LIE-GRUPPEN

VORLESUNG IM WINTERSEMESTER 1997/1998

an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Richard Bödi

Inhalt

1. Bezeichnungen 1
2. Die Exponentialfunktion 4
3. Lokale Gruppen und Lie-Algebren 8
4. Das Differential der Exponentialabbildung 18
5. Lokale Gruppen und die Campbell-Hausdorff-Formel 24
6. Lineare Lie-Gruppen 28
7. Lie-Gruppen und Überlagerungen 36
8. Korrespondenz zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren 46
9. Die adjungierte Darstellung 51
10. Unterstrukturen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren 56
11. Normalisatoren, Zentralisatoren und Kommutatoren 62
12. Auflösbare Lie-Algebren und -Gruppen, das Radikal 71
13. Halbeinfache und einfache Lie-Algebren und -Gruppen 78

Literatur 85

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Prof. K.-H. Hofmann für die freundliche Bereitstellung von Kapitel 5 des in Bälde erscheinenden Buches über kompakte Gruppen (K.-H. Hofmann, S. Morris). Große Teile dieses Manuskriptes basieren auf genau dieser Grundlage.

KAPITEL 1

Bezeichnungen

(1.1) Definition. Ein vollständiger, normierter linearer Raum $E = (E, ||.||)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt *Banach-Raum*.

(1.2) Beispiele von Banach-Räumen.
(a) $\mathbb{K}^n$ mit der gewöhnlichen Norm $||(x_1, \ldots, x_n|| = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i}$.
(b) End $(\mathbb{K}^n)$ mit der (Spalten- oder Zeilen-) Supremumsnorm.
(c) $\ell_p = (\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{K}, ||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}||_p < \infty\}, ||.||_p)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, wobei $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}||_p = (\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p)^{1/p}$ für $p \neq \infty$ und $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$.
(d) $c = (\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{K}\}, ||.||_\infty)$.
(e) $c_0 = (\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}, ||.||_\infty)$.
(f) $L^p([a,b]) = (\{f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid ||f||_p < \infty\}, ||.||_p)$ mit $||f||_p = \left(\int_a^b f(x)^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$, wobei $1 \leq p < \infty$.
(g) Die Menge $C([a,b])$ ist bezüglich $||.||_\infty$ vollständig.

(1.3) Definition. Eine assoziative und distributive Algebra $A = (A, +, \cdot, \mathbf{1})$ mit Eins-Element $\mathbb{1}$ über $\mathbb{K}$ auf einem Banach-Raum $(A, ||.||)$ über $\mathbb{K}$ heißt *Banach-Algebra* über $\mathbb{K}$, falls gilt
(BA1) $||a \cdot b|| \leq ||a||\,||b||$ für alle $a, b \in A$,
(BA2) $||\mathbf{1}|| = 1$.
Die Menge aller invertierbaren Elemente von A wird mit A^{-1} bezeichnet. Die Elemente aus A^{-1} werden auch *Einheiten* genannt.

(1.4) Beispiele von Banach-Algebren.
(a) End $(\mathbb{K}^n)$ oder allgemeiner $\mathbf{BL}(E, E)$ (der Banach-Raum aller beschränkten linearen Operatoren des Banach-Raumes E in sich) mit der Komposition als Multiplikation.
(b) Der Raum c mit der punktweisen Multiplikation.
(c) Die Räume ℓ_p und c_0 besitzen bezüglich der punktweisen Multiplikation *kein* Eins-Element.

(1.5) Definition. Eine Familie $\{a_j\}_{j\in J}$ von Elementen aus A heißt *absolut summierbar*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ gibt, so daß für jede zu F disjunkte

endliche Teilmenge $G \subseteq J$ stets $\sum_{j\in G} ||a_j|| < \varepsilon$ gilt. Ein Element $a \in A$ heißt *Summe* obiger Familie, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ gibt, so daß für jede endliche Teilmenge $G \subseteq J$ mit $F \subseteq G$ stets $||a - \sum_{j\in G} a_j|| < \varepsilon$ gilt. Man schreibt in diesem Fall $a = \sum_{j\in J} a_j$.

Bemerkungen. (i) Jede absolut summierbare Familie $\{a_j\}_{j\in J}$ besitzt eine *eindeutige* Summe und die Menge $\{j \in J \mid a_j \neq 0\}$ ist abzählbar: besitzt $\{a_j\}_{j\in J}$ zwei Summen a_1 und a_2, so gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endliche Mengen $F_1, F_2 \subseteq J$, so daß für alle endlichen $G_1, G_2 \subseteq J$ mit $F_i \subseteq G_i$ gilt

$$||a_i - \sum_{j\in G_i} a_j|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist für alle endlichen Teilmengen $G \subseteq J$ mit $F_1 \cup F_2 \subseteq G$

$$||a_1 - a_2|| = ||a_1 - \sum_{j\in G} a_j - a_2 + \sum_{j\in G} a_j|| \leq ||a_1 - \sum_{j\in G} a_j|| + ||a_2 - \sum_{j\in G} a_j|| < \varepsilon.$$

Dies zeigt $a_1 = a_2$. Ist die Menge $\{j \in J \mid a_j \neq 0\}$ überazählbar, so gibt es mindestens eines der (abzählbar vielen) Intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ mit $n \in \mathbb{N}$, welches die Normen von unendlich (sogar überabzählbar) vielen Elementen a_k für $k \in K \subseteq J$ enthält. Die Summe dieser Elemente kann aber nicht konvergieren, da man G für jede Wahl von F beliebig groß in K wählen kann. Die Existenz einer Summe folgt nun wie bei normalen Folgen und Reihen.
(ii) Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Für $\rho := 1/\left(\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) \in [0, \infty]$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x^n$ für $||x|| < \rho$ absolut.
(iii) Die Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ konvergiert absolut für $||x|| < 1$ und ihre Summe ist das Inverse von $\mathbf{1} - x$ in A. Insbesondere ist $B_1(\mathbf{1}) := \{a \in A \mid ||a - \mathbf{1}|| < 1\} \subset A^{-1}$.
(iv) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ konvergiert absolut für alle $x \in A$.
(v) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ konvergiert absolut für $||x|| < 1$.

(1.6) Definition. Seien U und V offene Teilmengen der Banach-Räume E und F. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt *analytisch*, falls es zu jedem $u \in U$ eine positive reelle Zahl r, sowie eine Folge nicht negativer reeller Zahlen $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ gibt, so daß gilt:

(AL1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n r^n$ konvergiert,

(AL2) $B_r(u) := \{a \in E \mid ||a - u|| < r\} \subseteq U$,

(AL3) es gibt eine Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger multilinearer Abbildungen $A_n : E^n \to F$ und ein $A_0 \in F$ mit $||A_0|| \leq \alpha_0$ und

$$\sup_{||h_1||,\ldots,||h_n||=1} ||A_n(h_1, \ldots, h_n)|| \leq \alpha_n$$

für alle $n \geq 1$,

(AL4) für alle $x \in B_r(u)$ ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-u)^n,$$

wobei $A_n(x-u)^n := A_n(x-u,\ldots,x-u)$ ist.

Die Darstellung (AL4) von f wird eine *Potenzreihenentwicklung* von f um u genannt.

Bemerkung. (i) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ in einer Banach-Algebra A absolut auf $B_r(a)$, so ist die Abbildung $f : B_r(a) \to A : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ analytisch.
(ii) Die Komposition analytischer Abbildungen ist analytisch.
(iii) Sind $f, g : U \to V$ analytisch, so ist die Menge der Punkte $u \in U$, in denen die Potenzreihen-Entwicklung von f und g um u übereinstimmen sowohl offen als auch abgeschlossen in U. Ist insbesondere U zusammenhängend, und stimmen f und g auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von U überein, so ist $f = g$.

KAPITEL 2

Die Exponentialfunktion

Sei A stets eine Banach-Algebra über $\mathbb{K}$. Nach §1 ist die Summe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}x^n$ absolut konvergent auf A.

(2.1) Definition. Die Abbildung $\exp : A \to A : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ heißt *Exponentialabbildung* von A.

Bemerkung. Für $x, y \in A$ mit $xy = yx$ gilt
(i) $\frac{1}{n!}(x+y)^n = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}x^i y^j$ (*Binomische Formel*)
(ii) $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ (*Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*)
(iii) Nach (ii) ist $\exp x$ stets invertierbar, d.h. es ist $\exp : A \to A^{-1}$.

(2.2) Definition. Die Abbildung $\log : B_1(\mathbf{1}) \to A : 1 + x \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}x^n$ heißt *Logarithmus* von A.

Bemerkung. Nach der letzten Bemerkung von §1 sind die Exponentialabbildung und der Logarithmus analytische Abbildungen.

(2.3) Lemma. *Sei N_0 die Zusammenhangskomponente von 0 im Urbild $\exp^{-1}(B_1(\mathbf{1}))$ und setze $D := \{(x,y) \in A \times A \mid \exp x \exp y \in B_1(\mathbf{1})\}$. Dann ist $B_{\log 2}(0) \subseteq N_0$ und $\{(x,y) \in A \times A \mid ||x|| + ||y|| < \log 2\} \subseteq D$.*

Beweis. Es genügt, die zweite Inklusion zu beweisen, da die erste Inklusion ein Spezialfall ($y = 0$) der zweiten ist. Seien also $x, y \in A$ mit $||x|| + ||y|| < \log 2$. Da in jeder Banach-Algebra die Relation $||x^n|| \leq ||x||^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aus der Stetigkeit der Norm und der Dreiecks-Ungleichung

$$\begin{aligned} ||\exp x \exp y - \mathbf{1}|| &= ||\sum_{i+j>0} \frac{1}{i!j!}x^i y^j|| \leq \sum_{i+j>0} \frac{1}{i!j!}||x||^i||y||^j \\ &= e^{||x||}e^{||y||} - 1 = e^{||x||+||y||} - 1 < e^{\log 2} - 1 = 1. \end{aligned}$$

□

(2.4) Proposition. *Es gelten folgende Aussagen:*

(i) $\log(\exp x) = x$ *für alle* $x \in N_0$.

(ii) $\exp(\log x) = x$ *für alle* $x \in B_1(\mathbf{1})$.

(iii) $\exp\big|_{N_0} : N_0 \to B_1(\mathbf{1})$ *ist ein analytischer Homöomorphismus mit analytischer Umkehrabbildung* $\log : B_1(\mathbf{1}) \to N_0$.

Beweis. (i) Betrachte die analytische Abbildung $\Psi : N_0 \to A : x \mapsto \log(\exp x)$ mit der Potenzreihenentwicklung $\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n x^n$ um 0. Für $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| < \log 2$ setze

$$\psi : \mathbb{K} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n.$$

Dann ist $\psi(z) = \log(e^z) = z$, woraus $\psi_0 = 0$ und $\psi_n = 0$ für $n > 1$ folgt. Damit stimmen aber auch Ψ und die Identität in einer 0-Umgebung überein und es folgt $\Psi = \mathrm{id}_{N_0}$ nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (siehe letzte Bemerkung von §1).
(ii) Wird analog zu (i) bewiesen.
(iii) Nach der Definition von N_0 ist $\exp(N_0) \subseteq \exp(\exp^{-1} B_1(\mathbf{1})) \subseteq B_1(\mathbf{1})$. Aufgrund von (ii) ist $\log B_1(\mathbf{1}) \subseteq \exp^{-1} B_1(\mathbf{1})$. Da $B_1(\mathbf{1})$ und damit auch $\log B_1(\mathbf{1})$ zusammenhängend sind, folgt $\log B_1(\mathbf{1}) \subseteq N_0$ (denn N_0 ist ja die Zusammenhangs-Komponente von 0 in $\exp^{-1} B_1(\mathbf{1})$). Zusammen mit (i) und (ii) beweist dies (iii). □

(2.5) Definition. Die durch

$$(x, y) \mapsto x * y := \log(\exp x \exp y) : D \to A$$

definierte Multiplikation wird *Campbell-Hausdorff-Multiplikation*, kurz *CH-Multiplikation*, genannt. Dabei ist D wie in Lemma (2.3) definiert.

Bemerkung. Die CH-Multiplikation ist eine analytische Abbildung, die mindestens auf der Menge $B_{\frac{\log 2}{2}}(0) \times B_{\frac{\log 2}{2}}(0)$ definiert ist.

