeq R_n$, also sind alle R_n als Polynomringe ganz abgeschlossen, und daher ist auch R als aufsteigende Vereinigung ganz abgeschlossener Ringe ganz abgeschlossen.
Aber R ist *nicht* vollständig ganz abgeschlossen, denn $Y \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^n \in R$ für alle n, aber $\frac{1}{X} \notin R$.

1.4. **Unzerlegbare Sternideale.**

1.4.1. Definition. Ein R-Sternideal $\mathfrak{a}$ heißt *unzerlegbar* oder auch *irreduzibel* $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a} \subset R$ und aus einer Produktzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$ mit Sternidealen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq R$ folgt $\mathfrak{b} = R$ oder $\mathfrak{c} = R$.

Analog zu der Tatsache, daß irreduzible Elemente maximalen Hauptidealen entsprechen gilt hier:

1.4.2. Satz. *Sei R vollständig ganz abgeschlossen. Es gilt:*
$\mathfrak{p}$ ist unzerlegbares Sternideal $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{p}$ ist maximal bzgl. „$\subseteq$“ in der Menge aller Sternideale $\subset R$. („Maximales Sternideal“)

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$: Sei $R \supset \mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{p}$. Multiplikation mit $\mathfrak{d}^{-1}$ liefert $\mathfrak{c} := \mathfrak{p} \circ \mathfrak{d}^{-1} \subseteq \mathfrak{d} \circ \mathfrak{d}^{-1} = R$. Also ist $\mathfrak{c}$ ein ganzes Sternideal. Multiplikation mit $\mathfrak{d}$ liefert $\mathfrak{p} = \mathfrak{c} \circ \mathfrak{d}$. Da $\mathfrak{p}$ unzerlegbar und $\mathfrak{d} \subset R$ ist, folgt $\mathfrak{c} = R$ und daher $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}$. □
$\underline{\Leftarrow}$: Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Sternideal, $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b} \subset R$ und $\mathfrak{c} \subseteq R$. Mit Anmerkung 1.3.2.(2) folgt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{b}$ und daher $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$. Multiplikation mit $\mathfrak{p}^{-1}$ liefert $\mathfrak{c} = R$, also ist $\mathfrak{p}$ unzerlegbar. □

1.4.3. Satz. *$\mathfrak{p}$ maximales Sternideal $\Longrightarrow$ $\mathfrak{p}$ Primideal.*

Beweis. Seien $a, b \in R$, $a \cdot b \in \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p} \overset{!}{\Rightarrow} a \in \mathfrak{p}$.
Beweis: $R \supseteq (\mathfrak{p}, R \cdot b)^* \supseteq (\mathfrak{p}, R \cdot b) \supset \mathfrak{p}$, letztes weil $b \notin \mathfrak{p}$.
$(\mathfrak{p}, R \cdot b)^*$ ist ein Sternideal nach Anmerkung 1.2.6. Da $\mathfrak{p}$ maximales Sternideal ist, folgt $(\mathfrak{p}, R \cdot b)^* = R$. Also $a \in a \cdot R = a \cdot (\mathfrak{p}, R \cdot b)^* = (\underbrace{a \cdot \mathfrak{p}}_{\subseteq \mathfrak{p}}, \underbrace{R \cdot a \cdot b}_{\subseteq \mathfrak{p}})^* \subseteq \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$. □

1.4.4. *Anmerkung.* Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ ganze Sternideale und $\mathfrak{p}$ ein maximales Sternideal von R. Dann gilt: $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p} \Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$

Beweis. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^* = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Nach Satz 1.4.3 ist aber $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so daß folgt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. □

1.4.5. *Anmerkung.* Sei R vollständig ganz abgeschlossen, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Sternideale. Es gilt: $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \Longleftrightarrow$ Es existiert ein *ganzes* Sternideal $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}$.

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Gilt auch ohne die Voraussetzung, daß R vollständig ganz abgeschlossen ist, nach Anmerkung 1.3.2. (2).
$\underline{\Rightarrow}$: Setze $\mathfrak{c} := \mathfrak{a}^{-1} \circ \mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}^{-1} \circ \mathfrak{a} \subseteq R$ ein ganzes Sternideal und, da die Sternideale unter der Voraussetzung, daß R vollständig ganz abgeschlossen ist, eine Gruppe bilden, folgt aus $\mathfrak{c} := \mathfrak{a}^{-1} \circ \mathfrak{b}$ dann $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}$. □

1.4.6. Hauptsatz (Eindeutigkeit der Zerlegung in unzerlegbare Sternideale).
Sei R vollständig ganz abgeschlossen und seien $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_k$ $(i = 1, \ldots, r,\ k = 1, \ldots, s)$ unzerlegbare Sternideale mit

$$\mathfrak{p}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_s \,.$$

Dann ist $r = s$, und bei passender Numerierung gilt $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

Beweis. Induktion nach r: $r = 0$: $R = \mathfrak{q}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_s$. Nach Anmerkung 1.4.5 folgt $R \subseteq q_s$, also $\mathfrak{q}_s = R$ und somit $s = 0$, da ein unzerlegbares Sternideal nach Definition stets ungleich R ist.
Sei nun $r > 0$ und die Behauptung für $r - 1$ richtig. Sei $\mathfrak{p}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_s$. Mit Anmerkung 1.4.5 folgt $\mathfrak{p}_r \supseteq \mathfrak{q}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_s$ und weiter mit Anmerkung 1.4.4 bei passender Numerierung o.B.d.A. $\mathfrak{p}_r \supseteq \mathfrak{q}_s$. Nun ist $\mathfrak{q}_s$ nach Satz 1.4.2 ein maximales Sternideal, so daß folgt $\mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_s$. Multiplikation der ursprünglichen Gleichung mit $\mathfrak{p}_r^{-1} = \mathfrak{q}_s^{-1}$ liefert: $\mathfrak{p}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_{r-1} = \mathfrak{q}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_{s-1}$, woraus nach Induktionsannahme folgt $r - 1 = s - 1$, also $r = s$, und bei passender Numerierung $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ für alle $i = 1, \ldots, r - 1$. □

Um zusätzlich zur Eindeutigkeit auch die Existenz der Zerlegung eines Sternideals in ein Produkt unzerlegbarer Sternideale zu garantieren, braucht man noch eine Endlichkeitsbedingung:

1.4.7. Definition (Maximal- oder Teilerkettenbedingung für Sternideale).
Bedingung (T^*):
In jeder nichtleeren Menge von ganzen Sternidealen gibt es ein bzgl. „$\subseteq$“ maximales Element.

1.4.8. *Anmerkung.* Es sind äquivalent:

(1) (T^*) gilt in R.
(2) Jede aufsteigende Kette von ganzen Sternidealen $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \mathfrak{a}_4 \ldots$ wird nach endlich vielen Schritten stationär.

Beweis. Analog zum entsprechenden Satz für den noetherschen Teilerkettensatz. □

1.4.9. *Anmerkung.* Wenn R noethersch ist, gilt (T^*) in R, weil jedes ganze Sternideal ein Ideal ist.
Die Umkehrung ist aber i.a. falsch.

1.4.10. *Gegenbeispiel.* Sei k ein Körper und $R := k[X_1, X_2, X_3 \ldots]$ Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten über k. Dieser Ring ist ein ZPE-Ring, also sind die Sternideale gerade die Hauptideale (Satz 3.4.1 (4)). Aus der ZPE-Eigenschaft folgt die Maximalbedingung für Hauptideale, also gilt (T^*) in R. Andererseits ist R sicher nicht noethersch!

1.5. **Krull-Ringe.**

1.5.1. Definition. Ein Ring R heißt „Krull-Ring“ genau dann, wenn gilt:

(1) R ist ein vollständig ganz abgeschlossener Integritätsbereich und kein Körper.
(2) (T^*) gilt in R.

1.5.2. Satz. *In einem Krullring ist jedes ganze Sternideal Sternprodukt endlich vieler unzerlegbarer Sternideale und diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren. (D.h. die unzerlegbaren Sternideale sind eine Basis der freien kommutativen Halbgruppe der ganzen Sternideale.)*

Beweis. Die Existenz der Zerlegung folgt wie im noetherschen Fall aus der Bedingung (T^*): Man bildet die Menge
$\mathfrak{N} := \{$Sternideale, die *nicht* Sternprodukt endlich vieler unzerlegbarer Sternideale sind$\}$
und zeigt mit dem üblichen Schluß $\mathfrak{N} = \emptyset$.
Die Eindeutigkeit bis auf die Reihenfolge der Faktoren folgt aus Satz 1.4.6. □

1.5.3. Definition (Sternpotenz). Sei $\mathfrak{a}$ ein Sternideal $\subset K$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

$$\mathfrak{a}^{[\nu]} := \begin{cases} \underbrace{\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} \circ \cdots \circ \mathfrak{a}}_{\nu\text{-mal}} & \text{falls } \nu > 0 \\ R & \text{falls } \nu = 0 \\ (\underbrace{\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} \circ \cdots \circ \mathfrak{a}}_{-\nu\text{-mal}})^{-1} & \text{falls } \nu < 0 \end{cases}$$

1.5.4. *Anmerkung.* Die Definition 1.5.3 ist die übliche Potenzdefinition in einer kommutativen (Halb-) Gruppe. Also gelten die üblichen Regeln.

1.5.5. Hauptsatz. *Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{a}$ ein Sternideal $\subset K$. Es gilt:*

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_n^{[\nu_n]}$, *wobei die $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschiedene unzerlegbare Sternideale sind und $\nu_i \in \mathbb{Z}$. Die ν_i sind eindeutig bestimmt.*
Folgerung*: Die Gruppe der Sternideale $\subset K$ ist eine freie abelsche Gruppe mit den unzerlegbaren Sternidealen als Basis.*
(2) $\mathfrak{a} \subseteq R \iff \nu_i \geq 0$ *für alle i.*

Beweis. (1): Nach Definition der Sternideale existiert ein $0 \neq y \in R$ mit $y{\cdot}\mathfrak{a} \subseteq R$. (y) und $y{\cdot}\mathfrak{a}$ sind Sternideale, und zwar ist $y{\cdot}\mathfrak{a} = (y) \circ \mathfrak{a}$. nach Eigenschaft 1.2.2. (6), also $\mathfrak{a} = (y)^{-1} \circ (y{\cdot}\mathfrak{a})$. Zerlege nach Satz 1.5.2 (y) und $(y{\cdot}a)$ in Produkte unzerlegbarer Sternideale und fasse zu Potenzen zusammen.
Eindeutigkeit: Sei $\mathfrak{p}_1^{[\nu_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\nu_r]} = \mathfrak{p}_1^{[\mu_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\mu_r]}$. Wähle ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit
$\gamma > \max\{|\nu_1|, \ldots, |\nu_r|, |\mu_1|, \ldots, |\mu_r|\}$. Multiplikation mit $(\mathfrak{p}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r)^{[\gamma]}$ liefert:
$\mathfrak{p}_1^{[\nu_1+\gamma]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\nu_r+\gamma]} = \mathfrak{p}_1^{[\mu_1+\gamma]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\mu_r+\gamma]}$, wobei jetzt alle Exponenten positiv sind. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.4.6. ergibt dann $\nu_i + \gamma = \mu_i + \gamma$, also $\nu_i = \mu_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$. □
(2): „$\Leftarrow$“ ist trivial.
$\underline{\Rightarrow}$: Falls $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist, existiert jedenfalls eine Darstellung mit nichtnegativen Exponenten nach Satz 1.5.2. Da die Exponenten nach (1) eindeutig bestimmt sind, sind sie in jeder Darstellung nichtnegativ. □

1.5.6. Definition. Sei R vollständig ganz abgeschlossen, $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal, $x \in R$.

$$\nu_{\mathfrak{p}}(x) := \sup\{n \mid x \in \mathfrak{p}^{[n]}\} \leq \infty$$

1.5.7. *Anmerkung.* Sei R vollständig ganz abgeschlossen. Es gilt:
$\nu_{\mathfrak{p}}(x) = r < \infty \Longleftrightarrow R \cdot x = \mathfrak{p}^{[r]} \circ \mathfrak{c}$, wobei $\mathfrak{c}$ ein ganzes Sternideal ist mit $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{p}$

Beweis. $\underline{\Rightarrow:}$ Nach Anmerkung 1.4.5. existiert ein ganzes Sternideal $\mathfrak{c}$ mit $(x) = \mathfrak{p}^{[n]} \circ \mathfrak{c}$. Aber $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{p}$, weil sonst $x \in \mathfrak{p}^{[n+1]}$. □
$\underline{\Leftarrow:}$ $(x) = \mathfrak{p}^{[n]} \circ \mathfrak{c} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}^{[n]}$ nach Anmerkung 1.3.2. (2). Wäre $x \in \mathfrak{p}^{[n+1]}$, so wäre nach Anmerkung 1.4.5. $(x) = \mathfrak{p}^{[n+1]} \circ \mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{d} \subseteq R$, also wegen der Gruppeneigenschaft der Sternideale $\mathfrak{c} = \mathfrak{p} \circ \mathfrak{d}$ und damit $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{p}$ gegen Voraussetzung. □

Im Folgenden ist, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, stets der Fall $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = \infty$ mit eingeschlossen. Man rechnet dabei wie folgt:
$\infty + n = \infty$ für $n \in \mathbb{Z}$ oder $n = \infty$
$\infty > n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

1.5.8. Satz (Eigenschaften von $\nu_{\mathfrak{p}}$). *Seien $x, y \in R$. Es gilt:*

(1) $\nu_{\mathfrak{p}}(x \cdot y) = \nu_{\mathfrak{p}}(x) + \nu_{\mathfrak{p}}(y)$
(2) $\nu_{\mathfrak{p}}(x + y) \geq \min\{\nu_{\mathfrak{p}}(x), \nu_{\mathfrak{p}}(y)\}$
(3) *Ist* $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \neq \nu_{\mathfrak{p}}(y)$, *so gilt* $\nu_{\mathfrak{p}}(x + y) = \min\{\nu_{\mathfrak{p}}(x), \nu_{\mathfrak{p}}(y)\}$

Beweis. (1): Es ist $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = \infty \Leftrightarrow x \in \mathfrak{p}^{[m]}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist auch $x \cdot y \in \mathfrak{p}^{[m]}$ für alle $m \in N$ und beide Seiten der Gleichung haben den Wert ∞. Ebenso für $\nu_{\mathfrak{p}}(y) = \infty$. Seien also nun $\nu_{\mathfrak{p}}(x) < \infty$ und $\nu_{\mathfrak{p}}(y) < \infty$.
Es ist $(x) = \mathfrak{p}^{[\nu_{\mathfrak{p}}(x)]} \circ \mathfrak{c}$, $(y) = \mathfrak{p}^{[\nu_{\mathfrak{p}}(y)]} \circ \mathfrak{d}$ mit ganzen Sternidealen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Daher $(x \cdot y) = (x) \circ (y) = \mathfrak{p}^{[\nu_{\mathfrak{p}}(x) + \nu_{\mathfrak{p}}(y)]} \circ (\mathfrak{c} \circ \mathfrak{d})$ und für das ganze Sternideal $\mathfrak{c} \circ \mathfrak{d} \not\subseteq \mathfrak{p}$ nach Anmerkung 1.4.4. Nach Anmerkung 1.5.7 ergibt sich dann $\nu_{\mathfrak{p}}(x \cdot y) = \nu_{\mathfrak{p}}(x) + \nu_{\mathfrak{p}}(y)$. □
(2): O.B.d.A. sei $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(y) =: n$. Falls $n = \infty$ ist, ist auch $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = \infty$ und dann $x + y \in \mathfrak{p}^{[m]}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also auch $\nu_{\mathfrak{p}}(x + y) = \infty$ und die Ungleichung ist erfüllt. Sei also nun $n < \infty$. Dann ist $x, y \in \mathfrak{p}^{[n]}$, also auch $x + y \in \mathfrak{p}^{[n]}$ und daher $\nu_{\mathfrak{p}}(x + y) \geq n = \min\{\nu_{\mathfrak{p}}(x), \nu_{\mathfrak{p}}(y)\}$. □
(3): Sei nun $\nu_{\mathfrak{p}}(x) > \nu_{\mathfrak{p}}(y) = n$. Wäre $x + y \in \mathfrak{p}^{[n+1]}$, so wäre $y \in \mathfrak{p}^{[n+1]}$, da ja nach Voraussetzung $x \in \mathfrak{p}^{[n+1]}$, also wäre $\nu_{\mathfrak{p}}(y) \geq n + 1$ gegen Voraussetzung. □

1.5.9. *Anmerkung.* Sei R vollständig ganz abgeschlossen und es gelte, daß jedes ganze Hauptideal $\neq (0)$ Produkt endlich vieler unzerlegbarer Sternideale ist. (Die Voraussetzung (T^*) ist zu stark für die spätere Anwendung in 1.7.) Sei $x \in R$. Es gilt:

(1) $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = \infty \Longleftrightarrow x = 0$
(2) Ist $x \neq 0$, so ist $\nu_{\mathfrak{p}}(x)$ die Potenz, mit der $\mathfrak{p}$ in der Darstellung von (x) als Potenzprodukt unzerlegbarer Sternideale vorkommt.

Beweis. (2): Sei $(x) = \mathfrak{p}^{[n]} \circ \mathfrak{p}_1^{[n_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[n_r]}$ mit paarweise verschiedenen unzerlegbaren Sternidealen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$. Nach Anmerkung 1.4.4 folgt wegen der Maximalität der unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}_1^{[n_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[n_r]} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Nach Anmerkung 1.5.7 folgt dann $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = n$. □
(1): $\nu_{\mathfrak{p}}(0) = \infty$ ist klar. Ist aber $x \neq 0$, so hat man nach Voraussetzung eine Darstellung von (x) als Produkt unzerlegbarer Sternideale. Wie in (2) gezeigt ist dann $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = n \neq \infty$ die Potenz, mit der $\mathfrak{p}$ in dieser Darstellung auftaucht. □

1.5.10. Definition. Seien die Voraussetzungen von Anmerkung 1.5.9. erfüllt, $0 \neq x \in K$, $x = x_1/x_2$ mit $x_i \in R$.

$$\nu_{\mathfrak{p}}(x) := \nu_{\mathfrak{p}}(x_1) - \nu_{\mathfrak{p}}(x_2)$$

Diese Definition ist sinnvoll: Nach Anmerkung 1.5.9 sind zunächst die $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i) \neq \infty$. Ist ferner $x_1/x_2 = y_1/y_2$ mit $x_i, y_i \in R$, so ist $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$. Nach Satz 1.5.8 ist dann $\nu_{\mathfrak{p}}(x_1) + \nu_{\mathfrak{p}}(y_2) = \nu_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdot y_2) = \nu_{\mathfrak{p}}(y_1 \cdot x_2) = \nu_{\mathfrak{p}}(y_1) + \nu_{\mathfrak{p}}(x_2)$ und daher $\nu_{\mathfrak{p}}(x_1) - \nu_{\mathfrak{p}}(x_2) = \nu_{\mathfrak{p}}(y_1) - \nu_{\mathfrak{p}}(y_2)$. □

1.5.11. *Anmerkung.* Voraussetzungen wie in Anmerkung 1.5.9. Es gilt:

(1) Die Eigenschaften von Satz 1.5.8 und Anmerkung 1.5.9 übertragen sich auf die erweiterte Definition von $\nu_{\mathfrak{p}} : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.
(2) $\nu_{\mathfrak{p}}(-x) = \nu_{\mathfrak{p}}(x)$, $\quad \nu_{\mathfrak{p}}\left(x^{-1}\right) = -\nu_{\mathfrak{p}}(x)$.

Klar nach Definition.

1.5.12. Satz. *Voraussetzungen wie in Anmerkung 1.5.9. Sei $0 \neq x \in K$. Es gilt:*

(1) $x \in R \iff \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ *für* alle *unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}$ von R.*
(2) *x Einheit von R* $\iff \nu_{\mathfrak{p}}(x) = 0$ *für* alle *unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}$ von R.*
(3) $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \neq 0$ *für höchstens endlich viele unzerlegbare Sternideale $\mathfrak{p}$ von R.*

Beweis. (1): „⇒“: Klar nach Definition von $\nu_{\mathfrak{p}}$.
$\underline{\Leftarrow}$: Nach Anmerkung 1.5.9. (2) ist $(x) = \mathfrak{p}_1^{[n_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[n_r]}$ mit $n_i = \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ und daher $(x) \subseteq R$. □
(2): $x \in R$ und $x^{-1} \in R \Leftrightarrow \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ und $-\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ nach (1), d.h. $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = 0$. □
(3): In der Sternpotenzzerlegung eines Zählers und eines Nenners von x treten nur *endlich viele* unzerlegbare Sternideale auf. Höchstens für diese ist nach Anmerkung 1.5.9. (2) dann $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \neq 0$. □

1.5.13. Definition. Sei R wie in Anmerkung 1.5.9, $A \subseteq K$ eine Teil*menge* von K mit beschränkten Nennern (d.h. es existiert ein $y \neq 0$ mit $y \cdot A \subseteq R$), $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal von R.

$$\nu_{\mathfrak{p}}(A) = \inf\{\nu_{\mathfrak{p}}(x) \mid x \in A\} \leq \infty$$

1.5.14. *Anmerkung.*

(1) $\nu_{\mathfrak{p}}(x \cdot A) = \nu_{\mathfrak{p}}(x) + \nu_{\mathfrak{p}}(A)$ für beliebige $x \in K$,
speziell $\nu_{\mathfrak{p}}(R \cdot x) = \nu_{\mathfrak{p}}(x)$.
(2) Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{a}$ ein Sternideal aus K. Es gilt:
$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = n \iff \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{[n]} \circ \mathfrak{b}$, wobei $\mathfrak{p}$ in der Zerlegung von $\mathfrak{b}$ *nicht* auftritt.

Beweis. (1) ergibt sich sofort aus der Definition.
(2): Zunächst ist $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) < \infty$; denn, da $\mathfrak{a}$ als Sternideal $\neq (0)$ ist, gibt es ein $y \in \mathfrak{a}$, $y \neq 0$, so daß man hat $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \leq \nu_{\mathfrak{p}}(y) < \infty$. Wegen (1) kann man o.B.d.A annehmen $\mathfrak{a} \subseteq R$.
$\underline{\Rightarrow}$: $0 \neq x \in \mathfrak{a} \Rightarrow \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq n \geq 0 \Rightarrow x \in \mathfrak{p}^{[n]}$. Da dies für alle $x \in \mathfrak{a}$ gilt, folgt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^{[n]}$ und daher nach Anmerkung 1.4.5 $\quad \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{[n]} \circ \mathfrak{b}$ mit einem ganzen Sternideal $\mathfrak{b}$. Käme $\mathfrak{p}$ in der Zerlegung von $\mathfrak{b}$ vor, so wäre $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^{[n+1]}$, also $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq n+1$ für alle $x \in \mathfrak{a}$ und somit $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \geq n+1$ gegen Voraussetzung. □
$\underline{\Leftarrow}$: $x \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^{[n]} \Rightarrow \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq n$. Wäre für *alle* $x \in \mathfrak{a} \quad \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq n+1$, so wäre $a \subseteq \mathfrak{p}^{[n+1]}$ und folglich $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p}$ käme in der Zerlegung von $\mathfrak{b}$ vor nach Anmerkung 1.4.5. gegen Voraussetzung. Also ist $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = n$. □

1.5.15. Satz. *Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ R-Sternideale aus K. Es gilt:*

(1) $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) + \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$
(2) $\nu_{\mathfrak{p}}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right) = -\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$

(3) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \iff$ *Für* alle *unzerlegbaren Sternideale* $\mathfrak{p}$ *von* R *ist* $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$.
Insbesondere gilt also:
$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \iff$ *Für* alle *unzerlegbaren Sternideale* $\mathfrak{p}$ *von* R *ist* $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$.

Beweis. (1) ist klar nach Anmerkung 1.5.14. (2). □
(2): Nach (1) ist $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) + \nu_{\mathfrak{p}}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right) = \nu_{\mathfrak{p}}\left(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a}^{-1}\right) = \nu_{\mathfrak{p}}(R) = 0$. □
(3): $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}^{-1} \subseteq R$. Nach Definition 1.5.13. und Satz 1.5.12. (1) ist das äquivalent zu $\nu_{\mathfrak{p}}\left(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}^{-1}\right) \geq 0$ für alle $\mathfrak{p}$. Wegen $\nu_{\mathfrak{p}}\left(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}^{-1}\right) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) - \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$ ist das schließlich äquivalent zu $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$. □

1.5.16. Hauptsatz (Primideale in einem Krullring)**.**
Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{P} \neq (0)$ ein Primideal von R (nicht notwendigerweise ein Sternideal). Es gilt:
Entweder: $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{P}$ *ist ein unzerlegbares Sternideal.*
Oder: $\mathfrak{P}^* = R$ *und* $\mathfrak{P}$ *enthält echt ein unzerlegbares Sternideal.*
Zusatz: Im Fall $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$ *ist in* $\mathfrak{P}$ *kein Primideal* $\neq (0)$ *echt enthalten (d.h.* $\mathfrak{P}$ *hat die Höhe* 1*).*

Beweis. $\mathfrak{P} \neq (0) \Rightarrow$ es existiert $0 \neq x \in \mathfrak{P}$. Betrachte die Sternzerlegung von $R \cdot x$ nach Satz 1.5.2.: $\mathfrak{P} \supseteq R \cdot x = \mathfrak{p}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r \supseteq \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r$. Da $\mathfrak{P}$ ein Primideal ist, folgt bei passender Numerierung $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^*$. Nun ist $\mathfrak{P}^*$ nach Anmerkung 1.2.6 ein Sternideal und $\mathfrak{p}_1$ ist als unzerlegbares Sternideal maximales Sternideal nach Satz 1.4.2. Also ist:
entweder: a) $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{p}_1$
oder: b) $\mathfrak{P}^* = R$.
Im Fall a) folgt $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^*$, also $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* = \mathfrak{p}_1$ unzerlegbares Sternideal.
Im Fall b) folgt: $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{p}_1$; denn wäre $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1$, so wäre $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_1 \neq R$, also enthält $\mathfrak{P}$ *echt* ein unzerlegbares Sternideal, nämlich $\mathfrak{p}_1$. □
Beweis des Zusatzes: Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*$ unzerlegbares Sternideal und $(0) \neq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{P}$, wobei $\mathfrak{q}$ ein Primideal ist. Nach dem Satz ist entweder $\mathfrak{q}^* = R$, dann wäre wegen $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{P}$ auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* = R$, was nicht sein kann, oder aber $\mathfrak{q}$ ein unzerlegbares und daher maximales Sternideal und folglich $\mathfrak{q} = \mathfrak{P}$. □

1.5.17. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring.*
Ein Primideal $\mathfrak{P}$ von R ist genau dann ein Sternideal, wenn es die Höhe 1 hat.
Die Primideale der Höhe 1 von R sind genau die unzerlegbaren Sternideale.

1.5.18. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring, in dem alle Primideale $\neq (0)$ maximale Ideale sind. Dann gilt:*
Die unzerlegbaren Sternideale von R sind gerade die Primideale $\neq (0)$.

1.5.19. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring, in dem alle Primideale $\neq (0)$ maximale Ideale sind, und sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges R-Ideal. Dann gilt:*
$\mathfrak{a}^* = R \iff \mathfrak{a} = R$.

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: trivial (Eigenschaft 1.2.2. (1)).
$\underline{\Rightarrow}$: $\mathfrak{a}^* = R \Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq R$, weil $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^*$.
Wäre $\mathfrak{a} \subset R$, so gäbe es ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Nach Korollar 1.5.18 ist $\mathfrak{p}$ unzerlegbares Sternideal, also $\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \subset R$, und daher $\mathfrak{a}^* \neq R$ entgegen der Voraussetzung. □

1.5.20. Satz (Approximationssatz für Krull-Ringe)**.** *Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{p}_1 \ldots, \mathfrak{p}_n$ paarweise unzerlegbare Sternideale von R.*

Ferner seien
$\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}$ *vorgegeben.*
Dann gibt es ein $z \in K$ *mit*
$\nu_{\mathfrak{p}_i}(z) = \mu_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$,
$\nu_{\mathfrak{p}}(z) \geq 0$ *für* alle *unzerlegbaren Primideale* $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{c}_i := \mathfrak{p}_1^{[\mu_1+1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_{i-1}^{[\mu_{i-1}+1]} \circ \mathfrak{p}_i^{[\mu_i]} \circ \mathfrak{p}_{i+1}^{[\mu_{i+1}+1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_n^{[\mu_n+1]}$ für $i = 1, \ldots, n$.
Nach Anmerkung 1.5.14. (2) ist dann

$$\begin{array}{lll} \nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{c}_i) & = \mu_i & \\ \nu_{\mathfrak{p}_k}(\mathfrak{c}_i) & = \mu_k + 1 > \mu_k & \text{für } k \neq i \\ \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_i) & = 0 & \text{für alle } \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}. \end{array}$$

Nach Definition 1.5.13 gibt es dann $c_i \in \mathfrak{c}_i$ mit $\nu_{\mathfrak{p}_i}(c_i) = \mu_i$.
Weil nach Definition $\nu_{\mathfrak{q}}(c_i) \geq \nu_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{c}_i)$ ist für alle unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{q}$ gilt dann:

$$\begin{array}{lll} \nu_{\mathfrak{p}_i}(c_i) & = \mu_i & \\ \nu_{\mathfrak{p}_k}(c_i) & > \mu_k & \text{für } k \neq i \\ \nu_{\mathfrak{p}}(c_i) & \geq 0 & \text{für } \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}, \end{array}$$

Sei $z := \sum_{j=1}^{n} c_j$.

Dann folgt nach der Minimumsregel Satz 1.5.8. (3) zusammen mit Anmerkung 1.5.11. (1):

	c_1	c_2	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
$\nu_{\mathfrak{p}_1}$	$\boxed{\mu_1}$	$> \mu_1$	$\cdots$	$> \mu_1$	$\cdots$	$> \mu_1$	$\cdots$	$> \mu_1$
$\nu_{\mathfrak{p}_2}$	$> \mu_2$	$\boxed{\mu_2}$	$\cdots$	$> \mu_2$	$\cdots$	$> \mu_2$	$\cdots$	$> \mu_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
$\nu_{\mathfrak{p}_i}$	$> \mu_i$	$> \mu_i$	$\cdots$	$\boxed{\mu_i}$	$\cdots$	$> \mu_i$	$\cdots$	$> \mu_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
$\nu_{\mathfrak{p}_k}$	$> \mu_k$	$> \mu_k$	$\cdots$	$> \mu_k$	$\cdots$	$\boxed{\mu_k}$	$\cdots$	$> \mu_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
$\nu_{\mathfrak{p}_n}$	$> \mu_n$	$> \mu_n$	$\cdots$	$> \mu_n$	$\cdots$	$> \mu_n$	$\cdots$	$\boxed{\mu_n}$

$$\begin{array}{lll} \nu_{\mathfrak{p}_i}(z) = \nu_{\mathfrak{p}_i}(c_i) = \mu_i & \text{für } i = 1, \ldots, n, & \\ \nu_{\mathfrak{p}}(z) \geq 0 & \text{für alle } \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} & \end{array}$$

□

1.6. **Dedekind-Ringe.**

1.6.1. Definition. Ein Ring R heißt *Dedekind-Ring* genau dann, wenn gilt:

(1) R ist ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, der kein Körper ist.
(2) Jedes Primideal $\neq (0)$ von R ist ein maximales Ideal.
(3) R ist noethersch.

Da ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätbereich nach Satz 1.3.7. (4) auch vollständig ganz abgeschlossen ist und aus der noetherschen Kettenbedingung die Bedingung (T^*) folgt (Anmerkung 1.4.9), hat man:

1.6.2. *Anmerkung.* Jeder Dedekind-Ring ist ein Krull-Ring.

Entscheidend für alles weitere ist nun das folgende Lemma:

1.6.3. Lemma. *Sei* R *vollständig ganz abgeschlossen, und für jedes ganze* R*-Ideal gelte:* $(\mathfrak{c}^* = R) \Rightarrow (\mathfrak{c} = R)$. *Dann gilt:*
Sind $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *beliebige* R*-Ideale* $\neq (0)$ *aus* K, *so gilt:* $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^* \Longleftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: trivial.
$\underline{\Rightarrow}$: Nach Anmerkung 1.2.6. sind $\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{b}^*$ Sternideale. Dann gilt mit Eigenschaften 1.2.2. (4), (9):
$\left(\mathfrak{a}^{-1} \cdot \mathfrak{b}\right)^* = \left((\mathfrak{a}^*)^{-1} \cdot \mathfrak{b}^*\right)^* = (\mathfrak{a}^*)^{-1} \circ \mathfrak{b}^* = (\mathfrak{a}^*)^{-1} \circ \mathfrak{a}^* = R$, wobei die letzte Gleichung nach Hauptsatz 1.3.6. (2) gilt, weil R vollständig ganz abgeschlossen ist.

Nach Voraussetzung folgt daraus $\mathfrak{a}^{-1}\cdot\mathfrak{b} = R$
Ebenso:
$\left(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right)^* = \left(\mathfrak{a}^*\cdot(\mathfrak{a}^*)^{-1}\right)^* = \mathfrak{a}^* \circ (\mathfrak{a}^*)^{-1} = R \quad \Rightarrow \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1} = R.$
Insgesamt hat man also:
$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\cdot R = \mathfrak{a}\cdot\left(\mathfrak{a}^{-1}\cdot\mathfrak{b}\right) = \left(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right)\cdot\mathfrak{b} = R\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{b}.$ □

1.6.4. Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.6.3. gilt für jedes R-Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ aus K:* $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$.
Insbesondere ist also jedes R-Ideal $\neq (0)$ ein Sternideal und es ist $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$.

Beweis. Wende Lemma 1.6.3. an mit $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}^*$. Es ist $\mathfrak{b}^* = (a^*)^* = \mathfrak{a}^*$, also nach Lemma 1.6.3. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^*$. □

1.6.5. Hauptsatz. *Sei R ein Dedekind-Ring. Es gilt:*
Jedes R-Ideal $\neq (0)$ aus K ist in eindeutiger Weise Potenzprodukt (gewöhnliche Idealmultiplikation) von Primidealen $\neq (0)$.
Folgerung*: Die R-Ideale $\neq (0)$ aus K bilden bezüglich der gewöhnlichen Idealmultiplikation eine freie abelsche Gruppe mit den Primidealen $\neq (0)$ von R als Basis, R als Eins und $\mathfrak{a}^{-1}$ als Inversem von $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Nach Korollar 1.5.19. sind die Voraussetzungen von Korollar 1.6.4 erfüllt, also ist jedes R-Ideal $\neq (0)$ aus K ein Sternideal und „$\circ$“=„$\cdot$“. Nach Korollar 1.5.18 sind ferner die Primideale $\neq (0)$ von R gerade die unzerlegbaren Sternideale. Die Behauptung des Satzes folgt daher als Spezialfall von Hauptsatz 1.3.6. (2) und Hauptsatz 1.5.5. (1). □

1.6.6. Satz (Scharfer Approximationssatz für Dedekind-Ringe)**.**
Sei R ein Dedekind-Ring,
$\mathfrak{p}_1 \ldots, \mathfrak{p}_n$ *paarweise verschiedene Primideale $\neq (0)$ von R.*
Ferner seien
$\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}$,
$a_1, \ldots, a_n \in K$
vorgegeben.
Dann gibt es ein $z \in K$ mit
$\nu_{\mathfrak{p}_i}(z - a_i) \geq \mu_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$,
$\nu_{\mathfrak{p}}(z) \geq 0$ *für* alle *Primideale* $(0) \neq \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

Beweis. Vorbemerkung: Man kann o.B.d.A. stets annehmen, daß $\mu_i > 0$ ist für alle i; denn, falls man alle μ_i durch $|\mu_i| + 1$ ersetzt und dafür ein z findet, tut es dieses z erst recht für die ursprünglichen μ_i, da $\mu_i \leq |\mu_i| + 1$ ist.
1) Reduktion auf den Fall $a_i \in R$, $\mu_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$:
Sei $c \in R$ ein gemeinsamer Nenner für die a_i, also
$b_i := c \cdot a_i \in R$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Erweitere das System der $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ eventuell um endlich viele $\mathfrak{p}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{p}_m$, so daß alle $\mathfrak{p}$, die in der Zerlegung von $R \cdot c$ mit Exponenten $\neq 0$ vorkommen, d.h. für die $\nu_{\mathfrak{p}}(c) > 0$ ist, in der Menge $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ liegen; also
$\nu_{\mathfrak{p}}(c) \geq 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ und $\nu_{\mathfrak{p}}(c) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$.
Sei ferner $\left\{\begin{array}{l} b_i := c \\ \mu_i := 1 \\ a_i := 1 \end{array}\right\}$ für $i = n+1, \ldots, m$.
Wir nehmen ferner an, der Satz sei für $a_i \in R$, $\mu_i > 0$ schon gezeigt. Wir wenden

das nun an auf $\mu_i + \nu_{\mathfrak{p}_i}(c) \geq \mu_i > 0$ und b_i statt μ_i und a_i für $i = 1, \ldots, m$.
Es existiert also ein $z' \in K$ mit

$$\begin{array}{lll} \nu_{\mathfrak{p}_i}(z' - b_i) \geq \mu_i + \nu_{\mathfrak{p}_i}(c) & \text{für } i = 1, \ldots, m \\ \nu_{\mathfrak{p}}(z') \geq 0 & \text{für alle } \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\} \end{array}$$

Es folgt:

$$\begin{array}{lll} \nu_{\mathfrak{p}_i}\left(\frac{z'}{c} - a_i\right) \geq \mu_i + \nu_{\mathfrak{p}_i}(c) - \nu_{\mathfrak{p}_i}(c) = \mu_i & \text{für } i = 1, \ldots, m \\ \nu_{\mathfrak{p}}\left(\frac{z}{c}'\right) \geq 0 - \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}}(c)}_{=0} = 0 & \text{für alle } \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\} \end{array}$$

Aber für $i = n+1, \ldots, m$ ist $a_i = 1$ und $\mu_i = 1$, also $\nu_{\mathfrak{p}_i}\left(\frac{z'}{c} - 1\right) \geq 1$ und folglich $\nu_{\mathfrak{p}_i}\left(\frac{z'}{c}\right) = 0$, weil $\nu_{\mathfrak{p}_i}(1) = 0$ ist. (Vgl. Satz 1.5.8. (3).)
$z := \frac{z'}{c}$ hat also die gewünschten Eigenschaften. □

2) Beweis des Satzes im Fall $a_i \in R$, $\mu_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$:
$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sind paarweise verschiedene *maximale* Ideale von R. Also sind die Potenzen $\mathfrak{p}_1^{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{\mu_n}$ paarweise teilerfremd. Daher gibt es (nach dem allgemeinen chinesischen Restsatz) ein $z \in R$ mit $z \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{\mu_i}}$, d.h. $z - a_i \in \mathfrak{p}^{\mu_i}$ und daher $\nu_{\mathfrak{p}_i}(z - a_i) \geq \mu_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ nach Definition der $\nu_{\mathfrak{p}_i}$. Ferner ist $\nu_{\mathfrak{p}}(z) \geq 0$ für alle $\mathfrak{p}$, weil $z \in R$. Also hat z die verlangten Eigenschaften. □

1.7. **Umkehrung der Ergebnisse.**

1.7.1. Satz. *Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K, und $R \neq K$.*
Es gilt:
R ist ein Krull-Ring $\Longleftrightarrow$

(1) *Die Sternideale von K bilden bzgl. „$\circ$“ eine Gruppe.*
(2) *Für jedes $0 \neq x \in K$ gilt: $R \cdot x$ ist ein Sternprodukt unzerlegbarer Sternideale.*

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$: Ergibt sich aus Satz 1.5.2. □
$\underline{\Leftarrow}$: R vollständig ganz abgeschlossen folgt aus Hauptsatz 1.3.6. (2)
Bleibt (T^*) zu zeigen. Wir zeigen dazu:

Jedes Sternideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist Produkt endlich vieler unzerlegbarer Sternideale.

Daraus folgt dann sofort (T^*); denn ein $\mathfrak{a}$ mit „kürzester Zerlegung“ ist dann maximal in der betreffenden Menge.

Vorbemerkung Sei $\mathfrak{a}$ ein Sternideal aus K. Es gilt:
$\mathfrak{a} \subset R \Longleftrightarrow$ Es existiert ein unzerlegbares Sternideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.

Beweis: $\underline{\Leftarrow}$: Trivial, weil $\mathfrak{p} \subset R$ nach Definition.
$\underline{\Rightarrow}$(indirekt): Wäre $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ für alle unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}$ von R, so gäbe es für jedes $\mathfrak{p}$ ein Element $a_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{a}$ mit $a_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}$, d.h. $\nu_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}) = 0$. Sei $0 \neq y \in \mathfrak{a}^{-1}$ beliebig. Dann ist $y \cdot a_{\mathfrak{p}} \in R$, also $\nu_{\mathfrak{p}}(y) = \nu_{\mathfrak{p}}(y) + \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})}_{=0} = \nu_{\mathfrak{p}}(y \cdot a_{\mathfrak{p}}) \geq 0$ und folglich $y \in R$ nach Satz 1.5.12. (1). Nun war y ein beliebiges Element von $\mathfrak{a}^{-1}$. Also folgt $\mathfrak{a}^{-1} \subseteq R$ und daher $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* = \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1} \supseteq R$. Nach Voraussetzung ist aber $\mathfrak{a} \subset R$, also kann dieser Fall nicht auftreten. □

Sei nun $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Sternideal. Wegen $\mathfrak{a} \neq (0)$ gibt es ein Element $0 \neq x \in \mathfrak{a}$. Nach Voraussetzung existiert eine Zerlegung $Rx = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\nu_r]}$ ($\nu_i > 0$, $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschiedene unzerlegbare Sternideale). Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges unzerlegbares Sternideal mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$. Dann gilt insbesondere $\mathfrak{p} \supseteq Rx$, also $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$, d.h.

$\mathfrak{a}$ liegt in höchstens endlich vielen unzerlegbaren Sternidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.
Ist ferner $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i^{[n_i]}$, so ist auch $R{\cdot}x \subseteq \mathfrak{p}_i^{[n_i]}$, also $0 \leq n_i \leq \nu_i$, d.h. die Exponenten n_i sind durch ν_i beschränkt.
Sei $\mu_1 = \max\{n_1 \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1^{[n_1]}\}$. Dann ist nach Anmerkung 1.4.5.
$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{[\mu_1]} \circ \mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{a}_1 \subseteq R$ und $\mathfrak{p}_1 \not\supseteq \mathfrak{a}_1$, weil sonst $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1^{[\mu_1+1]}$ wäre.
Sei $\mu_2 = \max\{n_2 \mid \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2^{[n_2]}\}$. Dann ist nach Anmerkung 1.4.5.
$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_2^{[\mu_2]} \circ \mathfrak{a}_2$ mit $\mathfrak{a}_2 \subseteq R$ und $\mathfrak{p}_2 \not\supseteq \mathfrak{a}_2$, weil sonst $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2^{[\mu_2+1]}$ wäre.
usw. ...
Man erhält schließlich
$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{[\mu_1]} \circ \mathfrak{p}_2^{[\mu_2]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\mu_r]} \circ \mathfrak{b}$ mit $\mu_i \geq 0$, $\mathfrak{b} \subseteq R$ und $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$. Es ist aber auch $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$ für alle anderen unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p} \subset R$ weil sonst $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ wäre. Nach der Vorbemerkung folgt $\mathfrak{b} = R$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{[\mu_1]} \circ \mathfrak{p}_2^{[\mu_2]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\mu_r]}$. □

1.7.2. Satz. *Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und $R \neq K$.*
Es gilt:
R ist ein Dedekind-Ring $\Longleftrightarrow$ die R-Ideale $\neq (0)$ aus K bilden bezüglich der gewöhnlichen Idealmultiplikation eine Gruppe.

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$: Folgt aus Hauptsatz 1.6.5.
$\underline{\Leftarrow}$: *Vorbemerkung*: Sei $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein beliebiges R-Ideal. Wegen $R{\cdot}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist R die Eins der Gruppe. Sei nun $\tilde{\mathfrak{a}}$ das Gruppeninverse zu $\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a}{\cdot}\tilde{\mathfrak{a}} = R$, so ist $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}$ nach Definition von $\mathfrak{a}^{-1}$. Man hat also $R = \mathfrak{a}{\cdot}\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}{\cdot}\mathfrak{a}^{-1} \subseteq R$ und daher $\mathfrak{a}{\cdot}\mathfrak{a}^{-1} = R$. Weil die Ideale eine Gruppe bilden folgt $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{a}^{-1}$ ist das Inverse zu $\mathfrak{a}$ in der Gruppe. (Beachte, daß wegen $\mathfrak{a} \neq (0)$ auch $\mathfrak{a}^{-1}$ ein R-Ideal $\neq (0)$ ist.)
1. R ist (vollständig) ganz abgeschlossen: Nach der Vorbemerkung ist $\mathfrak{a}^{-1}$ das Gruppeninverse zu $\mathfrak{a}$, also ist auch $\mathfrak{a}$ das Gruppeninverse zu $\mathfrak{a}^{-1}$, d.h. es gilt $\mathfrak{a} = \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1} = \mathfrak{a}^*$. Also ist jedes Ideal $\neq (0)$ von K ein Sternideal und daher auch „$\circ$'=„$\cdot$“. Also bilden die Sternideale bzgl. „$\circ$“ eine Gruppe. Nach Hauptsatz 1.3.6. (2) ist dann R vollständig ganz abgeschlossen, also nach Satz 1.3.7. (2) erst recht ganz abgeschlossen.
2. R ist noethersch: Wir zeigen dazu, daß jedes Ideal in R endlich erzeugt ist. Da wir schon wissen, daß alle Ideale von R invertierbar sind, folgt dies sofort aus:

1.7.3. Lemma (Krull). *Sei R ein beliebiger Ring, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ R-Ideale aus* Quot(R) *mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = R$. Dann ist $\mathfrak{a}$ (und natürlich auch $\mathfrak{b}$) als R-Modul endlich erzeugt.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{a}{\cdot}\mathfrak{b} = R$ gibt es Elemente $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$ mit $1 = \sum_{i=1}^{s} a_i{\cdot}b_i$. Wir zeigen:
$\mathfrak{a} \overset{!}{=} R\langle a_1, \ldots, a_s\rangle$.
„$\supseteq$“ ist klar, da alle $a_i \in \mathfrak{a}$.
„$\subseteq$“: Sei $z \in \mathfrak{a}$ beliebig. Es ist $z = z{\cdot}1 = \sum_{i=1}^{s} (z{\cdot}b_i){\cdot}a_i$. Nun ist aber $z{\cdot}b_i \in \mathfrak{a}{\cdot}\mathfrak{b} = R$, also $z \in \sum_{i=1}^{s} R{\cdot}a_i$. □

1.7.4. Korollar. *Sei R ein lokaler Ring, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ R-Ideale aus* Quot(R) *mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = R$. Dann ist $\mathfrak{a}$ (und natürlich auch $\mathfrak{b}$) als R-Modul von einem Element erzeugt (Hauptideal).*

Beweis. Wie im Beweis des Lemmas gibt es $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$ mit $1 = \sum_{i=1}^{s} a_i \cdot b_i$. Für alle i ist $a_i \cdot b_i \in R$, weil $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = R$. Lägen alle $a_i \cdot b_i$ im maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von R, so wäre auch $1 \in \mathfrak{m}$. Also ist o.B.d.A. etwa $a_1 \cdot b_1 \notin \mathfrak{m}$ und daher eine *Einheit* von R. Indem man mit dem Inversen dieser Einheit multipliziert, kann man erreichen, daß $a_1 \cdot b_1 = 1$ ist. Wie beim Beweis des Lemmas folgt daraus $\mathfrak{a} = R\langle a_1 \rangle = R \cdot a_1$. □

3. Jedes Primideal $\neq (0)$ von R ist maximal: Aus dem in 1. und 2. gezeigten folgt insbesondere, daß R ein Krull-Ring ist und daß jedes Ideal $\neq (0)$ von R ein Sternideal ist.
Sei nun $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal $\neq (0)$ von R. Wegen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$ ist $\mathfrak{p}$ nach Hauptsatz 1.5.16. ein unzerlegbares Sternideal, also nach Satz 1.4.2. maximal bzgl. „$\subseteq$“ in der Menge aller ganzen Sternideale $\neq (0)$. Da aber jedes Ideal $\neq (0)$ von R ein Sternideal ist, ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von R. □

1.8. **Lokalisierungen von Krull-Ringen.**

1.8.1. Satz. *Sei R ein Krull-Ring mit Quotientenkörper K, $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal von R. Es gilt:*

(1) $R_{\mathfrak{p}} = \{x \mid x \in K, \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0\}$. *„Bewertungsring“ von $\nu_{\mathfrak{p}}$ (s. Definition 2.3.11. und Satz 2.3.12.)*
(2) $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}} = \{x \mid x \in K, \nu_{\mathfrak{p}}(x) > 0\} = \pi \cdot R_{\mathfrak{p}}$ *ein Hauptideal.*
Für π kann man ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^{[2]}$ nehmen.

Zum Beweis brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

1.8.2. Hilfssatz. *Sei R vollständig ganz abgeschlossen, $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal von R. Dann gibt es ein $z \in K$ und ein ganzes Sternideal $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x} \not\subseteq \mathfrak{p}$ und $R \cdot z = \mathfrak{p}^{-1} \circ \mathfrak{x}$.*

Beweis. Da die Sternideale eine Gruppe bilden, ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^{[2]}$; denn sonst folgte $\mathfrak{p} = R$. Also gibt es ein $t \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^{[2]}$. Nach Anmerkung 1.4.5. ist dann $R \cdot t = \mathfrak{p} \circ \mathfrak{b}$ mit einem ganzen Sternideal $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Also $R \cdot t^{-1} = \mathfrak{p}^{-1} \circ \mathfrak{b}^{-1}$. Wegen $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$ gibt es ein $s \in \mathfrak{b}$, $s \notin \mathfrak{p}$. Wiederum nach Anmerkung 1.4.5. ist $R \cdot s = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{x}$ mit einem ganzen Sternideal $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \not\subseteq \mathfrak{p}$.
Setze $z := t^{-1} \cdot s$. Dann ist $R \cdot z = \mathfrak{p}^{-1} \circ \mathfrak{b}^{-1} \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{x} = \mathfrak{p}^{-1} \circ \mathfrak{x}$. □

Beweis. (von Satz 1.8.1)
(1): Sei $x \in R_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $x = \frac{x_1}{x_2}$ mit $x_1 \in R$, $x_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$. Also ist $\nu_{\mathfrak{p}}(x_1) \geq 0$ und $\nu_{\mathfrak{p}}(x_2) = 0$. Es folgt $\nu_{\mathfrak{p}}(x) = \nu_{\mathfrak{p}}(x_1) - \nu_{\mathfrak{p}}(x_2) \geq 0$.
Umgekehrt: Sei $x \in K$ und $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0 \overset{!}{\Rightarrow} x \in R_{\mathfrak{p}}$.
Beweis: O.B.d.A. sei $x \neq 0$. Es ist $x = \frac{x_1}{x_2}$ mit $x_i \in R$. Dann ist $0 \leq \nu_{\mathfrak{p}}(x) = \nu_{\mathfrak{p}}(x_1) - \nu_{\mathfrak{p}}(x_2)$, also $\nu_{\mathfrak{p}}(x_1) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(x_2) =: \mu \geq 0$. Wähle ein z wie in Hilfssatz 1.8.2. Nach Anmerkung 1.5.14. (2) ist $\nu_{\mathfrak{p}}(z) = -1$ und $\nu_{\mathfrak{q}}(z) \geq 0$ für alle unzerlegbaren $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Man hat also: $x = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 \cdot z^\mu}{x_2 \cdot z^\mu}$ und

$$\nu_{\mathfrak{p}}(x_2 \cdot z^\mu) = \mu + \mu \cdot \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}}(z)}_{=-1} = 0$$

$$\nu_{\mathfrak{q}}(x_2 \cdot z^\mu) = \underbrace{\nu_{\mathfrak{q}}(x_2)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{weil } x_2 \in R}} + \mu \cdot \underbrace{\nu_{\mathfrak{q}}(z)}_{\geq 0} \geq 0$$

Es folgt $x_2 \cdot z^\mu \in R$, aber $x_2 \cdot z^\mu \notin \mathfrak{p}$, also

$x_2 \cdot z^\mu \in R \setminus \mathfrak{p}$.
Ferner

$$\begin{aligned} \nu_\mathfrak{p}(x_1 \cdot z^\mu) &= \nu_\mathfrak{p}(x_1) + \mu \cdot \underbrace{\nu_\mathfrak{p}(z)}_{=-1} && \geq 0 \text{ weil } \nu_\mathfrak{p}(x_1) \geq \nu_\mathfrak{p}(x_2) = \mu \text{ ist.} \\ \nu_\mathfrak{q}(x_1 \cdot z^\mu) &= \underbrace{\nu_\mathfrak{q}(x_1)}_{\geq 0} + \mu \cdot \underbrace{\nu_\mathfrak{q}(z)}_{\geq 0} && \geq 0 \text{ für alle } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Also ist
$x_1 \cdot z^\mu \in R$ und damit $x \in R_\mathfrak{p}$. □
(2): $x \in \mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p} \Rightarrow x = \frac{p}{s}$ mit $p \in \mathfrak{p}$ und $s \in R \setminus \mathfrak{p}$. Also ist $\nu_\mathfrak{p}(s) = 0$ und daher $\nu_\mathfrak{p}(x) = \nu_\mathfrak{p}(p) \geq 1$.
Umgekehrt: Sei $\nu_\mathfrak{p}(x) > 0$. Nach (1) ist $x \in R_\mathfrak{p}$, also $x = \frac{x_1}{s}$ mit $x_1 \in R$ und $s \in R \setminus \mathfrak{p}$, also $\nu_\mathfrak{p}(s) = 0$. Es folgt $\nu_\mathfrak{p}(x_1) = \nu_\mathfrak{p}(x) > 0$ und daher $x_1 \in \mathfrak{p}$. Insgesamt also $x \in \mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}$.
Sei nun $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^{[2]}$ beliebig. (Ein solches Element existiert, da $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^{[2]}$ ist, weil sonst $\mathfrak{p} = R$ wäre.) Dann ist $\nu_\mathfrak{p}(\pi) = 1$.
Behauptung: $\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p} = \pi \cdot R_\mathfrak{p}$.
Beweis: „$\supseteq$“ ist trivial.
„$\subseteq$“: Sei $x \in \mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}$. Dann ist $x = \frac{p}{s}$ mit $p \in \mathfrak{p}$ und $s \in R \setminus \mathfrak{p}$. Es ist dann $\nu_\mathfrak{p}(p) > 0$, also $\nu_\mathfrak{p}\left(\frac{p}{\pi}\right) = \nu_\mathfrak{p}(p) - \nu_\mathfrak{p}(\pi) \geq 0$ und daher nach (1) $\frac{p}{\pi} \in R_\mathfrak{p}$. Außerdem ist $\frac{1}{s} \in R_\mathfrak{p}$. Man hat also:
$x = \pi \cdot \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{s} \in \pi \cdot R_\mathfrak{p}$.
(Daß das maximale Ideal von $R_\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist, folgt übrigens bereits aus Korollar 1.7.4.) □

Als unmittelbare Folge ergibt sich:

1.8.3. Korollar. *$x \in K$ ist Einheit in $R_\mathfrak{p} \iff \nu_\mathfrak{p}(x) = 0$.*
Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq K$ gilt $\nu_\mathfrak{p}(A) = \nu_\mathfrak{p}(R_\mathfrak{p} \cdot A)$.

1.8.4. Korollar. *Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges $R_\mathfrak{p}$-Ideal aus K und $\pi \in R_\mathfrak{p}$ beliebig mit $\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p} = \pi \cdot R_\mathfrak{p}$. Dann gilt:*

(1) *$\mathfrak{A} = \pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})} \cdot R_\mathfrak{p}$ ist ein Hauptideal.*
(2) *$R_\mathfrak{p}$ ist ein Hauptidealring, und $R_\mathfrak{p} \supset (\pi) \supset (\pi^2) \supset (\pi^3) \supset \cdots \supset (0)$ sind die Ideale von $R_\mathfrak{p}$.*
(3) *Jedes Element $0 \neq x \in K$ schreibt sich eindeutig in der Form $x = \varepsilon \cdot \pi^{\nu_\mathfrak{p}(x)}$ mit einer Einheit ε von $R_\mathfrak{p}$.*

Beweis. (1): „$\supseteq$“: Nach Definition von $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})$ existiert ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $\nu_\mathfrak{p}(a) = \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})$. Dann ist $\nu_\mathfrak{p}\left(\frac{\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})}}{a}\right) = 0$, also $\frac{\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})}}{a} \in R_\mathfrak{p}$ und somit $\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})} \in a \cdot R_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{A}$.
„$\subseteq$“: Sei $x \in \mathfrak{A}$ beliebig. Dann ist $\nu_\mathfrak{p}(x) \geq \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})$, also $\nu_\mathfrak{p}\left(\frac{x}{\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})}}\right) \geq 0$, daher $\frac{x}{\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})}} \in R_\mathfrak{p}$ und somit $x \in \pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{A})} \cdot R_\mathfrak{p}$.
(2) und (3) folgen sofort aus (1). □

1.8.5. Korollar. *Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal von R. Dann ist $\mathfrak{a} \cdot R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}^{[\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})]}$*

Beweis. Vorbemerkung: Nach Anmerkung 1.5.14. (2) ist $\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{p}^{[n]}\right) = n$ also auch $\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{p}^{[n]} \cdot R_\mathfrak{p}\right) = n$ nach Korollar 1.8.3. Nach Korollar 1.8.4. (1) folgt $\mathfrak{p}^{[n]} \cdot R_\mathfrak{p} = \pi^n \cdot R_\mathfrak{p}$.
Sei nun $n := \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ Es ist nach Korollar 1.8.3. $n = \nu_\mathfrak{p}(R_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a})$ und nach Korollar 1.8.4. (1) $R_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a} = \pi^n \cdot R_\mathfrak{p}$.

Also $\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} = \pi^n \cdot R_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}^{[n]} \supseteq \mathfrak{p}^{[n]}$. Es folgt: $\mathfrak{p}^{[n]} \subseteq \mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} \cap R$.
Umgekehrt: Sei $x \in \mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} \cap R$. Aus $x \in \mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p}$ folgt $\nu_\mathfrak{p}(x) \geq \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p}) = \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$, also $\nu_\mathfrak{p}(x) \geq n$. Nach Definition von $\nu_\mathfrak{p}$ folgt $x \in \mathfrak{p}^{[n]}$, also $\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} \cap R \subseteq \mathfrak{p}^{[n]}$. □

1.8.6. Korollar. *Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Sternideal von R und*
$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{[\nu]} \circ \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\nu_r]}$ *die Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in ein Potenzprodukt paarweise verschiedener unzerlegbarer Sternideale. Dann ist*
$\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} = \pi^\nu \cdot R_\mathfrak{p}$ *und*
$\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}^{[\nu]}$.

Beweis. Nach Anmerkung 1.5.14. (2) ist $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = \nu$, also nach Korollar 1.8.3. auch $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p}) = \nu$ und nach Korollar 1.8.4. (1) dann $\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} = \pi^\nu \cdot R_\mathfrak{p}$. Ferner ist dann nach Korollar 1.8.5 $\mathfrak{a}\cdot R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}^{[\nu]}$. □

1.9. **Zusammenhang zwischen multiplikativer und additiver Idealtheorie.**

1.9.1. Satz. *Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{q}$ ein ganzes R-Ideal, $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal von R. Es gilt:*
$\mathfrak{q}$ *ist $\mathfrak{p}$-primär* $\iff \mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{[\nu]}$.
Dabei ist $\nu = \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})$.

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Nach Korollar 1.8.6. ist $\mathfrak{p}^{[\nu]} = \mathfrak{p}^{[\nu]}\cdot R_\mathfrak{p} \cap R$ und es ist $\mathfrak{p}^{[\nu]}\cdot R_\mathfrak{p}$ primär zu $\mathfrak{p}\cdot R_\mathfrak{p}$, da nach Korollar 1.8.4. (2) $\mathfrak{p}^{[\nu]}\cdot R_\mathfrak{p}$ (wie jedes Ideal $\neq 0$ von $R_\mathfrak{p}$) eine Potenz des *maximalen* Ideals $\mathfrak{p}\cdot R_\mathfrak{p}$ ist. Dann ist auch das zurückgeschnittene Ideal $\mathfrak{p}^{[\nu]}$ primär zu $\mathfrak{p}$. □
$\underline{\Rightarrow}$: Wenn $\mathfrak{q}$ primär zu $\mathfrak{p}$ ist, dann gilt nach einem allgemeinen Satz $\mathfrak{q}\cdot R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{q}$, und es ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{[\nu]}$ mit $\nu = \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})$ nach Korollar 1.8.5. □

1.9.2. Satz. *Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal von R,* $(0) \neq \mathfrak{a}$ *ein* beliebiges R-Ideal *aus K. Es gilt:*

$$\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right) = -\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) < \infty$$

Beweis. Nach Korollar 1.8.3. hat man
$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = \nu_\mathfrak{p}(R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a})$ und ebenso
$\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right) = \nu_\mathfrak{p}\left(R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right)$
Ist π ein Primelement von $\mathfrak{p}\cdot R_\mathfrak{p}$, so hat man dann nach Korollar 1.8.4. (1)
$R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a} = R_\mathfrak{p}\cdot\pi^{\nu_\mathfrak{p}(R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a})} = R_\mathfrak{p}\cdot\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}$ und ebenso auch
$R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}^{-1} = R_\mathfrak{p}\cdot\pi^{\nu_\mathfrak{p}\left(R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right)} = R_\mathfrak{p}\cdot\pi^{\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right)}$.
Ferner ist nach Anmerkung 1.2.6. $\mathfrak{a}^*$ ein Sternideal. Da R ein Krull-Ring ist, gilt also $\mathfrak{a}^* \circ (\mathfrak{a}^*)^{-1} = R$. Daher hat man nach Eigenschaft 1.2.2. (9)
$\left(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right)^* = \left(\mathfrak{a}^*\cdot(\mathfrak{a}^*)^{-1}\right)^* = \mathfrak{a}^* \circ (\mathfrak{a}^*)^{-1} = R$.
Es folgt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1} \cap \complement\mathfrak{p} \neq \emptyset$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{p}$ und daher $\left(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right)^* \subseteq \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \neq R$. Daher ist $R_\mathfrak{p}\cdot\left(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right) = R_\mathfrak{p}$ und somit
$\underbrace{\left(R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}\right)}_{=R_\mathfrak{p}\cdot\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}} \cdot \underbrace{\left(R_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right)}_{=R_\mathfrak{p}\cdot\pi^{\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right)}} = R_\mathfrak{p}\cdot\left(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\right) = R_\mathfrak{p}$.
Man hat also
$R_\mathfrak{p}\cdot\pi^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})+\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right)} = R_\mathfrak{p}$ und daher
$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) + \nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right) = 0$, d.h. $\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right) = -\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$. □

1.9.3. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring, $(0) \neq \mathfrak{a}$ ein R-Ideal aus K, $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal von R. Es gilt:*

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}^*) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$$

Beweis. Folgt sofort aus Satz 1.9.2, da $\mathfrak{a}^* = \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1}$ ist. □

1.9.4. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring, $(0) \neq \mathfrak{a}$ ein R-Ideal aus K. Es gilt:*

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{p}_1^{[\nu_{\mathfrak{p}_1}(\mathfrak{a})]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\nu_{\mathfrak{p}_r}(\mathfrak{a})]}$$

mit gewissen paarweise verschiedenen unzerlegbaren Sternidealen $\mathfrak{p}_i$ von R. Es ist $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$ für alle unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.

Beweis. $\mathfrak{a}^*$ ist ein Sternideal nach Anmerkung 1.2.6., also existiert eine Sternpotenzdarstellung mit paarweise verschiedenen unzerlegbaren Sternidealen $\mathfrak{p}_i$
$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\nu_r]}$ nach Hauptsatz 1.5.5. (1). Nach Anmerkung 1.5.14 (2) ist dann $\nu_i = \nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a}^*) = \nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})$, wobei die letzte Gleichheit wegen Korollar 1.9.3. gilt. Für $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ folgt mit derselben Argumentation $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$. □

1.9.5. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{P}$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{P}^* = R$, $\mathfrak{Q}$ ein $\mathfrak{P}$-primäres Ideal von R und $0 \neq \mathfrak{a}$ ein ganzes R-Ideal. Es gilt:*

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Q})^* = \mathfrak{a}^*$$

Beweis. Nach Korollar 1.9.4 genügt es zu zeigen: $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Q}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$ für alle unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}$ von R. Es ist $\complement_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{P} \neq \emptyset$ für *alle* $\mathfrak{p}$; denn sonst wäre $\mathfrak{P} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}$ für ein unzerlegbares Sternideal $\tilde{\mathfrak{p}}$, also $R = \mathfrak{P}^* \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}^* = \tilde{\mathfrak{p}}$.
Es folgt $R_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{Q} = R_{\mathfrak{p}}$, also $R_{\mathfrak{p}} \cdot (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Q}) = R_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{a} \cap R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{a}$ für alle unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}$ von R. Nach Korollar 1.8.3 gilt dann $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Q}) = \nu_{\mathfrak{p}}(R_{\mathfrak{p}} \cdot (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Q})) = \nu_{\mathfrak{p}}(R_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{a}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$. □

1.9.6. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring, $(0) \neq \mathfrak{a}$ ein ganzes R-Ideal,*
$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_s$, wobei
$\mathfrak{q}_i$ primär zu einem unzerlegbaren Sternideal $\mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, r$ und
$\mathfrak{Q}_k$ primär zu einem Primideal $\mathfrak{P}_k$ mit $\mathfrak{P}_k^* = R$ für $k = 1, \ldots, s$.
Dann gilt:

$$\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r)^* = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r .$$

Zusatz: Geht man von einer Normaldarstellung von $\mathfrak{a}$ aus, so erhält man eine Normaldarstellung von $\mathfrak{a}^*$.

Beweis. Nach Korollar 1.9.5. s-mal angewandt ist $\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r)^*$.
Nach Satz 1.9.1. ist ferner $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{[\nu_i]}$, also ein Sternideal. Nach Anmerkung 1.2.12. ist dann $(\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r)^* = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$.
Wäre die Darstellung von $\mathfrak{a}^*$ verkürzbar, so wäre auch die Darstellung von $\mathfrak{a}$ verkürzbar, also keine Normaldarstellung gewesen. □

1.9.7. Hilfssatz. *Sei R ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Sternideale und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^* = R$ („teilerfremde“ oder „comaximale“ Sternideale).*
Dann gilt

$$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \quad (= (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^*) .$$

Beweis. $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a}\circ\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^* \subseteq (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^* = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ wegen Anmerkung 1.2.12.
Umgekehrt: $x \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \Rightarrow x\cdot R = x\cdot(\mathfrak{a},\mathfrak{b})^* = (\underbrace{x\cdot\mathfrak{a}}_{\subseteq\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}} + \underbrace{x\cdot\mathfrak{b}}_{\subseteq\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}})^* \subseteq (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^* = \mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}$. □

1.9.8. Satz. *Sei R ein Krull-Ring, $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ paarweise verschiedene unzerlegbare Sternideale von R, $\nu_1,\dots,\nu_r$ natürliche Zahlen. Dann gilt:*

$$\mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\circ\cdots\circ\mathfrak{p}_r^{[\nu_r]} = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_r^{[\nu_r]}.$$

Beweis. Für alle $t = 2,3,\dots,r$ ist $\left(\mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\circ\cdots\circ\mathfrak{p}_{t-1}^{[\nu_{t-1}]}, \mathfrak{p}_t^{[\nu_t]}\right)^* = R$; denn sonst wäre das ein echtes Sternideal, also gäbe es ein unzerlegbares Sternideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}_t$ und $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\circ\cdots\circ\mathfrak{p}_{t-1}^{[\nu_{t-1}]}$, also o.B.d.A. $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}_1$ nach Anmerkung 1.4.4.
Da $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_t$ maximale Sternideale sind, folgte $\mathfrak{p}_t = \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ im Widerspruch zu der Annahme, daß alle $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ paarweise verschieden sind. Nach dem Hilfssatz 1.9.7 hat man also $\mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\circ\cdots\circ\mathfrak{p}_{t-1}^{[\nu_{t-1}]}\circ\mathfrak{p}_t^{[\nu_t]} = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\circ\cdots\circ\mathfrak{p}_{t-1}^{[\nu_{t-1}]}\cap\mathfrak{p}_t^{[\nu_t]}$ für alle $t = 2,\dots,r$.
Rekursiv folgt daraus $\mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\circ\cdots\circ\mathfrak{p}_r^{[\nu_r]} = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_r^{[\nu_r]}$ □

1.9.9. Zusammenfassung. *Sei R ein Krull-Ring, $(0)\neq\mathfrak{a}$ ein ganzes R-Ideal.*
Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r\cap\mathfrak{Q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{Q}_s$ eine Normaldarstellung, wobei
$\mathfrak{q}_i$ primär zu einem unzerlegbaren Sternideal $\mathfrak{p}_i$ für $i = 1,\dots,r$ und
$\mathfrak{Q}_k$ primär zu einem Primideal $\mathfrak{P}_k$ mit $\mathfrak{P}_k^* = R$ für $k = 1,\dots,s$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^* &= \mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r \quad &&\textit{Normaldarstellung}\\ &= \mathfrak{q}_1\circ\cdots\circ\mathfrak{q}_r \quad &&\textit{mit } \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{[\nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})]} \textit{ für } i = 1,\dots,r\end{aligned}$$

Umgekehrt besitzt jedes Sternideal in einem Krull-Ring eine solche Normaldarstellung

Beweis. Nach Korollar 1.9.6 ist zunächst $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r$, und das ist nach dem Zusatz eine Normaldarstellung. Nach Satz 1.9.1 ist $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{[\nu_i]}$, also nach Satz 1.9.8 $\mathfrak{q}_1\circ\cdots\circ\mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r$. Nach Korollar 1.9.4 ist ferner $\nu_i = \nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})$.
Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Sternideal, so besitzt $\mathfrak{a}$ nach Hauptsatz 1.5.5. eine Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]}\circ\cdots\circ\mathfrak{p}_r^{[\nu_r]}$ und die $\mathfrak{p}_i^{[\nu_i]}$ sind $\mathfrak{p}_i$-primär nach Satz 1.9.1. Nach Satz 1.9.8. ist schließlich das Sternprodukt gleich dem Schnitt. □

2. Grundlagen der Bewertungstheorie

2.1. **Grundbegriffe.** Die in Satz 1.5.8., Anmerkung 1.5.9. (1) und Anmerkung 1.5.11. festgestellten Eigenschaften der Funktion $\nu_{\mathfrak{p}}$ weisen Analogien zum absoluten Betrag in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auf, die deutlicher werden, wenn man als neue Funktion

$$\varphi(x) := e^{-\nu_{\mathfrak{p}}(x)} \quad \text{mit} \quad e^{-\infty} := 0$$

einführt. Die oben genannten Eigenschaften übersetzen sich dann zu:

2.1.1. *Anmerkung.*

(1) $\varphi(x) > 0$ für $x \neq 0$ und $\varphi(0) = 0$
(2) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
(3) $\varphi(x + y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$

Der absolute Betrag $|\ |$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ erfüllt Gleichungen (1) und (2). Anstelle von Gleichung (3) gilt dagegen die schwächere Dreiecksungleichung:

$$\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)\,.$$

Wir definieren daher:

2.1.2. Definition. Sei K ein Körper. Eine „Betragsbewertung“ von K ist eine Abbildung $\varphi : K \to \mathbb{R}$ mit

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ \varphi(x) \geq 0 \text{ und } \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 & \\ (2)\ \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) & \text{„Produktregel“} \\ (3)\ \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) & \text{„Dreiecksungleichung“} \end{array}\right\} \text{ für alle } x, y \in K$$

2.1.3. *Anmerkung.* Aus Definition 2.1.2 (1) und (2) folgt:
$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(-x) = \varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$ für $y \neq 0$

Beweis. $1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \varphi(1) \cdot \varphi(1) = \varphi(1)$, also $\varphi(1) = 1$ wegen $\varphi(1) \neq 0$.
Ebenso $(-1) \cdot (-1) = 1 \Rightarrow \varphi(-1)^2 = \varphi(1) = 1 \Rightarrow \varphi(-1) = 1$ weil $\varphi \geq 0$.
Also $\varphi(-x) = \varphi((-1) \cdot x) = \varphi(-1) \cdot \varphi(x) = 1 \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$
Ferner $y \cdot \frac{x}{y} = x \Rightarrow \varphi(y) \cdot \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi(x)$. Da $\varphi(y) \neq 0$ folgt $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$. □

2.1.4. *Anmerkung.* Für alle $x, y \in K$ gilt:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x \pm y)$$

Beweis. $\varphi(x) = \varphi\left((x - y) + y\right) \leq \varphi(x - y) + \varphi(y)$ nach der Dreiecksungleichung. Es folgt
$\varphi(x) - \varphi(y) \leq \varphi(x - y)$.
Indem man x und y vertauscht und Anmerkung 2.1.3. beachtet, folgt
$-\left(\varphi(x) - \varphi(y)\right) = \varphi(y) - \varphi(x) \leq \varphi(y - x) = \varphi(x - y)$.
Insgesamt also:
$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x - y)$.
Ersetzt man in dieser Formel y durch $-y$ so ergibt sich
$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x + y)$. □

2.1.5. Definition. φ heißt „nichtarchimedisch“ wenn gilt:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(n \cdot 1) \leq 1$.
Andernfalls heißt φ „archimedisch“.

2.1.6. Satz. *φ nichtarchimedisch $\iff$ Für alle $x, y \in K$ ist*
(3^*) $\varphi(x+y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Es ist $\varphi(n{\cdot}1) = \varphi(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{n-mal}}) \leq \max\{\varphi(1), \varphi(1), \ldots, \varphi(1)\} = 1$. □

$\underline{\Rightarrow}$: Sei $M := \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi(x+y))^\nu \quad &= \varphi\left((x+y)^\nu\right) \quad = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\nu} \tbinom{\nu}{k} \cdot x^k \cdot y^{k-\nu}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\nu} \underbrace{\varphi\left(\left(\tbinom{\nu}{k}\right)\right)}_{\leq 1 \text{ nach Voraussetzung}} \cdot \varphi(x)^k \cdot \varphi(y)^{k-\nu} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\nu} \varphi(x)^k \cdot \varphi(y)^{k-\nu} \\ &\leq (\nu+1) \cdot M^\nu\end{aligned}$$

Es folgt

$$\left(\tfrac{\varphi(x+y)}{M}\right)^\nu \leq \nu + 1$$

Nach dem folgenden Hilfssatz 2.1.8 ist dann $\frac{\varphi(x+y)}{M} \leq 1$. □

2.1.7. *Anmerkung.* Aus Satz 2.1.6. (3^*) folgt (trivialerweise) die Dreiecksungleichung Definition 2.1.2. (3). Also ist eine nichtarchimedische Bewertung durch (1), (2) und (3^*) charakterisiert.