(2.6) Proposition. *Für* $x, y \in A$ *mit* $||x|| + ||y|| < \log 2$ *läßt sich das Produkt* $x * y$ *durch eine absolut summierbare Familie wie folgt darstellen:*

$$x * y = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, y),$$

wobei $H_n(x, y)$ *ein homogenes Polynom vom Grad* n *in den (i.a. nicht kommutierenden) Variablen* x *und* y *ist. Dabei gilt* $H_1(x, y) = x + y$ *und* $2H_2(x, y) = [x, y] = xy - yx$. *Außerdem ist*

$$||x * y|| \leq -\log(2 - e^{||x||+||y||}).$$

Beweis. Seien $x, y \in A$ mit $||x|| + ||y|| < \log 2$. Dann ist $\exp x \exp y \in B_1(\mathbf{1})$ nach (2.3) und es folgt $\chi(x,y) := \exp x \exp y - \mathbf{1} \in B_1(0)$ sowie $\chi(x,y)^n \in B_1(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Überdies ist $\chi(x,y)^n$ für $n \geq 1$ die Summe der folgenden, absolut summierbaren Familie

$$\mathcal{F}_n := \left\{ \frac{1}{\prod_{k=1}^n p_k! q_k!} x^{p_1} y^{q_1} \cdot \ldots \cdot x^{p_n} y^{q_n} \;\middle|\; p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n > 0 \right\}.$$

Dann ist auch

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{-(-1)^n}{n} \alpha_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathcal{F}_n \right\}$$

eine absolut summierbaren Familie, deren Summe gerade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n} \chi(x,y)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n} (\exp x \exp y - \mathbf{1})^n = \log(\exp x \exp y) = x * y$$

ist. Sind $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r + s < \log 2$, $||x|| \leq r$ und $||y|| \leq s$, so ist

$$\left\{ \frac{1}{n \prod_{k=1}^n p_k! q_k!} r^{\sum_{k=1}^n p_k} s^{\sum_{k=1}^n q_k} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n > 0 \right\}$$

eine $\mathcal{F}$ majorisierende Familie, die

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^r e^s - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{r+s} - 1)^n = -\log(1 - (e^{r+s} - 1)) = -\log(2 - e^{r+s})$$

als Summe besitzt. Beachte dabei, daß $0 < 2 - e^{r+s} < 1$ aus $0 \leq r + s < \log 2$ folgt. Setze für $d \in \mathbb{N}$

$$J_d := \left\{ ((p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)) \;\middle|\; p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n > 0, \sum_{k=1}^n (p_k + q_k) = d \right\},$$

für $x, y \in A$

$$H_d(x,y) := \sum_{((p_1,q_1),\ldots,(p_n,q_n)) \in J_d} \frac{-(-1)^n}{n \prod_{k=1}^n p_k! q_k!} x^{p_1} y^{q_1} \cdot \ldots \cdot x^{p_n} y^{q_n},$$

und für $r, s \in \mathbb{R}$

$$h_d(r,s) := \sum_{((p_1,q_1),\ldots,(p_n,q_n)) \in J_d} \frac{1}{n \prod_{k=1}^n p_k! q_k!} r^{\sum_{k=1}^n p_k} s^{\sum_{k=1}^n q_k}.$$

Dann sind H_d und h_d homogene Polynome vom Grad d und es gilt $H_1(x,y) = x + y$ und $H_2(x,y) = \frac{1}{2}(xy - yx)$. □

(2.7) Korollar. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\exp(x * y) = \exp x \exp y$ *für alle* $(x, y) \in D$.

(ii) Ist U *eine Umgebung von* 0, *so daß die Produkte* $U * U$, $U * (U * U)$ *und* $(U * U) * U$ *definiert und in* N_0 *enthalten sind, so gilt* $x * (y * z) = (x * y) * z$ *für alle* $x, y, z \in U$.

(iii) Für $(x, y) \in D$ *mit* $[x, y] := xy - yx = 0$ *ist* $x * y = x + y$.

(iv) Ist $(x, -x) \in D$, *so ist* $x * (-x) = (-x) * x = 0$.

Beweis. (i) Für $(x, y) \in D$ ist $||\exp x \exp y - \mathbf{1}|| < 1$. Damit können wir (2.4)(ii) anwenden und erhalten

$$\exp(x * y) = \exp(\log(\mathbf{1} + (\exp x \exp y - \mathbf{1}))) = \exp x \exp y.$$

(ii) Da die Multiplikation in A assoziativ ist, folgt aus (i)

$$\exp(x * (y * z)) = \exp((x * y) * z)$$

für alle $x, y, z \in U$. Wählen wir U so, daß $U * (U * U) \subseteq N_0$ ist, so gilt nach (2.4)(i)

$$\log(\mathbf{1} + (\exp x \exp(y * z) - \mathbf{1})) = \log(\exp(x * (y * z)) = x * (y * z)$$

und

$$\log(\mathbf{1} + (\exp(x * y) \exp z - \mathbf{1})) = \log(\exp((x * y) * z) = (x * y) * z.$$

(iii) Nach der ersten Bemerkung dieses Kapitels ist $\exp(x + y) = \exp x \exp y$, falls x und y kommutieren. Ist zusätzlich $(x, y) \in D$, so folgt

$$x * y = \log(\exp x \exp y) = \log \exp(x + y) = x + y.$$

(iv) Folgt sofort aus (iii) und der Tatsache, daß x und $-x$ kommutieren. □

Bemerkung. Das obige Korollar besagt, daß $(U, *)$ eine *lokale Gruppe* mit Neutralelement 0 ist und die Exponentialfunktion $\exp\big|_U : U \to \exp U \subseteq A^{-1}$ ein *lokaler Isomorphismus* von $(U, *)$ in die multiplikative Gruppe A^{-1} von A ist.

Da die Multiplikation $*$ durch eine Potenzreihe gegeben ist, ist diese analytisch, Um die Operation $*$ zu definieren, haben wir von der gegebenen Banach-Algebra A die Skalarmultiplikation, die Addition und die Multiplikation verwendet. Im nächsten Kapitel wollen wir der Frage nachgehen, ob sich umgekehrt aus der Verknüpfung $*$ die drei Verknüpfungen von A zurückgewinnen lassen.

KAPITEL 3

Lokale Gruppen und Lie-Algebren

Wir beginnen mit der Rekonstruktion der Skalarmultiplikation von A, da dies das einfachste Problem ist. Nach Korollar (2.7)(iii) ist für jedes $x \in A$ die Abbildung $t \mapsto t \cdot x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$ stetig und für $s, t, s+t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist $(s \cdot x) * (t \cdot x) = (s+t) \cdot x$. Nach der einführenden Bemerkung zu Kapitel 2 ist $t \mapsto \exp(t \cdot x) : \mathbb{R} \to A^{-1}$ ein Homomorphismus zwischen topologischen Gruppen. Dies motiviert die folgenden beiden Definitionen.

(3.1) Definition. Eine *topologische Gruppe* $G = (G, \cdot, 1, \tau)$ ist sowohl eine Gruppe $(G, \cdot, 1)$ als auch ein topologischer Raum (G, τ), so daß die Abbildung $G \times G \to G : (x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ stetig ist. Dabei ist $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen.

Bemerkung. Jede Untergruppe H einer topologischen Gruppe G, die eine offene Menge U enthält, ist offen, denn wir können H schreiben als $H = \bigcup_{x \in H} xU$. Die Mengen xU sind offen, da die Translationen $\lambda_x : z \mapsto xz$ Homöomorphismen sind. Jede offene Untergruppe einer zusammenhängenden Gruppe G ist gleich der Gruppe G. Eine topologische Gruppe G ist genau dann diskret, wenn $\{1\}$ offen ist.

(3.2) Definition. Eine *Einparameter-Gruppe* einer topologischen Gruppe G ist ein stetiger Gruppen-Homomorphismus $\mathsf{P} : \mathbb{R} \to G$. Sei $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ die Menge aller Einparameter-Gruppen, ausgestattet mit der kompakt-offenen Topologie τ_{co}. Eine Subbasis von τ_{co} ist gegeben durch Mengen der Form $(C, O) := \{\varphi : \mathbb{R} \to G \mid \varphi(C) \subseteq O\}$, wobei $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $O \subseteq G$ offen ist. Diesen topologischen Raum bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}(G)$. Eine *lokale Einparameter-Gruppe* von G ist eine stetige Abbildung $\rho : I \to G$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$ ist, für die $\rho(s+t) = \rho(s)\rho(t)$ gilt, falls $s, t, s+t \in I$ ist.

Bemerkung. Ist G eine topologische Gruppe, deren Topologie von einer Norm induziert wird, so ist τ_{co} gerade die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen von $\mathbb{R}$. Da in diesem Fall $\mathbb{R}$ eine abzählbare Basis und G abzählbare Umgebungsbasen besitzt, besitzt τ_{co} ebenfalls abzählbare Umgebungsbasen, d.h. die Konvergenz in $\mathfrak{L}(G)$ läßt sich mit Hilfe von Folgen beschreiben.

Ein wichtiges Ergebnis ist, daß sich lokale Einparameter-Gruppen stets eindeutig zu (globalen) Einparameter-Gruppen fortsetzen lassen.

(3.3) Lemma. *Jede lokale Einparameter-Gruppe $\rho : I \to G$ einer topologischen Gruppe G besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer Einparameter-Gruppe $\mathsf{P} : \mathbb{R} \to G$.*

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $\frac{r}{n} \in I$ ist (I ist ja eine offene Umgebung von 0). Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{r}{n}, \frac{r}{m} \in I$. Da I ein Intervall ist, gilt $\frac{kr}{mn} \in I$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, \max\{m, n\}\}$. Da ρ ein lokaler Homomorphismus ist, haben wir $\rho\left(\frac{r}{mn}\right)^{k+1} = \rho\left(\frac{kr}{mn}\right)\rho\left(\frac{r}{mn}\right)$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, \max\{m, n\} - 1\}$. Damit ist

$$\rho\left(\frac{r}{mn}\right)^{mn} = \left(\rho\left(\frac{r}{mn}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\rho\left(\frac{mr}{mn}\right)\right)^{n} = \left(\rho\left(\frac{r}{n}\right)\right)^{n}.$$

Vertauschen wir die Rollen von m und n, so erhalten wir ebenso

$$\rho\left(\frac{r}{mn}\right)^{mn} = \left(\rho\left(\frac{r}{m}\right)\right)^{m}.$$

Somit können wir widerspruchsfrei für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{r}{n} \in I$

$$\mathsf{P}(r) := \rho\left(\frac{r}{n}\right)^{n}$$

definieren. Die Abbildung P ist ein Homomorphismus: Seien dazu $r, s \in \mathbb{R}$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{r}{n}$, $\frac{s}{n}$ und $\frac{r+s}{n}$ in I liegen. Dann ist

$$\rho\left(\frac{r}{n}\right)\rho\left(\frac{s}{n}\right) = \rho\left(\frac{r+s}{n}\right) = \rho\left(\frac{s+r}{n}\right) = \rho\left(\frac{s}{n}\right)\rho\left(\frac{r}{n}\right)$$

und damit folgt

$$\mathsf{P}(r+s) = \rho\left(\frac{r+s}{n}\right)^{n} = \left(\rho\left(\frac{r}{n}\right)\rho\left(\frac{s}{n}\right)\right)^{n} = \rho\left(\frac{r}{n}\right)^{n}\rho\left(\frac{s}{n}\right)^{n} = \mathsf{P}(r)\mathsf{P}(s).$$

Es ist $\mathsf{P}\big|_I = \rho$, da wir für $r \in I$ in der Definition von P $n = 1$ setzen können. Da P damit ein Gruppenhomomorphismus ist, der an der Stelle 0 stetig ist, ist P überhaupt stetig. Sind schließlich P und P' zwei Fortsetzungen von ρ, so ist $E := \{r \in \mathbb{R} \mid \mathsf{P}(r) = \mathsf{P}'(r)\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$, die das Intervall I enthält. Also ist E auch offen. Da $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist, folgt somit $E = \mathbb{R}$ und $\mathsf{P} = \mathsf{P}'$. □

(3.4) Proposition (Rekonstruktion der Skalarmultiplikation). *Es sei A eine Banach-Algebra. Die Abbildung $\alpha : A \to \mathfrak{L}(A^{-1}) : x \mapsto (t \mapsto \exp(t \cdot x) : \mathbb{R} \to A^{-1})$ ist ein Homöomorphismus. Für $x \in A$ und $t \in \mathbb{R}$ gibt es also genau eine Einparametergruppe*

$\widetilde{\mathsf{P}}_x : \mathbb{R} \to (A,+)$ *mit* $\widetilde{\mathsf{P}}_x(1) = x$, *und es ist* $t \cdot x = \widetilde{\mathsf{P}}_x(t)$, *d.h. die Skalarmultiplikation von* A *läßt sich aus der lokalen Verknüpfung* $*$ *zurückgewinnen.*

Beweis. (i) α is injektiv: Sei $\exp(t \cdot x) = \exp(t \cdot y)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wähle $r > 0$ so klein, daß aus $|t| < r$ stets $t \cdot x, t \cdot y \in N_0$ folgt. Dann gilt für alle solchen t

$$t \cdot x = \log \exp(t \cdot x) = \log \exp(t \cdot y) = t \cdot y,$$

woraus $x = y$ folgt.

(ii) α ist surjektiv: Sei $\mathsf{P} : \mathbb{R} \to A^{-1}$ eine Einparameter-Gruppe. Wähle $r > 0$ so klein, so daß $||\mathsf{P}(t) - \mathbf{1}|| < 1$ für alle t mit $|t| < r$ gilt. Setze $I := (-r, r)$. Dann ist die Abbildung $\rho : I \to A : t \mapsto \log \mathsf{P}(t)$ stetig und für $s, t, s+t \in I$ ist

$$\rho(s+t) = \log(\mathsf{P}(s)\mathsf{P}(t)) = (\log \mathsf{P}(s)) * (\log \mathsf{P}(t)) = \rho(s) * \rho(t).$$

Sei A_{P} die von $\mathsf{P}(\mathbb{R})$ erzeugte, abgeschlossene Unteralgebra von A. Mit $\mathsf{P}(\mathbb{R})$ ist auch A_{P} kommutativ. Nach der Definition des Logarithmus durch eine Potenzreihe ist $\rho(t) \in A_{\mathsf{P}}$ für alle $t \in I$. Nach Korollar (2.7)(iii) ist $x * y = x + y$ für alle $(x, y) \in A_{\mathsf{P}}^2 \cap D$. Insbesondere ist also $\rho(s) * \rho(t) = \rho(s) + \rho(t)$ und $\rho : I \to (A, +)$ ist eine lokale Einparametergruppe von $(A, +)$. Nach Lemma (3.3) besitzt ρ eine eindeutige Fortsetzung zu einer Einparametergruppe $\widetilde{\mathsf{P}} : \mathbb{R} \to (A, +)$. Dann ist $n \cdot \widetilde{\mathsf{P}}(1) = \widetilde{\mathsf{P}}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $m \cdot \widetilde{\mathsf{P}}(n/m) = \widetilde{\mathsf{P}}(m(n/m)) = \widetilde{\mathsf{P}}(n) = n \cdot \widetilde{\mathsf{P}}(1)$, woraus $\widetilde{\mathsf{P}}(n/m) = (n/m) \cdot \widetilde{\mathsf{P}}(1)$ folgt. Also gilt $\widetilde{\mathsf{P}}(t) = t \cdot \widetilde{\mathsf{P}}(1)$ für alle $t \in \mathbb{Q}$. Da $\widetilde{\mathsf{P}}$ stetig ist und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gilt diese Gleichung auch für alle reellen t. Setze $x := \widetilde{\mathsf{P}}(1)$. Dann ist

$$\alpha(x) : \mathbb{R} \to A^{-1} : t \mapsto \exp(t \cdot x) = \exp \widetilde{\mathsf{P}}(t)$$

eine Einparametergruppe, für die $\alpha(x)(t) = \exp \rho(t) = \exp \log \mathsf{P}(t) = \mathsf{P}(t)$ gilt, falls $|t| < r$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt nun $\mathsf{P} = \alpha(x)$, was die Surjektivität von α zeigt.

(iii) α ist stetig: Sei dazu $(x_n)_n$ eine Folge in A mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in A$. Für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert $(t \cdot x_n)_n$ gleichmäßig auf K gegen $t \cdot x$. Insbesondere gibt es eine abgeschlossene Kugel B um 0 in A, die die Mengen $K \cdot x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $K \cdot x$ enthält. Da $\exp : A \to A^{-1}$ gleichmäßig stetig auf der beschränkten Menge B ist (dies folgt wie im Falle der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$), konvergiert $\exp t \cdot x_n = \alpha(x_n)(t)$ gleichmäßig auf K gegen $\exp t \cdot x = \alpha(x)(t)$.

(iv) α^{-1} ist stetig: Sei dazu $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_n = \mathsf{P}$ in $\mathfrak{L}(A^{-1})$. Sei $r > 0$ so klein gewählt, daß $\mathsf{P}(r)$ und $\mathsf{P}_n(r)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in $B_1(\mathbf{1})$ liegen. Dann ist $r \cdot \alpha^{-1}(\mathsf{P}) = \log \mathsf{P}(r) = \lim_{n\to\infty} \log \mathsf{P}_n(r) = \lim_{n\to\infty} r \cdot \alpha^{-1}(\mathsf{P}_n)$. Wegen $r \neq 0$ folgt hieraus

$$\alpha^{-1}(\mathsf{P}) = \lim_{n\to\infty} \alpha^{-1}(\mathsf{P}_n).$$

□

Es folgt die Rekonstruktion der Addition von A.

(3.5) Proposition (Rekonstruktion der Addition). *Sei A eine Banach-Algebra. Dann ist für alle $x, y \in A$*

$$x + y = \lim_{n\to\infty} n \left(\left(\frac{1}{n} \cdot x \right) * \left(\frac{1}{n} \cdot y \right) \right).$$

Insbesondere ist

$$\exp(x + y) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{n} \cdot x \right) \exp\left(\frac{1}{n} \cdot y \right) \right)^n.$$

Beweis. Seien $x, y \in A$ und wähle $p \in \mathbb{N}$ so, daß $||x||, ||y|| < \frac{p}{2} \log 2$ ist. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot H_k \left(\frac{1}{p} \cdot x, \frac{1}{p} \cdot y \right) = p \cdot \left(\left(\frac{1}{p} \cdot x \right) * \left(\frac{1}{p} \cdot y \right) \right)$$

absolut summierbar und besitzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k-1}} h_k(||x||, ||y||)$$

als Majorante. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $q \in \mathbb{N}$ so, daß $\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{p^{k-1}} h_k(||x||, ||y||) < \frac{1}{2}\varepsilon$. ist. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > p$, so daß für alle $n > N$

$$\left|\left| \sum_{k=2}^{q} \frac{1}{n^{k-1}} H_k(x, y) \right|\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{q} \frac{1}{n^{k-2}} h_k(||x||, ||y||) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

gilt. Für $n > N$ gilt daher

$$\begin{aligned}
\left|\left| n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot x * \frac{1}{n} \cdot y \right) - (x + y) \right|\right| &= \left|\left| \sum_{k=2}^{\infty} n \cdot H_k \left(\frac{1}{n} \cdot x, \frac{1}{n} \cdot y \right) \right|\right| \\
&\leq \left|\left| \sum_{k=2}^{q} \frac{1}{n^{k-1}} H_k(x, y) \right|\right| + \left|\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} n \cdot H_k \left(\frac{1}{n} \cdot x, \frac{1}{n} \cdot y \right) \right|\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}} h_k(||x||, ||y||) \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{p^{k-1}} h_k(||x||, ||y||) \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,
\end{aligned}$$

was die erste Gleichung beweist. Die zweite Gleichung folgt aus der ersten mit Hilfe von Korollar (2.7)(i). □

Um die Multiplikation von A zu rekonstruieren, könnte man versuchen, analog wie in der vorherigen Proposition vorzugehen: für $a, b \in B_1(\mathbf{1})$ setze $a \cdot b = \exp((\log a) * (\log b))$. Es zeigt sich aber, daß sich diese Formel nicht für Elemente außerhalb von $B_1(\mathbf{1})$ fortsetzen läßt. Stattdessen rekonstruiert man die Klammer-Operation $[x, y] = xy - yx$. Für x, y in einer hinreichend kleinen Umgebung der 0 und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}x * \frac{1}{n}y\right) * \left(\frac{-1}{n}x * \frac{-1}{n}y\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}(x+y) + \frac{1}{2n^2}[x,y] + \frac{1}{n^3}(\ldots)\right) * \left(\frac{1}{n}(-x-y) + \frac{1}{2n^2}[x,y] + \frac{1}{n^3}(\ldots)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}[x,y] + \frac{1}{n^3}(\ldots).\end{aligned}$$

Beachte dabei, daß $[\frac{1}{n}(x+y), \frac{1}{n}(-x-y)] = \frac{1}{n^2}[x+y, -(x+y)] = 0$ ist. Aus dieser Formel folgt wie in der Proposition zuvor:

(3.6) Proposition (Rekonstruktion der Klammer). *Sei A eine Banach-Algebra. Dann ist für alle $x, y \in A$*

$$[x, y] = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n}x * \frac{1}{n}y * \frac{-1}{n}x * \frac{-1}{n}y\right).$$

Insbesondere ist

$$\exp[x, y] = \lim_{n\to\infty} \operatorname{comm}\left(\exp\frac{1}{n}x, \exp\frac{1}{n}y\right)^{n^2},$$

wobei $\operatorname{comm}(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ *ist.* □

(3.7) Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Ein Vektorraum L über $\mathbb{K}$ mit einer bilinearen Multiplikation

$$L \times L \to L : (x, y) \mapsto [x, y],$$

genannt die *Lie-Klammer*, heißt eine *Lie-Algebra über* $\mathbb{K}$, falls gilt

(LA1) $\forall\, x \in L : [x, x] = 0$

(LA2) (Jacobi-Identität) $\forall\, x, y, z \in L : [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Eine lineare Abbildung $f : L \to M$ zwischen zwei Lie-Algebren heißt *Lie-Algebren-Homomorphismus*, falls $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ für alle $x, y \in L$ gilt.

Bemerkung. Nach (LA1) ist $0 = [x+y, x+y] = [x, x]+[x, y]+[y, x]+[y, y] = [x, y]+[y, x]$, also folgt

(LA1') $\forall\, x, y \in L : [x, y] = -[y, x]$.
Ist die Charakteristik von $\mathbb{K}$ nicht 2, so folgt umgekehrt aus (LA1') die Eigenschaft (LA1).

(3.8) Beispiele. (1) Ist A eine assoziative Algebra über einem Körper $\mathbb{K}$, so wird A durch $[x, y] := xy - yx$ zu einer Lie-Algebra $(A, [.,.])$ über $\mathbb{K}$. Jeder Untervektorraum U von A mit $[U, U] \subseteq U$ wird zu einer Lie-Unteralgebra $(U, [.,.])$.
(2) Ist E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so ist $A = \mathrm{Hom}(E, E)$ bezüglich der in (1) definierten Lie-Klammer eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$. Wir schreiben $\mathfrak{gl}(E) = (A, [.,.])$. Ist $E = \mathbb{K}^n$, so schreiben wir $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ für diese Lie-Algebra; sie läßt sich als die Lie-Algebra aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ beschreiben. Der Untervektorraum $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ mit Spur 0 ist abgeschlossen unter der Lie-Klammer und ist daher eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.
(3) Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer bilinearen Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$. Ein Vektorraum-Endomorphismus $D : E \to E$, für den $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$ für alle $x, y \in E$ gilt, heißt eine *Derivation* von E. Die Menge $\mathrm{Der}(E)$ aller Derivationen von E ist eine Lie-Unteralgebra von $(\mathrm{Hom}(E, E), [.,.])$; die Rechnung $[\mathrm{Der}(E), \mathrm{Der}(E)] \subseteq \mathrm{Der}(E)$ ist leicht zu verifizieren.

(3.9) Definition. Sei L eine Lie-Algebra und sei $x \in L$. Die Abbildung $\mathrm{ad}\,(x) : L \to L : y \mapsto \mathrm{ad}\,(x)(y) := [x, y]$ ist aufgrund der Jacobi-Identität eine Derivation von L, die eine *innere Derivation* von L genannt wird.

Für den Rest dieses Kapitels sei A stets eine Banach-Algebra. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}$ den Vektorraum aller *stetigen* linearen Endomorphismen des *Vektorraumes* A. Bezüglich der Komposition als Multiplikation und der Operatornorm wird $\mathcal{A}$ selbst wieder zu einer Banach-Algebra. Insbesondere ist $\mathcal{A}^{-1}$ eine topologische Gruppe und wir haben wie in Kapitel 2 eine Exponentialfunktion $\exp_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{-1}$. Anstatt $\exp_{\mathcal{A}}(T)$ werden wir auch häufig e^T schreiben. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(A)$ aller Automorphismen der *Banach-Algebra* A ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathcal{A}^{-1}$ und damit insbesondere eine topologische Gruppe (in der Spurtopologie).

(3.10) Definition. (i) Für $x \in A$ sei $L(x) : A \to A : y \mapsto xy$ und $R(x) : A \to A : y \mapsto yx$. Diese Abbildungen sind linear.
(ii) Für $g \in A^{-1}$ setze $\mathrm{Ad}\,(g) : A \to A : x \mapsto gxg^{-1}$. Diese Abbildung ist ein Automorphismus von A, genannt ein *innerer Automorphismus* von A.
(iii) Eine *Derivation* der Banach-Algebra A ist eine *stetige* Derivation des Vektorraumes A. Die Lie-Algebra $\mathrm{Der}(A)$ aller Derivationen von A ist eine Lie-Unteralgebra von $(\mathcal{A}, [.,.])$. Für jedes $a \in A$ ist die innere Derivation $\mathrm{ad}\,(a) : A \to A : x \mapsto [a, x]$ eine stetige Derivation von A.

(3.11) Lemma. *Sei $x, y \in A$ und $g \in A^{-1}$. Dann gilt:*

(i) $L(x), R(x) \in \mathcal{A}$ *und es gilt* $[L(x), R(y)] = 0$.

(ii) $L : A \to \mathcal{A}$ *ist ein kontraktiver Morphismus zwischen Banach-Algebren.*

(iii) $R : A \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ *ist ein kontraktiver Morphismus zwischen Banach-Algebren, wobei* $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{A}, \circ)$ *mit* $S \circ T = TS$ *die zu* $\mathcal{A}$ entgegengesetzte *Banach-Algebra ist.*

(iv) Die Abbildungen $L : A^{-1} \to \mathcal{A}^{-1}$ *und* $g \mapsto R(g)^{-1} : A^{-1} \to \mathcal{A}^{-1}$ *sind Morphismen zwischen topologischen Gruppen.*

(v) $\mathrm{Ad}\,(g) = L(g)R(g)^{-1} = R(g)^{-1}L(g) : A \to A$ *und* $\mathrm{Ad} : A^{-1} \to \mathrm{Aut}(A)$ *sind Morphismen zwischen topologischen Gruppen. Die Abbildung* Ad *heißt adjungierte Darstellung von* A^{-1}.

(vi) $\mathrm{ad}\,(x) = L(x) - R(x) : A \to A$ *und* $\mathrm{ad} : (A, [.,.]) \to \mathrm{Der}(A)$ *ist ein Morphismus zwischen Lie-Algebren. Die Abbildung* ad *heißt adjungierte Darstellung von* $(A, [.,.])$.

Beweis. (i) Da die Multiplikation in A stetig ist, sind die Abbildungen $L(x)$ und $R(x)$ stetig. Die Linearität dieser Abbildungen entspricht den beiden Distributivgesetzen und den Axiomen für die Skalarmultplikation. Für $z \in A$ ist $[L(x), R(y)](z) = L(x)R(y)(z) - R(y)L(x)(z) = x(zy) - (xz)y = 0$.

(ii), (iii) Aus den beiden Distributivgesetzen folgt auch $L(x+y) = L(x) + L(y)$ und $R(x+y) = R(x) + R(y)$. Die Relationen $L(xy) = L(x)L(y)$ und $R(xy) = R(y)R(x)$ sind äquivalent zum Assoziativgesetz der Multiplikation. Die Ungleichung $||xy|| \leq ||x||\,||y||$ übersetzt sich in $||L(x)|| \leq ||x||$ und $||R(y)|| \leq ||y||$. Also sind L und R kontraktive Morphismen zwischen Banach-Algebren.

(iv) Die Enschränkungen der Abbildungen L und R auf A^{-1} sind Homomorphismen. Da diese kontraktiv sind, sind sie insbesondere stetig.

(v) Für $z \in A$ ist $\mathrm{Ad}\,(g)(z) = gzg^{-1} = L(g)R(g^{-1})(z)$, also gilt $\mathrm{Ad}\,(g) = L(g)R(g^{-1}) = L(g)R(g)^{-1}$. Da Multiplikation und Inversion stetig sind, ist $\mathrm{Ad} \in \mathrm{Aut}(A)$. Da L und R kommutierende Morphismen zwischen A^{-1} und $\mathcal{A}^{-1}$ sind, ist auch $\mathrm{Ad} : A^{-1} \to \mathrm{Aut}(A)$ ein Morphismus zwischen topologischen Gruppen.