2.1.8. Hilfssatz. *Sei A eine positive reelle Zahl. Falls für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt $A^\nu \leq \nu+1$, so ist $A \leq 1$. (Exponentialfunktion wächst schneller als Potenzfunktion.)*

Beweis. (indirekt): Andernfalls wäre $A = 1 + b$ mit $b > 0$. Für alle $\nu \geq 2$ wäre $A^\nu = (1+b)^\nu = 1 + \nu{\cdot}b + \frac{1}{2}{\cdot}\nu{\cdot}(\nu-1){\cdot}b^2 + \cdots > \nu{\cdot}b + \frac{1}{2}{\cdot}\nu{\cdot}(\nu-1){\cdot}b^2$.
Für große ν ist aber $\nu \cdot b > 1$ und $\frac{1}{2} \cdot (\nu-1) \cdot b^2 > 1$ also $A^\nu > 1 + \nu$ gegen Voraussetzung. □

2.1.9. *Anmerkung.* Ist k ein Unterkörper von K und $\varphi|k$ (nicht)archimedisch, so ist auch φ (nicht)archimedisch.

Beweis. Nach Definition 2.1.5 hängt „(nicht)archimedisch“ nur von den $\varphi(n{\cdot}1)$ ab, und die $n{\cdot}1$ liegen schon im Primkörper von K, also auch in k. □

2.1.10. Definition. Sei $\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$
Dann heißt φ die „triviale Bewertung“ von K.

2.1.11. *Anmerkung.* Die triviale Bewertung von K ist (trivialerweise) eine nichtarchimedische Bewertung von K.

2.1.12. Satz.

(1) *Für einen endlichen Körper K ist die triviale Bewertung die einzige Bewertung.*
(2) *Jede Bewertung eines Körpers der Charakteristik $p > 0$ ist nichtarchimedisch.*

Beweis. (1): K habe q Elemente. Dann gilt für jedes $0 \neq x \in K$ die Gleichung $x^{q-1} = 1$. Für jede Bewertung $\varphi(K)$ ist daher $\varphi(x)^{q-1} = \varphi(1) = 1$. Da nach Definition $\varphi(x) > 0$ ist, folgt $\varphi(x) = 1$ d.h. φ ist trivial. □
(2): Wenn $\mathrm{char}(K) = p > 0$ ist, ist der Primkörper P von K ein endlicher Körper.

Für jede Bewertung φ von K ist also nach (1) $\varphi|P$ trivial, also nichtarchimedisch. Nach Anmerkung 2.1.9 ist dann auch φ nichtarchimedisch. □

2.1.13. *Anmerkung.* Eine Bewertung φ von K ist genau dann archimedisch, wenn es zu vorgegebenem $0 \neq x \in K$ und vorgegebenem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varphi(n \cdot x) > m$.
(Daher der Name „archimedisch“ wegen des archimedischen Axioms in der Geometrie.)

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$: Nach Voraussetzung existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(\ell \cdot 1) > 1$. Dann ist also $\varphi(\ell^\nu \cdot x) = \varphi(\ell \cdot 1)^\nu \cdot \varphi(x) \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Wähle also $n := \ell^\nu$ mit genügend großem ν. □
$\underline{\Leftarrow}$: Setzt man $m := 1$ und nimmt man für x die Eins von K, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n \cdot 1) > 1$. Nach Definition 2.1.5. folgt, daß φ archimedisch ist. □

2.1.14. Satz. *Sei φ nichtarchimedisch und $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Dann ist*

$$\varphi(x+y) = \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \quad \text{„Maximumregel“}$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\varphi(x) > \varphi(y)$. Es ist dann
$\varphi(x+y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \varphi(x)$.
Wäre $\varphi(x+y) < \varphi(x)$, so wäre
$\varphi(x) = \varphi(x+y-y) \leq \max\{\varphi(x+y), \varphi(-y)\} = \max\{\underbrace{\varphi(x+y)}_{<\varphi(x)}, \underbrace{\varphi(y)}_{<\varphi(x)}\} < \varphi(x)$

Widerspruch! □

2.2. Äquivalente Bewertungen.

2.2.1. Satz. *Seien φ_1 und φ_2 Funktionen $K \to \mathbb{R}$, die die Bedingungen (1) und (2) aus Definition 2.1.2 erfüllen (Dreiecksungleichung wird nicht gebraucht) und sei φ_1 nicht trivial. Es sind äquivalent:*

(1) *Für alle $x \in K$ gilt:* $\varphi_1(x) < 1 \Rightarrow \varphi_2(x) < 1$.
(2) *Für alle $x, y \in K$ gilt:* $\varphi_1(x) \gtreqless \varphi_1(y) \Leftrightarrow \varphi_2(x) \gtreqless \varphi_2(y)$.
(3) *Es existiert eine reelle Zahl $\gamma > 0$ mit $\varphi_2 = \varphi_1^\gamma$.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei $\varphi_1(x) > 1 \Rightarrow \varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) < 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \varphi_2\left(\frac{1}{x}\right) < 1 \Rightarrow \varphi_2(x) > 1$.
Sei nun $\varphi_1(x) = 1$. Da φ_1 nicht trivial ist, gibt es ein $z \neq 0$ mit $\varphi_1(z) < 1$. Es folgt
$\varphi_1(x^n \cdot z) = \underbrace{\varphi_1(x)^n}_{=1} \cdot \varphi_1(z) = \varphi_1(z) < 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \varphi_2(x^n \cdot z) < 1 \Rightarrow \varphi_2(x) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\varphi_2(z)}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow}$
$1 \Rightarrow \varphi_2(x) \leq 1$.
Ebenso folgt $\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Insgesamt ist also $\varphi_2(x) = 1$.
Sei nun $\varphi_1(x) \gtreqless \varphi_1(y)$. Dann ist $\varphi_1\left(\frac{x}{y}\right) \gtreqless 1$. Nach dem oben gezeigten folgt daraus, $\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) \gtreqless 1$ und daher $\varphi_2(x) \gtreqless \varphi_2(y)$.
Umgekehrt folgt dann aus $\varphi_2(x) \gtreqless \varphi_2(y)$ auch $\varphi_1(x) \gtreqless \varphi_1(y)$; denn ist etwa $\varphi_2(x) > \varphi_2(y)$, so kann nicht $\varphi_1(x) \leq \varphi_1(y)$ sein, da ja dann nach dem oben gezeigten auch $\varphi_2(x) \leq \varphi_2(y)$ folgte. Analog für die beiden anderen Fälle. □
(2)⇒(3): φ_1 ist nicht trivial. Also gibt es ein $z \in K$ mit $\varphi_1(z) > 1$.
Sei nun $0 \neq x \in K$ beliebig und sei $\delta_x := \frac{\log \varphi_1(x)}{\log \varphi_1(z)}$. Dann ist $\varphi_1(z)^{\delta_x} = \varphi_1(x)$.
Seien nun $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{m}{n} \geq \delta_x$. Es folgt

$\varphi_1(x) = \varphi_1(z)^{\delta_x} \leq \varphi_1(z)^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \varphi_1(x^n) \leq \varphi_1(z^m) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \varphi_2(x^n) \leq \varphi_2(z^m) \Rightarrow \varphi_2(z)^{\frac{m}{n}} \geq \varphi_2(x)$
Analog gilt für *alle* $\frac{m}{n} \leq \delta_x \quad \varphi_2(z)^{\frac{m}{n}} \leq \varphi_2(x)$. Es folgt $\varphi_2(z)^{\delta_x} = \varphi_2(x)$. Also

$$\left.\begin{array}{rl} \delta_x & = \frac{\log \varphi_2(x)}{\log \varphi_2(z)} \\ \text{Andererseits ist nach Definition} & \\ \delta_x & = \frac{\log \varphi_1(x)}{\log \varphi_1(z)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\log \varphi_2(z)}{\log \varphi_1(z)} = \frac{\log \varphi_2(x)}{\log \varphi_1(x)} =: \gamma\,,$$

dasselbe γ für alle $x \in K,\ x \neq 0$.
Also ist $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)^\gamma$ für alle $x \in K$.
Außerdem ist $\gamma > 0$; denn wäre $\gamma \leq 0$ so wäre $\varphi_1(z) > 1$ aber $\varphi_2(z) = \varphi_1(z)^\gamma \leq 1$ im Widerspruch zu (2). □
(3)⇒(1): Sei $\varphi_2 = \varphi_1^\gamma$ mit einem $\gamma > 0$ und $\varphi_1(x) < 1$.
Dann ist $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)^\gamma < 1^\gamma = 1$. □

2.2.2. *Anmerkung.*

(1) Ist φ eine Bewertung und $0 < \gamma \leq 1$, so ist auch φ^γ eine Bewertung. Dagegen braucht dies für $\gamma > 1$ nicht der Fall zu sein; denn φ^γ erfüllt dann i.a. nicht mehr die Dreiecksungleichung.
(2) Ist φ eine nichtarchimedische Bewertung, so ist auch φ^γ eine nichtarchimedische Bewertung für *alle* reellen $\gamma > 0$.

Beweis. (1): Für reelle Zahlen $a > 0$, $b > 0$, $0 < \gamma \leq 1$ gilt allgemein
$(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma$ (Hardy-Littlewood-Polya, Inequalities, Cambridge 1934, Chap.II).
Also folgt aus der Dreiecksungleichung für φ die Dreiecksungleichung für φ^γ, wenn $0 < \gamma \leq 1$ ist.
Dagegen gilt z.B. für $\varphi = |\ |$ und $\gamma = 2$ für positive reelle a, b die Ungleichung $|a+b|^2 = |a|^2 + 2\cdot|a|\cdot|b| + |b|^2 > |a|^2 + |b|^2$, also keine Dreiecksungleichung.
(2): Ist φ nichtarchimedisch und $\gamma > 0$ beliebig, so folgt aus
$\varphi(x+y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ trivialerweise
$(\varphi(x+y))^\gamma \leq \max\{\varphi(x)^\gamma, \varphi(y)^\gamma\}$
Nach Anmerkung 2.1.7. ist also φ^γ eine nichtarchimedische Bewertung. □

2.2.3. Definition. Zwei Bewertungen φ_1 und φ_2 von K heißen „äquivalent“, in Zeichen „$\varphi_1 \sim \varphi_2$“, wenn es ein $\gamma > 0$ gibt mit $\varphi_2 = \varphi_1^\gamma$.

Offensichtlich gilt dann:

2.2.4. *Anmerkung.*

(1) „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.
(2) Zur trivialen Bewertung ist nur die triviale Bewertung äquivalent.
(3) Sei $\varphi_1 \sim \varphi_2$. Es gilt:
φ_1 (nicht)archimedisch $\Longleftrightarrow$ φ_2 (nicht)archimedisch.
(Siehe Anmerkung 2.2.2. (2).)

Als Beispiel berechnen wir bis auf Äquivalenz alle archimedischen Bewertungen des rationalen Zahlkörpers $\mathbb{Q}$. Die nichtarchimedischen Bewertungen von $\mathbb{Q}$ werden in Korollar 3.5.6. bestimmt.

2.2.5. Satz. *Jede archimedische Bewertung des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist äquivalent zum gewöhnlichen absoluten Betrag $|\ |$ von $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Sei φ eine beliebige archimedische Bewertung von $\mathbb{Q}$.
Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m, n > 1$ und $r \in \mathbb{N}$. Stelle m^r dar in der n-adischen Darstellung: $m^r = a_{0r} + a_{1r} \cdot n + a_{2r} \cdot n^2 + \cdots + a_{s_r r} \cdot n^{s_r}$ mit $0 \leq a_{ir} < n$ und $a_{s_r r} \neq 0$. Dann ist $n^{s_r} \leq m^r$, also $s_r \cdot \log n \leq r \cdot \log m$, d.h. $s_r \leq \frac{r \cdot \log m}{\log n}$.
Aus der Dreiecksungleichung folgt wegen $\varphi(1) = 1$, daß $\varphi(\mu) \leq \mu$ ist für alle $\mu \in \mathbb{N}_0$, also $\varphi(a_{ir}) < n$ für alle i, r. Dann ist, ebenfalls nach der Dreiecksungleichung und der Produktregel
$\varphi(m)^r \leq \sum_{i=0}^{s_r} \underbrace{\varphi(a_{ir})}_{<n} \cdot \varphi(n^i) \leq n \cdot \sum_{i=0}^{s_r} \varphi(n)^i \leq n \cdot (s_r + 1) \cdot \max\{\varphi(n)^i \mid i = 0, \ldots, s_r\}$. Nach dem oben Angemerkten ist
$s_r + 1 \leq \frac{r \cdot \log m}{\log n} + 1$ und ferner

$$\max\{\varphi(n)^i \mid i = 0, \ldots, s_r\} \begin{cases} = \varphi(n)^{s_r}, & \text{falls } \varphi(n) > 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher ist $\max\{\varphi(n)^i \mid i = 0, \ldots, s_r\} = \max\{1, \varphi(n)\}^{s_r}$
Indem man für s_r die obige Abschätzung einsetzt ergibt sich
$\varphi(m)^r \leq n \cdot \left(\frac{r \cdot \log m}{\log n} + 1\right) \cdot \max\{1, \varphi(n)\}^{\frac{r \cdot \log m}{\log n}}$, also

$$\varphi(m) \leq \underbrace{\sqrt[r]{n \cdot \left(\frac{r \cdot \log m}{\log n} + 1\right)}}_{\underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 1} \cdot \max\{1, \varphi(n)\}^{\frac{\log m}{\log n}} \text{ und daher}$$

$$\varphi(m) \leq \max\{1, \varphi(n)\}^{\frac{\log m}{\log n}} \text{ für alle } m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } m, n > 1\,.$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:
1. Fall: Es gibt ein $n > 1$ mit $\varphi(n) \leq 1$.
Dann ist $\max\{1, \varphi(n)\} = 1$, also $\varphi(m) \leq 1$ für alle $m > 1$. Trivialerweise ist auch $\varphi(1) \leq 1$, also ist φ nichtarchimedisch (Definition 2.1.5) entgegen der Voraussetzung. Dieser Fall tritt also nicht auf.
2. Fall: $\varphi(n) > 1$ für alle $n > 1$. Dann ist also $\max\{1, \varphi(n)\} = \varphi(n)$ für *alle* $n > 1$ und daher $\varphi(m) \leq \varphi(n)^{\frac{\log m}{\log n}}$, d.h.
$\varphi(m)^{\frac{1}{\log m}} \leq \varphi(n)^{\frac{1}{\log n}}$ für alle $m, n > 1$. Durch Vertauschen von m und n folgt auch die umgekehrte Ungleichung, so daß man schließlich erhält:
$\varphi(m)^{\frac{1}{\log m}} = \varphi(n)^{\frac{1}{\log n}}$ für alle $m, n > 1$.
Also ist
$\gamma := \log\left(\varphi(m)^{\frac{1}{\log m}}\right)$ *unabhängig von* m, und $\gamma > 0$, weil $\varphi(m) > 1$ ist.
Es folgt $\varphi(m) = e^{\gamma \cdot \log m} = m^\gamma$ für alle $m > 1$ und trivialerweise auch für $m = 0$ und $m = 1$. Wegen $\varphi(-m) = \varphi(m)$ hat man dann:

$$\varphi(m) = \left\{ \begin{array}{ll} m^\gamma & \text{für } m \geq 0 \\ (-m)^\gamma & \text{für } m < 0 \end{array} \right\} = |m|^\gamma \text{ für alle } m \in \mathbb{Z}\,.$$

Mittels der Produktregel überträgt sich das auf Quotienten, so daß sich ergibt
$\varphi(q) = |q|^\gamma$ für *alle* $q \in \mathbb{Q}$ mit einem $\gamma > 0$. Das bedeutet $\varphi = |\ |^\gamma \sim |\ |$. □

Die Äquivalenz von Bewertungen läßt sich auch mittels der induzierten Topologien charakterisieren:

2.2.6. Satz. *Sei K ein Körper, φ_1, φ_2 Betragsbewertungen von K und φ_1 nicht trivial. Es sind äquivalent:*

(1) $\varphi_1 \sim \varphi_2$
(2) $\mathfrak{U}^{\varphi_1} = \mathfrak{U}^{\varphi_2}$, *d.h. φ_1 und φ_2 induzieren dieselben Topologien auf K.*
(3) $\mathfrak{U}^{\varphi_1} \supseteq \mathfrak{U}^{\varphi_2}$, *d.h. die von φ_1 auf K induzierte Topologie ist feiner als die von φ_2 induzierte.*

Dabei bezeichnet $\mathfrak{U}^{\varphi}$ das Umgebungssystem der Null bei der durch φ auf K induzierten linearen Topologie
$\mathfrak{U}^{\varphi} := \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subseteq K,\ ex.\ \varepsilon > 0\ mit\ \mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}_\varepsilon^{\varphi}\}$ *und* $\mathcal{U}_\varepsilon^{\varphi} := \{x \mid x \in K, \varphi(x) < \varepsilon\}$ *die ε-Umgebung der Null von K.*
Diese Topologie heißt die durch φ definierte „Bewertungstopologie“.

2.2.7. *Anmerkung.* Aus Satz 2.2.6. sieht man, daß aus der Vergleichbarkeit zweier Bewertungstopologien schon deren Gleichheit folgt. Inäquivalente Bewertungen induzieren unvergleichbare Topologien.

Beweis von Satz 2.2.6. (1)⇒(2): klar, da $\varphi_2 = \varphi_1^{\gamma}$ ist mit einem $\gamma > 0$.
(2)⇒(3): trivial.
(3)⇒(1): Sei $x \in K$ beliebig mit $\varphi_1(x) < 1$. Dann gilt $\varphi_1(x^n) = \varphi_1(x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Betrachte $\mathcal{U}_1^{\varphi_2} \in \mathfrak{U}^{\varphi_2} \subseteq \mathfrak{U}^{\varphi_1}$. Dann gibt es also ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon^{\varphi_1} \subseteq \mathcal{U}_1^{\varphi_2}$. Wegen $\varphi_1(x^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt dann $x^n \in \mathcal{U}_\varepsilon^{\varphi_1}$ für ein hinreichend großes n, also auch $x^n \in \mathcal{U}_1^{\varphi_2}$ und daher $\varphi_2(x)^n < 1$. Dann ist aber auch $\varphi_2(x) < 1$ und es folgt aus Satz 2.2.1. (1)⇒(3), daß $\varphi_1 \sim \varphi_2$ gilt. □

2.3. Exponentenbewertungen. Bewertungsringe.

2.3.1. Definition. Sei φ eine nichtarchimedische Betragsbewertung.
$\nu := -\log \circ \varphi$ heißt die „zugehörige“ Exponentenbewertung.

2.3.2. *Anmerkung.* Es gilt für $x, y \in K$

(1) $\nu(x) \in \mathbb{R}$ für $x \neq 0$, und $\nu(0) = \infty$
(2) $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$
(3) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$
(4) Falls $\nu(x) \neq \nu(y)$ gilt in (3) Gleichheit. „Minimumregel“
(Siehe Satz 2.1.14.)

2.3.3. Definition. Eine Funktion $\nu : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften (1)–(3) von Anmerkung 2.3.2 heißt „additive“ oder „Exponenten“- Bewertung von K.
Die Menge $\{\nu(x) \mid x \in K^\times\}$ ist eine additive Gruppe, die „Wertegruppe“ von ν. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{W}(\nu)$.
ν heißt „trivial“, wenn $\mathcal{W}(\nu) = \{0\}$ ist.

2.3.4. *Anmerkung.* Sei ν eine Exponentenbewertung von K und $\varphi := e^{-\nu}$. Dann ist φ eine nichtarchimedische Betragsbewertung von K und ν ist die zugehörige Exponentenbewertung. Entsprechend heißt φ die zu ν gehörige Betragsbewertung.
ν ist trivial $\Longleftrightarrow$ φ ist trivial.

Analog zur Definition 1.5.13. definieren wir auch hier:

2.3.5. Definition. Sei A eine Teilmenge von K.

$$\nu(A) := \inf\{\nu(x) \mid x \in A\} \geq -\infty$$

2.3.6. *Beispiele.*

(1) $\nu = \nu_{\mathfrak{p}}$ aus Definition 1.5.6. bzw. 1.5.10
(2) $\nu(f) :=$ Nullstellen-(Polstellen-)Ordnung eines meromorphen Funktionskeims f in einem Punkt von $\mathbb{C}$ oder einer Riemannschen Fläche ist eine Exponentenbewertung des Körpers der meromorphen Funktionen.

Alle diese Beispiele haben die Eigenschaft, daß es einen kleinsten positiven Wert gibt. Wir definieren:

2.3.7. Definition. Sei ν eine Exponentenbewertung von K.
ν heißt „diskret“ $\iff$ ν ist trivial oder es existiert ein kleinster positiver „Wert“ $\nu(x)$.

2.3.8. *Anmerkung.* Sei ν eine nichttriviale Exponentenbewertung von K.
ν ist diskret $\iff$ Es existiert ein $\alpha > 0$ mit $\mathcal{W}(\nu) = \{n \cdot \alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} = \alpha \cdot \mathbb{Z}$.
(α ist der kleinste positive Wert.)

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Offenbar ist $\alpha = \alpha \cdot 1$ der kleinste positive Wert. $\underline{\Rightarrow}$: Sei α der kleinste positive Wert und $\pi \in K$ mit $\nu(\pi) = \alpha$. Dann ist $\nu(\pi^n) = n \cdot \alpha$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, also $\mathcal{W}(\nu) \supseteq \alpha \cdot \mathbb{Z}$.
Sei nun $z \in K^\times$ beliebig, $\beta := \nu(z)$.
Wir zeigen $\beta \in \alpha \cdot \mathbb{Z}$.
Beweis: Falls $\beta = 0$ ist, sind wir fertig.
Sei $\beta \neq 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen, $\beta > 0$ (weil andernfalls $\nu(z^{-1}) = -\beta > 0$ ist und aus $-\beta \in \alpha \cdot \mathbb{Z}$ folgt trivialerweise auch $\beta \in \alpha \cdot \mathbb{Z}$).
Wähle $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $n \cdot \alpha \geq \beta$ (archimedisches Axiom für $\mathbb{R}$!!). Dann ist
$n \cdot \alpha - \beta \geq 0$ und $(n-1) \cdot \alpha < \beta$, also
$n \cdot \alpha - \beta < \alpha$.
α war der kleinste positive Wert und $\nu\left(\frac{\pi^n}{z}\right) = n \cdot \alpha - \beta$ ist ein nichtnegativer Wert $< \alpha$ also ist $n \cdot \alpha - \beta = 0$ und daher $\beta = n \cdot \alpha \in \alpha \cdot \mathbb{Z}$. □

2.3.9. Definition. Zwei Exponentenbewertungen ν_1 und ν_2 von K heißen genau dann „äquivalent“, wenn die zugehörigen Betragsbewertungen äquivalent sind.

2.3.10. *Anmerkung.*

(1) $\nu_1 \sim \nu_2 \iff$ Es existiert ein $\gamma > 0$ mit $\nu_2 = \gamma \cdot \nu_1$.
Ferner ist für *jedes* $\gamma > 0$ auch $\gamma \cdot \nu$ eine Exponentenbewerung von K.
(2) Zu jeder nichttrivialen diskreten Exponentenbewerung ν_1 von K existiert genau eine Exponentenbewertung ν_2 mit $\nu_1 \sim \nu_2$ und $\mathcal{W}(\nu_2) = \mathbb{Z}$.
ν_2 heißt (die zu ν_1 gehörende) „(auf $\mathbb{Z}$) normierte“ Exponentenbewertung von K.

Beweis. (1) ist klar nach Anmerkung 2.2.2. (2) und Definition 2.3.9.
(2) folgt mit Anmerkung 2.3.8. □

2.3.11. Definition. Sei ν eine Exponentenbewertung von K.
$S_\nu := \{x \mid x \in K,\ \nu(x) \geq 0\}$ heißt der „Bewertungsring“ von ν.
$\mathfrak{P}_\nu := \{x \mid x \in K,\ \nu(x) > 0\}$ heißt das „Bewertungsideal“ von ν.

2.3.12. Satz. *Sei ν eine Exponentenbewertung von K. Es gilt:*

(1) *S_ν ist ein Ring. Für beliebige $y \in K$ gilt $y \in S_\nu$ oder $y^{-1} \in S_\nu$.*
$\mathrm{Quot}(S_\nu) = K$.

(2) $\mathfrak{P}_\nu$ *und* (0) *sind die einzigen Primideale von* S_ν.
(3) *Ist* ν' *eine zweite Exponentenbewertung von* K, *so sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*
   (a) $\nu \sim \nu'$
   (b) $S_\nu = S_{\nu'}$
   (c) $S_\nu \supseteq S_{\nu'}$
   (d) $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{P}_{\nu'}$
   (e) $\mathfrak{P}_{\nu'} \supseteq \mathfrak{P}_\nu$
(4) *Ferner sind äquivalent:*
   (a) ν *ist diskret.*
   (b) $\mathfrak{P}_\nu$ *ist Hauptideal.*
   (c) S_ν *ist Hauptidealring.*
   (d) S_ν *ist noethersch.*
   Zusatz*: In diesem Falle heißt* S_ν *„diskreter Bewertungsring“.*
   Jedes S_ν*-Ideal* $\mathfrak{a} \neq (0)$ *aus* K *wird von jedem Element mit kleinstem Wert aus* $\mathfrak{a}$ *erzeugt.*
   (0) *und* $\mathfrak{P}_\nu^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *sind alle ganzen Ideale von* S_ν.
(5) *Sei* ν *diskret und normiert,* $x \in K^\times$. *Es gilt:*
   $\nu(x) = n \Longleftrightarrow x \in \mathfrak{P}_\nu^n, x \notin \mathfrak{P}_\nu^{n+1}$

Beweis. Falls ν die triviale Bewertung ist, ist nichts zu zeigen. Sei also im Folgenden o.B.d.A. ν nichttrivial.

(1): $\nu(x) \geq 0,\ \nu(y) \geq 0 \Rightarrow \nu(x \pm y) \geq 0,\ \nu(x \cdot y) \geq 0 \Rightarrow S_\nu$ Ring.
Ist $y \notin S_r$ so ist $\nu(y) < 0 \Rightarrow \nu(y^{-1}) = -\nu(y) > 0 \Rightarrow y^{-1} \in S_\nu$
Sei nun $z \in K$ beliebig. Falls $z \notin S_\nu \Rightarrow z^{-1} \in S_\nu \Rightarrow z \in \mathrm{Quot}(S_\nu)$ □

(2): x Einheit von $S_\nu \Leftrightarrow x \in S_\nu$ und $x^{-1} \in S_\nu \Leftrightarrow \nu(x) \geq 0$ und $\nu(x^{-1}) \geq 0 \Leftrightarrow \nu(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S_\nu \setminus \mathfrak{P}_\nu$
Also: Die Einheiten von S_ν sind die Elemente von $S_\nu \setminus \mathfrak{P}_\nu$, d.h. $\mathfrak{P}_\nu$ = Menge der Nichteinheiten von S_ν.
$\mathfrak{P}_\nu$ ist ein Ideal:

$$\left.\begin{array}{l} \nu(x) > 0,\ \nu(y) > 0 \Rightarrow \nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\} > 0 \\ z \in S_\nu \text{ beliebig } \Rightarrow \nu(z) \geq 0 \Rightarrow \nu(z \cdot x) = \nu(z) + \nu(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{P}_\nu \text{ Ideal}$$

Da jedes Element von $S_\nu \setminus \mathfrak{P}_\nu$ Einheit ist, ist $\mathfrak{P}_\nu$ (einziges) maximales Ideal von S_ν, also insbesondere ein Primideal. Trivialerweise ist auch (0) Primideal von S_ν. Sei nun $\mathfrak{Q}$ ein beliebiges Primideal $\neq (0)$ von S_ν. Da jedes Element von $S_\nu \setminus \mathfrak{P}_\nu$ Einheit ist, folgt zunächst $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}_\nu$.
Wir zeigen $\mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{P}_\nu$: Sei $0 \neq q \in \mathfrak{Q}$ beliebig fest gewählt und $x \in \mathfrak{P}_\nu$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{P}_\nu$. Dann ist $\nu(x) > 0$, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \nu(x) > \nu(q)$. Aber $n \cdot \nu(x) = \nu(x^n) \Rightarrow \nu\left(\frac{x^n}{q}\right) \geq 0 \Rightarrow x^n \in q \cdot S_\nu \subseteq \mathfrak{Q}$. Da $\mathfrak{Q}$ ein Primideal ist folgt $x \in \mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{P}_\nu \subseteq \mathfrak{Q}$. □

(3):
(3a)⇒(3b): $\nu \sim \nu'$ bedeutet nach Anmerkung 2.3.10. (1): Es gibt ein $\gamma > 0$ mit $\nu' = \gamma \cdot \nu$. Also $x \in S_\nu \Leftrightarrow \nu(x) \geq 0 \Leftrightarrow \nu'(x) = \gamma \cdot \nu(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S_{\nu'}$. □
(3b)⇒(3c): Trivial!
(3c)⇒(3e): Sei $S_\nu \supseteq S_{\nu'}$ und $x \in \mathfrak{P}_\nu$. Dann ist jedenfalls x keine Einheit in $S_{\nu'}$; denn sonst wäre ja x auch Einheit von S_ν. Es ist also entweder $x \in \mathfrak{P}_{\nu'}$, was zu zeigen war, oder es müßte $x \notin S_{\nu'}$ sein. In diesem Falle wäre dann aber $x^{-1} \in S_{\nu'} \subseteq S_\nu$

und damit x Einheit in S_ν, was unmöglich ist, da $x \in \mathfrak{P}_\nu$. Also kann der letzte Fall nicht auftreten und es ist $x \in \mathfrak{P}_{\nu'}$. □

(3e)⇒(3a): Sei $\mathfrak{P}_{\nu'} \supseteq \mathfrak{P}_\nu$. Das bedeutet, daß für $x \in K$ gilt: $\nu(x) > 0 \Rightarrow \nu'(x) > 0$. Für die zugehörigen Betragsbewertungen φ und φ' bedeutet das: $\varphi(x) < 1 \Rightarrow \varphi'(x) < 1$. Nach Satz 2.2.1. zusammen mit Definition 2.2.3. folgt daraus $\varphi \sim \varphi'$, also nach Definition 2.3.9. auch $\nu \sim \nu'$. □

(3a)⇒(3d): $\nu \sim \nu'$ bedeutet nach Anmerkung 2.3.10. (1): Es gibt ein $\gamma > 0$ mit $\nu' = \gamma \cdot \nu$. Also $x \in \mathfrak{P}_\nu \Leftrightarrow \nu(x) > 0 \Leftrightarrow \nu'(x) = \gamma \cdot \nu(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathfrak{P}_{\nu'}$. □

(3d)⇒(3e): Trivial!

(4):

(4a)⇒(4c): Sei $\alpha \in \nu(S_\nu)$ der kleinste positive Wert. Dann ist $\nu(S_\nu) = \alpha \cdot \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ nach Anmerkung 2.3.8. Sei $(0) \subset \mathfrak{a} \subset S_\nu$ ein ganzes Ideal von S_ν. Wegen $\nu(\mathfrak{a}) \subseteq \alpha \cdot \mathbb{N}$ gibt es ein $a \in \mathfrak{a}$ von kleinstem positivem Wert. Für jedes $x \in \mathfrak{a}$ ist dann $\nu\left(\frac{x}{a}\right) \geq 0$ und daher $x \in S_\nu \cdot a$, also $\mathfrak{a} = S_\nu \cdot a$ Hauptideal. □

(4c)⇒(4b) ist klar.

(4b)⇒(4a): Wenn $\mathfrak{P}_\nu$ Hauptideal ist, gilt also $\mathfrak{P}_\nu = S_\nu \cdot \pi$. Dann ist $\nu(\pi) > 0$ und da jedes $x \in S_\nu$ mit $\nu(x) > 0$ in $\mathfrak{P}_\nu$ liegt, gilt $x \in S_\nu \cdot \pi$ und daher $\nu(x) \geq \nu(\pi)$. Also ist π ein Element von kleinstem positivem Wert und folglich ist ν diskret nach Definition 2.3.7. □

(4c)⇒(4d): Falls S_ν Hauptidealring ist, ist trivialerweise S_ν noethersch, weil jedes Ideal endich erzeugt ist. □

(4d)⇒(4b): Sei S_ν noethersch. Dann ist insbesondere auch $\mathfrak{P}_\nu$ endlich erzeugt: $\mathfrak{P}_\nu = S_\nu\langle \pi_1, \ldots, \pi_r \rangle$ mit $0 < \nu(\pi_i) < \infty$ für alle i. O.B.d.A. sei $\nu(\pi_1) \leq \nu(\pi_r)$ für alle i, also $\nu\left(\frac{\pi_i}{\pi_1}\right) \geq 0$ für alle i, folglich $\pi_i \in S_\nu \cdot \pi_1$ und daher $\mathfrak{P}_\nu = S_\nu \cdot \pi_1$ Hauptideal. □

Beweis des Zusatzes: Daß jedes ganze Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ von jedem Element von kleinstem Wert aus $\mathfrak{a}$ erzeugt wird, wurde in (4a)⇒(4c) gezeigt. Ist $\mathfrak{a}$ ein gebrochenes S_ν-Ideal $\neq (0)$, so gibt es ein $y \in R$ mit $y \cdot \mathfrak{a} \subseteq S_\nu$, also ein ganzes Ideal. Sei $a \in \mathfrak{a}$ ein Element von kleinstem Wert aus $\mathfrak{a}$. Dann ist offenbar $y \cdot a$ ein Element von kleinstem Wert von $y \cdot \mathfrak{a}$, also nach obigem $y \cdot \mathfrak{a} = y \cdot a \cdot S_\nu$ und folglich $\mathfrak{a} = a \cdot S_\nu$. Also wird auch jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{a}$ von jedem Element von kleinstem Wert aus $\mathfrak{a}$ erzeugt.

Sei nun $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal $\neq (0)$ und $a \in \mathfrak{a}$ ein Element von kleinstem Wert. Dann ist $\nu(a) = n \cdot \alpha = n \cdot \nu(\pi)$, also $\nu\left(\frac{a}{\pi^n}\right) = 0$. Somit ist $\frac{a}{\pi^n}$ eine Einheit von S_ν und daher $\mathfrak{a} = S_\nu \cdot a = S_\nu \cdot \pi^n = \mathfrak{P}_\nu^n$. Also sind die Potenzen von $\mathfrak{P}_\nu$ die einzigen Ideale $\neq (0)$ von S_ν. □

(5): Sei ν diskret und $\mathcal{W}(\nu) = \mathbb{Z}$, $\pi \in S_\nu$ mit $\nu(\pi) = 1$. Dann ist $\mathfrak{P}_\nu = S_\nu \cdot \pi$ nach dem Zusatz zu (4).

Sei nun $x \in K^\times$ und $\nu(x) = n$. Dann ist $\nu(x) = \nu(\pi^n)$, also $\nu\left(\frac{x}{\pi^n}\right) = 0$ und $\nu\left(\frac{x}{\pi^{n+1}}\right) < 0$. Das bedeutet, $x \in S_\nu \cdot \pi^n = \mathfrak{P}_\nu^n$ aber $x \notin S_\nu \cdot \pi^{n+1} = \mathfrak{P}_\nu^{n+1}$.

Umgekehrt: Sei $x \in \mathfrak{P}_\nu^n \setminus \mathfrak{P}_\nu^{n+1}$. Dann ist $x = y \cdot \pi^n$ mit $y \in S_\nu$, also $\nu(x) \geq n$. Wäre $\nu(x) \geq n+1$, so wäre $x \in S_\nu \cdot \pi^{n+1} = \mathfrak{P}^{n+1}$ entgegen der Voraussetzung. Also ist $\nu(x) = n$. □

2.3.13. Korollar. *Sei ν diskret mit $\mathcal{W}(\nu) = \mathbb{Z}$, und $\pi \in S_\nu$ mit $\nu(\pi) = 1$.*
Dann gilt:
Jedes Element $0 \neq x \in K$ schreibt sich eindeutig in der Form

$x = \varepsilon \cdot \pi^n$, ε Einheit von S_ν und $n \in \mathbb{Z}$.
Es ist dann $\nu(x) = n$.

Beweis. Beim Beweis von Satz 2.3.11. (5) wurde gezeigt $x = y \cdot \pi^{\nu(x)}$. Dann ist offenbar $\nu(y) = 0$ also $\varepsilon := y$ eine Einheit von S_ν.
Eindeutigkeit: Aus $x = \varepsilon \cdot \pi^n$ folgt $\nu(x) = 0 + n = n$ also ist $\varepsilon = \frac{x}{\pi^{\nu(x)}}$ durch x und π eindeutig bestimmt. □

2.3.14. *Anmerkung.* Allgemeiner nennt man jeden Integritätsbereich S mit der Eigenschaft:
„Für jedes $y \in K^\times$ ist $y \in S$ oder $y^{-1} \in S$“ einen „Bewertungsring“ von
$K := \mathrm{Quot}(S)$. Man kann zeigen, daß jedem solchen Ring eine „Exponentenbewertung“ $\nu : K \to G \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften (1)–(3) von Anmerkung 2.3.2 zugeordnet werden kann, wobei $(G, +, \geq)$ eine vollständig geordnete abelsche Gruppe ist, so daß $S = \{x \mid x \in K,\ \nu(x) \geq 0\}$ ist (Krullsche Bewertungen [9]). Besonders wichtig ist dabei der Fall $G = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n\text{-mal}}$ mit lexikographischer Ordnung
(„n-stufige diskrete Bewertungen“).
Allgemein ist jeder Bewertungsring lokal, d.h. die Nichteinheiten bilden ein (maximales) Ideal $\mathfrak{P}$.

2.3.15. Satz (Umkehrung von 2.3.12. (4) und (5)). *Sei S ein lokaler Integritätsbereich, der kein Körper ist, mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$.*
Es sei $\mathfrak{P} = S \cdot \pi$ ein Hauptideal und es gelte
$\bigcap_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^\mu = 0$
oder
S ist noethersch.
Dann gilt:
S ist ein diskreter Bewertungsring zu der Exponentenbewertung ν
von $K := \mathrm{Quot}(S)$, definiert durch
$\nu(x) := \sup\{n \mid x \in \mathfrak{P}^n\}$ für alle $x \in K$.

Beweis. Vorbemerkung: Nach dem Krullschen Durchschnittssatz gilt für ein noethersches S jedenfalls $\bigcap_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^\mu = (0)$, so daß man nur diesen Fall zu betrachten braucht. Umgekehrt folgt bei $\bigcap_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^\mu = (0)$ aus dem Satz, daß S ein diskreter Bewertungring, also noethersch ist (Satz 2.3.12. (4)).
Die beiden Voraussetzungen erweisen sich also nachträglich als äquivalent.
Wegen $\bigcap_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^\mu = (0)$ existiert für jedes $0 \neq x \in S$ ein eindeutig bestimmtes $\nu(x) \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in \mathfrak{P}^{\nu(x)}$ und $x \notin \mathfrak{P}^{\nu(x)+1}$. Dann gilt also $x = \varepsilon \cdot \pi^{\nu(x)}$ mit $\varepsilon \notin \mathfrak{P}$. Weil $\mathfrak{P}$ das einzige maximale Ideal von S ist, ist ε eine Einheit von S.
Aus der angegebenen Darstellung $x = \varepsilon \cdot \pi^{\nu(x)}$ erkennt man unmittelbar:
$\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$ und
$\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ für alle $x, y \in S$.
Für $x \in K := \mathrm{Quot}(S)$ definieren wir
$\nu(x) := \nu(x_1) - \nu(x_2)$, wenn $x = \frac{x_1}{x_2}$ mit $x_i \in S$ ist. Wegen $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$ rechnet man nach, daß das unabhängig von der Darstellung von x in der Form $x = \frac{x_1}{x_2}$ ist. Es folgt:
$x = \varepsilon \cdot \pi^{\nu(x)}$ mit einer Einheit ε für alle $0 \neq x \in K$, also
$\nu(x) = \max\{n \mid x \in \mathfrak{P}^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ für alle $0 \neq x \in K$.

Setzt man noch
$\nu(0) := \infty$ $(= \sup \mathbb{Z})$, so sieht man, daß ν die Eigenschaften (1)–(3) von Anmerkung 2.3.2. erfüllt, also eine Exponentenbewertung von K ist. Trivialerweise ist $S = S_\nu$ der zugehörige Bewertungsring. Ferner ist $\mathcal{W}(\nu) = \mathbb{Z}$, also ist ν diskret. □

2.3.16. Korollar. *Die Klassen äquivalenter diskreter Bewertungen ν von K entsprechen vermöge $\nu \mapsto S_\nu$ eineindeutig den* noetherschen, lokalen *Unterringen S von K mit*

(1) $\mathrm{Quot}(S) = K$.
(2) *Das maximale Ideal von S ist ein Hauptideal.*

Der trivialen Bewertung entspricht dabei $S_\nu = K$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 2.3.15. und Satz 2.3.12 (3). □

2.3.17. Satz. *Sei S Bewertungsring von K zu der nichttrivialen Bewertung ν. Dann ist S ein* maximaler *Unterring von K, d.h. $S \subset K$, und, wenn für einen Unterring R von K gilt $S \subset R \subseteq K$, so folgt $R = K$.*
(Hierbei ist es wichtig, daß $\nu : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist. Für allgemeine Krullsche Bewertungen nach Anmerkung 2.3.14 gilt dies nicht!)

Beweis. Sei R ein Ring mit $S \subset R \subseteq K$. Es existiert ein $r \in R$ mit $\nu(r) < 0$. Sei $z \in K$ beliebig. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \nu(r) \leq \nu(z)$ und daher $\nu\left(\frac{z}{r^n}\right) \geq 0$. Daher ist $z \in r^n \cdot S \subseteq R$, also $R = K$. □

3. Schnitte von Bewertungsringen

3.1. **Der endliche Approximationssatz.**

3.1.1. Satz (Endlicher Approximationssatz (Unabhängigkeitssatz) (A_0)).

(A_0) *Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endlich viele paarweise nichtäquivalente nichttriviale Betragsbewertungen eines Körpers K.*
Ferner seien
$\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_n > 0$,
$a_1, \dots, a_n \in K$
vorgegeben.
Dann gibt es ein $z \in K$ mit
$\varphi_i(z - a_i) < \varepsilon_i$ *für alle* $i = 1, \dots, n$.

Zum Beweis benötigen wir einige Begriffe und Hilfssätze.

3.1.2. Definition. Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elemente aus K und $a \in K$, φ eine Bewertung von K. Wir definieren

$$a = \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i \iff \lim_{i\to\infty} \varphi(a - a_i) = 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

„Die Folge der a_i konvergiert bzgl. φ gegen a“.
a heißt der „Limes“ der Folge der a_i.
Die Folge (a_i) heißt „Nullfolge“ $\iff \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i = 0$.

Mittels der Dreiecksungleichung zeigt man, weil $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gilt, wie in der reellen Analysis sofort, daß der Limes einer Folge, wenn er existiert, eindeutig bestimmt ist.
Auf Grund der Definition und der Regeln für lim in $\mathbb{R}$ ist unmittelbar klar:

3.1.3. *Anmerkung.* (1) $\varphi_1 \sim \varphi_2$, $\quad a = \overset{\varphi_1}{\lim_{i\to\infty}} a_i \Rightarrow a = \overset{\varphi_2}{\lim_{i\to\infty}} a_i$.

(2) Es gelten die üblichen Regeln:

$$\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} (a_i \pm b_i) = \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i \pm \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} b_i$$

$$\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} (a_i \cdot b_i) = \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i \cdot \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} b_i$$

$$\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i^{-1} = \left(\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i\right)^{-1}, \text{ falls } \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i \neq 0 \text{ ist.}$$

3.1.4. *Beispiele.*

(1) Sei $\varphi(a) < 1$. Dann ist $\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a^i = 0$.

(2) Sei $\varphi(a) < 1$. Dann ist $\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} \frac{a^i}{1+a^i} = 0$.

(3) Sei $\varphi(a) > 1$. Dann ist $\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} \frac{a^i}{1+a^i} = 1$.

Beweis. (1): $\varphi(a^i - 0) = \varphi(a)^i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, weil $\varphi(a) < 0$ ist.
(2): Folgt aus (1) mit den Regeln (2) aus Anmerkung 3.1.3.
(3): $\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} \frac{a^i}{1+a^i} = \overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^i + 1} = 1$ nach (1) und den Regeln (2) aus Anmerkung 3.1.3.

□

3.1.5. *Anmerkung.* φ ist stetig bzgl. $\overset{\varphi}{\lim\limits_{i\to\infty}}$, d.h. falls $\overset{\varphi}{\lim\limits_{i\to\infty}} a_i$ existiert, gilt:

$$\varphi\left(\overset{\varphi}{\lim_{i\to\infty}} a_i\right) = \lim_{i\to\infty} \varphi(a_i)\,.$$

Beweis. Sei $a := \overset{\varphi}{\lim\limits_{i\to\infty}} a_i$. Unter Beachtung von Anmerkung 2.1.4. hat man
$|\varphi(a) - \varphi(a_i)| \leq \varphi(a - a_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nach Definition von $\overset{\varphi}{\lim\limits_{i\to\infty}} a_i$. □

3.1.6. Hilfssatz. *Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ wie in Satz 3.1.1. Dann gibt es ein $a \in K$ mit*
$\varphi_1(a) > 1$
$\varphi_i(a) < 1$ für $i = 2, \ldots, n$.

Beweis. Induktion nach m.
Induktionsanfang: $n = 2$:
Da $\varphi_1 \not\sim \varphi_2$, gibt es nach Satz 2.2.1. ein $b \in K$ mit $\varphi_1(b) < 1$ und $\varphi_2(b) \geq 1$ und ebenso ein $c \in K$ mit $\varphi_1(c) \geq 1$ und $\varphi_2(c) < 1$. Setze $a := \frac{c}{b}$. Dann ist $\varphi_1(a) > 1$ und $\varphi_2(a) < 1$. □
$n > 2$:
Sei nun die Behauptung richtig für $n-1$ Bewertungen. Dann gibt es also ein $b \in K$ mit
$\varphi_1(b) > 1$ und
$\varphi_i(b) < 1$ für $i = 2, \ldots, n-1$.
Nach dem Induktionsanfang gibt es ferner ein $c \in K$ mit
$\varphi_1(c) > 1$ und
$\varphi_n(c) < 1$.
Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:
(a) $\varphi_n(b) \leq 1$: Sei $a_r := c \cdot b^r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Dann ist
$\varphi_1(a_r) > 1$ und
$\varphi_n(a_r) < 1$ für alle r.
Für $i = 2, \ldots, n-1$ ist ferner
$\varphi_i(a_r) = \varphi_i(c) \cdot \underbrace{\varphi_i(b)^r}_{<1} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nach Beispiel 3.1.4. (1).
Für hinreichend großes r tut dann $a := a_r$ das Gewünschte. □
(b) $\varphi_n(b) > 1$: Betrachte
$a_r := \frac{c \cdot b^r}{1 + b^r}$, $r \in \mathbb{N}$.
Nach Beispiel 3.1.4. hat man dann

$$a_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} c \cdot 1 = c & \text{für } \varphi_1 \text{ und } \varphi_n \\ 0 & \text{für } \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \end{cases}$$

Nach Anmerkung 3.1.5. folgt

$$\varphi_i(a_r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \varphi_i(c) & \text{für } i = 1, n \\ 0 & \text{für } i = 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Für große r ist dann

$$\varphi_i(a_r) \begin{cases} > 1 & \text{für } i = 1 \\ < 1 & \text{für } i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Für hinreichend großes r tut also $a := a_r$ das Gewünschte. □

3.1.7. Hilfssatz. *Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ wie in Satz 3.1.1. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $y \in K$ mit*

$\varphi_1(y-1) < \varepsilon$ *und*
$\varphi_i(y) < \varepsilon$ *für* $i = 2, \ldots, n$.

Beweis. Wähle nach Hilfssatz 3.1.6. ein $a \in K$ mit $\varphi_1(a) > 1$ und $\varphi_i(a) < 1$ für $i = 2, \ldots, n$. Nach Beispiel 3.1.4 gilt dann

$$y_r := \tfrac{a^r}{1+a^r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi_1 \\ 0 & \text{für } \varphi_2, \ldots, \varphi_n \end{cases}$$

Für hinreichend großes r tut dann $y := y_r$ das Gewünschte. □

Beweis. (Beweis des Approximationssatzes 3.1.1.) Nach Hilfssatz 3.1.7. existieren für $i = 1, \ldots, n$ Folgen y_{ik} mit

$$y_{ik} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi_i \\ 0 & \text{für } \varphi_j \text{ mit } j \neq i \end{cases}$$

Sei
$x_k := a_1 \cdot y_{1k} + \cdots + a_n \cdot y_{nk}$.
Nach Anmerkung 3.1.3. (2) gilt dann
$x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_i$ für φ_i, d.h.
$\varphi_i(x_k - a_i) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Für genügend großes k gilt dann mit $x := x_k$
$\varphi_i(x - a_i) < \varepsilon$ für alle i. □

3.1.8. Korollar (Unabhängigkeit der Bewertungen). *Seien*
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *wie im Approximationssatz 3.1.1.,*
$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
Falls für alle $x \in K$ *gilt*
$\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x)^{\gamma_i} = 1$ *so folgt*
$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0$.

Beweis. (indirekt) Andernfalls wäre etwa $\gamma_1 \neq 0$. Nach dem Approximationssatz 3.1.1 mit $a_1 := 0$, $a_i := 1$ für $i = 2, \ldots, n$ existierte dann eine Folge $z_k \in K$ mit $z_k \underset{k\to\infty}{\overset{\varphi_1}{\longrightarrow}} 0$ und $z_k \underset{k\to\infty}{\overset{\varphi_i}{\longrightarrow}} 1$ für $i > 1$.
Es gälte dann

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(z_k)^{\gamma_i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma_1 > 0 \\ \infty & \text{falls } \gamma_1 < 0 \end{cases},$$

also jedenfalls $\neq 1$ für große k. □

3.1.9. Korollar. *Seien*
$\nu_1, \ldots, \nu_n$ *endlich viele paarweise verschiedene nichtäquivalente Exponentenbewertungen von* K,
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *mit* $\lambda_i \in (\mathcal{W}(\nu_i)$ *vorgegeben.*
Dann existiert ein $z \in K$ *mit*
$\nu_i(z) = \lambda_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Wegen $\lambda_i \in \mathcal{W}(\nu_i)$ existieren $a_i \in K^\times$ mit $\nu(a_i) = \lambda_i$ für alle i. Nach dem Approximationssatz 3.1.1., umgeschrieben für Exponentenbewertungen, gibt es dann ein $z \in K$ mit $\nu_i(z - a_i) > \lambda_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wäre für ein i_0 $\nu_{i_0}(z) \neq \lambda_{i_0} = \nu_{i_0}(a_{i_0})$ so wäre nach Satz 2.1.14. $\nu_{i_0}(z - a_{i_0}) = \min\{\nu_{i_0}(z), \lambda_{i_0}\} \leq \lambda_{i_0}$ im Widerspruch zur Konstruktion von z. Also gilt $\nu_i(z) = \lambda_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. □

3.2. **Schnitte endlicher vieler diskreter Bewertungsringe.**

3.2.1. Satz. *Seien*
$S_1, \ldots, S_n$ *paarweise verschiedene diskrete Bewertungsringe mit dem (gemeinsamen) Quotientenkörper* K,
$\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ *die jeweiligen maximalen Ideale,*
$\nu_1, \ldots, \nu_n$ *die zugehörigen auf* $\mathbb{Z}$ *normierten Exponentenbewertungen,*

$$R := \bigcap_{i=1}^{n} S_i \,.$$

Es gilt:

(1) $\mathrm{Quot}(R) = K$.
(2) *Die ganzen Ideale* $\neq (0)$ *von* R *sind genau die Untermengen von* K *der Form* $\mathfrak{a} = \{x \mid x \in K, \nu_i(x) \geq m_i\}$ *für alle* n*-Tupel* $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$. *Es ist dann* $m_i = \nu_i(\mathfrak{a}) = \min\{\nu_i(x) \mid x \in \mathfrak{a}\}$.
(3) R *ist Hauptidealring (also ZPE). Ein Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ *wird erzeugt von jedem* $a \in K$ *mit* $\nu_i(a) = \nu_i(\mathfrak{a})$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$.
Die einzigen Primideale von R *sind die* $\mathfrak{P}_i \cap R$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *und* (0). *Diese Primideale sind paarweise verschieden.*

Beweis. (1): $\mathrm{Quot}(R) \subseteq K$ gilt trivialerweise.
Umgekehrt: Sei $0 \neq x \in K$ beliebig. Nach Korollar 3.1.9. gibt es dann ein $z \in K$ mit $\nu_i(z) = |\nu_i(x)| \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann ist also $z \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i = R$. Ferner ist $\nu_i(z \cdot x) = \nu_i(z) + \nu_i(x) = |\nu_i(x)| + \nu_i(x) \geq 0$ für alle i, also auch $z \cdot x \in R$. Daher ist $x = \frac{z \cdot x}{z} \in \mathrm{Quot}(R)$. □
(2): (a) Seien $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben und
$\mathfrak{a} := \{x \mid x \in K, \nu_i(x) \geq m_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$.
Man rechnet sofort nach, daß $\mathfrak{a}$ ein (ganzes) Ideal von R ist. Ferner ist nach Definition $\nu_i(x) \geq m_i$ für $i = 1, \ldots, n$ für alle $x \in \mathfrak{a}$ und daher $\nu_i(\mathfrak{a}) \geq m_i$ für alle i.
Nach Satz 3.1.9. gibt es aber sogar ein $a \in K$ mit $\nu_i(a) = m_i$ für alle i. Es folgt $a \in \mathfrak{a}$ und $\nu_i(\mathfrak{a}) = m_i$ für alle i. Dann ist aber $\mathfrak{a} = R \cdot a$ (also $\mathfrak{a}$ Hauptideal); denn für alle $x \in \mathfrak{a}$ und alle i ist $\nu_i\left(\frac{x}{a}\right) \geq 0$ und daher $\left(\frac{x}{a}\right) \in R$.
(b) Umgekehrt: Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges (ganzes) Ideal $\neq (0)$ von R und
$m_i := \nu_i(\mathfrak{a})$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei ferner
$\tilde{\mathfrak{a}} := \{x \mid x \in K, \nu_i(x) \geq m_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$.
Wir zeigen $\mathfrak{a} \overset{!}{=} \tilde{\mathfrak{a}}$:
$\mathfrak{a} \subseteq \tilde{\mathfrak{a}}$: $x \in \mathfrak{a} \Rightarrow \nu_i(x) \geq m_i$ für alle i, also $x \in \tilde{\mathfrak{a}}$ nach Definition von $\tilde{\mathfrak{a}}$.
$\mathfrak{a} \supseteq \tilde{\mathfrak{a}}$: Nach Definition von $\nu_i(\mathfrak{a})$ existieren $a_i \in \mathfrak{a}$ mit $\nu_i(a_i) = \nu_i(\mathfrak{a}) = m_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir konstruieren daraus ein
$y \in \mathfrak{a}$ mit $\nu_i(y) = m_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Nach dem unter (a) gezeigten ist dann $\tilde{\mathfrak{a}} = R \cdot y$, also $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}$, was zu zeigen war.
Konstruktion des y:
Nach Korollar 3.1.9. gibt für jedes $i = 1, \ldots, n$ ein $y_i \in K$ mit
$\nu_i(y_i) \quad = \nu_i(a_i) = m_i,$
$\nu_k(y_i) \quad > \nu_k(a_i) \geq m_k, \text{ für } k \neq i\,.$
Daher ist
$\nu_j\left(\frac{y_i}{a_i}\right) = \nu_j(y_i) - \nu_j(a_i) \geq 0$ für $j = 1, \ldots, n$, also $y_i \in R \cdot a_i \subseteq \mathfrak{a}$.

Sei also
$y := y_1 + \cdots + y_n$
Dann gilt
$y \in \mathfrak{a}$, weil alle $y_i \in \mathfrak{a}$
und außerdem noch
$\nu_i(y) = m_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$
nach der „Minimumsregel“
Anmerkung 2.3.2. (4).

	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_n
ν_1	$\boxed{m_1}$	$> m_1$	$\cdots$	$> m_1$	$\cdots$	$> m_1$	$\cdots$	$> m_1$
ν_2	$> m_2$	$\boxed{m_2}$	$\cdots$	$> m_2$	$\cdots$	$> m_2$	$\cdots$	$> m_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
ν_i	$> m_i$	$> m_i$	$\cdots$	$\boxed{m_i}$	$\cdots$	$> m_i$	$\cdots$	$> m_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
ν_k	$> m_k$	$> m_k$	$\cdots$	$> m_k$	$\cdots$	$\boxed{m_k}$	$\cdots$	$> m_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
ν_n	$> m_n$	$> m_n$	$\cdots$	$> m_n$	$\cdots$	$> m_n$	$\cdots$	$\boxed{m_n}$

□

(3): Daß jedes Ideal von R Hauptideal ist und von den behaupteten Elementen erzeugt wird, wurde bereits in (2) gezeigt.
Bleibt zu zeigen, daß (0) und $\mathfrak{P}_i \cap R$ die einzigen Primideale von R sind:
Da die $\mathfrak{P}_i$ Primideale von S_i sind, sind die $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap R$ jedenfalls Primideale von R. Ebenso ist (0) Primideal von R.
Nach Kor 3.1.9. gibt es für jedes $i = 1, \ldots, n$ ein $\pi_i \in K$ mit
$\nu_i(\pi_i) = 1$ und
$\nu_k(\pi_i) = 0$ für $k \neq i$.
Wir zeigen:
$\mathfrak{p}_i = R \cdot \pi_i$.:
Wegen $\nu_i(\pi_i) = 1$ gilt jedenfalls $\pi_i \in \mathfrak{P}_i$, und, da $\nu_j(\pi_i) \geq 0$ ist für alle j, gilt auch $\pi_i \in R$, also $\pi_i \in \mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$.
Umgekehrt: Für $k \neq i$ ist, weil $\pi_i \in \mathfrak{p}_i$ ist, $0 \leq \nu_k(\mathfrak{p}_i) \leq \nu_k(\pi_i) = 0$, also
$\nu_k(\pi_i) = \nu_k(\mathfrak{p}_i) = 0$ für alle $k \neq i$.
Außerdem hat man $1 \leq \nu_i(\mathfrak{p}_i) \leq \nu_i(\pi_i) = 1$, also auch
$\nu_i(\pi_i) = \nu_i(\mathfrak{p}_i)$.
Insgesamt bedeutet das nach (2):
$\mathfrak{p}_i = R \cdot \pi_i$, und folglich ist π_i ein Primelement von R.
Für $i \neq k$ sind die Primelemente π_i und π_k nicht assoziiert zueinander; denn es ist z.B. $\nu_i\left(\frac{\pi_i}{\pi_k}\right) = 1 \neq 0$, also ist $\frac{\pi_i}{\pi_k}$ keine Einheit in S_i, also erst recht nicht in R.
Sei nun $0 \neq a \in R$ beliebig. Bilde
$\tilde{a} := \pi_1^{\nu_1(a)} \cdots \pi_n^{\nu_n(a)}$.
Dann ist $\nu_i(\tilde{a}) = \nu_i(a)$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $\nu_i\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right) = 0$ für alle i und daher $\varepsilon := \frac{a}{\tilde{a}}$ eine Einheit in allen S_i und daher auch eine Einheit von R. Es ist dann
$a = \varepsilon \cdot \pi_1^{\nu_1(a)} \cdots \pi_n^{\nu_n(a)}$ Primelementzerlegung von a.
Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal $\neq (0)$ von R, so gibt es darin ein $a \neq 0$. Wegen der obigen Primfaktordarstellung von a folgt dann o.B.d.A. etwa $\pi_1 \in \mathfrak{p}$. Da R Hauptidealring ist, ist $R \cdot \pi_1$ ein maximales Ideal von R und somit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Also sind in der Tat die $\mathfrak{p}_i = R \cdot \pi_i$ für $i = 1, \ldots, n$ die einzigen Primideale $\neq (0)$ von R. □

3.2.2. Korollar. *Seien $\mathfrak{A}_i \subseteq S_i$ Ideale von S_i, so ist*
$\mathfrak{a} := \mathfrak{A}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{A}_n$ *ein Ideal von R und jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ von R ist von dieser Form mit*
$\mathfrak{A}_i := \mathfrak{P}_i^{\nu_i(\mathfrak{a})}$ *für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Daß $\mathfrak{A}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{A}_n$ ein Ideal von R ist, ist trivial.
Sei nun $(0) \neq \mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von R und sei $m_i := \nu_i(\mathfrak{a})$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist nach Satz 3.2.1. (2)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \{x \mid x \in K, \nu_i(x) \geq m_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\} \\ &= \textstyle\bigcap_{i=1}^{n} \{x \mid x \in K, \nu_i(x) \geq m_i\} \\ &= \textstyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i^{m_i}\,.\end{aligned}$$

□

3.2.3. Korollar. *Sei $(0) \neq \mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von R. Dann ist*

$$\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^{\nu_i(\mathfrak{a})} \qquad \textit{mit } \mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \cap R\,.$$

Beweis. Im Beweis von Satz 3.2.1 wurde gezeigt, daß $\mathfrak{a} = R{\cdot}a$ ist mit $\nu_i(a) = \nu_i(\mathfrak{a})$ für alle $i = 1, \ldots, n$ wobei $a = \varepsilon{\cdot}\pi_1^{\nu_1(a)} \cdots \pi_n^{\nu_n(a)}$ ist (Beweis von Satz 3.2.1. (3)) mit $\mathfrak{p}_i = R{\cdot}\pi_i$. Insgesamt ergibt sich: $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^{\nu_i(\mathfrak{a})}$ □

3.2.4. Korollar. *Die $\mathfrak{P}_i \cap R$ sind die maximalen Ideale von R.*

Beweis. In einem Hauptidealring (der kein Körper ist) sind die maximalen Ideale gerade die Primideale $\neq (0)$. Nach Satz 3.2.1. (3) sind das gerade die $\mathfrak{P}_i \cap R$. □

3.3. **Krull-Ringe.**

3.3.1. Satz. *Sei R ein Integritätsbereich, $K := \mathrm{Quot}(R)$. Es sind äquivalent:*

(1) (a) *Es existiert eine Menge $\mathfrak{S}$ von diskreten Bewertungsringen S von K mit $R = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$.*
   (b) *Jedes $0 \neq x \in R$ ist in höchstens endlich vielen der S eine Nichteinheit.*

(2) *R ist ein Krull-Ring, d.h.*
   (a) *R ist vollständig ganz abgeschlossen. (Definition 1.3.4.)*
   (b) *(T^*) gilt in R. (Definition 1.4.7.)*

(3) (a) *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 von R ist $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.*
   (b) *Jedes Hauptideal $\neq (0), R$ aus R ist Schnitt endlich vieler Primärideale zu Primidealen der Höhe 1.*

(4) (a) *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 von R ist $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.*
   (b) *Für jedes Hauptideal $(x) \neq (0), R$ aus R gibt es nur endlich viele für (x) in R wesentliche Primideale.*
   (c) $R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1}} R_\mathfrak{p}$

Beweis. (2)⇒(3):
(3a): Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1 von R. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein unzerlegbares Sternideal nach Korollar 1.5.17. und somit $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring nach Satz 1.8.1.
(3b): Sei $0 \neq x \in R$. Dann ist $R{\cdot}x$ ein Sternideal. Nach Zusammenfassung 1.9.9. besitzt dann $R{\cdot}x$ eine Normaldarstellung $R{\cdot}x = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, wobei $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{[\nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})]}$ primär zu einem unzerlegbaren Sternideal $\mathfrak{p}_i$ ist, das nach Korollar 1.5.17. ein Primideal der Höhe 1 von R ist. □
(3)⇒(4):

(4a) ist identisch mit (3a).
(4b): Nach (3b) besitzt jedes Hauptideal $(x) \neq (0)$ eine Primärdarstellung. Die für (x) in R wesentlichen Primideale sind die endlich vielen, die in einer zugehörigen Normaldarstellung auftreten.
(4c): $R \subseteq \bigcap R_{\mathfrak{p}}$ ist klar.
Umgekehrt: Sei $x \in \bigcap R_{\mathfrak{p}}$. $\overset{!}{\Rightarrow} x \in R$.
Beweis: $\mathrm{Quot}(R) = K \Rightarrow$ Es existieren $y, z \in R$ mit $x = \frac{y}{z}$. Falls z eine Einheit von R ist, folgt $x \in R$ und wir sind fertig. Sei also nun z eine Nichteinheit von R.
Für alle $\mathfrak{p}$ hat man $\frac{y}{z} \in R_{\mathfrak{p}}$, also $y = x \cdot z \in \left(\bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}} \cdot z\right) \cap R$.
Nach (3b) hat $R \cdot z$ eine Normaldarstellung $R \cdot z = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, wobei die $\mathfrak{q}_i$ primär sind zu Primidealen $\mathfrak{p}_i$ der Höhe 1 von R. Insbesondere ist dann kein $\mathfrak{p}_i$ in einem $\mathfrak{p}_k$ enthalten für $i \neq k$, weil alle dieselbe Höhe haben. Daher gilt:
$\mathfrak{q}_i = R_{\mathfrak{p}_i} \cdot z \cap R$. Also ist $y \in \left(\bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}} \cdot z\right) \cap R \subseteq R_{\mathfrak{p}_i} \cdot z \cap R = \mathfrak{q}_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$, also $y \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r = R \cdot z$ und daher $x = \frac{y}{z} \in R$. □
(4)⇒(1):
(1a): $\mathfrak{S} := \{R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R),\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$ ist nach (4a) eine Menge von diskreten Bewertungsringen von K. Nach (4c) ist ferner $R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1}} R_{\mathfrak{p}}$.
(1b): Sei $0 \neq x \in R$ beliebig und x Nichteinheit in einem $S = R_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $x \in R_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}$. Da $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ ist, ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $R \cdot x$ und daher wesentlich für $R \cdot x$ in R. Nach (4b) gibt es davon nur endlich viele, also ist x in höchstens endlich vielen der $S \in \mathfrak{S}$ eine Nichteinheit. □
(1)⇒(2):
(2a): Jedes $S \in \mathfrak{S}$ ist als ZPE-Ring vollständig ganz abgeschlossen, also ist auch $R = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$ vollständig ganz abgeschlossen als Schnitt vollständig ganz abgeschlossener Ringe. (Folgt sofort aus der Definition 1.3.4 .)
(2b): Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Sternideal aus K. Wir zeigen zunächst:
$\mathfrak{a}^{-1} = \{x \mid x \in K,\ \nu(x) \geq -\nu(\mathfrak{a}) \text{ für alle } S \in \mathfrak{S}\}$. Dabei bezeichnet ν eine zu dem Bewertungsring S gehörige Exponentenbewertung.
Beweis: $x \in \mathfrak{a}^{-1} \Leftrightarrow x \cdot \mathfrak{a} \subseteq R \Leftrightarrow \nu(x \cdot \mathfrak{a}) \geq 0$ für alle $\nu \Leftrightarrow \nu(x) \geq -\nu(\mathfrak{a})$ für alle ν.
Seien nun $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Sternideale mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Dann ist $\nu(\mathfrak{a}) \geq \nu(\mathfrak{b})$ für alle ν.
Wäre $\nu(\mathfrak{a}) = \nu(\mathfrak{b})$ für *alle* ν, so wäre
$\mathfrak{a}^{-1} = \{x \mid x \in K,\ \nu(x) \geq -\nu(\mathfrak{a}) \text{ für alle } \nu\} = \{x \mid x \in K,\ \nu(x) \geq -\nu(\mathfrak{b}) \text{ für alle } \nu\}$
$= \mathfrak{b}^{-1}$. Also ist für mindestens ein ν auch $\nu(\mathfrak{a}) > \nu(\mathfrak{b})$.
Sei nun $(0) \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_i \cdots \subset R$ ein echt aufsteigenden Kette von Sternidealen aus R.
Wähle ein $0 \neq a \in \mathfrak{a}_1$. Nach (1b) ist $\nu(a) \neq 0$ nur für endlich viele ν, etwa für $\nu_1, \ldots, \nu_r$. Wegen $a \in \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_i \subset R$ ist dann $0 \leq \nu(\mathfrak{a}_i) \leq \nu(a) = 0$, also $\nu(\mathfrak{a}_i) = 0$ für alle $\nu \notin \{\nu_1, \ldots, \nu_r\}$. Für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ ist aber nach dem oben gezeigten $\nu_j(a) \geq \nu_j(\mathfrak{a}_i) > \nu_j(\mathfrak{a}_{i+1}) \geq 0$. Es gibt aber nur *endlich viele* r-Tupel $(n_1, \ldots, n_r)$ mit $0 \leq n_i \leq \nu_i(a)$, also enthält die obige aufsteigende Kette nur *endlich viele* Sternideale, d.h. es gilt (T^*). □

3.3.2. Satz. *Sei R ein Krull-Ring. Es gilt*

(1) $\widetilde{\mathfrak{S}} := \{R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R), \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$ *erfüllt stets die Bedingung (1) von Satz 3.3.1., und $\widetilde{\mathfrak{S}}$ ist das* kleinste *solche System; denn:*
(2) *Für jedes System $\mathfrak{S}$ aus (1) von Satz 3.3.1 gilt $\mathfrak{S} \supseteq \widetilde{\mathfrak{S}}$.*

Für den Beweis von (2) brauchen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

3.3.3. Hilfssatz. *Sei R ein Krull-Ring, T eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $0 \notin T$ und $\mathfrak{S}$ wie in Satz 3.3.1., (1).*
Ferner sei
$\mathfrak{S}_T := \{S \mid S \in \mathfrak{S},$ *jedes Element von* T *ist Einheit in* $S\}$.
Dann gilt:

$$R_T = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}_T} S\,.$$

Beweis. $R_T \subseteq \bigcap\limits_{S \in \mathfrak{S}_T} S$ ist klar.
Umgekehrt: Seien $x, y \in R$ mit $\frac{x}{y} \in \bigcap\limits_{S \in \mathfrak{S}_T} S$ und seien $S_1, \ldots, S_r$ die *endlich vielen* der $S \in \mathfrak{S}$ so, daß y eine Nichteinheit in diesen ist.
O.B.d.A seien $S_1, \ldots, S_s \in \mathfrak{S}_T$ und $S_{s+1}, \ldots, S_r \notin \mathfrak{S}_T$. Nach Definition von $\mathfrak{S}_T$ gibt es dann für alle $i = s+1, \ldots, r$ ein $t_i \in T$ so, daß t_i Nichteinheit in S_i ist. Sei $t := (t_{s+1} \ldots t_r)^m$. Dann ist $t \in T$, und für genügend großes m ist
$\frac{t \cdot x}{y} \in S_i$ für $i = s+1, \ldots, r$.
Außerdem ist nach Annahme
$\frac{x}{y} \in S$ für alle $S \in \mathfrak{S}_T$, also auch
$\frac{t \cdot x}{y} \in S$ für alle $S \in \mathfrak{S}_T$.
Dann gilt aber sogar
$\frac{t \cdot x}{y} \in S$ für *alle* $S \in \mathfrak{S}$;
denn für die restlichen $S \in \mathfrak{S} \setminus (\mathfrak{S}_T \cup \{S_{s+1}, \ldots S_r\})$ war y schon Einheit.
Man hat also
$\frac{t \cdot x}{y} \in \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S = R$ und somit
$\frac{x}{y} \in \frac{1}{t} \cdot R \subseteq R_T$. □

Nun folgt sehr leicht die Aussage von Satz 3.3.2.:

Beweis von Satz 3.3.2. (1) wurde beim Beweis von Satz 3.3.1. (4)⇒(1), (1a) gezeigt.
(2): Sei $S \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ beliebig. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1, also ein unzerlegbares Sternideal, von R mit $S = R_\mathfrak{p}$. Sei $T := R \setminus \mathfrak{p}$. Nach dem Hilfssatz 3.3.3. ist dann mit den dortigen Bezeichnungen $R_\mathfrak{p} = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}_T} S$, also insbesondere $R_\mathfrak{p} \subseteq S$ für alle $S \in \mathfrak{S}_T$. Nun ist aber $R_\mathfrak{p}$ ein (diskreter) Bewertungsring, also ein maximaler Unterring von K nach Satz 2.3.17. und daher $R_\mathfrak{p} = S$ für alle $S \in \mathfrak{S}_T$. Folglich ist $R_\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_T \subseteq \mathfrak{S}$, also $\widetilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{S}$. □

3.3.4. Korollar. *Sei R ein Krull-Ring, T eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, so daß R_T ein Bewertungsring $\neq K$ ist. Dann ist $R_T = R_\mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 von R.*

Beweis. Nach Satz 3.3.1 (4) ist $R = \bigcap\limits_{\substack{S = R_\mathfrak{p} \\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1}} S$. Nach Hilfssatz 3.3.3. ist dann $R_T = \bigcap_{R_\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}'} R_\mathfrak{p} \subseteq R_\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}'$, also $R_T = R_\mathfrak{p}$, weil R_T als Bewertungsring ein maximaler Unterring von K ist (Satz 2.3.17.). □

3.3.5. *Anmerkung.* Sei R ein Krull-Ring, $(0) \neq \mathfrak{a}$ ein R-Ideal von K. Es gilt:
(1) $\nu_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{a}^{-1}\right) = -\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ für alle Primideale der Höhe 1 von R.
(2) $\mathfrak{a}^{-1} = \{x \mid x \in K, \nu_\mathfrak{p}(x) \geq -\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ für alle Primideale der Höhe 1 von $R\}$

(3) $\mathfrak{a}^* = \{x \mid x \in K, \nu_\mathfrak{p}(x) \geq \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \text{ für alle Primideale der Höhe 1 von } R\}$

Beweis. (1) wurde in Satz 1.9.2. gezeigt.
(2): Beim Beweis von Satz 3.3.1. (1)⇒(2) wurde gezeigt:
$\mathfrak{a}^{-1} = \{x \mid x \in K, \nu(x) \geq -\nu(\mathfrak{a}) \text{ für alle } S \in \mathfrak{S}\}$, und nach Satz 3.3.2. kann man $\mathfrak{S} = \{R_\mathfrak{p} \mid \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$ nehmen.
(3): Folgt durch Anwendung von (2) auf $\mathfrak{a}^{-1}$. □

3.3.6. Satz. *Sei K ein Körper, $\mathfrak{S}$ eine Menge von diskreten Bewertungsringen S von K, so daß gilt:*
Jedes Element $\neq 0$ von K ist für höchstens endlich viele $S \in \mathfrak{S}$ eine Nichteinheit.
Ferner sei
$R := \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$
und es möge die folgende Approximationsbedingung (A_1) gelten:

(A_1) *Seien $S_1, \ldots S_n \in \mathfrak{S}$ paarweise verschiedene Bewertungsringe, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ die zugehörigen normierten Exponentenbewertungen. Ferner seien $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $z \in R$ mit $\nu_i(z) \geq \mu_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.*

Dann ist R ein Krull-Ring und $\mathrm{Quot}(R) = K$.