(vi) Es ist $\mathrm{ad}\,(x)(y) = xy - yx = L(x)(y) - R(x)(y)$, also $\mathrm{ad}\,(x) = L(x) - R(x)$. Mit L und R ist auch ad linear und stetig. Schließlich ist die Jacobi-Identität äquivalent zu $\mathrm{ad}\,[x, y] = [\mathrm{ad}\,(x), \mathrm{ad}\,(y)]$. □

(3.12) Lemma. *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine konvergente Potenzreihe in A. Dann gilt:*

(i) Es ist $\alpha(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha(x)^n$ *für jeden stetigen Algebren-Morphismus* $\alpha : A \to A$.

(ii) $L(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L(x)^n$ *und* $R(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R(x)^n$.

(iii) $\alpha(\exp x) = \exp \alpha(x)$, $L(\exp x) = e^{L(x)}$ *und* $R(\exp x) = e^{R(x)}$.

□

(3.13) Proposition. *Seien $x, y \in A$ und $g \in A^{-1}$. Dann gilt:*

(i) $g(\exp x)g^{-1} = \exp((\mathrm{Ad}\, g)(x))$.

(ii) $\mathrm{Ad} \circ \exp_A = \exp_{\mathcal{A}} \circ \mathrm{ad}$, *d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathrm{Der}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_A} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{\mathcal{A}}} \\ A^{-1} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}(A) \end{array}$$

(iii) $\exp x \exp y \exp -x = \exp(e^{\mathrm{ad}\,(x)} y)$.

(iv) $x * y * -x = e^{\mathrm{ad}\,(x)} y = y + [x, y] + \frac{1}{2}[x, [x, y]] + \ldots$ *für alle x, y in einer hinreichend kleinen Umgebung der 0.*

Beweis. (i) folgt aus Lemma (3.12)(iii) mit $\alpha = \mathrm{Ad}\,(g)$.
(ii) Nach Lemma (3.11)(vi) ist $e^{\mathrm{ad}\,(x)} = e^{L(x)-R(x)} = e^{L(x)} e^{-R(x)}$. Lemma (3.12)(iii) sagt $e^{L(x)} e^{-R(x)} = L(\exp x) R(\exp x)^{-1}$ und nach Lemma (3.11)(v) ist $L(\exp x) R(\exp x)^{-1} = \mathrm{Ad}\,(\exp x)$.
(iii) Folgt aus (i) und (ii) mit $g = \exp x$.
(iv) Wähle eine Null-Umgebung U so klein, so daß $e^{\mathrm{ad}\,(x)} y \in N_0$ und $x * y, x * y * -x \in N_0$ für alle $x, y \in U$ gilt. Dann ist $\exp(x * y * -x) \in B_1(\mathbf{1})$ und es ist

$$x * y * -x = \log \exp(x * y * -x) = \log(\exp x \exp y \exp -x)$$

nach Korollar (2.7)(i). Nun zeigt (iii), daß $\exp(x * y * -x) = \exp(e^{\mathrm{ad}\,(x)} y)$ gilt, und die Behauptung folgt durch Anwenden des Logarithmus. □

Bemerkung. Die Abbildung $(x, y) \mapsto e^{\mathrm{ad}\,(x)} y : A \times A \to A$ ist auf ganz $A \times A$ definiert, dort analytisch und linear in y. In einer Umgebung von $(0, 0)$ (und damit auf jeder Umgebung von $(0, 0)$, auf der $x*y*-x$ definiert ist) stimmt diese Abbildung mit $(x, y) \mapsto x*y*-x$ überein.

(3.14) Korollar. *Sei $x \in A$ und sei V ein abgeschlossener Untervektorraum von A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $[x, V] \subseteq V$.

(ii) $e^{t \cdot \mathrm{ad}\, x} V = V$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\mathrm{Ad}\,(\exp t \cdot x) V = (\exp t \cdot x) V (\exp -t \cdot x) = V$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

Für $||x|| < \frac{\log 2}{2}$ sind (i), (ii), (iii) äquivalent zu

(iv) $e^{\mathrm{ad}\, x} V = V$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Nach (i) ist der Unterraum V invariant unter $\operatorname{ad} x$. Aus der Potenzreihendarstellung von $e^{-t\cdot\operatorname{ad} x}$ ist damit $e^{t\cdot\operatorname{ad} x}V \subseteq V$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Hierbei geht die Abgeschlossenheit von V ein! Insbesondere ist auch $e^{-(t\cdot\operatorname{ad} x)}V = e^{-t\cdot\operatorname{ad} x}V \subseteq V$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was $V \subseteq e^{t\cdot\operatorname{ad} x}V$ zur Folge hat.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Folgt sofort aus Proposition (3.13)(ii) und der Linearität von $\operatorname{ad} x$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): trivial.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Für $v \in V$ ist

$$\begin{aligned} e^{t\cdot\operatorname{ad} x}v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(t\cdot\operatorname{ad} x)^n v \\ &= v + t[x,v] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}(t\cdot\operatorname{ad} x)^n v \\ &= v + t[x,v] + t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}(\operatorname{ad} x)^{n+2} v, \end{aligned}$$

also

$$[x,v] + t\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}(\operatorname{ad} x)^{n+2} v = \frac{1}{t}\left((e^{t\cdot\operatorname{ad} x}v) - v\right).$$

Nach (ii) ist die rechte Seite der letzten Gleichung in V. Da V abgeschlossen ist, haben wir

$$[x,v] = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t}\left((e^{t\cdot\operatorname{ad} x}v) - v\right) \in V.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Sei $x \in A$ mit $||x|| < \frac{\log 2}{2}$. Dann ist

$$||\operatorname{ad}(x)(y)|| = ||[x,y]|| = ||xy - yx|| \leq 2||x||\,||y|| < (\log 2)||y||,$$

woraus $||\operatorname{ad} x|| < \log 2$ in $\mathcal{A}$ folgt. Nach Lemma (2.3) ist damit $||e^{\operatorname{ad} x} - \mathrm{id}_A|| < 1$. Also können wir $\operatorname{ad} x = \log e^{\operatorname{ad} x} = \log(\mathrm{id}_A + (e^{\operatorname{ad} x} - \mathrm{id}_A))$ schreiben. Der Unterraum V ist invariant unter $e^{\operatorname{ad} x}$ und damit auch unter $T = e^{\operatorname{ad} x} - \mathrm{id}_A$. Damit ist V auch invariant unter

$$T - \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{3}T^3 \mp \ldots = \log(\mathrm{id}_A + T) = \operatorname{ad} x.$$

was zu beweisen war. □

(3.15) Korollar. *Sei $x \in A$ mit $||x|| < \frac{\log 2}{2}$. Dann gilt:*

(i) $\operatorname{ad} x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(e^{\operatorname{ad} x} - \mathrm{id}_A)^n$.

(ii) es ist $[x,y] = 0$ genau dann, wenn $e^{\operatorname{ad} x}y = y$ gilt.

Beweis. (i) wurde schon in Korollar (3.14) bewiesen. Aus

$$e^{\operatorname{ad} x} y = y + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\operatorname{ad} x)^n [x, y]$$

sieht man, daß aus $[x, y] = 0$ stets $e^{\operatorname{ad} x} y = y$ folgt. Ist $||x|| < \frac{\log 2}{2}$, so läßt sich $\operatorname{ad} x$ nach (i) schreiben als $\operatorname{ad} x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (e^{\operatorname{ad} x} - \mathrm{id}_A)^n$. Also folgt aus $e^{\operatorname{ad} x} y = y$ die Beziehung $\operatorname{ad}(x)(y) = [x, y] = 0$. □

KAPITEL 4

Das Differential der Exponentialabbildung

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n = \begin{cases} \frac{1-e^{-z}}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 1 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Wegen $f^{-1}(0) = 2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ bekommen wir eine analytische Abbildung

$$g : \mathbb{C} \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{f(z)} = 1 + \frac{1}{2}z + \dots.$$

Wir werden im folgenden die komplexen Abbildungen $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$ und $g = \frac{1}{f}$ auch als analytische Abbildungen auf den Banach-Algebren A und $\mathcal{A}$ auffassen.

(4.1) Lemma. *Seien $x, y \in A$ mit $[x, y] = 0$. Dann ist*

$$(\exp x) f(x - y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n-1} x^p y^q.$$

Beweis. Wir argumentieren im Körper $\mathbb{K}((x, y))$ der formalen Laurentreihen in den kommutierenden Unbestimmten x und y. Die Gleichung ist klar für $x = y$. Seien also x und y verschieden mit $[x, y] = 0$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{p=0}^{n-1} x^{n-p-1} y^p = \sum_{p+q=n-1} x^p y^q.$$

Dies ergibt nach der Produktregel für konvergente Reihen

$$(\exp x) f(x - y) = (\exp x) \frac{1 - \exp(y - x)}{x - y} = \frac{\exp x - \exp y}{x - y},$$

woraus die Behauptung folgt. □

(4.2) Lemma. *Für $x, y \in A$ mit $||y|| \leq 1$ ist*

$$\exp(x+y) - \exp x = (\exp x) f(\operatorname{ad} x) y + \rho(x,y)$$

mit $||\rho(x,y)|| \leq ||y||^2 e^{1+||x||}$.

Beweis. Wir benötigen als erstes die Binomial-Formeln für zwei nichtkommutierende Elemente x und y. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ und setze $N := \{1, \ldots, n\}$. Für $J \subseteq N$ definiere

$$u(J) = u_1(J) \cdot \ldots \cdot u_n(J) \quad \text{mit} \quad u_k(J) = \begin{cases} y & \text{falls } k \in J \\ x & \text{falls } k \in N \setminus J \end{cases}$$

Insbesondere ist dann $u(\emptyset) = x^n$ und $u(\{k\}) = x^{k-1} y x^{n-k} = (L(x)^{k-1} R(x)^{n-k})(y)$. Dies ergibt

$$\sum_{J \subseteq N, |J|=1} u(J) = \sum_{p+q=n-1} (L(x)^p R((x)^q)(y).$$

Nun ist

$$(x+y)^n = \sum_{J \subseteq N} u(J) = x^n + \sum_{J \subseteq N, |J|=1} u(J) + \rho_n(x,y)$$

mit $\rho_n(x,y) = \sum_{J \subseteq N, |J| \geq 2} u(J)$. Für $||y|| \leq 1$ ist

$$\begin{aligned} ||\rho_n(x,y)|| &\leq \sum_{J \subseteq N, |J| \geq 2} ||x||^{n-|J|} ||y||^{|J|} = \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} ||x||^{n-m} ||y||^m \\ &\leq ||y||^2 \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} ||x||^{n-m} \leq ||y||^2 (1 + ||x||)^n, \end{aligned}$$

woraus

$$||\frac{1}{n!} \rho_n(x,y)|| \leq ||y||^2 \frac{(1+||x||)^n}{n!}$$

folgt. Dies ergibt

$$\exp(x+y) = \exp x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p+q=n-1} L(x)^p R(x)^q \right)(y) + \rho(x,y)$$

mit

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho_n(x,y)$$

und

$$||\rho(x,y)|| \leq ||y||^2 e^{1+||x||}$$

für $||y|| \leq 1$. Die linearen Operatoren $L(x)$ und $R(x)$ kommutieren und es ist $L(x) - R(x) = \operatorname{ad} x$. Damit gilt nach Lemma (4.1)

$$e^{L(x)} f(\operatorname{ad} x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n-1} L(x)^p R(x)^q$$

für alle $x \in A$. Also gilt für alle $x, y \in A$ mit $||y|| \leq 1$

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \exp x + e^{L(x)} f(\operatorname{ad} x) y + \rho(x,y) \\ &= \exp x + L(\exp x) f(\operatorname{ad} x) y + \rho(x,y) \\ &= \exp x + (\exp x) f(\operatorname{ad} x) y + \rho(x,y). \end{aligned}$$

□

(4.3) Definition. Seien E und F Banach-Räume und sei $f : U \to F$ eine Abbildung von der offenen Teilmenge U von E in F. Die *Ableitung* von f in $u \in U$ ist ein linearer Operator $f'(u) : E \to F$ mit $f(u+h) - f(u) = f'(u)h + r(u,h)$, wobei $\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{1}{||h||} r(u,h) = 0$ ist.

Aus der obigen Definition folgt mit Hilfe von Lemma (4.2) sofort die Ableitung der Exponentialfunktion.

(4.4) Korollar. *Die Ableitung von* exp *in $a \in A$ ist gegeben durch*

$$\exp'(a)h = (\exp a) f(\operatorname{ad} a) h = (\exp a) \frac{\mathrm{id}_A - e^{-\operatorname{ad} a}}{\operatorname{ad} a} h$$

bzw. durch

$$L^{-1}(\exp a) \exp' a = L(\exp -a) \exp' a = f(\operatorname{ad} a).$$

□

(4.5) Definition. Eine offene ε-Kugel B um 0 mit $\varepsilon \leq 1$ heißt *normal*, wenn gilt:

(a) $B * (B * B)$ und $(B * B) * B$ ist definiert,

(b) für alle $x, y, z \in B$ ist $x * (y * z) = (x * y) * z$,

(c) für alle $x, y \in B$ und alle $t \in [0,1]$ ist $||x * t \cdot y|| < \pi$.

Bemerkung. Aufgrund der Stetigkeit der Operation $*$ und der Skalarmultiplikation gibt es stets eine normale Umgebung.

(4.6) Theorem. *Sei B eine normale Umgebung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Zu jedem $x \in B$ gibt es eine Umgebung V von 0 und $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in V$

$$(-x) * (x + y) = f(\operatorname{ad} x)(y) + o_1(x, y), \quad ||o_1(x, y)|| \leq ||y||^2 C_1 \tag{1}$$

$$x * y = x + g(\operatorname{ad} x)(y) + o_2(x, y), \quad ||o_2(x, y)|| \leq ||y||^2 C_2 \tag{2}$$

gilt.

(ii) Seien $x, y \in B$ und sei $\mathfrak{g}$ die kleinste abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$, die x und y enthält. Dann ist $x * y - (x + y) \in \overline{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ und $x * y \in \mathfrak{g}$.

Beweis. (i) Für $x \in B$ setze $F(y) := (-x) * (x + y)$ und $G(y) := (-x) + (x * y)$. Diese Abbildungen sind auf geeigneten Null-Umgebungen definiert und dort nach Korollar (2.7) invers zueinander:

$$F(G(y)) = (-x) * (x + (-x) + (x * y)) = (-x) * (x * y) = ((-x) * x) * y = 0 * y = 0 + y = y$$

und

$$G(F(y)) = (-x)+(x*((-x)*(x+y))) = (-x)+((x*(-x))*(x+y)) = (-x)+(0+(x+y)) = y.$$

Damit gilt für die Ableitungen $G'(0) = F'(0)^{-1}$. Da beide Abbildungen analytisch sind, beweist dies die Äquivalenz der beiden Gleichungen in (i). Wir werden im folgenden die erste Gleichung beweisen. Seien dazu $-x, x + y \in B$ und $||y|| < 1$. Nach Lemma (4.2) ist

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot (1 + f(\operatorname{ad} x)y + \sigma(x, y))$$

mit $\sigma(x, y) := e^{-x}\rho(x, y)$. Also ist $||\sigma(x, y)|| \leq ||y||^2 e^{1+2||x||}$. Korollar (2.7) ergibt aus der obigen Gleichung

$$\exp((-x) * (x + y)) = \exp(-x) \exp(x + y) = 1 + f(\operatorname{ad} x)y + \sigma(x, y).$$

Für hinreichend kleine y können wir auf beiden Seiten logarithmieren und erhalten so

$$(-x) * (x + y) = \log(1 + f(\operatorname{ad} x)y + \sigma(x, y)) = f(\operatorname{ad} x)y + \tau(x, y)$$

mit $||\tau(x, y)|| \leq ||y||^2 r(||x||, ||y||)$, wobei r eine analytische Funktion auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(ii) Seien $x, y \in B$. Nach Definition (4.5)(a) ist $\varphi : t \mapsto x * t \cdot y : [0, 1] \to A$ definiert und nach (b) ist $||\varphi(t)|| < \pi$, woraus $||\operatorname{ad} \varphi(t)|| < 2\pi$ folgt. Teil (i), Definition (4.5)(a) und Lemma (4.2) besagen nun

$$\begin{aligned}\varphi(t + h) &= x * (t + h) \cdot y = x * (t \cdot y + h \cdot y) = x * (t \cdot y * h \cdot y) = (x * t \cdot y) * h \cdot y \\ &= \varphi(t) * h \cdot y = \varphi(t) + h \cdot g(\operatorname{ad} \varphi(t))(y) + o_2(x, h \cdot y).\end{aligned}$$

Dies zeigt $\varphi'(t) = g(\operatorname{ad}\varphi(t))(y)$. Sei U eine offene Nullumgebung so, daß $||u+x+t\cdot y|| < \pi$ für alle $u \in U$ und alle $t \in [0,1]$ gilt. Eine solche Umgebung U existiert, da der Radius von B höchstens 1 ist und deshalb $||x+y|| \leq 2 < \pi$ gilt. Setze $\mathfrak{v} := \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Abbildung $\Lambda_t : U \to A : u \mapsto g(\operatorname{ad}(u+x+t\cdot y))(y) - y$ ist ein von t abhängiges Vektorfeld auf U mit $\Lambda_t(u) \in \mathfrak{v}$ für alle $u \in U \cap \mathfrak{g}$. Verwende dazu die Reihenentwicklung $1 + \frac{z}{2} + \ldots$ von g. Betrachte die Kurve $\beta : [0,1] \to A : t \mapsto x * t\cdot y - (x + t\cdot y)$. Es ist $\beta'(t) = \varphi'(t) - y = g(\operatorname{ad}\varphi(t))(y) - y = \Lambda_t(\beta(t))$. Das Anfangswertproblem

$$\omega'(t) = \Lambda_t(\omega(t)), \quad \omega(0) = 0$$

im Banach-Raum $\mathfrak{v}$ hat in $\mathfrak{v}$ eine eindeutige lokale Lösung $\omega : [0,\varepsilon) \to U \cap \mathfrak{g}$. Betrachtet man das obige Anfangswertproblem in A, so besitzt dieses dort eine eindeutige lokale Lösung Ω, die aufgrund der Eindeutigkeit mit ω auf $[0,\varepsilon)$ übereinstimmt. In A kennen wir aber eine Lösung, nämlich β. Also ist $\omega = \beta\big|_{[0,\varepsilon)}$. Die analytische Kurve $t \mapsto \beta(t) + \mathfrak{v} : [0,1] \to A/\mathfrak{v}$ in den Quotientenraum $A/\mathfrak{v}$ ist Null auf dem Intervall $[0,\varepsilon)$ und ist daher aufgrund der Analytizität konstant Null auf $[0,1]$. Also ist insbesondere $x * y - (x+y) = \beta(1) \in \mathfrak{v}$ und es folgt $x * y \in x + y + \mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$. □

(4.7) Theorem. *Seien A und A' Banach-Algebren und sei B eine normale Umgebung in A. Sei $\mathfrak{g}$ eine abgeschlossene Lie Unteralgebra von $(A,[.,.])$. Ist $T : \mathfrak{g} \to A'$ eine stetige lineare Abbildung mit $T[x,y] = [Tx,Ty]$, so ist $T(x*y) = (Tx)*(Ty)$ für alle $x,y \in B \cap \mathfrak{g}$.*

Beweis. Wie im letzten Beweis setze $\varphi : t \mapsto x * t\cdot y : [0,1] \to A$. Da $\mathfrak{g}$ abgeschlossen ist, ist $\overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \subseteq \mathfrak{g}$ Nach Theorem (4.6)(ii) folgt daher $\varphi(t) = x * t\cdot y \in \mathfrak{g}$ für alle $x,y \in B \cap \mathfrak{g}$ und alle $t \in [0,1]$. Dann ist aber auch $y + \frac{1}{2}[\varphi(t),y] + \ldots = g(\operatorname{ad}\varphi(t))(y) = \varphi'(t) \in \mathfrak{g}$. Da T mit der Lie-Klammer vertauscht, folgt

$$T(g(\operatorname{ad}\varphi(t))(y)) = g(\operatorname{ad}T\varphi(t))(Ty).$$

Also ist $\psi := T\varphi : [0,1] \to A'$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\psi'(t) = g(\operatorname{ad}\psi(t))(Ty), \quad \psi(0) = Tx.$$

Da auch $\chi(t) = Tx * t\cdot Ty$ eine Lösung des obigen Anfangswertproblems ist, folgt $\chi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Damit ist $T(x*y) = T\varphi(1) = \psi(1) = \chi(1) = (Tx)*(Ty)$. □

(4.8) Theorem. *Sei B_0 eine zusammenhängende offene Menge mit $0 \in B_0$, so daß $(x,y) \mapsto x*y : B_0 \times B_0 \to A$ definiert und analytisch ist. Sei $\mathfrak{g}_0$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $(A,[.,.])$. Ist $\mathfrak{g}_0 \cap B_0$ zusammenhängend, so ist $(\mathfrak{g}_0 \cap B_0) * (\mathfrak{g}_0 \cap B_0) \subseteq \mathfrak{g}_0$. Ist insbesondere B_0 eine ε-Kugel von 0, so ist $\mathfrak{g}_0 \cap B_0$ stets zusammenhängend.*

Beweis. Sei B eine normale Umgebung in A. Nach Theorem (4.6)(ii) ist $(\mathfrak{g}_0 \cap B) * (\mathfrak{g}_0 \cap B) \subseteq \mathfrak{g}_0$. Die analytische Abbildung

$$\beta : (\mathfrak{g}_0 \cap B_0) \times (\mathfrak{g}_0 \cap B_0) \to A/\mathfrak{g}_0 : (x, y) \mapsto x * y + \mathfrak{g}_0$$

verschwindet auf der offenen Teilmenge $(B \cap B_0 \cap \mathfrak{g}_0) \times (B \cap B_0 \cap \mathfrak{g}_0)$ von $(\mathfrak{g}_0 \cap B_0) \times (\mathfrak{g}_0 \cap B_0)$ und ist deshalb identisch Null auf der letzteren Menge. Dies ist aber gerade die Aussage des Theorems. □

Als nächstes wollen wir untersuchen, in welchen Punkten $a \in A$ die Exponentialfunktion exp regulär ist, d.h. in welchen Punkten das Differential von exp invertierbar ist. Dazu benötigen wir den Begriff des Spektrums $\operatorname{Spec} a$ eines Elementes a in einer *komplexen* Banach-Algebra A. Es ist

$$\operatorname{Spec} a := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, a - \lambda \cdot \mathbf{1} \notin A^{-1} \right\}.$$

Ist A eine *reelle* Banach-Algebra, so wird für $a \in A$ das Spektrum von a definiert durch $\operatorname{Spec} 1 \otimes a$, wobei $1 \otimes a$ ein Element der Komplexifizierung $\mathbb{C} \otimes A$ von A ist. Da die Algebra aller stetigen Operatoren eines Banach-Raumes selbst ein Banach-Raum ist bezüglich der Operator-Norm, läßt sich das Spektrum eines Operators analog definieren. Wir beweisen zunächst das folgende Lemma.

(4.9) Lemma. *Sei A eine Banach-Algebra und sei $a \in A$. Dann sind für die Abbildung f vom Anfang dieses Kapitels folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f(a) \notin A^{-1}$

(ii) $0 \in \operatorname{Spec} f(a)$

(iii) $\operatorname{Spec} a \cap (2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist trivial. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus dem spektraler Abbildungssatz (etwa Bourbaki, Prop. 7, p. 47 oder Reed, Simon, Functional Analysis I, Theorem VII.1(e), p. 222). Dieser besagt $f(\operatorname{Spec} a) = \operatorname{Spec} f(a)$. Damit ist $0 \in \operatorname{Spec} f(a) = f(\operatorname{Spec} a)$ genau dann, wenn $\operatorname{Spec} a \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset$ ist. Wegen $f^{-1}(0) = 2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ beweist dies die zweite Äquivalenz. □

(4.10) Korollar. *Sei $\mathfrak{g}$ eine abgeschlossene Lie Unteralgebra von $(A, [.,.])$. Der lineare Operator*

$$L^{-1}(\exp x) \exp'(x)\big|_{\mathfrak{g}} = f(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

wobei $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)(y) = [x, y]$ für $x, y \in \mathfrak{g}$ ist, ist genau dann invertierbar, wenn

$$\operatorname{Spec}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x) \cap (2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \emptyset$$

ist. □

KAPITEL 5

Lokale Gruppen

In diesem Kapitel sei A stets eine Banach-Algebra und $B = B_r(0)$ eine normale Umgebung. Dann sind die Produkte $B * B$, $B * (B * B)$ und $(B * B) * B$ definiert.

(5.1) Definition. Eine nichtleere Teilmenge $\Gamma \subseteq B$ heißt *lokale Gruppe* in B, falls die Relationen $(\Gamma * \Gamma) \cap B \subseteq \Gamma$ und $-\Gamma = \Gamma$ gelten. Ist die Menge Γ in B abgeschlossen, so nennen wir die lokale Gruppe Γ *abgeschlossen*.

Bemerkung. (i) Eine lokale Gruppe Γ enthält stets das Neutralelement 0, denn für $a \in \Gamma$ ist auch $-a \in \Gamma$ und es folgt $0 = -a * a \in (\Gamma * \Gamma) \cap B \subseteq \Gamma$.
(ii) Nach Theorem (4.6) ist für jede normale Umgebung B und jede abgeschlossene Lie Unteralgebra $\mathfrak{g}$ von $(A, [.,.])$ die Menge $\Gamma := \mathfrak{g} \cap B$ eine lokale Gruppe in B.

(5.2) Definition. Für $\Gamma \subseteq A$ setze

$$\mathcal{T}(\Gamma) := \left\{ x \in A \;\middle|\; \exists\, (x_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\exists\, (m_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x = \lim_{n\to\infty} m_n x_n \right\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{T}(\Gamma)$ heißen *Subtangentialvektoren* von Γ in 0. Sind sowohl x als auch $-x$ Subtangentialvektoren, so heißt x ein *Tangentialvektor*.

(5.3) Lemma. *Sei $\Gamma \subseteq B$ und sei U eine offene Umgebung von 0. Dann gilt:*
(i) $\mathcal{T}(\overline{\Gamma}) = \mathcal{T}(\Gamma)$,
(ii) $\mathcal{T}(\Gamma \cap U) = \mathcal{T}(\Gamma)$.

Beweis. (i) Sei $y \in \mathcal{T}(\overline{\Gamma})$. Dann ist $y = \lim_{n\to\infty} m_n y_n$ für $y_n \in \overline{\Gamma}$. Wähle eine Folge (x_n) in Γ mit $||x_n - y_n|| < \frac{1}{m_n n}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} m_n(x_n - y_n) = 0$ und $y = \lim_{n\to\infty} m_n x_n \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Also ist $y \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Die andere Inklusion ist trivial.

(ii) Sei $y \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Dann ist $y = \lim_{n\to\infty} m_n y_n$ für $y_n \in \Gamma$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Damit können wir annehmen, daß alle Folgenglieder y_n in U liegen. d.h. es ist $y \in \mathcal{T}(\Gamma \cap U)$. Die andere Inklusion ist wieder trivial. □

(5.4) Lemma. *Sei $\Gamma \subseteq B$ eine abgeschlossene lokale Gruppe in B und sei $x \in B$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $x \in \mathcal{T}(\Gamma)$,

(ii) $\mathbb{R} \cdot x \cap B \subseteq \Gamma$.