Beweis. Wegen Satz 3.3.1. bleibt nur zu zeigen $\mathrm{Quot}(R) = K$; denn dann folgt aus Satz 3.3.1. (1)⇒(2), daß R ein Krull-Ring ist.
$\mathrm{Quot}(R) \subseteq K$ ist klar.
Umgekehrt: Sei $0 \neq x \in K \setminus R$ und sei $S_1, \ldots, S_n$ die endlich vielen $S \in \mathfrak{S}$ mit $\nu_i(x) < 0$. Nach (A_1) existiert dann ein $z \in R$ mit $\nu_i(z) \geq -\nu_i(x)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $\nu(x \cdot z) \geq 0$ für *alle* $S \in \mathfrak{S}$, also $x \cdot z \in R$ und somit $x \in \mathrm{Quot}(R)$. □

Ohne die Voraussetzung (A_1) ist die Aussage von Satz 3.3.6 falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

3.3.7. *Beispiel.* Sei $K = k(X)$ ein rationaler Funktionenkörper und
$\mathfrak{S} = \left\{k[X]_{(f)} \mid f \text{ irreduzibel}\right\} \cup \left\{k\left[\frac{1}{X}\right]_{\left(\frac{1}{X}\right)}\right\}$.
(Die zu $k\left[\frac{1}{X}\right]_{\left(\frac{1}{X}\right)}$ gehörende Exponentenbewertung ist $f \mapsto -\mathrm{grad}(f)$ für alle rationalen Funktionen $f \in K$.)
Dann gilt:
Jedes Element von K ist für höchstens endlich viele $S \in \mathfrak{S}$ eine Nichteinheit, aber $R := \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S = k$, also $\mathrm{Quot}(R) = k \neq K$.

Ohne die Eigenschaft (1b) von Satz 3.3.1. ist die Aussage (2) von Satz 3.3.2. falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

3.3.8. *Beispiel.* Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $R := k[X, Y]$ der Polynomring in X und Y über k.
Alle Lokalisierungen nach maximalen Idealen ergeben reguläre zweidimensionale lokale Ringe. Jedem solchen läßt sich eine diskrete Bewertung von $K = k(x, y)$ durch den Anfangsgrad zuordnen. Sei $\mathfrak{S}$ die Menge der zugehörigen Bewertungsringe. Dann ist $R = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$, aber für *kein* Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 von R gehört $R_\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{S}$.

Dafür ist aber auch jede Nichteinheit von R eine Nichteinheit für *unendlich viele* der $S \in \mathfrak{S}$.

Beweis. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist für jedes Radikalideal, also erst recht für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R
$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p} \\ \mathfrak{m} \text{ maximal}}} \mathfrak{m}.$
Sei $S^{(\mathfrak{m})}$ der zum maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ gehörige Bewertungsring von $K := \mathrm{Quot}(R) = k(x,y)$ und $\nu_{\mathfrak{m}}$ die zugehörige normierte Exponentenbewertung.
Dann ist $S^{(\mathfrak{m})} \supseteq R$, also $R \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}} S^{(\mathfrak{m})}$.

Umgekehrt: Sei $\frac{f}{g} \in K \setminus R$ mit $f, g \in R$. Dann gibt es ein Primelement $p \in R$ mit $p \mid g$ aber $p \nmid f$. Dann ist also $g \in p \cdot R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}' \supset (p) \\ \mathfrak{m}' \text{ maximal}}} \mathfrak{m}'$. Aber $f \notin p \cdot R$. Also gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}'$ mit $\mathfrak{m}' \supset (p)$ aber $f \notin \mathfrak{m}'$. Daher ist $\nu_{\mathfrak{m}'}(g) \geq 1$ und $\nu_{\mathfrak{m}'}(f) = 0$ und folglich $\frac{f}{g} \notin S^{(\mathfrak{m}')}$ also $R = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ max.}} S^{(\mathfrak{m})}$.
Trotzdem gehört kein einziges $R_{\mathfrak{p}}$ mit $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ zu $\mathfrak{S}$, weil alle $\mathfrak{m}$ die Höhe 2 haben. □

3.4. **ZPE-Ringe.**

3.4.1. Satz. *Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Es sind äquivalent:*

(1) (a) *Es existiert eine Menge $\mathfrak{S}$ von diskreten Bewertungsringen S zu Exponentenbewertungen ν von K mit $R = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$.*
(b) *Jedes $0 \neq x \in K$ ist für höchstens endlich viele $S \in \mathfrak{S}$ eine Nichteinheit.*
(c) *Es möge die folgende Approximationsbedingung (A_2) gelten:*
Seien $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ paarweise verschieden, ν_i bezeichne die zu S_i gehörige normierte Bewertung.
Ferner seien
(A_2) *$\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben.*
Dann gibt es ein $z \in R$ mit
$\nu_i(z) = \mu_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und
$\nu(z) = 0$ für alle $S \in \mathfrak{S} \setminus \{S_1, \ldots, S_n\}$.
(2) *R ist ein ZPE-Ring.*
(3) *R ist ein Krull-Ring und jedes unzerlegbare Sternideal ist ein Hauptideal.*
(4) *R ist ein Krull-Ring und jedes Sternideal ist ein Hauptideal.*

Beweis. Zeige zunächst (3)⇔(4):
(4)⇒(3) ist trivial. (3)⇒(4): Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Sternideal $\neq (0)$ von K. Dann besitzt $\mathfrak{a}$ nach Hauptsatz 1.5.5. (1) eine Zerlegung in unzerlegbare Sternideale $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{[\nu_1]} \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r^{[\nu_r]}$. Nach (3) sind alle $\mathfrak{p}_i = (p_i)$ Hauptideale, also ist auch $\mathfrak{a} = p_1^{\nu_1} \ldots p_r^{\nu_r} \cdot R$ ein Hauptideal. □
Nun zeigen wir (1) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (1).
(1)⇒(3): Nach Satz 3.3.1. (1)⇒(2) ist zunächst R ein Krull-Ring, und nach Satz 3.3.2. (2) gilt für alle unzerlegbaren Sternideale (= Primideale der Höhe 1) $\mathfrak{p}$ von R, daß $R_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{S}$.
Nach (1c) gibt es zu vorgegebenem $\mathfrak{p}$ ein $p \in R$ mit $\nu_{\mathfrak{p}}(p) = 1$ und $\nu(p) = 0$ für alle

$\nu \neq \nu_{\mathfrak{p}}$. Es folgt $\mathfrak{p} = R{\cdot}p$ Hauptideal nach Satz 1.5.15. (3). □

(3)⇒(2): Sei $0 \neq x \in R$ beliebig. Da R ein Krull-Ring ist, gilt $R{\cdot}x = \mathfrak{p}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_r$ mit unzerlegbaren Sternidealen $\mathfrak{p}_i$. Nach (3) sind alle $\mathfrak{p}_i = R{\cdot}p_i$ mit Primelementen p_i, also Hauptideale. Daher ist $R{\cdot}x = R{\cdot}p_1 \dots p_r$ und damit ist $x \sim p_1 \dots p_r$ eine Primelementzerlegung von x. □

(2)⇒(1): Weil R ein ZPE-Ring ist, hat man für jede Klasse assoziierter Primelemente p eine (normierte) diskrete Bewertung ν_p von K, definiert durch $\nu_p(0) := \infty$ und $\nu_p(x) := m$ für $K \ni x \neq 0$, wobei m die Potenz ist, mit der p in der Primelementzerlegung von x vorkommt. Offenbar ist $\bigcap_p S_{\nu_p} = R$, so daß
$\mathfrak{S} := \{S_{\nu_p} \mid p \text{ Primelement von } R\}$ die Bedingung von (1a) erfüllt.
Jedes $0 \neq x \in R$ enthält in seiner Primelementzerlegung nur endlich viele Primelemente, also ist x in höchstens endlich vielen S_ν eine Nichteinheit. ⇒ (1b).
Sind $S_{\nu_{p_1}}, \dots, S_{\nu_{p_n}}$ paarweise verschieden und $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben, so ist $z := p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n}$ ein Element wie es in (1c) verlangt wird. □

3.4.2. Satz. *Sei K ein Körper, $\mathfrak{S}$ eine Menge diskreter Bewertungsringe von K, so daß gilt:*
Jedes Element $\neq 0$ von K ist für höchstens endlich viele $S \in \mathfrak{S}$ eine Nichteinheit.
Ferner sei
$R := \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$,
und es möge die Approximationsbedingung (A_2) aus Satz 3.4.1. (1c) gelten.
Dann ist R ein ZPE-Ring und $K = \mathrm{Quot}(R)$.

Beweis. Wegen Satz 3.4.1. bleibt nur zu zeigen $\mathrm{Quot}(R) = K$; denn dann folgt aus Satz 3.4.1. (1)⇒(2), daß R ein ZPE-Ring ist.
$\mathrm{Quot}(R) = K$ folgt aber schon aus Satz 3.3.6., weil die dort vorausgesetzte Approximationsbedingung (A_1) aus (A_2) folgt. □

3.5. **Dedekind-Ringe.**

3.5.1. Satz. *Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Es sind äquivalent:*

(1) (a) *Es existiert eine Menge $\mathfrak{S}$ von diskreten Bewertungsringen zu Exponentenbewertungen ν von K mit $R = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$.*

(b) *Jedes $0 \neq x \in K$ ist für höchstens endlich viele $S \in \mathfrak{S}$ eine Nichteinheit.*

(c) *Es möge die folgende Approximationsbedingung (A_3) gelten:*
(Analog zum scharfen Approximationssatz für Dedekindringe Satz 1.6.6.):
Seien $S_1, \dots, S_n \in \mathfrak{S}$ paarweise verschieden, ν_i bezeichne die zu S_i gehörige normierte Bewertung.
Ferner seien
(A_3) $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{N}_0$,
$a_1, \dots, a_n \in R$
vorgegeben. Dann gibt es ein $z \in R$ mit
$\nu_i(z - a_i) \geq \mu_i$ *für alle* $i = 1, \dots, n$.

(2) *R ist ein Dedekind-Ring.*

(3) *R ist ein Krull-Ring, und jedes ganze R-Ideal $\neq (0)$ ist ein Sternideal.*

(4) *R ist ein Krull-Ring, und es gilt:*
Ist I ein lokaler echter Unterring von K mit $R \subseteq I$, so existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 in R mit $I = R_{\mathfrak{p}}$.

(5) *R ist ein Krull-Ring, und jedes Primideal $\neq (0)$ von R ist ein maximales Ideal.*

Beweis. ((3)⇒(4)⇒(5)⇒(2)⇒(1)⇒(3))
(3)⇒(4): Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von I. Wegen $R \subseteq I \subset K$ und $\operatorname{Quot} R = K$ ist auch $\operatorname{Quot} I = K$ und daher $\mathfrak{m} \neq (0)$, weil sonst $I = K$ wäre. Sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{m} \cap R$. Dann ist $\mathfrak{p} \neq (0)$; denn sonst wären alle Elemente $\neq 0$ von R Einheiten in I und somit $I \supseteq \operatorname{Quot}(R) = K$. Daher ist $\mathfrak{p}$ nach (3) ein Sternideal, also nach Satz 1.5.16. ein Primideal der Höhe 1 und somit $R_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring. Andererseits ist wegen $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap R$ jedes Element von $R \setminus \mathfrak{p}$ eine Einheit in I und folglich $R_{\mathfrak{p}} \subseteq I$. Da $R_{\mathfrak{p}}$ als Bewertungsring nach Satz 2.3.17. ein maximaler Unterring von K ist, folgt $R_{\mathfrak{p}} = I$. □
(4)⇒(5): Sei $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal von R. Setze $I := R_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $R \subseteq I \subset K$ und folglich existiert nach (4) ein Primideal $\mathfrak{p}'$ der Höhe 1 mit $R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}'}$. Dann sind also alle Elemente von $\mathfrak{p}$ Nichteinheiten in $R_{\mathfrak{p}'}$ und daher $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. Da $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}') = 1$ ist und $\mathfrak{p} \neq (0)$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. Also haben *alle* Primideale $\neq (0)$ von R die Höhe 1 und daher sind sie alle maximal! □
(5)⇒(2): Da R als Krull-Ring vollständig ganz abgeschlossen ist, ist R nach Satz 1.3.7. (2) auch ganz abgeschlossen.
Nach Voraussetzung (5) ist ferner jedes Primideal $\neq (0)$ maximal.
Bleibt zu zeigen:
R ist noethersch: Sei $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein beliebiges ganzes Ideal von R. Wir zeigen, daß $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist:
Es ist $1 \in \mathfrak{a}^{-1}$, also $\mathfrak{a}^{-1} \neq (0)$ und daher ist nach Anmerkung 1.2.6. $\mathfrak{a}^*$ ein Sternideal. Da R ein Krull-Ring ist, gilt dann unter Beachtung der Eigenschaften 1.2.2:
$R = \mathfrak{a}^* \circ (\mathfrak{a}^*)^{-1} = \mathfrak{a}^* \circ \mathfrak{a}^{-1} = (\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{a}^{-1})^* = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})^*$.
Nach Voraussetzung (5) sind alle Primideale $\neq (0)$ von R maximal, also folgt aus $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})^* = R$ nach Korollar 1.5.19. auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = R$ und daher ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt nach Lemma 1.7.3..
(2)⇒(1): Als Dedekind-Ring ist R insbesondere ein Krull-Ring, also gelten (1a) und (1b) nach Satz 3.3.1. (2)⇒(1) mit $\mathfrak{S} := \{R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \neq (0) \text{ Primideal von } R\}$.
(1c) ist dann ein Spezialfall des scharfen Approximationssatzes 1.6.6. für Dedekind-Ringe (tatsächlich dazu äquivalent, wie durch die Reduktion am Anfang des Beweises von Satz 1.6.6 gezeigt wurde). □
(1)⇒(3): Nach Satz 3.3.1. (1)⇒(2) ist R ein Krull-Ring.
Bleibt zu zeigen, daß jedes Ideal $(0) \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ ein Sternideal ist.:
Nach Anmerkung 3.3.5. ist
$\mathfrak{a}^* = \{x \mid x \in K, \nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \text{ für alle Primideale } \mathfrak{p} \text{ der Höhe 1 von R}\}$.
Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^*$ muß man nur noch zeigen $\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{a}$, d.h.
Behauptung:
$0 \neq x \in R$ mit $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$ für alle unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}$ von R, d.h. $x \in \mathfrak{a}^*$, $\Rightarrow x \in \mathfrak{a}$.
Beweis: Sei $0 \neq a \in \mathfrak{a}$ beliebig fest gewählt. Da R ein Krull-Ring ist, hat $R \cdot a$ eine Zerlegung als Potenzprodukt unzerlegbarer Sternideale. Also gibt es endlich viele unzerlegbare Sternideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ mit $\nu_{\mathfrak{p}_i}(a) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$ und $\nu_{\mathfrak{p}}(a) = 0$ für $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.
Wegen $a \in \mathfrak{a} \subseteq R$ hat man $0 \leq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \leq \nu_{\mathfrak{p}}(a)$, also auch
$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.

Sei $m_i := \nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})$ und sei
$a_i \in \mathfrak{a}$ mit $\nu_{\mathfrak{p}_i}(a_i) = m_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$.
Nach Satz 3.3.2. (2) gilt $R_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{S}$ für alle unzerlegbaren Sternideale $\mathfrak{p}$ von R. Daher kann man die Approximationsbedingung (A_3) auf die $\nu_{\mathfrak{p}}$ anwenden:
Für jedes $i = 1, \ldots, r$ gibt es ein $y_i \in R$ mit

$$\begin{array}{llll}
\nu_{\mathfrak{p}_i}(y_i - a_i) & \geq 1 + m_i & > \nu_{\mathfrak{p}_i}(a_i) = m_i & \\
\nu_{\mathfrak{p}_k}(y_i) & \geq 1 + \nu_{\mathfrak{p}_k}(a_i) & > \nu_{\mathfrak{p}_k}(\mathfrak{a}) = m_k & \text{für } k \neq i \\
\nu_{\mathfrak{p}}(y_i) & & \geq \nu_{\mathfrak{p}}(a_i) & \text{für die endlich vielen } \mathfrak{p} \text{ mit} \\
 & & & \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} \text{ und } \nu_{\mathfrak{p}}(a_i) \neq 0
\end{array}$$

Nach der Minimumsregel Anmerkung 2.3.2. (4) hat man dann
$\nu_{\mathfrak{p}_i}(y_i) = \nu_{\mathfrak{p}_i}(a_i) = m_i$, also insbesondere
$\nu_{\mathfrak{p}}(y_i) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(a_i)$ für *alle* $\mathfrak{p}$.
Da $R = \bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}$ ist als Krull-Ring, folgt $\frac{y_i}{a_i} \in R$, d.h.
$y_i \in R \cdot a_i \subseteq \mathfrak{a}$.
Ferner ist
$\nu_{\mathfrak{p}_i}(y_j) > m_i$ für alle $j \neq i$ nach Konstruktion, also
$\nu_{\mathfrak{p}_i}(y_1 + \cdots + y_r) = \nu_{\mathfrak{p}_i}(y_i) = m_i$ nach der Minimumsregel Anmerkung 2.3.2. (4).
Setze nun
$y := y_1 + \cdots + y_r$.
Dann ist
$y \in \mathfrak{a}$, weil alle $y_i \in \mathfrak{a}$
und
$\nu_{\mathfrak{p}_i}(y) = m_i = \nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})$ für alle $i = 1, \ldots, r$.
(Vgl. Beweis von Satz 3.2.1. (2). Wäre nun noch $\nu_{\mathfrak{p}}(y) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$, so wäre $\mathfrak{a}^* = R \cdot y$ ein Hauptideal. Im allgemeinen ist das aber nicht der Fall! Aber jedenfalls läßt sich $\mathfrak{a}^*$ von 2 Elementen erzeugen:)
Behauptung: $x \in R \cdot y + R \cdot a$
(Daraus folgt dann, weil x ein beliebiges Element $\neq 0$ von $\mathfrak{a}^*$ war und $R \cdot y + R \cdot a \subseteq \mathfrak{a}$ ist: $\mathfrak{a}^* \subseteq R \cdot y + R \cdot a \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^*$ und daher $\mathfrak{a} = R \cdot y + R \cdot a = \mathfrak{a}^*$, wie behauptet)
Beweis: Seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ die endlich vielen unzerlegbaren Sternideale mit
$\nu_{\mathfrak{q}_i}(y) > 0$ und $\mathfrak{q}_i \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.
Wiederum nach der Approximationsbedingung (A_3) gibt es dann ein
$z \in R$ mit

$$\begin{array}{lll}
\nu_{\mathfrak{p}_i}(z - 1) & \geq \nu_{\mathfrak{p}_i}(a) & \text{für } i = 1, \ldots, r \quad (\Rightarrow \nu_{\mathfrak{p}_i}(z) = 0) \\
\nu_{\mathfrak{q}_k}(z) & \geq \nu_{\mathfrak{q}_k}(y) & \text{für } k = 1, \ldots, s
\end{array}$$

Es folgt:

$$\left.\begin{array}{lll}
\nu_{\mathfrak{p}_i}\left(\frac{x \cdot z}{y}\right) = \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}_i}(x) - \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}_i}(y)}_{=\nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})}}_{\geq 0, \text{ weil } x \in \mathfrak{a}^*} + \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}_i}(z)}_{=0} & \geq 0 & i = 1, \ldots, r \\
\nu_{\mathfrak{q}_k}\left(\frac{x \cdot z}{y}\right) = \nu_{\mathfrak{q}_k}(x) + \underbrace{\nu_{\mathfrak{q}_k}(z) - \nu_{\mathfrak{q}_k}(y)}_{\geq 0} & \geq 0 & k = 1, \ldots, s \\
\nu_{\mathfrak{p}}\left(\frac{x \cdot z}{y}\right) = \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}}(x \cdot z)}_{\geq 0} - \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}}(y)}_{=0} & \geq 0 & \text{für die restlichen } \mathfrak{p}
\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x \cdot z}{y} \in R, \text{ weil } R \text{ Krull-Ring}$$

Wir zeigen nun:
$\frac{x \cdot z}{y} \cdot y - x \overset{!}{\in} R \cdot a$ (Daraus folgt dann $x \in R \cdot y + R \cdot a$, weil $\frac{x \cdot z}{y} \in R$.)

Beweis:
Es ist $\frac{x\cdot z}{y}\cdot y - x = x\cdot(z-1)$ und

$$\left.\begin{array}{ll} \nu_{\mathfrak{p}_i}(x\cdot(z-1)) = \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}_i}(x)}_{\geq 0} + \underbrace{\nu_{\mathfrak{p}_i}(z-1)}_{\geq \nu_{\mathfrak{p}_i}(a)} \geq \nu_{\mathfrak{p}_i}(a) & \text{für } i = 1,\ldots,r \\ \nu_{\mathfrak{p}}(x\cdot(z-1)) \geq 0 = \nu_{\mathfrak{p}}(a) & \text{für } \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r\} \end{array}\right\} \Rightarrow \nu_{\mathfrak{p}}\left(\tfrac{x\cdot z}{y}\cdot y - x\right) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(a) \text{ für alle } \mathfrak{p}$$

Da R ein Krull-Ring ist, folgt daraus nach Satz 1.5.12. (1) $\frac{x\cdot z}{y}\cdot y - x \in R\cdot a$. □

3.5.2. Korollar. *Sei R ein Dedekind-Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R und $0 \neq a \in \mathfrak{a}$ beliebig vorgegeben.*
Dann existiert ein $y \in \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = (a, y)$.
Insbesondere läßt sich also jedes Ideal von R durch zwei Elemente erzeugen.

Beweis. Wurde im Beweis von Satz 3.5.1. (1)⇒(3) gezeigt. □

3.5.3. *Anmerkung.* Während sich „ZPE-Ring“ und „Dedekind-Ring“ unter den Krull-Ringen durch die Gültigkeit der Approximationsbedingungen (A_2) bzw. (A_3) auszeichnen, gibt es für die Eigenschaft „Hauptidealring“ wohl keine analoge einfache Approximationsbedingung. Man muß (A_2) und (A_3) fordern; denn es gilt:
Sei R ein Integritätsbereich, $R \neq \mathrm{Quot}(R)$.
R ist Hauptidealring $\Longleftrightarrow$ R ist ZPE-Ring und Dedekind-Ring.

Beweis. „⇒“: Wenn R Hauptidealring ist, ist R bekanntlich ZPE-Ring. Da alle Ideale Hauptideale sind, bilden ferner die Ideale $\neq (0)$ bezüglich der gewöhnlichen Idealmultiplikation eine Gruppe. Nach Satz 1.7.2. folgt daraus, daß R ein Dedekind-Ring ist.
„⇐“: Sei $(0) \neq \mathfrak{p}$ ein Primideal von R und $0 \neq a \in \mathfrak{p}$. Weil R ein ZPE-Ring ist, besitzt a eine Primelementzerlegung $a = p_1 \cdots p_n$, und, weil $\mathfrak{p}$ Primideal ist, gilt o.B.d.A. $p_1 \in \mathfrak{p}$, also auch $(p_1) \subseteq \mathfrak{p}$. Da p_1 ein Primelement ist, ist (p_1) ein Primideal $\neq (0)$ und daher ein maximales Ideal, weil R ein Dedekind-Ring ist. Also ist $\mathfrak{p} = (p_1)$ ein Hauptideal. Da in einem Dedekind-Ring jedes Ideal $\neq (0)$ Produkt von Primidealen ist, ist auch jedes Ideal ein Hauptideal und daher R Hauptidealring. □

3.5.4. Korollar. *Sei K ein Körper, $\mathfrak{S}$ eine Menge von diskreten Bewertungsringen von K, so daß gilt:*
Jedes Element $\neq 0$ von K ist für höchstens endlich viele $S \in \mathfrak{S}$ eine Nichteinheit.
Ferner sei $R := \bigcap_{S\in\mathfrak{S}} S$ und es gelte die Approximationsbedingung (A_3) aus Satz 3.5.1. (1c)).
Dann ist R ein Dedekind-Ring und $\mathrm{Quot}(R) = K$.

Beweis. Da die Approximationsbedingung (A_1) aus (A_3) folgt, gilt nach Satz 3.3.6., daß $\mathrm{Quot}(R) = K$ ist.
Aus Satz 3.5.1. (1)⇒(2) folgt dann, daß R ein Dedekind-Ring ist. □

3.5.5. Korollar. *Sei R ein Dedekind-Ring, $K = \mathrm{Quot}(R)$ und S ein nichttrivialer Bewertungsring von K mit $S \supseteq R$.*
Dann gibt es ein Primideal $(0) \neq \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $S = R_{\mathfrak{p}}$.

Beweis. Als Bewertungsring ist S insbesondere ein lokaler Ring. Die Behauptung folgt dann aus Satz 3.5.1. (4). □

3.5.6. Korollar. *Die einzigen nichttrivialen nichtarchimedischen Bewertungen des rationalen Zahlkörpers $\mathbb{Q}$ sind die ν_p für die Primzahlen p von $\mathbb{Z}$. (Sie sind alle diskret.)*

Beweis. Sei S ein beliebiger Bewertungsring $\neq \mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}$. Dann gilt $1 \in S$ und daher $\mathbb{Z} \subseteq S$. Nach Anmerkung 3.5.3. ist $\mathbb{Z}$ als Hauptidealring ein Dedekind-Ring mit den maximalen Primidealen (p) für alle Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$. Aus Korollar 3.5.5. folgt dann $S = \mathbb{Z}_p$ für ein passendes p. □

3.5.7. *Anmerkung.* Die archimedischen Bewertungen von $\mathbb{Q}$ sind alle äquivalent zum gewöhnlichen absoluten Betrag $|\ |$. (Siehe Satz 2.2.5.)

3.5.8. Korollar. *Die einzigen nichttrivialen Bewertungen des „rationalen Funktionenkörpers“ $k(X)$ in einer Unbestimmten X über einem beliebigen Körper k, bei denen k trivial bewertet ist, sind:*

(1) *Die $\nu_{p(X)}$ für die Primpolynome $p(X)$ von $k[X]$ mit den Bewertungsringen $k[X]_{(p(X))}$.*
(2) *$\nu_{\frac{1}{X}}$, die zum Primelement $\frac{1}{X}$ von $k\left[\frac{1}{X}\right]$ gehörige Bewertung mit dem Bewertungsring $k\left[\frac{1}{X}\right]_{(\frac{1}{X})}$.*

(Sie sind alle diskret.)

Beweis. Da k trivial, also nichtarchimedisch, bewertet ist, ist jede dieser Bewertungen nichtarchimedisch (Anmerkung 2.1.9). Sei S der zugehörige Bewertungsring. Entweder ist $X \in S$ und daher $k[X] \subseteq S$ oder es ist $\frac{1}{X} \in S$. Dann ist $k\left[\frac{1}{X}\right] \subseteq S$ und $\frac{1}{X}$ ist eine Nichteinheit von $k\left[\frac{1}{X}\right]$.
Im ersten Fall ist $\nu = \nu_p$ für ein Primpolynom p von $k[X]$ wie beim Beweis von Korollar 3.5.6.
Im zweiten Fall ist dann nach denselben Überlegungen $S = k\left[\frac{1}{X}\right]_{(\frac{1}{X})}$. □

4. Komplettierung eines Körpers

4.1. **Cauchyfolgen und Limites.**

Es sei im folgenden K ein Körper, φ eine Betragsbewertung von K.

4.1.1. Definition. Eine Folge (a_i) mit $a_i \in K, i \in \mathbb{N}_0$ heißt
„Cauchyfolge bzgl. φ“ $\iff$ Für jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ so daß gilt $\varphi(a_n - a_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

Auf Grund dieser Definition ist unmittelbar klar:

4.1.2. *Anmerkung.* Die Eigenschaft, Cauchyfolge bzgl. φ zu sein, hängt ebenso wie die Eigenschaft, konvergent zu sein (Definition 3.1.2), nur von der Äquivalenzklasse von φ ab.

4.1.3. *Anmerkung.*

(1) (a_i) konvergent bzgl. $\varphi \Longrightarrow (a_i)$ Cauchyfolge bzgl. φ.
(2) (a_i) Cauchyfolge bzgl $\varphi \Longrightarrow (\varphi(a_i))$ Cauchyfolge bzgl. $|\ |$ in $\mathbb{R}$.
(a_i) Nullfolge bzgl $\varphi \Longrightarrow (\varphi(a_i))$ Nullfolge bzgl. $|\ |$ in $\mathbb{R}$.
(3) Sei φ nichtarchimedisch. Dann gilt:
(a_i) Cauchyfolge bzgl. $\varphi \iff$ Für jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ so daß gilt $\varphi(a_n - a_{n+1}) < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

Beweis. (1): Folgt wie üblich aus der Dreiecksungleichung; denn für den Limes a von (a_i) bzgl. φ gilt
$\varphi(a_n - a_m) \leq \varphi(a - a_n) + \varphi(a - a_m) < \varepsilon$ für alle großen n, m.
(2): Nach Anmerkung 2.1.4. hat man $|\varphi(a_n) - \varphi(a_m)| \leq \varphi(a_n - a_m) < \varepsilon$ für alle großen m, n.
Ferner ist $|\varphi(a_i)| = \varphi(a_i)$, da nach Definition $\varphi(a_i) \geq 0$ ist, sodaß die Aussage über die Nullfolgen trivial ist.
(3): Sei o.B.d.A $n < m$. Es ist nach der Maximumregel Satz 2.1.6.
$\varphi(a_n - a_m) = \varphi((a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{m-1} - a_m)) \leq$
$\max\{\varphi(a_n - a_{n+1}), \varphi(a_{n+1} - a_{n+2}), \ldots, \varphi(a_{m-1} - a_m)\} < \varepsilon$ für alle großen n. □

Wie schon im Fall $K = \mathbb{Q}$ mit $\varphi = |\ |$ bekannt ist, ist i.a. eine Cauchyfolge nicht notwendig konvergent. Man definiert

4.1.4. Definition. Ein Körper K heißt „komplett bzgl. (oder für) φ“ oder komplett bewertet durch φ genau dann, wenn jede Cauchyfolge bzgl φ von Elementen aus K konvergent bzgl. φ ist.

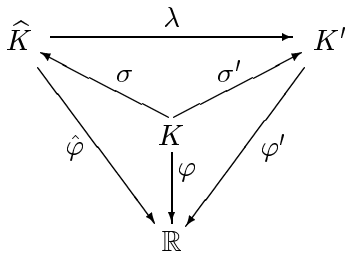
4.2. **Konstruktion der Komplettierung.**

Zu jedem bewerteten Körper gibt es bis auf „Werteisomorphie“ genau einen kleinsten komplett bewerteten Oberkörper in folgendem Sinn:

4.2.1. Satz. *Sei K ein Körper und φ eine Betragsbewertung von K. Dann existiert ein Körper $\widehat{K}$ und eine Betragsbewertung $\hat{\varphi}$ von $\widehat{K}$, so daß gilt:*

(1) *$\widehat{K}$ ist komplett für $\hat{\varphi}$.*
(2) *Es existiert ein injektiver Ringhomomorphismus $\sigma : K \to \widehat{K}$ mit $\varphi = \hat{\varphi} \circ \sigma$.*
(3) *$\sigma(K)$ ist* dicht *in $\widehat{K}$, d.h. jedes Element von $\widehat{K}$ ist Limes bzgl. $\hat{\varphi}$ einer Folge $\sigma(a_i)$ mit $a_i \in K$.*

Ferner gilt:
Ist K' mit einer Bewertung φ' ein Körper und ein injektiver Homomorphismus
$\sigma' : K \to K'$, für den (1)-(3) sinngemäß gelten, so existiert genau ein *Isomorphismus* $\lambda : \widehat{K} \to K'$ *mit* $\lambda \circ \sigma = \sigma'$ *und* $\varphi' \circ \lambda = \hat{\varphi}$, *d.h.*
$\widehat{K}$ ist bis auf „Werteisomorphie“ eindeutig bestimmt.



4.2.2. Definition. $\left(\widehat{K}, \hat{\varphi}, \sigma\right)$ wie in Satz 4.2.1. heißt eine „Komplettierung“ von K für φ.
Man identifiziert meistens K mit $\sigma(K)$. Dann ist also $K \subseteq \widehat{K}$ ein Unterkörper und $\hat{\varphi} \mid K = \varphi$.

Beweis von Satz 4.2.1. (Vgl. auch Satz 12.3.1 für den Fall gefilterter Moduln.) Sei
$\mathcal{R}$ der Ring aller Cauchyfolgen aus K
$\mathfrak{N}$ das Ideal aller Nullfolgen in $\mathcal{R}$.
Man hat eine Einbettung von K in $\mathcal{R}$ durch einen Ringhomomorphismus
$K \xrightarrow{\sigma^*} \mathcal{R}$ definiert durch
$x \mapsto (x, x, \dots)$ konstante Folge.
Offenbar ist $\mathfrak{N} \cap \sigma^*(K) = (0)$.
Ferner ist $\mathfrak{N}$ ein *maximales* Ideal von $\mathcal{R}$; denn:
Ist (a_i) eine Cauchyfolge, die keine Nullfolge ist, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $\delta \in \mathbb{R}$, so daß für *alle* $i > N$ gilt $\varphi(a_i) \geq \delta > 0$. Ersetzt man die ersten N Glieder der Folge durch 1, so erhält man wieder eine Cauchyfolge, die nun invertierbar ist, weil alle Glieder $\neq 0$ sind, und die sich von der ursprünglichen Cauchyfolge durch eine Nullfolge unterscheidet, weil ab dem Index $N+1$ alle Glieder der Differenzfolge $= 0$ sind. Also ist
$\widehat{K} := \mathcal{R}/\mathfrak{N}$ ein Körper. Sei
$\sigma : K \to \widehat{K}$ die durch σ^* induzierte Einbettung von K in $\widehat{K}$. (σ ist injektiv wegen $\mathfrak{N} \cap \sigma^*(K) = (0)$.)
Nach Anmerkung 4.1.3. (2) ist $(\varphi(a_i))$ Cauchyfolge, also konvergent, in $\mathbb{R}$ für alle $(a_i) \in \mathcal{R}$. Sind ferner $(a_i), (b_i) \in \mathcal{R}$, so daß $(a_i) - (b_i) \in \mathfrak{N}$ ist, so ist nach Anmerkung 4.1.3. (2) $(\varphi(a_i) - \varphi(b_i))$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$. Daher ist es sinnvoll zu definieren:
$\hat{\varphi}\left(\overline{(a_i)}\right) := \lim\limits_{i\to\infty} \varphi(a_i)$, wenn $\overline{(a_i)}$ die Restklasse der Cauchyfolge (a_i) mod $\mathfrak{N}$ bezeichnet.
Man rechnet sofort nach, daß $\hat{\varphi}$ eine Bewertung von $\widehat{K}$ ist. Ferner gilt offenbar $\hat{\varphi}(\sigma(x)) = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in K$, also $\hat{\varphi} \circ \sigma = \varphi$.

Wir zeigen nun zuerst, daß $\boldsymbol{\sigma(K)}$ **dicht in** $\widehat{\boldsymbol{K}}$ ist:
Sei $\overline{(a_i)} \in \widehat{K}$ beliebig. $\overset{!}{\Rightarrow} \overline{(a_i)} = \lim\limits_{k\to\infty}^{\hat{\varphi}} \sigma(a_k)$.
(Da (a_i) eine beliebige Cauchyfolge bzgl. φ aus K ist, zeigt das, daß jede Cauchyfolge bzgl. φ aus K zumindest in $\widehat{K}$ einen Limes besitzt.)
Beweis: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat man:
$\hat{\varphi}\left(\overline{(a_i)} - \sigma(a_k)\right) = \hat{\varphi}\left(\overline{(a_i - a_k)_i}\right) = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi(a_i - a_k)$.
Da (a_i) eine Cauchyfolge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(a_i - a_k) < \varepsilon$ für alle $i, k > N(\varepsilon)$. Es folgt

$\lim\limits_{i\to\infty} \varphi(a_i - a_k) < \varepsilon$ für alle (fest gewählten) $k > N(\varepsilon)$. Also ist

$\hat{\varphi}\left(\overline{(a_i)} - \sigma(a_k)\right) < \varepsilon$ für alle $k > N(\varepsilon)$. $\Rightarrow \overline{(a_i)} = \overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{k\to\infty}} \sigma(a_k)$. □

Bleibt für den ersten Teil des Satzes noch zu zeigen, daß $\widehat{K}$ **komplett** ist:
Man muß also nun zeigen, daß nicht nur jede Cauchyfolge aus K sondern auch jede Cauchyfolge aus $\widehat{K}$ in $\widehat{K}$ einen Limes besitzt.
Sei $(\hat{a}_i)$ eine Cauchyfolge bzgl. $\hat{\varphi}$ von Elementen $\hat{a}_i \in \widehat{K}$.
Da $\sigma(K)$ dicht in $\widehat{K}$ ist, gibt es zu jedem $\hat{a}_i$ ein $\alpha_i \in K$ mit $\hat{\varphi}(\hat{a}_i - \sigma(\alpha_i)) < \frac{1}{i}$.
(α_i) ist eine Cauchyfolge bzgl. φ in K:
$\varphi(\alpha_i - \alpha_k) = \hat{\varphi}(\sigma(\alpha_i - \alpha_k)) =$
$\hat{\varphi}((\sigma(\alpha_i) - \hat{a}_i) + (\hat{a}_k - \sigma(\alpha_k)) + (\hat{a}_i - \hat{a}_k)) \leq$
$\hat{\varphi}(\sigma(\alpha_i) - \hat{a}_i) + \hat{\varphi}(\hat{a}_k - \sigma(\alpha_k)) + \hat{\varphi}(\hat{a}_i - \hat{a}_k) \leq$
$\frac{1}{i} + \frac{1}{k} + \hat{\varphi}(\hat{a}_i - \hat{a}_k) < \varepsilon$ für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen i, k, weil nach Voraussetzung $(\hat{a}_i)$ Cauchyfolge für $\hat{\varphi}$ ist.
Als Cauchyfolge repräsentiert (α_i) das Element $\hat{\alpha} := \overline{(\alpha_i)}$ von $\widehat{K}$. Es ist nach dem oben Gezeigten $\hat{\alpha} = \overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma(\alpha_i)$ und daher wegen $\hat{\varphi}(\hat{a}_i - \sigma(\alpha_i)) < \frac{1}{i}$ auch

$\hat{\alpha} = \overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{i\to\infty}} \hat{a}_i$. □

Nun zum Beweis des zweiten Teils:
Sei K' mit der Bewertung φ' und dem Homomorphismus $\sigma' : K \to K'$ ein weiterer Körper, so daß die Eigenschaften (1)–(3) von Satz 4.2.1. sinngemäß gelten.
Wir zeigen zunächst, daß jeder Homomorphismus $\lambda : \widehat{K} \to K'$ mit $\varphi' \circ \lambda = \hat{\varphi}$ stetig ist:

$a = \overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{i\to\infty}} a_i \overset{!}{\Rightarrow} \lambda(a) = \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \lambda(a_i)$ für $a_i \in \widehat{K}$.

Beweis: $\varphi'(\lambda(a) - \lambda(a_i)) = \varphi' \circ \lambda(a - a_i) = \hat{\varphi}(a - a_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nach Voraussetzung. □

Konstruktion des gesuchten $\lambda : \widehat{K} \to K'$:
Nach (3) ist $\sigma(K)$ dicht in $\widehat{K}$. Zu jedem $\hat{a} \in \widehat{K}$ gibt es also eine Folge von Elementen $a_i \in K$ mit $\hat{a} = \overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma(a_i)$. Falls es also ein λ wie verlangt gibt, muß dies, wie oben gezeigt, stetig sein, also muß gelten:
$\lambda(\hat{a}) = \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} (\lambda \circ \sigma(a_i)) = \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma'(a_i)$, also ist $\lambda(\hat{a})$ durch die Folge (a_i) eindeutig bestimmt. Ist auch $\hat{a} = \overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma(b_i)$, so ist $\overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma(a_i - b_i) = 0$, also wiederum wegen der Stetigkeit von λ
$0 = \lambda(0) = \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} (\lambda \circ \sigma(a_i - b_i)) = \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma'(a_i - b_i) = \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma'(a_i) - \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma'(b_i)$, also
$\overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma'(a_i) = \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma'(b_i)$. D.h. $\lambda(\hat{a})$ ist durch $\hat{a}$ eindeutig bestimmt. Wir definieren daher zwangsläufig:

$\lambda : \widehat{K} \longrightarrow K'$ durch $\lambda\left(\overset{\hat{\varphi}}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma(a_i)\right) := \overset{\varphi'}{\lim\limits_{i\to\infty}} \sigma'(a_i)$

und analog

$\lambda' : K' \longrightarrow \widehat{K}$ durch $\quad \lambda'\left(\lim\limits_{i\to\infty}^{\varphi'} \sigma'(a_i)\right) := \lim\limits_{i\to\infty}^{\hat{\varphi}} \sigma(a_i)\,.$

Nach dem oben Gezeigten sind diese Definitionen unabhängig von der Wahl der Folge (a_i) aus K. Man rechnet ferner sofort nach, daß λ und λ' zueinander inverse Ringhomomorphismen, also Isomorphismen sind.

Da man jedes Element $a \in \sigma(K)$ als Limes der konstanten Folge (a) erhält, gilt nach Definition

$\lambda \circ \sigma(a) = \lambda\left(\lim\limits_{i\to\infty}^{\hat{\varphi}} \sigma(a)\right) = \lim\limits_{i\to\infty}^{\varphi'} \sigma'(a) = \sigma'(a)$ für alle $a \in K$, also $\boldsymbol{\lambda \circ \sigma = \sigma'}$.

Ferner gilt auch $\boldsymbol{\varphi' \circ \lambda = \hat{\varphi}}$; denn, beachtet man die Stetigkeit von $\hat{\varphi}$ und φ' nach Anmerkung 3.1.5., so hat man:

$$\varphi' \circ \lambda\left(\lim_{i\to\infty}^{\hat{\varphi}} \sigma(a_i)\right) \underset{\text{Def.}}{=} \varphi'\left(\lim_{i\to\infty}^{\varphi'} \sigma'(a_i)\right) \underset{\varphi' \text{ stetig}}{=} \lim_{i\to\infty} \varphi' \circ \sigma'(a_i) \underset{(2)}{=} \lim_{i\to\infty} \varphi(a_i) \underset{(2)}{=}$$

$$\lim_{i\to\infty} \hat{\varphi} \circ \sigma(a_i) \underset{\hat{\varphi} \text{ stetig}}{=} \hat{\varphi}\left(\lim_{i\to\infty}^{\hat{\varphi}} \sigma(a_i)\right).$$

□

4.2.3. Korollar. *Sei K komplett für φ und $L \subseteq K$ ein Teilkörper von K.*
Ferner sei $\psi := \varphi|L$. Dann gilt:
K enthält einen Unterkörper $\widehat{L}$, der mit $\varphi|\widehat{L}$ Komplettierung von L für ψ ist.
$\widehat{L}$ ist dadurch eindeutig bestimmt.
$\widehat{L}$ ist der topologische Abschluß von L in K in der durch φ definierten Topologie.

Beweis. Falls es ein solches $\widehat{L}$ gibt, ist L dicht in $\widehat{L}$, also jedes Element von $\widehat{L}$ Limes einer (Cauchy-)Folge von L und alle solche Limiten müssen in $\widehat{L}$ liegen. Also ist $\widehat{L}$ eindeutig bestimmt als die Menge aller Limiten von Cauchyfolgen aus L (= topologischer Abschluß von L in K).

Definiere also $\widehat{L}$ als die Menge aller Limiten der Cauchyfolgen aus L. Man rechnet sofort nach, daß $\widehat{L}$ ein Körper ist.

Bleibt zu zeigen, daß $\boldsymbol{\widehat{L}}$ **komplett** ist. Das geht analog zu dem Teil des Beweises von Satz 4.2.1., in dem gezeigt wird, daß das dort konstruierte $\widehat{K}$ komplett ist:

Jede Cauchyfolge aus $\widehat{L}$ hat einen Limes in K, weil K komplett ist. Da jedes Element einer solchen Folge seinerseits Limes einer Cauchyfolge aus L ist, ist dieser Limes auch schon Limes einer Folge aus L, liegt also bereits in $\widehat{L}$. □

4.2.4. Satz. *Sei ν eine Exponentenbewertung von K,*
$\widehat{K} \supseteq K$ mit der Bewertung $\hat{\nu}$ die Komplettierung von K
S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ der Bewertungsring von ν,
$\widehat{S}$ mit dem maximalen Ideal $\widehat{\mathfrak{P}}$ der Bewertungsring von $\hat{\nu}$.
Es gilt:

(1) $\widehat{S} \cap K = S, \quad \widehat{\mathfrak{P}} \cap S = \mathfrak{P}.$
(2) $\widehat{\mathfrak{P}} = \widehat{S}\cdot\mathfrak{P}.$
(3) $\mathcal{W}(\hat{\nu}) = \mathcal{W}(\nu).$ *(gleiche Wertegruppe)*
(4) $S/\mathfrak{P} \simeq (S + \widehat{\mathfrak{P}})/\widehat{\mathfrak{P}} = \widehat{S}/\widehat{\mathfrak{P}}$ *in natürlicher Weise gleiche Restklassenkörper.*
(5) (a) *ν diskret $\Longleftrightarrow$ $\hat{\nu}$ diskret.*
    (b) *In diesem Fall ist jedes Primelement von S auch Primelement von $\widehat{S}$.*

Beweis. (1) ist trivial, weil $\hat{\nu}|K = \nu$.
(2): $\widehat{\mathfrak{P}} \supseteq \widehat{S}\cdot\mathfrak{P}$ ist klar, weil $\mathfrak{P} \subseteq \widehat{\mathfrak{P}}$ nach (1).

Umgekehrt: Sei $0 \neq x \in \widehat{\mathfrak{P}}$. Dann ist $x = \lim x_i$ mit $x_i \in K$. Also ist $\hat{\nu}(x - x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Für hinreichend großes i ist also $\hat{\nu}(x - x_i) > \hat{\nu}(x)$ und daher nach der Minimumsregel $0 < \hat{\nu}(x) = \hat{\nu}(x_i) = \nu(x_i)$. Es folgt $x_i \in \mathfrak{P}$ und $\hat{\nu}\left(\frac{x}{x_i}\right) = 0$ und folglich
$x \in \widehat{S} \cdot x_i \subseteq \widehat{S} \cdot \mathfrak{P}$. □
Ferner sieht man daraus, daß $\{\hat{\nu}(x) \mid x \in \widehat{\mathfrak{P}}\} = \{\nu(x) \mid x \in \mathfrak{P}\}$ ist, also $\mathcal{W}(\hat{\nu}) = \mathcal{W}(\nu)$. Es folgt (3).
(4): Wegen $\widehat{\mathfrak{P}} \cap S = \mathfrak{P}$ ist zunächst nach dem ersten Isomorphiesatz in natürlicher Weise $S/\mathfrak{P} \simeq (S + \widehat{\mathfrak{P}})/\widehat{\mathfrak{P}}$ (induziert durch id_S).
Ferner ist trivialerweise $(S + \widehat{\mathfrak{P}})/\widehat{\mathfrak{P}} \subseteq \widehat{S}/\widehat{\mathfrak{P}}$.
Sei umgekehrt $x \in \widehat{S}$ beliebig. Dann gibt es ein $x_i \in S$ mit $\hat{\nu}(x - x_i) > 0$, also $x \equiv x_i \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}}$. Dann ist $x + \widehat{\mathfrak{P}} = x_i + \widehat{\mathfrak{P}} \subseteq S + \widehat{\mathfrak{P}}$.
Insgesamt also $(S + \widehat{\mathfrak{P}})/\widehat{\mathfrak{P}} = \widehat{S}/\widehat{\mathfrak{P}}$. □
(5a): Da nach (3) gilt $\mathcal{W}(\hat{\nu}) = \mathcal{W}(\nu)$ und „diskret“ durch die Existenz eines kleinsten positiven Elements in der Wertegruppe definiert ist, folgt (5a).
(5b) folgt aus (2). □

4.3. **Diskret bewertete komplette Körper.**

4.3.1. Satz. *Sei K nichttrivial bewertet mit der normierten diskreten Exponentenbewertung ν,*
S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ der Bewertungsring von ν,
$\mathfrak{R}$ ein fest gewähltes Repräsentantensystem für die Restklassen von $S/\mathfrak{P}$ mit $0 \in \mathfrak{R}$,
$\pi_\mu \in K$ mit $\nu(\pi_\mu) = \mu$ für alle $\mu \in \mathbb{Z}$ ein festgewähltes Repräsentantensystem für die Werte von $K^\times$.
Dann gilt

(1) *Jedes Element $0 \neq x \in K$ besitzt eine Reihendarstellung*

$$x = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \cdot \pi_k \left(:= \lim_{N\to\infty}{}^{\nu} \sum_{k=m}^{N} a_k \cdot \pi_k \right), \qquad a_m \neq 0, \quad a_k \in \mathfrak{R}$$

(2) *Jede solche Reihe stellt ein Element von K dar, falls K komplett für ν ist.*
(3) *Bei einer Reihendarstellung nach (1) eines Elementes $x \in K$ ist $\nu(x) = m$.*
(4) *Die Reihendarstellung nach (1) eines Elementes $x \in K$ ist bei vorgegebenem $\mathfrak{R}$ und $\{\pi_\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}\}$ eindeutig.*

4.3.2. *Anmerkung.* Durch die obige Reihendarstellung beherrscht man das Rechnen in K im allgemeinen noch *nicht*, auch wenn man etwa $\pi_\mu = \pi^\mu$ mit einem Primelement π wählt. Man weiß nämlich nicht, wodurch Summen und Produkte zweier Elemente von $\mathfrak{R}$ repräsentiert werden. Es ist eine Extraaufgabe, ein möglichst „gutes“ Repräsentantensystem $\mathfrak{R}$ zu finden, etwa ein „multiplikationstreues“ oder „additionstreues“. Das letzte ist im allgemeinen *nicht* möglich, wenn etwa $\mathrm{char}(K) = 0$ aber $\mathrm{char}(S/\mathfrak{P}) = p > 0$ („charakteristikungleicher Fall“) ist. Hier verhelfen die „Witt-Vektoren“ zu einer guten Darstellung. Im „charakteristikgleichen“ kompletten Fall kann man für R einen Körper ($\simeq S/\mathfrak{P}$) $\subseteq S$ wählen und erhält dann K als echten Potenzreihenkörper wie im Beispiel 4.3.3. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Beweis von Satz 4.3.1. (1): Sei $0 \neq x \in K$ vorgegeben, $m := \nu(x)$.
Wir zeigen durch Induktion nach n:

Es existieren Elemente $a_m, \dots, a_n \in \mathfrak{R}$ mit $\nu\left(x - \sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \pi_k\right) \geq n+1$.
Induktionsbeginn: $n = m$: Es ist $\varepsilon_m := \frac{x}{\pi_m}$ wegen $\nu\left(\frac{x}{\pi_m}\right) = m - m = 0$ eine Einheit von S und $x = \varepsilon_m \cdot \pi_m$. Sei $a_m \in \mathfrak{R}$ der Repräsentant für ε_m, also $\nu(\varepsilon_m - a_m) \geq 1$. Dann ist $\nu(x - a_m \cdot \pi_m) = \nu(\pi_m \cdot (\varepsilon_m - a_m)) = m + \nu(\varepsilon_m - a_m) \geq m+1$.
Seien nun $a_m, \dots, a_n \in \mathfrak{R}$ schon gefunden mit $\nu\left(x - \sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \pi_k\right) \geq n+1$. Dann ist $\nu\left(\frac{x - \sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \pi_k}{\pi_{n+1}}\right) \geq 0$, also liegt der Bruch in S. Sei a_{n+1} der Vertreter aus $\mathfrak{R}$ für diesen Bruch $\bmod \mathfrak{P}$. Dann gilt

$$\nu\left(x - \sum_{k=m}^{n+1} a_k \cdot \pi_k\right) = \nu\left(\pi_{n+1} \cdot \underbrace{\left(\frac{x - \sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \pi_k}{\pi_{n+1}} - a_{n+1}\right)}_{\nu(\dots) \geq 1}\right) \geq n+1+1 = n+2.$$

Es folgt $x - \sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \pi_k \xrightarrow[n\to\infty]{\nu} 0$. □

(2): Sei eine solche Reihe gegeben. Dann ist $\nu\left(\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k \cdot \pi_k\right) \geq n_1$. Also ist $\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \pi_k$ eine Cauchyfolge und daher existiert der Limes bezüglich ν in K, wenn K komplett ist. □

(3): Wegen $a_m \neq 0$ ist $\nu(a_m) = 0$, weil nach Voraussetzung die Nullklasse, d.h. die Elemente von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ durch 0 repräsentiert werden. Also ist
$\nu\left(\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \pi_k\right) = \nu(a_m \cdot \pi_m) = m$ für alle n, da $\nu(a_k \cdot \pi_k) > m$ ist für alle $k > m$. Wegen der Stetigkeit von ν (Anmerkung 3.1.5) ist dann auch $\nu\left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k \cdot \pi_k\right) = m$. □

(4): Sei $x = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \cdot \pi_k = \sum_{\ell=m'}^{\infty} b_\ell \cdot \pi_\ell$ mit $a_k, b_\ell \in \mathfrak{R}$. Dann folgt aus (3) zunächst $m = \nu(x) = m'$.
Ferner ist dann $\sum_{k=m}^{\infty} (a_k - b_k) \cdot \pi_k = 0$. Wäre für ein k dann $a_k - b_k \neq 0$, so sei k_0 das kleinste dieser k. Aus $a_{k_0} - b_{k_0} \neq 0$ folgte dann $\nu(a_{k_0} - b_{k_0}) = 0$, denn wäre $\nu(a_{k_0} - b_{k_0}) > 0$, so wäre $a_{k_0} \equiv b_{k_0} \pmod{\mathfrak{P}}$, also $a_{k_0} = b_{k_0}$ weil beide Elemente in dem Repräsentantensystem $\mathfrak{R}$ dieselbe Klasse repräsentieren. Nach (3) wäre dann $\nu\Big(\underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} (a_k - b_k) \cdot \pi_k}_{=0}\Big) = k_0 < \infty$, was unmöglich ist, da $\nu(0) = \infty$ ist. □

4.3.3. *Beispiel.* Sei $K := k(\!(t)\!) := \mathrm{Quot}(k[\![t]\!])$ der Potenzreihenkörper über k in einer Unbestimmten t,
ν die Exponentenbewertung durch den Anfangsgrad,
$S := k[\![t]\!]$ der zuhörige Bewertungsring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P} = t \cdot S$.
Wähle $\pi_\mu := t^\mu$ und $\mathfrak{R} := k$. Man erhält dann wieder die Potenzreihen in t zurück.

5. Normierte Körper und Vektorräume

5.1. **Der Satz von Gelfand-Tornheim.** Um im Folgenden eine etwas größere Allgemeinheit zu erreichen, führen wir neben dem Bewertungsbegriff den etwas schwächeren
*Norm*begriff ein:

5.1.1. Definition. Sei K ein Körper,
k ein Teilkörper,
φ eine Betragsbewertung von k.
Eine „Norm“ von K bzgl. φ ist eine Abbildung
$\| \| : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
mit:

(1) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in K$, und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in K$. „Produktregel“
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in K$. „Dreiecksungleichung“
(4) $\|\rho \cdot x\| = \varphi(\rho) \cdot \|x\|$ für alle $\rho \in k$ und $x \in K$.

5.1.2. *Anmerkung.* (1) Für $\rho \in k$ ist $\|\rho\| = \|\rho \cdot 1\| = \varphi(\rho) \cdot \|1\|$, d.h. die Norm unterscheidet sich auf k von φ nur durch den festen Faktor $\|1\|$.
(2) Aus der Dreiecksungleichung (3) folgt wie beim Beweis von Anmerkung 2.1.4 $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in K$.

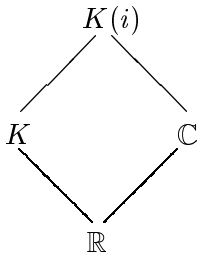
Der Hauptsatz dieses Abschnittes ist nun

5.1.3. Hauptsatz (Satz von Gelfand-Tornheim)**.** *Sei K ein bzgl. des Absolutbetrages von $\mathbb{R}$ normierter Oberkörper von $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$K = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

5.1.4. *Anmerkung.* Falls $K = \mathbb{R}$ ist, ist die Norm von K nach Anmerkung 5.1.2. (1) durch den gewöhnlichen absoluten Betrag $|\ |$ bis auf einen konstanten Faktor gegeben.
Falls $K = \mathbb{C}$ ist, folgt aus Hauptsatz 5.2.6., daß die Norm äquivalent ist zu der Norm, die durch $|\ |$ auf $\mathbb{C}$ gegeben ist; denn $\mathbb{C}$ ist ein normierter Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ ist komplett bzgl. $|\ |$.

Beweis. (Beweis des Satzes von Gelfand-Tornheim) Wir geben zunächst eine analytische Beweisidee und algebraisieren diese dann zu einem (unabhängigen) algebraischen Beweis nach Artin [1].
Der Anfang beider „Beweise“ ist derselbe:
Falls $x^2 + 1 = 0$ *keine* Lösung in K hat, adjungiere zunächst eine Wurzel i dieser Gleichung. Der Körper $K(i)$ ist dann evtl. nicht mehr normiert, aber $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) \subseteq K(i)$.
Wäre $K \neq \mathbb{R}$ und auch $K \neq \mathbb{C}$, so gäbe es ein $\eta \in K$ mit $\eta \notin \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$. (Weil $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ ist, kann K nicht echt zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ liegen.)



Das wird zu einem Widerspruch geführt:
$\eta \notin \mathbb{C} \Rightarrow \eta - z \neq 0$ für *alle* $z \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow \frac{1}{\eta - z} \in K(i)$
Zerlege $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\bar{z} = x - i \cdot y$.
Definiere eine Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow K$ durch:
$F(z) := \frac{1}{\eta - z} + \frac{1}{\eta - \bar{z}} = \frac{(\eta - \bar{z}) + (\eta - z)}{(\eta - z) \cdot (\eta - \bar{z})} = \frac{2 \cdot (\eta - x)}{\eta^2 - 2\eta \cdot x + x^2 + y^2}$.
Offenbar ist $F(\mathbb{C}) \subseteq K$, weil in der Formel für $F(z)$ kein i vorkommt. Man kann also die Norm bilden.
$\|F(z)\|$ ist dann für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert.

Zwischenbemerkung über Ringtopologie.
Betrachte auf K die durch die Norm $\| \ \|$ definierte Metrik.
In ihr sind Summe und Produkt überall stetig und $x \mapsto x^{-1}$ in jedem Punkt $x_0 \neq 0$.
Beweis: Summe: $\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\|$ nach der Dreiecksungleichung.
Produkt: $\|x \cdot y - x_0 \cdot y_0\| = \|(x - x_0) \cdot (y - y_0) + (x - x_0) \cdot y_0 + x_0 \cdot (y - y_0)\| \leq \|x - x_0\| \cdot \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\|$ nach der Produktregel und der Dreiecksungleichung.
Inverses bei $x_0 \neq 0$: $\left\| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right\| = \left\| \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \right\| \leq \|x - x_0\| \cdot \left\| \frac{1}{x_0} \right\| \cdot \left\| \frac{1}{x} \right\|$.
Bleibt zu zeigen, daß $\left\| \frac{1}{x} \right\|$ in einer Umgebung von x_0 beschränkt ist:
Beweis: Setze $\tau := \frac{x - x_0}{x_0}$. Der Punkt x_0 entspricht $\tau = 0$.
Es ist $\left\| \frac{1}{x} \right\| = \left\| \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1 + \tau} \right\| \leq \left\| \frac{1}{x_0} \right\| \cdot \left\| \frac{1}{1 + \tau} \right\|$.
Für alle x mit $\|x - x_0\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|x_0\|$ ist dann $\|\tau\| \leq \frac{1}{2}$ und daher
$\left\| \frac{1}{1 + \tau} \right\| = \left\| 1 - \frac{\tau}{1 + \tau} \right\| \leq \|1\| + \underbrace{\|\tau\|}_{< \frac{1}{2}} \cdot \left\| \frac{1}{1 + \tau} \right\| \leq \|1\| + \frac{1}{2} \cdot \left\| \frac{1}{1 + \tau} \right\|$, also $\left\| \frac{1}{1 + \tau} \right\| \leq 2 \cdot \|1\|$.
Es folgt: $\left\| \frac{1}{x} \right\| \leq 2 \cdot \|1\| \cdot \left\| \frac{1}{x_0} \right\|$ beschränkt für alle x mit $\|x - x_0\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|x_0\|$. □
Da die Metrik auf K durch $\| \ \|$ definiert ist, ist
$K \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ stetig.
Ferner sind die Projektionen
$\mathbb{C} \ni z = x + i \cdot y \mapsto x \in \mathbb{R}$ und
$\mathbb{C} \ni z = x + i \cdot y \mapsto y \in \mathbb{R}$
stetig in der üblichen Betragsmetrik auf $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$. Da sich die Norm $\| \ \|$ auf $\mathbb{R}$ nach Anmerkung 5.1.2. (1) vom absoluten Betrag nur um den konstanten Faktor $\|1\|$ unterscheidet, induziert die Norm $\| \ \|$ von K auf dem Unterkörper $\mathbb{R}$ dieselbe Topologie wie der absolute Betrag von $\mathbb{R}$ und daher sind auch die Projektionen
$\mathbb{C} \ni z = x + i \cdot y \mapsto x \in K$ und
$\mathbb{C} \ni z = x + i \cdot y \mapsto y \in K$
stetig unter der durch $| \ |$ auf $\mathbb{C}$ und $\| \ \|$ auf K definierten Metrik.
Insgesamt folgt:
$\mathbb{C} \ni z \mapsto \|F(z)\| \in \mathbb{R}$ ist stetig bzgl des gewöhnlichen absoluten Betrages $| \ |$.
Betrachte diese Abbildung für $|z| \longrightarrow \infty$:

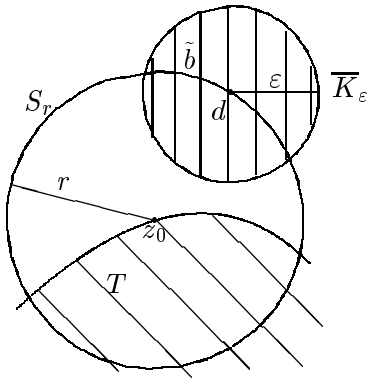
$$F(z) = \frac{2 \cdot \eta - \overbrace{(z + \bar{z})}^{=2x}}{\eta^2 - \eta \cdot (z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z}} = \frac{\frac{2\eta}{z \cdot \bar{z}} - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right)}{\frac{\eta^2}{z \cdot \bar{z}} - \eta \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) + 1}$$

Nun gilt für $|z| \to \infty$
$\frac{1}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0$ und $\left| \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right| = \frac{2 \cdot |x|}{|z|^2} \leq \frac{2 \cdot |z|}{|z|^2} = \frac{2}{|z|} \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0$ also auch $\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0$

in $\mathbb{C}$, also auch in $\mathbb{R}$ bzgl. $|\ |$ und daher auch in K bzgl. $\|\ \|$.
Wegen der Stetigkeit von Summe, Produkt und Inversem in K folgt
$F(z) \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also wegen der Stetigkeit von $\|\ \|$ auch $\|F(z)\| \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Es ist aber $\|F(0)\| = \|\frac{2}{\eta}\| > 0$.
Wähle ein $R \in \mathbb{R}$ so groß, daß $\|F(z)\| < \|\frac{2}{\eta}\|$ für *alle* z mit $|z| > R$. (Das ist möglich, weil die Abschätzungen für $\|F(z)\|$ allein von $|z|$ abhängen und $\|F(z)\| \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.)
Sei $M := \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \|F(z)\| = \sup\limits_{|z|\le R} \|F(z)\|$.
Nun ist $\{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| \le R\}$ abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^2$, also kompakt, und $\|F(z)\|$ ist stetig. Daher nimmt $\|F(z)\|$ das Supremum auf dieser Menge an. Sei $T := \{z \mid z \in \mathbb{C}, \|F(z)\| = M\}$. Dann gilt

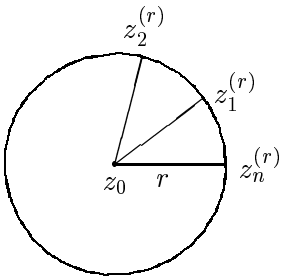
(1) $T \neq \emptyset$, weil $\|F(z)\|$ das Supremum annimmt.
(2) $T \subseteq \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| \le R\}$, also beschränkt.
(3) T ist abgeschlossen als Urbild des Punktes $M \in \mathbb{R}$ bei der stetigen Abbildung $\|F(z)\|$.

Es folgt:
***T* enthält einen Randpunkt**.
Wir zeigen nun, daß die Existenz eines Randpunktes von T zu einem Widerspruch führt. Daraus folgt dann, daß ein solches η nicht existiert, daß also $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ ist.



1.*Analytische Idee*: Sei $z_0 \in T$ ein Randpunkt von T. Nach Definition eines Randpunktes gibt es in *jeder* Umgebung von z_0 Punkte, die *nicht* zu T gehören. Es gibt also beliebig kleine Radien r, so daß auf dem Kreisbogen S_r um z_0 mit dem Radius r ein Punkt $d \notin T$ liegt. Da T abgeschlossen ist, existiert zu d ein $\varepsilon > 0$ so daß für die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K}_\varepsilon$ um d mit Radius ε gilt $\overline{K}_\varepsilon \cap T = \emptyset$. Sei $\tilde{b} := \overline{K}_\varepsilon \cap S_r$. Dann ist $\tilde{b}$ ein Kreisbogenstück einer Länge $L > 0$.
Nun ist $F(z) = 2\cdot\Re\big(\frac{1}{\eta - z}\big)$ „der Realteil einer analytischen Funktion“. In der normalen reellen Analysis wäre das eine harmonische Funktion. Die Werte von F liegen aber nicht in $\mathbb{C}$ sondern in K. Daher ist die gewöhnliche Analysis nicht anwendbar. Wir tun nun aber so, als ob sie trotzdem gälte. Daher ist dies nur eine Beweisidee und kein schlüssiger Beweis!
Da F eine harmonische Funktion ist, ist der Funktionswert in z_0 der Mittelwert der Funktionswerte auf dem Kreisbogen S_r:
$F(z_0) = \frac{1}{2\pi\cdot r} \int\limits_{S_r} F(s)\cdot \mathrm{d}\, s$, also
$\|F(z_0)\| \le \frac{1}{2\pi\cdot r} \cdot \big(M\cdot(2\pi\cdot r - L) + M_1\cdot L\big)$,
wobei M_1 das Supremum von F auf $\tilde{b}$ ist. $\tilde{b}$ ist kompakt und hat leeren Durchschnitt mit T. Also ist $M_1 < M$ und daher
$\|F(z_0)\| < \frac{2\pi\cdot r\cdot M}{2\pi\cdot r} = M$ im Widerspruch zu $z_0 \in T$. „qed“.

2.*Exakte algebraische Durchführung des Beweises*:
1.*Ziel*: „Integralformel“.



Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig und seien $\zeta_{n,\lambda} := e^{\frac{2\pi i\lambda}{n}}$ für $\lambda = 1, \dots, n$ die n-ten Einheitswurzeln ($n = 1, 2, \dots$).
Für $0 < r \in \mathbb{R}$ setze für festes n
$z_\lambda^{(r)} := z_0 + r \cdot \zeta_{n,\lambda}$.
Die $z_\lambda^{(r)}$ für $\lambda = 1, \dots, n$ sind dann n Punkte auf dem Kreis um z_0 mit dem Radius r, von denen jeder von dem nächsten den Abstand $\frac{2\pi \cdot r}{n}$ auf dem Kreisbogen hat.
Sei

$$A_n^{(r)} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^{n} F(z_\lambda^{(r)}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{\eta - z_0 - r \cdot \zeta_{n,\lambda}} + \frac{1}{\eta - \bar{z}_0 - r \cdot \bar{\zeta}_{n,\lambda}}$$

= Mittelwert von $F(z)$ auf den Kreisteilungspunkten.

Nach Definition der n-ten Einheitswurzeln ist $Y^n - 1 = \prod_{\lambda=1}^{n} (Y - \zeta_{n,\lambda})$.

Setze ein $Y = \frac{X}{r} \Rightarrow X^n - r^n = \prod_{\lambda=1}^{n} (X - r \cdot \zeta_{n,\lambda})$ als Polynomidentität in $\mathbb{C}[X]$. Durch logarithmisches Differenzieren folgt:
$\frac{n \cdot X^{n-1}}{X^n - r^n} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{X - r \cdot \zeta_{n,\lambda}}$.
Nun durchläuft mit $\zeta_{n,\lambda}$ auch $\bar{\zeta}_{n,\lambda}$ für $\lambda = 1, \dots, n$ alle n-ten Einheitswurzeln, so daß auch gilt:
$\frac{n \cdot X^{n-1}}{X^n - r^n} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{X - r \cdot \bar{\zeta}_{n,\lambda}}$.
Betrachte nun die Bilder dieser Ausdrücke bei den Einsetzungshomomorphismen $\mathbb{C}(X) \longrightarrow K(i)$ mit $X \mapsto \vartheta := \eta - z_0$ bzw.
$X \mapsto \bar{\vartheta} := \eta - \bar{z}_0$.
Man erhält:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{n \cdot \vartheta^{n-1}}{\vartheta^n - r^n} & = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{\eta - z_0 - r \cdot \zeta_{n,\lambda}} \\ \frac{n \cdot \bar{\vartheta}^{n-1}}{\bar{\vartheta}^n - r^n} & = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{\eta - \bar{z}_0 - r \cdot \bar{\zeta}_{n,\lambda}} \end{array}\right\} \Rightarrow A_n^{(r)} = \frac{\vartheta^{n-1}}{\vartheta^n - r^n} + \frac{\bar{\vartheta}^{n-1}}{\bar{\vartheta}^n - r^n}.$$

(Beachte: Wegen $\eta \notin \mathbb{C}$ sind die Nenner $\vartheta^n - r^n$ und $\bar{\vartheta}^n - r^n$ von Null verschieden; denn, da $r^n \in \mathbb{C}$ liegt und $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, folgte aus $\vartheta^n - r^n = 0$ sofort $\vartheta \in \mathbb{C}$ und folglich auch $\eta = \vartheta - z_0 \in \mathbb{C}$. Analog für den anderen Nenner.)
Umrechnung von $A_n^{(r)}$:

$$A_n^{(r)} = \frac{\frac{1}{\vartheta}}{1 - \frac{r^n}{\vartheta^n}} + \frac{\frac{1}{\bar{\vartheta}}}{1 - \frac{r^n}{\bar{\vartheta}^n}} = \frac{\left(\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\bar{\vartheta}}\right) - \frac{r^n}{\vartheta \cdot \bar{\vartheta}} \cdot \left(\frac{1}{\vartheta^{n-1}} + \frac{1}{\bar{\vartheta}^{n-1}}\right)}{1 - r^n \cdot \left(\frac{1}{\vartheta^n} + \frac{1}{\bar{\vartheta}^n}\right) + \frac{r^{2n}}{(\vartheta \cdot \bar{\vartheta})^n}}$$

Berechne die einzelnen Klammerausdrücke:
Es ist nach Definition von ϑ und $\bar{\vartheta}$
$\frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{\eta - z_0} = \frac{\eta - \bar{z}_0}{(\eta - z_0) \cdot (\eta - \bar{z}_0)}$ und
$\frac{1}{\bar{\vartheta}} = \frac{1}{\eta - \bar{z}_0} = \frac{\eta - z_0}{(\eta - z_0) \cdot (\eta - \bar{z}_0)}$.
Ferner ist $(\eta - z_0) \cdot (\eta - \bar{z}_0) = \eta^2 - \eta \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + z_0 \cdot \bar{z}_0 \in K$.
Stellt man also dar
$\frac{1}{\vartheta} = u + i \cdot v$ mit $u, v \in K$ so ist
$\frac{1}{\bar{\vartheta}} = u - i \cdot v$ und

$\frac{1}{\vartheta\cdot\bar\vartheta} = u^2 + v^2 \in K$.
Ferner ist für $q \in \mathbb{N}$

$$\tfrac{1}{\vartheta^q} + \tfrac{1}{\bar\vartheta^q} = (u+iv)^q + (u-iv)^q = \sum_{k=0}^{q} \tbinom{q}{k} \cdot \left(u^{q-k}\cdot v^k \cdot i^k + u^{q-k}\cdot v^k \cdot (-1)^k \cdot i^k\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{q} \tbinom{q}{k} u^{q-k}\cdot v^k \cdot i^k \cdot \underbrace{(1+(-1)^k)}_{\substack{=0,\text{ falls } k \text{ ungerade}\\ =2 \text{ sonst}}} = 2\cdot \sum_{0\le 2\nu\le q} \tbinom{q}{2\nu} \cdot u^{q-2\nu}\cdot v^{2\nu} \cdot \underbrace{(-1)^\nu}_{=i^{2\nu}} \in K.$$

Man kann in K die Norm bilden:

$$\left\| \tfrac{1}{\vartheta^q} + \tfrac{1}{\bar\vartheta^q} \right\| \le 2\cdot \sum_{0\le 2\nu\le q} \tbinom{q}{2\nu} \cdot \|u\|^{q-2\nu}\cdot \|v\|^{2\nu} \le 2\cdot \sum_{0\le \mu\le q} \tbinom{q}{\mu} \cdot \|u\|^{q-\mu}\cdot \|v\|^{\mu} = 2\cdot(\|u\|+\|v\|)^q,$$

wobei r in dieser Abschätzung nicht vorkommt. Es folgt

$$\left\| r^n \cdot \left(\tfrac{1}{\vartheta^n} + \tfrac{1}{\bar\vartheta^n}\right)\right\| \le r^n \cdot 2\cdot (\|u\|+\|v\|)^n < \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für kleine } r.$$

Ebenso

$$\tfrac{r^n}{\vartheta\cdot\bar\vartheta}\cdot\left(\tfrac{1}{\vartheta^{n-1}} + \tfrac{1}{\bar\vartheta^{n-1}}\right) \overset{\|\ \|}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \text{ für kleine } r.$$

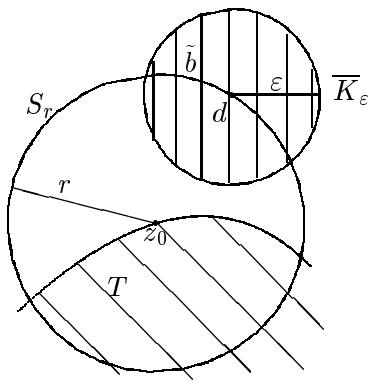
Daher konvergiert
der Zähler von $A_n^{(r)}$ für $n\to\infty$ gegen
$\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\bar\vartheta} = F(z_0)$ für kleine r,
der Nenner von $A_n^{(r)}$ für $n\to\infty$ gegen
1 für kleine r.
Da der Limes des Nenners $\neq 0$ ist, ist nach der Zwischenbemerkung auch die Quotientenbildung stetig und es folgt:

$$A_n^{(r)} \overset{\|\ \|}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} F(z_0) \text{ für genügend kleine } r. \quad \text{„Integralformel“}$$

Da auch der Übergang zur Norm stetig ist, ergibt sich:

$$\left\|A_n^{(r)}\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|F(z_0)\| \text{ in } \mathbb{R} \text{ für genügend kleine } r. \text{ etwa für } 0 < r \le \delta\,.$$

2.*Durchführung des Schlusses*: Sei $z_0 \in T$ ein Randpunkt von T. Nach Definition eines Randpunktes gibt es in *jeder* Umgebung von z_0 Punkte, die *nicht* zu T gehören. Es gibt also beliebig kleine Radien r, so daß auf dem Kreisbogen S_r um z_0 mit dem Radius r mit $0 < r < \delta$ ein Punkt $d \notin T$ liegt. Da T abgeschlossen ist, existiert zu d ein $\varepsilon > 0$ so daß für die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K}_\varepsilon$ um d mit Radius ε gilt $\overline{K}_\varepsilon \cap T = \emptyset$. Sei $\tilde b := \overline{K}_\varepsilon \cap S_r$. Dann ist $\tilde b$ ein Kreisbogenstück einer Länge $L > 0$.