Insbesondere ist

$$B \cap \mathcal{T}(\Gamma) = \Gamma \cap \mathcal{T}(\Gamma), \qquad (\heartsuit)$$

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Setze $x_n := \frac{1}{n} \cdot x$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} n x_n = x$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $x = \lim_{n\to\infty} t_n x_n$ für eine Nullfolge (x_n) aus Γ und $t_n \in \mathbb{N}$. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $r \cdot x \in B$. Es ist zu zeigen, daß $r \cdot x \in \Gamma$ gilt. Setze $r_n := r \cdot t_n$. Dann ist $r \cdot x = \lim_{n\to\infty} r_n x_n$. Für $s \in \mathbb{R}$ setze $[s] := \max_{z\in\mathbb{Z}} \{z \leq s\}$ und $d(s) := s - [s] < 1$. Dann ist $0 \leq ||d(r_n) \cdot x_n|| = d(r_n)||x_n|| \leq ||x_n||$, woraus $\lim_{n\to\infty} d(r_n) \cdot x_n = 0$ folgt. Damit ist $r \cdot x = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} [r_n] \cdot x_n$. Ist $r \cdot x \in \Gamma$, so auch $(-r) \cdot x \in \Gamma$. Somit können wir o.E. annehmen, daß $r_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ ist $[r_n] \cdot x_n \in B$. Wir zeigen via Induktion, daß $k \cdot x_n \in \Gamma$ ist für alle $k \in \{1, \ldots, [r_n]\}$. Dies gilt nach (i) für $k = 1$. Sei also $k \cdot x_n \in \Gamma$ für ein $k < [r_n]$. Dann ist $(k+1) \cdot x_n = (k \cdot x_n) * x_n \in \Gamma * \Gamma$ nach Proposition (2.7)(iii). Aufgrund der Konvexität von B ist $(k+1) \cdot x_n = \frac{k+1}{[r_n]}([r_n] \cdot x_n) \in B$, also folgt $(k+1) \cdot x_n \in \Gamma$. Nach Induktion ist damit auch $[r_n] \cdot x_n \in \Gamma$. Da Γ in B abgeschlossen ist, folgt $r \cdot x = \lim_{n\to\infty} [r_n] \cdot x_n \in \Gamma$.

Ist schließlich $x \in B \cap \mathcal{T}(\Gamma)$, so ist $x \in \mathbb{R} \cdot x \cap B \subseteq B \cap \Gamma$, also $x \in \Gamma \cap \mathcal{T}(\Gamma)$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. □

(5.5) Theorem. *Sei $\Gamma \subseteq B$ eine abgeschlossene lokale Gruppe in B. Dann ist $\mathcal{T}(\Gamma)$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$. Ist zudem Γ lokalkompakt, so gibt es eine offene Kugel B' um 0 in B mit*

$$B' \cap \Gamma = B' \cap \mathcal{T}(\Gamma) \qquad (\diamondsuit)$$

und $\dim \mathcal{T}(\Gamma)$ ist endlich.

Beweis. (i) $\mathcal{T}(\Gamma)$ ist abgeschlossen: Sei $x \in \overline{\mathcal{T}(\Gamma)}$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in $\mathcal{T}(\Gamma)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $r \cdot x \in B$. Dann ist $r \cdot x_n \in B$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma (5.4) $(i) \Longrightarrow (ii)$ ist deshalb $r \cdot x_n \in \Gamma$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da Γ in B abgeschlossen ist, ist auch $r \cdot x \in \Gamma$. Dies bedeutet $x \in \mathcal{T}(\Gamma)$ nach Lemma (5.4) $(ii) \Longrightarrow (i)$.

(ii) $\mathcal{T}(\Gamma)$ ist eine Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$: Nach Lemma (5.4) ist $\mathcal{T}(\Gamma)$ abgeschlossen unter der Skalarmultiplikation. Die Menge $\mathcal{T}(\Gamma)$ ist auch abgeschlossen unter der Addition: Seien dazu $x, y \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Dann liegen $\frac{1}{n} \cdot x$ und $\frac{1}{n} \cdot y$ für hinreichend große n in Γ (Lemma (5.4)). Nach Definition einer lokalen Gruppe ist auch $\frac{1}{n} \cdot x * \frac{1}{n} \cdot y \in \Gamma$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition (3.5) ist dann $x + y = \lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{n} \cdot x * \frac{1}{n} \cdot y) \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Analog zeigt

man $[x,y] \in \mathcal{T}(\Gamma)$ mit Hilfe von Proposition (3.6). Damit ist $\mathcal{T}(\Gamma)$ eine Lie-Unteralgebra von $(A;[.,.])$.

(iii) Sei nun Γ lokalkompakt. Nach Lemma (5.4) ist $\Gamma \cap \mathcal{T}(\Gamma) = B \cap \mathcal{T}(\Gamma)$, und diese Menge ist eine lokalkompakte Nullumgebung in $\mathcal{T}(\Gamma)$. Insbesondere ist also $\mathcal{T}(\Gamma)$ lokalkompakt und damit endlich-dimensional (Satz von Riesz, siehe Diedonné, [1], 5.9.4). Jeder endlich-dimensionale Untervektorraum eines Banach-Raumes besitzt ein Vektorraum-Komplement E, also ist $A = \mathcal{T}(\Gamma) \oplus E$ algebraisch und topologisch (siehe Diedonné, [1], 5.9.3). Das Differential $\mu'(0)$ der Abbildung

$$\mu : (B \cap \mathcal{T}(\Gamma)) \oplus (B \cap E) \to A : x + y \mapsto x * y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + H_3(x,y) + \dots$$

an der Stelle 0 ist die Identität $\mathrm{id}_A : A = \mathcal{T}(\Gamma) \oplus E \to A$. Nach dem Satz über die lokale Inverse (siehe Reed-Simon, [7], Corollary 1 zu Theorem S.11, p. 367) ist somit μ ein lokaler Diffeomorphismus. Es gibt also offene Kugeln $B_1 \subseteq \mathcal{T}(\Gamma)$ und $B_2 \subseteq E$ um 0 mit $B_1 * B_2 \subseteq B$, so daß $x + y \mapsto x * y : B_1 \oplus B_2 \to B_1 * B_2$ ein Diffeomorphismus ist. Dabei sind $B_1 \oplus B_2$ und $B_1 * B_2$ offene Umgebungen von 0.

(iv) Es ist $B' \cap \mathcal{T}(\Gamma) \subseteq B' \cap \Gamma$ für alle offenen Kugeln $B' \subseteq B$ um 0, denn für $x \in B' \cap \mathcal{T}(\Gamma)$ ist nach Lemma (5.4) $\mathbb{R} \cdot x \cap B' \subseteq \Gamma$. Wegen $x \in B'$ ist damit $x \in \Gamma \cap B'$.

(v) Angenommen, es gibt keine offene Kugel B' um 0 mit $B' \cap \Gamma = B' \cap \mathcal{T}(\Gamma)$. Dann gibt es nach (iv) eine Nullfolge (z_n) in $\Gamma \setminus \mathcal{T}(\Gamma)$. Wir können dabei o.E. annehmen, daß alle z_n in der Nullumgebung $B_1 * B_2$ liegen. Wir schreiben $z_n = x_n * y_n$ mit $x_n \in B_1 \subseteq \mathcal{T}(\Gamma)$ und $y_n \in B_2 \subseteq E$. Wegen $z_n \notin \mathcal{T}(\Gamma)$ und $x_n \in \mathcal{T}(\Gamma)$ ist $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (5.4)(♡) ist $B \cap \mathcal{T}(\Gamma) \subseteq \Gamma$, also ist $x_n \in \Gamma$. Für hinreichend große n ist nach Definition einer lokalen Gruppe $y_n = (-x_n) * (x_n * y_n) \in \Gamma * \Gamma \cap B \subseteq \Gamma$. Sei B'' eine offene Kugel um 0 mit Radius s, so daß $\Gamma \cap \overline{B''}$ kompakt ist. Wegen $\lim_{n\to\infty} \left|\left|\left[\frac{s}{2||y_n||}\right] \cdot y_n\right|\right| = \frac{s}{2}$ können wir annehmen, daß die Folge $y'_n := \left[\frac{s}{2||y_n||}\right] \cdot y_n$ in der kompakten Menge $\Gamma \cap \overline{B''}$ liegt. Dort besitzt diese Folge einen Häufungspunkt y' und wir finden eine Teilfolge, die gegen diesen Häufungspunkt konvergiert. Wir können o.E. annehmen, daß die Folge (y'_n) gegen y' konvergiert. Nach Definition von $\mathcal{T}(\Gamma)$ ist $y' \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Wegen $||y'|| = \frac{s}{2} > 0$ ist $y' \neq 0$. Andererseits ist $y' \in E$, da mit (y_n) auch (y'_n) in E liegt. Also ist $y' \in \mathcal{T}(\Gamma) \cap E = \{0\}$, ein Widerspruch. □

(5.6) Theorem. *Sei $\Gamma \subseteq B$ eine lokalkompakte lokale Gruppe in B. Dann ist $\mathcal{T}(\Gamma) \cap B$ offen, abgeschlossen und zusammenhängend in Γ. Ist zudem Γ zusammenhängend, so ist*

$$\Gamma = \mathcal{T}(\Gamma) \cap B.$$

Beweis. (i) Γ ist abgeschlossen in B: Sei dazu (x_n) eine Folge in Γ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in B$. Da Γ lokalkompakt ist, gibt es eine abgeschlossene Kugel C um 0 so, daß $C \cap \Gamma$ kompakt

ist. Dabei können wir C so klein wählen, daß $x * C$ definiert ist und in B liegt; dies folgt aus der Tatsache, daß die Operation $*$ stetig ist. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $-x_m * x_n \in C \subseteq B$ für alle $m, n \geq N$. Da $C \cap \Gamma$ kompakt ist, folgt aus $-x_N * x_m \in C \cap \Gamma$ stets $-x_N * x = \lim_{n\to\infty} -x_N * x_n \in \Gamma$. Also haben wir $x = x_N * (-x_N * x) \in (\Gamma * \Gamma) \cap B \subseteq \Gamma$, d.h. Γ ist abgeschlossen.

(ii) $\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B$ ist abgeschlossen in Γ: Nach Lemma (5.4)(♡) ist $\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B$ in Γ enthalten. Sei (x_n) eine Folge in $\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \Gamma$. Dann ist $x \in \mathfrak{T}(\Gamma)$ nach Theorem (5.5). Wegen $\Gamma \subseteq B$ folgt damit $x \in \mathfrak{T}(\Gamma) \cap B$.

(iii) $\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B$ ist offen in Γ: Sei $x \in \mathfrak{T}(\Gamma) \cap B$. Da Γ abgeschlossen ist, gibt es nach Theorem (5.5) eine offene Kugel $B' \subseteq B$ um 0 mit $B' \cap \Gamma \subseteq \mathfrak{T}(\Gamma)$. Wähle eine offene Kugel $B'' \subseteq B'$ um 0 so, daß $x * B'' \subseteq B'$ ist. Dann ist $x * B''$ eine offene Umgebung von x in B (verwende dazu Korollar (2.7)(ii) und (iv)) und $(x * B'') \cap \Gamma$ ist eine offene Umgebung von x in Γ. Wir müssen also noch zeigen, daß $(x * B'') \cap \Gamma$ in $\mathfrak{T}(\Gamma)$ liegt. Sei dazu $y \in (x * B'') \cap \Gamma$. Dann ist

$$-x * y \in (-x * (x * B'')) \cap (-\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B) * \Gamma \subseteq B' \cap (\Gamma * \Gamma) \subseteq B' \cap \Gamma \subseteq \mathfrak{T}(\Gamma) \cap B.$$

Nach Theorem (5.5) ist $\mathfrak{T}(\Gamma)$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$ und nach der Bemerkung nach Definition (5.1) ist $\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B$ eine lokale Gruppe in B. Damit ist

$$y = x * (-x * y) \in ((\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B) * (\mathfrak{T}(\Gamma) \cap B)) \cap B \subseteq \mathfrak{T}(\Gamma),$$

also $(x * B'') \cap \Gamma \subseteq \mathfrak{T}(\Gamma)$, was zu zeigen war. Die letzte Behauptung des Theorems folgt sofort aus der Definition von zusammenhängend. □

KAPITEL 6

Lineare Lie-Gruppen

Sei stets A eine Banach-Algebra mit A^{-1} als Gruppe der invertierbaren Elemente von A. Es sei G eine Untergruppe von A^{-1}. Sei $B = B_r(0)$ eine normale Umgebung. Dann ist $\exp B \subseteq B_1(\mathbf{1})$.

(6.1) Lemma. *Es ist* $\Gamma_G := B \cap \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)$ *eine lokale Gruppe in* B.

Beweis. Wegen $-B = B$ und $\exp B \subseteq B_1(\mathbf{1})$ ist $\exp B = \exp -B = (\exp B)^{-1} \subseteq B_1(\mathbf{1})^{-1}$. Mit $G = G^{-1}$ folgt damit $\exp -\Gamma_G \subseteq (\exp -B) \cap B_1(\mathbf{1})^{-1} \cap G^{-1} = (\exp -B) \cap G^{-1} = (\exp B) \cap G = (\exp B) \cap G \cap B_1(\mathbf{1})$, also ist $-\Gamma_G \subseteq \Gamma_G$. Es folgt weiter $\Gamma_G = -(-\Gamma_G) \subseteq -\Gamma_G$, also $-\Gamma_G = \Gamma_G$. Seien $x, y \in \Gamma_G$ mit $x * y \in B$. Dann ist $\exp x, \exp y \in B_1(\mathbf{1}) \cap G$ und $\exp(x * y) = \exp x \exp y \in G$. Wegen $\exp(x * y) \in \exp B \subseteq B_1(\mathbf{1})$ folgt

$$x * y = \log(\exp(x * y)) \in B \cap \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G) = \Gamma_G,$$

d.h. Γ_G ist eine lokale Gruppe. □

Wir setzen $\mathfrak{g} := \mathfrak{T}(\Gamma_G)$. Nach Lemma (5.3) ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{T}(\overline{\Gamma_G} \cap U)$ für jede offene Nullumgebung U in B. Also ist $\overline{\Gamma_G} \cap U$ eine abgeschlossene lokale Gruppe in $U \subseteq B$ und es ist

$$\mathfrak{T}(\log(B_1(\mathbf{1}) \cap \overline{G})) = \mathfrak{T}(B \cap \log(B_1(\mathbf{1}) \cap \overline{G})) = \mathfrak{T}(B \cap \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)) = \mathfrak{g}.$$

Nach Theorem (5.5) ist somit $\mathfrak{g}$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$.