Die n-ten Einheitswurzeln liegen in gleichen Abständen $\frac{2\pi}{n}$ auf dem Einheitskreis, also liegen auf einem vorgegebenen Bogen einer Länge $\ell > 2\cdot\frac{2\pi}{n}$ *mindestens zwei* n-te Einheitswurzeln. Sei nun $\ell := \frac{L}{r}$ und s eine natürliche Zahl mit $s > 2\cdot\frac{2\pi}{\ell} = 2\cdot\frac{2\pi\cdot r}{L}$. Dann liegen auf $\tilde b$ mindestens *zwei* Punkte der Form $z_0 + r\cdot\zeta_{n,s}$. Sei nun $n := s\cdot m$ für $m = 1, 2, \ldots$. Zwischen (inkl. einer Ecke) zwei s-ten Einheitswurzeln liegen m der n-ten Einheitswurzeln. Also liegen auf $\tilde b$ mindestens m Punkte der Form $z_0 + r\cdot\zeta_{n,\lambda}$. Sei nun
$M' := \sup\{\|F(z)\| \mid z \in \tilde b\}$. Da $\tilde b$ kompakt und $\|F(z)\|$ stetig ist, nimmt $\|F(z)\|$ das

Supremum auf $\tilde{b}$ an. Da $\tilde{b} \cap T = \emptyset$ ist, ist $M' < M$. Ferner ist $\|F(z_0 + r\cdot\zeta_{n,\lambda})\| \leq M'$ für mindestens m der λ, nämlich für diejenigen, für die $z_0 + r\cdot\zeta_{n,\lambda} \in \tilde{b}$ liegt. Es folgt:
$\|A_n^{(r)}\| = \|\frac{1}{n}\cdot \sum_{\lambda=1}^{n} F(z_0 + r\cdot\zeta_{n,\lambda})\| \leq \frac{1}{n}\cdot(m\cdot M' + (n-m)\cdot M) =$

$\frac{1}{s\cdot m}\cdot m\cdot(M' + (s-1)\cdot M) = M - \overbrace{\frac{M-M'}{s}}^{>0}$ für *alle* n, also auch
$\|F(z_0)\| = \lim_{m\to\infty} \|A_{m\cdot s}^{(r)}\| \leq M - \frac{M-M'}{s} < M$, was ein Widerspruch zu $z_0 \in T$ ist.
(Es ist $n = s\cdot m$. Halte s fest und lasse $m \to \infty$ gehen.) □

5.2. **Normierte Vektorräume über kompletten bewerteten Körpern.**

5.2.1. Definition. Sei K ein Körper, φ eine Betragsbewertung von K und V ein K-Vektorraum. Eine „Norm“ auf V bezüglich φ ist eine Abbildung
$\| \| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

(1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$ Dreiecksungleichung.
(3) $\|\rho\cdot x\| = \varphi(\rho)\cdot\|x\|$ für alle $\rho \in K$ und $x \in V$.

5.2.2. *Anmerkung.*

(1) Aus der Dreiecksungleichung (2) folgt wie in Anmerkung 2.1.4.
$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$.
(2) Eine Norm $\| \|$ induziert auf V eine lineare Topologie, die sogar eine Metrik ist, mit $\mathrm{d}(x, y) := \|x - y\|$.
Die Operationen
$$\begin{array}{rcll} V \times V & \to & V & \text{mit} \\ (x, y) & \mapsto & x \pm y, & \\ K \times V & \to & V & \text{mit} \\ (\rho, x) & \mapsto & \rho \cdot x, & \\ V & \to & \mathbb{R} & \text{mit} \\ x & \mapsto & \|x\| & \end{array}$$
sind stetig in den betreffenden Topologien. $\begin{pmatrix} \text{auf } V & \text{die Metrik durch} & \| \| \\ \text{auf } K & \text{die Metrik durch} & \varphi \\ \text{auf } \mathbb{R} & \text{die Metrik durch} & |\ | \end{pmatrix}$.

Der Beweis geht analog zu den Überlegungen in der Zwischenbemerkung zu Ringtopologien im Beweis von Hauptsatz 5.1.3.

5.2.3. Definition. Zwei Normen $\| \|$ und $\| \|'$ auf V bzgl. φ heißen „äquivalent“, in Zeichen $\| \| \sim \| \|'$, wenn es reelle Zahlen $A, A' \in \mathbb{R}$ gibt
$$\left.\begin{array}{ll} \text{mit} & \|x\|' \leq A\cdot\|x\| \\ \text{und} & \|x\| \leq A'\cdot\|x'\| \end{array}\right\} \text{für alle } x \in V.$$

5.2.4. Satz. *Sei φ eine nichttriviale Bewertung von K, und seien $\| \|$ und $\| \|'$ zwei Normen auf dem K-Vektorraum V. Es gilt:*
$\| \| \sim \| \|' \Longleftrightarrow \| \|$ und $\| \|'$ definieren dieselbe Topologie auf V. (D.h. die Umgebungen der Null und damit eines jeden Punktes sind dieselben in den beiden Topologien.) Eine solche Topologie heißt eine „Normtopologie bzgl. φ“.
(„$\Rightarrow$“ gilt auch, wenn φ trivial ist.)

Beweis. Die beiden Topologien stimmen genau dann überein, wenn jede ε-Umgebung der Null bzgl. $\| \|$ eine ε'-Umgebung der Null enthält und umgekehrt.
„$\Rightarrow$“: $\| \| \sim \| \|'$ bedeutet nach Definition 5.2.3., daß es reelle Zahlen $A, A' \in \mathbb{R}$ gibt

mit $\| \ \|' = A \cdot \| \ \|$ und $\| \ \| = A' \cdot \| \ \|'$.
Sei nun $\mathcal{U}_\varepsilon$ eine ε-Umgebung der Null von V bzgl. $\| \ \|$, d.h.
$\mathcal{U}_\varepsilon = \{x \mid x \in V, \|x\| < \varepsilon\}$. Dann gilt $\mathcal{U}'_{\frac{\varepsilon}{A'}} \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon$, wenn $\mathcal{U}'_{\frac{\varepsilon}{A'}}$ die $\frac{\varepsilon}{A'}$-Umgebung der Null von V bzgl. $\| \ \|'$ bezeichnet; denn aus $\|x\|' < \frac{\varepsilon}{A'}$ folgt $\|x\| \leq A' \cdot \|x\|' < \varepsilon$.
Umgekehrt gilt ebenso $\mathcal{U}'_{\varepsilon'} \supseteq \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon'}{A}}$.
(φ kommt beim Beweis dieser Richtung nicht vor!) □
„$\Leftarrow$“: Die Eins-Umgebung $\mathcal{U}_1$ der Null von V bzgl. $\| \ \|$ enthält nach Voraussetzung eine α-Umgebung $\mathcal{U}'_\alpha$ der Null von V bzgl. $\| \ \|'$ für ein $\alpha > 0$, d.h., $\|y\|' < \alpha \Rightarrow \|y\| < 1$ für alle $y \in V$.
Da nach Voraussetzung φ *nichttrivial* ist, existiert ein $\xi \in K$ mit $0 < \varphi(\xi) < 1$. Sei $0 \neq x \in V$ beliebig. Wegen $\varphi(\xi) < 1$ ist $\varphi(\xi)^r \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Also gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(\xi)^r \cdot \|x\|' < \alpha$.
Da andererseits $\varphi(\xi)^r \underset{r \to -\infty}{\longrightarrow} \infty$, existiert ein kleinstes r mit $\varphi(\xi)^r \cdot \|x\|' < \alpha$, also $\varphi(\xi)^{r-1} \cdot \|x\|' \geq \alpha$. Es folgt $\varphi(\xi)^r \cdot \|x\|' \geq \alpha \cdot \varphi(\xi)$ und daher $\varphi(\xi)^r \geq \frac{\alpha \cdot \varphi(\xi)}{\|x\|'}$.
Ferner ist $\alpha > \varphi(\xi)^r \cdot \|x\|' = \|\xi^r \cdot x\|'$, d.h. $\xi^r \cdot x \in \mathcal{U}'_\alpha \subseteq \mathcal{U}_1$ und daher $\varphi(\xi)^r \cdot \|x\| = \|\xi^r \cdot x\| < 1$. Man hat also:
$\|x\| < \frac{1}{\varphi(\xi)^r} \leq \frac{\|x\|'}{\alpha \cdot \varphi(\xi)}$ für *alle* $x \in V$, d.h.
$\| \ \| \leq A' \cdot \| \ \|'$ mit $A' := \frac{1}{\alpha \cdot \varphi(\xi)}$.
Umgekehrt existiert ebenso ein A mit $\| \ \|' \leq A \cdot \| \ \|$, weil alles symmetrisch ist. □

Nach den Definitionen ist unmittelbar klar:

5.2.5. *Anmerkung.* Sei $\dim V = n < \infty$ und $\{y_1, \ldots, y_n\}$ eine K-Basis von V. Jedes $x \in V$ hat dann eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot y_i$ mit eindeutig bestimmten $\alpha_i \in K$.
Dann ist

$$\|x\|_0 := \max\{\varphi(\alpha_i) \mid i = 1, \ldots, n\} \text{ eine Norm auf } V \text{ bzgl. } \varphi.$$

5.2.6. Hauptsatz. *Sei K komplett für die Bewertung φ,*
V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es gilt:
Je zwei Normen auf V bzgl. φ sind zueinander äquivalent.

Beweis. Sei $\| \ \|_0$ die in Anmerkung 5.2.5 definierte „Maximumsnorm“ von V für eine vorgegebene Basis $\{y_1, \ldots, y_n\}$ und $\| \ \|$ eine beliebige Norm von V bzgl. φ. Wir zeigen:
$\| \ \| \overset{!}{\sim} \| \ \|_0$.
Beweis: Zunächst gilt für jedes $x \in V$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot y_i$:

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\alpha_i) \cdot \|y_i\| \leq \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \Big)}_{=:A_0} \cdot \max\{\varphi(\alpha_j) \mid j = 1, \ldots, n\} = A_0 \cdot \|x\|_0 \,.$$

Umgekehrt: Induktion nach $n := \dim V$.
$n = 1$: Es ist $V = K \cdot y_1$, also $\|x\| = \varphi(\alpha_1) \cdot \|y_1\| = \|x\|_0 \cdot \|y_1\|$ und daher
$\| \ \|_0 = \frac{1}{\|y_1\|} \cdot \| \ \|$.
Sei nun die Behauptung schon gezeigt für alle $(n-1)$-dimensionalen K-Vektorräume, sei $\dim V = n$ und $y_1, \ldots, y_n$ eine K-Basis von V.
Gäbe es *kein* A mit $\|x\|_0 \leq A \cdot \|x\|$ für *alle* $x \in V$, so gäbe es eine Folge $x_\nu \in V$ mit

$\frac{\|x_\nu\|_0}{\|x_\nu\|} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Sei $x_\nu = \sum \alpha_{i\nu}\cdot y_i$. Dann ist $\frac{\|x_\nu\|_0}{\|x_\nu\|} = \max\left\{\frac{\varphi(\alpha_{i\nu})}{\|x_\nu\|} \mid i = 1,\dots,n\right\} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Dann gilt, indem man zu einer passenden Teilfolge übergeht, o.B.d.A für mindestens ein i, daß $\frac{\varphi(\alpha_{i\nu})}{\|x_\nu\|} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \infty$; denn wären alle diesen Quotienten beschränkt, dann wäre auch das Maximum beschränkt.
Sei also o.B.d.A. $\frac{\varphi(\alpha_{n\nu})}{\|x_\nu\|} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, also $\Big\| \underbrace{\alpha_{n\nu}^{-1}\cdot x_\nu}_{=:z_\nu} \Big\| = \frac{\|x_\nu\|}{\varphi(\alpha_{n\nu})} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Es ist $z_\nu := \alpha_{n\nu}^{-1}\cdot x_\nu = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{i\nu}\cdot y_i + y_n$ mit $\beta_{i\nu} := \alpha_{n\nu}^{-1}\cdot\alpha_{i\nu}$ für $i = 1,\dots,n-1$.
Die z_ν bilden eine *Nullfolge* bzgl. $\|\ \|$, also eine Cauchyfolge. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|z_\nu - z_\mu\| < \varepsilon$ für *alle* $\nu,\mu > N(\varepsilon)$. Aber $z_\nu - z_\mu = \sum_{i=1}^{n-1}(\beta_{i\nu}-\beta_{i\mu})\cdot y_i \in K\cdot y_1 + \dots + K\cdot y_{n-1}$, liegen also in einem $(n-1)$-dimensionalen Teilraum von V. Nach Induktionsannahme ist dort $\|\ \| \sim \|\ \|_0$. (Beachte, daß $\|\ \|_0$ eingeschränkt auf den Teilraum, der von den ersten $n-1$ Basiselementen erzeugt wird, das $\|\ \|_0$ bzgl. dieser Basiselemente auf dem Teilraum ist!)
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|z_\nu - z_\mu\|_0 < \varepsilon$ für alle $\nu,\mu > N'(\varepsilon)$, und daher $\varphi(\beta_{i\nu}-\beta_{i\mu}) \le \max\{\varphi(\beta_{j\nu}-\beta_{j\mu}) \mid j = 1,\dots,n-1\} = \|z_\nu - z_\mu\|_0$ für alle $i = 1,\dots,n-1$ und alle $\nu,\mu > N'(\varepsilon)$. Also bilden die $\big(\beta_{i\nu}\big)_\nu$ für alle $i = 1,\dots,n-1$ Cauchyfolgen bzgl. φ in K, konvergieren also in K, weil K komplett ist. Es existieren daher $\beta_i \in K$ mit $\beta_i = \lim\limits_{\nu\to\infty}^{\varphi} \beta_{i\nu}$ für $i = 1,\dots,n-1$.
Sei $z := \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\cdot y_i + 1\cdot y_n$. Dann ist $z \neq 0$, weil die y_i eine Basis von V bilden.
Andererseits ist aber:
$\|z - z_\nu\| \le \sum_{i=1}^{n-1}\varphi(\beta_i-\beta_{i\nu})\|y_i\| \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $z = \lim\limits_{\nu\to\infty}^{\|\ \|} z_\nu = 0$, weil die z_ν bzgl. $\|\ \|$ eine Nullfolge bilden. Widerspruch! Also existiert auch für V ein A mit $\|\ \|_0 \le A\cdot\|\ \|$. □

Zusammen mit Satz 5.2.4. erhält man unmittelbar:

5.2.7. Korollar. *Sei K komplett für die Bewertung φ,*
V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es gilt: Auf V gibt es genau eine Normtopolgie bzgl. φ.

5.2.8. Korollar. *Seien*
k komplett für die Bewertung φ,
K/k eine algebraische Körpererweiterung,
ψ,ψ' Bewertungen von K mit $\psi|k = \psi'|k = \varphi$.
Dann ist $\psi = \psi'$, d.h. die Fortsetzung einer Bewertung eines komplett bewerteten Körpers auf einen algebraischen *Oberkörper ist eindeutig.*
(Die Existenz einer Fortsetzung wird erst in Satz 7.0.2. gezeigt werden.)

Beweis. Vorbemerkung. Man kann o.B.d.A. annehmen $[K:k] < \infty$:
Sei $x \in K$ beliebig und sei $\widetilde{K} := k(x)$. Dann ist $[\widetilde{K}:k] < \infty$. Seien ferner $\tilde{\psi} := \psi|\widetilde{K}$ und $\tilde{\psi}' := \psi'|\widetilde{K}$. Dann sind $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\psi}'$ Fortsetzungen von φ auf die endliche Körpererweiterung $\widetilde{K}/k$. Falls man für endliche Körpererweiterungen die Behauptung des Korollars gezeigt hat, folgt $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}'(x) = \psi'(x)$. Da x ein beliebiges Element von K war, folgt $\psi = \psi'$. Wir setzen also nun o.B.d.A. voraus, daß $[K:k] < \infty$ ist.
1.Fall: φ ist nichttrivial.

ψ und ψ' sind k-Vektorraumnormen von K bzgl. φ. Nach Voraussetzung ist k komplett für φ und $\dim_k K < \infty$. Nach dem Hauptsatz 5.2.6. sind dann ψ und ψ' als k-Vektorraumnormen äquivalent. Das bedeutet nach Satz 5.2.4., daß ψ und ψ' dieselbe Topologie auf K induzieren. Da φ nicht trivial ist, sind auch ψ und ψ' nicht trivial. Mit Satz 2.2.6 folgt dann, daß ψ und ψ' auch als Bewertungen äquivalent sind. Es gibt also ein reelles $\gamma > 0$ mit $\psi' = \psi^\gamma$. Dann ist $\varphi = \psi'|k = \psi^\gamma|k = \varphi^\gamma$ Da φ nicht trivial ist, gibt es ein $x \in k$ mit $\varphi(x) > 1$, also $\gamma = \frac{\log(\varphi(x))}{\log(\varphi(x))} = 1$, also $\psi = \psi'$.
2. Fall: φ trivial. Die Behauptung folgt dann aus dem folgenden Hilfssatz 5.2.9. □

5.2.9. Hilfssatz. *Sei K/k eine algebraische Körpererweiterung und φ eine Bewertung von K. Falls $\varphi|k$ trivial ist, ist auch φ trivial.*

Beweis. Wäre φ nicht trivial, dann gäbe es ein Element $x \in K$ mit $\varphi(x) > 1$. Sei $f(X) \in k[X]$ das Minimalpolynom für x über k. Es ist $f(X) = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_i \in k$. Dann ist $\varphi(a_0) = \varphi(a_1 \cdot x + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n)$. Nun ist aber
$\varphi(a_i \cdot x^i) = \left\{ \begin{array}{rll} \varphi(x)^i & < \varphi(x^n) & \text{falls } a_i \neq 0 \\ 0 & < \varphi(x^n) & \text{falls } a_i = 0 \end{array} \right\}$ für $0 < i < n$
Da $\varphi|k$ trivial ist, ist $\varphi|k$ nichtarchimedisch und daher ist φ nichtarchimedisch nach Anmerkung 2.1.9. Es folgt:
$1 = \varphi(a_0) = \max\{\varphi(x^n),\ \varphi(a_i \cdot x^i) \mid 0 < i < n\} = \varphi(x^n) > 1$. Widerspruch! □

5.2.10. Korollar. *Sei K ein Körper, der komplett ist für eine archimedische Betragsbewertung φ. Dann gilt:*

$$K \simeq \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{und } \varphi \sim |\ |,$$

wobei $|\ |$ den gewöhnlichen absoluten Betrag von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Beweis. Als archimedische Bewertung ist φ nichttrivial.
Ferner ist nach Satz 2.1.12. (2) $\operatorname{char} K = 0$. Daher enthält K einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Primkörper, also o.B.d.A. $\mathbb{Q} \subseteq K$. Dann ist auch $\varphi|\mathbb{Q}$ archimedisch nach Anmerkung 2.1.9 und folglich $\varphi|\mathbb{Q} \sim |\ |_\mathbb{Q}$ nach Satz 2.2.5. Sei also o.B.d.A. $\varphi|\mathbb{Q} = |\ |_\mathbb{Q}$ der gewöhnliche absolute Betrag von $\mathbb{Q}$. Nach Voraussetzung ist K komplett für φ, enthält also eine Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $\varphi|\mathbb{Q} = |\ |_\mathbb{Q}$ nach Korollar 4.2.3. Diese ist dann isomorph zu $\mathbb{R}$ mit dem gewöhnlichen absoluten Betrag $|\ |_\mathbb{R}$. Wir nehmen daher o.B.d.A. an, daß $\mathbb{R} \subseteq K$ und $\varphi|\mathbb{R} = |\ |_\mathbb{R}$ ist.
1. Fall: $K = \mathbb{R}$. Dann sind wir fertig.
2. Fall: $K \supset \mathbb{R}$:
Wegen $\varphi|\mathbb{R} = |\ |_\mathbb{R}$ ist φ eine Norm des Körpers K bzgl. $|\ |_\mathbb{R}$. Der Satz von Gelfand-Tornheim (Hauptsatz 5.1.3.) liefert dann $K = \mathbb{C}$. Dann ist $K/\mathbb{R}$ algebraisch und φ und $|\ |_\mathbb{C}$ sind beides Fortsetzungen von $|\ |_\mathbb{R}$ auf K. Korollar 5.2.8. liefert dann $\varphi = |\ |_\mathbb{C}$. □

5.2.11. Korollar. *Jeder archimedisch bewertete Körper ist wertisomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$ mit einer zum gewöhnlichen absoluten Betrag von $\mathbb{C}$ äquivalenten Bewertung*

Beweis. Nach Korollar 5.2.10. ist $\widehat{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C}, \end{cases}$ jedenfalls wertisomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$ mit einer Bewertung die äquivalent ist zu $|\ |_\mathbb{C}$, und es ist $K \subseteq \widehat{K}$, wobei die Bewertung auf K die Einschränkung der Bewertung von $\widehat{K}$ ist. □

6. Das Lemma von Hensel

Um eine größere Allgemeinheit zu erreichen, betrachten wir hier zunächst allgemeiner lokale Ringe $(R, \mathfrak{m})$ mit der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie. Noch etwas allgemeiner ist die Situation in dem vorbereitenden Lemma. Wir greifen dabei auf Begriffe und Sätze vor, die erst im Abschnitt 12 genauer erklärt werden. Eine Version für den Spezialfall der Bewertungsringe wird anschließend bewiesen, um auch den Fall nichtdiskreter Bewertungen abzudecken.

6.0.1. Lemma („Bilinear-Lemma"). *(s.* [13, Chap.VIII § 7]*) Seien*
A ein Ring,
$\mathfrak{q}$ ein Ideal in A und
E, E', F drei endlich erzeugte A-Moduln. Sei ferner
A komplett und separiert in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie (s. Definition 12.1.3),
$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}^i \cdot E = (0)$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}^i \cdot E' = (0)$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}^i \cdot F = (0)$,
$\lambda : E \times E' \longrightarrow F$ *eine bilineare Abbildung und*
$\bar{\lambda} : (E/\mathfrak{q}\cdot E) \times (E'/\mathfrak{q}\cdot E') \longrightarrow F/\mathfrak{q}\cdot F$ *die durch λ induzierte bilineare Abbildung.*
Sei nun

(1) $y \in F$, $\xi \in E/\mathfrak{q}\cdot E$, $\xi' \in E'/\mathfrak{q}\cdot E'$ *mit*
$\bar{\lambda}(\xi, \xi') = \bar{y}$ *(Restklasse von y modulo $\mathfrak{q}\cdot F$.),*
(2) $F/\mathfrak{q}\cdot F = \bar{\lambda}(\xi,\ E'/\mathfrak{q}\cdot E') + \bar{\lambda}(E/\mathfrak{q}\cdot E,\ \xi')$.

Dann existieren Elemente
$x \in E$ und $x' \in E'$, so daß gilt:
ξ ist die Restklasse von x modulo $\mathfrak{q}\cdot E$,
ξ' ist die Restklasse von x' modulo $\mathfrak{q}\cdot E'$,
$y = \lambda(x, x')$.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion nach n:
Es existieren Folgen von Elementen $x_n \in E$ und $x'_n \in E'$, so daß gilt:
ξ ist die Restklasse von x_n modulo $\mathfrak{q}\cdot E$,
ξ' ist die Restklasse von x'_n modulo $\mathfrak{q}\cdot E'$,
$y \equiv \lambda(x_n, x'_n) \pmod{\mathfrak{q}^n \cdot F}$:
Für $n = 1$ gilt dies nach Voraussetzung (1), wenn man für x_1 und x'_1 Vertreter für ξ bzw. ξ' aus E bzw E' nimmt.
Seien nun x_n und x'_n schon gefunden. Wegen $y - \lambda(x_n, x'_n) \in \mathfrak{q}^n \cdot F$ kann man schreiben $y - \lambda(x_n, x'_n) = \sum_j a_j \cdot z_j$ mit $a_j \in \mathfrak{q}^n$ und $z_j \in F$. Nach Voraussetzung (2) gibt es Elemente $w_j \in E$ und $w'_j \in E'$ mit $z_j \equiv \lambda(x_n, w'_j) + \lambda(w_j, x'_n) \pmod{\mathfrak{q}\cdot F}$. Daher ist

$$y - \lambda\big(x_n + \textstyle\sum_j a_j \cdot w_j,\ x'_n + \sum_j a_j \cdot w'_j\big) =$$
$$\underbrace{y - \lambda(x_n, x'_n) - \textstyle\sum_j a_j \cdot z_j}_{=0} + \sum_j \underbrace{a_j}_{\in \mathfrak{q}^n} \cdot \underbrace{\{z_j - \lambda(x_n, w'_j) - \lambda(w_j, x'_n)\}}_{\in \mathfrak{q}\cdot F} - \sum_{i,j} \underbrace{a_i \cdot a_j}_{\in \mathfrak{q}^{2n}} \lambda(w_i, w'_j)$$

$\in \mathfrak{q}^{n+1} \cdot F$. Also kann man setzen
$x_{n+1} := x_n + \sum_j a_j \cdot w_j$ und
$x'_{n+1} := x'_n + \sum_j a_j \cdot w'_j$.
Wegen $x_{n+1} - x_n \in \mathfrak{q}^n \cdot E$ ist (x_n) eine Cauchyfolge in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie von E, und ebenso ist (x'_n) eine Cauchyfolge in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie von E'. Da E und E' endlich erzeugte Moduln über dem kompletten Ring A sind, sind sie ebenfalls komplett in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie (Korollar 13.2.6.), also sind die Folgen (x_n)

und (x'_n) konvergent. Seien also $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $x' := \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$.
Nach Konstruktion der x_n ist klar, daß für die Restklassen modulo $\mathfrak{q}\cdot E$ gilt $\bar{x} = \bar{x}_1 = \xi$ und ebenso $\bar{x}' = \bar{x}'_1 = \xi'$ für die Restklassen modulo $\mathfrak{q}\cdot E'$.
Ausserdem ist nach Konstruktion $y - \lambda(x_n, x'_n) \in \mathfrak{q}^n \cdot F$ und daher wegen der Bilinearität von λ
$y - \lambda(x, x') \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n \cdot F = (0)$, d.h. $y = \lambda(x, x')$. □

Bezeichnung. Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein lokaler Ring, $f = f(X) \in R[X]$ ein Polynom aus dem Polynomring $R[X]$ in X über R. Mit $\bar{f} = \bar{f}(X) \in (R/\mathfrak{m})[X]$ bezeichnen wir das Polynom in X über dem Restklassenkörper $\mathfrak{K} := R/\mathfrak{m}$, das aus f entsteht, wenn man alle Koeffizienten durch ihre Restklassen modulo $\mathfrak{m}$ ersetzt, also das Bild von f bei dem natürlichen Homomorphismus $R[X] \longrightarrow (R/\mathfrak{m})[X]$.

6.0.2. Satz (Lemma von Hensel für lokale Ringe). (*s.* [13, Chap.VIII § 7]) *Seien*
$(R, \mathfrak{m})$ *ein kompletter noetherscher lokaler Ring,*
$\mathfrak{K} := R/\mathfrak{m}$,
$f \in R[X]$ *ein Polynom,* $n := \operatorname{grad}(f)$
$\alpha(X), \beta(X) \in \mathfrak{K}[X]$ *Polynome,* α *normiert,*
$\alpha(X)$ *und* $\beta(X)$ *teilerfremd in* $\mathfrak{K}[X]$,
$r := \operatorname{grad}(\alpha)$,
$\bar{f} = \alpha \cdot \beta$.
Dann gibt es zwei Polynome $g, h \in R[X]$ *mit*
g *normiert,* $\operatorname{grad}(g) = r$, $\operatorname{grad}(h) = n - r$,
$\bar{g} = \alpha$, $\bar{h} = \beta$ *und*
$f = g \cdot h$.

Beweis. Seien
$E := \{p \mid p \in R[X],\ \operatorname{grad}(p) \le r\}$
$E' := \{q \mid q \in R[X],\ \operatorname{grad}(q) \le n - r\}$
$F := \{t \mid t \in R[X],\ \operatorname{grad}(t) \le n\}$
$\lambda : E \times E' \longrightarrow F$, definiert durch
$(p, q) \mapsto p \cdot q$.
E, E', F sind endlich erzeugte R-Moduln, λ ist R-bilinear.
Nach dem Krullschen Durchschnittssatz ist dann
$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i \cdot E = (0)$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i \cdot E' = (0)$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i \cdot F = (0)$.
Wende das Bilinear-Lemma 6.0.1. auf diese Situation an mit
$A := R$, $\mathfrak{q} := \mathfrak{m}$, $\xi := \alpha(X)$, $\xi' := \beta(X)$, $\lambda := \lambda$, $y := f(X)$.
Dann ist $\bar{y} = \bar{f} = \alpha \cdot \beta = \bar{\lambda}(\alpha, \beta) = \bar{\lambda}(\xi, \xi')$, also ist die Voraussetzung (1) des Bilinear-Lemmas 6.0.1. erfüllt.
Aber auch die Voraussetzung (2) ist erfüllt:
Nach Definition von F ist $F/\mathfrak{m}\cdot F = \{\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{K}[X],\ \operatorname{grad}(\sigma) \le n\}$. Da nach Voraussetzung $\alpha(X)$ und $\beta(X)$ teilerfremd in $\mathfrak{K}[X]$ sind, läßt sich jedes Polynom $\sigma(X) \in \mathfrak{K}[X]$ als Linearkombination $\sigma(X) = \gamma(X)\cdot\alpha(X) + \delta(X)\cdot\beta(X)$ schreiben mit $\gamma, \delta \in \mathfrak{K}[X]$.
Division mit Rest von δ durch α ergibt $\delta = \varepsilon\cdot\alpha + \delta_1$ mit $\operatorname{grad}\delta_1 < r$, also $\delta_1 \in E/\mathfrak{m}\cdot E$. Man hat dann $\sigma = \gamma_1\cdot\alpha + \delta_1\cdot\beta$, also $\gamma_1\cdot\alpha = \sigma - \delta_1\cdot\beta$. Nun ist $\operatorname{grad}(\sigma) \le n$ und $\operatorname{grad}(\delta_1\cdot\beta) = \operatorname{grad}(\delta_1) + \operatorname{grad}(\beta) \le r + (n-r) = n$; denn es ist $\operatorname{grad}(\bar{f}) \le n$ und daher $\operatorname{grad}(\beta) \le n - r$. Insgesamt ist also $\operatorname{grad}(\gamma_1\cdot\alpha) \le n$ und daher $\operatorname{grad}(\gamma_1) \le n - r$, also ist $\gamma_1 \in E'/\mathfrak{m}\cdot E'$. Es folgt $\sigma \in \lambda(\alpha,\ E'/\mathfrak{m}\cdot E') + \lambda(E/\mathfrak{m}\cdot E,\ \beta)$. Somit ist die Voraussetzung (2) erfüllt.

Aus dem Bilinear-Lemma folgt dann, daß es Polynome $g_0, h_0 \in R[X]$ gibt mit
$\operatorname{grad}(g_0) \leq r$, $\operatorname{grad}(h_0) \leq n - r$, $\bar{g}_0 = \alpha$, $\bar{h}_0 = \beta$ und $f = y = \lambda(g_0, h_0) = g_0 \cdot h_0$.
Bleibt zu zeigen, daß man g_0 durch ein normiertes Polynom ersetzen kann: Sei $g_0(X) = a_r \cdot X^r + \cdots + a_0$ mit $a_i \in R$. Da $\bar{g}_0 = \bar{a}_r \cdot X^r + \ldots$ ein normiertes Polynom vom Grad r ist, ist $\bar{a}_r = \bar{1}$. Insbesondere ist also a_r eine Einheit von S. Sei also $g := a_r^{-1} \cdot g_0$ und $h := a_r \cdot h_0$. Dann ist g normiert und offenbar auch $f = g \cdot h$. Außerdem $\bar{g} = \bar{a}_r^{-1} \cdot \bar{g}_0 = \bar{1}^{-1} \cdot \bar{g}_0 = \bar{g}_0 = \alpha$ und ebenso $\bar{h} = \bar{a}_r \cdot \bar{h}_0 = \bar{h}_0 = \beta$. □

Das obige Lemma deckt für Bewertungen nur den Fall einer diskreten Bewertung ab, da nur hier die Bewertungstopologie mit der durch die Potenzen des maximalen Ideals definierten Topologie übereinstimmt. Um auch den nichtdiskreten Fall zu behandeln brauchen wir:

6.0.3. Satz (Lemma von Hensel für Bewertungsringe). (*s.* [12, § 144].) *Seien*
S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ ein kompletter Bewertungsring,
$\mathfrak{K} := S/\mathfrak{P}$,
$f \in S[X]$ ein Polynom, $n := \operatorname{grad}(f)$
$\alpha(X), \beta(X) \in \mathfrak{K}[X]$ Polynome, α normiert,
$\alpha(X)$ und $\beta(X)$ teilerfremd in $\mathfrak{K}[X]$,
$r := \operatorname{grad}(\alpha)$,
$\bar{f} = \alpha \cdot \beta$.
Dann gibt es zwei Polynome $g, h \in S[X]$ mit
g normiert, $\operatorname{grad}(g) = r$, $\operatorname{grad}(h) = n - r$,
$\bar{g} = \alpha$, $\bar{h} = \beta$ *und*
$f = g \cdot h$.

Beweis. Sei ν die Bewertung zu S. Wenn S diskret ist, ist S Hauptidealring und die Bewertungstopologie stimmt mit der $\mathfrak{P}$-adischen Topologie überein. Dann folgt die Aussage direkt aus dem entsprechenden Satz 6.0.2 für lokale Ringe.
Wenn aber ν nicht diskret ist, ist die Bewertungstopologie von der $\mathfrak{P}$-adischen Topologie verschieden und man muß den Beweis von Satz 6.0.2 noch einmal in etwas modifizierter Form wiederholen:
Seien $a(X), b(X) \in S[X]$ mit $\bar{a} = \alpha$, $\bar{b} = \beta$, $a(X)$ normiert, also
$\operatorname{grad}(a(X)) = \operatorname{grad}(\alpha(X))$ und o.B.d.A auch $\operatorname{grad}(b(X)) = \operatorname{grad}(\beta)$.
Nach Voraussetzung ist
$f - a \cdot b \in \mathfrak{P} \cdot S[X]$.
Falls $f - a \cdot b = 0$ ist sind wir fertig. Andernfalls sei $0 < v_1 < \infty$ der kleinste Wert der Koeffizienten dieser Differenz.
Nach Voraussetzung sind α und β teilerfremd in $\mathfrak{K}[X]$. Also gibt es Polynome $l(X), m(X) \in S[X]$ mit
$l(X) \cdot a(X) + m(X) \cdot b(X) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P} \cdot S[X]}$.
Sei $0 < v_2 \leq \infty$ der kleinste Wert der Koeffizienten des Polynoms
$l(X) \cdot a(X) + m(X) \cdot b(X) - 1 \in S[X]$.
Sei $v := \min\{v_1, v_2\}$ und sei $\pi \in S$ ein Element mit $\nu(\pi) = v$.
Die kanonischen Restklassenabbildungen
$S \to \pi \cdot S$ und
$S[X] \to S[X]/\pi \cdot S[X] = (S/\pi S)[X]$, wobei jedes Polynom aus $S[X]$ auf das Polynom aus $(S/\pi \cdot S)[X]$ abgebildet wird, das entsteht, wenn man alle Koeffizienten durch ihre Restklassen modulo $\pi \cdot S$ ersetzt, bezeichnen wir mit $\tilde{}$.
Dann ist also

$\tilde{f} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}$ und
$\tilde{l} \cdot \tilde{a} + \tilde{m} \cdot \tilde{b} = \tilde{1}$.
Wir setzen nun:
$E := \{p \mid p \in S[X], \operatorname{grad}(p) \leq r\}$
$E' := \{q \mid q \in S[X], \operatorname{grad}(q) \leq n - r\}$
$F := \{t \mid t \in S[X], \operatorname{grad}(t) \leq n\}$
$\lambda : E \times E' \longrightarrow F$, definiert durch
$(p, q) \mapsto p \cdot q$.
E, E', F sind endlich erzeugte freie S-Moduln, λ ist S-bilinear.
Es ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} \pi^i \cdot F = (0)$, weil es für jeden Koeffizienten $c \neq 0$ eines Polynoms aus F ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $i \cdot \nu(\pi) > \nu(c)$. Also liegt das betreffende Polynom nicht in $\pi^i \cdot F$.
Außerdem ist S für die (π)-adische Topologie komplett, denn jede (π)-adische Cauchyfolge ist auch eine Cauchyfolge für die Bewertungstopologie. In dieser hat sie, weil S für ν komplett ist, einen Limes. Dieser ist auch ein (π)-adischer Limes. (Die Bewertungstopologie auf S und die (π)-adische Topologie auf S sind identisch, weil die Wertegruppe archimedisch ist!)
Wende das Bilinear-Lemma 6.0.1. auf diese Situation an mit
$A := S$, $\mathfrak{q} := \pi \cdot S$ und $\xi := \tilde{a}(X)$, $\xi' := \tilde{b}(X)$, $\lambda := \lambda$, $y := f(X)$.
Dann ist $\bar{y} = \tilde{f} = \tilde{a} \cdot \tilde{b} = \bar{\lambda}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \bar{\lambda}(\xi, \xi')$, also ist die Voraussetzung (1) des Bilinear-Lemmas 6.0.1. erfüllt.
Aber auch die Voraussetzung (2) ist erfüllt:
Nach Definition von F ist $F/\pi \cdot F = \{\sigma \mid \sigma \in \widetilde{S}[X], \operatorname{grad}(\sigma) \leq n\}$. Wegen $\tilde{1} = \tilde{l} \cdot \tilde{a} + \tilde{m} \cdot \tilde{b}$. läßt sich jedes Polynom $\sigma(X) \in \widetilde{S}[X]$ als Linearkombination $\sigma(X) = \gamma(X) \cdot \tilde{a}(X) + \delta(X) \cdot \tilde{b}(X)$ schreiben mit $\gamma, \delta \in \widetilde{S}[X]$.
Da $\tilde{a}(X)$ normiert ist, läßt sich $\delta(X)$ durch $\tilde{a}(X)$ mit Rest dividieren. Das ergibt $\delta = \varepsilon \cdot \tilde{a} + \delta_1$ mit $\operatorname{grad} \delta_1 < r$, also $\delta_1 \in E/\pi \cdot E$. Man hat dann $\sigma = \gamma_1 \cdot \tilde{a} + \delta_1 \cdot \tilde{b}$, also $\gamma_1 \cdot \tilde{a} = \sigma - \delta_1 \cdot \tilde{b}$.
Nun ist $\operatorname{grad}(\sigma) \leq n$ und $\operatorname{grad}(\delta_1 \cdot \tilde{b}) \leq \operatorname{grad}(\delta_1) + \operatorname{grad}(\tilde{b}) \leq r + (n - r) = n$; denn es ist $\operatorname{grad}(\tilde{f}) \leq n$ und daher $\operatorname{grad}(\tilde{b}) = \operatorname{grad}(\beta) \leq n - r$. Insgesamt ist also $\operatorname{grad}(\gamma_1 \cdot \tilde{a}) \leq n$ und daher $\operatorname{grad}(\gamma_1) \leq n - r$, weil $\tilde{a}$ normiert ist. Also ist $\gamma_1 \in E'/\pi \cdot E'$. Es folgt $\sigma \in \bar{\lambda}(\tilde{a},\, E'/\pi \cdot E') + \bar{\lambda}(E/\pi \cdot E,\, \tilde{b})$. Somit ist die Voraussetzung (2) erfüllt.
Aus dem Bilinear-Lemma folgt dann, daß es Polynome $g_0, h_0 \in S[X]$ gibt mit $\operatorname{grad}(g_0) \leq r$, $\operatorname{grad}(h_0) \leq n - r$, $\tilde{g}_0 = \tilde{a}$, $\tilde{h}_0 = \tilde{b}$ und $f = y = \lambda(g_0, h_0) = g_0 \cdot h_0$.
Aus $\tilde{g}_0 = \tilde{a}$ folgt, daß erst recht $\bar{g}_0 = \bar{a} = \alpha$ und ebenso $\bar{h}_0 = \beta$ gilt, weil $\pi \in \mathfrak{P}$.
Bleibt zu zeigen, daß man g_0 durch ein normiertes Polynom ersetzen kann: Sei $g_0(X) = a_r \cdot X^r + \cdots + a_0$ mit $a_i \in S$. Da $\bar{\alpha} = \bar{g}_0 = \bar{a}_r \cdot X^r + \ldots$ ein normiertes Polynom vom Grad r ist, ist $\bar{a}_r = \bar{1}$. Insbesondere ist also a_r eine Einheit von S.
Sei also $g := a_r^{-1} \cdot g_0$ und $h := a_r \cdot h_0$. Dann ist g normiert und offenbar auch $f = g \cdot h$.
Außerdem $\bar{g} = \bar{a}_r^{-1} \cdot \bar{g}_0 = \bar{1}^{-1} \cdot \bar{g}_0 = \bar{g}_0 = \alpha$ und ebenso $\bar{h} = \bar{a}_r \cdot \bar{h}_0 = \bar{h}_0 = \beta$. □

6.0.4. Korollar. *Sei K komplett für die Exponentenbewertung ν und $f(X) := a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Dann gilt* $\min\{\nu(a_n), \nu(a_{n-1}), \ldots, \nu(a_0)\} = \min\{\nu(a_n), \nu(a_0)\}$

Beweis. Sei S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ der Bewertungsring von ν.
Nach Multiplikation mit einem geeigneten a_i^{-1} kann man o.B.d.A. annehmen $\min\{\nu(a_n), \nu(a_{n-1}), \ldots, \nu(a_0)\} = 0$, d.h. $f \in S[X]$.

Wäre nun $\nu(a_n) > 0$ und auch $\nu(a_0) > 0$, so gäbe es ein r mit $0 < r < n$, so daß $\nu(a_r) = 0$ und $\nu(a_{r+i}) > 0$ für $i = 1, \ldots, n-r$. Dann ist
$\bar{f} = \underset{\neq 0}{\bar{a}_r} \cdot X^r + \bar{a}_{r-1} \cdot X^{r-1} + \cdots + \bar{a}_0 \in (S/\mathfrak{P})[X]$.
Sei nun $\alpha(X) := X^r + \frac{\bar{a}_{r-1}}{\bar{a}_r} \cdot X^{r-1} + \cdots + \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_r}$. und $\beta := \bar{a}_r$.
Dann ist $\bar{f} = \alpha \cdot \beta$ und $(\alpha) + (\beta) = (\bar{1})$, weil $\bar{a}_r$ eine Einheit im Polynomring ist. Nach dem Lemma von Hensel Satz 6.0.3. gibt es dann zwei Polynome $g, h \in S[X]$ mit $\operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(\alpha) = r > 0$ und $\operatorname{grad}(h) = n - r > 0$, so daß $f = g \cdot h$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität von f. □

7. Fortsetzung einer Bewertung auf eine algebraische Körpererweiterung. Kompletter Fall

Es sei im Folgenden
K/k eine algebraische Körpererweiterung,
φ eine Betragsbewertung von k.
Problem: Läßt sich φ auf K fortsetzen? Wieviele Fortsetzungen gibt es?

In Hilfssatz 5.2.9 wurde gezeigt, daß jede Fortsetzung der trivialen Bewertung von k auf K ebenfalls trivial ist. Andererseits ist die triviale Bewertung von K auch eine Fortsetzung der trivialen Bewertung von k. Es folgt:

7.0.1. *Anmerkung.* Die triviale Bewertung von k besitzt genau eine Fortsetzung auf K, nämlich die triviale Bewertung von K.

Wir machen daher für das folgende die
Voraussetzung: φ ist nicht trivial.
Außerdem betrachten wir in diesem Abschnitt den Fall, daß k komplett für φ ist („kompletter Fall“).

7.0.2. Satz. *Sei*
k komplett für die Betragsbewertung φ,
K/k eine algebraische Körpererweiterung.
Dann existiert genau eine Fortsetzung Φ von φ auf K. Wenn K/k endlich algebraisch ist, ist auch K komplett für Φ.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt aus Korollar 5.2.8. Bleibt zu zeigen, daß eine Fortsetzung Φ existiert und daß K für Φ komplett ist, falls $[K:k] < \infty$ ist.
1.Fall: φ archimedisch: Nach Korollar 5.2.10. ist $k \simeq \mathbb{R}$ oder $k \simeq \mathbb{C}$ und $\varphi \sim |\ |$ der gewöhnliche absolute Betrag. Nun ist K/k algebraisch und $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen. Also ist auch $K \simeq \mathbb{R}$ oder $K \simeq \mathbb{C}$. Für $K = k$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$, $\varphi = |\ |_{\mathbb{R}}$ Dann ist $\Phi := |\ |_{\mathbb{C}}$ eine Fortsetzung von φ auf K und K ist komplett für Φ. □

2.Fall: φ nichtarchimedisch.
Existenz der Fortsetzung von φ:
Vorbemerkung: Wir können o.B.d.A. voraussetzen, daß $[K:k] < \infty$ ist. Falls es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von φ auf alle endlichen algebraischen Körpererweiterungen von k gibt, zeigt man mittels des Lemmas von Zorn leicht, daß es dann auch eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von φ auf eine beliebige algebraische Körpererweiterung von k gibt. Sei also von nun an o.B.d.A.
Voraussetzung: $[K:k]$ *endlich.*
2a) Fall K/k separabel: Sei $\widetilde{K}/k$ die normale Hülle von K/k. Falls es eine Fortsetzung von φ auf $\widetilde{K}$ gibt, ist die Einschränkung auf K dieser Fortsetzung eine Fortsetzung von φ auf K. Daher machen wir weiter o.B.d.A. die
Voraussetzung K/k galoissch.
Sei $n := [K:k]$. Dann gibt es genau n paarweise verschiedene k-Automorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ von K/k. Für alle $x \in K$ ist $\mathrm{N}(x) := \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(x)$ die Norm von x in K/k. Insbesondere ist also $\mathrm{N}(a) = a^n$ für alle $a \in k$ Für $x, y \in K$ ist $\mathrm{N}(x \cdot y) = \mathrm{N}(x) \cdot N(y)$. Wir definieren nun

$$\Phi(x) := \varphi\left(\mathrm{N}(x)\right)^{\frac{1}{n}} \text{ für alle } x \in K.$$

$((\ )^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet dabei die nichtnegative n-te Wurzel).
Dann ist

$$\Phi : K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ und } \Phi|k = \varphi\,.$$

Φ ist also als Funktion eine Fortsetzung von φ. Bleibt zu zeigen:
Behauptung: Φ ist eine Bewertung von K.
Dazu zeigen wir, daß die Eigenschaften (1) und (2) einer Betragsbewertung aus Definition 2.1.2. und die Eigenschaft (3^*) aus Satz 2.1.6. erfüllt sind.
Beweis: (1) $\Phi(x) \geq 0$, und $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\mathrm{N}(x)) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{N}(x) = 0 \Leftrightarrow$ Es existiert ein i mit $\sigma_i(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ weil σ_i ein Automorphismus ist.
(2) $\Phi(x\cdot y) = \varphi(\mathrm{N}(x\cdot y))^{\frac{1}{n}} = \varphi(\mathrm{N}(x)\cdot\mathrm{N}(y))^{\frac{1}{n}} = \varphi(\mathrm{N}(x))^{\frac{1}{n}} \cdot \varphi(\mathrm{N}(y))^{\frac{1}{n}} = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$.
(3^*) $\Phi(x+y) \overset{!}{\leq} \max\{\Phi(x), \Phi(y)\}$
Beweis: O.B.d.A. seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$ und etwa $\Phi(x) \geq \Phi(y)$. Nach (2) hat man $\Phi(x+y) = \Phi(x\cdot(1+\frac{y}{x})) = \Phi(x) \cdot \Phi(1+\frac{y}{x})$. Und $\Phi(\frac{y}{x}) = \frac{\Phi(y)}{\Phi(x)} \leq 1$ nach Annahme.
Wir zeigen nun
Behauptung: Aus $\Phi(z) \leq 1$ folgt $\Phi(1+z) \leq 1$.
(Daraus ergibt sich dann aus der obigen Situation $\Phi(1+\frac{y}{x}) \leq 1$, also
$\Phi(x+y) \leq \Phi(x)$, wie behauptet.)
Beweis: Sei $G' := \{\sigma \mid \sigma \in G(K/k), \sigma(z) = z\}$ die Fixgruppe von z. Zerlege $G := G(K/k) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ in Linksnebenklassen bzgl. G': O.B.d.A. $G = \bigcup_{i=1}^{r} \sigma_i \cdot G'$. Sei

$$F(X) := \prod_{\sigma\in G}(X - \sigma(z)) = \prod_{\substack{i=1,\ldots,r\\ \rho\in G'}}(X - \sigma_i\cdot\underbrace{\rho(z)}_{=z}) = \Big(\prod_{i=1}^{r}(X-\sigma_i(z)\Big)^s \text{ mit } s := |G'|.$$

Sei also $f(X) := \prod_{i=1}^{r}(X - \sigma_i(z))$. Dann ist
$\mathrm{N}(z) = (-1)^n \cdot F(0) = (-1)^n \cdot (f(0))^s$.
Ferner sind $\sigma_1(z), \ldots, \sigma_r(z)$ alle Konjugierten von z in K/k. Also ist
$\{\sigma(\sigma_1(z)), \ldots, \sigma(\sigma_r(z))\} = \{\sigma_1(z), \ldots, \sigma_r(z)\}$ und daher $f^\sigma(X) = f(X)$ für alle $\sigma \in G$. Es folgt $f(X) \in k[X]$.
Außerdem ist $G' = G(K/k(z)) \Rightarrow [K : k(z)] = |G'| = s \Rightarrow [k(z) : k] = \frac{n}{s} = r \Rightarrow$ $f(X)$ ist das Minimalpolynom für z über k und daher ist $f(X)$ irreduzibel.
Nun ist $k(z) = k(1+z)$. Sei
$g(X) := f(X-1)$. Dann ist $g(1+z) = 0$ und $\mathrm{grad}\,(g) = \mathrm{grad}\,(f) = r$. Daher ist g das Minimalpolynom für $1+z$ über k. Wie oben folgt
$\mathrm{N}(1+z) = (-1)^n \cdot g(0)^s$. Aber
$g(0)^s = f(-1)^s = \big((-1)^r + a_{r-1}\cdot(-1)^{r-1} + \cdots + a_0\big)^s$, wenn $f(X) = X^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i \cdot X^i$ ist. Da f irreduzibel und k komplett ist, folgt aus Korollar 6.0.4., umgeschrieben auf Betragsbewertungen,
$\max\{\varphi(1), \varphi(a_{r-1}), \ldots, \varphi(a_0)\} = \max\{\varphi(1), \varphi(a_0)\} = \max\{1, \varphi(a_0)\}$.
Falls nun $\Phi(z) \leq 1$ ist, ist auch $\varphi(a_0) \leq 1$; denn es ist
$\Phi(z) = \varphi(\mathrm{N}(z))^{\frac{1}{n}} = \varphi(a_0^s)^{\frac{1}{n}} = \varphi(a_0)^{\frac{s}{n}}$. Es folgt
$\Phi(1+z) =$

$$\varphi\left(g(0)^s\right)^{\frac{1}{n}} \leq \max\{\underbrace{\varphi((-1)^r)}_{=1}, \varphi(a_{r-1}), \ldots, \varphi(a_0)\}^{\frac{s}{n}} = \max\{1, \underbrace{\varphi(a_0)}_{\leq 1}\}^{\frac{s}{n}} \leq 1$$

2b) Fall K/k rein inseparabel: In diesem Fall ist $p := \mathrm{char}(K) > 0$ und $[K : k] = p^r$ mit einem $r \in \mathbb{N}_0$. Es ist dann $x^{p^r} \in k$ für alle $x \in K$. Damit die Produktregel gilt,

muß man also zwangsläufig definieren:

$$\Phi(x) := \varphi\left(x^{p^r}\right)^{\frac{1}{p^r}}$$

Die Eigenschaften (1) und (2) einer Betragsbewertung aus Definition 2.1.2. sind unmittelbar klar. Aber auch die Eigenschaft (3*) von Satz 2.1.6. rechnet man sofort nach:
$\Phi(x+y) = \varphi\left((x+y)^{p^r}\right)^{\frac{1}{p^r}} = \varphi\left(x^{p^r}+y^{p^r}\right)^{\frac{1}{p^r}} \leq \max\{\varphi\left(x^{p^r}\right), \varphi\left(y^{p^r}\right)\}^{\frac{1}{p^r}} =$
$\max\{\varphi\left(x^{p^r}\right)^{\frac{1}{p^r}}, \varphi\left(y^{p^r}\right)^{\frac{1}{p^r}}\} = \max\{\Phi(x), \Phi(y)\}$.
Beachte: Die Voraussetzung, daß k komplett ist, wurde im Fall 2b) nicht benutzt.

2c) Falls K/k beliebig: Sei K_{sep} der separable Abschluß von k in K. Dann ist K_{sep}/k separabel algebraisch und K/K_{sep} rein inseparabel. Nach 2a) läßt sich dann φ auf K_{sep} fortsetzen und nach Fall 2b) weiter auf K.

Bleibt noch zu zeigen, daß $\boldsymbol{K}$ ***komplett*** ist, ***falls*** $\boldsymbol{[K:k] < \infty}$ ist.
Sei φ eine beliebige nichttriviale Betragsbewertung von k und Φ eine Fortsetzung auf K. Wir zeigen, daß K für Φ komplett ist, falls k für φ komplett ist:
Sei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine k-Basis von K. Dann ist Φ insbesondere eine k-Vektorraumnorm auf K bzgl. φ. Da k komplett für φ ist, ist Φ nach Hauptsatz 5.2.6. als Vektorraumnorm äquivalent zur Maximumsnorm $\| \ \|_0$ bzgl. $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Sei also $a_j = \sum_i \alpha_{ij} \cdot \omega_i$ mit $\alpha_{ij} \in k$ eine Cauchyfolge bzgl. Φ aus K. Dann ist nach Definition von $\| \ \|_0$ $\|a_j - a_j\|_0 \geq \varphi(\alpha_{i\ell} - \alpha_{ij})$ für alle i, j, ℓ. Also sind die $(\alpha_{ij})_j$ Cauchyfolgen in k bzgl. φ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da k komplett ist, existieren also $\alpha_i := \overset{\varphi}{\lim\limits_{j\to\infty}} \alpha_{ij} \in k$.
Sei $a := \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \omega_i$. Dann ist $a \in K$ und
$\Phi(a - a_j) \leq \sum_{i=1}^n \Phi(\alpha_i - \alpha_{ij}) \cdot \Phi(\omega_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\varphi(\alpha_i - \alpha_{ij})}_{\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \Phi(\omega_i) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Also $a = \overset{\Phi}{\lim\limits_{j\to\infty}} a_j$, und folglich ist K komplett. □

8. Verzweigungsindex und Restklassengrad

Es seien im Folgenden stets:
K/k eine Körpererweiterung,
w eine Exponentenbewertung von K,
$\nu := w|k$,
S der Bewertungsring von w,
$\mathfrak{P}$ das maximale Ideal von S,
$\mathfrak{K} := S/\mathfrak{P}$ der Restklassenkörper von S,
s der Bewertungsring von ν,
$\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von s,
$\mathfrak{k} := s/\mathfrak{p}$ der Restklassenkörper von s.

8.0.1. *Anmerkung.* $\mathcal{W}(\nu)$ ist eine additive Untergruppe von $\mathcal{W}(w)$.
$S \cap k = s, \quad \mathfrak{P} \cap k = \mathfrak{P} \cap s = \mathfrak{p}$.
Also ist $\mathfrak{K} = S/\mathfrak{P} \supseteq (s+\mathfrak{P})/\mathfrak{P} \simeq s/\mathfrak{p} = \mathfrak{k}$ im Sinne kanonischer Isomorphie.

8.0.2. Definition. Der Index von $\mathcal{W}(\nu)$ in $\mathcal{W}(w)$ heißt der „Verzweigungsindex“ von w über ν (oder von S über s):

$$\mathrm{e}(S/s) = \mathrm{e}(K/k)_w = \mathrm{e}(w/\nu) := [\mathcal{W}(w) : \mathcal{W}(\nu)] \leq \infty \ .$$

Ferner heißt der Körpergrad

$$\mathrm{f}(S/s) = \mathrm{f}(K/k)_w = \mathrm{f}(w/\nu) := [\mathfrak{K} : \mathfrak{k}] \leq \infty$$

der „Restklassengrad“ von w über ν (oder von S über s).

8.0.3. *Beispiel.* Sei w diskret und normiert (also $\mathcal{W}(w) = \mathbb{Z}$). Als additive Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist dann $\mathcal{W}(\nu)$, wie jede abelsche Gruppe, ein $\mathbb{Z}$-Modul, also ein Ideal in $\mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ Hauptidealring ist, ist $\mathcal{W}(\nu)$ von der Form $\mathcal{W}(\nu) = e \cdot \mathbb{Z}$.
Es folgt $[\mathcal{W}(w) : \mathcal{W}(\nu)] = e$, d.h. $e = \mathrm{e}(w/\nu)$.

8.0.4. *Anmerkung.* Verzweigungsindex und Restklassengrad ändern sich nicht beim Übergang zu einer äquivalenten Bewertung.
Sie bleiben ebenfalls gleich beim Übergang zur Komplettierung in folgendem Sinne:
Sei $\begin{matrix} K & \hookrightarrow & \widehat{K} \\ w & & \hat{w} \end{matrix}$ eine Komplettierung von K bzgl. w,
$\hat{k}$ der topologische Abschluß von k in $\hat{K}$,
$\hat{\nu} := \hat{w}|\hat{k}$.
Dann ist $(\hat{k}, \hat{\nu})$ nach Korollar 4.2.3. eine Komplettierung von k bzgl. $\nu := \hat{w}|k$ und man hat nach Satz 4.2.4.:

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(\hat{w}) & = & \mathcal{W}(w) \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \mathcal{W}(\hat{\nu}) & = & \mathcal{W}(\nu) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{e}(\hat{w}/\hat{\nu}) = \mathrm{e}(w/\nu)\,.$$

Ferner gilt nach Satz 4.2.4. in kanonischer Weise:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \widehat{S}/\widehat{\mathfrak{P}} & = & (S+\widehat{\mathfrak{P}})/\widehat{\mathfrak{P}} & \simeq & S/\mathfrak{P} \\ \cup\!| & & & & \cup\!| \\ \widehat{s}/\widehat{\mathfrak{p}} & = & (s+\widehat{\mathfrak{p}})/\widehat{\mathfrak{p}} & \simeq & s/\mathfrak{p} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{f}(\hat{w}/\hat{\nu}) = \mathrm{f}(w/\nu)\,.$$

8.0.5. *Anmerkung.* Sei
K/k eine Körpererweiterung,
w eine Exponentenbewertung von K,
S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ der Bewertungsring von w,

ν eine nichttriviale Exponentenbewertung von k,
s mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ der Bewertungsring von ν.
Dann gilt:
$w|k \sim \nu \iff S \cap k = s \iff \mathfrak{P} \cap k \supseteq \mathfrak{p} \iff \mathfrak{P} \cap k = \mathfrak{p}$.

Beweis. Offenbar ist $S \cap k$ der Bewertungsring von $w|k$ und
$\mathfrak{P} \cap k = \{x | x \in k, w(x) > 0\}$ sein maximales Ideal.
Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.3.12. (3). □

8.0.6. Satz. *Seien*
$\Pi_i \in K^\times$, $i = 1, \dots, r$, *so daß die Restklassen* $w(\Pi_i) + \mathcal{W}(\nu)$ *in* $\mathcal{W}(w)/\mathcal{W}(\nu)$ *paarweise verschieden sind,*
$\omega_{ij} \in S$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots t$, *so daß für jedes* i *die Restklassen* $\bar{\omega}_{ij} := \omega_{ij} + \mathfrak{P} \in \mathfrak{K}$ *linear unabhängig über* $\mathfrak{k}$ *sind.*
Ferner seien $a_{ij} \in k$ *beliebig. Dann gilt:*
$w\big(\sum\limits_{i,j} a_{ij} \cdot \Pi_i \cdot \omega_{ij}\big) = \min\{w(a_{ij} \cdot \Pi_i) \mid i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, t\}$.

Beweis. Falls *alle* $a_{ij} = 0$ sind, ist die Aussage trivial.
Falls *für ein* i *alle* $a_{ij} = 0$ sind, kann man das betreffende i auf beiden Seiten der Behauptung weglassen. Durch passende Numerierung kann man also annehmen:
Für jedes i existiert ein j_i mit $a_{ij_i} \neq 0$.
Sei also nun $a_i \in \{a_{i1}, \dots, a_{it}\}$ so gewählt, daß $w(a_i) = \min\{w(a_{i1}), \dots, w(a_{it})\}$. Dann ist $a_i \neq 0$ und $w\left(\frac{a_{ij}}{a_i}\right) \geq 0$ für alle $j = 1, \dots, t$ und $w\left(\frac{a_{ij_i}}{a_i}\right) = 0$ für ein passendes j_i. Für alle $i = 1, \dots, r$ ist dann $w\big(\sum_{j=1}^t \frac{a_{ij}}{a_i} \cdot \omega_{ij}\big) = 0$; denn es ist jedenfalls $w\big(\sum_{j=1}^t \frac{a_{ij}}{a_i} \cdot \omega_{ij}\big) \geq 0$, und wäre $w\big(\sum_{j=1}^t \frac{a_{ij}}{a_i} \cdot \omega_{ij}\big) > 0$, so wäre $\sum_{j=1}^t \frac{a_{ij}}{a_i} \cdot \omega_{ij} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$. Es sind aber nicht alle Koeffizienten $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$, da $s \ni \frac{a_{ij_i}}{a_i} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ ist. Das wäre ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkigkeit der $\bar{\omega}_{i1}, \dots, \bar{\omega}_{it}$ über $\mathfrak{k}$.
Also hat man
$w\big(\sum_{j=1}^t a_{ij} \cdot \omega_{ij}\big) = w(a_i) + \underbrace{w\big(\sum_{j=1}^t \frac{a_{ij}}{a_i} \cdot \omega_{ij}\big)}_{=0} = w(a_i)$ für alle $i = 1, \dots, r$.
Sei nun $\xi := \sum_{ij} a_{ij} \cdot \Pi_i \cdot \omega_{ij} = \sum_{i=1}^r \big(\underbrace{\sum_{j=1}^t a_{ij} \cdot \omega_{ij}}_{=:\eta_i}\big) \cdot \Pi_i$. Wie eben gezeigt, ist dann
$w(\eta_i) = w(a_i) \in \mathcal{W}(\nu)$, weil $a_i \in k^\times$. Es folgt
$w(\eta_i \cdot \Pi_i) = w(\Pi_i) + w(\eta_i) \equiv w(\Pi_i) \pmod{\mathcal{W}(\nu)}$. Nach Voraussetzung sind die Restklassen $w(\Pi_i) + \mathcal{W}(\nu)$ für $i = 1, \dots, r$ paarweise verschieden. Also sind erst recht die $w(\eta_i \cdot \Pi_i)$ paarweise verschieden, so daß man nach der Minimumregel hat $w(\xi) = \min\{w(\eta_i \cdot \Pi_i) \mid i = 1, \dots, r\} = \min\{w(a_i) + w(\Pi_i) \mid i = 1, \dots, r\} = \min\{w(a_{ij}) + w(\Pi_i) \mid i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, t\}$ weil nach Auswahl von a_i gilt $w(a_i) = \min\{w(a_{ij}) \mid j = 1, \dots, t\}$. Man hat also
$w(\xi) = \min\{w(a_{ij} \cdot \Pi_i) \mid i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, t\}$. □

8.0.7. Korollar. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 8.0.6. gilt* $\{\Pi_i \cdot \omega_{ij} \mid i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, t\}$ *ist linear unabhängig über* k.

Beweis. Sei $\sum_{i,j} a_{ij} \cdot \Pi_i \cdot \omega_{ij} = 0$ mit $a_{ij} \in k$. Nach Satz 8.0.6 ist dann
$\infty = w\big(\sum_{i,j} a_{ij} \cdot \Pi_i \cdot \omega_{ij}\big) = \min\{w(a_{ij} \cdot \Pi_i) \mid i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, t\}$. Es folgt
$w(a_{ij}) = \infty$, also $a_{ij} = 0$ für alle $i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, t$. □

8.0.8. Korollar. *Sei K/k endlich algebraisch. Dann gilt:*

$$\mathrm{e}(w/\nu)\cdot\mathrm{f}(w/\nu)\le[K:k]\,,$$

insbesondere ist also $\mathrm{e}(w/\nu)\le[K:k]<\infty$, $\mathrm{f}(w/\nu)\le[K:k]<\infty$

Beweis. Wäre $\mathrm{e}(w/\nu)=\infty$ oder $\mathrm{f}(w/\nu)=\infty$, so gäbe es unendlich viele Π_i oder ω_{ij}, jedenfalls unendlich viele $\Pi_i\cdot\omega_{ij}$, die nach Korollar 8.0.7. über k linear unabhängig wären im Widerspruch zu $[K:k]<\infty$: Also sind $e:=\mathrm{e}(w/\nu)<\infty$ und $f:=\mathrm{f}(w/\nu)<\infty$. Es gibt also
$\Pi_1,\dots,\Pi_e$, so daß die $w(\Pi_i)$ ein volles Repräsentantensystem für $\mathcal{W}(w)/\mathcal{W}(\nu)$ ist und
$\omega_1,\dots,\omega_f$, so daß die Restklassen $\bar\omega_1,\dots,\bar\omega_f$ eine Basis von $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ bilden. Nach Korollar 8.0.7. sind dann die $e\cdot f$ Elemente $\{\Pi_i\cdot\omega_j\mid i=1,\dots,e;\ j=1,\dots,f\}$ linear unabhängig über k, also $e\cdot f\le[K:k]$. □

8.0.9. Korollar. *Sei $[K:k]<\infty$ und bezeichne $e:=\mathrm{e}(w/\nu)$, $f:=\mathrm{f}(w/\nu)=[\mathfrak{K}:\mathfrak{k}]$. Dann gilt:*

(1) *Sei $[K:k]=f$ und $\omega_1,\dots,\omega_f\in S$ so daß die Restklassen $\bar\omega_1,\dots,\bar\omega_f$ modulo $\mathfrak{P}$ eine Basis von $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ bilden. Dann ist*

$$S=\bigoplus_{j=1}^{f}s\cdot\omega_j.$$

(2) *Sei w diskret und normiert und seien*
$\Pi_i\in S$ mit $w(\Pi_i)=i$ für $i=0,\dots,e-1$.
Für jedes $i\in\{0,1,\dots,e-1\}$ seien
$\omega_{ij}\in S$, so daß die Restklassen $\bar\omega_{i1},\dots,\bar\omega_{if}$ modulo $\mathfrak{P}$ eine Basis von $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ bilden.
Ferner gelte $e\cdot f=[K:k]$ (Gradrelation). Dann ist

$$S=\bigoplus_{\substack{i=0,\dots,e-1\\ j=1,\dots,f}}s\cdot\Pi_i\cdot\omega_{ij}.$$

Beweis. (1): Nach Korollar 8.0.7 mit $r:=1$, $\Pi_1:=1$ und $\omega_{1j}:=\omega_j$, sind
$\{\omega_j\mid j=1,\dots,f\}$ gerade $f=[K:k]$ über k linear unabhängige Elemente von K, also eine k-Basis von K. Dann ist
$\sum_j s\cdot\omega_j=\bigoplus_j s\cdot\omega_j\subseteq S$.
Umgekehrt sei $x\in S$ beliebig. Dann ist $x=\sum_j a_j\cdot\omega_j$ mit gewissen $a_j\in k$, weil die ω_j eine k-Basis bilden. Wir zeigen, daß alle a_j in s liegen ($\Rightarrow$(1)).
Beweis: Nach Satz 8.0.6 ist $0\le w(x)=\min\{w(a_j)\mid j=1,\dots,f\}$ Also ist $\nu(a_j)=w(a_j)\ge 0$ für alle $j=1,\dots,f$, und daher liegen alle a_j in s.
(2): Nach Korollar 8.0.7 sind $\{\Pi_i\cdot\omega_{ij}\mid i=0,\dots,e-1;\ j=1,\dots,f\}$ gerade $e\cdot f=[K:k]$ über k linear unabhängige Elemente von K, also eine k-Basis von K. Dann ist $\sum_{i,j}s\cdot\Pi_i\cdot\omega_{ij}=\bigoplus_{i,j}s\cdot\Pi_i\cdot\omega_{ij}\subseteq S$.
Umgekehrt sei $x\in S$ beliebig. Dann ist $x=\sum_{i,j}a_{ij}\cdot\Pi_i\cdot\omega_{ij}$ mit gewissen $a_{ij}\in k$, weil die $\Pi_i\cdot\omega_{ij}$ eine k-Basis bilden. Wir zeigen, daß alle a_{ij} in s liegen ($\Rightarrow$(2)).
Beweis: Nach Satz 8.0.6 ist $0\le w(x)=\min\{w(a_{ij}\cdot\Pi_i)\mid i=0,\dots,e-1;\ j=1,\dots,f\}$
Also ist $w(a_{ij}\cdot\Pi_i)\ge 0$ für alle $i=0,\dots,e-1;\ j=1,\dots,f$. Es folgt
$\nu(a_{ij})=w(a_{ij})\ge -w(\Pi_i)>-e$ für alle i,j. Es folgt dann $\nu(a_{ij})\ge 0$ für alle i,j,

weil $\nu(a_{ij}) \in \mathcal{W}(\nu) \cup \{\infty\} = e \cdot \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ nach Beispiel 8.0.3., und daher liegen alle a_{ij} in s. □

8.0.10. Satz. *Sei*
$[K : k] =: n < \infty$
ν mit dem Bewertungsring s und dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ eine diskrete Bewertung von k,
w mit dem Bewertungsring S und dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ eine Fortsetzung von ν auf K,
$e := \mathrm{e}(w/\nu)$, $f := \mathrm{f}(w/\nu)$.
Dann gilt:

(1) *w ist diskret und $S \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{P}^e$.*

Sei ferner k komplett für ν. Dann existiert nach Satz 7.0.2. genau eine Fortsetzung w von ν auf K. Sei o.B.d.A. w normiert. Dann gilt weiter:

(2) $e \cdot f = n$ *„Gradrelation“*

(3) *Seien $\Pi_0, \ldots, \Pi_{e-1} \in S$ mit $w(\Pi_i) = i$,*
$\omega_1, \ldots, \omega_f \in S$ so daß die Restklassen $\omega_i + \mathfrak{P}$ eine Basis für $S/\mathfrak{P}$ über $s/\mathfrak{p}$ bilden. Dann ist

$$S = \bigoplus_{\substack{i=0,\ldots,e-1 \\ j=1,\ldots,f}} s \cdot \Pi_i \cdot \omega_j \,.$$

Beweis. O.B.d.A. ν nicht trivial.
(1): Da ν diskret ist, gibt es ein $\pi \in s$, so daß $w(\pi) = \nu(\pi)$ der kleinste positive Wert in $\mathcal{W}(\nu)$ ist. Dann ist $\mathcal{W}(\nu) = \nu(\pi) \cdot \mathbb{Z}$ (und $\mathfrak{p} = s \cdot \pi$ nach Satz 2.3.12. (4) Zusatz). Für zwei Elemente $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{W}(w)$ mit
$0 < \mu_1 < \mu_2 < w(\pi)$ gilt $0 < \mu_2 - \mu_1 < w(\pi)$, also $\mu_1 \not\equiv \mu_2 \pmod{\mathcal{W}(\nu)}$. Es gibt also höchstens $e = \mathrm{e}(w/\nu)$ solche Elemente ($e < \infty$ nach Korollar 8.0.8). Also gibt es auch ein kleinstes positives Element in $\mathcal{W}(w)$, d.h. w ist ebenfalls diskret.
Normiere o.B.d.A. $\mathcal{W}(w) = \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathcal{W}(\nu) = e \cdot \mathbb{Z}$ nach Beispiel 8.0.3., also $\nu(\pi) = e$ und daher $S \cdot \mathfrak{p} = S \cdot \pi = \mathfrak{P}^e$. □
(3): Sind $\Pi_i \in S$ mit $w(\Pi_i) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, e-1$ und $\omega_1, \ldots, \omega_f \in S$, so daß die Restklassen der ω_j modulo $\mathfrak{P}$ eine Basis von $S/\mathfrak{P}$ über $s/\mathfrak{p}$ bilden, so folgt aus Korollar 8.0.7., daß $\{\Pi_i \cdot \omega_j \mid i = 0, 1, \ldots, e-1;\ j = 1, \ldots, f\}$ linear unabhängig über k sind. Ferner gilt trivialerweise $S \supseteq \sum_{i,j} s \cdot \Pi_i \cdot \omega_j$. Bleibt zu zeigen, daß auch $S \subseteq \sum_{i,j} s \cdot \Pi_i \cdot \omega_j$ gilt und daß die Summe eine direkte Summe ist.
Beweis: Sei $\mathfrak{r}$ ein Vertretersystem aus s für die Restklassen von $s/\mathfrak{p}$ mit $0 \in \mathfrak{r}$. Jedes Element $x \in S$ schreibt sich modulo $\mathfrak{P}$ in der Form $x \equiv \sum_{j=1}^{f} \alpha_j \cdot \omega_j$ mit $\alpha_j \in s$. In dem man jedes α_j durch den Vertreter $\beta_j \in \mathfrak{r}$ seiner Restklasse modulo $\mathfrak{p}$ ersetzt, erhält man
$x \equiv \sum_{j=1}^{f} \beta_j \cdot \omega_j \pmod{\mathfrak{P}}$ mit $\beta_j \in \mathfrak{r}$.
Hat man ferner $\sum_{j=1}^{f} \beta_j \cdot \omega_j \equiv \sum_{j=1}^{f} \beta'_j \cdot \omega_j \pmod{\mathfrak{P}}$ mit $\beta_j, \beta'_j \in \mathfrak{r}$, so folgt $\sum_{j=1}^{f} (\beta_j - \beta'_j) \cdot \omega_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$, also $\beta_j \equiv \beta'_j \pmod{\mathfrak{P}}$, weil die $\omega_1, \ldots, \omega_f$ linear unabhängig modulo $\mathfrak{P}$ über s sind und $\beta_j, \beta'_j \in s$. Daraus folgt aber $\beta_j = \beta'_j$ für alle $j = 1, \ldots, f$, weil $\mathfrak{r}$ ein Repräsentantensystem für $s/\mathfrak{p}$ ist. Also ist

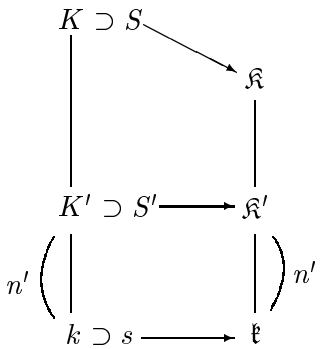
$$\mathfrak{R} := \Big\{ \sum_{j=1}^{f} \beta_j \cdot \omega_j \mid \beta_j \in \mathfrak{r} \Big\}$$

ein Repräsentantensystem für $S/\mathfrak{P}$ mit $0 \in \mathfrak{R}$.
Seien nun $\pi_\mu \in k$ mit $w(\pi_\mu) = \mu \cdot e$ für $\mu \in \mathbb{Z}$ und $\Pi_i \in S$ mit $w(\Pi_i) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, e-1$ wie oben. Dann ist
$\{w(\pi_\mu \cdot \Pi_i) \mid \mu \in \mathbb{Z},\ i = 0, 1, \ldots, e-1\} = \mathbb{Z} = \mathcal{W}(w)$ und es ist
$w(\pi_\mu \cdot \Pi_i) \geq 0 \Leftrightarrow \mu \geq 0$.
Nach Satz 4.3.1. (1) schreibt sich jedes Element $0 \neq x \in S$ (eindeutig) in der Form
$x = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{e-1} a_{\mu i} \cdot \pi_\mu \cdot \Pi_i$ mit $a_{\mu i} \in \mathfrak{R}$, also $a_{\mu i} = \sum_{j=1}^{f} \alpha_{\mu ij} \cdot \omega_j$ mit $\alpha_{\mu ij} \in \mathfrak{r}$. Es folgt:
$x = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{e-1} \big(\sum_{j=1}^{f} \alpha_{\mu ij} \cdot \omega_j \big) \cdot \pi_\mu \cdot \Pi_i$.