(6.2) Definition. Die durch G definierte Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt die *Lie-Algebra* von G in A.

(6.3) Fundamentalsatz. *Ist G lokalkompakt, so ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G eine abgeschlossene, endlich-dimensionale Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$ und es gilt*

(i) die Abbildung $\exp\big|_{B \cap \mathfrak{g}} : B \cap \mathfrak{g} \to V = \exp(B \cap \mathfrak{g})$ *ist ein lokaler Diffeomorphismus zwischen einer Nullumgebung von $\mathfrak{g}$ und einer $\mathbf{1}$-Umgebung von G,*

(ii) es gibt eine offene Kugel K um 0 in B mit $K \cap \exp^{-1} G = K \cap \mathfrak{g}$.

Beweis. Nach Theorem (5.5) ist $\mathfrak{g}$ eine abgeschlossene, endlich-dimensionale Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$. Nach Theorem (5.6) ist $\mathfrak{g} \cap B$ offen und abgeschlossen in Γ_G. Die

Abbildung $\exp\big|_B : B \to \exp B$ ist ein analytischer Diffeomorphismus nach Proposition (2.4). Also gilt dies auch für die Einschränkung $\exp\big|_{B \cap \mathfrak{g}}$. Dies zeigt (i). Nach Theorem (5.5) gibt es eine offene Kugel $K \subseteq B$ um 0 mit $K \cap \Gamma_G = K \cap \mathfrak{g}$. Also ist $\exp(K \cap \mathfrak{g}) \subseteq G$ und $K \cap \mathfrak{g} \subseteq K \cap \exp^{-1} G$. Ist umgekehrt $x \in K \cap \exp^{-1} G$, so ist $\exp x = B_1(\mathbf{1}) \cap G$, also $x = \log \exp x \in K \cap \Gamma_G = K \cap \mathfrak{g}$. □

(6.4) Definition. Eine topologische Gruppe G heißt *lineare Lie-Gruppe*, wenn es eine Banach-Algebra A mit Eins und einen Isomorphismus $\varphi : G \to G_A \leq A^{-1}$ zwischen den topologischen Gruppen G und G_A gibt, so daß es eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g}$ von $(A, [.,.])$ gibt derart, daß die Exponentialabbildung eine geeignete Nullumgebung von $\mathfrak{g}$ homöomorph auf eine Einsumgebung von G_A abbildet. Die Gruppe G_A wird eine *Lie-Untergruppe* von A^{-1} genannt. Sind G und H lineare Lie-Gruppen mit $G \subseteq H$, so heißt auch G eine *Lie-Untergruppe* von H.

Bemerkung. Es ist A^{-1} stets eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra A, da $B_1(\mathbf{1})$ stets in A^{-1} enthalten ist.

(6.5) Theorem. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Jede Lie-Untergruppe G von A^{-1} ist abgeschlossen in A^{-1}.

(ii) Ist $G \leq A^{-1}$ lokalkompakt, so ist G eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathcal{T}(\Gamma_G)$.

(iii) Jede lokalkompakte Untergruppe H einer linearen Lie-Gruppe G ist eine Lie-Untergruppe von G. Die Gruppe G enthält eine Teilmenge C, die homöomorph zu einer abgeschlossenen, konvexen, symmetrischen Umgebung von $\mathbf{1}$ im Banach-Raum $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist, so daß die Abbildung $\chi : H \times C \to HC : (h, c) \mapsto hc$ ein Homöomorphismus auf eine Umgebung der Identität von G ist.

(iv) Jede abgeschlossene Untergruppe H einer endlich-dimensionalen linearen Lie-Gruppe G (d.h. $\mathfrak{g}$ ist ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum) ist eine Lie-Untergruppe von G.

Beweis. (i) Nach Definition gibt es eine offene Kugel B um 0, so daß $\exp\big|_B : B \to U := \exp(B)$ und $\exp\big|_{B \cap \mathfrak{g}} : B \cap \mathfrak{g} \to V := \exp(B \cap \mathfrak{g})$ Homöomorphismen sind. Da $\mathfrak{g}$ nach Definition abgeschlossen ist, ist $B \cap \mathfrak{g}$ abgeschlossen in B. Also ist auch V abgeschlossen in U. Dies zeigt, daß G lokal abgeschlossen ist in A^{-1}. Daraus folgt, daß G in A^{-1} abgeschlossen ist: Für $z \in \overline{G}$ und eine symmetrische Umgebung $W \subseteq U$ von $\mathbf{1}$ in A^{-1} gibt es $y \in Wz \cap G$, also $z \in Wy$. Da $W \cap G$ in W abgeschlossen ist, ist auch $Wy \cap Gy = Wy \cap G$ abgeschlossen in $Wy \cap A^{-1}y = Wy \cap A^{-1}$. Wegen $z \in Wy \cap \overline{G}$ folgt daraus $z \in G$.

(ii) Nach Definition ist $\mathfrak{g} = \mathcal{T}(\Gamma_G)$ eine Lie-Algebra von G. Damit folgt die Behauptung aus dem Fundamentalsatz (6.3).

(iii) Die erste Aussage folgt aus (ii). Indem wir G mit $G_A \leq A^{-1}$ identifizieren, können wir nach (i) annehmen, daß G eine abgeschlossene Untergruppe von A^{-1} ist, und daß $\exp : A \to A^{-1}$ die abgeschlossene Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in G abbildet und ein lokaler Homöomorphismus von $B \cap \mathfrak{g}$ auf eine $\mathbf{1}$-Umgebung von G ist. Nach dem Fundamentalsatz (6.3) ist die Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ von H endlich-dimensional und somit ein direkter Summand von $\mathfrak{g}$. Sei also $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ mit einem Untervektorraum $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{g}$. Seien U und V symmetrische offene Umgebungen um 0 in $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{v}$ mit $U, V \subseteq B$, so daß folgende Aussagen gelten:

(a) $U * V \subseteq B$

(b) Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung (siehe Reed-Simon, [7], Corollary 1 zu Theorem S.11, p. 367) ist $\chi' : U \oplus V \to U * V : u \oplus v \mapsto u * v$ ein Diffeomorphismus auf die Nullumgebung $U * V$ in $\mathfrak{g}$ (Die Abbildung χ' besitzt aufgrund der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ im Punkt 0 die Ableitung $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.)

(c) $\exp\big|_{\mathfrak{g}} : U * V \to \exp\big|_{\mathfrak{g}}(U * V) \subseteq G$ ist ein Homöomorphismus.

(d) $(U * V) \cap \exp^{-1}(H) = (U * V) \cap \mathfrak{h}$ (siehe Fundamentalsatz (6.3)).

Für $X \in U$ und $Y \in V$ mit $X * Y \in \mathfrak{h}$ ist

$$Y = (-X) * (X * Y) \in V \cap ((\mathfrak{h} \cap B) * (\mathfrak{h} \cap B)) \subseteq V \cap \mathfrak{h} = \{0\}\,.$$

Somit folgt aus (d)

$$(U * V) \cap \exp^{-1}(H) = U.$$

Sei nun $V_1 \subseteq V$ eine abgeschlossene Kugel um 0 in $\mathfrak{v}$ mit $V_1 * V_1 \subseteq U * V$ und setze $C := \exp V_1$. Die Abbildung χ ist stetig und surjektiv. Diese Abbildung ist auch injektiv: Sei dazu $c_1, c_2 \in C$ und $h_1, h_2 \in H$ mit $\chi(h_1, c_1) = \chi(h_2, c_2)$, und seien $X_1, X_2 \in V_1$ mit $c_i = \exp X_i$. Dann ist $\exp(X_2 * (-X_1)) = c_2 c_1^{-1} = h_2^{-1} h_1 \in H$, woraus mit Hilfe der beiden zentrierten Gleichungen folgt

$$-Y := X_2 * (-X_1) \in (V_1 * -V_1) \cap \exp^{-1}(H) \subseteq (U * V) \cap \exp^{-1}(H) = U.$$

Dies zeigt $0 * -X_2 = -X_2 = (-X_1) * Y$ bzw. $Y * X_2 = X_1$. Nach (b) ist damit $Y \oplus X_2 = 0 \oplus X_1$, also $Y = 0$ und $X_1 = X_2$. Damit haben wir $c_1 = c_2$ und weiter $h_1 = h_2$. Also ist χ bijektiv. Nach (b) und (c) und wegen $V_1 \subseteq V$ ist somit die Einschränkung $\chi\big|_{U' \times C}$ für $U' = \exp U$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung $U' \times C$ von $(1, 1)$ in $H \times C$ auf die offene $\mathbf{1}$-Umgebung $U'C$ in HC. Insbesondere ist HC eine Umgebung von $\mathbf{1}$. Die Gruppe H operiert auf $H \times C = \bigcup_{h \in H} h(U' \times C)$ durch Links-Multiplikation auf dem ersten Faktor und auf $HC = \bigcup_{h \in H} h(U'C)$ durch einfache Links-Multiplikation. Da diese Operation mit der Abbildung χ vertauscht, ist χ somit ein Homöomorphismus.

(iv) Ist G endlich-dimensional, so ist $\dim \mathfrak{g} = n < \infty$, also $\mathfrak{g} \approx \mathbb{R}^n$. Da G und $\mathfrak{g}$ via der Exponentialabbildung lokal homöomorph sind, ist G daher lokalkompakt. Somit folgt (iv) aus (ii). □

(6.6) Beispiele. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $A = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) = \mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$.

(a) Dann ist $A^{-1} = \mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $A = \mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$. Es ist $\dim_{\mathbb{K}} A = n^2$.

(b) $\mathrm{SL}_n\mathbb{K}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ und ist deshalb eine lineare Lie-Gruppe nach Proposition (6.5)(i) und (iii) mit Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n\mathbb{K}$. Es ist $\mathfrak{sl}_n\mathbb{K} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{K} \mid \mathrm{spur}\, X = 0\}$, denn es ist $\det(\exp X) = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{spur}\, X = 0$ gilt: Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ läßt sich $X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$ stets als obere Dreiecksmatrix schreiben und es ist $\exp X = \mathrm{diag}(\exp\lambda_1, \ldots, \exp\lambda_n) \cdot \exp N$, wobei $\exp N$ eine obere Dreicksmatrix mit Diagonalelementen gleich 1 ist. Wegen $Y(\exp X)Y^{-1} = \exp(YXY^{-1})$ ist damit die Behauptung für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bewiesen. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ geht man den Umweg über $\mathbb{C}$ und benutzt, daß Spur und Determinante invariant gegenüber Basis-Transformationen sind. Es ist $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{sl}_n\mathbb{K} = n^2 - 1$.

(c) $\mathrm{O}_n\mathbb{K} = \left\{X \in \mathrm{GL}_n\mathbb{K} \,\middle|\, X^{-1} = X^t\right\}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ und ist somit eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{o}_n\mathbb{K} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{K} \mid -X = X^t\}$, denn es ist $\mathbf{1} = \exp(X - X) = \exp X \exp(-X)$, also $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$, und $\exp(X^t) = (\exp X)^t$. Es ist $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{o}_n\mathbb{K} = \frac{n}{2}(n-1)$.

(d) $\mathrm{U}_n\mathbb{C} = \left\{X \in \mathrm{GL}_n\mathbb{C} \,\middle|\, X^{-1} = \overline{X}^t\right\}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ und ist somit eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{u}_n\mathbb{C} = \left\{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \,\middle|\, -X = \overline{X}^t\right\}$. Es ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}_n\mathbb{C} = n^2$.

Als nächstes werden wir eine interne Beschreibung der Exponentialabbildung und der Lie-Algebra einer linearen Lie-Gruppe geben.

(6.7) Definition. (a) Ein *topologischer Körper* $(K, +, \cdot, \tau)$ ist ein Körper $(K, +, \cdot)$ auf einem topologischen Raum (K, τ), so daß $(K, +, \tau)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot, \tau_0)$, wobei τ_0 die Spurtopologie von τ bzgl. $K \setminus \{0\}$ ist, topologische Gruppen sind.

(b) Ein *topologischer Vektorraum* $(V, +, \sigma)$ über einem topologischen Körper $(K, +, \cdot, \tau)$ ist ein K-Vektorraum $(V, +)$ auf einem topologischen Raum (V, σ), so daß $(V, +, \sigma)$ eine topologische Gruppe ist, und die Skalarmultiplikation $K \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ stetig ist. Dabei wird $K \times V$ mit der Produkttopologie $\tau \times \sigma$ versehen.

(c) Ein topologischer Vektorraum $(V, +, \sigma)$ heißt *vollständig normierbar*, wenn es auf V eine Norm gibt, die zur Topologie σ kompatibel ist (d.h. die von der Norm induzierte Topologie stimmt mit σ überein), und die $(V, +, \sigma)$ zu einem Banach-Raum macht.

(d) Eine *topologische Lie-Algebra* ist eine Lie-Algebra $(\mathfrak{g}, [.,.])$, die ein topologischer Vektorraum ist, so daß die Abbildung $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (x, y) \mapsto [x, y]$ stetig ist. Die topologische Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *vollständig normierbar*, falls $\mathfrak{g}$ als topologischer Vektorraum vollständig normierbar ist.

(6.8) Definition. Für eine topologische Gruppe G nennen wir die Abbildung

$$\exp_G : \mathcal{L}(G) \to G : X \mapsto X(1)$$

die *Exponentialabbildung* von G.