Da nach Voraussetzung k komplett ist für ν, sind die Reihen $\sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu ij} \cdot \pi_\mu$ konvergent in k für alle i, j. Daher kann man die Reihendarstellung von x umordnen und erhält:
$x = \sum_{\substack{i=0,\ldots,e-1 \\ j=1,\ldots,f}} \big(\sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu ij} \cdot \pi_\mu \big) \cdot \Pi_i \cdot \omega_j$.

Ferner ist $\sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu ij} \cdot \pi_\mu \in s$, weil $\mu \geq 0$ und daher $S \subseteq \sum_{\substack{i=0,\ldots,e-1 \\ j=1,\ldots,f}} s \cdot \Pi_i \cdot \omega_j$.
Weil die $\Pi_i \cdot \omega_j$ nach Satz 8.0.7 linear unabhängig über k sind, ist
$S = \sum_{\substack{i=0,\ldots,e-1 \\ j=1,\ldots,f}} s \cdot \Pi_i \cdot \omega_j = \bigoplus_{\substack{i=0,\ldots,e-1 \\ j=1,\ldots,f}} s \cdot \Pi_i \cdot \omega_j$ eine Basisdarstellung von S als s-Modul.
Die Basis $\{\Pi_i \cdot \omega_j \mid i = 0, \ldots, e-1;\ j = 1, \ldots, f\}$ von S über s ist auch eine Basis von K/k. Sie besteht aus $e \cdot f$ Elementen. Daher ist $n = e \cdot f$ und es folgt (2). □

8.0.11. Satz. *Seien*
K/k eine endlich algebraische Körpererweiterung,
k komplett für die Exponentenbewertung ν,
w die Fortsetzung von ν auf K,
S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ der Bewertungsring von w,
$\mathfrak{K} := S/\mathfrak{P}$,
s mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ der Bewertungsring von ν,
$\mathfrak{k} := s/\mathfrak{p}$,
$\mathfrak{K}'$ ein Zwischenkörper $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{K}' \subseteq \mathfrak{K}$, so daß
$\mathfrak{K}'/\mathfrak{k}$ separabel ist.
Dann gilt:
Es existiert ein $y \in S$, y separabel über k mit:



(1) $[k(y) : k] = [\mathfrak{K}' : \mathfrak{k}]$ *mit* $\mathfrak{K}' = \mathfrak{k}(\bar{y})$. *Dabei bezeichnet $\bar{y}$ die Restklasse von y modulo $\mathfrak{P}$.*
(2) *$\mathfrak{K}'$ ist der Restklassenkörper von $K' := k(y)$ bei der Exponentenbewertung $\nu' := w|K'$.*
(3) $\mathrm{e}(\nu'/\nu) = 1$.
(4) *Ist $g \in k[Y]$ das Minimalpolynom für y über k, so ist $g \in s[Y]$ und $\bar{g} \in \mathfrak{k}[Y]$ ist das Minimalpolynom für $\bar{y}$ über $\mathfrak{k}$. Dabei bezeichnet $\bar{g}$ dasjenige Polynom, das entsteht, wenn man in g alle Koeffizienten durch ihre Restklassen modulo $\mathfrak{p}$ ersetzt.*

(5) *Der Bewertungsring S' von ν' ist*
$S' = S \cap K' = s[y] = s \oplus s{\cdot}y \oplus \cdots \oplus s{\cdot}y^{n'-1} \simeq s[Y]/(g)$ *mit* $n' := [\mathfrak{K}' : \mathfrak{k}]$.

Beweis. Wegen $[K : k] < \infty$ ist auch $[\mathfrak{K} : \mathfrak{k}] < \infty$ nach Korollar 8.0.8. Außerdem ist nach Voraussetzung $\mathfrak{K}'/\mathfrak{k}$ separabel. Also ist $\mathfrak{K}' = \mathfrak{k}(\bar{y}')$ mit einem $y' \in S$. Sei $\bar{g} \in \mathfrak{k}[Y]$ das Minimalpolynom für $\bar{y}'$ über $\mathfrak{k}$. Dann ist $n' := \operatorname{grad}(\bar{g}) = [\mathfrak{K}' : \mathfrak{k}]$. Sei $g \in s[Y]$ ein Vertreter für $\bar{g}$ mit $g = Y^{n'} + \cdots$. Da $\bar{y}'$ eine *einfache* Nullstelle von $\bar{g}$ ist, gilt $\bar{g} = (Y - \bar{y}') \cdot \bar{h}_0$ mit einem Polynom $\bar{h}_0 \in \mathfrak{K}[Y]$, wobei $(Y - \bar{y}')$ und $\bar{h}_0$ *teilerfremd* in $\mathfrak{K}[Y]$ sind. Nach dem Henselschen Lemma 6.0.3. gibt es dann ein Polynom $h \in S[Y]$ und ein $y \in S$ mit $\bar{y} = \bar{y}'$ und $g = (Y - y) \cdot h$ in $S[Y]$. Es folgt $g(y) = 0$.
Behauptung: Dieses y tut das Verlangte:
Sei $K' := k(y), \quad S' := S \cap K'$ und $\mathfrak{P}' := \mathfrak{P} \cap S'$.
Wegen $y \in K' \cap S = S'$ ist $\bar{y} \in S'/\mathfrak{P}'$, also $S'/\mathfrak{P}' \supseteq \mathfrak{k}(\bar{y}) = \mathfrak{k}(\bar{y}') = \mathfrak{K}'$ und
$[K' : k] \leq \operatorname{grad}(g) = n' = [\mathfrak{K}' : \mathfrak{k}] \leq [S'/\mathfrak{P}' : \mathfrak{k}] \underset{\text{Kor. } 8.0.8}{\leq} [K' : k]$. Es folgt $[K' : k] = n'$ und $S'/\mathfrak{P}' = \mathfrak{K}' = \mathfrak{k}(\bar{y})$, also (1) und (2).
Ferner ist nach Korollar 8.0.8. $n' = [K' : k] \geq n' \cdot \mathrm{e}(\nu'/\nu)$ und daher $\mathrm{e}(\nu'/\nu) = 1$. Also gilt auch (3).
Aus $[K' : k] = n'$ folgt ferner: g ist das Minimalpolynom für y über k, weil $\operatorname{grad}(g) = n'$ ist. Es folgt (4).
Außerdem sieht man daraus, daß y separabel über k ist; denn sonst wäre $g'(y) = 0$ und daher auch $\bar{g}'(\bar{y}) = 0$ entgegen der Voraussetzung, daß $\bar{y}$ separabel über $\mathfrak{k}$ ist.
Beweis von (5): Da $1, y, \ldots, y^{n'-1}$ Repräsentanten für eine Basis von $\mathfrak{K}'/\mathfrak{k}$ sind und $[K' : k] = n'$ ist, folgt nach Korollar 8.0.9. (1) $S' = s \oplus s{\cdot}y \oplus \cdots \oplus s{\cdot}y^{n'-1} = s[y]$.
Betrachte nun den kanonischen Homomorphismus $\lambda : s[Y] \longrightarrow s[y] = S'$ mit $\lambda(Y) = y$ und $\lambda|(s \to s) = \mathrm{id}_s$.
Behauptung: $\operatorname{Ker}(\lambda) = (g) \quad (\Rightarrow s[y] \simeq s[Y]/(g), \text{ qed.})$
Beweis: Wegen $g(y) = 0$ ist jedenfalls $g \in \operatorname{Ker}(\lambda)$. Sei $h \in \operatorname{Ker}(\lambda)$ beliebig. Da g normiert ist, läßt sich h in $s[Y]$ durch g mit Rest teilen: $h = p{\cdot}g + r$ mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g) = n'$. Es ist $r(y) = \underset{=0}{h(y)} - q(y){\cdot}\underset{=0}{g(y)} = 0$. Da aber die $1, y, \ldots, y^{n'-1}$ über s linear unabhängig sind, folgt $r = 0$, also $h \in (g)$. □

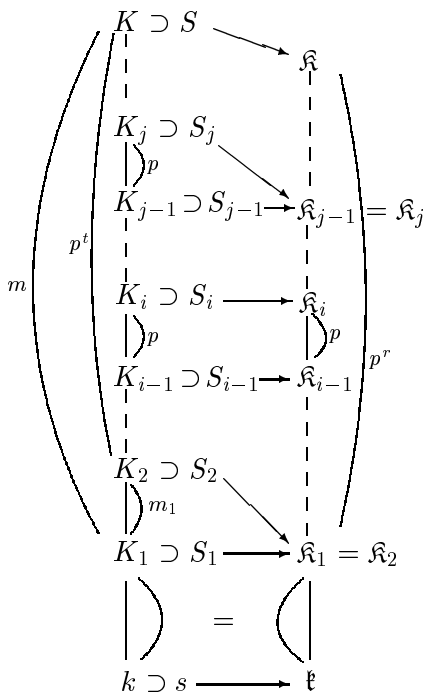
8.0.12. Satz. *Seien*
K/k eine endlich algebraische Körpererweiterung,
k komplett für die diskrete Exponentenbewertung ν,
w die Fortsetzung von ν auf K,
S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ der Bewertungsring von w,
$\mathfrak{K} := S/\mathfrak{P}$,
s mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ der Bewertungsring von ν,
$\mathfrak{k} := s/\mathfrak{p}$. *Dann gilt*

(1) *Falls $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ separabel ist, gibt es einen Zwischenkörper K_1 zwischen k und K und Elemente $y_1, y_2 \in S$ so daß gilt:*
$S_1 := S \cap K_1 = s[y_1] \simeq s[Y]/(g_1)$,
$S = S_1[y_2] \simeq S_1[Y]/(g_2)$, *wobei*
$g_1(Y) \in s[Y]$ *das Minimalpolynom für y_1 über k und*
$g_2(Y) \in S_1[Y]$ *das Minimalpolynom für y_2 über K_1 bezeichnet.*
Es ist
$\mathrm{f}(S_1/s) = [K_1 : k]$ *und daher* $\mathrm{e}(S_1/s) = 1$ *(S_1 ist „unverzweigt“ über s) und*
$\mathrm{e}(S/S_1) = [K : K_1]$ *und daher* $\mathrm{f}(S/S_1) = 1$.

Zusatz: Für y_1 kann man ein Element aus S nehmen, dessen Restklasse ein primitives Element für die Körpererweiterung $\mathfrak{K}/k$ ist.
Für y_2 kann man ein Primelement von S nehmen.

(2) *Ist K/k galoissch und* $\mathrm{char}(\mathfrak{k}) = p > 0$, *dann gibt es eine Körperkette* $k = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r = K$, *so daß gilt:*
Für alle $i = 1, \ldots, r$ existieren $y_i \in S_i := S \cap K_i$ mit $S_i = S_{i-1}[y_i] \simeq s[Y]/(g_i)$, *wobei $g_i \in S_{i-1}[Y]$ das Minimalpolynom für y_i über K_{i-1} ist.*
$\mathfrak{K}_i$ bezeichne den Restklassenkörper von S_i für alle $i = 1, \ldots, r$. Ferner ist, analog zum Fall (1)
$\mathfrak{K}_1/\mathfrak{k}$ *separabel,*
$\mathrm{f}(S_1/s) = [K_1 : k]$ *und daher* $\mathrm{e}(S_1/s) = 1$ *(S_1 ist „unverzweigt“ über s) und* $\mathrm{e}(S_2/S_1) = [K_2 : K_1]$ *und daher* $\mathrm{f}(S_2/S_1) = 1$ *und p teilt nicht* $\mathrm{e}(S_2/S_1)$.
Für alle $i > 2$ gilt:
Entweder
$\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i-1}$ *ist rein inseparabel algebraisch und*
$\mathrm{f}(S_i/S_{i-1}) = [K_i : K_{i-1}] = p$, *folglich* $\mathrm{e}(S_i/S_{i-1}) = 1$
oder
$\mathrm{e}(S_i/S_{i-1}) = [K_i : K_{i-1}] = p$ *und daher* $\mathrm{f}(S_i/S_{i-1}) = 1$.

Beweis. Sei $\mathfrak{K}_1$ der maximale separable Zwischenkörper von $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$.
Nach Satz 8.0.11. gibt es dann ein $y_1 \in S$ so daß $[k(y_1) : k] = [\mathfrak{K}_1 : \mathfrak{k}]$ und $\mathfrak{K}_1$ der Restklassenkörper von $K_1 := k(y_1)$ bei $\nu_1 := w|K_1$ ist. Des weiteren ist
$S_1 := S \cap K_1 = s[y] \simeq s[Y]/(g_1)$, wobei $g_1 \in s[Y]$ das Minimalpolynom für y_1 über $K_0 := k$ ist.



1.Fall: $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ separabel.
Dann ist dann schon $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}$.
Ferner ist dann $[K : K_1] = \mathrm{e}(K/K_1) =: e$ nach Satz 8.0.10. (2) und die Potenzen
$1 = \Pi^0, \Pi, \Pi^2, \ldots, \Pi^{e-1}$ eines Primelementes Π von S bilden nach Satz 8.0.10. (3) eine Basis von $S_2 := S$ über S_1. Insbesondere ist dann $S_2 = S_1[\Pi]$. Setze $y_2 := \Pi$. Stelle Π^e durch die obige Basis dar: $\Pi^e = -(a_{e-1} \cdot \Pi^{e-1} + \cdots + a_1 \cdot \Pi + a_0)$. Sei
$g_2 := Y^e + a_{e-1} \cdot Y^{e-1} + \cdots + a_1 \cdot Y + a_0$.
Dann ist $g_2 \in S_1[Y]$ und
$\mathrm{grad}\,(g_2) = e = [K : K_1]$, ferner $g_2(y_2) = 0$. Also ist g_2 das Minimalpolynom für y_2 über K_1. Wie beim Beweis von Satz 8.0.11. (5) folgt $S_2 \simeq S_1[Y]/(g_2)$. Damit ist (1) gezeigt.
2. Fall: $\mathrm{char}(\mathfrak{K}) = p > 0$ und K/k galoissch. Dann ist $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_1$ rein inseparabel und daher $[\mathfrak{K} : \mathfrak{K}_1] = p^r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$. Sei $m := [K : K_1]$.
Zerlege $m = p^t \cdot m_1$ mit $(p, m_1) = 1$.
Da K/k galoissch ist, ist auch K/K_1 galoissch. Sei $G := G(K/K_1)$. Es ist $|G(K/K_1)| = m$. Nach dem Sylow-Satz gibt es eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $|H| = p^t$. Sei K_2 der Fixpunktkörper von H, $S_2 := S \cap K_2$ und $\mathfrak{K}_2 := S_2/(\mathfrak{P} \cap S_2)$.

Dann ist $[K : K_2] = p^t$ und $[K_2 : K_1] = \frac{m}{p^t} = m_1$ teilerfremd zu p. Es folgt $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1$; denn es ist $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{K}$, also ist $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1]$ ein Teiler von $[\mathfrak{K} : \mathfrak{K}_1] = p^r$ und daher $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1] = p^\mu$ mit einem $\mu \in \mathbb{N}_0$. Andererseits gilt nach der Gradrelation Satz 8.0.10. (2), daß $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1]$ ein Teiler von $[K_2 : K_1] = m_1$ ist. Da m_1 teilerfremd zu p ist, folgt $\mu = 0$ also $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1$. Aus der eben zitierten Gradrelation folgt dann $\mathrm{e}(S_2/S_1) = [K_2 : K_1]$, also p kein Teiler von $\mathrm{e}(S_2/S_1)$.
Sei $y_2 := \Pi_2$ ein Primelement von S_2, dann folgt aus (1), daß $S_2 = S_1[y_2] \simeq S_1[Y]/(g_2)$, wenn $g_2 \in S_1[Y]$ das Minimalpolynom für y_2 über K_2 bezeichnet.
H ist die Galoisgruppe von K/K_2. Weil $|H| = p^r$ ist, ist H als p-Gruppe auflösbar. Es gibt also eine Kette von successiven Normalteilern
$H =: H_2 \rhd H_3 \rhd \cdots \rhd H_{t+2} = \{\mathrm{id}\}$, so daß $[H_{i-1} : H_i] = p$ ist für alle $i = 3, 4, \ldots, t+2$.
Sei K_i der Fixpunktkörper von H_i für alle $i = 3, 4, \ldots, t+2$. Dann ist
$K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_{t+2} = K$ und $[K_i : K_{i-1}] = p$ für alle $i = 3, 4, \ldots, t+2$.
$S_i := S \cap K_i$ bezeichne den Bewertungsring von K_i bzgl. w und $\mathfrak{K}_i := S_i/(\mathfrak{P} \cap S_i)$ seinen Restklassenkörper. Seien $e_i := \mathrm{e}(S_i/S_{i-1})$ und $f_i := \mathrm{f}(S_i/S_{i-1})$ für $i = 3, 4, \ldots, t+2$. Da p eine Primzahl ist, folgt aus der Gradrelation Satz 8.0.10. (2), daß jeweils gilt

oder
a) $e_i = 1$ und $f_i = p$
b) $e_i = p$ und $f_i = 1$.

a) Da $[\mathfrak{K}_i : \mathfrak{K}_{i-1}] = f_i = p$ eine Primzahl ist, ist $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_{i-1}[\bar{y}_i]$ eine einfache Körpererweiterung, wobei $\bar{y}_i$ die Restklasse eines $y_i \in S_i$ ist. Dann sind $1, y_i, \ldots, y_i^{p-1}$ ein Vertretersystem für eine Basis von $\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i-1}$ und daher sind nach Korollar 8.0.9. (1) diese Elemente eine S_{i-1}-Basis für S_i. Insbesondere ist dann $S_i = S_{i-1}[y_i]$, und, indem man y_i^p durch diese Basis darstellt, sieht man wie vorher, daß das Minimalpolynom g_i für y_i über K_{i-1} schon in $S_{i-1}[Y]$ liegt und daß folglich gilt $S_i \simeq S_{i-1}[Y]/(g_i)$.
b) Hier ist $\mathfrak{K}_j = \mathfrak{K}_{j-1}$ und $e_j = p$. Sei y_j ein Primelement von S_j. Dann spielen die Potenzen $1, y_j, y_j^2, \ldots, y_j^{p-1}$ die Rolle der $\Pi_0, \ldots, \Pi_{e-1}$ aus Korollar 8.0.9. (2). Also ist $1, y_j, \ldots, y_j^{p-1}$ eine S_{j-1}-Basis von S_j. Wie vorher sieht man, daß das Minimalpolynom g_j für y_j über K_{j-1} schon in $S_{j-1}[Y]$ liegt und daß dann $\mathrm{S}_j = S_{j-1}[y_j] \simeq S_{j-1}[Y]/(g_j)$ ist. □

9. Fortsetzung einer Bewertung auf eine algebraische Körpererweiterung. Allgemeiner Fall

9.0.1. Satz (Tensor-Erweiterungssatz). *Seien: K/k eine endliche, separabel algebraische Körpererweiterung,*
$K = k(x)$,
$g \in k[X]$ das Minimalpolynom für x über k,
φ eine nichttriviale Betragsbewertung von k,
$(\hat{k}, \hat{\varphi}, \hookrightarrow)$ die Komplettierung von k bzgl. φ,
$g = g_1 \cdots g_m$ die Primfaktorzerlegung von g in $\hat{k}[X]$ mit normierten Primpolynomen g_i,
$\widehat{K}_i := \hat{k}(x_i)$, wobei x_i eine Nullstelle von g_i ist, $i = 1, \ldots, m$,
$\widehat{\Phi}_i$ die (eindeutig bestimmte) Fortsetzung von $\hat{\varphi}$ auf $\widehat{K}_i$,
$\rho_i : K \to \widehat{K}_i$ der kanonische k-Homomorphismus mit $\rho_i(x) := x_i$,
$A := \bigtimes_{i=1}^{m} \widehat{K}_i$ das direkte Produkt der Körper $\widehat{K}_i$,
$\rho : K \to \bigtimes_{i=1}^{m} \widehat{K}_i$ die Diagonaleinbettung von K in das direkte Produkt, definiert durch:
$\rho(z) := \big(\rho_1(z), \ldots, \rho_m(z)\big)$ für alle $z \in K$,
$\tau : \hat{k} \to \bigtimes_{i=1}^{m} \widehat{K}_i$ die Diagonaleinbettung von $\hat{k}$ in das direkte Produkt, definiert durch:
$\tau(\hat{z}) := \big(\hat{z}, \ldots, \hat{z}\big)$ für alle $\hat{z} \in \hat{k}$.
ρ und τ sind k-Algebra-Homomorphismen.
Dann gilt:
Es gibt genau einen *k-Algebra-Homomorphismus*

$$\begin{array}{rccl} \chi: & \hat{k} \otimes_k K & \longrightarrow & \bigtimes_{i=1}^{m} \widehat{K}_i \\ \textit{mit} & \chi(\hat{z} \otimes z) & = & \tau(\hat{z}) \cdot \rho(z) \quad \textit{für alle } \hat{z} \in \hat{k} \textit{ und alle } z \in K. \end{array}$$

$\hat{k} \otimes_k K$ ist ein endlichdimensionaler $\hat{k}$-Vektorraum, trägt also eine nach Korollar 5.2.7. eindeutig bestimmte Normtopologie bzgl. $\hat{\varphi}$ als $\hat{k}$-Vektorraum.
Jedes $\widehat{K}_i$ trägt eine durch $\widehat{\Phi}_i$ induzierte Ringtopologie.(Zwischenbemerkung im Beweis des Satzes von Gelfand-Tornheim 5.1.3.) Sei $\bigtimes_{i=1}^{m} \widehat{K}_i$ mit der Produkttopologie versehen. Vermöge dieser ist $\bigtimes_{i=1}^{m} \widehat{K}_i$ ein topologischer Ring und vermöge τ sogar eine topologische $\hat{k}$-Algebra. Es gilt:

χ ist ein topologischer $\hat{k}$-Algebra-Isomorphismus

Anmerkung*: Insbesondere folgt daraus, daß die Normtopologie auf $\hat{k} \otimes_k K$ als $\hat{k}$-Vektorraum schon eine Ringtopologie ist (d.h. auch die Multiplikation ist stetig.)*

Beweis. 1) Daß χ auch $\hat{k}$-linear, also ein $\hat{k}$-Algebra-Homomorphismus ist, folgt unmittelbar aus der Definition.
2) Es ist $K = k[x] \simeq k[X]/(g)$. Also ist

$$\begin{array}{lll} \hat{k}\otimes_k K & \simeq \big(\hat{k}\otimes_k k[X]\big)/(1\otimes g) & \simeq \hat{k}[X]/(g) \qquad\qquad \text{mit} \\ \hat{z}\otimes \underbrace{\sum a_j\cdot x^j}_{=:z} & \longmapsto & \sum \hat{z}\cdot a_j\cdot X^j+(g). \end{array}$$

Da $g = g_1\cdots g_m$ eine Primfaktorzerlegung des irreduziblen und separablen Polynoms g in $\hat{k}[X]$ ist, sind die g_i paarweise teilerfremde Primpolynome. Also gilt nach dem chinesischen Restsatz

$$\begin{array}{rcl} \hat{k}[X]/(g) & \simeq & \hat{k}[X]/(g_1)\times\cdots\times\hat{k}[X]/(g_m) \qquad \text{vermöge} \\ y+(g) & \longmapsto & \big(y+(g_1),\ldots\ldots,y+(g_m)\big)\,. \end{array}$$

Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} \hat{k}[X]/(g_i) & \simeq & \hat{k}[x_i]=\hat{K}_i \quad \text{vermöge der Identität auf } \hat{k} \text{ und} \\ X+(g_i) & \mapsto & x_i\,. \end{array}$$

Zusammengesetzt ergibt das einen Isomorphismus χ mit:

$$\begin{array}{rcl} \hat{z}\otimes z=\hat{z}\otimes\sum a_j\cdot x^j & \mapsto & \sum \hat{z}\cdot a_j\cdot X^j+(g) \\ & \mapsto & \big(\sum \hat{z}\cdot a_j\cdot X^j+(g_1),\ldots,\sum \hat{z}\cdot a_j\cdot X^j+(g_m)\big) \\ & \mapsto & \big(\sum \hat{z}\cdot a_j\cdot x_1^j,\ldots,\sum \hat{z}\cdot a_j\cdot x_m^j\big) \\ & = & \tau(\hat{z})\cdot\big(\sum a_j\cdot x_1^j,\ldots,\sum a_j\cdot x_m^j\big) \\ & = & \tau(\hat{z})\cdot\big(\sum a_j\cdot\rho_1(x)^j,\ldots,\sum a_j\cdot\rho_m(x)^j\big) \\ & = & \tau(\hat{z})\cdot\big(\rho_1(\sum a_j\cdot x^j),\ldots,\rho_m(\sum a_j\cdot x^j)\big) \\ & = & \tau(\hat{z})\cdot\rho\big(\sum a_j\cdot x^j\big) \\ & = & \tau(\hat{z})\cdot\rho(z)\,. \end{array}$$

Insgesamt sieht man daraus, daß

$$\begin{array}{rcll} \chi: \ \hat{k}\otimes_k K & \longrightarrow & \bigtimes_{i=1}^{m}\widehat{K}_i & \text{mit} \\ \hat{z}\otimes z & \longmapsto & \tau(\hat{z})\cdot\rho(z) & \end{array}$$

ein $\hat{k}$-Algebra-Isomorphismus ist.

3) Da χ ein $\hat{k}$-Algebra-Isomorphismus ist, ist χ insbesondere auch ein $\hat{k}$-Vektorraum-Isomorphismus. Auf dem endlichdimensionalen $\hat{k}$-Vektorraum $\hat{k}\otimes_k K$ hat man eine eindeutig bestimmte $\hat{k}$-Vektorraum-Normtopologie bzgl. $\hat{\varphi}$, weil $\hat{k}$ komplett ist (Korollar 5.2.7.). Diese definiert vermöge des $\hat{k}$-Vektorraum-Isomorphismus χ eine $\hat{k}$-Normtopologie bzgl. $\hat{\varphi}$ auf A. Wenn wir zeigen, daß die auf A durch die Bewertungstopologien der $\widehat{K}_i$ definierte Produkttopologie ebenfalls eine $\hat{k}$-Normtopologie ist, folgt aus Korollar 5.2.7., daß beide Topologien auf A identisch sind. Also ist χ ein topologischer Isomorphismus. Bleibt zu zeigen:

Behauptung: Die durch die Bewertungstopologien der $\widehat{K}_i$ definierte Produkttopologie auf A ist eine $\hat{k}$-Vektorraum-Normtopologie bzgl. $\hat{\varphi}$.

Beweis: Durch $\|\underbrace{(y_1,\ldots,y_m)}_{=:y}\| := \max\{\widehat{\Phi}(y_i)\mid i=1,\ldots,m\}$ wird auf A eine $\hat{k}$-Vektorraum-Norm bzgl. $\hat{\varphi}$ definiert:

(1) $\|y\|=0 \Leftrightarrow \widehat{\Phi}_i(y_i)=0$ für alle $i=1,\ldots,m \Leftrightarrow y_i=0$ für alle $i=1,\ldots,m$ $\Leftrightarrow y=0$.

(2) $\|y+z\| = \max\{\underbrace{\widehat{\Phi}_i(y_i+z_i)}_{\leq \widehat{\Phi}_i(y_i)+\widehat{\Phi}_i(z_i)} \mid i=1,\dots,m\}$
$\leq \max\{\widehat{\Phi}_i(y_i)+\widehat{\Phi}_i(z_i) \mid i=1,\dots,m\}$
$\leq \max\{\widehat{\Phi}_i(y_i) \mid i=1,\dots,m\} + \max\{\widehat{\Phi}_i(z_i) \mid i=1,\dots,m\}$
$= \|y\| + \|z\|.$

(3) Für $\hat{z} \in \hat{k}$ ist
$\|\hat{z}\cdot y\| = \max\{\widehat{\Phi}_i(\hat{z}\cdot y_i)\} = \max\{\underbrace{\widehat{\Phi}_i(\hat{z})}_{=\hat{\varphi}(\hat{z})}\cdot\widehat{\Phi}(y_i)\} = \hat{\varphi}(\hat{z})\cdot\max\{\widehat{\Phi}_i(y_i)\} =$
$= \hat{\varphi}(\hat{z})\cdot\|y\|.$

Die durch diese Norm definierte Topologie auf A ist gerade die durch die Bewertungstopologie der $\widetilde{K}_i$ definierte Produkttopologie; denn die Menge $\{\mathfrak{U}_1 \times \cdots \times \mathfrak{U}_m \mid \mathfrak{U}_i$ Umgebungsbasis der Null in $\widehat{K}_i\}$ ist eine Umgebungsbasis der Null von A in der Produkttopologie und auch in der durch $\|\ \|$ definierten Topologie. □

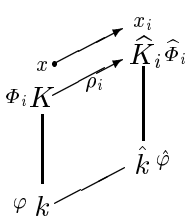
9.0.2. Korollar. *$\rho(K)$ ist dicht in $\bigtimes_{i=1}^{m} \widehat{K}_i$.*

Beweis. Da $\rho(K) = \chi(1\otimes K)$ ist und χ ein topologischer Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, daß $1\otimes K$ in der $\hat{k}$-Vektorraum-Normtopologie dicht in $\hat{k}\otimes_k K$ ist:
Sei $\omega_1,\dots,\omega_n$ eine k-Basis von K. Dann ist $1\otimes\omega_1,\dots,1\otimes\omega_n$ eine $\hat{k}$-Basis von $\hat{k}\otimes_k K$. Sei $y \in \hat{k}\otimes_k K$ beliebig. Dann ist $y = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i\cdot(1\otimes\omega_i)$ mit $\hat{a}_i \in \hat{k}$ und daher $\hat{a}_i = \lim\limits_{j\to\infty}^{\hat{\varphi}} a_{ij}$ mit $a_{ij} \in k$. Es folgt
$y = \lim\limits_{j\to\infty}^{\|\ \|_0} \sum_{i=1}^n a_{ij}\cdot(1\otimes\omega_i) = \lim\limits_{j\to\infty}^{\|\ \|_0} (\underbrace{1\otimes\sum_{i=1}^n a_{ij}\cdot\omega_i}_{\in 1\otimes K})$, wobei $\|\ \|_0$ die Maximumsnorm bzgl. der Basis $1\otimes\omega_1,\dots,1\otimes\omega_n$ der $\hat{k}$-Vektorraums $\hat{k}\otimes_k K$ bezeichnet, die ja die (eindeutig bestimmte) $\hat{k}$-Vektorraum-Normtopologie von $\hat{k}\otimes_k K$ definiert. □

9.0.3. Korollar. *Sei mit den Bezeichnungen von Satz 9.0.1 $\Phi_i := \widehat{\Phi}_i \circ \rho_i$ für $i = 1,\dots,m$. Es gilt*

(1) *$\Phi_1,\dots,\Phi_m$ sind paarweise verschiedene Bewertungen von K, die φ fortsetzen (und daher auch paarweise inäquivalent sind).*
(2) *$\left(\widehat{K}_i, \widehat{\Phi}_i, \rho_i\right)$ ist die Komplettierung von K bzgl. Φ_i.*
(3) *$\Phi_1,\dots,\Phi_m$ sind sämtliche Forsetzungen von φ auf K.*

Beweis. (1): $\widehat{\Phi}_i$ ist eine Bewertung von $\widehat{K}_i$ und $\widehat{\Phi}_i|\hat{k} = \hat{\varphi}$.
Also ist $\widehat{\Phi}_i|k = \hat{\varphi}|k = \varphi$. Dann ist $\Phi_i := \widehat{\Phi}_i \circ \rho_i$ eine Bewertung von K und, da $\rho_i : K \to \widehat{K}_i$ ein k-Homomorphismus ist, gilt $\Phi_i|k = \widehat{\Phi}_i|k = \varphi$. Also ist Φ_i eine Fortsetzung von φ.



Behauptung: Für $i \neq j$ ist $\Phi_i \neq \Phi_j$.
Beweis: Sei $y := (y_1,\dots,y_n) := (0,0,\dots,1,\dots,0) \in A$ ein Element mit $y_\ell = 0$ für $\ell \neq i$ und $y_i = 1$. Nach Korollar 9.0.2. existiert eine Folge $x_\mu \in K$ mit $y = \lim\limits_{\mu\to\infty}^{\|\ \|} \rho(x_\mu)$. Nach Definition der Norm auf A bedeutet das $\widehat{\Phi}_\ell(\rho_\ell(x_\mu) - y_\ell) \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $\ell = 1,\dots,m$. Wegen $y_j = 0$ für $j \neq i$

und $y_i = 1$ heißt das:

$\Phi_j(x_\mu - 0) = \widehat{\Phi}_j \circ \rho_j(x_\mu - 0) = \widehat{\Phi}_j(\rho_j(x_\mu) - y_j) \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $x_\mu \overset{\Phi_j}{\underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow}} 0$ für $j \neq i$

$\Phi_i(x_\mu - 1) = \widehat{\Phi}_i \circ \rho_i(x_\mu - 1) = \widehat{\Phi}_i(\rho_i(x_\mu) - y_i) \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $x_\mu \overset{\Phi_i}{\underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow}} 1$

Da die Folge der x_μ für Φ_i und Φ_j unterschiedliche Limiten hat, ist also $\Phi_i \neq \Phi_j$ für $i \neq j$.

(2): Da $\widehat{K}_i/\hat{k}$ endlich algebraisch und $\hat{k}$ komplett für $\hat{\varphi}$ ist, ist $\widehat{K}_i$ komplett für die Fortsetzung $\widehat{\Phi}_i$ von $\hat{\varphi}$ nach Satz 7.0.2.. Wenn wir zeigen:

Behauptung: $\rho_i(K)$ ist dicht in $\widehat{K}_i$ bzgl. $\widehat{\Phi}_i$

so folgt aus Satz 4.2.3., daß $(\widehat{K}_i, \widehat{\Phi}_i, \rho_i)$ die Komplettierung von K bzgl. Φ_i ist.

Beweis: Sei $y_i \in \widehat{K}_i$ beliebig. Nach Korollar 9.0.2. ist $\rho(K)$ dicht in A. Also gibt es eine Folge $x_\mu \in K$ mit $\rho(x_\mu) \overset{\|\ \|}{\underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow}} (0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots, 0)$. Nach Definition der Norm auf A gilt dann insbesondere $\widehat{\Phi}_i(\rho_i(x_\mu) - y_i) \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $y_i = \overset{\widehat{\Phi}_i}{\lim_{\mu\to\infty}} \rho_i(x_\mu)$. □

(3): Sei nun Φ eine beliebige Fortsetzung von φ auf K und $(\widehat{K}, \widehat{\Phi}, \sigma)$ die Komplettierung von K bzgl. Φ. Dann ist in natürlicher Weise $\widehat{\sigma(k)} \simeq \hat{k}$, und wir identifizieren o.B.d.A. $\hat{k} = \widehat{\sigma(k)} \subseteq \widehat{K}$.

In $\hat{k}[X]$ zerfällt nach Voraussetzung $g = g_1 \cdots g_m$. Aus $g(x) = 0$ folgt $g(\sigma(x)) = 0$, also $g_i(\sigma(x)) = 0$ für ein passendes i.

Daher gibt es einen $\hat{k}$-Isomorphismus
$\lambda : \widehat{K}_i = \hat{k}[x_i] \xrightarrow{\sim} \hat{k}[\sigma(x)]$ mit $\lambda \circ \rho_i = \sigma$.
Es ist $\hat{k}[\sigma(x)]/\hat{k}$ endlich algebraisch,
also komplett für $\widehat{\Phi}|\hat{k}[\sigma(x)]$.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{K}_i = \hat{k}[x_i] & \xrightarrow[\lambda]{\sim} & \hat{k}[\sigma(x)] \\ & {\scriptstyle\rho_i}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\sigma} & \\ & K = k[x] & \end{array}$$

Aber aus $K = k[x] \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \hat{k}[\sigma(x)]$ folgt dann $\widehat{K} = \hat{k}[\sigma(x)]$.

Ferner sind $\widehat{\Phi}_i$ und $\widehat{\Phi} \circ \lambda$ beides Fortsetzungen von $\hat{\varphi}$ auf $\widehat{K}_i$. Da es nach Korollar 5.2.8. aber nur *eine* Fortsetzung gibt, folgt $\widehat{\Phi}_i = \widehat{\Phi} \circ \lambda$ und folglich

$\Phi = \widehat{\Phi} \circ \sigma = \widehat{\Phi} \circ \underbrace{\lambda \circ \rho_i}_{=\sigma} = \widehat{\Phi}_i \circ \rho_i = \Phi_i$. □

9.0.4. Korollar. *Sei K/k eine endlich separabel algebraische Körpererweiterung,*
ν eine Exponentenbewertung von k,
$w_1, \ldots, w_m$ die sämtlichen Fortsetzungen von ν auf K,
$e_i := \mathrm{e}(w_i/\nu)$,
$f_i := \mathrm{f}(w_i/\nu)$.
Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} e_i \cdot f_i \leq [K : k] \ .$$

Ist ν diskret, so sind auch alle w_i diskret und es gilt

$$\sum_{i=1}^{m} e_i \cdot f_i = [K : k] \quad \textit{Gradrelation.}$$

Beweis. Sei mit den Bezeichnungen von Satz 9.0.1. sinngemäß übertragen auf Exponentenbewertungen $n_i := [\widehat{K}_i : \hat{k}]$ und $n := [K : k]$. Dann ist $n = \mathrm{grad}\,(g)$ und $n_i := \mathrm{grad}\,(g_i)$, also $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

Ferner ist nach Anmerkung 8.0.4. $e_i = \mathrm{e}(\hat{w}_i/\hat{\nu})$ und $f_i = \mathrm{f}(\hat{w}_i/\hat{\nu})$. Nach Korollar 8.0.8. gilt dann $e_i \cdot f_i \leq n_i$, also $\sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i \leq \sum_{i=1}^m n_i = n$. □
Sei nun ν diskret. Nach Satz 4.2.4. (5a) ist dann auch $\hat{\nu}$ diskret und daher sind nach Satz 8.0.10. (1) auch die $\hat{w}_i$ diskret für alle $i = 1, \ldots, m$ und daher auch w_i diskret für alle i. Nach Satz 8.0.10. (2), angewandt auf $\widehat{K}_i/\hat{k}$ gilt $e_i \cdot f_i = n_i$ für alle i, also $\sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^m n_i = n$. □

9.0.5. Korollar. *Sei K/k endlich algebraisch,*
φ eine archimedische Bewertung von k.
Φ_i die Fortsetzungen von φ auf K,
$\hat{k}$ bzw. $\widehat{K}_i$ die Komplettierungen von k bzw. K bzgl. φ bzw. Φ_i. (Es ist dann
$\hat{k} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ *und ebenso* $\widehat{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C}. \end{cases}$ *nach Korollar 5.2.10.)*
Sei
r_1:= Anzahl der verschiedenen Fortsetzungen Φ_i mit $\widehat{K}_i \simeq \mathbb{R}$ (reelle Fortsetzungen),
r_2:= Anzahl der verschiedenen Fortsetzungen Φ_i mit $\widehat{K}_i \simeq \mathbb{C}$ (komplexe Fortsetzungen).
dann gilt:

(1) *Falls $\hat{k} = \mathbb{C}$ ist, ist $r_1 = 0$ und $r_2 = [K : k]$,*
(2) *Falls $\hat{k} = \mathbb{R}$ ist, ist $r_1 + 2 \cdot r_2 = [K : k]$.*

Beweis. Vorbemerkung: Da φ archimedisch ist, ist $\mathrm{char}(k) = 0$ und daher K/k separabel. Wir verwenden die Bezeichnungen von Satz 9.0.1.
1.Fall: $\hat{k} \simeq \mathbb{C}$: In diesem Fall ist $\hat{k}$ algebraisch abgeschlossen, also zerfällt g über $\hat{k}$ in $n = [K : k]$ paarweise teilerfremde Linearfaktoren g_i, weil g separabel ist. Diesen entsprechen nach Korollar 9.0.3 die verschiedenen Fortsetzungen Φ_i von φ, und es ist
$\widehat{K}_i \simeq \hat{k}[X]/(g_i) = \hat{k} = \mathbb{C}$. Also ist $r_1 = 0$ und $r_2 = n$. □
2. Fall: $\hat{k} \simeq \mathbb{R}$: In diesem Fall zerfällt g über $\hat{k}$ in paarweise teilerfremde Faktoren g_i vom Grad 1 oder 2. Für $\mathrm{grad}\,(g_i) = 1$ ist $\widehat{K}_i \simeq \mathbb{R}$, für $\mathrm{grad}\,(g_i) = 2$ ist $\widehat{K}_i \simeq \mathbb{C}$. Dann ist also $n = \mathrm{grad}\,(g) = r_1 + 2 \cdot r_2$. □

9.0.6. Satz. *Sei*
K/k endlich und rein inseparabel algebraisch, $[K : k] = p^r$,
φ eine Betragsbewertung von k.
Dann gibt es genau eine *Fortsetzung Φ von φ auf K.*
Es ist $\Phi(x) = \sqrt[p^r]{\varphi(x^{p^r})}$ für alle $x \in K$.
(In Schreibweise der Exponentenbewertung:
Ist ν eine Exponentenbewertung von k, so ist die Fortsetzung w auf K ebenfalls eindeutig bestimmt durch $w(x) = \frac{1}{p^r} \cdot \nu(x^{p^r})$ für alle $x \in K$.)
Es ist $\mathrm{e}(w/\nu) \cdot \mathrm{f}(w/\nu) \leq p^r$.
Ist ν diskret, so ist auch w diskret.

Beweis. Zunächst ist wegen $\mathrm{char}(k) = p > 0$ nach Satz 2.1.12. (2) die Bewertung φ nichtarchimedisch. Für jedes $x \in K$ gilt $x^{p^r} \in k$, also, falls Φ eine Fortsetzung von φ ist: $\Phi(x)^{p^r} = \Phi(x^{p^r}) = \varphi(x^{p^r})$, d.h. $\Phi(x) = \sqrt[p^r]{\varphi(x^{p^r})}$. (Dabei ist die eindeutig bestimmte p^r-te Wurzel ≥ 0 in $\mathbb{R}$ gemeint.) Damit ist Φ eindeutig bestimmt. Daß das auf diese Weise *definierte* Φ auch tatsächlich eine Fortsetzungsbewertung von φ ist, wurde schon im Beweis von Satz 7.0.2., Fall 2b) gezeigt.

$e \cdot f \leq p^r = [K : k]$ gilt nach Korollar 8.0.8.
Daß w diskret ist, wenn ν diskret ist, ist nach Definition von w klar (oder folgt aus Satz 8.0.10. (1)). □

Aus Korollar 9.0.3. und Satz 9.0.6 folgt unmittelbar

9.0.7. Satz. *Sei*
K/k eine endliche algebraische Körpererweiterung,
φ eine Bewertung von k.
Dann gibt es endlich viele Fortsetzungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ von φ auf K. Die Anzahl m dieser Fortsetzungen ist $\leq [K_{sep} : k]$, wenn K_{sep} die separable Hülle von k in K bezeichnet.
Wenn φ diskret ist, dann sind auch alle Φ_i diskret.

9.0.8. *Anmerkung.* Den Fall K/k unendlich algebraisch führt man durch Bildung eines direkten Limes auf die obigen Fälle zurück. Es folgt dann, daß jede Bewertung von k mindestens eine Fortsetzung auf K hat.
Allerdings gibt es dann i.a. unendlich viele Fortsetzungen, und, auch wenn φ diskret ist, brauchen die Fortsetzungen nicht diskret zu sein.

10. Die allgemeine Gradrelation

10.0.1. *Anmerkung.* Seien
$k \subseteq K \subseteq L$ endlich algebraische Körpererweiterungen,
w eine Exponentenbewertung von L,
$u := w|K$,
$\nu := u|k = w|k$.
Dann gilt:
$\mathrm{e}(w/\nu) = \mathrm{e}(w/u) \cdot \mathrm{e}(u/\nu)$,
$\mathrm{f}(w/\nu) = \mathrm{f}(w/u) \cdot \mathrm{f}(u/\nu)$.

Beweis. Es ist $\mathcal{W}(w) \supseteq \mathcal{W}(u) \supseteq \mathcal{W}(\nu)$ und daher nach einem Satz aus der Gruppentheorie
$$\underbrace{[\mathcal{W}(w) : \mathcal{W}(\nu)]}_{=\mathrm{e}(w/\nu)} = \underbrace{[\mathcal{W}(w) : \mathcal{W}(u)]}_{=\mathrm{e}(w/u)} \cdot \underbrace{[\mathcal{W}(u) : \mathcal{W}(\nu)]}_{=\mathrm{e}(u/\nu)}.$$
Analog für die Restklassengrade. □

10.0.2. Satz. *Sei K/k eine endlich algebraische Körpererweiterung,*
ν eine Exponentenbewertung von k,
s mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ der Bewertungsring von ν,
$w_1, \ldots, w_m$ die paarweise verschiedenen Fortsetzungen von ν auf K,
S_i mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}_i$ der Bewertungsring von w_i für $i = 1, \ldots, m$,
$e_i := \mathrm{e}(w_i/\nu)$,
$f_i := \mathrm{f}(w_i/\nu)$.
Dann gilt:

(1)
$$\sum e_i \cdot f_i \leq [K : k]$$

(2) *Sei ν diskret, dann gilt:*
$$\sum e_i \cdot f_i = [K : k] \iff R := \bigcap_{i=1}^{m} S_i \text{ ist ein endlich erzeugter } s\text{-Modul.}$$

Beweis. (1): Sei K_{sep} der separable Abschluß von k in K, ferner $\ell := [K_{\mathrm{sep}} : k]$ und $p^r := [K : K_{\mathrm{sep}}]$, also $n := [K : k] = \ell \cdot p^r$. Sei weiter $w_i' := w_i|K_{\mathrm{sep}}$. Nach Satz 9.0.6. ist dann $w_i(x) = \frac{1}{p^r} \cdot w_i'(x^{p^r})$ für alle $x \in K$.
Ferner ist $\mathrm{e}(w_i/w_i') \cdot \mathrm{f}(w_i/w_i') \leq p^r$ nach Korollar 8.0.8.
Da nach Satz 9.0.6. jede Bewertung von K_{sep} *genau eine* Fortsetzung auf K hat, die dann natürlich auch eine Fortsetzung von ν ist, sind die $w_1', \ldots, w_m'$ alle paarweise verschiedenen Fortsetzungen von ν auf K_{sep}.
Mit Korollar 9.0.4 folgt
$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}(w_i'/\nu) \cdot \mathrm{f}(w_i'/\nu) \leq \ell$, also
$\sum_{i=1}^{m} p^r \cdot \mathrm{e}(w_i'/\nu) \cdot \mathrm{f}(w_i'/\nu) \leq p^r \cdot \ell = n$.
Es ist aber, wie oben festgestellt, $p^r \geq \mathrm{e}(w_i/w_i') \cdot \mathrm{f}(w_i/w_i')$, also insgesamt mit den Produktformeln von Anmerkung 10.0.1.
$\sum_{i=1}^{m} e_i \cdot f_i \leq n$ □

Für den Beweis von (2) brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

10.0.3. Hilfssatz. *Seien $s \subseteq S$ mit den maximalen Idealen $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{P}$ diskrete Bewertungsringe mit $\mathrm{f}(S/s) < \infty$ und sei $r \in \mathbb{N}$.*
Dann ist $S/\mathfrak{P}^r$ ein s-Modul der Länge $r \cdot \mathrm{f}(S/s)$.

Beweis. Betrachte die Idealkette $S = \mathfrak{P}^0 \supset \mathfrak{P}^1 \supset \mathfrak{P}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{P}^r$. Dann gilt für die Längen als s-Moduln $\ell_s(S/\mathfrak{P}^r) = \sum_{i=1}^r \ell_s(\mathfrak{P}^{i-1}/\mathfrak{P}^i)$. Nun ist $\mathfrak{P} = S\cdot\Pi$ ein Hauptideal, also ist $\mathfrak{P}^{i-1}/\mathfrak{P}^i \underset{S}{\simeq} S/\mathfrak{P}$; denn der Kern des surjektiven S-Homomorphismus $S \xrightarrow{\cdot\Pi^{i-1}} S\cdot\Pi^{i-1}/S\cdot\Pi^i$ ist gerade $S\cdot\Pi = \mathfrak{P}$. Es folgt
$\ell_s(\mathfrak{P}^{i-1}/\mathfrak{P}^i) = \ell_s(S/\mathfrak{P}) = \ell_{s/\mathfrak{p}}(S/\mathfrak{P}) = \dim_{s/\mathfrak{p}} S/\mathfrak{P} = [S/\mathfrak{P} : s/\mathfrak{p}] = \mathrm{f}(S/s)$. Also ist
$\ell_s(S/\mathfrak{P}^r) = \sum_{i=1}^r \mathrm{f}(S/s) = r\cdot\mathrm{f}(S/s)$. □

Beweis von Satz 10.0.2. (2).
Vorbemerkung. Es ist $s \subseteq R$. Ferner gilt nach Satz 8.0.10. (1) $\mathfrak{p}\cdot S_i = \mathfrak{P}_i^{e_i}$ mit $e_i := \mathrm{e}(w_i/\nu)$.
Als Schnitt endlich vieler diskreter Bewertungsringe ist R ein Haupidealring mit den einzigen von Null verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap R$ für $i = 1, \ldots, m$ (Satz 3.2.1 (3)). Dann ist $R\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^{\mu_1}\cdots\mathfrak{p}_m^{\mu_m}$ mit gewissen $\mu_i \in \mathbb{N}$. Durch Lokalisieren folgt daraus $\mathfrak{p}\cdot S_i = \mathfrak{P}_i^{\mu_i}$ und daher durch Vergleich mit dem oben festgestellten $\mu_i = e_i$ für alle i. Alle $\mathfrak{p}_i$ sind paarweise teilerfremd, weil es maximale Ideale von R sind nach Korollar 3.2.4. Dann ist:
$R/R\cdot\mathfrak{p} \underset{R}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^m R/R\cdot\mathfrak{p}_i^{e_i} = \bigoplus_{i=1}^m S_i/\mathfrak{P}^{e_i}$. Dabei gilt die letzte Gleichung weil $S_i = R_{\mathfrak{p}_i}$ und $\mathfrak{p}_i$ ein maximales Ideal von R ist. Also hat man
$S_i/\mathfrak{P}^{e_i} = R_{\mathfrak{p}_i}/(R_{\mathfrak{p}_i}\cdot\mathfrak{p}_i^{e_i}) = \left(R/\mathfrak{p}_i^{e_i}\right)_{\mathfrak{p}_i} = R/\mathfrak{p}_i^{e_i}$.
Eine R-Modul-Isomorphie ist erst recht eine s-Modul-Isomorphie, so daß man mit Hilfssatz 10.0.3. erhält:
$\dim_{s/\mathfrak{p}}(R/R\cdot\mathfrak{p}) = \ell_s(R/R\cdot\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^m \ell_s(S_i/\mathfrak{P}_i^{e_i}) = \sum_{i=1}^m e_i\cdot f_i =: \mu$.
Es gibt also μ Elemente $\omega_i \in R$, deren Restklassen modulo $R\cdot\mathfrak{p}$ eine Basis von $R/R\cdot\mathfrak{p}$ als $s/\mathfrak{p}$-Vektorraum bilden. Sei
$E := s\cdot\omega_1 + \cdots + s\cdot\omega_\mu$. Dann ist $R = E + R\cdot\mathfrak{p}$.
Ferner sind die $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ linear unabhängig über s, also auch über $k = \mathrm{Quot}(s)$; denn aus $\sum_{j=1}^\mu \alpha_j\cdot\omega_j = 0$ mit $\alpha_j' \in s$, wobei nicht alle $\alpha_j = 0$ sind, folgte nach Division durch ein α_{j_0} von kleinstem Wert bzgl. ν die Gleichung $\sum_{j=1}^\mu \alpha_j'\cdot\omega_j$ mit $\alpha_j := \frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}}$. Also ist $\nu(\alpha_j') \geq 0$, d.h. $\alpha_j' \in s$ für alle j und $\alpha_{j_0}' = 1$. Das ergäbe modulo $R\cdot\mathfrak{p}$ eine lineare Abhängigkeit der ω_j über $s/\mathfrak{p}$ entgegen der Wahl der ω_j.
Nun zum eigentlichen Beweis:
$\underline{\Leftarrow}$: Sei R endlich erzeugt als s-Modul. Aus $R = E + R\cdot\mathfrak{p}$ folgt dann nach dem Lemma von Nakayama $R = E$ also $K = \mathrm{Quot}(E) = k\cdot\omega_1 \oplus \cdots \oplus k\cdot\omega_\mu$. Also ist $[K : k] = \mu = \sum_{i=1}^m e_i\cdot f_i$. □
$\underline{\Rightarrow}$: Sei umgekehrt $\mu = \sum_{i=1}^m e_i\cdot f_i = [K : k] =: n$. Dann ist $K = k\cdot\omega_1 + \cdots + k\cdot\omega_n$, weil die $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ja $n = [K : k]$ über k linear unabhängige Elemente von K sind. Wir zeigen
Behauptung: $R = s\cdot\omega_1 + \cdots + s\cdot\omega_n$
(Dann ist also R ein endlich erzeugter s-Modul. qed)
Beweis: Da die ω_i in R liegen, ist zunächst $R \supseteq s\cdot\omega_1 + \cdots + s\cdot\omega_n$. Sei $x \in R$ beliebig. Da die $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine k-Basis von K bilden, hat man eine Darstellung $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j\cdot\omega_j$ mit $\alpha_j \in k$. Wir zeigen, daß die α_j bereits in s liegen. Das ergibt dann die Behauptung.
Falls nicht alle α_j in s lägen, gäbe es ein j_0 mit $\nu(\alpha_{j_0}) < 0$ und $\nu(\alpha_{j_0}) \leq \nu(\alpha_j)$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dann wäre $\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}}\cdot\omega_j \in \frac{1}{\alpha_{j_0}}\cdot R \subseteq R\cdot\mathfrak{p}$ und $\nu\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}}\right) \geq 0$, also $\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}} \in s$ für alle j. Wegen $\frac{\alpha_{j_0}}{\alpha_{j_0}} = 1$ hätte man dann eine lineare Relation zwischen

den Restklassen der ω_j über $s/\mathfrak{p}$ entgegen der Wahl der ω_j.
Also liegen alle α_j in s. □

10.0.4. Korollar. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 10.0.2. gilt für eine diskrete Bewertung ν stets*
$\dim_{s/\mathfrak{p}}(R/R\cdot\mathfrak{p}) = \ell_s(R/R\cdot\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot f_i$.

Beweis. Wurde in der Vorbemerkung zum Beweis von Satz 10.0.2. (2) gezeigt. □

11. Ganze Abschlüsse

11.1. **Ganzer Abschluß eines Bewertungsrings.**

11.1.1. *Anmerkung.* Jeder (allgemeine) Bewertungsring ist ganz abgeschlossen. (Aber nicht vollständig ganz abgeschlossen, wenn die Wertegruppe nicht archimedisch ist bei allgemeinen Bewertungen im Sinne von Anmerkung 2.3.14.)

Beweis. Sei S mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ ein Bewertungsring, $x \in \mathrm{Quot}(S)$ und x ganz über S. Dann hat man eine Gleichung
$x^n = a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_i \in S$ für alle i. Wäre $x \notin S$, so wäre $\frac{1}{x} \in S$, ja sogar $\frac{1}{x} \in \mathfrak{P}$ als Nichteinheit. Es wäre dann
$1 = a_{n-1} \cdot \underset{\in \mathfrak{P}}{\frac{1}{x}} + a_{n-2} \cdot \underset{\in \mathfrak{P}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \cdots + a_0 \cdot \underset{\in \mathfrak{P}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} \in \mathfrak{P}$. Widerspruch! □

11.1.2. Satz. *Sei*
K/k eine algebraische Körpererweiterung (nicht notwendigerweise endlich),
ν mit dem Bewertungsring s eine Exponentenbewertung von k,
w_i mit den Bewertungsringen S_i, $i \in I$, sämtliche Fortsetzungen von ν auf K,
$R := \bigcap_{i \in I} S_i$.
Dann ist R der ganze Abschluß von s in K.

Beweis. Als Schnitt von in K ganz abgeschlossenen Ringen (s. Anmerkung 11.1.1.) ist R ganz abgeschlossen in K. Außerdem ist $R \supseteq s$. Bleibt zu zeigen, daß jedes Element von R ganz über s ist:
Sei $y \in R$ beliebig, $K' := k(y)$ und $S_i' := S_i \cap K'$. Dann ist $y \in \bigcap_{i \in I} S_i'$, und die (i.a. nicht alle verschiedenen) S_i' sind die Bewertungsringe sämtlicher Fortsetzungen von ν auf K', weil sich jede Bewertung von K' weiter auf K fortsetzen läßt (Anmerkung 9.0.8.) Sei $\widetilde{K}/k$ die normale Hülle der (endlichen!) Körpererweiterung K'/k und $\tilde{w}$ eine beliebige Fortsetzung von ν auf $\widetilde{K}$. Dann ist $\tilde{w}|K'$ eine Fortsetzung von ν auf K', also $\tilde{w}(y) \geq 0$, weil $y \in \bigcap_i S_i'$ ist.
Sei nun $\sigma \in G(\widetilde{K}/k)$. Dann ist auch $\tilde{w} \circ \sigma$ eine Fortsetzung von ν auf $\widetilde{K}$ und daher $\tilde{w} \circ \sigma(y) \geq 0$, d.h. auch alle Konjugierten von y über k haben bei allen Fortsetzungen von ν auf $\widetilde{K}$ Werte ≥ 0.
Sei nun $g \in k[X]$ das (normierte) Minimalpolynom von y über k. Die Koeffizienten a_i von g sind gewisse ganz rationale Ausdrücke in den Konjugierten von y über k. Daher ist $\tilde{w}(a_i) \geq 0$ für eine beliebige Fortsetzung $\tilde{w}$ von ν auf $\widetilde{K}$. Dann ist auch $\nu(a_i) \geq 0$, weil $a_i \in k$, also $a_i \in s$ für alle i. Es folgt $g \in s[x]$ und daher ist y ganz über s. □

11.1.3. Korollar. *Sei*
K/k eine algebraische Körpererweiterung (nicht notwendig endlich),
$\mathfrak{s}$ eine Menge von Bewertungsringen von k,
$P := \bigcap_{s \in \mathfrak{s}} s$,
$\mathfrak{S} := \{S \mid S$ ist ein Bewertungsring von K und $S \cap k \in \mathfrak{s}\}$,
$R := \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$.
Dann ist R der ganze Abschluß von P in K.

Beweis. Es ist klar, daß $R \supseteq P$ und R ganz abgeschlossen in K ist. Bleibt zu zeigen, daß jedes Element von R ganz über P ist:

Seien $y \in R$ und $s \in \mathfrak{s}$ beliebig. Dann ist $y \in \bigcap_{\substack{S \in \mathfrak{S} \\ S \cap k = s}} S =$ ganzer Abschluß von s in K nach Satz 11.1.2. Also ist y ganz über s. Als Bewertungsring ist s ganz abgeschlossen in k, also liegen die Koeffizienten des (normierten) Minimalpolynoms g von y über k schon in s. Das gilt für *alle* $s \in \mathfrak{s}$. Also ist $g \in P[X]$ und somit y ganz über P. □

11.1.4. *Anmerkung.* Unter den Voraussetzungen von Korollar 11.1.3. ist im allgemeinen **nicht** $k = \mathrm{Quot}(P)$ und auch **nicht** $K = \mathrm{Quot}(R)$! Vergleiche Beispiel 3.3.7.

11.2. **Ganzer Abschluß von Krull- und Dedekind-Ringen.**

11.2.1. Satz. *Sei*
P ein Krull-Ring,
$k := \mathrm{Quot}(P)$,
K/k eine endlich *algebraische Körpererweiterung,*
R der ganze Abschluß von P in K.
Dann ist R ein Krull-Ring (und $\mathrm{Quot}(R) = K$).

Beweis. Nach Satz 3.3.1. (4) ist $P = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(P) \\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1}} P_{\mathfrak{p}}$ und die $P_{\mathfrak{p}}$ sind diskrete Bewertungsringe zu Bewertungen $\nu_{\mathfrak{p}}$. Die Bewertungsringe S der Fortsetzungen der $\nu_{\mathfrak{p}}$ auf K sind dann ebenfalls diskrete Bewertungsringe nach Satz 9.0.7., weil K/k endlich algebraisch ist.
Sei $\mathfrak{S} := \{S \mid S$ Bewertungsring einer Fortsetzungen eines $\nu_{\mathfrak{p}}\}$.
Nach Korollar 11.1.3. ist $R = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$.
Damit ist die Bedingung (1a) von Satz 3.3.1. für R erfüllt.
Bleibt noch die Endlichkeitsbedingung (1b) von Satz 3.3.1. für $\mathfrak{S}$ zu zeigen:
Sei $0 \neq x \in R$. Dann ist x ganz über P. Also gibt es eine Ganzheitsgleichung $x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_i \in P$ und $a_0 \neq 0$. Es ist
$a_0 = -x \cdot (x^{n-1} + a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1) = c \cdot x$ mit $c \in R$.
Sei w eine Bewertung von K, die zu einem $S \in \mathfrak{S}$ gehört, mit $w(x) > 0$. Dann ist also $w(a_0) = \underset{>0}{w(x)} + \underset{\geq 0}{w(c)} > 0$. Nach Definition von S ist w Fortsetzung auf K eines $\nu_{\mathfrak{p}}$ von k. Dann ist also auch $\nu_{\mathfrak{p}}(a_0) = w(a_0) > 0$. Da P ein Krull-Ring ist, gibt es nur *endlich viele* $\nu_{\mathfrak{p}}$ mit $\nu_{\mathfrak{p}}(a_0) > 0$. Da $[K : k] < \infty$, ist hat jedes $\nu_{\mathfrak{p}}$ nur *endlich viele* Fortsetzungen w auf K. Also gibt es höchstens endlich viele $S \in \mathfrak{S}$ mit $w(x) > 0$.
($\mathrm{Quot}(R) = K$ gilt, weil $\mathrm{Quot}(P) = k$ und R der ganze Abschluß von P in K ist.) □

11.2.2. Satz. *Sei*
P ein Dedekind-Ring,
$k := \mathrm{Quot}(P)$,
K/k eine endlich *algebraische Körpererweiterung,*
R der ganze Abschluß von P in K.
Dann ist R ein Dedekind-Ring (und $\mathrm{Quot}(R) = K$).

Beweis. Nach Satz 3.5.1. (2)⇒(3) ist P ein Krull-Ring, und daher folgt aus Satz 11.2.1., daß auch R ein Krull-Ring ist. Nach Satz 3.5.1. (5)⇒(2) brauchen wir nur noch zu zeigen, daß jedes Primideal $\neq (0)$ von R maximal ist:
Sei $(0) \neq \mathfrak{P}$ ein Primideal von R. Da auch (0) ein Primideal von R mit $(0) \cap P = (0)$

und R ganz über P ist, folgt aus „Lying-over“, daß $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap P \neq (0)$ ist. Weil P ein Dedekind-Ring ist, ist dann $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von P. Da R ganz über P ist, folgt wieder nach „Lying-over“, daß $\mathfrak{P}$ ein maximales Ideal von R ist. □

11.2.3. Satz. *Sei P ein Krull-Ring,*
$k := \mathrm{Quot}(P)$,
K/k eine endlich algebraische Körpererweiterung,
R der ganze Abschluß von P in K,
$\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1 von P.
Dann gilt:
$\{R_{\mathfrak{P}} \mid \mathfrak{P}$ Primideal von R mit $\mathfrak{P} \cap P = \mathfrak{p}\}$ ist die Menge der Bewertungsringe sämtlicher Fortsetzungen von $\nu_{\mathfrak{p}}$ auf K.

Beweis. 1) Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{P} \cap P = \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = 1$; denn andernfalls gäbe es ein Primideal $\mathfrak{Q}$ in R mit $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q} \supset (0)$. Nach „Lying-over“ wäre dann $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{Q} \cap P \supset (0)$. Widerspruch zur Voraussetzung $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.
2) Da R nach Satz 11.2.1 ein Krull-Ring ist, sind die $R_{\mathfrak{P}}$ nach Satz 3.3.1. (2)⇒(3a) diskrete Bewertungsringe. Wegen $\mathfrak{P} \cap P = \mathfrak{p}$ ist ferner $R_{\mathfrak{P}} \cap k = P_{\mathfrak{p}}$, also gehört $R_{\mathfrak{P}}$ zu einer Fortsetzung von $\nu_{\mathfrak{p}}$ auf K nach Anmerkung 8.0.5.
3) Sei nun $\widetilde{S}$ mit dem maximalen Ideal $\widetilde{\mathfrak{P}}$ der Bewertungsring einer beliebigen Fortsetzung von $\nu_{\mathfrak{p}}$ auf K. Mit Anmerkung 8.0.5. hat man dann $(\widetilde{\mathfrak{P}} \cap R) \cap P = \widetilde{\mathfrak{P}} \cap P = \mathfrak{p} \cdot P_{\mathfrak{p}} \cap P = \mathfrak{p}$. Nach 1) folgt $\mathrm{ht}(\widetilde{\mathfrak{P}} \cap R) = 1$. Also ist $R_{\widetilde{\mathfrak{P}} \cap R}$ ein diskreter Bewertungring mit $R_{\widetilde{\mathfrak{P}} \cap R} \subseteq \widetilde{S}$. Da ein diskreter Bewertungsring ein maximaler Unterring von K ist, folgt $R_{\widetilde{\mathfrak{P}} \cap R} = \widetilde{S}$. □

12. Filtrierte Ringe und Moduln

In diesem Abschnitt folgen wir im wesentlichen der Darstellung in [11], Chap.II.

12.0.1. Definition. Ein „filtrierter Ring“ ist ein Paar
$\big(R, \{R_n \mid n \in \mathbb{Z}\}\big)$, wobei R ein Ring ist und die R_n Ideale von R sind mit:
$R_0 = R$, $R_n \supseteq R_{n+1}$ und $R_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.
Ein „filtrierter Modul“ über dem filtrierten Ring $\big(R, \{R_n\}\big)$ ist ein Paar
$\big(M, \{M_n \mid n \in \mathbb{Z}\}\big)$, wobei M ein R-Modul ist und die M_n Untermoduln von M sind mit:
$M_0 = M$, $M_n \supseteq M_{n+1}$ und $R_m \cdot M_n \subseteq M_{m+n}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.
(Insbesondere ist dann $R_n = R$ und $M_n = M$ für alle $n \leq 0$ und
$R_n \cdot M \subseteq M_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.)
Die Familien $\{R_n\}$ bzw. $\{M_n\}$ heißen „Filtrierungen“ von R bzw. M.

12.0.2. *Anmerkung.*

(1) Ein filtrierter Ring $\big(R, \{R_n\}\big)$ ist insbesondere als Modul über sich selbst auch ein filtrierter $\big(R, \{R_n\}\big)$-Modul. Daher kann man sich im Folgenden meist auf den Fall eines filtrierten $\big(R, \{R_n\}\big)$-Moduls beschränken. Dann gelten die Aussagen auch für den Spezialfall $\big(M, \{M_n\}\big) = \big(R, \{R_n\}\big)$.

(2) Sei R ein filtrierter Ring und N ein R-Untermodul des filtrierten R-Moduls $\big(M, \{M_n\}\big)$. Dann definiert
$N_n := M_n \cap N$ eine Filtrierung auf N, die sogenannte „induzierte Filtrierung auf dem Untermodul“.
Ferner definiert
$\overline{M}_n := (M_n + N)/N$ eine Filtrierung auf dem Faktormodul M/N, die sogenannte „induzierte Filtrierung auf dem Faktormodul“.

12.0.3. Definition. Seien
$\big(R, \{R_n\}\big)$ ein filtrierter Ring,
$\big(M, \{M_n\}\big)$ und $\big(N, \{N_n\}\big)$ filtrierte R-Moduln.
Ein „Morphismus“ von M nach N ist eine R-lineare Abbildung
$\sigma : M \longrightarrow N$ mit
$\sigma(M_n) \subseteq N_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
σ heißt „strikt“, wenn gilt
$\sigma(M_n) = N_n \cap \sigma(M)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
(Äquivalent dazu ist offenbar $\overset{-1}{\sigma}(N_n) = M_n + \mathrm{Ker}(\sigma)$. Dabei bezeichnet $\overset{-1}{\sigma}$ das volle Urbild bei σ)

12.0.4. Definition. Sei R ein Ring und $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R. Die durch
$R_n := \begin{cases} R & \text{für } n \leq 0 \\ \mathfrak{q}^n & \text{für } n > 0 \end{cases}$ definierte Filtrierung von R heißt die
„$\mathfrak{q}$-adische Filtrierung“ von R.
Sei R ein Ring, $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R und M ein R-Modul. Die durch
$M_n := \begin{cases} M & \text{für } n \leq 0 \\ \mathfrak{q}^n \cdot M & \text{für } n > 0 \end{cases}$ definierte Filtrierung von M heißt die
„$\mathfrak{q}$-adische Filtrierung“ von M.

12.0.5. *Anmerkung.* Für die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung gilt:

(1) $\big(R, \{R_n\}\big)$ ist ein filtrierter Ring.
(2) $\big(M, \{M_n\}\big)$ ist ein filtrierter $\big(R, \{R_n\}\big)$-Modul.
(3) Jede R-lineare Abbildung ist ein Morphismus.

12.1. **Die durch eine Filtrierung definierte Topologie.**

12.1.1. Definition. Sei $\big(M, \{M_n\}\big)$ ein filtrierter $\big(R, \{R_n\}\big)$-Modul.
Die $\{M_n\}$ als Umgebungsbasen der Null von M definieren eine lineare Topologie auf M. (D.h. eine Umgebungsbasis eines beliebigen Punktes $x \in M$ ist gegeben durch $\{x + M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.)
Diese Topologie heißt „die durch die Filtrierung definierte (oder induzierte) Topologie."

12.1.2. *Anmerkung.* M wird damit ein topologischer R-Modul, d.h. die Abbildungen
$M \times M \ni (x, y) \longmapsto x + y \in M$ und
$R \times M \ni (r, x) \longmapsto r \cdot x \in M$
sind stetig.
Die Topologie wird auch durch eine uniforme Struktur auf M bzw. R gegeben, indem man als Basis der uniformen Struktur die $L_n := \{(x, y) \mid x - y \in M_n\}$ definiert.

12.1.3. Definition. Die durch die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung auf M bzw. R im Sinne von Definition 12.0.4. definierte Topologie heißt die
„$\mathfrak{q}$-adische Topologie" auf M bzw. R.

12.1.4. *Anmerkung.* Jeder Morphismus ist in der durch die betr. Filtrierung definierten Topologie stetig.
Insbesondere ist also jede R-lineare Abbildung in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie stetig.

12.1.5. Satz. *Sei N ein Untermodul eines filtrierten Moduls $\big(M, \{M_n\}\big)$, $\overline{N}$ der topologische Abschluß von N in der durch die Filtrierung $\{M_n\}$ definierten Topologie von M. Dann gilt:*

$$\overline{N} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (N + M_n).$$

Insbesondere sind alle M_n offen und abgeschlossen in M.
(M ist „total unzusammenhängend".)

Beweis. Nach Definition des topologischen Abschlusses gilt:
$x \in \overline{N} \Leftrightarrow (x + M_n) \cap N \neq \emptyset$ für alle n. Also $x \notin \overline{N} \Leftrightarrow$ es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$(x + M_{n_0}) \cap N = \emptyset \Leftrightarrow$ Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$x \notin N + M_{n_0} \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{n=0}^{\infty}(N + M_n)$. □

12.1.6. Satz. *M ist separiert in der durch die Filtrierung $\{M_n\}$ definierten Topologie $\Leftrightarrow \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} M_n = (0)$.*

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Wegen $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n = (0)$ gibt es dann ein n_0 mit $x - y \notin M_{n_0}$. Es folgt $(x + M_{n_0}) \cap (y + M_{n_0}) = \emptyset$, also besitzen verschiedene Punkte fremde Umgebungen und der Raum ist folglich separiert (Hausdorffsch).
$\underline{\Rightarrow}$: Ist $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n \neq (0)$, so gibt es ein $x \neq 0$ mit $x \in M_n$ für alle n. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig, so gilt dann $(x + M_m) \cap (0 + M_n) \ni x$ d.h. je zwei Umgebungen der beiden verchiedenen Punkte x und 0 haben stets einen nichtleeren Schnitt. Der Raum ist also nicht separiert (Hausdorffsch). □

12.1.7. *Anmerkung.* Sei $\big(R, \{R_n\}\big)$ ein separierter filtrierter Ring, $e \neq 0$ ein Idempotent (z.B.die Eins) von R. Dann gilt: $e \notin R_n$ für alle $n \geq 1$.

Beweis. Wegen $R_1 \supseteq R_n$ für alle $n \geq 1$ genügt es zu zeigen $e \notin R_1$. Wäre $e \in R_1$, so wäre $e = e^n \in R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $e \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n = (0)$, weil R separiert ist nach Satz 12.1.6. Widerspruch zu $e \neq 0$!! □

12.2. **Cauchyfolgen und Limites.** Wie üblich definiert man die Begiffe „Limes", „konvergent", „Cauchyfolge", „komplett" bzgl. der uniformen Struktur, die durch eine Filtrierung gegeben ist. (vgl. die entsprechenden Begriffe für Bewertungen in den Definitionen 3.1.2., 4.1.1. und 4.1.4.):

12.2.1. Definition. Sei $\big(R, \{R_n\}\big)$ ein filtrierter Ring und $\big(M, \{M_n\}\big)$ ein filtrierter R-Modul.
Eine Folge a_i von Elementen aus M heißt
„konvergent", wenn es ein Element $a \in M$ gibt mit folgender Eigenschaft:
Zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A = A(n_0) \in \mathbb{N}$ mit $a - a_i \in M_{n_0}$ für alle $i \geq A$.
a heißt ein „Limes" der Folge a_i, in Zeichen $a = \lim\limits_{i\to\infty} a_i$.
Falls $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$ ist, heißt die Folge eine „Nullfolge".

12.2.2. *Anmerkung.* Wenn $\big(M, \{M_n\}\big)$ nicht separiert ist, ist ein Limes nicht eindeutig bestimmt, so daß die Bezeichnung $a = \lim\limits_{i\to\infty} a_i$ mehrdeutig ist. Die verschiedenen möglichen Limiten unterscheiden sich gerade um die Elemente aus $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$.

12.2.3. Definition. Eine Folge a_i von Elementen aus M heißt
„Cauchyfolge", wenn gilt:
Zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A = A(n_0) \in \mathbb{N}$ mit $a_i - a_j \in M_{n_0}$ für alle $i, j \geq A$.

12.2.4. *Anmerkung.* Es gelten die gewohnten Eigenschaften:

(1) Falls $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$ und $\lim\limits_{i\to\infty} b_i$ existieren, existiert auch $\lim\limits_{i\to\infty}(a_i \pm b_i)$ und, wenn M separiert ist, gilt
$\lim\limits_{i\to\infty}(a_i \pm b_i) = \lim\limits_{i\to\infty} a_i \pm \lim\limits_{i\to\infty} b_i$.

(2) Seien $r_i \in R$ und $a_i \in M$.
Falls $\lim\limits_{i\to\infty} r_i$ und $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$ existieren, existiert auch $\lim\limits_{i\to\infty}(r_i \cdot a_i)$ und, wenn M separiert ist, gilt
$\lim\limits_{i\to\infty}(r_i \cdot a_i) = \lim\limits_{i\to\infty} r_i \cdot \lim\limits_{i\to\infty} b_i$.

(3) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge (aber i.a. nicht umgekehrt).

(4) Eine Folge a_i aus M ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt:
Zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A = A(n_0) \in \mathbb{N}$ mit $a_i - a_{i-1} \in M_{n_0}$ für alle $i \geq A$, d.h. wenn die Folge $b_i := a_i - a_{i-1}$ eine „Nullfolge" ist.
(Vgl. Anmerkung 4.1.3. (3).)

Beweis. (1), (2) und (3) wie üblich.
(4): Daß eine Cauchyfolge die Bedingung erfüllt, ist klar.
Sei umgekehrt $a_i - a_{i-1} \in M_{n_0}$ für alle $i \geq A$ und sei $j > i$, dann ist auch
$a_i - a_j = \underbrace{(a_i - a_{i+1})}_{\in M_{n_0}} + \underbrace{(a_{i+1} - a_{i+2})}_{\in M_{n_0}} + \cdots + \underbrace{(a_{j-1} - a_j)}_{\in M_{n_0}} \in M_{n_0}$. □

12.2.5. Definition. Der filtrierte R-Modul $\big(M, \{M_n\}\big)$ heißt „komplett", wenn jede Cauchyfolge einen Limes besitzt.

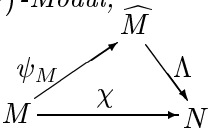
Wie bei jeder uniformen Struktur kann man auch hier eine „Komplettierung“ konstruieren als minimalen „Obermodul“, in dem jede Cauchyfolge konvergiert. Wenn der filtrierte Modul nicht separiert ist, hat man allerdings nur einen nicht injektiven Morphismus in die Komplettierung.

12.3. **Konstruktion der Komplettierung.**

12.3.1. Satz. *Seien*
$\big(M, \{M_n\}\big)$ *ein filtrierter Modul über dem filtrierten Ring* $\big(R, \{R_n\}\big)$. *Dann existiert ein filtrierter* R*-Modul* $\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}\big)$ *und ein Morphismus* $\psi_M : M \longrightarrow \widehat{M}$ *mit:*

(1) $\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}\big)$ *ist komplett und separiert.*

(2) *Ist* $\big(N, \{N_n\}\big)$ *ein beliebiger kompletter, separierter* $\big(R, \{R_n\}\big)$*-Modul,*
$\chi : M \longrightarrow N$ *eine stetige* R*-lineare Abbildung.*
Dann existiert genau eine *stetige* R*-lineare Abbildung*
$\Lambda : \widehat{M} \longrightarrow N$ *mit* $\chi = \Lambda \circ \psi_M$.



(a) *Falls* χ *ein Morphismus ist, ist auch* Λ *ein Morphismus.*

(3) $\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}, \psi_M\big)$ *ist durch* (1) *und* (2) *bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt die „Komplettierung“ von* $\big(M, \{M_n\}\big)$.

(4) *Ist* $M = R$ *und* $M_n = R_n$, *so ist* $\big(\widehat{R}, \{\widehat{R}_n\}\big)$ *in natürlicher Weise ein filtrierter Ring und* ψ_M *ein Morphismus filtrierter Ringe.*

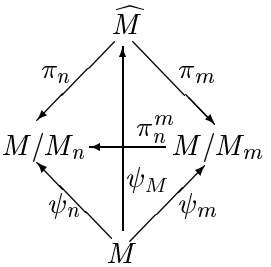
(5) $\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}\big)$ *ist in natürlicher Weise ein filtrierter* $\big(\widehat{R}, \{\widehat{R}_n\}\big)$*-Modul, ebenso wie jeder komplette separierte filtrierte* $\big(R, \{R_n\}\big)$*-Modul, indem man die skalare Multiplikation stetig fortsetzt.*

(6) (a) *Für* $n \leq m$ *ist* $M_n/M_m \xrightarrow[\psi_M]{\sim} \widehat{M}_n/\widehat{M}_m$.

(b) $\widehat{M}_n$ *ist der topologische Abschluß von* $\psi_M(M_n)$ *in* $\widehat{M}$ *(also komplett).*
Insbesondere ist $\psi_M(M)$ *dicht in* $\widehat{M}$.

(7) $\operatorname{Ker} \psi_M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$,
$\psi_M^{-1}(\widehat{M}_n) = M_n$, *also ist* ψ_M *strikt.*

(8) *Man erhält* $\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}, \psi_M\big)$ *folgendermaßen:*
Betrachte das „inverse System“
$\mathcal{M} = \big(M/M_n, \pi_n^m\big)$, *wobei*
$\pi_n^m : M/M_n \longleftarrow M/M_m$ *für* $n \leq m$ *der kanonische Homorphismus ist.*
Sei $\big(\widehat{M}, \{\pi_n\}\big) := \varprojlim \mathcal{M}$ *der inverse Limes,*
$\widehat{M}_0 := \widehat{M}$ *und* $\widehat{M}_n := \operatorname{Ker} \pi_n$ *für* $n \geq 1$.
Ferner sei
$\psi_n : M \longrightarrow M/M_n$ *kanonisch und*
$\psi_M := \varprojlim \psi_n : M \longrightarrow \widehat{M}$.
Dann hat
$\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}, \psi_M\big)$ *die gewünschten Eigenschaften.*



Mit $\widehat{M}$ *bezeichnen wir im Folgenden den unter* (8) *konstruierten Modul.*

Zusatz *(Diskrete Topologie auf* M*):*
Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß gilt* $M_n = (0)$ *für alle* $n \geq n_0$, *so ist in natürlicher*

Weise $\widehat{M}_n = M_n$ für alle n, insbesondere also $\widehat{M} = M$, und jeder R-Untermodul von M ist in natürlicher Weise auch ein $\widehat{R}$-Untermodul (und umgekehrt).

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß das in (8) konstruierte $\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}, \psi_M\big)$ die Eigenschaften (1) und (2) hat. Damit ist dann der Existenzbeweis geführt. Danach zeigen wir (3). Bei den Beweisen von (4) bis (7) können wir uns also, wo nötig, auf die Eigenschaften der Konstruktion berufen, weil nach (3) jede Komplettierung natürlich isomorph zu der in (8) konstruierten ist.
Mit einer Überstreichung bezeichnen wir im Folgenden die Restklassen nach den jeweiligen Untermoduln. Aus dem Zusammenhang ergibt sich dann immer, was gemeint ist.
(8): Nach Definition des inversen Limes ist für $\big(\widehat{M}, \{\pi_n\}\big) = \varprojlim \mathcal{M}$:
$\widehat{M} := \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \mid \bar{x}_i \in M/M_i,\ \bar{x}_i = \pi_i^{i+1}(\bar{x}_{i+1})\},$ d.h. $x_{i+1} - x_i \in M_i\}$
mit komponentenweiser Addition und
$r \cdot (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) := (r\cdot\bar{x}_1, r\cdot\bar{x}_2, \dots)$ für $r \in R$.
(Weil die π_n^m R-linear sind, liegt das Tupel $(r\cdot\bar{x}_1, r\cdot\bar{x}_2, \dots)$ wieder in $\widehat{M}$.)
Aus $\pi_i^{i+1}(\bar{x}_{i+1}) = \bar{x}_i$ für alle i folgt weiter $\pi_n^m(\bar{x}_m) = \bar{x}_n$ für alle $m \geq n$.
Man hat nach Definition des inversen Limes die Projektionen
$\pi_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots) := \bar{x}_n \in M/M_n$.
Es gilt:
$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots) \in \mathrm{Ker}(\pi_n)$ genau dann, wenn $x_n \in M_n$.
Da $M_i \supseteq M_n$ für alle $i < n$ und $\pi_n^m(\bar{x}_m) = \bar{x}_n$ für alle $m > n$ ist, gilt
$x_n \in M_n \Leftrightarrow x_m \in M_n$ für alle m und daher auch $\bar{x}_i = \pi_i^n(\bar{x}_n) = 0$ für alle $i \leq n$.
Also hat man:

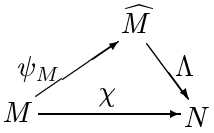
$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{M_n}}: &= \mathbf{Ker}\,\boldsymbol{\pi_n}\\ &= \{(\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2, \dots) \mid (\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2, \dots) \in \widehat{\boldsymbol{M}},\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}\}\\ &= \{(\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2, \dots) \mid (\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2, \dots) \in \widehat{\boldsymbol{M}},\ \boldsymbol{x_m \in M_n \text{ für alle } m}\}\\ &= \{(\bar{\mathbf{0}}, \dots, \bar{\mathbf{0}}, \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n+1}}, \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n+2}}, \dots) \mid (\bar{\mathbf{0}}, \dots, \bar{\mathbf{0}}, \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n+1}}, \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n+2}}, \dots) \in \widehat{\boldsymbol{M}}\}.\end{aligned}$$

Es folgt: $\widehat{M}_n \supseteq \widehat{M}_{n+1}$ für alle n. Ferner
$R_s \cdot \widehat{M}_q =$
$\{(\overline{r\cdot x_1}, \overline{r\cdot x_2}, \dots) \mid r \in R_s,\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widehat{M},\ x_m \in M_q \text{ für alle } m \geq q, \} \subseteq \widehat{M}_{s+q}$.
Es folgt:
$\boldsymbol{\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}\big)}$ **ist ein filtrierter** $\boldsymbol{\big(R, \{R_n\}\big)}$**-Modul**.
Definiere nun
$\psi_M : M \longrightarrow \widehat{M}$ durch $\psi_M := \varprojlim \psi_n$, d.h.
$\psi_M(x) := \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots\big)$. Das ist sinnvoll, da $\psi_i = \pi_i^{i+1} \circ \psi_{i+1}$ ist. Dann ist
ψ_M ein R-Modulhomomorphismus. Es ist dann
$\mathbf{Ker}(\boldsymbol{\psi_M}) = \{x \mid x \in M, \psi_n(x) = 0 \text{ für alle } n\} = \bigcap_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{\infty}} \boldsymbol{M_n}$.
Es ist
$\psi_M(M_n) \subseteq \widehat{M}_n$ nach der obigen Charakterisierung von $\widehat{M}_n$,und sogar
$\psi_M^{-1}(\widehat{M}_n) = M_n = M_n + \mathrm{Ker}(\psi_M)$, also ist
$\boldsymbol{\psi_M}$ **ein strikter Morphismus**.
Es folgt (7). Ferner ist
$\boldsymbol{\widehat{M}}$ **separiert** nach Satz 12.1.6.; denn nach der oben angegebenen Darstellung für die Elemente aus $\widehat{M}_n$ sieht man: $\bigcap_{n=0}^{\infty} \widehat{M}_n = \{(\bar{0}, \bar{0}, \dots)\}$.

Wichtig für das Rechnen in $\widehat{M}$ ist noch die folgende Feststellung:
$(*)$ $\quad \boldsymbol{\widehat{M} \ni \hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_M(x_n)}$; genauer:
$\boldsymbol{\hat{x} - \psi_M(x_n) \in \widehat{M}_n}$ **für alle** $\boldsymbol{n}$.
Beweis: $\pi_n(\hat{x} - \psi_M(x_n)) = \pi_n(\hat{x}) - \pi_n(\psi_M(x_n)) =$
$\pi_n((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots)) - \pi_n((\bar{x}_n, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_n, \dots)) = \bar{x}_n - \bar{x}_n = \bar{0}$, also
$\hat{x} - \psi_M(x_n) \in \mathrm{Ker}(\pi_n) = \widehat{M}_n$, q.e.d.
1.*Folgerung*:
$\boldsymbol{\psi_M(M_n)}$ **ist dicht in** $\boldsymbol{\widehat{M}_n}$ **für alle** $\boldsymbol{n}$. Da $\widehat{M}_n$ nach Satz 12.1.5. abgeschlossen in $\widehat{M}$ ist, folgt daraus:
$\boldsymbol{\widehat{M}_n}$ **ist der topologische Abschluß von** $\boldsymbol{\psi_M(M_n)}$ **in** $\boldsymbol{\widehat{M}}$. Insgesamt folgt also (6b).
Beweis: Sei $\hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widehat{M}_n$ beliebig. Dann ist $x_i \in M_n$ für alle i und nach $(*)$ ist $\hat{x} = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$, q.e.d.
2.*Folgerung*:
Die durch $\boldsymbol{\psi_M}$ **für alle** $\boldsymbol{m \geq n}$ **induzierte Abbildung**
$\boldsymbol{\psi_{nm} : M_n \longrightarrow \widehat{M}_n/\widehat{M}_m}$ **ist surjektiv**.
Beweis: Sei $\hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widehat{M}_n$ beliebig. Dann ist $x_i \in M_n$ für alle i, speziell also $x_m \in M_n$, und nach $(*)$ ist $\hat{x} - \psi_M(x_m) \in \widehat{M}_m$.
Es folgt $\widehat{M}_n/\widehat{M}_m \ni \hat{x} + \widehat{M}_m = \psi_{nm}(x_m)$, q.e.d.
Ferner ist
$\boldsymbol{\mathrm{Ker}(\psi_{nm}) = M_m}$; denn $\psi_{nm}(x) = 0 \Leftrightarrow (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots) \in \widehat{M}_m \Leftrightarrow \psi_m(x) = 0 \Leftrightarrow x \in M_m$ q.e.d.
Es folgt:
$\boldsymbol{\psi_M}$ **induziert einen Isomorphismus** $\boldsymbol{M_n/M_m \xrightarrow{\simeq} \widehat{M}_n/\widehat{M}_m}$. $\Rightarrow$ (6a).
Wir zeigen nun:
$\boldsymbol{\widehat{M}_n}$ **ist für alle** $\boldsymbol{n}$ **komplett in der durch die Filtrierung von** $\boldsymbol{\widehat{M}}$ **induzierten Topologie**. Insbesondere folgt daraus dann (1).
Beweis: a) Jede Cauchyfolge $\psi_M(x_i)$ mit $x_i \in M_n$ hat einen Limes in $\widehat{M}_n$:
Da die $\psi_M(x_i)$ nach Voraussetzung eine Cauchyfolge bilden, genügt es zu zeigen, daß eine passend ausgewählte Teilfolge einen Limes in $\widehat{M}_n$ hat. Dieser ist dann auch ein Limes der ursprüglichen Folge. Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man o.B.d.A annehmen: $\psi_M(x_{i+1} - x_i) = \psi_M(x_{i+1}) - \psi_M(x_i) \in \widehat{M}_i$ für alle i.
(Denn: Aus der Cauchy-Eigenschaft folgt, daß es zu jedem i ein k_i gibt mit $\psi_M(x_j) - \psi_M(k_i) \in \widehat{M}_i$ für alle $j > k_i$. Da man k_i hierbei durch ein größeres ersetzen kann, kann die k_i so wählen, daß $k_i < k_{i+1}$ ist.Wähle als Teilfolge die Folge der $\psi_M(x_{k_i})$. Dann ist $\psi_M(x_{k_{i+i}}) - \psi_M(x_{k_i}) \in \widehat{M}_i$.)
Das bedeutet $x_{i+1} - x_i \in M_i$ für alle i, also ist $\hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widehat{M}$, ja sogar $\hat{x} \in \widehat{M}_n$, weil nach Voraussetzung alle $x_i \in M_n$ liegen. Nach $(*)$ ist dann $\hat{x} = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(x_i)$. q.e.d.
b) Sei nun $\hat{x}_i \in \widehat{M}_n$ eine beliebige Cauchyfolge aus $\widehat{M}_n$. Weil $\psi_M(M_n)$ nach der ersten Folgerung dicht in $\widehat{M}_n$ ist, gibt es für jedes i ein $y_i \in M_n$ mit $\hat{x}_i - \psi_M(y_i) \in \widehat{M}_i$. Dann ist auch $\psi_M(y_i)$ eine Cauchyfolge in $\widehat{M}_n$. Aus a) folgt, daß es ein $\hat{y} \in M_n$ gibt mit $\hat{y} = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(y_i)$. Dann ist aber auch $\hat{y} = \lim\limits_{i\to\infty} \hat{x}_i$. q.e.d.

Beweis von (2) für $(\widehat{M}, \psi_M)$: Sei $\chi : M \to N$ eine stetige R-lineare Abbildung in einen separierten R-Modul N.

Λ *ist eindeutig bestimmt*: Sei $\hat{x} \in \widehat{M}$ beliebig. Da $\psi_M(M)$ dicht in $\widehat{M}$ ist, gibt es eine Folge $x_i \in M$ mit $\hat{x} = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(x_i)$. Falls es also eine stetige R-lineare Abbildung Λ mit $\chi = \Lambda \circ \psi_M$ gibt, muß gelten



$\Lambda(\hat{x}) = \lim\limits_{i\to\infty} \Lambda(\psi_M(x_i)) = \lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i)$.

Da N nach Voraussetzung separiert ist, ist $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i)$, falls existent, eindeutig bestimmt. Falls es also ein Λ mit der verlangten Eigenschaft gibt, muß notwendigerweise $\Lambda(\hat{x}) = \lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i)$ sein und zwar für jede solche Folge x_i mit $\lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(x_i) = \hat{x}$. Λ ist also durch χ eindeutig bestimmt.

Existenz von Λ: Sei $\hat{x} \in \widehat{M}$ und $x_i \in M$, so daß $\hat{x} = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(x_i)$ ist.

Wir zeigen, daß die $\chi(x_i)$ eine Cauchyfolge in N bilden:

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Weil χ stetig ist, gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\chi^{-1}(N_\ell) \supseteq M_j$. Weil die $\psi_M(x_i)$ eine Cauchyfolge bilden, gibt es ein m mit

$\psi_M(x_i - x_k) = \psi_M(x_i) - \psi_M(x_k) \in \widehat{M}_j$ für alle $i, k \geq m$. Dann gilt $x_i - x_k \in M_j$ und daher

$\chi(x_i) - \chi(x_k) = \chi(x_i - x_k) \in \chi(M_j) \subseteq N_\ell$ für alle $i, k \geq m$. Also bilden die $\chi(x_i)$ eine Cauchyfolge in N, und, weil N komplett ist, hat diese einen Limes in N. Wir definieren also

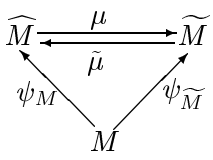
$\Lambda(\hat{x}) := \lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i)$.

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der x_i ab: Sind auch $y_i \in M$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(y_i) = \hat{x}$, so ist $\lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(x_i - y_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(x_i) - \lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(y_i) = 0$ in $\widehat{M}$. Wie zuvor bei dem Beweis, daß die $\chi(x_i)$ eine Cauchyfolge bilden, folgert man daraus $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i) - \lim\limits_{i\to\infty} \chi(y_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i - y_i) = 0$ in N, also $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \chi(y_i)$.

Daß Λ eine R-lineare Abbildung ist, folgt, weil „+“ und „$\cdot$“ stetig sind. Ferner sieht man aus der Definition sofort, daß $\Lambda \circ \psi_M = \chi$ gilt und daß Λ stetig ist.

Sei nun χ ein Morphismus, $\hat{x} \in \widehat{M}_n$ und $x_i \in M_n$ mit $\hat{x} = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_M(x_i)$. Weil χ ein Morphismus ist, gilt $\chi(M_n) \subseteq N_n$ und daher $\chi(x_i) \in N_n$ für alle i. Nun ist N_n abgeschlossen (Satz 12.1.5.) und daher ist auch $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(x_i) \in N_n$, also $\Lambda(\widehat{M}_n) \subseteq N_n$, d.h. Λ ist ein Morphismus.

(3) ergibt sich mit den üblichen funktoriellen Überlegungen aus der universellen Eigenschaft (2).



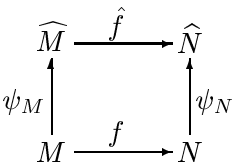
Man zeigt, daß die nach (2) existierende natürliche stetige R-lineare Abbildung μ eine stetige Umkehrabbildung $\tilde{\mu}$ besitzt. Da $\psi_{\widetilde{M}}$ und ψ_M Morphismen sind, sind auch μ und $\tilde{\mu}$ Morphismen nach (2a), also ist μ ein natürlicher Isomorphismus filtrierter Moduln.

(4): Im Fall $M = R$ sind die π_n^m Ringhomomorphismen. Sind dann $\hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widetilde{R}_n$ und $\hat{y} := (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) \in \widetilde{R}_m$, so sind die $x_i \in R_n$ und die $y_i \in R_m$, also $x_i \cdot y_i \in R_{n+m}$ für alle i. Ferner folgt aus $\pi_i^{i+1}(\bar{x}_{i+1}) = \bar{x}_i$ und $\pi_i^{i+1}(\bar{y}_{i+1}) = \bar{y}_i$, daß auch gilt $\pi_i^{i+1}(\bar{x}_{i+1} \cdot \bar{y}_{i+1}) = \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i = \overline{x_i \cdot y_i}$, so daß das durch komponentenwweise Multiplikaion aus $\hat{x}$ und $\hat{y}$ enstehende Element in $\widehat{R}_{n+m}$ liegt.

Man kann also definieren:
$\hat{x} \cdot \hat{y} := (\bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1, \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2, \dots) = (\overline{x_1 \cdot y_1}, \overline{x_2 \cdot y_2}, \dots)$ und erhält so eine Struktur von $\left(\widehat{R}, \{\widehat{R}_n\}\right)$ als filtriertem Ring, derart daß offenbar ψ_M ein Morphismus filtrierter Ringe wird.
Eine zweite von der speziellen Konstruktion von $\widehat{R}$ unabhängige Weise, die Multiplikation auf $\widehat{R}$ zu definieren, ergibt sich aus:
(4) und (5): Sei $\left(N, \{N_n\}\right)$ ein beliebiger kompletter, separierter filtrierter $\left(R, \{R_n\}\right)$-Modul. Dann läßt sich die skalare Multiplikation $R \times N \to N$ zu einer Multiplikation $\widehat{R} \times N \to N$ folgendermaßen stetig fortsetzen:
Sei $\hat{r} \in \widehat{R}$ beliebig. Dann ist $\hat{r} = \lim\limits_{i \to \infty} \psi_R(r_i)$ mit $r_i \in R$, wenn $\psi_R : R \to \widehat{R}$ der kanonische Homomorphismus ist. Sei $y \in N$ beliebig. Die Folge der r_i ist eine Cauchyfolge in R, d.h. zu $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A \in \mathbb{N}$ mit $r_i - r_j \in R_{n_0}$ für alle $i, j > A$. Dann ist $r_i \cdot y - r_j \cdot y \in N_{n_0}$ für alle $i, j > A$, also ist die Folge der $r_i \cdot y$ eine Cauchyfolge in N. Da N komplett und separiert ist hat diese Folge einen eindeutig bestimmten Limes, und wir definieren $\hat{r} \cdot y := \lim\limits_{i \to \infty} r_i \cdot y$. Wie bei der Definition von Λ rechnet man sofort nach, daß diese Definition nicht von der speziellen Wahl der Folge der r_i abhängt. Für $r \in R$ ist offenbar $r \cdot y = \psi_R(r) \cdot y$ für alle $y \in N$, so daß die Multiplikation $\widehat{R} \times N \to N$ die Multiplikation $R \times N \to N$ fortsetzt. Man rechnet ebenfalls nach, daß gilt $\widehat{R}_m \cdot N_n \subseteq N_{m+n}$.
Im Spezialfall $\left(N, \{N_n\}\right) = \left(\widehat{R}, \{\widehat{R}_n\}\right)$ wird damit $\left(\widehat{R}, \{\widehat{R}_n\}\right)$ zu einem filtrierten Ring und ψ_M ist dann offenbar ein Ringhomomorphismus und daher auch ein Morphismus filtrierter Ringe. (Auf Grund von $(*)$ sieht man, daß diese Definition der Multiplikation auf $\widehat{R}$ mit der im vorigen Punkt „(4):“ gegebenen übereinstimmt.) Damit ist (4) gezeigt.
Ebenso ergibt sich sofort, daß dann N zu einem $\widehat{R}$-Modul wird. Also ist wegen $\widehat{R}_m \cdot N_n \subseteq N_{m+n}$ dann $\left(\widehat{N}, \{\widehat{N}_n\}\right)$ ein filtrierter $\left(\widehat{R}, \{\widehat{R}_n\}\right)$-Modul. Indem man das auf $\left(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}\right)$ anwendet, folgt die Behauptung.
Beweis des Zusatzes: In diesem Falle ist $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n = (0)$, also $\mathrm{Ker}(\psi_M) = (0)$, und daher o.B.d.A. $M \subseteq \widehat{M}$.
Ist $\hat{x} \in \widehat{M}_n$ beliebig, so ist $\hat{x} = \lim\limits_{i \to \infty} x_i$ mit $x_i \in M_n$, also $\hat{x} - x_m \in M_{n_0} = (0)$ für große m und daher $\hat{x} = x_m \in M_n$. Es folgt $\widehat{M}_n = M_n$.
Ist U ein R-Untermodul von $\widehat{M} = M$, $x \in U$ und $\hat{r} \in \widehat{R}$ beliebig, so gibt es ein $r \in R$ mit $s := \hat{r} - \psi_R(r) \in \widehat{R}_{n_0}$. Dann ist $\hat{r} \cdot x = \psi_R(r) \cdot x + s \cdot x$. Aber $s \cdot x \in \widehat{R}_{n_0} \cdot \widehat{M} \subseteq \widehat{M}_{n_0} = M_{n_0} = (0)$. Also ist $\hat{r} \cdot x = \psi_R(r) \cdot x \in U$, und folglich ist U in natürlicher Weise auch ein $\widehat{R}$-Modul. □

12.3.2. *Folgerungen* (Funktoreigenschaften).

(1) Seien
$\left(M, \{M_n\}\right)$ und $\left(N, \{N_n\}\right)$ filtrierte $\left(R, \{R_n\}\right)$-Moduln,
$\left(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}, \psi_M\right)$ und $\left(\widehat{N}, \{\widehat{N}_n\}, \psi_N\right)$ ihre Komplettierungen,
$f : M \longrightarrow N$ eine stetige R-lineare Abbildung.
Dann existiert *genau eine* stetige R-lineare Abbildung
$\hat{f} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$ mit
$\hat{f} \circ \psi_M = \psi_N \circ f$.
$\hat{f}$ ist auch $\widehat{R}$-linear.



Ist f ein Morphismus, dann ist auch $\hat{f}$ ein Morphismus.
Ist $\hat{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widehat{M}$, so ist in diesem Falle $\hat{f}(\hat{x}) = (\overline{f(x_1)}, \overline{f(x_2)}, \dots)$.

(2) Der Übergang von f zu $\hat{f}$ ist ein „Kovarianter Funktor" der Kategorie der filtrierten R-Moduln und stetigen R-linearen Abbildungen in die Kategorie der filtrierten $\widehat{R}$-Moduln und $\widehat{R}$-linearen Abbildungen:
Sind $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ stetige R-lineare Abbildungen filtrierter R-Moduln, so ist $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$.
Ferner ist $\widehat{\mathrm{id}}_M = \mathrm{id}_{\widehat{M}}$.

(3) Der Übergang von f zu $\hat{f}$ ist ein „Additiver Funktor":
Sind $f, g : M \longrightarrow N$ stetige R-lineare Abbildungen filtrierter R-Moduln, so ist $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$.
Insbesondere ist dann auch $\hat{0} = 0$ die Nullabbildung.

(4) Ist $f : M \longrightarrow N$ ein topologischer R-Modul-Isomorphismus (d.h f ist ein algebraischer R-Modul-Isomorphismus und f und f^{-1} sind stetig), so ist auch $\hat{f} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$ ein topologischer R-Modul-Isomorphismus und $\hat{f}^{-1} = \widehat{f^{-1}}$.

(5) Ist f ein strikter Morphismus, so ist auch $\hat{f}$ strikt.

(6) Ist $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ eine exakte Folge *strikter* Morphismen, so ist auch $\widehat{M} \xrightarrow{\hat{f}} \widehat{N} \xrightarrow{\hat{g}} \widehat{L}$ eine exakte Folge *strikter* Morphismen.

Beweis. (1): Folgt direkt aus der universellen Eigenschaft der Komplettierung: $\psi_N \circ f$ ist eine stetige lineare Abbildung (bzw. ein Morphismus) von M in den kompletten, separierten filtrierten R-Modul $\widehat{N}$. Also existiert genau eine stetige R-lineare Abbildung (bzw. ein Morphismus) $\hat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$ mit $\hat{f} \circ \psi_M = \psi_N \circ f$.
Wenn f ein Morphismus ist, erhält man den Morphismus $\hat{f}$ mit der Konstruktion von $\widehat{M}$ explizit besonders einfach so:
Sei $\hat{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widehat{M}$, so setze $\hat{y} := (\overline{f(x_1)}, \overline{f(x_2)}, \dots)$ mit beliebigen Vertretern $x_i \in M$ für die $\bar{x}_i$. Dann ist $x_{i+1} - x_i \in M_i$ für alle i. Wenn f ein Morphismus ist, folgt $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(x_{i+1} - x_i) \in f(M_i) \subseteq N_i$ für alle i, also $\hat{y} \in \widehat{N}$. Ist ferner $\bar{x}_i = \bar{x}'_i$, so ist $f(x_i) - f(x'_i) = f(x_i - x'_i) \in f(M_i) \subseteq N_i$, also $\overline{f(x_i)} = \overline{f(x'_i)}$, d.h. $\hat{y}$ ist durch $\hat{x}$ eindeutig bestimmt. $\hat{x} \mapsto \hat{y}$ ist also eine Abbildung $h : \widehat{M} \to \widehat{N}$, und diese ist offenbar ein R-linearer Morphismus mit $h \circ \psi_M = \psi_N \circ f$. Daher ist $\hat{f} = h$. □

(2): Betrachte die kommutativen Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{M} & \xrightarrow{\hat{f}} & \widehat{N} & \xrightarrow{\hat{g}} & \widehat{L} \\ {\scriptstyle\psi_M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi_N} & & \uparrow{\scriptstyle\psi_L} \\ M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widehat{M} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\widehat{M}}} & \widehat{M} \\ {\scriptstyle\psi_M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi_M} \\ M & \xrightarrow{\mathrm{id}_M} & M \end{array}$$

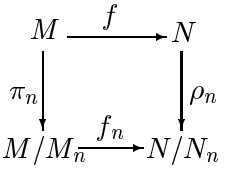
Aus $\hat{f} \circ \psi_M = \psi_N \circ f$ und $\hat{g} \circ \psi_N = \psi_L \circ g$ folgt
$(\hat{g} \circ \hat{f}) \circ \psi_M = \psi_L \circ (g \circ f)$.
$\hat{g} \circ \hat{f}$ erfüllt also die definierende Eigenschaft für $\widehat{g \circ f}$, und daher ist, wegen der eindeutigen Bestimmtheit einer solchen Abbildung $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$.
Ebenso folgt aus $\mathrm{id}_{\widehat{M}} \circ \psi_M = \psi_M \circ \mathrm{id}_M$, daß auch $\widehat{\mathrm{id}}_M = \mathrm{id}_{\widehat{M}}$ gilt. □

(3): Aus $\hat{f} \circ \psi_M = \psi_N \circ f$ und $\hat{g} \circ \psi_M = \psi_N \circ g$ folgt
$(\hat{f} + \hat{g}) \circ \psi_M = \psi_N \circ (f + g)$.

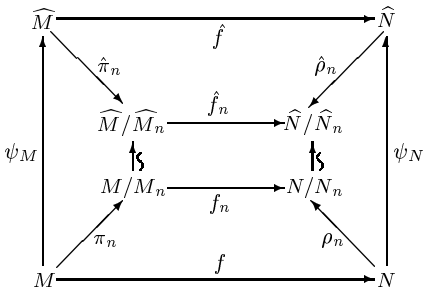
$\hat{g}+\hat{f}$ erfüllt also die definierende Eigenschaft für $\widehat{g+f}$, und daher ist, wegen der eindeutigen Bestimmtheit einer solchen Abbildung $\widehat{g+f}=\hat{g}+\hat{f}$. □

(4): Ist f ein topologischer R-Modul-Isomorphismus, so sind f und f^{-1} beide stetig. Nach (1) existieren dann $\hat{f}$ und $\widehat{f^{-1}}$ und beide sind stetig..
Aus $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_N$ und $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_M$ folgt dann nach (2)
$\hat{f}\circ\widehat{f^{-1}}=\mathrm{id}_{\widehat{N}}$ und $\widehat{f^{-1}}\circ\hat{f}=\mathrm{id}_{\widehat{M}}$.
Also ist $\hat{f}$ ein topologischer R-Modul-Isomorphismus und $\hat{f}^{-1}=\widehat{f^{-1}}$. □

(5): Sei nun $f:M\to N$ ein strikter Morphismus,
also $f^{-1}(N_n)=M_n+\mathrm{Ker}(f)$ für alle n.
Für einen beliebigen Morphismus sind wegen $f(M_n)\subseteq N_n$ durch f induzierte Abbildungen $f_n: M/M_n\longrightarrow N/N_n$ definiert mit $f_n\circ\pi_n=\rho_n\circ f$, wenn π_n und ρ_n die kanonischen Restklassenabbildungen bezeichnen.



Es ist offenbar $\mathrm{Ker}(f_n)=f^{-1}(N_n)/M_n=\pi_n\left(f^{-1}(N_n)\right)$. Folglich gilt:
f ist strikt$\Longleftrightarrow$ Für alle n ist $\mathrm{Ker}(f_n)=\pi_n(\mathrm{Ker}(f))$. ($\supseteq$ gilt stets.) Ebenso:
$\hat{f}$ ist strikt$\Longleftrightarrow$ Für alle n ist $\mathrm{Ker}(\hat{f}_n)=\hat{\pi}_n(\mathrm{Ker}(\hat{f}))$.
Unter Berücksichtigung der von ψ_M bzw. ψ_N induzierten Isomorphien
$M/M_n\xrightarrow{\sim}\widehat{M}/\widehat{M}_n$ bzw. $N/N_n\xrightarrow{\sim}\widehat{N}/\widehat{N}_n$
nach Satz 12.3.1 (6a) hat man das nebenstehende Diagramm kanonischer Homomorphismen. Es ist zu zeigen:
$\mathrm{Ker}(\hat{f}_n)\overset{!}{\subseteq}\hat{\pi}_n(\mathrm{Ker}(\hat{f}))$.



Beweis: Sei $\hat{z}+\widehat{M}_n\in\mathrm{Ker}(\hat{f}_n)$. Wegen der Kommutativität des Diagramms existiert dann ein $z\in M$ mit $\pi_n(z)=z+M_n\in\mathrm{Ker}(f_n)$ und $\hat{\pi}_n\circ\psi_M(z)=\hat{\pi}_n(\hat{z})$.
Da f strikt ist, folgt: Es existiert ein $y\in\mathrm{Ker}(f)$ mit $\pi_n(y)=\pi_n(z)$.
Dann ist $\hat{f}(\psi_M(y))=\psi_N(f(y))=0$, also $\psi_M(y)\in\mathrm{Ker}(\hat{f})$.
Ferner ist $\pi_n(y-z)=0$, also $y-z\in M_n$. Es folgt
$\psi_M(y)-\psi_M(z)\in\psi_M(M_n)\subseteq\widehat{M}_n=\mathrm{Ker}(\hat{\pi}_n)$ und daher $\hat{\pi}_n(\psi_M(z))=\hat{\pi}_n(\psi_M(y))$.
Man hat also: $\hat{z}+\widehat{M}_n=\hat{\pi}_n(\hat{z})=\hat{\pi}_n(\psi_M(z))=\hat{\pi}_n(\psi_M(y))\in\hat{\pi}_n(\mathrm{Ker}(\hat{f}))$. □

(6): Sei $M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}L$ eine exakte Folge strikter Morphismen. Nach (5) weiß man, daß dann auch $\hat{f}$ und $\hat{g}$ strikt sind. Bleibt die Exaktheit der Folge $\widehat{M}\xrightarrow{\hat{f}}\widehat{N}\xrightarrow{\hat{g}}\widehat{L}$ zu zeigen:
Aus $g\circ f=0$ folgt nach (2) und (3), daß $\hat{g}\circ\hat{f}=0$ ist, d.h. $\mathrm{Im}(\hat{f})\subseteq\mathrm{Ker}(\hat{g})$.
Bleibt zu zeigen:
$\mathrm{Ker}(\hat{g})\overset{!}{\subseteq}\mathrm{Im}(\hat{f})$.
Dazu zeigen wir zunächst:
a) $M/M_n\xrightarrow{f_n}N/N_n\xrightarrow{g_n}L/L_n$ ist exakt für alle n.
Beweis: Aus $g\circ f=0$ folgt trivialerweise $g_n\circ f_n=0$, also $\mathrm{Im}(f_n)\subseteq\mathrm{Ker}(g_n)$.
Umgekehrt: Sei $\bar{x}\in\mathrm{Ker}(g_n)$. Dann ist $g(x)\in L_n\cap g(N)=g(N_n)$, weil g strikt ist.
Es gibt also ein $y\in N_n$ mit $g(x)=g(y)$, d.h. $x-y\in\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Im}(f)$, weil die Folge

$\xrightarrow{f}\xrightarrow{g}$ exakt ist. Daher existiert ein $z \in M$ mit $x - y = f(z)$, also
$\bar{x} = \bar{x} - \underbrace{\bar{y}}_{\substack{=\bar{0} \\ \text{weil } y \in N_n}} = \overline{f(z)} = f_n(\bar{z})$, d.h $\bar{x} \in \mathrm{Im}(f_n)$. □

b) Sei nun $\hat{y} \in \mathrm{Ker}(\hat{g})$.
Behauptung: Es gibt ein $\hat{x} \in \widehat{M}$ mit $\hat{y} = \hat{f}(\hat{x})$. (Damit ist dann (6) gezeigt.)
Beweis: Wir benutzen die Darstellung der Komplettierungen als inverse Limites sowie die explizite Konstruktion von $\hat{f}$ für Morphismen aus (1).
Sei $\hat{y} := (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots)$. Wir konstruieren induktiv eine Folge $x_n \in M$, $n = 0, 1, 2, \dots$ mit
$x_n - x_{n-1} \in M_{n-1}$, so daß gilt $f(x_n) \equiv y_n \pmod{N_n}$.
(Dann ist $\hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \widehat{M}$ und $\hat{f}(\hat{x}) = (\overline{f(x_1)}, \overline{f(x_2)}, \dots) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) = \hat{y}$. q.e.d.)
Konstruktion der x_n: Setze $y_0 := 0$, $x_0 := 0$.
Dann ist wegen $N_0 = N$ trivialerweise $0 = f(x_0) \equiv y_0 = 0 \pmod{N_0}$
Seien $x_0, x_1, \dots x_n$ schon konstruiert.
Wegen $\hat{g}(\hat{y}) = 0$ ist $g_{n+1}(\bar{y}_{n+1}) = \overline{g(y_{n+1})} = 0$, also $\bar{y}_{n+1} \in \mathrm{Ker}(g_{n+1}) = \mathrm{Im}(f_{n+1})$ nach a). Also gibt es ein $z_{n+1} \in M$ mit $\bar{y}_{n+1} = f_{n+1}(\bar{z}_{n+1}) = \overline{f(z_{n+1})}$, d.h.
$y_{n+1} - f(z_{n+1}) \in N_{n+1}$, also $y_{n+1} \equiv f(z_{n+1}) \pmod{N_{n+1}}$.
Ferner ist $y_{n+1} \equiv y_n \pmod{N_n}$ und daher $y_n \equiv f(z_{n+1}) \pmod{N_n}$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist außerdem $y_n \equiv f(x_n) \pmod{N_n}$, also
$f(z_{n+1} - x_n) \in N_n \cap f(M) = f(M_n)$, weil f strikt ist. Also gibt es ein $w_n \in M_n$ mit $f(z_{n+1} - x_n) = f(w_n)$. Dann ist $f(z_{n+1}) = f(\underbrace{x_n + w_n}_{=:x_{n+1}})$. Es folgt
$x_{n+1} - x_n = w_n \in M_n$ und $f(x_{n+1}) = f(z_{n+1}) \equiv y_{n+1} \pmod{N_{n+1}}$. □

Beim Beweis der Folgerungen 12.3.2. (5) und (6) wurde noch gezeigt:

12.3.3. Korollar.

(1) *Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Morphismus filtrierter Moduln. Es gilt:*
f ist strikt $\Leftrightarrow$ Für alle n ist $\mathrm{Ker}(f_n) = \pi_n(\mathrm{Ker}(f))$.

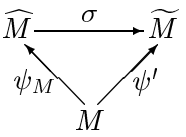
(2) *Ist $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ eine exakte Folge strikter Morphismen filtrierter Moduln, so ist für alle n auch $M/M_n \xrightarrow{f_n} N/N_n \xrightarrow{g_n} L/L_n$ exakt.*

12.3.4. *Anmerkung.* Wenn f strikt ist, ist nach Folgerung 12.3.2. (5) auch $\hat{f}$ strikt. Die **Umkehrung** ist i.a. **falsch !**

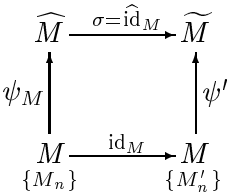
12.3.5. *Beispiel.* Seien
R ein lokaler Integritätsbereich mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und $\bigcap \mathfrak{m}^i = (0)$,
$K := \mathrm{Quot}(R)$,
$f : R \hookrightarrow K$ die Inklusionsabbildung.
Betrachte in R und K die $\mathfrak{m}$-adische Filtrierung als R-Moduln. Dann ist f nicht strikt; denn es ist $K_n = \mathfrak{m}^n \cdot K = K$ für alle n, also $f(R_n) = \mathfrak{m}^n \neq K_n \cap f(R) = R$.
Aber $\widehat{K} = (0)$, also ist $\hat{f} : \widehat{R} \to \widehat{K}$ trivialerweise strikt.

12.3.6. Korollar. *Seien $\{M_n\}$ und $\{M'_n\}$ zwei Filtrierungen auf M, die* dieselbe Topologie *definieren,*
$\big(\widehat{M}, \{\widehat{M}_n\}, \psi_M\big)$ *die Komplettierung von M bzgl. der Filtrierung $\{M_n\}$ und*

$\big(\widetilde{M}, \{\widetilde{M}_n\}, \psi'\big)$ *die Komplettierung von* M *bzgl. der Filtrierung* $\{M'_n\}$.
Dann sind $\widehat{M}$ *und* $\widetilde{M}$ *über* M *topologisch isomorph; genauer:*
Es gibt genau eine stetige R*-lineare Abbildung* $\sigma : \widehat{M} \to \widetilde{M}$ *mit* $\sigma \circ \psi_M = \psi'$.
σ *ist ein topologischer* R*-Modul-Isomorphismus.*
„Die topologische R*-Modulstruktur der Komplettierung eines filtrierten* R*-Moduls hängt nur von der Topologie von* M *und nicht von seiner Filtrierung ab.“*



Beweis. Betrachte das nebenstehende kommutative Diagramm. Da die von $\{M_n\}$ und $\{M'_n\}$ definierten Topologien dieselben sind, ist id_M ein topologischer R-Modul-Isomorphismus. Aus den Folgerungen 12.3.2. (1) und (4) folgt die Behauptung. □



12.3.7. *Anmerkung.* Seien
$\big(M, \{M_n\}\big)$ ein kompletter, separierter filtrierter R-Modul,
$x_i \in M$.
Dann gilt:
Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i$ konvergiert genau dann in der durch die Filtrierung definierten Topologie, wenn die x_i eine Nullfolge bilden.

Beweis. Da M komplett ist, konvergiert die Reihe genau dann, wenn die Folge $a_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$ eine Cauchyfolge ist. Nach Anmerkung 12.2.4. (4) ist das genau dann der Fall, wenn die $x_n = a_n - a_{n-1}$ eine Nullfolge bilden. □

12.3.8. Satz. *Sei* R *ein Ring,* $\mathfrak{q}$ *ein Ideal von* R.
Sei R *separiert und komplett in seiner* $\mathfrak{q}$*-adischen Topologie. Dann gilt:*
Der formale Potenzreihenring $R[\![X]\!]$ *ist separiert und komplett in seiner* $(\mathfrak{q}, X)$*-adischen Topologie.*

Beweis. Vorbemerkung: Sei $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot X^j \in R[\![X]\!]$. Durch Koeffizientenvergleich sieht man:

$$y \in (\mathfrak{q}, X)^r \Leftrightarrow a_j \in \mathfrak{q}^{r-j} \text{ für } j = 0, 1, \ldots, r\,.$$

Es folgt:
$y \in \bigcap (\mathfrak{q}, X)^r \Leftrightarrow$ Für alle r gilt: $a_j \in \mathfrak{q}^{r-j}$ für $j = 0, 1, \ldots, r$.
Für ein gegebenes j ist dann also $a_j \in \mathfrak{q}^{r-j}$ für alle $r > j$. Da nach Voraussetzung R separiert in seiner $\mathfrak{q}$-adischen Topologie ist, ist $\bigcap_{r=j+1}^{\infty} \mathfrak{q}^r = (0)$, also ist $a_j = 0$ für alle $j = 0, 1, 2, \ldots$ und somit $y = 0$. Es folgt:
$R[\![X]\!]$ ist separiert in seiner $(\mathfrak{q}, X)$-adischen Topologie.
Sei nun $y_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \cdot X^j$ eine Cauchyfolge. Bleibt zu zeigen, daß die Folge der y_i einen Limes in $R[\![X]\!]$ hat.
Daß die y_i eine Cauchyfolge bilden, bedeutet nach Anmerkung 12.2.4. (4), daß die $y_i - y_{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{i,j} - a_{i-1,j}) \cdot X^j$ eine Nullfolge bilden. Zu vorgegebenem $r \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $A = A(r) \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} (a_{i,j} - a_{i-1,j}) \cdot X^j \in (\mathfrak{q}, X)^r$ für alle $i \geq A$.
Das bedeutet nach der Vorbemerkung:
$(a_{i,j} - a_{i-1,j}) \in \mathfrak{q}^{r-j}$ für alle $j = 0, 1, \ldots, r$ für alle $i \geq A$. Für ein vorgegebenes j liegt also $(a_{i,j} - a_{i-1,j})$ in einer beliebig hohen Potenz von $\mathfrak{q}$, wenn nur i genügend groß ist. Das bedeutet, daß die $(a_{i,j})_i$ für alle j Cauchyfolgen in R sind und folglich

dort einen Limes haben. Sei also $a_j := \lim\limits_{i\to\infty} a_{i,j}$ und sei $y := \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot X^j$.
Behauptung: $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$.
Beweis: $y - y_i = \sum_{j=0}^{\infty}(a_j - a_{i,j}) \cdot X^j$. Sei nun $r \in N$ beliebig vorgegeben. Wegen $a_j := \lim\limits_{i\to\infty} a_{i,j}$ existiert ein $A = A(r)$ mit $a_j - a_{i,j} \in \mathfrak{q}^r$ für alle $i > A$ und $j = 0, 1, \ldots, r$. (Zunächst gibt es für jedes j ein solches $A_j(r)$. Man setzt $A := \max\{a_j \mid j = 0, \ldots, r\}$.)
Nach der Vorbemerkung hat man dann $y - y_i \in (\mathfrak{q}, X)^r$ für alle $i \geq A$, also $y = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$. □

12.3.9. Satz. *Seien*
R ein Ring,
$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ paarweise teilerfremde Ideale von R,
$\mathfrak{r} := \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r$,
$\widehat{R}$ die $\mathfrak{r}$-adische Komplettierung von R,
$\widehat{R}_i$ die $\mathfrak{a}_i$-adische Komplettierung von R.
Dann gilt:
Es gibt einen natürlichen topologischen Ring-Isomorphismus

$$\widehat{R} \xrightarrow{\sim} \bigtimes_{i=1}^{r} \widehat{R}_i\,.$$

Dabei bezeichnet $\bigtimes_{i=1}^{r} \widehat{R}_i$ das direkte Produkt der Ringe mit der Produkttopologie.

Beweis. Da die $\mathfrak{a}_i$ paarweise teilerfremd sind, sind es auch die $\mathfrak{a}_i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es ist
$\mathfrak{r}^n = (\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{a}_i)^n = (\prod_{i=1}^r \mathfrak{a}_i)^n = \prod_{i=1}^r \mathfrak{a}_i^n = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{a}_i^n$.
Nach dem chinesischen Restsatz hat man dann natürliche Ring-Isomorphismen $\chi_n : R/\mathfrak{r}^n \xrightarrow{\sim} \bigtimes_{i=1}^{r} R/\mathfrak{a}_i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Diese induzieren einen natürlichen Ring-Homomorphismus der inversen Limiten $\chi : \widehat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{r}^n \xrightarrow{\sim} \bigtimes_{i=1}^{r} \varprojlim R/\mathfrak{a}_i^n = \bigtimes_{i=1}^{r} \widehat{R}_i$. Dies ist auch sogar topologischer Ring-Isomorphismus:
Wir bezeichnen mit π_n die kanonische Projektion von $\widehat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{r}^n$ auf $R/\mathfrak{r}^n$, mit ${}^i\rho_n$ die kanonischen Projektionen von $\widehat{R}_i = \varprojlim R/\mathfrak{a}_i^n$ auf $R/\mathfrak{a}_i^n$ und entsprechend mit π_n^{n+1} bzw. ${}^i\rho_n^{n+1}$ die kanonischen Homomorphismen $R/\mathfrak{r}^{n+1} \to R/\mathfrak{r}^n$ bzw. $R/\mathfrak{a}_i^{n+1} \to R/\mathfrak{a}_i^n$ für alle $i = 1, \ldots r$.
Dann ist ${}^1\rho_n \times \cdots \times {}^r\rho_n$ die kanonische Projektion des direkten Ringprodukts $\varprojlim R/\mathfrak{a}_1^n \times \cdots \times \varprojlim R/\mathfrak{a}_r^n$ auf das direkte Ringprodukt $R/\mathfrak{a}_1^n \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_r^n$.
Es ist

$$R/\mathfrak{r}^n \ni \bar{x}_n \overset{\chi_n}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \bar{x}_n \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \in \begin{matrix} R/\mathfrak{a}_1^n \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ R/\mathfrak{a}_r^n \end{matrix}$$

und daher

$$\varprojlim R/\mathfrak{r}^n \ni \hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots) \overset{\chi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots) \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \varprojlim R/\mathfrak{a}_1^n \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \varprojlim R/\mathfrak{a}_r^n \end{matrix}$$

Man hat also ein kommutatives Diagramm kanonischer Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{R} = & \varprojlim R/\mathfrak{r}^n & \overset{\chi}{\longrightarrow} & \varprojlim R/\mathfrak{a}_1^n & \times\cdots\times & \varprojlim R/\mathfrak{a}_r^n & = \widehat{R}_1 \times \cdots \times \widehat{R}_r \\ & \downarrow \pi_n & & \downarrow {}^1\rho_n & \times\cdots\times & \downarrow {}^r\rho_n & \\ & R/\mathfrak{r}^n & \overset{\chi_n}{\longrightarrow} & R/\mathfrak{a}_1^n & \times\cdots\times & R/\mathfrak{a}_r^n & \end{array}$$

Daraus sieht man explizit, daß χ ein topologischer Ring-Isomorphismus ist:
Injektiv: $\chi(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \chi_n \circ \pi_n(\hat{x}) = 0$ für alle $n \Rightarrow \pi_n(\hat{x}) = 0$ für alle n, weil die χ_n injektiv sind, $\Rightarrow \hat{x} = 0$.
Surjektiv:

Ist $\mathfrak{y} := \begin{pmatrix} (\bar{x}_{1,1}, \bar{x}_{1,2}, \dots, \bar{x}_{1,n}, \dots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\bar{x}_{r,1}, \bar{x}_{r,2}, \dots, \bar{x}_{r,n}, \dots) \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \varprojlim R/\mathfrak{a}_1^n \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \varprojlim R/\mathfrak{a}_r^n \end{matrix}$ beliebig, so ist $\begin{pmatrix} \bar{x}_{1,n} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \bar{x}_{r,n} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} R/\mathfrak{a}_1^n \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ R/\mathfrak{a}_r^n \end{matrix}$ für alle n.

Da die χ_n surjektiv sind, gibt es dann Elemente $\bar{x}_n \in R/\mathfrak{r}^n$ mit $\chi_n(\bar{x}_n) = \begin{pmatrix} \bar{x}_{1,n} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \bar{x}_{r,n} \end{pmatrix}$ für alle n.

Man rechnet nach, daß die „Verträglichkeitsbedingungen“ erfüllt sind:
$\pi_n^{n+1}(\bar{x}_{n+1}) = \bar{x}_n$ für alle n, weil sie für alle $\bar{x}_{i,n}$ erfüllt sind: ${}^i\rho_n^{n+1}(\bar{x}_{i,n+1}) = \bar{x}_{i,n}$, da $(\bar{x}_{i,1}, \dots, \bar{x}_{i,n}, \dots) \in \varprojlim R/\mathfrak{a}_i^n$ ist. Also ist $\hat{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots) \in \varprojlim R/\mathfrak{r}^n$.
Außerdem ist nach Konstruktion klar, daß $\chi(\hat{x}) = \mathfrak{y}$ ist.
Topologisch: Eine Umgebungsbasis der Null in $\varprojlim R/\mathfrak{r}^n$ bildet die Menge
$\widehat{\mathfrak{U}} := \{\mathrm{Ker}(\pi_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Ebenso bilden die Mengen
$\mathfrak{U}_i := \{\mathrm{Ker}({}^i\rho_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ Umgebungsbasen der Null in $\varprojlim R/\mathfrak{a}_i^n$ für $i = 1, \dots, r$.
Eine Umgebungsbasis der Null in der Produkttopologie von $\varprojlim R/\mathfrak{a}_1^n \times \cdots \times \varprojlim R/\mathfrak{a}_r^n$ bildet dann die Menge aller Produkte dieser Umgebungsbasen, also die Menge
$\mathfrak{U} := \{\mathrm{Ker}({}^1\rho_{n_1}) \times \cdots \times \mathrm{Ker}({}^r\rho_{n_r}) \mid (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}\}$.
Aber bereits die Teilmenge
$\mathfrak{U}^* := \{\mathrm{Ker}({}^1\rho_n) \times \cdots \times \mathrm{Ker}({}^r\rho_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ bildet ebenfalls eine Umgebungsbasis der Null in der Produkttopologie:
Da $\mathfrak{U}^* \subseteq \mathfrak{U}$ ist, genügt es zu zeigen, daß jedes $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ ein $\mathcal{U}^* \in \mathfrak{U}^*$ enthält:
Wegen ${}^i\rho_n = {}^i\rho_n^{n+1} \circ {}^i\rho_{n+1}$ ist $\mathrm{Ker}({}^i\rho_m) \subseteq \mathrm{Ker}({}^i\rho_n)$ für $n \leq m$.
Sei $\mathcal{U} := \mathrm{Ker}({}^1\rho_{n_1}) \times \cdots \times \mathrm{Ker}({}^r\rho_{n_r})$ und $m := \max\{n_1, \dots, n_r\}$. Dann ist
$\mathcal{U}^* := \mathrm{Ker}({}^1\rho_m) \times \cdots \times \mathrm{Ker}({}^r\rho_m) \subseteq \mathrm{Ker}({}^1\rho_{n_1}) \times \cdots \times \mathrm{Ker}({}^r\rho_{n_r}) = \mathcal{U}$.
Wir zeigen nun

$\chi(\widehat{\mathfrak{U}}) \overset{!}{=} \mathfrak{U}^*$, genauer $\chi(\mathrm{Ker}(\pi_n)) \overset{!}{=} \mathrm{Ker}({}^1\rho_n) \times \cdots \times \mathrm{Ker}({}^r\rho_n)$ für alle n.
(Damit ist dann gezeigt, daß χ auch ein Homöomorphismus ist.)
Beweis: Sei $\hat{x} \in \varprojlim R/\mathfrak{r}^n$. $\hat{x} \in \mathrm{Ker}(\pi_n) \Leftrightarrow \pi_n(\hat{x}) = 0 \overset{\chi_n \text{ iso}}{\Longleftrightarrow} \chi_n \circ \pi_n(\hat{x}) = 0$
$\Leftrightarrow ({}^1\rho_n \times \cdots \times {}^r\rho_n)(\chi(\hat{x})) = 0$
$\Leftrightarrow \chi(\hat{x}) \in \mathrm{Ker}({}^1\rho_n \times \cdots \times {}^r\rho_n) = \mathrm{Ker}({}^1\rho_n) \times \cdots \times \mathrm{Ker}({}^r\rho_n)$. □

12.3.10. *Anmerkung.* Seien
R ein Ring,
$\mathfrak{q}$ ein Ideal von R,
$\widehat{R}$ die $\mathfrak{q}$-adische Komplettierung von R,
$S := \complement \bigcup_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}} \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$,
$\widehat{R_S}$ die $(\mathfrak{q} \cdot R_S)$-adische Komplettierung des Quotientenrings R_S.
Dann gibt es einen natürlichen topologischen Ring-Isomorphismus
$\widehat{R} \xrightarrow{\sim} \widehat{R_S}$.

Beweis. Es gilt $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}^n$. Für $x \in S$ liegt daher $\bar{x} \in R/\mathfrak{q}^n$ in keinem Primideal von $R/\mathfrak{q}^n$, also sind alle diese $\bar{x}$ Einheiten in $R/\mathfrak{q}^n$. Es folgt
$R/\mathfrak{q}^n \xrightarrow{\sim} \big(R/\mathfrak{q}^n\big)_S \xrightarrow{\sim} R_S/(\mathfrak{q} \cdot R_S)^n$ kanonisch für alle n. Dies induziert einen natürlichen topologischen Ring-Isomorphismus $\widehat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{q}^n \xrightarrow{\sim} \varprojlim R_S/(\mathfrak{q} \cdot R_S)^n = \widehat{R_S}$. □

12.3.11. Korollar. *Seien*
R ein semilokaler Ring mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$,
$\mathfrak{J} := \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$ das Jacobson-Radikal von R,
$\widehat{R}$ die $\mathfrak{J}$-adische Komplettierung von R,
$\widehat{R_{\mathfrak{m}_i}}$ die $\mathfrak{m}_i \cdot R_{\mathfrak{m}_i}$-adischen Komplettierungen der $R_{\mathfrak{m}_i}$.
Dann gibt es einen natürlichen topologischen Ring-Isomorphismus

$$\widehat{R} \xrightarrow{\sim} \bigtimes_{i=1}^{r} \widehat{R_{\mathfrak{m}_i}}$$

von $\widehat{R}$ mit dem direkten Produkt der Ringe $\widehat{R_{\mathfrak{m}_i}}$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 12.3.9. und Anmerkung 12.3.10. □

13. Graduierte Ringe und Moduln

13.1. **Definitionen.**

13.1.1. Definition. Ein „graduierter Ring“ ist ein Ring R mit einer direkten Summenzerlegung als additive Gruppe

$$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n \,.$$

Dabei sind
R_n additive Untergruppen der additiven Gruppe von R,
$R_n = (0)$ für $n < 0$,
$R_m \cdot R_n \subseteq R_{m+n}$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

13.1.2. *Anmerkung.* Insbesondere ist $R_0 \cdot R_0 \subseteq R_0$, also ist R_0 ein Unterring von R, und $R_0 \cdot R_n \subseteq R_n$, also sind die R_n auch R_0-Moduln.

Sei $1 = \sum_{n=0}^{r} e_n$ mit $e_n \in R_n$ die Zerlegung der Eins von R. Dann ist $R_m \ni e_m = e_m \cdot 1 = \sum_{n=0}^{r} e_m \cdot e_n \in R_{m+n}$. Da $R = \bigoplus R_n$ eine direkte Summe ist, folgt daraus $e_m = e_m \cdot e_0$ für alle $m = 0, \ldots, r$, also $1 = \sum_{m=0}^{r} e_m = \sum_{m=0}^{r} e_m \cdot e_0 = 1 \cdot e_0 = e_0$. Also ist $1 = e_0 \in R_0$, d.h.:

13.1.3. *Anmerkung.* Die Eins von R liegt in R_0 und ist daher auch die Eins von R_0.

13.1.4. Definition. Ein „graduierter Modul“ über dem graduierten Ring $R = \bigoplus R_n$ ist ein R-Modul M zusammen mit einer direkten Summenzerlegung als additive Gruppe

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n \,.$$

Dabei sind
M_n additive Untergruppen von M,
$M_n = (0)$ für $n < 0$,
$R_m \cdot M_n \subseteq M_{m+n}$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

13.1.5. *Anmerkung.*
(1) Insbesondere ist $R_0 \cdot M_n \subseteq M_n$, also, weil $1 \in R_0$ ist, $R_0 \cdot M_n = M_n$ für alle n, d.h.
Alle M_n sind R_0-Untermoduln von M.
(2) Ein graduierter Ring $R = \bigoplus R_n$ ist in natürlicher Weise ein graduierter R-Modul.

13.1.6. Definition. Seien
$\big(R, \{R_n\}\big)$ ein filtrierter Ring,
$\big(M, \{M_n\}\big)$ ein filtrierter R-Modul.
Man definiert:

(1) $\operatorname{gr}_n(R) := R_n/R_{n+1}$ für $n \in \mathbb{Z}$ als additive Gruppen.
$\operatorname{gr}(R) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{gr}_n(R)$ als additive Gruppe.
(2) $\operatorname{gr}_n(M) := M_n/M_{n+1}$ für $n \in \mathbb{Z}$ als additive Gruppen.
$\operatorname{gr}(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{gr}_n(M)$ als additive Gruppe.

(3) Man definiert eine Abbildung
$\mathrm{gr}_m(R) \times \mathrm{gr}_n(M) \longrightarrow \mathrm{gr}_{m+n}(M)$ durch
$(\ \bar{r}\ ,\ \bar{x}\ ) \longmapsto \overline{r \cdot x}$
und setzt diese Abbildung distributiv zu einer Abbildung
$\mathrm{gr}(R) \times \mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathrm{gr}(M)$
fort.

13.1.7. *Anmerkung.*

(1) Da nach Definition 12.0.1. einer Filtrierung $R_n = R$ und $M_n = M$ ist für alle $n \leq 0$ gilt:
$\mathrm{gr}_n(R) = (0)$ und $\mathrm{gr}_n(M) = (0)$ für alle $n < 0$.

(2) Im Spezialfall $M = R$ erhält man mit Definition 13.1.6. (3) eine Ringstruktur, so daß
$\mathrm{gr}(R) = \bigoplus \mathrm{gr}_n(R)$ ein graduierter Ring wird.
$\mathrm{gr}(M) = \bigoplus \mathrm{gr}_n(M)$ ist dann ein graduierter Modul über dem graduierten Ring $\mathrm{gr}(R)$.

13.1.8. Definition.
$\mathrm{gr}(R) = \bigoplus \mathrm{gr}_n(R)$ heißt der „assoziierte graduierte Ring“ zu dem filtrierten Ring $\big(R, \{R_n\}\big)$.
$\mathrm{gr}(M) = \bigoplus \mathrm{gr}_n(M)$ heißt der „assoziierte graduierte Modul“ zu dem filtrierten Modul $\big(M, \{M_n\}\big)$.

Ist $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R, dann bezeichnen wir den assoziierten graduierten Ring bzw. Modul zu der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung mit $\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}(R)$ bzw. $\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}(M)$.

13.1.9. *Anmerkung* (Funktoreigenschaft von gr). Sei $\varphi : \big(R, \{R_n\}\big) \longrightarrow \big(S, \{S_n\}\big)$ ein Morphismus filtrierter Ringe. Dann induziert φ in natürlicher Weise einen „Homomorphismus vom Grad Null“ der graduierten Ringe
$\mathrm{gr}(\varphi) : \mathrm{gr}(R) \longrightarrow \mathrm{gr}(S)$ durch
$\mathrm{gr}_n(R) \ni \bar{r} \longmapsto \overline{\varphi(r)} \in \mathrm{gr}_n(S), \quad (r \in R_n)$.
Ebenso:
Sei $\psi : \big(M, \{M_n\}\big) \longrightarrow \big(N, \{N_n\}\big)$ ein Morphismus filtrierter $\big(R, \{R_n\}\big)$-Moduln. Dann induziert ψ in natürlicher Weise eine lineare Abbildung
$\mathrm{gr}(\psi) : \mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathrm{gr}(N)$ durch
$\mathrm{gr}_n(M) \ni \bar{x} \longmapsto \overline{\psi(x)} \in \mathrm{gr}_n(N), \quad (x \in M_n)$.
$\mathrm{gr}(\psi)$ ist eine $\mathrm{gr}(R)$-lineare Abbildung vom Grad Null der graduierten $\mathrm{gr}(R)$-Moduln.
Die Zuordnungen
$\varphi \mapsto \mathrm{gr}(\varphi)$ und
$\psi \mapsto \mathrm{gr}(\psi)$ sind funktoriell (kovariant).

13.2. Leitformen (Anfangsformen).

13.2.1. Definition. Sei $\big(M, \{M_n\}\big)$ ein filtrierter $\big(R, \{R_n\}\big)$-Modul, $x \in M$.
$\mathrm{grad}(x) := \sup\{n \mid x \in M_n\} \leq \infty$.

$$\mathrm{L}\,(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x + M_{n+1} \in \mathrm{gr}_n(M), & \text{falls } n := \mathrm{grad}(x) < \infty \\ 0, & \text{falls } \mathrm{grad}(x) = \infty \end{array} \right\} \in \mathrm{gr}(M)$$

heißt die „Leitform“ oder „Anfangsform“ von x.

Auf Grund dieser Definition ist unmittelbar klar:

13.2.2. *Anmerkung.* (1) Es gilt für $x, y \in M$ und $r \in R$:
$\operatorname{grad}(x+y) \geq \min\{\operatorname{grad}(x), \operatorname{grad}(y)\}$,
$\operatorname{grad}(r \cdot x) \geq \operatorname{grad}(r) + \operatorname{grad}(x)$ und
$\operatorname{grad}(r \cdot x) = \operatorname{grad}(r) + \operatorname{grad}(x)$ genau dann, wenn $r \cdot x \notin M_{\operatorname{grad}(r)+\operatorname{grad}(x)+1}$

(2) Die Abbildung $M \ni x \longmapsto \mathrm{L}(x) \in \operatorname{gr}(M)$ ist i.a. weder additiv noch multiplikativ, also keine lineare Abbildung. Es gilt aber für $x \in M$ und $r \in R$:

$$L(r) \cdot L(x) = \begin{cases} \mathrm{L}(r \cdot x), & \text{falls } \operatorname{grad}(r \cdot x) = \operatorname{grad}(r) + \operatorname{grad}(x) \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

(3) Jedes Element von $\operatorname{gr}_n(M)$ ist Leitform eines Elements von M.

13.2.3. *Beispiel.* (1) Sei P ein Ring, $R := P[\![X_1, \ldots, X_r]\!]$ der formale Potenzreihenring in $X_1, \ldots, X_r$ über P und
$\mathfrak{m} := (X_1, \ldots, X_r)$ das maximale Ideal von R.
Betrachte auf R die $\mathfrak{m}$-adische Filtrierung, also $R_n := \mathfrak{m}^n$. Dann ist
$\operatorname{gr}_n(R) \simeq P\langle X_1^{\nu_1} \cdots + X_r^{\nu_r} \mid \nu_1 + \cdots + \nu_r = n \rangle$ und
$\operatorname{gr}(R) = \bigoplus \operatorname{gr}_n(R) \simeq P[X_1, \ldots, X_r]$ der Polynomring in $X_1, \ldots, X_r$ über P.
Sei ferner
$R \ni y := \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \cdot X_1^{\nu_1} \cdots X_r^{\nu_r} \neq 0$, so ist
$\operatorname{grad}(y) = \min\{\nu_1 + \cdots + \nu_r \mid \ a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \neq 0\}$ und
$\mathrm{L}(y) = \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_r = \operatorname{grad}(y)} a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \cdot X_1^{\nu_1} \cdots X_r^{\nu_r}$ die gewöhnliche Leitform einer Potenzreihe.

(2) Sei R ein beliebiger Ring, $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R. Betrachte die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung $\{\mathfrak{q}^n\}$ von R.
Seien $x_i \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$ mit i in einer Indexmenge I, so daß die Restklassen $\bar{x}_i := x_i + \mathfrak{q}^2 = \mathrm{L}(x_i)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 = \operatorname{gr}_1(R)$ als $R/\mathfrak{q} = \operatorname{gr}_0(R)$-Modul bilden. Dann gilt:

$$\operatorname{gr}(R) \overset{1)}{=} \operatorname{gr}_0(R)[\operatorname{gr}_1(R)] = (R/\mathfrak{q})[\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2\,] \overset{2)}{=} (R/\mathfrak{q})[\mathrm{L}(x_i) \mid i \in I]\,.$$

Beweis von (2).
1): „$\supseteq$“ist trivial.
„$\subseteq$“: Es genügt zu zeigen, daß alle homogenen Komponenten $\operatorname{gr}_n(R)$ von $\operatorname{gr}(R)$ in $\operatorname{gr}_0(R)[\operatorname{gr}_1(R)]$ liegen.
$\operatorname{gr}_1(R)$ wird als additive Gruppe erzeugt von den Leitformen $L(y)$ mit $y \in \mathfrak{q}$ und $\operatorname{gr}_n(R)$ wird als additive Gruppe erzeugt von den Leitformen aller Elemente von $\mathfrak{q}^n$. $\mathfrak{q}^n$ wird als additive Gruppe erzeugt von allen Produkten $y_1 \cdots y_n$ mit $y_i \in \mathfrak{q}$. Wenn ein solches Produkt nicht in $\mathfrak{q}^{n+1}$ liegt ist nach Anmerkung 13.2.2. $\mathrm{L}(y_1 \cdots y_n) = \mathrm{L}(y_1) \cdots \mathrm{L}(y_n) \in \operatorname{gr}_0(R)[\operatorname{gr}_1(R)]$. Da $\operatorname{gr}_n(R)$ von diesen Elementen erzeugt wird, folgt daraus $\operatorname{gr}_n(R) \subseteq \operatorname{gr}_0(R)[\operatorname{gr}_1(R)]$.
2) folgt sofort aus 1): Da nach Voraussetzung $\operatorname{gr}_1(R) = \operatorname{gr}_0(R)\langle \mathrm{L}(x_i) \mid i \in I \rangle$ ist, ist $\operatorname{gr}(R) = \operatorname{gr}_0(R)[\operatorname{gr}_1(R)] = \operatorname{gr}_0(R)[\mathrm{L}(x_i) \mid i \in I]$. □

Aus der Tatsache, daß die kanonische Abbildung $\psi_M : M \to \widehat{M}$ nach Satz 12.3.1. (6a) für alle $n \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen $M_n/M_{n+1} \xrightarrow{\sim} \widehat{M}_n/\widehat{M}_{n+1}$ induziert folgt:

13.2.4. Satz. *Die kanonischen Abbildungen*
$\psi_R : R \longrightarrow \widehat{R}$ *und*
$\psi_M : M \longrightarrow \widehat{M}$ *induzieren natürliche Ring- bzw.* $\operatorname{gr}(R)$*-Modul-Isomorphismen:*

$\mathrm{gr}(\psi_R) : \mathrm{gr}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}(\widehat{R})$ *bzw.*
$\mathrm{gr}(\psi_M) : \mathrm{gr}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}(\widehat{M})$.

13.2.5. Satz. *Sei* $\sigma : \big(M, \{M_n\}\big) \longrightarrow \big(N, \{N_n\}\big)$ *ein Morphismus filtrierter Moduln.*
Sei M *komplett und separiert,*
N *separiert und*
$\mathrm{gr}(\sigma) : \mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathrm{gr}(N)$ *surjektiv.*
Dann gilt:
σ *ist surjektiv,*
$\sigma(M_n) = N_n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$, *also ist* σ *strikt, und*
N *ist komplett.*

Beweis. Es genügt zu zeigen $\sigma(M_n) = N_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$; denn dann folgt insbesondere $\sigma(M) = \sigma(M_0) = N_0 = N$, also ist σ surjektiv.
Außerdem folgt, daß σ ein strikter Morphismus ist. Da N separiert ist, ist $\psi_N : \mathrm{N} \to \widehat{N}$ injektiv. Nach Folgerungen 12.3.2. (6) ist $\hat{\sigma}$ surjektiv, so daß man schließlich ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeile und Spalten hat:

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{M} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \widehat{N} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow{\scriptstyle \psi_M = \mathrm{id}_M} & & \uparrow{\scriptstyle \psi_N} & & \\
M & \xrightarrow{\sigma} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

Es ist $\psi_M = \mathrm{id}_M$, also insbesondere surjektiv, weil M schon komplett und separiert ist. Daher ist auch ψ_N surjektiv und folglich $N = \widehat{N}$ komplett.
Bleibt also zu zeigen:

Behauptung: $\sigma(M_n) \overset{!}{=} N_n$ für alle $n = 0, 1, \ldots$.
Beweis: „$\subseteq$“ gilt, weil σ nach Voraussetzung ein Morphismus ist.
„$\supseteq$“: Sei $y \in N_n$ beliebig. Wir konstruieren eine Cauchyfolge $x_j \in M_n$, so daß die Folge der $\sigma(x_j)$ gegen y konvergiert. Da M komplett ist, konvergiert dann die Folge der x_j gegen ein $x \in M$, und weil M_n nach Satz 12.1.5. abgeschlossen ist, gilt sogar $x \in M_n$. Schließlich ist σ als Morphismus stetig (Anmerkung 12.1.4.), so daß man wegen der Separiertheit von N hat: $\sigma(x) = \sigma(\lim x_j) = \lim(\sigma(x_j)) = y$.
Konstruktion der Cauchyfolge (x_j):
Wir zeigen induktiv: Es existieren $\xi_i \in M_{n+i}$ mit $y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i} \xi_j\big) \in N_{n+i+1}$.
Dann ist $x_i := \sum_{j=0}^{i} \xi_j \in M_n$ die gesuchte Cauchyfolge mit $\lim \sigma(x_i) = y$.
$i = 0$: Es ist $y \in N_n$. Falls $y \in N_{n+1}$ ist, setze $\xi_0 := 0$. Dann ist trivialerweise $y - \sigma(\xi_0) \in N_{n+1}$. Andernfalls ist $\mathrm{L}\,(y) \in \mathrm{gr}_n(N)$. Da $\mathrm{gr}(\sigma)$ surjektiv ist, gibt es also ein $\xi_0 \in M_n$ mit $\mathrm{gr}_n(\sigma)(\mathrm{L}\,(\xi_0)) = \mathrm{L}\,(y)$, d.h. $y - \sigma(\xi_0) \in N_{n+1}$.
Seien nun $\xi_0, \ldots, \xi_i$ schon gefunden mit $y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i} \xi_j\big) \in N_{n+i+1}$. Falls auch gilt $y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i} \xi_j\big) \in N_{n+i+2}$, setze $\xi_{i+1} := 0$. Dann gilt trivialerweise
$y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i+1} \xi_j\big) \in N_{n+i+2}$.
Andernfalls ist $\mathrm{L}\,\big(y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i} \xi_j\big)\big) \in \mathrm{gr}_{n+i+1}(N)$.
Da $\mathrm{gr}(\sigma)$ surjektiv ist, gibt es also ein $\xi_{i+1} \in M_{n+i+1}$ mit
$\mathrm{gr}_{n+i+1}(\sigma)(\mathrm{L}\,(\xi_{i+1})) = \mathrm{L}\,\big(y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i} \xi_j\big)\big)$, d.h. $y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i} \xi_j\big) - \sigma(\xi_{i+1}) \in N_{n+i+2}$.
Also gilt auch in diesem Falle
$y - \sigma\big(\sum_{j=0}^{i+1} \xi_j\big) \in N_{n+i+2}$. □

13.2.6. Korollar. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{q}$ ein Ideal, N ein endlich erzeugter R-Modul, der in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie separiert ist.*
Wenn R komplett und separiert ist in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie, dann ist auch N komplett in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie,

Beweis. Sei $N = R\langle x_1, \dots, x_r\rangle$. Bilde den freien R-Modul $F := R \cdot X_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot X_r$ Mit der Basis $X_1, \dots X_r$ und definiere die R-lineare Abbildung $\sigma : F \to N$ durch $\sigma(X_i) := \sigma(x_i)$ für alle i. Dann ist F komplett in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie, weil R komplett ist und die $\mathfrak{q}$-adische Topologie auf F die Produkttopologie der direkten Summanden ist. Ferner ist $\sigma(F_n) = \sigma(\mathfrak{q}^n \cdot F) = \mathfrak{q}^n \cdot \sigma(F) = \mathfrak{q}^n \cdot N = N_n$.
Aus den Ausführungen zu Beginn des Beweises von Satz 13.2.5. folgt dann, daß N komplett ist. □

13.2.7. Korollar. *Sei $\big(R, \{R_n\}\big)$ ein kompletter separierter filtrierter Ring, $\big(M, \{M_n\}\big)$ ein separierter filtrierter R-Modul und es gebe $x_1, \dots, x_m \in M$, alle $x_i \neq 0$, so daß die Leitformen $\mathrm{L}(x_1), \dots, \mathrm{L}(x_m)$ den assoziierten graduierten Modul $\mathrm{gr}(M)$ als $\mathrm{gr}(R)$-Modul erzeugen. Dann gilt:*
$M = R\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ und M ist komplett.

Beweis. Sei $F := \bigoplus_{i=1}^m R{\cdot}X_i$ der freie R-Modul mit den Unbestimmten X_i als Basis. Wir definieren auf F eine Filtrierung so, daß die kanonische R-lineare Abbildung $\sigma : F \longrightarrow M$ mit $\sigma(X_i) := x_i$ für alle i ein Morphismus wird:
Sei $n_i := \mathrm{grad}(x_i)$ ($n_i \neq \infty$, weil $x_i \neq 0$ und M separiert ist).
$F_n := \{a_1 \cdot X_1 + \cdots + a_m \cdot X_m \mid a_i \in R_{n-n_i} \text{ für } i = 1, \dots, m\}$.
Dann ist F_n eine additive Untergruppe von F, ferner $F_n \supseteq F_{n+1}$ und $R_p \cdot F_n \subseteq F_{n+p}$, also ist $\big(F, \{F_n\}\big)$ ein filtrierter $\big(R, \{R_n\}\big)$-Modul. Außerdem ist offenbar $\sigma(F_n) \subseteq M_n$ für alle n, also ist σ ein Morphismus filtrierter Moduln.
Nach Definition ist $X_i = 1 \cdot X_i \in F_{n_i}$, aber $X_i \notin F_{n_i+1}$, weil $1 \notin R_1$ nach Anmerkung 12.1.7. Folglich ist $\mathrm{grad}(X_i) = n_i$. Also ist $\mathrm{L}(X_i) = X_i + F_{n_i+1}$ und daher $\mathrm{gr}(\sigma)(\mathrm{L}(X_i)) = \mathrm{L}(x_i) \in \mathrm{gr}_{n_i}(M)$. Da die $\mathrm{L}(x_i)$ nach Voraussetzung den $\mathrm{gr}(R)$-Modul $\mathrm{gr}(M)$ erzeugen und weil $\mathrm{gr}(\sigma)$ eine $\mathrm{gr}(R)$-lineare Abbildung ist, folgt, daß $\mathrm{gr}(\sigma)$ surjektiv ist. Ferner ist F komplett; denn nach Voraussetzung ist R komplett und die durch die Filtrierung $\{F_n\}$ definierte Topologie auf F ist gerade die Produkttopologie der m Komponenten $\simeq R$. Aus Satz 13.2.5 folgt dann, daß σ surjektiv und M komplett ist. Die Surjektivität von σ liefert $M = \sigma(F) = R\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ □

Nach Satz 13.2.5 hat man sogar $\sigma(F_n) = M_n$ für alle n. Also folgt:

13.2.8. Korollar. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Korollar 13.2.7. gilt:*
Sei $n_i := \mathrm{grad}(x_i)$ für alle $i = 1, \dots, m$. Dann ist

$$M_n = \sum_{i=1}^{m} R_{n-n_i} \cdot x_i \text{ für alle } n\,.$$

13.2.9. Korollar. *Seien*
$\big(R, \{R_n\}\big)$ ein kompletter separierter filtrierter Ring,
$\big(M, \{M_n\}\big)$ ein separierter $\big(R, \{R_n\}\big)$-Modul.
Dann gilt:

(1) *Falls $\mathrm{gr}(M)$ ein endlich erzeugter $\mathrm{gr}(R)$-Modul ist, ist M ein endlich erzeugter R-Modul.*
M ist komplett.

(2) *Falls* $\mathrm{gr}(M)$ *ein noetherscher* $\mathrm{gr}(R)$*-Modul ist, ist* M *ein noetherscher* R*-Modul.*
M ist komplett und alle Untermoduln von M sind abgeschlossen in M.

Beweis. (1) folgt direkt aus Korollar 13.2.7.; denn $\mathrm{gr}(M)$ läßt sich als $\mathrm{gr}(R)$-Modul von endlich vielen $\mathrm{L}(x_i)$ erzeugen.
(2): Sei N ein beliebiger Untermodul von M und $N_n := M_n \cap N$ die auf N induzierte Filtrierung. Dann ist $\mathrm{gr}(N)$ ein $\mathrm{gr}(R)$-Untermodul von $\mathrm{gr}(M)$, also endlich erzeugt als $\mathrm{gr}(R)$-Modul, weil nach Voraussetzung $\mathrm{gr}(M)$ ein noetherscher $\mathrm{gr}(R)$-Modul ist. Nach (1) folgt dann, daß N als R-Modul endlich erzeugt und komplett bezüglich der durch die $\{N_n\}$ definierten Topologie ist. Dies ist aber die Einschränkung der Topologie von M auf N. Da N komplett ist, liegen die Limiten aller in M konvergenten Folgen aus N schon in N, also ist N abgeschlossen in M. □

13.2.10. Korollar. *Sei*
R ein Ring,
$\mathfrak{q}$ ein Ideal von R,
$\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ endlich erzeugt als R-Modul,
$R/\mathfrak{q}$ noethersch,
R separiert und komplett in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie.
Dann ist R noethersch.

Beweis. Sei $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 = R\langle \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r\rangle$, mit gewissen $y_i \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$. Dann ist trivialerweise auch $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 = (R/\mathfrak{q})\langle \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r\rangle$. Nach Beispiel 13.2.3. (2) ist dann
$\mathrm{gr}(R) = (R/\mathfrak{q})[\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2] = (R/\mathfrak{q})[\mathrm{L}(y_1), \ldots, \mathrm{L}(y_r)]$ und daher noethersch, weil es ein endlich erzeugter Ring über dem nach Voraussetzung noetherschen Ring $R/\mathfrak{q}$ ist. Aus Korollar 13.2.9. (2) folgt dann, daß R noethersch ist. □

13.2.11. Satz. *Sei $\big(R, \{R_n\}\big)$ ein separierter filtrierter Ring und*
sei $\mathrm{gr}(R)$ nullteilerfrei. Dann gilt:
R ist nullteilerfrei, und für $x, y \in R$ gilt:
$\mathrm{grad}(x \cdot y) = \mathrm{grad}(x) + \mathrm{grad}(y)$ *und*
$\mathrm{L}(x \cdot y) = \mathrm{L}(x) \cdot \mathrm{L}(y)$.

Beweis. Seien o.B.d.A $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann ist, weil R separiert ist,
$r := \mathrm{grad}(x) < \infty$ und $s := \mathrm{grad}(y) < \infty$, also $0 \neq \mathrm{L}(x) \in \mathrm{gr}_r(R)$ und
$0 \neq \mathrm{L}(y) \in \mathrm{gr}_s(y)$. Nach Definition der Multiplikation in $\mathrm{gr}(R)$ ist dann
$\mathrm{L}(x) \cdot \mathrm{L}(y) = x \cdot y + R_{r+s+1} \in \mathrm{gr}_{r+s}(R)$. Nach Voraussetzung der Nullteilerfreiheit von $\mathrm{gr}(R)$ ist dann $\mathrm{L}(x) \cdot \mathrm{L}(y) \neq 0$, also $x \cdot y \in R_{r+s} \setminus R_{r+s+1}$. Es folgt:
$\mathrm{grad}(x \cdot y) = r + s = \mathrm{grad}(x) + \mathrm{grad}(y)$.
Ferner ist daher $\mathrm{L}(x \cdot y) = x \cdot y + R_{r+s+1} = \mathrm{L}(x) \cdot \mathrm{L}(y)$ und $x \cdot y \neq 0$, weil sonst $\mathrm{grad}(x \cdot y) = \infty$ wäre. □

13.2.12. Satz. *Sei $\big(R, \{R_n\}\big)$ ein separierter filtrierter Ring,*
jedes Hauptideal von R sei abgeschlossen in R und
$\mathrm{gr}(R)$ sei ein vollständig ganz abgeschlossener Integritätsbereich. Dann gilt:
R ist ein vollständig ganz abgeschlossener Integritätsbereich.

Beweis. Aus Satz 13.2.11. folgt zunächst, daß R ein Integritätsbereich ist.
Sei nun $0 \neq x \in \mathrm{Quot}(R)$ so daß es ein $0 \neq y \in R$ gibt mit $y \cdot x^q \in R$ für alle $q = 1, 2, \ldots$. Es ist zu zeigen, daß dann schon $x \in R$ ist (vgl. Definition 1.3.4.). Stelle dar $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in R$. Dann ist zu zeigen:

$a \overset{!}{\in} R \cdot b$.

Beweis: Da $R \cdot b$ als Hauptideal nach Voraussetzung abgeschlossen in R ist, ist die Behauptung nach Satz 12.1.5. äquivalent zu

$a \overset{!}{\in} \bigcap_{n=0}^{\infty} (R \cdot b + R_n)$, d.h. $a \overset{!}{\in} R \cdot b + R_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis: Induktion nach n: Induktionsanfang: $n = 0$. Es ist $a \in R = R_0$, fertig.

Sei nun schon gezeigt $a \in R \cdot b + R_n$. Dann ist also $a = z \cdot b + w$ mit $z \in R$ und $w \in R_n$. Falls $w \in R_{n+1}$ ist, folgt $a \in R \cdot b + R_{n+1}$ und wir sind fertig. Andernfalls ist $w \notin R_{n+1}$, also $\operatorname{grad}(w) = n$ und daher $0 \neq \mathrm{L}(w) \in \mathrm{gr}_n(R)$.

Nach Voraussetzung ist $y \cdot x^q \in R$ für alle $q = 0, 1, 2, \ldots$, also auch $y \cdot (x - z)^q \in R$ für alle q. Aber $x = \frac{a}{b} = z + \frac{w}{b}$, also $x - z = \frac{w}{b}$ und daher $y \cdot w^q \in R \cdot b^q$ für alle $q = 0, 1, 2, \ldots$. Man hat also $y \cdot w^q = \xi_q \cdot b^q$ mit $\xi_q \in R$ für alle q. Nach Satz 13.2.11. folgt für die Leitformen $\mathrm{L}(y) \cdot \mathrm{L}(w)^q = \mathrm{L}(\xi_q) \cdot \mathrm{L}(b)^q$, weil nach Voraussetzung $\mathrm{gr}(R)$ nullteilerfrei ist. Also gilt im Quotientenkörper von $\mathrm{gr}(R)$:

$\mathrm{L}(y) \cdot \left(\frac{\mathrm{L}(w)}{\mathrm{L}(b)}\right)^q = \mathrm{L}(\xi_q) \in \mathrm{gr}(R)$ für alle $q = 0, 1, 2, \ldots$. Nach Voraussetzung ist aber $\mathrm{gr}(R)$ vollständig ganz abgeschlossen, also folgt $\frac{\mathrm{L}(w)}{\mathrm{L}(b)} \in \mathrm{gr}(R)$, d.h. $\mathrm{L}(w) = \mathrm{L}(\eta) \cdot \mathrm{L}(b)$ mit einem $\eta \in R$. (Da $\mathrm{L}(w)$ und $\mathrm{L}(b)$ als Leitformen homogene Elemente von $\mathrm{gr}(R)$ sind, ist auch $\frac{\mathrm{L}(w)}{\mathrm{L}(b)}$ homogen, also Leitform eines $\eta \in R$.) Nach Satz 13.2.11. ist aber $\mathrm{L}(\eta) \cdot \mathrm{L}(b) = \mathrm{L}(\eta \cdot b)$. Da $\mathrm{L}(w) \in \mathrm{gr}_n(R)$ ist, folgt aus $\mathrm{L}(w) = \mathrm{L}(\eta \cdot b)$ die Kongruenz $w \equiv \eta \cdot b \pmod{R_{n+1}}$, also $a = z \cdot b + w \equiv \underbrace{(z + \eta)}_{\in R} \cdot b \pmod{R_{n+1}}$, d.h. $a \in R \cdot b + R_{n+1}$. □

14. Noethersche filtrierte Ringe und Moduln. $\mathfrak{q}$-adische Filtrierungen

Voraussetzungen:
Alle im Folgenden betrachteten Ringe und Moduln sind noethersch.
$\mathfrak{q}$ *sei ein Ideal von* R.
R *ist stets mit der* $\mathfrak{q}$*-adische Filtrierung versehen.*

14.0.1. Definition. Sei $\big(M, \{M_n\}\big)$ ein filtrierter R-Modul, T eine Unbestimmte.

$$\bar{R} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n \cdot T^n \subset R[T]$$

Als Unterring des Polynomrings $R[T]$ erhält man so eine graduierte R-Algebra, den „Rees-Ring“ von R bzgl. $\mathfrak{q}$.

$$\bar{M} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n \cdot T^n \subset M[T]$$

Dabei versteht man unter $M_n \cdot T^n$ die Menge aller Symbole $x \cdot T^n$, $x \in M_n$ mit der offensichtlichen Addition.

Indem man die durch die R-Modulstruktur von M gegebene Skalarmultiplikation
$\mathfrak{q}^n \cdot T^n \times M_m \cdot T^m \longrightarrow M_{n+m} \cdot T^{n+m}$
auf ganz $\bar{R} \times \bar{M}$ ausdehnt, wird $\bar{M}$ in natürlicher Weise ein graduierter $\bar{R}$-Modul.

14.0.2. *Anmerkung.* Da $\mathfrak{q}$ endlich erzeugt ist, wird $\bar{R} = R[\mathfrak{q} \cdot T]$ über R von endlich vielen Elementen (den Erzeugern von $\mathfrak{q}$ als R-Modul) erzeugt. Es folgt daraus:
Der Rees-Ring $\bar{R}$ ist ein noetherscher Ring.

14.0.3. Satz. *Es sind äquivalent:*

(1) *Für große* n *gilt* $M_{n+1} = \mathfrak{q} \cdot M_n$.
(2) *Es existiert ein* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $M_{m+k} = \mathfrak{q}^k \cdot M_m$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.
(3) $\bar{M}$ *ist ein endlich erzeugter* $\bar{R}$*-Modul*

Beweis. (1)⇔(2) ist trivial.
(2)⇒(3) Es ist $M_{m+k} = \mathfrak{q}^k \cdot M_m$, also $M_{m+k} \cdot T^{m+k} = \mathfrak{q}^k \cdot T^k \cdot M_m T^m \subseteq \bar{R} M_m T^m$. Daher ist $\bar{M} = \sum_{i=0}^{m} \bar{R} \cdot M_i \cdot T^i$ ein endlich erzeugter $\bar{R}$-Modul, weil jedes der endlich vielen M_i ein endlich erzeugter R-Modul ist, da M ein noetherscher R-Modul ist. □
(3)⇒(1): Sei $\bar{M}$ als $\bar{R}$-Modul endlich erzeugt, etwa von $x_1, \ldots, x_r$. Indem man nötigenfalls die x_i durch ihre (ebenfalls endlich vielen) homogenen Komponenten ersetzt, kann man o.B.d.A. annehmen, daß bereits alle x_i homogen von einem Grad n_i sind, also $x_i \in M_{n_i} \cdot T^{n_i}$. Sei $n \geq \max\{n_1, \ldots, n_r\}$ beliebig.
Behauptung: $M_{n+1} = \mathfrak{q} \cdot M_n$.
Beweis: „$\supseteq$“ gilt trivialerweise, weil $\big(M, \{M_n\}\big)$ ein filtrierter $\big(R, \{\mathfrak{q}^n\}\big)$-Modul ist.
„$\subseteq$“: Sei $y \in M_{n+1}$. Stelle $y \cdot T^{n+1}$ durch die Erzeugenden dar:
$y \cdot T^{n+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot x_i$ mit $c_i \in \bar{R}$. Dabei kann man o.B.d.A. annehmen, daß alle c_i homogen vom Grad $n + 1 - n_i$ sind, weil sich bei der Darstellung der c_i durch Summen homogener Komponenten die Anteile der anderen homogenen Komponenten in der Summe wegheben müssen. Also: $c_i \in \mathfrak{q}^{n+1-n_i} \cdot T^{n+1-n_i} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}^{n-n_i} \cdot T^{n+1-n_i}$. Es folgt:
$y \cdot T^{n+1} \in \big(\mathfrak{q} \cdot \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\mathfrak{q}^{n-n_i} \cdot M_{n_i}}_{\subseteq M_n}\big) \cdot T^{n+1}$. Das ergibt $y \in \mathfrak{q} \cdot M_n$. □

14.0.4. Definition. Eine Filtrierung $\{M_n\}$ von M heißt „$\mathfrak{q}$-gut“, wenn sie den (äquivalenten) Bedingungen von Satz 14.0.3. genügt.

14.0.5. *Anmerkung.* Eine $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung induziert auf M die $\mathfrak{q}$-adische Topologie.

Beweis. Jedes M_n ist offen in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie wegen $\mathfrak{q}^n \cdot M \subseteq M_n$.
Umgekehrt ist aber auch jedes $\mathfrak{q}^n \cdot M$ offen in der durch die $\{M_n\}$ induzierten Topologie, weil wegen „$\mathfrak{q}$-gut“ gilt: $M_{n+m} = \mathfrak{q}^n \cdot M_m \subseteq \mathfrak{q}^n \cdot M$ Für ein hinreichend großes m. □

14.0.6. Satz (Satz von Artin-Rees)**.** *Sei N ein R-Untermodul von M. Dann gilt:*
Die auf N durch die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung von M induzierte Filtrierung ist $\mathfrak{q}$-gut.
Es existiert also ein $m \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$N \cap \mathfrak{q}^{m+k} \cdot M = \mathfrak{q}^k \cdot (N \cap \mathfrak{q}^m \cdot M)$.
Insbesondere induziert also die $\mathfrak{q}$-adische Topologie von M auf einem Untermodul N die $\mathfrak{q}$-adische Topologie von N.

Beweis nach Cartier. Betrachte auf N die induzierte Filtrierung $N_n := N \cap \mathfrak{q}^n \cdot M$.
Dann ist trivialerweise $\bar{N}$ ein graduierter $\bar{R}$-Untermodul von $\bar{M}$.
Die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung von M ist trivialerweise $\mathfrak{q}$-gut (Bedingung (1) von Satz 14.0.3. ist erfüllt.) Nach Satz 14.0.3. (3) ist daher $\bar{M}$ ein endlich erzeugter $\bar{R}$-Modul. $\bar{R}$ ist noethersch nach Anmerkung 14.0.2., also ist $\bar{M}$ noethersch und somit auch $\bar{N}$ ein endlich erzeugter $\bar{R}$-Modul. Die Bedingung (3) von Satz 14.0.3. ist also für $\big(N, \{N_n\}\big)$ erfüllt und daher ist die Filtrierung $\{N_n\}$ von N $\mathfrak{q}$-gut (Definition 14.0.4). □

14.0.7. Korollar. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R und*
$\sigma : M \longrightarrow N$ eine lineare Abbildung noetherscher R-Moduln.
M und N seien mit der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie und $\sigma(M)$ mit der durch die $\mathfrak{q}$-adische Topologie von N induzierten Topologie versehen. Dann gilt:
σ ist stetig (sogar ein Morphismus filtrierter Moduln bzgl. der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierungen) und
$\sigma|(M \to \sigma(M))$ ist offen.

Beweis. Daß σ ein Morphismus filtrierter Moduln bzgl. der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierungen (und daher stetig) ist, wurde bereits ohne die Voraussetzung „noethersch“ in Anmerkung 12.0.5. (3) festgestellt. Bleibt zu zeigen, daß $\sigma|(M \to \sigma(M))$ offen ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß alle $\sigma(\mathfrak{q}^k \cdot M)$ offen in $\sigma(M)$ sind. Wegen $\sigma(\mathfrak{q}^k \cdot M) = \mathfrak{q}^k \cdot \sigma(M)$ sind die $\sigma(\mathfrak{q}^k \cdot M)$ trivialerweise offen in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie von $\sigma(M)$. Nach dem Satz 14.0.6. von Artin-Rees ist dies aber gerade die auf $\sigma(M)$ von der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie von N induzierte Topologie. □

14.0.8. *Anmerkung.* Eine stetige lineare Abbildung $\sigma : M \longrightarrow N$ topologischer R-Moduln, so daß $\sigma|(M \to \sigma(M))$ offen ist, nennt man einen „Morphismus topologischer R-Moduln“.
Äquivalent zu der Bedingung, daß $\sigma|(M \to \sigma(M))$ offen ist, ist die Bedingung, daß σ einen topologischen Isomorphismus $(M/\operatorname{Ker}(\sigma)) \to \sigma(M)$ induziert, wenn man auf $M/\operatorname{Ker}(\sigma)$ die Quotiententopologie und auf $\sigma(M)$ die von der Topologie von N induzierte Topologie betrachtet.

14.0.9. Korollar. *Sei R ein noetherscher Ring, $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R.*
R und alle R-Moduln seien mit der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie versehen. Es gilt:

(1) *Die Zuordnung* $\left\{\begin{matrix} M \rightsquigarrow \widehat{M} \\ f \rightsquigarrow \hat{f} \end{matrix}\right\}$ *ist ein exakter, kovarianter Funktor der Kategorie der endlich erzeugten R-Moduln in die Kategorie der endlich erzeugten $\widehat{R}$-Moduln.*

(2) *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, $(\widehat{M}, \psi_M)$ die $\mathfrak{q}$-adische Komplettierung von M. Dann ist die kanonische $\widehat{R}$-lineare Abbildung*
$\varphi_M : \widehat{R} \otimes_R M \to \widehat{M}$
mit $r \otimes x \mapsto r \cdot \psi_M(x)$ *ein Isomorphismus.*

(3) *$\widehat{R}$ ist ein flacher R-Modul.*

Beweis. (1): Es genügt zu zeigen, daß aus einer kurzen exakten Folge $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ eine exakte Folge $0 \to \widehat{N} \xrightarrow{\hat{f}} \widehat{M} \xrightarrow{\hat{g}} \widehat{L} \to 0$ wird. Da die Komplettierungen nach Korollar 12.3.6. nur von den Topologien, nicht aber von den sie induzierenden Filtrierungen abhängen, kann man bei Bedarf von einer $\mathfrak{q}$-adischen zu einer $\mathfrak{q}$-guten Filtrierung übergehen, ohne daß sich etwas ändert (Anmerkung 14.0.5.). Wir betrachten auf M und L die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierungen und auf N die durch die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung von M induzierte Filtrierung. (Fasse N vermöge f als Untermodul von M auf.) Diese ist nach dem Satz 14.0.6. $\mathfrak{q}$-gut, induziert also die $\mathfrak{q}$-adische Topologie auf N.
Wegen $L = g(M)$ ist $g(\mathfrak{q}^n \cdot M) = \mathfrak{q}^n \cdot L$. Also ist g ein strikter Morphismus (Definition 12.0.3.)
Ferner ist nach Definition der induzierten Filtrierung $f(N_n) = \mathfrak{q}^n \cdot M \cap f(N)$, also ist auch f ein strikter Morphismus.
Außerdem sind trivialerweise $0 \to N$ und $L \to 0$ strikte Morphismen. Aus Folgerungen 12.3.2.(6) folgt dann, daß $0 \to \widehat{N} \xrightarrow{\hat{f}} \widehat{M} \xrightarrow{\hat{g}} \widehat{L} \to 0$ exakt ist.
Daß die $\widehat{M}$ endlich erzeugte $\widehat{R}$-Moduln sind, wenn die M endlich erzeugte R-Moduln sind, ergibt sich aus (2). □

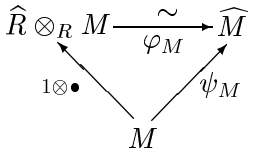
(2): Es ist $\widehat{R} \otimes_R R \simeq \widehat{R}$. Für endlich erzeugte freie R-Moduln F folgt daraus $\widehat{R} \otimes_R F \simeq \widehat{F}$, weil $\widehat{R} \otimes_R \bullet$ mit direkten Summen vertauschbar ist und $\widehat{\bullet}$ als additiver Funktor mit endlichen direkten Summen vertauschbar ist ([8, Th.3.11], [7, Chap II,Prop 1.1]).
Sei nun M ein beliebiger endlich erzeugter R-Modul. Dann läßt sich M darstellen als Faktormodul eines endlich erzeugten freien R-Moduls nach einem Untermodul, der ebenfalls endlich erzeugt ist, weil R nach Voraussetzung ein noetherscher Ring ist. Also läßt sich dieser Untermodul wieder als Faktormodul eines endlich erzeugten freien R-Moduls schreiben, so daß man eine exakte Folge erhält:
$F_1 \to F_0 \to M \to 0$ mit endlich erzeugten freien R-Moduln F_0 und F_1. (M ist „endlich präsentierbar“.)
Man erhält daraus ein kommutatives Diagramm kanonischer $\widehat{R}$-linearer Abbildungen, dessen erste Zeile exakt ist, weil $\widehat{R} \otimes_R \bullet$ rechtsexakt ist, und dessen zweite Zeile exakt ist, weil nach (1) $\widehat{\bullet}$ für endlich erzeugte R-Moduln exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{R} \otimes_R F_1 & \longrightarrow & \widehat{R} \otimes_R F_0 & \longrightarrow & \widehat{R} \otimes_R M & \longrightarrow & 0 \\
\big\downarrow \varphi_1 & & \big\downarrow \varphi_0 & & \big\downarrow \varphi_M & & \\
\widehat{F}_1 & \longrightarrow & \widehat{F}_0 & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

φ_0 und φ_1 sind Isomorphismen, wie oben gezeigt, also ist auch φ_M ein Isomorphismus. □

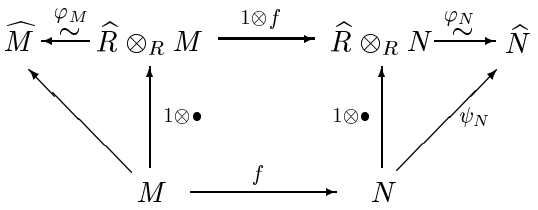
(3): Da $\widehat{\bullet}$ nach (1) für endlich erzeugte R-Moduln ein exakter Funktor ist und nach (2) für endlich erzeugte R-Moduln die kanonische Isomorphie $\widehat{R} \otimes_R M \simeq \widehat{M}$ besteht, folgt:
$\widehat{R} \otimes_R \bullet$ ist ein exakter Funktor auf der Kategorie der endlich erzeugten R-Moduln. Dann ist aber auch $\widehat{R} \otimes_R \bullet$ ein exakter Funktor auf der Kategorie aller R-Moduln, d.h. $\widehat{R}$ ist ein flacher R-Modul. Es genügt nämlich zu zeigen, daß für alle Ideale $\mathfrak{a} \subset R$ die kanonische Abbildung $\widehat{R} \otimes_R \mathfrak{a} \to \widehat{R} \otimes_R R = \widehat{R}$ injektiv ist ([3, §2, no.3, prop.1]). Da R noethersch ist, sind alle Ideale von R als R-Moduln endlich erzeugt. □

14.0.10. *Anmerkung.* (1) Da das Diagramm:



kommutativ ist, entspricht die kanonische Abbildung $\psi_M : M \to \widehat{M}$ der kanonischen Abbildung $M \to \widehat{R} \otimes_R M$ mit $x \mapsto 1 \otimes x$. Wenn wir also aufgrund des Isomorphismus φ_M die Komplettierung $\widehat{M}$ mit $\widehat{R} \otimes_R M$ identifizieren, wird die kanonische Abbildung $\psi_M : M \to \widehat{M}$ zu der kanonischen Abbildung $\psi_M : M \to \widehat{R} \otimes_R M$ mit $\psi_M(x) = 1 \otimes x$.

(2) Sei $f : M \longrightarrow N$ eine R-lineare Abbildung von R-Moduln, $\left(\widehat{M}, \psi_M\right)$ und $\left(\widehat{N}, \psi_N\right)$ die $\mathfrak{q}$-adischen Komplettierungen von M bzw. N. Nach Folgerungen 12.3.2 (1) gibt es dann genau eine R-lineare Abbildung $\hat{f} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$ mit $\psi_N \circ f = \hat{f} \circ \psi_M$. Identifiziert man nach (1) $\widehat{M}$ und $\widehat{N}$ mit $\widehat{R} \otimes_R M$ bzw. $\widehat{R} \otimes_R N$, so identifiziert sich $\hat{f}$ mit $1 \otimes f$, wie man aus dem folgenden kommutativen Diagramm erkennt.



(3) Aufgrund der Exaktheit von $\widehat{\bullet}$ identifizieren wir im Folgenden für einen Untermodul $N \subseteq M$ die Komplettierung von $\widehat{N}$ mit dem entsprechenden Untermodul von $\widehat{M}$, so daß man hat $\widehat{N} \subseteq \widehat{M}$ und $\psi_N(x) = \psi_M(x)$ für alle $x \in N$.

14.0.11. Korollar. *Seien N und L Untermoduln des endlich erzeugten R-Moduls M,*
$\widehat{N}$, $\widehat{L}$, $\widehat{M}$ die $\mathfrak{q}$-adischen Komplettierungen,
$\psi_M : M \longrightarrow \widehat{M}$ kanonisch. Es gilt:

(1) $\widehat{N} = \widehat{R} \cdot \psi_M(N)$.
(2) $\widehat{N + L} = \widehat{N} + \widehat{L}$.
(3) $\widehat{N \cap L} = \widehat{N} \cap \widehat{L}$.
(4) $\widehat{N : L} = \widehat{N} : \widehat{L}$.

(5) *Sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *Ideale in* R, *so ist:*
$\widehat{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}} = \hat{\mathfrak{a}}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\hat{\mathfrak{b}} = \hat{\mathfrak{a}}\cdot\hat{\mathfrak{b}}$
$\widehat{\mathfrak{a}\cdot N} = \hat{\mathfrak{a}}\cdot\psi_M(N) = \mathfrak{a}\cdot\widehat{N} = \hat{\mathfrak{a}}\cdot\widehat{N}.$

Beweis. (1): Nach Korollar 14.0.9 (2) ist, weil φ_M surjektiv ist,
$\widehat{M} = \widehat{R}\cdot\psi_M(M)$ und auch
$\widehat{N} = \widehat{R}\cdot\psi_N(N)$, wenn $\psi_N : N \to \widehat{N}$ die kanonische Abbildung von N in seine Komplettierung ist. Nach Korollar 14.0.9 (1) ist ferner $\widehat{N} \xrightarrow{\hat{\iota}} \widehat{M}$ injektiv, wenn $\iota : N \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet. Es folgt

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{R}\otimes_R N \simeq \widehat{N} & \xhookrightarrow{\hat{\iota}} & \widehat{M} \simeq \widehat{R}\otimes_r M \\ \psi_N\uparrow & & \uparrow\psi_M \\ N & \xhookrightarrow{\iota} & M \end{array}$$

$\widehat{N} = \hat{\iota}(\widehat{N}) = \hat{\iota}(\widehat{R}\cdot\psi_N(N)) = \widehat{R}\cdot\hat{\iota}\circ\psi_N(N) = \widehat{R}\cdot\psi_M\circ\iota(N) = \widehat{R}\cdot\psi_M(N).$ □

(2): Nach (1) hat man
$\widehat{N+L} = \widehat{R}\cdot\psi_M(N+L) = \widehat{R}\cdot\psi_M(N) + \widehat{R}\cdot\psi_M(L) = \widehat{N} + \widehat{L}.$

Die beiden folgenden Beweise beruhen auf der Flachheit von $\widehat{R}$ als R-Modul.
(3): Betrachte das kommutative Diagramm kanonischer Homomorphismen mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & M & \xrightarrow{\alpha} & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle j} & & \\ 0 & \longrightarrow & N\cap L & \xrightarrow{\iota'} & L & \xrightarrow{\alpha'} & L/(N\cap L) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Dabei bezeichnen ι' und α' die Einschränkungen von ι bzw. α. Durch Anwenden des exakten Funktors $\widehat{\bullet}$ erhält man daraus das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{N} & \xrightarrow{\hat{\iota}} & \widehat{M} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \widehat{M/N} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \hat{i}} & & \uparrow{\scriptstyle \hat{j}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{N\cap L} & \xrightarrow{\hat{\iota}'} & \widehat{L} & \xrightarrow{\hat{\alpha}'} & \widehat{L/(N\cap L)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Wir betrachten $\widehat{N}$ und $\widehat{L}$ vermöge der kanonischen Injektionen $\hat{\iota}$ bzw. $\hat{i}$ als Untermoduln von $\widehat{M}$ und $\widehat{N\cap L}$ vermöge $\hat{\iota}'$ als Untermodul von $\widehat{L}$. Dann ist:
$\widehat{N\cap L} = \mathrm{Ker}(\hat{\alpha}') = \mathrm{Ker}(\hat{\alpha})\cap\widehat{L} = \widehat{N}\cap\widehat{L}.$ □

(4): Sei $\pi : M \to M/N$ die Restklassenabbildung. Jedem $r \in R$ ordnen wir eine R-lineare Abbildung $g(r) : L \to M/N$ folgendermaßen zu:
$g(r)(y) := \pi(r\cdot y) = r\cdot y + N.$
Man erhält so eine R-lineare Abbildung
$g : R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, M/N).$
Es ist $\mathrm{Ker}(g) = \{r \mid r\in R,\ r\cdot L \subseteq N\} = (N : L).$
Man hat also eine exakte Folge R-linearer Abbildungen:

$0 \longrightarrow (N:L) \longrightarrow R \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_R(L, M/N)$.
Da $\widehat{R}$ flach über R ist, liefert das Tensorieren mit $\widehat{R}$ über R die exakte Folge von $\widehat{R}$-linearen Abbildungen:
$0 \longrightarrow \widehat{R} \otimes_R (N:L) \longrightarrow \widehat{R} \otimes_R R \xrightarrow{1\otimes g} \widehat{R} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, M/N)$.
Da R noethersch ist, ist $(N:L)$ endlich erzeugt, also $\widehat{R} \otimes_R (N:L) = \widehat{(N:L)}$ nach Korollar 14.0.9 (2). Ferner ist $\widehat{R} \otimes_R R = \widehat{R}$. Und weil R noethersch, L endlich erzeugt und $\widehat{R}$ flach über R ist, hat man nach ([3, §2, no.10, Prop.11]) die $\widehat{R}$-Isomorphie
$\lambda : \widehat{R} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, M/N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{R} \otimes_R L, \widehat{R} \otimes_R (M/N))$ mit
$\big(\lambda(\hat{x} \otimes u)\big)(\hat{z} \otimes y) = \hat{x} \cdot \hat{z} \otimes u(y)$ für alle $\hat{x}, \hat{z} \in \hat{R}$, $u \in \mathrm{Hom}(L, M/N)$ und $y \in L$.
Ausserdem ist wegen der Flachheit von $\widehat{R}$ noch
$\widehat{R} \otimes_R L = \widehat{L}$ und $\widehat{R} \otimes_R (M/N) \simeq (\widehat{R} \otimes_R M)/(\widehat{R} \otimes N) = \widehat{M}/\widehat{N}$ kanonisch.
Man hat also ein kommutatives Diagramm $\widehat{R}$-linearer Abbildungen mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \widehat{R} \otimes_R (N:L) & \longrightarrow & \widehat{R} \otimes_R R & \xrightarrow{1\otimes g} & \widehat{R} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, M/N) & \xrightarrow[\lambda]{\sim} & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{R} \otimes_R L, \widehat{R} \otimes_R (M/N)) \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{N:L}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_R} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\varphi_L^{-1}, \varphi_{M/N})} \\
0 & \longrightarrow & \widehat{(N:L)} & \longrightarrow & \widehat{R} & & \xrightarrow{\qquad\qquad \tilde{g} \qquad\qquad} & & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{L}, \widehat{M}/\widehat{N})
\end{array}$$

Eine genaue Verfolgung der einzelnen Homomorphismen ergibt, wie wir anschließend zeigen, daß dabei für alle $\hat{r} \in \widehat{R}$ und $\hat{y} \in \widehat{L}$ gilt:
$\tilde{g}(\hat{r})(\hat{y}) = \hat{r} \cdot \hat{y} + \widehat{N}$. Also ist analog zu dem oben gezeigten $\mathrm{Ker}(\tilde{g}) = (\widehat{L} : \widehat{N})$. Andererseits sieht man aus der exakten Folge, daß $\mathrm{Ker}(\tilde{g}) = \widehat{(N:L)}$ ist. Somit ist $\widehat{(N:L)} = (\widehat{N} : \widehat{L})$. □
Behauptung: Für alle $\hat{r} \in \widehat{R}$ und alle $\hat{y} \in \widehat{L}$ ist $\tilde{g}(\hat{r})(\hat{y}) = \hat{r} \cdot \hat{y} + \widehat{N}$.
Beweis: Da $\tilde{g}$ eine $\widehat{R}$-lineare Abbildung ist, genügt es zu zeigen, daß für alle $\hat{y} \in \widehat{L}$ gilt $\tilde{g}(1)(\hat{y}) = \hat{y} + \widehat{N}$:
$\hat{y} \in \widehat{L} \Rightarrow \hat{y} = \sum \hat{r}_i \cdot \psi_L(y_i) = \varphi_L\big(\sum \hat{r}_i \otimes y_i\big)$ mit gewissen $\hat{r}_i \in \widehat{R}$ und $y_i \in L$.
Da $1 = \varphi_R(1 \otimes 1)$ ist, hat man nach dem obigen kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{rcll}
\tilde{g}(1)(\hat{y}) & = & \varphi_{M/N}\big(\big(\lambda(1 \otimes g(1))\big)\big(\sum \hat{r}_i \otimes y_i\big) & \\
 & = & \varphi_{M/N}\big(\sum \hat{r}_i \otimes g(1)(y_i)\big) & \\
 & = & \varphi_{M/N}\big(\sum \hat{r}_i \otimes (y_i + N_i)\big) & \\
 & = & \sum \hat{r}_i \cdot \psi_M(y_i) + \widehat{N} & \\
 & = & \sum \hat{r}_i \cdot \psi_L(y_i) + \widehat{N} & \text{nach Anmerkung 14.0.10 (3)} \\
 & = & \hat{y} + \widehat{N} & \square
\end{array}$$

(5): Sei $\psi_R : R \to \widehat{R}$ kanonisch. Nach (1) ist dann $\hat{\mathfrak{a}} = \widehat{R} \cdot \psi_R(\mathfrak{a})$ und $\hat{\mathfrak{b}} = \widehat{R} \cdot \psi_R(\mathfrak{b})$,
also $\widehat{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = \widehat{R} \cdot \psi_R(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \left\{ \begin{array}{rl} \widehat{R} \cdot \psi_R(\mathfrak{a}) \cdot \psi_R(\mathfrak{b}) & = \hat{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{b} \\ \psi_R(\mathfrak{a}) \cdot \widehat{R} \cdot \psi_R(\mathfrak{b}) & = \mathfrak{a} \cdot \hat{\mathfrak{b}} \\ \widehat{R} \cdot \psi_R(\mathfrak{a}) \cdot \widehat{R} \cdot \psi_R(\mathfrak{b}) & = \hat{\mathfrak{a}} \cdot \hat{\mathfrak{b}} \end{array} \right.$
Analog für $\widehat{\mathfrak{a} \cdot N}$. □

14.0.12. Korollar. *Sei $\mathfrak{q}$ ein Ideal des noetherschen Ringes R und $\widehat{R}$ die $\mathfrak{q}$-adische Komplettierung von R. Dann gilt:*
$\widehat{R}$ ist ein noetherscher Ring und komplett in seiner $\hat{\mathfrak{q}}$-adischen Topologie.
Falls $(R, \mathfrak{q})$ ein lokaler Ring ist, ist auch $(\widehat{R}, \hat{\mathfrak{q}})$ ein lokaler Ring.

Beweis. Nach Korollar 14.0.11. (5) ist $\hat{\mathfrak{q}} = \widehat{R}\cdot\mathfrak{q}$ und ebenso $\widehat{\mathfrak{q}^n} = \widehat{R}\cdot\mathfrak{q}^n = (\widehat{R}\cdot\mathfrak{q})^n = \hat{\mathfrak{q}}^n$. Nach Satz 12.3.1. (1) ist $\widehat{R}$ komplett und separiert für die $\widehat{\mathfrak{q}^n}$-adische Filtrierung. Diese wird aber, wie eben gezeigt, durch $\{\hat{\mathfrak{q}}^n\}$ gegeben.
Ferner ist nach Satz 12.3.1. (6a) $\widehat{R}/\hat{\mathfrak{q}} \simeq R/\mathfrak{q}$ noethersch und $\hat{\mathfrak{q}}/\hat{\mathfrak{q}}^2 = \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ endlich erzeugt als $\widehat{R}$-Modul, weil R noethersch ist, und daher ist nach Korollar 13.2.10. $\widehat{R}$ ein noetherscher Ring.
Sei nun $(R,\mathfrak{q})$ ein lokaler Ring. Dann ist R nach dem Krullschen Durchschnittssatz separiert, also $\widehat{R} \supseteq R$. Weil $\widehat{R}/\hat{\mathfrak{q}} \simeq R/\mathfrak{q}$ ein Körper ist, ist dann $\hat{\mathfrak{q}} = \widehat{R}/\hat{\mathfrak{q}}$ ein maximales Ideal von $\widehat{R}$.
Gäbe es noch ein weiteres maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von $\widehat{R}$, so wäre $\mathfrak{m} + \mathfrak{q} = \widehat{R}$, d.h. es gäbe $x \in \mathfrak{m}$ und $y \in \hat{\mathfrak{q}}$ mit $x + y = 1$. Dann wäre aber $x = 1 - y$ invertierbar in $\widehat{R}$ und somit $\mathfrak{m} = \widehat{R}$; denn es ist $(1-y)\cdot\sum_{i=0}^{\infty} y^i = 1$ in dem kompletten Ring $\widehat{R}$. Also ist $\hat{\mathfrak{q}}$ das einzige maximale Ideal von $\widehat{R}$ und daher ist $(\widehat{R},\hat{\mathfrak{q}})$ ein lokaler Ring. □

14.0.13. Korollar. *Seien*
M ein endlich erzeugter R-Modul,
R noethersch,
$\mathfrak{q}$ ein Ideal von R,
$\widehat{M}$ die Komplettierung von M in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie,
$r \in R$ ein Nichtnullteiler für M.
Dann gilt:
r ist auch ein Nichtnullteiler für $\widehat{M}$.

Beweis. μ_r bezeichne die Multiplikation mit r in M oder in $\widehat{M}$. Weil R ein Nichtnullteiler für M ist, hat man eine exakte Folge $0 \to M \xrightarrow{\mu_r} M$. Das ergibt nach Korollar 14.0.9. die exakte Folge $0 \to \widehat{M} \xrightarrow{\hat{\mu}_r} \widehat{M}$.
Nun ist aber $\hat{\mu}_r$ ebenfalls die Multiplikation mit r, wie man beispielsweise aus Anmerkung 14.0.10. (2) sieht oder direkt der offensichtlichen Kommutativität des nebenstehenden Diagramms entnimmt. Also ist r auch ein Nichtnullteiler für $\widehat{M}$. □

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M} & \xrightarrow{\mu_r} & \widehat{M} \\ {\scriptstyle\psi_M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi_M} \\ M & \xrightarrow{\mu_r} & M \end{array}$$

14.0.14. Satz. *Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R.*
Es sind äquivalent:

(1) *$\mathfrak{q}$ ist im Jacobson-Radikal $\mathfrak{J}$ von R enthalten.*
(2) *Jeder endlich erzeugte R-Modul ist separiert in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie.*
(3) *Jeder Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls M ist in M abgeschlossen in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie von M.*

Beweis. (1)⇒(2): M ist nach Voraussetzung ein endlich erzeugter R-Modul. Also gilt nach dem Krullschen Durchschnittssatz, weil $\mathfrak{q}$ im Jacobson-Radikal liegt, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n \cdot M = (0)$. Folglich ist M separiert in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie nach Satz 12.1.6. □
(2)⇒(3): Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul und $x \in \overline{N} = \bigcap_{n=0}^{\infty}(N + \mathfrak{q}^n \cdot M)$, dem topologischen Abschluß von N in M (Satz 12.1.5). Betrachte den kanonischen Homomorphismus $\rho : M \to M/N$. Aus $x \in N + \mathfrak{q}^n \cdot M$ folgt $\rho(x) \in \mathfrak{q}^n \cdot \rho(M)$ für alle n, also $\rho(x) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n \cdot \rho(M)$. Nun ist $\rho(M)$ ein endlich erzeugter R-Modul, also nach (2) separiert und daher $\rho(x) = 0$. Das bedeutet $x \in N$, also $N = \overline{N}$. □

(3)⇒(1): Sei $\mathfrak{m}$ ein beliebiges maximales Ideal von R. Da R ein endlich erzeugter R-Modul ist, ist nach (3) $\mathfrak{m} = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{m} + \mathfrak{q}^n)$ abgeschlossen in R. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m} + \mathfrak{q}^{n_0} \subset R$, aber $\mathfrak{m} + \mathfrak{q}^{n_0} \supseteq \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m} + \mathfrak{q}^{n_0} = \mathfrak{m}$. Also ist $\mathfrak{q}^{n_0} \subseteq \mathfrak{m}$ und daher $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$. Da das für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R gilt, liegt also $\mathfrak{q}$ im Schnitt aller maximalen Ideale von R, d.h. im Jacobson-Radikal von R. □

14.0.15. Definition. Ein „Zariski-Ring“ ist ein noetherscher, topologischer Ring, dessen Topologie die $\mathfrak{q}$-adische Topologie für ein Ideal $\mathfrak{q}$ ist, das im Jacobson-Radikal von R liegt. $\mathfrak{q}$ heißt ein „definierendes Ideal“ für den Zariski-Ring R.

14.0.16. *Anmerkung.* Das Ideal $\mathfrak{q}$ in Definition 14.0.15. ist durch die Topologie nicht eindeutig bestimmt: Ist $\mathfrak{q}'$ ein zweites Ideal von R, so stimmt die $\mathfrak{q}$-adische Topologie von R genau dann mit der $\mathfrak{q}'$-adischen überein, wenn gilt: Es existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}'^m \subseteq \mathfrak{q}$, d.h. wenn beide Ideale dasselbe Radikal haben ($\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}')$).

14.0.17. Definition. Sei R ein Zariski-Ring, $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R, das die Topologie von R definiert und M ein endlich erzeugter R-Modul.
Die $\mathfrak{q}$-adische Topologie von M heißt die „kanonische Topologie“ von M.

14.0.18. *Anmerkung.* Die kanonische Topologie von M hängt nur von der Topologie von R, nicht aber von dem speziell gewählten Ideal $\mathfrak{q}$ ab; denn ist $\mathfrak{q}'$ ein zweites Ideal, das dieselbe Topologie auf R definiert, so ist nach Anmerkung 14.0.16. $\mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}'^m \subseteq \mathfrak{q}$ für passende $n, m \in \mathbb{N}$, also auch $\mathfrak{q}^n \cdot M \subseteq \mathfrak{q}' \cdot M$ und $\mathfrak{q}'^m \cdot M \subseteq \mathfrak{q} \cdot M$. Daher stimmen die $\mathfrak{q}$-adische und die $\mathfrak{q}'$-adische Topologie von M überein.

14.0.19. *Anmerkung.* Sei M ein endlich erzeugter Modul über dem Zariski-Ring R. Dann ist M separiert in seiner kanonischen Topologie nach Satz 14.0.14. (2), also kann man M als Untermodul von $\widehat{M}$ auffassen. Jeder Untermodul N von M ist abgeschlossen in M nach Satz 14.0.14. (3) und $\widehat{N} \subseteq \widehat{M}$ nach Anmerkung 14.0.10. (1) also ist $N = \widehat{N} \cap M$ (Weil N dicht in $\widehat{N}$ und abgeschlossen in M ist).
Insbesondere gilt dann, wenn man noch Korollar 14.0.11. (1) beachtet, für ein definierendes Ideal $\mathfrak{q}$ von R
$\hat{\mathfrak{q}}^n \cap R = \widehat{R} \cdot \mathfrak{q}^n \cap R = \widehat{\mathfrak{q}^n} \cap R = \mathfrak{q}^n$.
Die $\hat{\mathfrak{q}}$-adische Filtrierung von $\widehat{R}$ induziert also die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung auf R.

14.0.20. Satz.

(1) *Sei R ein noetherscher Ring, $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R. Es gilt:*
R ist genau dann mit der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie, ein Zariski-Ring wenn für alle $q \in \mathfrak{q}$ das Element $1 + q$ invertierbar in R ist.

(2) *Jeder noethersche komplette $\mathfrak{q}$-adisch filtrierte Ring ist ein Zariski-Ring.*

Beweis. (2) folgt aus (1): Sei $q \in \mathfrak{q}$ beliebig. Da R $\mathfrak{q}$-adisch komplett ist, liegt $1 - q + q^2 - q^3 \pm \dots$ in R. Es ist aber $(1 + q) \cdot (1 - q + q^2 - q^3 \pm \dots) = 1$, also ist $1 + q$ invertierbar in R.
(1) folgt aus Hilfssatz 14.0.21. □

14.0.21. Hilfssatz. *Sei R ein beliebiger Ring, $\mathfrak{J} := \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\ max. \\ Ideal\ von\ R}} \mathfrak{m}$ das Jacobson-Radikal von R und $r \in R$ beliebig. Dann gilt:*
$r \in \mathfrak{J} \iff$ Für alle $s \in R$ ist $1 + s \cdot r$ invertierbar in R.

Beweis. „⇒:“ $r \in \mathfrak{J} \Rightarrow s \cdot r \in \mathfrak{J} \Rightarrow 1 + s \cdot r \notin \mathfrak{m}$ für *alle* maximalen Ideale von R, weil $s \cdot r \in \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m}$. Also ist $1 + s \cdot r$ invertierbar in R.

„$\Leftarrow$:“ Sei $1 + s \cdot r$ invertierbar für alle $s \in R$. Wäre $r \notin \mathfrak{J}$, so gäbe es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $r \notin \mathfrak{m}$. Dann wäre $R \cdot r + \mathfrak{m} = R$, also gäbe es ein es ein $s \in R$ und ein $x \in \mathfrak{m}$ mit $s \cdot r + x = -1$, also $1 + s \cdot r \in \mathfrak{m}$, und daher wäre $1 + s \cdot r$ nicht invertierbar. Widerspruch! $\square$

15. Das Hilbert-Samuel-Polynom

15.1. **Polynome mit ganzzahligen Werten.**

15.1.1. Definition. Sei $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{Z}$ eine Teilmenge der ganzen Zahlen mit der Eigenschaft:
$x \in S \Rightarrow x+1 \in S$ und sei
$f : S \to \mathbb{Q}$ eine Abbildung. Definiere
$\Delta f : S \longrightarrow \mathbb{Q}$ durch
$\big(\Delta f\big)(x) := f(x+1) - f(x)$ für alle $x \in S$.
Ist $g \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom, so sei
$\tilde{g}$ die durch g definierte Abbildung $S \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{Q}$.
Ferner sei
$\Delta g(X) := g(X+1) - g(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

15.1.2. Satz.

(1) *Für $f, g : S \to \mathbb{Q}$ oder $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ und $q \in \mathbb{Q}$ gilt:*
$\Delta(f+g) = \Delta(f) + \Delta(g)$ *und*
$\Delta(q \cdot f) = q \cdot \Delta(f)$.

(2) *Sei $g \in \mathbb{Q}[X]$. Dann ist*
$\operatorname{grad}\big(\Delta g\big) \leq \operatorname{grad}(g) - 1$ *und*
$\widetilde{\Delta g} = \Delta \tilde{g}$.

(3) *Sei $g \in \mathbb{Q}[X]$ und $r \geq \operatorname{grad}(g)$. Dann ist*
$\Delta^{r+1} g = 0$.

(4) *Sei $h : S \to \mathbb{Q}$ und $\Delta h = 0$. Dann ist*
$h = \text{const}$.

(5) *Seien $h_1, h_2 : S \to \mathbb{Q}$ und $\Delta h_1 = \Delta h_2$. Dann ist*
$h_1 = h_2 + \text{const}$.

(6) *Sei $g \in \mathbb{Q}[X]$, $\operatorname{grad}(g) \leq r$,*
$h : S \to \mathbb{Q}$ mit $\Delta^{r+1} h = 0$
und es existiere ein $n_0 \in S$ mit $g(n_0 + i) = h(n_0 + i)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, r$.
Dann ist
$g(n) = h(n)$ für alle $n \in S$.

(7) *Sei $h : S \to \mathbb{Q}$ mit $\Delta^{r+1} h = 0$. Dann gibt es genau ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{grad}(g) \leq r$ und $g(n) = h(n)$ für alle $n \in S$.*

(8) *Sei $h : S \to \mathbb{Q}$, und es existiere ein Polynom $g_1 \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{grad}(g_1) \leq r - 1$ und $\big(\Delta h\big)(n) = g_1(n)$ für alle $n \in S$.*
Dann gibt es genau ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{grad}(g) \leq r$ und
$h(n) = g(n)$ für alle $n \in S$.

Beweis. (1) ist klar.
(2): Die Gradbeziehung folgt aus:
$\Delta X^r = (X+1)^r - X^r = r \cdot X^{r-1} +$ niedrigere Potenzen von X.
$\widetilde{\Delta g} = \Delta \tilde{g}$ ist klar nach Definition. □
(3): Induktion nach r: $r = 0 \Rightarrow g = \text{const} \Rightarrow \Delta^1 g = 0$. Sei nun die Behauptung bis $r-1$ bewiesen. Es ist $\Delta^{r+1} g = \Delta^r\big(\Delta g\big)$ und $\operatorname{grad}\big(\Delta g\big) \leq r - 1$ nach (2). Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann $\Delta^r\big(\Delta g\big) = 0$. □
(4): $\Delta h = 0 \Rightarrow h(n+1) = h(n)$ für alle $n \in S \overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} h = \text{const}$. □

(5): $0 = \Delta h_1 - \Delta h_2 \overset{(1)}{=} \Delta(h_1 - h_2) \overset{(4)}{\Rightarrow} h_1 - h_2 = \text{const.}$ □

(6): Induktion nach r: $r = 0$ dann ist $g = \text{const}$ und nach (4) auch $h = \text{const}$. Aus $h(n_0) = g(n_0)$ folgt also $h(n) = h(n_0) = g(n_0) = g(n)$ für alle $n \in S$.
Sei nun die Behauptung bis $r-1$ bewiesen. Aus den Voraussetzungen folgt $\big(\Delta g\big)(n_0 + i) = \big(\Delta h\big)(n_0 + i)$ für $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Ferner ist $\operatorname{grad}\big(\Delta g\big) \leq r - 1$ nach (2) und $\Delta^r\big(\Delta h\big) = \Delta^{r+1} h = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\big(\Delta g\big)(n) = \big(\Delta h\big)(n)$ für alle $n \in S$, also wiederum nach (2) $\widetilde{\Delta} g = \Delta \tilde{g} = \Delta h$. Mit (5) folgt daraus $\tilde{g} = h + \text{const}$. Aber $\tilde{g}(n_0) = g(n_0) = h(n_0) \Rightarrow \text{const} = 0 \Rightarrow \tilde{g} = h$,
d.h $g(n) = \tilde{g}(n) = h(n)$ für alle $n \in S$. □

(7): Sei $n_0 \in S$ fest gewählt. Es existiert *genau ein* Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{grad}(g) \leq r$, das an den $r+1$ Stellen $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+r$ die Werte $h(n_0), h(n_0+1), \ldots, h(n_0+r)$ annimmt (z.B. Interpolationsformel von Lagrange). Mit (6) folgt $g(n) = h(n)$ für *alle* $n \in S$. □

(8): Es ist $\big(\Delta^{r+1} h\big)(n) = \big(\Delta^r(\Delta h)\big)(n) = \big(\Delta^r g_1\big)(n)$. Weil $\operatorname{grad}(g_1) \leq r - 1$ ist, ist aber $\Delta^r g_1 = 0$ nach (3) $\big(\Delta^r g_1\big)(n) = 0$ für alle $n \in S$. Also ist $\big(\Delta^{r+1} h\big)(n) = 0$ für alle $n = 0, 1, \ldots$, d.h. $\Delta^{r+1} h = 0$. Aus (7) folgt dann die Behauptung. □

Wir wollen nun die Polynome $f \in \mathbb{Q}[X]$ näher untersuchen, die auf einer Menge S ganzzahlige Werte annehmen, d.h. die f mit $\tilde{f} : S \to \mathbb{Z}$. Dazu definieren wir zunächst, wie üblich, Binomialkoeffizienten als Polynome in $\mathbb{Q}[X]$.

15.1.3. Definition. Sei $d \in \mathbb{N}_0$.

$$\binom{X}{d} := \begin{cases} \frac{X \cdot (X-1) \cdots \big(X-(d-1)\big)}{d!} \in \mathbb{Q}[X] & \text{für } d > 0 \\ 1 \in \mathbb{Q} & \text{für } d = 0. \end{cases}$$

15.1.4. *Anmerkung.*

(1) $\binom{X}{d} = \frac{1}{d!} \cdot X^d +$ niedrigere Potenzen von X ist ein Polynom vom Grad d.

(2) $\Delta\binom{X}{d} = \binom{X+1}{d} - \binom{X}{d} = \binom{X}{d-1}$. „Pascalsches Dreieck“

(3) $\binom{n}{d} \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \\ \mathbb{N}_0 & \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$

(4) $\left\{\binom{X}{0}, \binom{X}{1}, \ldots, \binom{X}{r}\right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{Q}\langle 1, X, X^2, \ldots, X^r\rangle$ über $\mathbb{Q}$.

Beweis. (1) ist klar.

(2): $$\begin{aligned} \binom{X+1}{d} - \binom{X}{d} &= \frac{(X+1)\cdot X \cdot (X-1) \cdots (X+1-(d-1))}{d!} - \frac{X \cdot (X-1) \cdots (X-(d-2)) \cdot (X-(d-1))}{d!} \\ &= \frac{\big(X \cdot (X-1) \cdots (X-(d-2))\big) \cdot (X+1-X+d-1)}{d!} = \frac{\big(X \cdot (X-1) \cdots (X-(d-2))\big) \cdot d}{d!} \\ &= \frac{X \cdot (X-1) \cdots (X-(d-2))}{(d-1)!} = \binom{X}{d-1} \end{aligned}$$

(3): $\binom{n}{d} \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ bedeutet, daß das Produkt von d aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen in $\mathbb{Z}$ durch $d!$ teilbar ist. Dafür genügt es offenbar, dies für positive ganze Zahlen zu zeigen; denn wenn die Null darunter vorkommt, ist das Produkt Null, also trivialerweise durch $d!$ teilbar. Sind die d Zahlen alle negativ, so ist ihr Produkt bis auf das Vorzeichen gleich dem Produkt ihrer Beträge und diese sind dann d aufeinanderfolgende Zahlen aus $\mathbb{N}$.
Für $d = 0$ ist nach Definition $\binom{n}{d} = 1 \in \mathbb{N}$. Es genügt also zu zeigen $\binom{n}{d} \in \mathbb{N}$ für alle n mit $n \geq d \geq 1$. Dies zeigen wir durch Induktion nach n:

Induktionsanfang bei $n = 1$. Dann ist nach Definition $\binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$.
Sei nun $\binom{n}{d} \in \mathbb{N}$ und $\binom{n}{d-1} \in \mathbb{N}$ schon gezeigt für ein $n \geq 1$ und alle $d \leq n$, so ist nach dem Pascalschen Dreieck (2): $\binom{n+1}{d} = \binom{n}{d} + \binom{n}{d-1} \in \mathbb{N}$. □

(4): Aus (1) folgt, daß die angegebenen $r+1$-Polynome linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind, weil sie paarweise verschiedene Grade haben. Andererseits ist
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\langle 1, \ldots, X^r \rangle \leq r+1$, da durch $r+1$-Elemente erzeugt.
Also ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\langle 1, \ldots, X^r \rangle = r+1$ und die angegebenen Polynome bilden eine Basis über $\mathbb{Q}$. □

15.1.5. Satz. *Sei $g \in \mathbb{Q}[X]$ und $\operatorname{grad}(g) = r$. Es sind äquivalent:*

(1) *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $g(n) \in \mathbb{Z}$.*
(2) *Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle n mit $n_0 \leq n \leq n_0 + r$ gilt $g(n) \in \mathbb{Z}$.*
(3) *Es existieren $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ mit $g(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot \binom{X}{i}$.*

(Die a_i sind nach Anmerkung 15.1.4. (4) durch g eindeutig bestimmt.)

Beweis. „(1)⇒(2)“ ist trivial.
„(3)⇒(1)“ gilt wegen Anmerkung 15.1.4. (3).
Bleibt zu zeigen:
„(2)⇒(3)“: Wegen Anmerkung 15.1.4 (4) existieren eindeutig bestimmte $a_i \in \mathbb{Q}$ mit $g = \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot \binom{X}{i}$. Wir müssen zeigen, daß alle a_i in $\mathbb{Z}$ liegen. Wir zeigen dies durch Induktion nach r.
Der Fall $r = 0$ ist trivial. Sei nun die Behauptung für alle Polynome vom Grad $\leq r-1$ schon gezeigt, und sei $\operatorname{grad}(g) = r$. Wegen $a_0 \cdot \underbrace{\Delta \overbrace{\binom{X}{0}}^{=1}}_{=0} = 0$ ist nach Satz 15.1.2. (1) und Anmerkung 15.1.4. (2)
$\Delta g = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \Delta \binom{X}{i} = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \binom{X}{i-1}$.
Ferner ist auch $(\Delta g)(n) = g(n+1) - g(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n_0 \leq n \leq r-1$. Es ist aber $\operatorname{grad}(\Delta g) \leq r-1$ und daher nach Induktionsvoraussetzung $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$. Aber $a_0 = g(X) - \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \binom{X}{i}$, und für $X = n_0$ ist $g(n_0) \in \mathbb{Z}$ nach Voraussetzung und $\sum_{i=1}^{r} a_i \binom{n_0}{i} \in \mathbb{Z}$ wegen Anmerkung 15.1.4. (3), weil
$a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ sind. Es folgt $a_0 \in \mathbb{Z}$. □

15.2. Das Hilbert-Samuel-Polynom eines graduierten Moduls.

15.2.1. Satz. *Sei $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ ein graduierter Modul über einem graduierten Ring $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$. Es sei $R = R_0[x_1, \ldots, x_r]$ als Ring endlich erzeugt über R_0 und M endlich erzeugt als R-Modul. Dann sind alle M_n endlich erzeugt als R_0-Moduln.*

Beweis. (Vgl. 14.0.3) Indem man zu den (endlich vielen) homogenen Komponenten der x_i übergeht, kann man o.B.d.A. voraussetzen, daß alle x_i homogen mit einem Grad n_i sind. Wegen der direkten Summenzerlegung liegt ein Element $R \ni x = \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \cdot x^{\nu_1} \cdots x^{\nu_r}$ mit $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \in R_0$ genau dann in R_n, wenn es eine solche Darstellung mit $\nu_1 \cdot n_1 + \cdots + \nu_r \cdot n_r = n$ gibt, weil sich die anderen Summenden wegheben müssen. Also ist $R_n = R_0\langle x_1^{\nu_1} \cdots x_r^{\nu_r} \mid \nu_i \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=1}^{r} \nu_i \cdot n_i = n \rangle$ ein endlich erzeugter R_0-Modul.

Betrachte nun die Erzeugung der M_n. Als endlich erzeugter R-Modul wird M von endlich vielen $y_k \in M$ erzeugt, wobei wir durch Übergang zu den homogenen Komponenten wieder annehmen können, daß alle y_k homogen von einem Grad m_k sind. Dann ist jedenfalls $\sum_{i+m_k=n} R_i \cdot y_k \subseteq M_n$. Umgekehrt: Sei $y \in M_n$. Stelle dar $y = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot y_k$ mit $c_k \in R$. Zerlege c_k in seine homogenen Komponenten. Wegen der direkten Summendarstellung müssen sich alle Anteile, die nicht in M_n liegen, in der Summe wegheben, so daß man o.B.d.A. annehmen kann c_k homogen mit $c_k \cdot y_k \in M_n$, also $c_k \in R_{n-m_k}$. Also ist $M_n = \sum_{i+m_k=n} R_i \cdot y_k$. Da in dieser Summe nur endlich viele Summanden vorkommen und weil jedes R_i, wie anfangs gezeigt, ein endlich erzeugter R_0-Modul ist, ist auch M_n ein endlich erzeugter R_0-Modul. □

15.2.2. Satz. *Sei $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ ein graduierter Ring, für den gilt:*
R_0 hat endliche Länge als R_0-Modul (also ist R_0 artinsch und auch noethersch),
$R = R_0[x_1, \ldots, x_r]$ mit $x_i \in R_1$ (von endlich vielen Elementen vom Grad 1 über R_0 erzeugt).
Sei $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter R-Modul. Dann gilt:
$\ell_{R_0}(M_n) < \infty$ für alle n und
es existiert ein Polynom $\varphi_M(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{grad}\left(\varphi_M\right) \leq r-1$ *und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\ell_{R_0}(M_n) = \varphi_M(n) \quad \text{für alle } n \geq n_0 \ .$$

$\varphi_M(X)$ heißt das „Hilbert-Samuel-Polynom“ von M.

Beweis. Nach Satz 15.2.1 sind alle M_n endlich erzeugte R_0-Moduln und wegen $\ell_{R_0}(R_0) < \infty$ ist dann auch $\ell_{R_0}(M_n) < \infty$, weil sich M_n als homomorphes Bild einer endlichen direkten Summe von R_0-Moduln $\simeq R_0$ darstellen läßt.
Wir zeigen nun die Existenz des Polynoms φ_M durch Induktion nach r:
$r = 0$: Dann ist $R = R_0$. M ist ein endlich erzeugter R-Modul. Die endlich vielen Erzeugenden liegen schon in $\sum_{i=0}^{m} M_i$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Durch Multiplikation mit Elementen aus $R = R_0$ entstehen auch keine homogenen Elemente höheren Grades. Also ist $M_n = (0)$ für $n > m$ und daher tut $\varphi_M := 0$ das Gewünschte; denn es ist ja auch $\operatorname{grad}(\varphi_M) \leq 0 - 1 = -1$.
Sei die Behauptung schon gezeigt für alle R, die über R_0 von höchstens $r-1$ Elementen vom Grad 1 erzeugt werden und alle endlich erzeugten graduierten Moduln über solchen Ringen.
Sei nun $R = R_0[x_1, \ldots, x_r]$ mit $x_i \in R_1$ für alle i und sei M ein endlich erzeugter graduierter R-Modul. Betrachte die Abbildung:
$\vartheta : M \longrightarrow M$ mit $\vartheta(y) := x_r \cdot y$ für alle $y \in M$. Dann ist $\vartheta(M_n) \subseteq M_{n+1}$ für alle n, d.h. ϑ ist ein „homogener Homomorphismus vom Grad 1“.
Sei $N := \operatorname{Ker}\vartheta$ und $L := \operatorname{Coker}\vartheta = M/\vartheta(M)$ Dann hat man eine exakte Folge:

$$0 \to N \to M \xrightarrow{\vartheta} M \longrightarrow L \to 0.$$

Es ist $N = \bigoplus N_n$ mit $N_n := N \cap M_n$, weil ϑ homogen ist:
Sei $y \in N = \operatorname{Ker}\vartheta$. Zerlege $y = \sum y_n$ mit $y_n \in M_n$. Dann ist $0 = \vartheta(y) = \sum \vartheta(y_n)$ und $\vartheta(y_n) \in M_{n+1}$. Also sind alle $\vartheta(y_n)$ in verschiedenen direkten Summanden und daher ist $\vartheta(y_n) = 0$ für alle n, d.h. $y_n \in N \cap M_n = N_n$ und somit $y \in \bigoplus N_n$. Es folgt $N \subseteq \bigoplus N_n$. Die umgekehrte Inklusion gilt trivialerweise, also ist $N = \bigoplus N_n$.
Ferner ist $L = \bigoplus L_n$ mit $L_n := M_n/(x_r \cdot M_{n-1})$.
Offensichtlich sind $N = \bigoplus N_n$ und $L = \bigoplus L_n$ graduierte R-Moduln. Ferner ist R_0 als R_0-Modul endlicher Länge trivialerweise ein noetherscher Ring und daher ist

auch $R = R_0[x_1, \ldots, x_r]$ ein noetherscher Ring und M als endlich erzeugter R-Modul ein noetherscher R-Modul. Also sind auch N und L endlich erzeugte R-Moduln als Untermodul bzw. Faktormodul eines noetherschen Moduls.
Sei nun $\widetilde{R} := R_0[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Dann ist $\widetilde{R}$ ein graduierter Unterring von R, erzeugt von $r-1$ Elementen vom Grad 1. Ferner sind dann N und L graduierte $\widetilde{R}$-Moduln.
Behauptung: N und L sind auch als $\widetilde{R}$-Moduln endlich erzeugt.
Beweis: Es ist $x_r \cdot N = (0)$ weil $N = \operatorname{Ker} \vartheta$ und auch $x_r \cdot L = (0)$, weil $L \simeq M/x_r \cdot M$.
Sei nun $\{z_1, \ldots, z_s\}$ ein Erzeugendensystem für N als R-Modul und $y \in N$ beliebig. Stelle dar $y = \sum c_i \cdot z_i$ mit $c_i \in R = R_0[x_1, \ldots, x_r]$. Da aber wegen $z_i \in N$ gilt $x_r \cdot z_i = 0$ für alle i, kann man in der Darstellung $c_i = \sum a_{i,\nu_1 \ldots \nu_r} \cdot x_1^{\nu_1} \cdots x_r^{\nu_r}$ mit $a_{i,\nu_1 \ldots \nu_r} \in R_0$ o.B.d.A. alle Summanden weglassen, in denen x_r mit einer Potenz $\neq 0$ vorkommt, sodaß man sieht, daß man alle $c_i \in \widetilde{R} = R_0[x_1, \ldots, x_{r-1}]$ wählen kann. Somit ist $\{z_1, \ldots, z_s\}$ auch ein Erzeugendensystem für N als $\widetilde{R}$-Modul, und folglich ist N auch als $\widetilde{R}$-Modul endlich erzeugt.
Analoges gilt für L, da nur benutzt wurde, daß x_r den Modul annulliert. q.e.d.
Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun zwei Polynome $\varphi_N, \varphi_L \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $\leq r-2$, so daß für große n gilt $\ell_{R_0}(N_n) = \varphi_N(n)$ und $\ell_{R_0}(L_n) = \varphi_L(n)$.
Sei $\vartheta_n := \vartheta | (M_n \to M_{n+1})$. Dann ist $\operatorname{Ker} \vartheta_n = N \cap M_n = N_n$ und
$\operatorname{Coker} \vartheta_n = M_{n+1}/\vartheta_n(M_n) = M_{n+1}/x_r \cdot M_n = L_{n+1}$, so daß man eine exakte Folge hat:

$$0 \to N_n \to M_n \xrightarrow{\vartheta_n} M_{n+1} \longrightarrow L_{n+1} \to 0.$$

Daraus liest man ab:
$\ell_{R_0}(N_n) - \ell_{R_0}(M_n) + \ell_{R_0}(M_{n+1}) - \ell_{R_0}(L_{n+1}) = 0$.
Also gilt für große n, etwa für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \ell_{R_0}(M_{n+1}) - \ell_{R_0}(M_n) &= \ell_{R_0}(L_{n+1}) - \ell_{R_0}(N_n) \\ &= \varphi_L(n+1) - \varphi_N(n) \\ &=: g_1(n), \end{aligned}$$

wobei $g_1 \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad $\leq r-2$ ist.
Sei $h(n) := \ell_{R_0}(M_n)$ für $n \geq n_0$ und $S := \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$. Dann ist h eine Abbildung $h : S \longrightarrow \mathbb{Z}$ und $\big(\Delta h\big)(n) = g_1(n)$ für alle $n \in S$. Da grad $(g_1) \leq r-2$ ist, folgt aus Satz 15.1.2. (8) dann, daß es ein Polynom $\varphi_M \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $\leq r-1$ gibt mit $h(n) = \varphi_M(n)$ für alle $n \in S$. □

15.2.3. Korollar. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 15.2.2. gilt, falls $\varphi_M \neq 0$ ist:*

$$\varphi_M(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot \binom{X}{i} \quad \textit{mit } 0 \leq d \leq r-1,\ a_i \in \mathbb{Z} \textit{ und } a_d > 0,$$

also

$$\varphi_M(X) = \frac{a_d}{d!} \cdot X^d + \textit{ niedrigere Potenzen von } X.$$

Beweis. Da gilt $\varphi_M(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq n_0$, folgt nach Satz 15.1.5. (2)⇒(3), daß es (eindeutig bestimmte) $a_i \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\varphi_M(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot \binom{X}{i}$. Sei $\varphi_M \neq 0$ und $d :=$ grad (φ_M). Nach Satz 15.2.2. ist $0 \leq d \leq r-1$ und daher nach Anmerkung 15.1.4. (1) $\varphi_M(X) = \frac{a_d}{d!} \cdot X^d +$niedrigere Potenzen von X und $a_d \neq 0$. Wäre $a_d < 0$, so wäre $\varphi_M(n) < 0$ für große n. Da aber $\varphi_M(n) = \ell_{R_0}(M_n) > 0$ ist für große n, folgt $a_d > 0$. □

15.3. **Höhe und Multiplizität eines Moduls bzgl. eines Ideals.**
Voraussetzungen. *Es seien in diesem Abschnitt stets:*
R *ein noetherscher Ring,*
$\mathfrak{q}$ *ein Ideal in* R,
M *ein endlich erzeugter* R*-Modul mit* $\ell_R\big(M/\mathfrak{q}\cdot M\big) < \infty$.

15.3.1. *Anmerkung.* Es ist $\operatorname{Supp}\big(M/\mathfrak{q}\cdot M\big) = \operatorname{Supp}\big(M/\mathfrak{q}^n\cdot M\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach Definition ist für einen beliebigen R-Modul N
$\operatorname{Supp}(N) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R), N_\mathfrak{p} \neq (0)\}$.
Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ beliebig. Man hat dann eine kanonische exakte Folge
$M/\mathfrak{q}^n\cdot M \to M/\mathfrak{q}\cdot M \to 0$. Durch Lokalisieren nach $\mathfrak{p}$ entsteht daraus die exakte Folge $\big(M/\mathfrak{q}^n\cdot M\big)_\mathfrak{p} \to \big(M/\mathfrak{q}\cdot M\big)_\mathfrak{p} \to 0$. Also: $\big(M/\mathfrak{q}\cdot M\big)_\mathfrak{p} \neq (0) \Rightarrow \big(M/\mathfrak{q}^n\cdot M\big)_\mathfrak{p} \neq (0)$.
Folglich ist $\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q}\cdot M) \subseteq \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q}^n\cdot M)$.
Umgekehrt: Sei $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q}\cdot M)$, so ist $M_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}\cdot M_\mathfrak{p} = \big(M/\mathfrak{q}\cdot M\big)_\mathfrak{p} = (0)$, also $M_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\cdot M_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}\cdot M_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^2\cdot M_\mathfrak{p}$, …, schließlich $M_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^n\cdot M_\mathfrak{p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $\big(M/\mathfrak{q}^n\cdot M\big)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}^n\cdot M_\mathfrak{p} = (0)$, d.h. $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}\big(M/\mathfrak{q}^n\cdot M\big)$. □

15.3.2. *Folgerung.* $\ell_R\big(M/\mathfrak{q}^n\cdot M\big) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Länge eines endlich erzeugten R-Moduls ist genau dann endlich, wenn sein Support nur aus maximalen Idealen besteht ([11, I, Prop 12]. Da nach Voraussetzung $\ell_R\big(M/\mathfrak{q}\cdot M\big) < \infty$ ist, besteht also $\operatorname{Supp}\big(M/\mathfrak{q}\cdot M\big)$ nur aus maximalen Idealen. Nach Anmerkung 15.3.1. hat $M/\mathfrak{q}^n\cdot M$ aber denselben Support, also ist auch seine Länge endlich. □

15.3.3. *Anmerkung.* Sei $\{M_n\}$ eine Filtrierung von M, so daß $\big(M, \{M_n\}\big)$ ein filtrierter $\big(R, \{\mathfrak{q}^n\}\big)$-Modul ist. Dann ist $\ell_R\big(M/M_n\big) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es ist $M_n \supseteq \mathfrak{q}^n\cdot M_0 = \mathfrak{q}^n\cdot M$ (weil $M_0 = M$ in jeder Filtrierung ist). Man hat also eine exakte Folge $M/\mathfrak{q}^n\cdot M \to M/M_n \to 0$. Nach Folgerung 15.3.2. ist $\ell_R\big(M/\mathfrak{q}^n\cdot M\big) < \infty$, also ist erst recht $\ell_R\big(M/M_n\big) < \infty$. □

15.3.4. Hilfssatz. *Sei* P *ein beliebiger Ring und* N *ein endlich erzeugter* P*-Modul. Ferner sei* $\mathfrak{c}$ *ein Ideal in* P*. Dann gilt für die Radikale*
$\mathfrak{r}\big(\operatorname{Ann}_P(N/\mathfrak{c}\cdot N)\big) = \mathfrak{r}\big(\mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N)\big)$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N) \subseteq \operatorname{Ann}(N/\mathfrak{c}\cdot N)$, also
$\mathfrak{r}\big(\mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N)\big) \subseteq \mathfrak{r}\big(\operatorname{Ann}_P(N/\mathfrak{c}\cdot N)\big)$.
Umgekehrt: Sei $x \in \operatorname{Ann}_P(N/\mathfrak{c}\cdot N)$ beliebig. N ist ein endlich erzeugter P-Modul: $N = P\langle\omega_1, \ldots, \omega_s\rangle$. Dann ist
$x\cdot\omega_i = \sum_{k=1}^s c_{ki}\cdot\omega_k$ mit $c_{ki} \in \mathfrak{c}$ für $i = 1, \ldots, s$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^s (x\cdot\delta_{ik} - c_{ik})\cdot\omega_k = 0$ für $i = 1, \ldots, s$ und daher mit $\Delta := \det\big(x\cdot\delta_{ik} - c_{ik}\big)$
$\Delta\cdot N = (0)$ und folglich $\Delta \in \operatorname{Ann}_P(N)$.
Durch Entwicklung der Determinante sieht man $\Delta = x^s + c$ mit $c \in \mathfrak{c}$. Es folgt $x^s \in \mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N)$ und daher nach Definition des Radikals $x \in \mathfrak{r}\big(\mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N)\big)$.
Man hat also $\operatorname{Ann}_P(N/\mathfrak{c}\cdot N) \subseteq \mathfrak{r}\big(\mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N)\big)$ und folglich auch
$\mathfrak{r}\big(\operatorname{Ann}_P(N/\mathfrak{c}\cdot N)\big) \subseteq \mathfrak{r}\big(\mathfrak{r}\big(\mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N)\big)\big) = \mathfrak{r}\big(\mathfrak{c} + \operatorname{Ann}_P(N)\big)$. □

15.3.5. *Folgerung.* $\ell_R\big(R/(\mathfrak{q} + \operatorname{Ann}_R(M))\big) < \infty$

Beweis. Man muß zeigen, daß alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}\big(R/(\mathfrak{q} + \operatorname{Ann}_R(M))\big)$ maximale Ideale von R sind:
Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}\big(R/(\mathfrak{q} + \operatorname{Ann}_R(M))\big)$ beliebig. Dann gilt $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} + \operatorname{Ann}_R(M) \Rightarrow$
$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{r}\big(\mathfrak{q} + \operatorname{Ann}_R(M)\big) \overset{\text{Hilfssatz}}{=} \mathfrak{r}\big(\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{q} \cdot M)\big) \supseteq \operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{q} \cdot M)$.
Es folgt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q} \cdot M)$. Nach Voraussetzung ist aber $\ell_R(M/\mathfrak{q} \cdot M) < \infty$, also besteht $\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q} \cdot M)$ nur aus maximalen Idealen von R und daher ist auch $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. □

15.3.6. Hauptsatz. *Sei $\{M_n\}$ eine $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung von M. (Siehe Def. 14.0.4.) Dann gilt:*
Es existiert ein Polynom $\psi \in \mathbb{Q}[X]$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\ell_R(M/M_n) = \psi(n) \qquad \text{für alle } n \geq n_0$$

ψ hängt nur von $\operatorname{gr}(M)$ als $\operatorname{gr}(R)$-Modul ab.
Es ist
$h := \operatorname{grad}(\psi) \leq$ Erzeugendenzahl von $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ als R-Modul.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} := \operatorname{Ann}_R(M)$, $R' := R/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{q}' := (\mathfrak{q} + \mathfrak{A})/\mathfrak{A}$ das Bild von $\mathfrak{q}$ bei dem kanonischen Homomorphismus $R \to R/\mathfrak{A} = R'$, also $\mathfrak{q}'^n$ das Bild von $\mathfrak{q}^n$. Fasse M auf als R'-Modul. Weil $\{M_n\}$ eine Filtrierung bzgl. der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung von R ist, gilt $\mathfrak{q}' \cdot M_n = \mathfrak{q} \cdot M_n \subseteq M_{n+1}$, also $\mathfrak{q}' \subseteq \operatorname{Ann}_{R'}(M_n/M_{n+1})$.
Sei $R'_0 := R'/\mathfrak{q}' = R/(\mathfrak{q} + \mathfrak{A})$. Dann ist also
$\ell_R(M_n/M_{n+1}) = \ell_{R'}(M_n/M_{n+1}) = \ell_{R'_0}(M_n/M_{n+1})$.
Ferner gilt für die $\mathfrak{q}'$-adische Filtrierung nach Beispiel 13.2.3. (2)
$\operatorname{gr}(R') = R'_0 \oplus \mathfrak{q}'/\mathfrak{q}'^2 \oplus \cdots = R'_0[\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}'^2] = R'_0[\mathrm{L}(x'_1), \ldots, \mathrm{L}(x'_r)]$, wobei
die $x'_i \pmod{\mathfrak{q}'^2}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}'^2$ als R'-Modul bilden. Dann ist also $r \leq$ Erzeugendenzahl von $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ als R-Modul. Insbesondere wird also $\operatorname{gr}(R')$ über $R'_0 = \operatorname{gr}_0(R')$ von r Elementen vom Grad 1 erzeugt. Es ist nach Folgerung 15.3.5. außerdem $\ell_{R'_0}(R'_0) = \ell_R(R'_0) < \infty$.
Nach Voraussetzung ist die Filtrierung $\{M_n\}$ von M eine $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung, d.h. es existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq m_0$ gilt $\mathfrak{q} \cdot M_n = M_{n+1}$. Das bedeutet in $\operatorname{gr}(M)$ über $\operatorname{gr}(R')$:
$(\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}'^2) \cdot \operatorname{gr}_n(M) = \operatorname{gr}_{n+1}(M)$ für alle $n \geq m_0$. Folglich ist
$\operatorname{gr}(M) = \operatorname{gr}(R')\langle M_0/M_1 \oplus \cdots \oplus M_{m_0}/M_{m_0+1}\rangle$ endlich erzeugt als $\operatorname{gr}(R')$-Modul, da alle M_i endlich erzeugte R-Moduln sind, weil R noethersch und M als R-Modul endlich erzeugt ist.
Sei nun $f(n) := \ell_R(M/M_n)$. Dann ist $(\Delta f)(n) = \ell_R(M/M_{n+1}) - \ell_R(M/M_n) = \ell_R(M_n/M_{n+1}) = \ell_{R'}(M_n/M_{n+1}) \overset{15.2.2.}{=} \varphi_{\operatorname{gr}(M)}(n)$ für alle $n \geq n_0$ für ein passendes $n_0 \in \mathbb{N}$. Dabei ist $\varphi_{\operatorname{gr}(M)}$ ein Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$ von einem Grad $\leq r - 1$.
Aus Satz 15.1.2. (8) folgt dann, daß es ein Polynom $\psi \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{grad}(\psi) \leq r$ und $f(n) = \psi(n)$ für alle $n \geq n_0$ gibt. Nach Konstruktion von ψ ist klar, daß ψ nur von $\operatorname{gr}(M)$ als $\operatorname{gr}(R)$-Modul abhängt, weil $f(n)$ aus $\operatorname{gr}(M)$ berechnet wurde. □

Aus dem Beweis sieht man noch:
Zusatz zu Satz 15.3.6. Es ist sogar
$\operatorname{grad}(\psi) \leq$ Erzeugendenzahl von $(\mathfrak{q} + \mathfrak{A})/(\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{A})$ als R-Modul
mit $\mathfrak{A} = \operatorname{Ann}_R(M)$.

Analog zu Korollar 15.2.3. folgt noch:

15.3.7. Korollar. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 15.3.6. gilt, falls $\psi \neq 0$ ist:*

$$\psi(X) = \sum_{i=0}^{h} a_i \cdot \binom{X}{i}$$

mit $h \leq$ Erzeugendenzahl von $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ als R-Modul, $a_i \in \mathbb{Z}$ für alle i, $a_h > 0$, also

$$\psi(X) = \frac{a_h}{h!} \cdot X^h + \text{niedrigere Potenzen von } X \ .$$

Wir zeigen nun, daß h und a_h unabhängig von der gewählten $\mathfrak{q}$-guten Filtrierung sind, sondern nur von $\mathfrak{q}$ und M abhängen. Dazu genügt es, eine beliebige $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung mit der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung zu vergleichen. Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

15.3.8. Definition. Sei $\{M_m\}$ eine $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung von M. Wir bezeichnen mit $\mathrm{P}(\{M_m\}, X)$ das Polynom $\psi(X)$ aus Hauptsatz 15.3.6.
Es heißt das „Hilbert-Samuel-Polynom“ von $\big(M, \{M_m\}\big)$.
Für den Spezialfall der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung von M schreiben wir dafür
$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X) := \mathrm{P}(\{\mathfrak{q}^m \cdot M\}, X)$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

15.3.9. Satz. *Es ist* $\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X) = \mathrm{P}(\{M_m\}, X) + A(X)$. *Dabei ist* $A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *mit höchstem Koeffizienten* ≥ 0 *und* $\operatorname{grad}\big(A(X)\big) < \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X)\big)$.

Beweis. Da $\{M_m\}$ eine $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung ist, gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$M_{m_0+n} = \mathfrak{q}^n \cdot M_{m_0} \subseteq \mathfrak{q}^n \cdot M \subseteq M_n$. Dann gilt für große n:
$\mathrm{P}(\{M_m\}, m_0 + n) \geq \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, n) \geq \mathrm{P}(\{M_m\}, n) \geq 0$.

(1) Wegen $\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, n) \geq \mathrm{P}(\{M_m\}, n) \geq 0$ für große n folgt
$A(n) := \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, n) - \mathrm{P}(\{M_m\}, n) \geq 0$ für große n.
Also ist der höchste Koeffizient von $A(X)$ nicht negativ und
$\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X)\big) \geq \operatorname{grad} \mathrm{P}\big(\{M_m\}, X\big)$.

(2) Wegen $\mathrm{P}(\{M_m\}, m_0 + n) \geq \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, n) \geq 0$ für große n ist auch
$\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X)\big) \leq \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}(\{M_m\}, X)\big)$,
insgesamt also $\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X)\big) = \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}(\{M_m\}, X)\big) =: h$

(3) Sei also $\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X) = c_h \cdot X^h + \ldots$ und $\mathrm{P}(\{M_m\}, X) = b_h \cdot X^h + \ldots$ mit $c_h > 0$, $b_h > 0$. Dann ist
$b_h \cdot (m_0 + n)^h + \cdots \geq c_h \cdot n^h + \cdots \geq b_h \cdot n^h + \ldots$ für große n. Multiplikation dieser Ungleichungen mit $\frac{1}{n^h}$ ergibt:
$b_h +$ Nullfolge $\geq c_h +$ Nullfolge $\geq b_h +$ Nullfolge.
für $n \to \infty$ erhält man daraus:
$c_h = b_h$ und folglich $\operatorname{grad}\big(A(X)\big) \leq h - 1$.

□

15.3.10. Korollar. $h := \operatorname{grad}\big(P(\{M_m\}, X)\big)$ *und*
$a_h :=$ *der höchste Koeffizient von* $\mathrm{P}(\{M_m\}, X)$ *in der Binomialdarstellung von Korollar 15.3.7. sind unabhängig von der Auswahl der $\mathfrak{q}$-guten Filtrierung von M, hängen also nur von $\mathfrak{q}$ und M ab.*

Wir definieren daher:

15.3.11. Definition. Mit den Bezeichnungen von Korollar 15.3.10. definieren wir:
$\mathrm{e}(M,\mathfrak{q}) := a_h \in \mathbb{N}_0$ heißt die „Multiplizität von M bzgl. $\mathfrak{q}$“.
$\mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) := h := \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,X)\big) \in \mathbb{N}_0$ heißt die „Höhe von M bzgl. $\mathfrak{q}$“.

Aus den Definitionen ergibt sich sofort:

15.3.12. *Anmerkung.* Man hat für eine beliebige $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung von M:

$$\mathrm{P}(\{M_n\},X) = \frac{e}{h!}\cdot X^h + \text{niedrigere Potenzen von } X \text{ mit } e := \mathrm{e}(M,\mathfrak{q}),\ h := \mathrm{h}(M,\mathfrak{q})\,.$$

15.3.13. *Anmerkung.* Seien
$\widehat{R}$ die $\mathfrak{q}$-adische Komplettierung von R,
$\hat{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\cdot\widehat{R}$ der topologische Abschluß von $\mathfrak{q}$ in $\widehat{R}$ (Korollar 14.0.11.),
$\widehat{M}$ die $\mathfrak{q}$-adische Komplettierung von M, aufgefaßt als $\widehat{R}$-Modul. Dann ist
$\mathrm{P}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\widehat{M},X) = \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,X)$, insbesondere also
$\mathrm{e}(\widehat{M},\hat{\mathfrak{q}}) = \mathrm{e}(M,\mathfrak{q})$ und $\mathrm{h}(\widehat{M},\hat{\mathfrak{q}}) = \mathrm{h}(M,\mathfrak{q})$.

Beweis. Zunächst ist $\widehat{R}$ nach Korollar 14.0.12. ein noetherscher Ring. Ferner ist nach Korollar 14.0.11. (1) $\widehat{M} = \widehat{R}\cdot\psi_M(M)$ endlich erzeugt als $\widehat{R}$-Modul, weil M endlich erzeugt ist als R-Modul. Außerdem ist nach Korollar 14.0.11 (5) zusammen mit Satz 12.3.1. (6a) $\widehat{M}/\hat{\mathfrak{q}}\cdot\widehat{M} = \widehat{M}/\widehat{\mathfrak{q}\cdot M} \simeq M/\mathfrak{q}\cdot M$ ein R-Modul endlicher Länge, also erst recht als $\widehat{R}$-Modul von endlicher Länge, so daß die General-Voraussetzungen von Abschnitt 15.3 auch für $\widehat{R}$, $\hat{\mathfrak{q}}$ und $\widehat{M}$ erfüllt sind.
Allgemeiner ist nach Korollar 14.0.11 (5) $\widehat{\mathfrak{q}^n\cdot M} = \hat{q}^n\cdot\widehat{M}$, so daß die Komplettierung der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung von M die $\hat{\mathfrak{q}}$-adische Filtrierung von $\widehat{M}$ ist. Nach Satz 13.2.4. ist dann $\operatorname{gr}(\widehat{M}) \simeq \operatorname{gr}(M)$ und $\operatorname{gr}(\widehat{R}) \simeq \operatorname{gr}(R)$. Andererseits hängen $\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,X)$ und $\mathrm{P}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\widehat{M},X)$ nach Hauptsatz 15.3.6 nur von $\operatorname{gr}(M)$ bzw. $\operatorname{gr}(\widehat{M})$ ab, also sind beide Polynome identisch. □

15.3.14. *Anmerkung.* Sei M separiert in der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie. Dann gilt:

$$\mathrm{h}(M) = 0 \iff \ell_R(M) < \infty\,.$$

In diesem Fall ist dann $\mathrm{e}(M,\mathfrak{q}) = \ell_R(M)$

Beweis. $h = 0 \Leftrightarrow$ Für alle großen $n \geq n_0$ ist $M_n = M_{n+1}$. Da nach Voraussetzung $\bigcap M_n = (0)$ ist, ist das äquivalent zu $M_n = (0)$ für alle $n \geq n_0$, d.h.
$\ell_R(M) = \ell_R(M/M_{n_0}) < \infty$. □

15.3.15. Satz (Additivität von $\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}$)**.** *Sei $0 \to N \to M \to L \to 0$ eine exakte Folge von endlich erzeugten R-Moduln, und sei $\ell_R(M/\mathfrak{q}\cdot M) < \infty$. Dann ist $\ell_R(N/\mathfrak{q}\cdot N) < \infty$ und $\ell_R(L/\mathfrak{q}\cdot L) < \infty$ und man hat*

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,X) = \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(N,X) + \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(L,X) - A(X),$$

mit einem Polynom $A(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Dabei ist $\operatorname{grad}(A(X)) < \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(N,X)\big)$*, und der höchste Koeffizient von $A(X)$ ist ≥ 0.*

Beweis. Sei $N_n := \mathfrak{q}^n\cdot M \cap N$ die von der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung von M induzierte Filtrierung von N. Nach dem Satz von Artin-Rees 14.0.6. ist dies eine $\mathfrak{q}$-gute Filtrierung von N. Ferner ist $0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n\cdot M \to L/\mathfrak{q}^n\cdot L \to 0$ exakt, also
$\ell_R(M/\mathfrak{q}^n\cdot M) = \ell_R(N/N_n) + \ell_R(L/\mathfrak{q}^n\cdot L)$ und für große n folglich
$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,n) = \mathrm{P}(\{N_n\},n) + \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(L,n)$, also auch, da dies für unendlich viele n gilt,

$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,X) = \mathrm{P}(\{N_n\},X) + \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(L,X)$.
Nach Satz 15.3.9. ist aber $\mathrm{P}(\{N_n\},X) = \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(N,X) - A(X)$, wobei
$\operatorname{grad}\big(A(X)\big) < \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(N,X)\big)$ und der höchste Koeffizient von $A(X) \geq 0$ ist. □

15.3.16. Korollar. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 15.3.15. gilt:*

(1) $\mathrm{h}(N,\mathfrak{q}) \leq \mathrm{h}(M,\mathfrak{q})$ *und* $\mathrm{h}(L,\mathfrak{q}) \leq \mathrm{h}(M,\mathfrak{q})$.
(2) *Falls* $\mathrm{h}(N,\mathfrak{q}) = \mathrm{h}(L,\mathfrak{q})$ *ist, gilt*
$\mathrm{e}(M,\mathfrak{q}) = \mathrm{e}(N,\mathfrak{q}) + \mathrm{e}(L,\mathfrak{q})$ *und*
$\mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) = \mathrm{h}(N,\mathfrak{q}) = \mathrm{h}(L,\mathfrak{q})$.
(3) *Falls* $\mathrm{h}(N,\mathfrak{q}) < \mathrm{h}(L,\mathfrak{q})$ *ist, gilt*
$\mathrm{e}(M,\mathfrak{q}) = \mathrm{e}(L,\mathfrak{q})$ *und*
$\mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) = \mathrm{h}(L,\mathfrak{q})$.
(4) *Falls* $\mathrm{h}(N,\mathfrak{q}) > \mathrm{h}(L,\mathfrak{q})$ *ist, gilt*
$\mathrm{e}(M,\mathfrak{q}) = \mathrm{e}(N,\mathfrak{q})$ *und*
$\mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) = \mathrm{h}(N,\mathfrak{q})$.

Beweis. Folgt direkt aus Satz 15.3.15., wenn man beachtet, daß die höchsten Koeffizienten von $\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(N,X)$ und von $\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(L,X)$ nach Korollar 15.3.7. nichtnegativ sind, sich also nicht gegenseitig wegheben können. □

15.3.17. Korollar. *Sei $r \in R$, $T_r := \{x \mid x \in M, r\cdot x = 0\}$ die „r-Torsion“ von M. Dann gilt:*
$\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M/r\cdot M,X) - \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(T_r,X)\big) \leq \mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) - 1$.
Insbesondere:
Falls r Nichtnullteiler für M ist, gilt:
$\mathrm{h}(M/r\cdot M,\mathfrak{q}) \leq \mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) - 1$.

Beweis. Falls r ein Nichtnullteiler für M ist, ist $T_r = 0$ und daher auch
$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(T_r,X) = 0$, also ist die zweite Behauptung tatsächlich ein Spezialfall der ersten.
Diese ist also zu zeigen:
Betrachte die exakten Folgen
$0 \to r\cdot M \to M \to M/r\cdot M \to 0$ kanonisch und
$0 \to T_r \to M \xrightarrow{\mu_r} r\cdot M \to 0$, wobei μ_r die Multiplikation mit r bezeichnet.
Nach Satz 15.3.15 gibt es dann zwei Polynome $A_1(X)$ und $A_2(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$ mit
$\operatorname{grad}\big(A_1(X)\big) \leq \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(r\cdot M,X)\big) - 1 = \mathrm{h}(r\cdot M,\mathfrak{q}) - 1$ und
$\operatorname{grad}\big(A_2(X)\big) \leq \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(T_r,X)\big) - 1 = \mathrm{h}(T_r,\mathfrak{q}) - 1$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,X) - \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(r\cdot M,X) &= \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M/r\cdot M,X) - A_1(X) \\ \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M,X) - \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(r\cdot M,X) &= \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(T_r,X) - A_2(X) \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Subtraktion der beiden Gleichungen
$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M/r\cdot M,X) - \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(T_r,X) = A_1(X) - A_2(X)$.
Nach Korollar 15.3.16. (1) hat man ferner
$\mathrm{h}(r\cdot M,\mathfrak{q}) \leq \mathrm{h}(M,\mathfrak{q})$, ebenso auch
$\mathrm{h}(T_r,\mathfrak{q}) \leq \mathrm{h}(M,\mathfrak{q})$ und folglich
$\operatorname{grad}\big(A_1(X) - A_2(X)\big) \leq \mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) - 1$. □

16. Dimensionstheorie noetherscher Ringe

16.1. **Höhe und Dimension (Cohöhe) von Idealen.** Nach Definition ist die Krulldimension eines Ringes R

$$\dim R := \sup\{r \mid \text{ Es existiert in } R \text{ eine Primidealkette der Länge } r\}$$

also, wenn $\dim R$ endlich ist, die „maximale Länge einer Primidealkette“ in R.
Den Primidealketten $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r \subset R$ der Länge r von R entsprechen eineindeutig die Primidealketten $(\bar{0}) = \bar{\mathfrak{p}}_0 \subset \bar{\mathfrak{p}}_1 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_r \subset \bar{R} := R/\mathfrak{p}_0$ mit $\bar{\mathfrak{p}}_i := \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_0$ für $i = 1, \ldots, r$, wobei jetzt $\bar{R}$ ein Integritätsbereich ist. Diesen Ketten entsprechen wiederum eineindeutig die Ketten $(0) = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{P}_r \subset \bar{R}_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ in dem lokalen Integritätsbereich $\bar{R}_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$. Daher kann man oft Fragen über Primidealketten in einem beliebigen Ring R auf den Fall eines lokalen Integritätsbereichs zurückführen.

16.1.1. Definition. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ein Primideal von R

$$\text{„Höhe“ von } \mathfrak{p} = \qquad \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \dim R_{\mathfrak{p}} \quad \leq \infty\,,$$
$$\text{„Dimension“ oder „Cohöhe“ von } \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{p} = \operatorname{coht}(\mathfrak{p}) := \dim R/\mathfrak{p} \leq \infty\,,$$

wobei auf der rechten Seite die Krulldimension der Ringe gemeint ist.

16.1.2. *Anmerkung.*
$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\{r \mid \text{Es existiert eine Primidealkette } \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}\}$
$\dim \mathfrak{p} = \sup\{s \mid \text{Es existiert eine Primidealkette } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_s \subset R\}$
Es gilt also stets

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim \mathfrak{p} \leq \dim R$$

aber i.a. *nicht* „=“ ! (Gegenbeispiel von Nagata im Fall eines nullteilerfreien lokalen Rings [10]). Jedoch gilt die Gleichheit für nullteilerfreie affine k-Algebren:

16.1.3. Satz. *Sei k ein Körper, A eine nullteilerfreie affine k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann gilt:*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim \mathfrak{p} = \dim A = \dim \frac{A}{k} := \mathit{trdeg}\, \frac{A}{k}\,.$$

Beweis. Als Folgerung aus der Noetherschen Normalisierungslemma sieht man, daß sich *jede* Primidealkette von A zu einer Kette der Länge $r := \dim \frac{A}{k}$ verlängern läßt, und dies ist dann eine Kette maximaler Länge in A. Angewandt auf die Kette $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subset A$ erhält man die Behauptung. □

16.1.4. Definition. Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal $\neq R$ von R.

$$\text{„Höhe“ von } \mathfrak{a} = \qquad \operatorname{ht}(\mathfrak{a}) := \inf\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\} \quad \leq \infty$$
$$\text{„Dimension“ oder „Cohöhe“ von } \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{a} = \operatorname{coht}(\mathfrak{a}) := \sup\{\dim \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\} \leq \infty$$

16.1.5. *Anmerkung.*

(1) Falls $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein Primideal von R ist, stimmen die Definitionen 16.1.4. mit den Definitionen 16.1.1. überein.
(2) $\operatorname{coht}(\mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{a} = \dim R/\mathfrak{a}$.

Der folgende Satz ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen:

16.1.6. Satz. *Seien $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ Ideale von R. Dann gilt:*

(1) $\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{b})$ *und* $\dim \mathfrak{a} \geq \dim \mathfrak{b}$.
(2) *Falls $\mathfrak{b}$ in* keinem *minimalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$ enthalten ist, gilt* $\dim \mathfrak{a} \geq \dim \mathfrak{b} + 1$.

16.2. **Die Dimension eines Moduls.**

16.2.1. Definition. Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

$$\dim_R M := \dim(R/\operatorname{Ann}_R(M)) \text{ (die Krulldimension des Rings)}$$

16.2.2. *Anmerkung.*

(1) Nach Anmerkung 16.1.5 (2) ist
$\dim_R M = \dim \operatorname{Ann}_R(M)$.

(2) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist
$\dim_R M = \sup\{\dim \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)\}$;
denn in diesem Fall gilt $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(M) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

(3) Faßt man $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ als R-Modul auf, so ist offenbar
$\operatorname{Ann}_R\big(R/\operatorname{Ann}_R(M)\big) = \operatorname{Ann}_R(M)$. Also ist
$\dim_R\big(R/\operatorname{Ann}_R(M)\big)$ als R-Modul $=$
$\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(M)\big)$ Krull-Dimension als Ring.
Speziell im Fall $M = R$ ist $\operatorname{Ann}_R(R) = (0)$, also ist
$\dim_R(R) = \dim R$ die Krulldimension von R.

16.2.3. *Anmerkung.* Bei der Bildung des Supremums in Anmerkung 16.2.2 (2) kann man sich offenbar auf die minimalen Primideale aus $\operatorname{Supp}(M)$ beschränken, weil jedes Primideal aus $\operatorname{Supp}(M)$ ein solches enthält.

16.3. **Moduln über semilokalen Ringen.** Sei R ein semilokaler noetherscher Ring. Dann hat R endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t$.
Sei $\mathfrak{J} := \bigcap_{i=1}^{t} \mathfrak{m}_i$ das Jacobson-Radikal von R.

16.3.1. Definition. Ein Ideal $\mathfrak{q}$ von R heißt „definierendes Ideal von R“ $\Leftrightarrow$ Es existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{J}^r$.

16.3.2. *Anmerkung.* Insbesondere ist R mit der $\mathfrak{q}$-adischen Topologie für ein definierendes Ideal $\mathfrak{q}$ von R ein Zariski-Ring. Das Radikal von $\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{J}$. Also definieren alle definierenden Ideale von R dieselbe Topologie auf beliebigen R-Moduln M, die „kanonische Topologie“ von M als R-Modul (Definition 14.0.17.).

16.3.3. Satz. *Sei $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{J}$. Es gilt:*
$\mathfrak{q}$ ist ein definierendes Ideal von $R \iff \ell_R(R/\mathfrak{q}) < \infty$.

Beweis. Da die $\mathfrak{m}_i$, also auch die $\mathfrak{m}_i^r$, paarweise fremd sind, gilt nach dem chinesischen Restsatz:
$R/\mathfrak{J}^r = \bigtimes_{i=1}^{t} R/\mathfrak{m}_i^r \underset{R}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{t} R/\mathfrak{m}_i^r$. Es ist $\ell_R(R/\mathfrak{m}_i) = 1$, also nach Folgerung 15.3.2. $\ell_R(R/\mathfrak{m}_i^r) < \infty \Rightarrow \ell_R(R/\mathfrak{J}^r) = \sum_{i=1}^{t} \ell_R(R/\mathfrak{m}_i^r) < \infty$ für alle $r \in \mathbb{N}$.
Sei nun $\mathfrak{q}$ ein definierendes Ideal von R. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $R \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{J}^r$ also ist $\ell_R(R/\mathfrak{q}) \leq \ell_R(R/\mathfrak{J}^r) < \infty$.
Umgekehrt: Sei $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{J}$ mit $\ell_R(R/\mathfrak{q}) < \infty$. Betrachte die Kette:
$R/\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{J} \cdot (R/\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{J}^2 \cdot (R/\mathfrak{q}) \ldots$. Da $\mathfrak{J}^\lambda \cdot (R/\mathfrak{q})$ ein endlich erzeugter R-Modul ist, folgt nach dem Lemma von Krull-Nakayama aus $\mathfrak{J}^\lambda \cdot (R/\mathfrak{q}) \neq (0)$, daß $\mathfrak{J}^{\lambda+1} \cdot (R/\mathfrak{q}) \neq \mathfrak{J}^\lambda \cdot (R/\mathfrak{q})$ ist. Also sind alle Inklusionen echte Inklusionen, solange $\mathfrak{J}^\lambda \cdot (R/\mathfrak{q}) \neq (0)$ ist. Da andererseits $\ell_R(R/\mathfrak{q}) < \infty$ ist, muß die Kette abbrechen, d.h. es muß ein r geben mit $\mathfrak{J}^r \cdot (R/\mathfrak{q}) = (0)$, also $\mathfrak{J}^r \subseteq \mathfrak{q}$. $\square$

16.3.4. *Anmerkung.* Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, $\mathfrak{q}$ ein definierendes Ideal von R. Dann ist nach Satz 16.3.3. $\ell_R(R/\mathfrak{q}) < \infty$, also auch $\ell_R(M/\mathfrak{q}\cdot M) < \infty$. (Stelle M dar als homomorphes Bild eines endlich erzeugten freien R-Moduls. Dann ist $M/\mathfrak{q}\cdot M$ homomorphes Bild einer endlichen direkten Summe von R-Moduln isomorph zu $R/\mathfrak{q}$.) Also gibt es nach Hauptsatz 15.3.6. mit Definition 15.3.8. ein Polynom $\mathrm{P}_\mathfrak{q}(M,X)$ mit $\ell_R(M/\mathfrak{q}^n\cdot M) = \mathrm{P}_\mathfrak{q}(M,n)$ für große n. Es gilt:
$\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_\mathfrak{q}(M,X)\big)$ ist unabhängig von dem gewählten definierenden Ideal $\mathfrak{q}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_\mathfrak{q}(M,X)\big) = \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_\mathfrak{J}(M,X)\big)$ ist für das Jacobson-Radikal $\mathfrak{J}$ von R. Wegen $\mathfrak{J}\supseteq\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{J}^r$ gilt für große n
$\mathrm{P}_\mathfrak{J}(M,n) \le \mathrm{P}_\mathfrak{q}(M,n) \le \mathrm{P}_\mathfrak{J}(M,r\cdot n)$. Wie beim Beweis von Satz 15.3.9. schließt man weiter
$\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_\mathfrak{J}(M,X)\big) \le \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_\mathfrak{q}(M,X)\big) \le \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_\mathfrak{J}(M,X)\big)$, also gilt die Gleichheit.
(Den Schluß über die Gleichheit der höchsten Koeffizienten aus dem Beweis von Satz 15.3.9. kann man hier nicht machen, weil hier $r\cdot n$ statt m_0+n steht!) □

Es ist daher sinnvoll zu definieren:

16.3.5. Definition. Sei R ein semilokaler noetherscher Ring, $\mathfrak{q}$ ein definierendes Ideal von R und M ein endlich erzeugter R-Modul.

$$\mathrm{d}(M) := \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_\mathfrak{q}(M)\big) = \mathrm{h}(M,\mathfrak{q})$$

(Siehe Definition 15.3.11, unabhängig von $\mathfrak{q}$ nach Anmerkung 16.3.4).

Eine weitere interessante Zahl ist die folgende:

16.3.6. Definition. Sei R ein semilokaler noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. $\mathfrak{J}$ bezeichne das Jacobson-Radikal von R.

$$\mathrm{s}(M) := \min\{n \mid n\in\mathbb{N},\ \text{ex. } x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{J} \text{ so daß } \ell_R\big(M/(x_1,\dots,x_n)\cdot M\big) < \infty\}$$

16.3.7. *Anmerkung.* Da $\mathfrak{J}$ endlich erzeugt ist und $\ell_R(M/\mathfrak{J}\cdot M) < \infty$ ist (siehe Satz 16.3.3.), ist jedenfalls $\mathrm{s}(M) \le$ Erzeugendenzahl von $\mathfrak{J} < \infty$.

16.3.8. Hauptsatz. *Sei R ein noetherscher semilokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Es gilt:*

$$\dim_R M = \mathrm{d}(M) = \mathrm{s}(M) < \infty\,.$$

Zum Beweis zeigen wir zunächst:

16.3.9. Hilfssatz. *Sei R ein noetherscher semilokaler Ring,*
$\mathfrak{J}$ sein Jacobson-Radikal und $x\in\mathfrak{J}$. Es gilt:

(1) $\mathrm{s}(M) \le \mathrm{s}(M/x\cdot M)+1$ *(oder auch* $\mathrm{s}(M/x\cdot M) \ge \mathrm{s}(M)-1$*).*
(2) *Seien $\mathfrak{p}_i\in\operatorname{Supp}(M)$ die Primideale mit $\dim\mathfrak{p}_i = \dim_R M$ und sei $x\notin\bigcup\mathfrak{p}_i$. Dann ist $\dim_R(M/x\cdot M) \le \dim_R M - 1$. (Vgl. Korollar 16.3.15)*

Beweis. (1): Sei $M' := M/x\cdot M$ und $t := s(M')$. Dann gibt es $x_1,\dots x_t\in\mathfrak{J}$ mit $\ell_R\big(M'/(x_1,\dots,x_t)\cdot M'\big) < \infty$. Es ist $M/(x_1,\dots,x_t,x)\cdot M = M'/(x_1,\dots,x_t)\cdot M'$ und folglich $\ell_R\big((M/(x_1,\dots,x_r,x)\cdot M\big) = \ell_R\big(M'/(x_1,\dots,x_t)\cdot M'\big) < \infty$. Also ist $s(M)\le t+1$. □
(2): Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von R. Aus der natürlichen exakten Folge
$M_\mathfrak{p} \to (M/x\cdot M)_\mathfrak{p} \to 0$ folgt $\operatorname{Supp}(M) \supseteq \operatorname{Supp}(M/x\cdot M)$.
Sei nun $x\notin\mathfrak{p}$. Dann ist $\frac{x}{1}$ Einheit in $R_\mathfrak{p}$ und daher $(M/x\cdot M)_\mathfrak{p} = (0)$, also

$\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(M/x\cdot M)$. Die $\mathfrak{p}_i$ von (2) liegen also *nicht* in $\operatorname{Supp}(M/x\cdot M)$. Daher ist $\dim_R(M/xM) = \sup\{\dim \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/xM)\} \leq \sup\{\dim \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)\} - 1 = \dim_R M - 1$; denn die $\mathfrak{p}$ mit $\dim \mathfrak{p} = \dim_R M$ fehlen ja gerade in $\operatorname{Supp}(M/x\cdot M)$. □

Beweis von Hauptsatz 16.3.8.

1) $\dim_R M \overset{!}{\leq} \mathrm{d}(M)$: Induktion nach $\mathrm{d}(M)$. Induktionsanfang bei $\mathrm{d}(M) = 0$. Dann ist $\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{J}}(M, X)\big) = 0$. Ferner ist nach Satz 14.0.14. (2) M separiert in der $\mathfrak{J}$-adischen Topologie und folglich gilt nach Anmerkung 15.3.14. $\ell_R(M) < \infty$. Daher besteht $\operatorname{Supp}(M)$ nur aus maximalen Idealen von R. Dann ist $\dim \mathfrak{p} = 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$, d.h. $\dim_R M = 0$, q.e.d.
Sei nun $\mathrm{d}(M) \geq 1$ beliebig und sei die Behauptung für alle R-Moduln mit kleinerem d schon gezeigt. Sei $\mathfrak{p}_0$ ein minimales Primideal aus $\operatorname{Supp}(M)$.
Behauptung $\dim \mathfrak{p}_0 \leq \mathrm{d}(M)$.
(Wegen Anmerkung 16.2.3. folgt daraus $\dim_R M \leq \mathrm{d}(M)$. q.e.d.)
Beweis: Nach [2, Cor.3.6] ist $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Ass}(M)$, und weil M noethersch ist, gibt es einen Untermodul V von M mit $V \simeq R/\mathfrak{p}_0$ als R-Modul ([2, Th. 2.26.(5)]). Nach 15.3.16. (1) und Definition 16.3.5. ist $\mathrm{d}(V) \leq \mathrm{d}(M)$. Nach Definition 16.2.1 und Definition 16.1.1. ist ferner $\dim_R V = \dim \mathfrak{p}_0$.
Falls also die Behauptung für V gezeigt ist, folgt
$\dim \mathfrak{p}_0 = \dim_R V \leq \mathrm{d}(V) \leq \mathrm{d}(M)$, q.e.d.
Sei also $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ eine Primidealkette in R.
Behauptung: $n \leq \mathrm{d}(V)$.
Beweis: Falls $n = 0$ ist, ist das klar. Sei also $n \geq 1$. Dann gibt es ein $r \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$. Wegen $r \notin \mathfrak{p}_0$ ist r ein Nichtnullteiler für $V \simeq R/\mathfrak{p}_0$. Nach Korollar 15.3.17 folgt dann $\mathrm{d}(V/r\cdot V) \leq \mathrm{d}(V) - 1 \leq d(M) - 1$. Die Induktionsvoraussetzung angewandt auf $V/r\cdot V$ liefert $\dim(V/r\cdot V) \leq \mathrm{d}(V/r\cdot V)$.
Wegen $r \in \mathfrak{p}_1$ ist ferner $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ eine Primidealkette der Länge $n-1$ aus $\operatorname{Supp}(V/r\cdot V)$; denn es ist $V/r\cdot V \simeq R/(\mathfrak{p}_0, r)$. Also ist $\dim_R(V/r\cdot V) \geq n - 1$.
Insgesamt hat man dann
$n - 1 \leq \dim_R(V/r\cdot V) \leq \mathrm{d}(V/r\cdot V) \leq \mathrm{d}(V) - 1$ und daher $n \leq \mathrm{d}(V)$. q.e.d.

2) $\mathrm{d}(M) \overset{!}{\leq} \mathrm{s}(M)$: Sei $t := \mathrm{s}(M)$. Dann existieren $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{J}$ mit
$\ell_R\big(M/(x_1, \ldots, x_t)\big) < \infty$. Sei $\mathfrak{x} := (x_1, \ldots, x_t)$ und $\mathfrak{A} := \operatorname{Ann}_R(M)$. Wir zeigen zunächst:
$\ell_R\big(R/\mathfrak{x} + (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J})\big) \overset{!}{<} \infty$.
Beweis: Da $\ell_R(M/\mathfrak{x}\cdot M) < \infty$ ist, folgt aus Folgerung 15.3.5. $\ell_R\big(R/(\mathfrak{x} + \mathfrak{A})\big) < \infty$. Also ist jedes Primoberideal von $\mathfrak{x} + \mathfrak{A}$ ein maximales Ideal von R.
Sei nun $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{x} + (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J})$. Dann ist also $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{J}$ und daher $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{J}$.
Falls $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{A}$ gilt, gilt auch $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{x} + \mathfrak{A}$, da ja $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{x} + (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J})$ nach Annahme. Also ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von R.
Falls $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{J}$ gilt, ist $\mathfrak{p}$ auch ein maximales Ideal von R. Also sind alle Primoberideale von $\mathfrak{x} + (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J})$ maximale Ideale von R und somit ist $\ell_R\big(R/(\mathfrak{x} + (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J}))\big) < \infty$. q.e.d.
Aus Satz 16.3.3. folgt dann, daß $\mathfrak{q} := \mathfrak{x} + (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J})$ ein definierendes Ideal für R ist, also ist nach Definition 16.3.5.
$\mathrm{d}(M) = \operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(M, X)\big)$.
Betrachte den kanonischen Homomorphismus $R \to R/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J}) =: R'$. Seien $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{x}'$ die Bilder von $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{x}$. Aber $\mathfrak{x}'$ ist auch das Bild von $\mathfrak{x} + (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J})$, also ist

$\ell_{R'}(R'/\mathfrak{x}') = \ell_R\big(R/(\mathfrak{x}+(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{J}))\big) < \infty$ und $\mathfrak{x}' \subseteq \mathfrak{J}' =$ Jacobson-Radikal von R'. Aus Satz 16.3.3 folgt dann, daß $\mathfrak{x}'$ ein definierendes Ideal für R' ist. Ferner ist $\mathfrak{x}'$ von den t Bildern $x_1', \ldots, x_t'$ der $x_1, \ldots, x_t$ erzeugt. Wegen $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{A} = \mathrm{Ann}_R(M)$ kann man M in natürlicher Weise als R'-Modul auffassen. Wir bezeichnen ihn dann mit M'. Man hat:
$\ell_R(M/\mathfrak{q}^n\cdot M) = \ell_R(M/\mathfrak{x}^n\cdot M) = \ell_{R'}(M'/\mathfrak{x}'^n\cdot M')$. Also ist $\mathrm{P}_\mathfrak{q}(M,X) = \mathrm{P}_{\mathfrak{x}'}(M',X)$. Da $\mathfrak{x}'$ von t Elementen erzeugt wird, folgt nach Hauptsatz 15.3.6 $\operatorname{grad}\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{x}'}(M',X)\big) \le t$. Also ist $\mathrm{d}(M) \le \mathrm{s}(M)$. q.e.d.

3) $\mathrm{s}(M) \le \dim_R M$: Nach 1) weiß man schon, daß $\dim_R M < \infty$ ist, weil ja $\mathrm{d}(M) < \infty$ ist. Man kann also Induktion nach $\dim_R M$ machen.
Induktionsanfang $\dim_R M = 0$: Sei $\mathfrak{A} := \mathrm{Ann}_R(M)$. Für alle $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{A}$ ist dann $\dim\mathfrak{p} = 0$, also sind alle diese $\mathfrak{p}$ maximale Ideale von R. Weil M endlich erzeugt ist, ist $\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{A}\}$. Also besteht $\mathrm{Supp}(M)$ nur aus maximalen Idealen, und daher ist $\ell_R(M) < \infty$. Es folgt $\mathrm{s}(M) = 0$.
Sei nun $\dim_R M \ge 1$ und die Behauptung sei für alle R-Moduln N mit $\dim_R N < \dim_R M$ schon gezeigt. Seien $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M)$ diejenigen Primideale, für die $\dim\mathfrak{p}_i = \dim_R M$ ist. Dann sind alle diese $\mathfrak{p}_i$ minimal in $\mathrm{Supp}(M)$ also auch in $\mathrm{Ass}(M)$ enthalten ([2, Cor.3.6]). Da M noethersch ist, ist $\mathrm{Ass}(M)$ endlich, also gibt es auch nur endlich viele solche $\mathfrak{p}_i$. Wegen $\dim\mathfrak{p}_i = \dim_R M \ge 1$ sind diese $\mathfrak{p}_i$ nicht maximal in R. Also gilt $\mathfrak{J} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ und daher auch $\mathfrak{J} \not\subseteq \bigcup\mathfrak{p}_i$. Es existiert daher ein $x \in \mathfrak{J}$ mit $x \notin \bigcup\mathfrak{p}_i$. Aus Hilfssatz 16.3.9. folgt dann $\mathrm{s}(M/x\cdot M) \ge \mathrm{s}(M) - 1$ und $\dim_R(M/x\cdot M) \le \dim(M) - 1$. Das ergibt
$\mathrm{s}(M) - 1 \le \mathrm{s}(M/x\cdot M) \overset{\text{Induktionsvor.}}{\le} \dim_R(M/x\cdot M) \le \dim_R M - 1$, also
$\mathrm{s}(M) \le \dim_R M$. □

16.3.10. Korollar. *Sei R ein noetherscher semilokaler Ring, $\mathfrak{q}$ ein definierendes Ideal von R und $\widehat{R}$ bzw. $\widehat{M}$ die $\mathfrak{q}$-adische Komplettierung von R bzw. M. Dann gilt*

$$\dim_{\widehat{R}} \widehat{M} = \dim_R M\,.$$

Beweis. Nach Anmerkung 15.3.13 und Hauptsatz 16.3.8 ist
$\dim_{\widehat{R}} \widehat{M} = \mathrm{d}(\widehat{M}) = \mathrm{h}(\widehat{M}, \hat{\mathfrak{q}}) = \mathrm{h}(M,\mathfrak{q}) = \mathrm{d}(M) = \dim_R M$. □

16.3.11. Korollar. *Sei R ein noetherscher semilokaler Ring. Dann ist* $\dim R < \infty$. *Genauer:* $\dim R$ = *Minimalzahl der Elemente, die ein definierendes Ideal von R erzeugen.*

Beweis. Nach dem Hauptsatz 16.3.8. ist $\dim R = \mathrm{s}(R) < \infty$, und $\mathrm{s}(R)$ ist nach Definition 16.3.6. und Satz 16.3.3. gerade die im Korollar behauptete Zahl. □

16.3.12. Korollar. *Die Primideale eines noetherschen Ringes genügen der absteigenden Kettenbedingung (Minimalbedingung).*

Beweis. Sei $R \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \ldots$ eine absteigende Primidealkette in R. Sei $S := R_{\mathfrak{p}_1}$. Die Primideale $\mathfrak{p}_i$ entsprechen vermöge $\mathfrak{P}_i := S\cdot\mathfrak{p}_i$ eineindeutig den Primidealen der Kette $S \supset \mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{P}_2 \supset \ldots$. Nun ist S noethersch und lokal. Nach Korollar 16.3.11. ist $\dim S < \infty$. Also ist die Primidealkette $S \supset \mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{P}_2 \supset \ldots$ endlich und folglich ist auch die Kette $R \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \ldots$ endlich. □

16.3.13. Korollar. *Sei R ein noetherscher Ring, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R und $n \in \mathbb{N}$. Es sind äquivalent:*

(1) $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$.
(2) *Es existiert ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *in* R *mit* n *Erzeugenden, so daß* $\mathfrak{p}$ *ein minimales Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Beweis. (2)⇒(1): $\mathfrak{a}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ ist primär zu $\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ in $R_{\mathfrak{p}}$, also ist $\mathfrak{a}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ definierendes Ideal des noetherschen lokalen Ringes $R_{\mathfrak{p}}$. Nach Korollar 16.3.11. ist dann $\dim R_{\mathfrak{p}} \leq n$, weil $\mathfrak{a}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ von n Elementen erzeugt wird. Nach Definition 16.1.1. ist aber $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R_{\mathfrak{p}}$.
(1)⇒(2): Aus $\dim R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$ folgt nach Korollar 16.3.11., daß es Elemente $\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_n}{s} \in \mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ mit $x_i \in R$ und $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ gibt, so daß diese ein definierendes Ideal von $R_{\mathfrak{p}}$ erzeugen. Eine Potenz von $\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ liegt dann in diesem Ideal, also ist $\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ ein minimales Primoberideal von $\left(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}\right)$ in $R_{\mathfrak{p}}$. Dann ist aber $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{a} := (x_1, \ldots, x_n)$ in R. □

16.3.14. *Folgerung* (Krull'scher Hauptidealsatz). Sei R ein noetherscher Ring, x ein Nichtnullteiler von R und $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von x in R.
Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

Beweis. Da x ein Nichtnullteiler von R ist, liegt x in keinem minimalen Primideal von R, da alle diese nur aus Nullteilern bestehen ([2, Rem.2.14,Th.2.18]). Wegen $x \in \mathfrak{p}$, ist also $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 1$. Nach Korollar 16.3.13 (2)⇒(1) mit $\mathfrak{a} := (x)$ ist aber auch $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. □

16.3.15. Korollar. *Sei* R *ein noetherscher semilokaler Ring,* M *ein endlich erzeugter* R*-Modul,* $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M)$ *die Primideale von* R *mit* $\dim \mathfrak{p}_i = \dim_R M$.
Sei ferner $\mathfrak{J}$ *das Jacobson-Radikal von* R *und* $x \in \mathfrak{J}$. *Dann gilt:*
(1) $\dim_R(M/x\cdot M) \geq \dim_R M - 1$.
(2) $\dim_R(M/x\cdot M) = \dim_R M - 1 \Leftrightarrow x \notin \bigcup \mathfrak{p}_i$.

Beweis. (1): Da nach dem Hauptsatz 16.3.8. gilt $\dim_R M = \mathrm{s}(M)$ und $\dim_R(M/x\cdot M) = \mathrm{s}(M/x\cdot M)$ ist, folgt aus Hilfssatz 16.3.9 (1) sofort $\dim_R(M/x\cdot M) \geq \dim_R M - 1$. q.e.d.
(2): „⇐“: Nach Hilfssatz 16.3.9 (2) ist $\dim_R(M/x\cdot M) \leq \dim_R M - 1$. Zusammen mit (1) folgt also „=“.
„⇒“: Sei $\dim_R(M/x\cdot M) = \dim_R M - 1$. Wäre $x \in \mathfrak{p}_i$ für ein i, so gälte $\mathfrak{p}_i \supseteq R\cdot x + \mathrm{Ann}_R(M)$, weil wegen $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M)$ auch $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathrm{Ann}_R(M)$. Nach Hilfssatz 15.3.4. ist aber $\mathfrak{r}\big(R\cdot x + \mathrm{Ann}_R(M)\big) = \mathfrak{r}\big(\mathrm{Ann}_R(M/x\cdot M)\big)$, also ist auch $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathrm{Ann}_R\big(M/x\cdot M\big)$. Es folgt $\dim \mathfrak{p}_i \leq \dim_R(M/x\cdot M)$. Nach Voraussetzung ist aber $\dim_R M = \dim \mathfrak{p}_i$, also wäre $\dim_R M \leq \dim_R(M/x\cdot M)$ im Widerspruch zu der Voraussetzung $\dim_R M = \dim_R(M/x\cdot M) + 1 > \dim_R(M/x\cdot M)$. □

16.4. **Parametersysteme.**

16.4.1. Definition. Sei R ein noetherscher semilokaler Ring,
$\mathfrak{J}$ sein Jacobson-Radikal und M ein endlich erzeugter R-Modul.
Eine Familie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ heißt „Parametersystem für M“, wenn gilt:
(1) $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{J}$.
(2) $\ell_R\big(M/(x_1, \ldots, x_n)\cdot M\big) < \infty$.
(3) $n = \dim_R M$.

16.4.2. *Anmerkung.* Nach Hauptsatz 16.3.8. existiert stets ein solches Parametersystem, und jedes System $\{x_1, \ldots, x_n\}$ minimaler Länge mit $\ell_R\big(M/(x_1, \ldots, x_n)\big) < \infty$ ist ein Parametersytem für M.

16.4.3. Satz. *Sei R ein noetherscher semilokaler Ring, $\mathfrak{J}$ sein Jacobson-Radikal, M ein endlich erzeugter R-Modul und $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{J}$. Es gilt:*

(1) $\dim_R\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big) \geq \dim_R(M) - k$.

(2) *Das Gleichheitszeichen gilt in (1) genau dann, wenn $\{x_1,\dots,x_k\}$ Teil eines Parametersystems für M ist; d.h. wenn es $x_{k+1},\dots,x_n \in \mathfrak{J}$ gibt, so daß $\{x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n\}$ ein Parametersystem für M ist.*

Beweis. Die Aussage von (1) folgt aus Korollar 16.3.15. (1) durch k-fache Anwendung.

(2): Es gelte $\dim_R\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big) = \dim_R M - k = n-k$. Wähle $n-k$ Elemente $x_{k+1},\dots,x_n \in \mathfrak{J}$, die ein Parametersystem für $M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M$ bilden. Dann gilt:
$\ell_R\big(M/(x_1,\dots,x_n)\cdot M\big) =$
$\ell_R\Big(\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big)\Big/(x_{k+1},\dots,x_n)\cdot\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big)\Big) < \infty.$
Also ist $\{x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n\}$ ein Parametersystem für M, weil $n = \dim_R M$ ist und alle x_i in $\mathfrak{J}$ liegen.

Umgekehrt: Es gebe zu $x_1,\dots,x_k$ Elemente $x_{k+1},\dots,x_n \in \mathfrak{J}$, so daß $\{x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n\}$ ein Parametersystem für M ist. Dann ist $n = \dim_R M$ und wie oben
$\ell_R\Big(\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big)\Big/(x_{k+1},\dots,x_n)\cdot\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big)\Big) =$
$\ell_R\big(M/(x_1,\dots,x_n)\cdot M\big) < \infty.$
Da die $\{x_{k+1},\dots,x_n\}$ ein System von $n-k$ Elementen bilden, ist nach Definition 16.3.6. dann $\mathrm{s}\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big) \leq n-k$. Nach dem Hauptsatz 16.3.8. ist also auch $\dim_R\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big) = \mathrm{s}\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big) \leq n-k$.
$\dim_R\big(M/(x_1,\dots,x_k)\cdot M\big) \geq n-k$ gilt sowieso nach (1), so daß „=“ folgt. □

16.4.4. Satz. *Sei R ein noetherscher semilokaler Ring, $\mathfrak{J}$ sein Jacobson-Radikal, $x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{J}$ und M ein endlich erzeugter R-Modul. Es sind äquivalent:*

(1) *$\{x_1,\dots,x_n\}$ ist ein Parametersystem für M .*

(2) *$\{x_1,\dots,x_n\}$ ist ein Parametersystem für $\widehat{M}$ als $\widehat{R}$-Modul. (Dabei bezeichnen $\widehat{M}$ und $\widehat{R}$ die Komplettierungen in der kanonischen Topologie.)*

(3) *$\{x_1,\dots,x_n\}$ ist ein Parametersystem für $R/\operatorname{Ann}_R(M)$.*

Beweis. Vorbemerkung: Nach Korollar 16.3.10. ist $\dim_{\widehat{R}} \widehat{M} = \dim_R M$, und nach Definition 16.2.1 ist $\dim_R M = \dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(M)\big)$.
Wenn wir also voraussetzen, daß $\{x_1,\dots,x_n\}$ ein Parametersystem für einen der drei Moduln ist, ist in jedem der drei Fälle
$n = \dim_R M = \dim_{\widehat{R}} \widehat{M} = \dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(M)\big)$.
Um dann zu zeigen, daß $\{x_1,\dots,x_n\}$ ein Parametersystem für einen weiteren der drei Moduln ist, braucht man also nur die Endlichkeit der betreffenden Längen zu zeigen.

Sei $\mathfrak{x} := R\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ das von den x_i in R erzeugte Ideal und $\mathfrak{A} := \operatorname{Ann}_R(M)$.
(1)⇒(3): Nach Folgerung 15.3.5 gilt wegen $\ell_R(M/\mathfrak{x}\cdot M) < \infty$ auch
$\ell_R\big(R/(\mathfrak{x}+\mathfrak{A})\big) < \infty$. Aber $R/(\mathfrak{x}+\mathfrak{A}) \underset{R}{\simeq} (R/\mathfrak{A})/\mathfrak{x}\cdot(R/\mathfrak{A})$,
also ist $\ell_R\big((R/\mathfrak{A})/\mathfrak{x}\cdot(R/\mathfrak{A})\big) < \infty$. q.e.d.

(3)⇒(1): $M/\mathfrak{x}\cdot M$ läßt sich auffassen als Modul M' über $R' := R/(\mathfrak{x}+\mathfrak{A})$. Es ist

dann $\ell_R(M/\mathfrak{x}\cdot M) = \ell_{R'}(M')$. M ist als R-Modul endlich erzeugt, also ist M' als R'-Modul endlich erzeugt. Ferner ist

$\ell_{R'}(R') = \ell_R(R') = \ell_R\big((R/\mathfrak{A})/\mathfrak{x}\cdot(R/\mathfrak{A})\big) \overset{(3)}{<} \infty$. Also ist auch $\ell_{R'}(M') < \infty$ als endlich erzeugter R'-Modul und somit schließlich $\ell_R(M/\mathfrak{x}\cdot M) < \infty$. q.e.d.

(1)$\Leftrightarrow$(2): Da alles noethersch ist, gilt nach Korollar 14.0.11. (5) zusammen mit Korollar 14.0.9. (1) $\widehat{M}/\mathfrak{x}\cdot\widehat{M} \simeq \widehat{M}/\widehat{\mathfrak{x}\cdot M} \simeq \widehat{M/\mathfrak{x}\cdot M}$ kanonisch.
Die Behauptung folgt daher aus dem folgenden Hilfssatz 16.4.5. □

16.4.5. Hilfssatz. *Sei R ein Zariski-Ring, N ein endlich erzeugter R-Modul, $\widehat{R}$ und $\widehat{N}$ die Komplettierungen in den kanonischen Topologien. Dann gilt:*

$$\ell_R(N) = \ell_{\widehat{R}}(\widehat{N})\,.$$

Beweis. Vorbemerkung: Sei $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ eine R-Untermodulkette in N. Dann ist nach Korollar 14.0.9. (1) $\widehat{N}_0 \subset \widehat{N}_1 \subset \widehat{N}_2 \subset \ldots$ eine $\widehat{R}$-Untermodulkette in $\widehat{N}$. (Es ist tatsächlich $\widehat{N}_i \neq \widehat{N}_{i+1}$; denn es gilt
$\widehat{N}_{i+1}/\widehat{N}_i \overset{14.0.9.\ (1)}{\simeq} \widehat{N_{i+1}/N_i} \overset{14.0.19}{\supseteq} N_{i+1}/N_i \neq (0)$ nach Voraussetzung.)
Also ist $\ell_{\widehat{R}}(\widehat{N}) \geq \ell_R(N)$.
Sei im folgenden $\mathfrak{q}$ ein definierendes Ideal des Zariski-Rings R.
1. Fall: $\ell_R(N) = \infty \Rightarrow \ell_{\widehat{R}}(\widehat{N}) = \infty$ nach der Vorbemerkung. q.e.d.
2. Fall: $\ell_R(N) < \infty$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{q}^n \cdot N = (0)$, weil N separiert ist nach dem Krullschen Durchschnittssatz. (vgl. den Beweis von Anmerkung 15.3.14). Daher folgt aus dem Zusatz zu Satz 12.3.1. $\widehat{N} = N$ und jeder R-Untermodul von N ist auch ein $\widehat{R}$-Untermodul.
Also ist $\ell_R(N) = \ell_{\widehat{R}}(\widehat{N})$. □

Literatur

[1] Emil Artin, *Theory of Algebraic Numbers*, Translated and distributed by George Striker, Schildweg 2, Göttingen, 1959, Notes by Gerhard Würges from lectures held at the Mathematisches Institut, Göttingen, Germany, in the Winter-Semester 1956/57.

[2] Robert W. Berger, *Various Notions of Associated Prime Ideals*, Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae **5** (1994), no. 3, 245–271.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative, Chap.I, Modules Plats*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[4] ———, *Algèbre Commutative, Chap.II, Localisation*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[5] ———, *Algèbre Commutative, Chap.III, Graduation, Filtration et Topologies*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[6] ———, *Algèbre Commutative, Chap.IV, Idéaux premiers associés et Décomposition primaire*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[7] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[8] Peter Freyd, *Abelian Categories*, Harper & Row,Publishers, New York, Evanston, and London, 1964.

[9] Wolfgang Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), 160–196.

[10] Masayoshi Nagata, *On the chain problem of prime ideals*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 51–64.

[11] Jean-Pierre Serre, *Algèbre locale, multiplicités*, 2 ed., Lecture Notes in Math., vol. 11, Springer-Verlag, 1965, Cours au Collège de France 1957–58, rédigé par Pierre Gabriel.

[12] B.L. van der Waerden, *Algebra II*, 5 ed., Heidelberger Taschenbücher, vol. 23, Springer-Verlag, 1967.

[13] Oscar Zariski and Pierre Samuel, *Commutative Algebra II*, van Nostrand Comp., 1960.

Index

(A_0), 35
(A_1), 43
(A_2), 44
(A_3), 45
R-Ideal, 4
  ganzes, 4
  invertierbar, 5
    endlich erzeugt, 18
    Hauptideal in lokalem Ring, 18
V^*, 3
V^{-1}, 3
Δf, 124
$\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, 134
$\mathrm{coht}(\mathfrak{p})$, 134
$\mathrm{d}(M)$, 136
$\dim \mathfrak{p}$, 134
$\dim_R(M)$, 135
$\mathrm{e}(M, \mathfrak{q})$, 132
$\mathrm{h}(M, \mathfrak{q})$, 132
$\varprojlim_{i \to \infty}^{\varphi}$
  Definition, 35
  Regeln, 35
  Stetigkeit von φ, 36
$\mathfrak{a}^*$, 5, 42
$\mathfrak{a}^{-1}$, 5, 42
$\mathfrak{q}$-adische Filtrierung, 93
$\mathfrak{q}$-adische Topologie, 94
$\mathfrak{q}$-gute Filtrierung, 116
$\nu(A)$, 29
$\nu_\mathfrak{p}$
  Bewertungsring, 19
  Definition, 11, 12
  Eigenschaften, 12, 13
$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}^{-1})$, 21
$\nu_\mathfrak{p}(A)$, 13
$\mathrm{P}(\{M_n\}, X)$, 131
$\mathrm{P}_\mathfrak{q}(M, X)$, 131
$\mathrm{s}(M)$, 136
Äquivalenz
  Betragsbewertungen, 27
  Exponentenbewertungen, 30
  Normen, 61

Additivität
  von $\mathrm{P}_\mathfrak{q}$, 132
Anfangsform, 109
Approximationsbedingung
  Dedekind-Ring, 45
  Krull-Ring, 43
  ZPE-Ring, 44
Approximationssatz
  Bewertungen
    endlicher, 35
  Dedekind-Ringe, 16
  Krull-Ringe, 14
Artin-Rees, 116
assoziierter graduierter Modul, 108, 109
assoziierter graduierter Ring, 108, 109

Betragsbewertung
  äquivalente, 27
  Definition, 24
Bewertung
  Approximationssatz, 35
  archimedische, 24
  Charakteristik p, 25
  diskrete, 30
  endlicher Körper, 25
  Exponentenbewertung
    Definition, 29
    zugehörige, 29
  Fortsetzung, 63, 70
    komplexe, 85
    reelle, 85
    triviale Bewertung, 70
  Krullsche, 33
  nichtarchimedische, 24, 25
  triviale, 25
  Unabhängigkeit, 37
  von $\mathbb{Q}$
    archimedisch, 27
    nichtarchimedisch, 48
  von $k(X)$
    nichtarchimedisch, 49
Bewertungsring
  diskreter, 30, 33
    Schnitt beliebig vieler, 40
    Schnitt endlich vieler, 38
  Eigenschaften, 30
  ganzer Abschluß, 90
  Krullscher, 33
  maximaler Unterring, 34
  von $\nu_\mathfrak{p}$, 19
Bewertungstopologie, 28
Bilinear-Lemma, 65

Cauchyfolge, 50, 95
Cohöhe
  eines Primideals, 134

Dedekind-Ring
  Charakterisierung, 18
  Definition, 15
  ganzer Abschluß, 91
definierendes Ideal
  semilokaler Ring, 135
  Zariski-Ring, 122
Dimension
  eines Primideals, 134

diskreter Bewertungsring, 30
  Charakterisierung, 33
Dreiecksungleichung
  Bewertung, 24
  Norm, 56

Eigenschaften von $\nu_{\mathfrak{p}}$, 12, 13
Exponentenbewertung
  äquivalente, 30, 31
  Bewertungsideal, 30
  Bewertungsring, 30
  Definition, 29
  diskrete, 30

fast ganz abhängig, 6, 8
Filtrierter Modul, 93
Filtrierter Ring, 93
  vollständig ganz abgeschlossen, 113
Filtrierung, 93
  $\mathfrak{q}$-adische, 93
  $\mathfrak{q}$-gut, 116
  induzierte, 93
  komplett, 95
  Topologie, 94
    Abschluß, 94
    separiert, 94
Fortsetzung
  Bewertung
    triviale, 70

ganz abgeschlossen, 8
ganz abhängig, 8
Gelfand-Tornheim
  Satz von, 56
Gradrelation, 75, 76, 84
graduierter Modul, 108
graduierter Ring, 108
Gruppe der Sternideale, 7

Höhe
  eines Primideals, 134
Hensel
  Lemma von, 66, 67
Henselsches Lemma, 66, 67
Hilbert-Samuel-Polynom, 127

invertierbar, 5

kanonische Topologie, 122
komplett bewerteter Körper, 50
Komplettierung, 50, 51
  filtrierter Modul, 96
komplexe Fortsetzung, 85
konvergent, 35
Konvergenz bzgl. φ, 35
Krull
  allgemeine Bewertungen, 33
Krull-Ring, 11, 40, 43
  Charakterisierung, 17
  ganzer Abschluß, 91

Leitform, 109
Limes, 35, 95

Maximalbedingung, 10
maximaler Unterring, 34
Maximumregel, 26
Minimumregel, 29
Modul
  assoziierter graduierter, 108, 109
  filtrierter, 93
  graduierter, 108
Morphismus
  filtrierter Moduln, 93
  strikter, 93

Norm
  auf Körper, 56
  auf Vektorraum, 61
    Körper komplett, 62
  Toplogie auf V, 61
Normtopologie, 61, 63
Nullfolge, 35

Parametersystem, 139
Pascalsches Dreieck, 125
primär, 21
Primideal
  in Krull-Ring, 14
Produktregel, 24

reelle Fortsetzung, 85
Rees-Ring, 115
Reihendarstellung, 54
Restklassengrad, 73
Ring
  assoziierter graduierter, 108, 109
  filtrierter, 93
  graduierter, 108

semilokaler Ring
  definierendes Ideal, 135
Sternideal, 5
  comaximale, 22
  Eindeutigkeit der Zerlegung, 10
  ganzes, 5
  Gruppe, 7
  maximal, 9
  Maximalbedingung, 10
  Multiplikation, 6
  Potenz, 11
  Primideal, 9
  teilerfremde, 22
  Teilerkettenbedingung, 10
  unzerlegbar, 9
  Zerlegung in Krull-Ringen, 11

Zerlegung in Potenzprodukt, 11
Zerlegung in unzerlegbare Sternideale, 10, 11
Sternmultiplikation, 6
Sternpotenz, 11
strikt
Morphismus, 93

Teilerkettenbedingung, 10
Tensor-Erweiterungssatz, 81
Topologie
q-adische, 94
Bewertungstopologie, 28
Filtrierung, 94
kanonische, 122
Normtopologie, 61, 63
separiert, 94
topologischer Abschluß, 94

Unabhängigkeit
Bewertungen, 37

Verzweigungsindex, 73
vollständig ganz abgechlossen
Filtrierter Ring, 113
vollständig ganz abgeschlossen, 7, 8

Wertegruppe, 29

Zariski-Ring, 122
definierendes Ideal, 122
Zerlegung in unzerlegbare Sternideale, 10, 11
ZPE-Ring, 44
vollständig ganz abgeschlossen, 7