Sei nun G stets eine lineare Lie-Gruppe wobei wir immer $G \leq A^{-1}$ annehmen, d.h. G ist eine Lie-Untergruppe von A^{-1}. Sei $\mathfrak{g} = \mathcal{T}(\log(B_1(\mathbf{1}) \cap G))$ die Lie-Algebra von G in A. Wir wissen bereits, daß $\log : B_1(\mathbf{1}) \to N_0$ ein Homöomorphismus ist. Wir setzen

$$M_1 := \{g \in B_1(\mathbf{1}) \mid \exp([0,1] \cdot (\log g)) \subseteq B_1(\mathbf{1}) \cap G\}$$

und

$$N_1 := \log M_1 = \{X \in N_0 \mid [0,1] \cdot X \subseteq \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)\}\,.$$

Nach Proposition (3.4) ist die Abbildung

$$\alpha : A \to \mathcal{L}(A^{-1}) : X \mapsto \alpha(X) = (t \mapsto \exp(t \cdot X))$$

ein Homöomorphismus.

(6.9) Proposition. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\exp X = \alpha(X)(1) = \exp_G(\alpha(X))$ *für alle* $X \in \mathfrak{g}$.

(ii) Die Einschränkung $\alpha_G = \alpha\big|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(G)$ *ist ein Homöomorphismus.*

(iii) Die Einschränkung $\exp\big|_{N_1} : N_1 \to M_1$ *ist ein analytischer Homöomorphismus mit Umkehrung* $\log : M_1 \to N_1$, *wobei* N_1 *eine offene Nullumgebung in* $\mathfrak{g}$ *und* M_1 *eine offene Einsumgebung in* G *ist.*

(iv) Ist G *lokalkompakt, so ist* $\mathfrak{g} \cap \exp^{-1} G$ *eine Nullumgebung von* $\exp^{-1} G$.

(v) Für $X, Y \in N_1$ *mit* $X * Y \in N_1$ *gibt es Umgebungen* U *und* V *von* 0 *in* N_1 *mit* $(X * U) \cup (V * Y) \subseteq N_1$, *und die Menge* $\{(X,Y) \in N_1 \times N_1 \mid X * Y \in N_1\}$ *ist eine Umgebung von* $(0,0)$ *in* $N_1 \times N_1$.

Beweis. (i) folgt sofort aus der Definition von α und von $\exp_G$.
(ii) Da α ein Homöomorphismus ist, gilt dies auch für die Einschränkung α_G. Das Bild $\alpha_G(\mathfrak{g})$ ist nach Definition enthalten in $\mathcal{L}(G)$ (beachte, daß G abgeschlossen und exp stetig ist). Zu zeigen bleibt, daß $\alpha_G(\mathfrak{g}) = \mathcal{L}(G)$ ist. Sei dazu $(X : \mathbb{R} \to G) \in \mathcal{L}(G)$. Da α bijektiv ist, gibt es ein $x \in A$ mit $X = \alpha(x)$, also $X(t) = \exp(t \cdot x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß $X(t) \in \exp(B \cap \mathfrak{g})$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt. Dann ist $t \cdot x = \log X(t) \in B \cap \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$, also $x \in \mathfrak{g}$. Somit ist α_G surjektiv.
(iii) Da die Menge $[0,1]$ die additive Gruppe $\mathbb{R}$ (algebraisch) erzeugt, folgt aus der Relation $\exp([0,1] \cdot x) \subseteq G$ stets $\exp(\mathbb{R} \cdot x) \subseteq G$. Nach (ii) ist also $x \in \mathfrak{g}$. Dies zeigt $N_1 \subseteq \mathfrak{g}$ und

$$\{X \in A \mid \exp([0,1] \cdot X) \subseteq B_1(\mathbf{1}) \cap G\} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp([0,1] \cdot X) \subseteq B_1(\mathbf{1}) \cap G\}\,.$$

Aus $X \in A$ mit $[0,1] \cdot X \subseteq \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G) \subseteq \log(B_1(\mathbf{1}))$ folgt $X \in N_0$, da $[0,1] \cdot X$ zusammenhängend ist. Also ist

$$\begin{aligned} N_1 &= \{X \in N_0 \mid [0,1] \cdot X \subseteq \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid [0,1] \cdot X \subseteq \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)\} \\ &= \{X \in A \mid [0,1] \cdot X \subseteq \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)\}\,. \end{aligned}$$

Somit sind die Abbildungen $\exp\big|_{N_1} : N_1 \to M_1$ und $\log : M_1 \to N_1$ nach Proposition (2.4) Homöomorphismen, die zueiander invers sind. Wir müssen noch nachweisen, daß N_1 offen in $\mathfrak{g}$ ist. Betrachte die offene Nullumgebung $N_0 = \log(B_1(\mathbf{1}))$. Ist N_1 nicht offen in $\mathfrak{g}$, so gibt es $X \in N_1$ und eine Folge $X_n \in (N_0 \cap \mathfrak{g}) \setminus N_1$ mit $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Dann gibt es auch eine Folge $(t_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $t_n \cdot X_n \notin \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)$. Nach (i) ist $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G$. Wegen $\exp N_0 = B_1(\mathbf{1})$ ist damit $\exp(N_0 \cap \mathfrak{g}) \subseteq B_1(\mathbf{1}) \cap G$, also $N_0 \cap \mathfrak{g} \subseteq \log(B_1(\mathbf{1}) \cap G)$. Insbesondere ist $t_n \cdot X_n \notin N_0 \cap \mathfrak{g}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $[0,1]$ kompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge von (t_n) annehmen, daß (t_n) gegen ein $t \in [0,1]$ konvergiert. Da $N_0 \cap \mathfrak{g}$ offen in $\mathfrak{g}$ ist, folgt $\lim_{n\to\infty} t_n \cdot X_n = t \cdot X \notin N_0 \cap \mathfrak{g}$. Wegen $X \in N_1$ ist aber $[0,1] \cdot X \subseteq N_0$, ein Widerspruch. Analog zeigt man die Offenheit von M_1.
(iv) Folgt sofort aus dem Fundamentalsatz (ii).
(v) Nach (iii) ist N_1 offen. Damit folgt Aussage (v) aus der Stetigkeit der Abbildung $(X,Y) \mapsto X * Y : N_1 \times N_1 \to A$. □

Bemerkung. Jedes Element $g \in M_1$ wird durch den Weg

$$\rho_g : [0,1] \to M_1 : t \mapsto \exp(t \cdot \log g)$$

mit $\mathbf{1}$ verbunden. Die Abbildung ρ_g ist eine *lokale Einparameter-Halbgruppe.*

(6.10) Satz (Die Exponentialabbildung einer linearen Lie-Gruppe). *Für eine lineare Lie-Gruppe G gelten die folgenden Aussagen:*

- *(i) Der Raum $\mathcal{L}(G)$ ist eine vollständig normierbare topologische reelle Lie-Algebra bzgl. der folgenden Operationen:*
  Skalarmultiplikation: $(r \cdot X)(t) = X(tr)$ *für* $X \in \mathcal{L}(G)$ *und* $r, t \in \mathbb{R}$,
  Addition: $(X+Y)(t) = \lim_{n\to\infty}(X(\frac{t}{n})Y(\frac{t}{n}))^n$ *für* $X, Y \in \mathcal{L}(G)$ *und* $t \in \mathbb{R}$,
  Lie-Klammer: $[X,Y](t) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{comm}\,(X(\frac{t}{n})Y(\frac{1}{n}))^{n^2}$ *für* $X, Y \in \mathcal{L}(G)$, $t \in \mathbb{R}$.
- *(ii) Die Exponentialabbildung* $\exp_G : \mathcal{L}(G) \to G$ *ist ein lokaler Homöomorphismus.*
- *(iii) Die Einschränkung* $\exp_G\big|_{N_1} : N_1 \to M_1$ *ist ein analytischer Homöomorphismus mit Umkehrung* $\log_G : M_1 \to N_1$.
- *(iv) Das Bild* $\exp_G(\mathcal{L}(G))$ *erzeugt algebraisch die Zusammenhangskomponente G_1 von 1 in G, und G_1 ist offen in G.*

(v) *G ist genau dann diskret, wenn $\mathfrak{L}(G) = \{0\}$ ist.*

(vi) *Sei $X \in \mathfrak{L}(G)$ mit $\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} X) \cap (2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \emptyset$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von X in $\mathfrak{g}$, so daß $\exp_G\big|_U : U \to \exp_G(U)$ ein Homöomorphismus auf eine offene Umgebung von $\exp_G X$ in G und die Abbildung*

$$\Phi : Y \mapsto \log_G((\exp_G X)^{-1} \exp_G Y) : U \to U' \subseteq \mathfrak{g}$$

ein analytischer Homöomorphismus auf eine offene Nullumgebung U' in $\mathfrak{g}$ ist, die eine analytische Umkehrabbildung besitzt.
Insbesondere ist $\exp_G \mathfrak{g}$ eine Umgebung für jedes $g \in G$, so daß $\exp_G^{-1}(g)$ ein Element X besitzt, für das $\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} X)$ kein nichtverschwindendes Vielfaches von $2\pi i$ enthält.

(vii) *Ist H eine lokalkompakte Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{L}(H) \cap \exp_G^{-1} G$ eine Nullumgebung von $\exp_G^{-1} H$ in $\mathfrak{L}(G)$.*

Beweis. Da G eine lineare Lie-Gruppe ist, können wir o.E. annehmen, daß $G \leq A^{-1}$ für eine Banach-Algebra A ist, und daß $\exp_G = \exp\big|_{\mathfrak{g}}$ ist. Damit können wir über die bijektive Abbildung $\alpha\big|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{L}(G)$ eine Lie-Algebra-Struktur sowie eine Norm auf $\mathfrak{L}(G)$ definieren, die $\mathfrak{L}(G)$ zu einer vollständig normierbare topologische Lie-Algebra macht.

(i) Folgt nun aus den Propositionen (3.4), (3.5) und (3.6) und der Tatsache, daß $\mathfrak{g}$ in A abgeschlossen ist, und damit $\mathfrak{g}$ eine vollständig normierbaren topologischen Lie-Algebra ist. Nach Proposition (6.9)(ii) induziert die so definierte Norm auf $\mathfrak{L}(G)$ die kompakt-offene Topologie auf $\mathfrak{L}(G)$.

(ii) und (iii) folgen aus Proposition (6.9)(i) und (iii).

(iv) Nach (6.9)(iii) ist $M_1 = \exp_G N_1$ eine 1-Umgebung in G. Eine zusammenhängende topologische Gruppe H wird von jeder symmetrischen 1-Umgebung U algebraisch erzeugt: Die Untergruppe $\langle U \rangle = \bigcup_{n \geq 1} U^n$ ist offen und damit auch abgeschlossen in H, also ist $\langle U \rangle = G_1$. Dies zeigt die Offenheit der Zusammenhangskomponente G_1.

(v) Jede diskrete Gruppe G ist eine lineare Lie-Gruppe: Für

$$A := \ell^1(G) := \{(x_g)_{g \in G} \mid x_g \in \mathbb{C}, (|x_g|)_{g \in G} \text{ ist summierbar in } \mathbb{R}\}$$

mit

$$||(x_g)_{g \in G}|| := \sum_{g \in G} |x_g|$$

und

$$(x_g)_{g \in G} * (y_h)_{h \in G} := (\sum_{gh=k} x_g y_h)_{k \in G}$$

wird $(A, ||.||, *)$ zu einer Banach-Algebra mit $\mathbf{1} = (e_g)_{g\in G}$ als Einselement, wobei $e_{\mathbf{1}} = 1$ und $e_g = 0$ für $g \neq \mathbf{1}$ ist. Durch $g^* := (\delta_{gh})_{h\in G}$ wird ein injektiver Gruppen-Homomorphismus $g \mapsto g^* : G \to A^{-1}$ definiert. Für $g, h \in G$ mit $g \neq h$ ist $||g^* - h^*|| = 2$. Somit ist $\{g^* \mid g \in G\}$ eine diskrete (und damit abgeschlossene) Untergruppe von A^{-1}. Natürlich ist für eine solche Gruppe G die Lie-Algebra $\mathfrak{L}(G)$ einpunktig. Umgekehrt folgt nach (iv) aus $\mathfrak{L}(G) = \{0\}$ stets $G_1 = \langle \exp_G \{0\}\rangle = \{1\}$, d.h. $\{1\}$ ist offen in G. Dies zeigt, daß G diskret ist.

(vi) Betrachte die analytische Abbildung

$$\varphi : A \to A : Y \mapsto \exp(-X)\exp(Y) = L^{-1}_{\exp X}(\exp(Y)).$$

Nach der Kettenregel ist

$$\varphi'(X) = (L^{-1}_{\exp X})'(\exp X)\exp' X.$$

Da $L_{\exp X}$ linear ist, folgt

$$\varphi'(X) = L^{-1}_{\exp X}(\exp X)\exp'(X).$$

Aus Korollar (4.4) folgt $\varphi'(0) = f(\operatorname{ad} X)$. Wegen $\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} X) \cap (2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \emptyset$ ist $\varphi'(0)$ also invertierbar auf A, siehe Lemma (4.9). Aus $\log'(\mathbf{1}) = \exp'(0)^{-1} = \mathrm{id}_A$ folgt $(\log\circ\varphi)'(X) = \log'(\varphi(X))\varphi'(X) = \varphi'(X)$, d.h. auch $\Phi'(X)$ ist invertierbar. Damit folgt (vi) aus dem Satz über die lokale Umkehrfunktion.

(vii) Nach Proposition (6.5)(i) ist H eine Lie-Untergruppe von G und $\mathfrak{L}(H)$ wird mit einer endlich-dimensionalen Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ identifiziert. Nach dem Fundamentalsatz (6.3) gibt es eine offene Kugel $C \subseteq A$ um 0 mit $C \cap \exp_G^{-1}(H) = C \cap \mathfrak{h}$ und die Behauptung folgt aus Proposition (6.9)(iv). □

Bemerkung. Nach dem letzten Satz ist die Lie-Algebra $\mathfrak{L}(G)$ einer linearen Lie-Gruppe vollständig normierbar und $\mathfrak{L}(G)$ wird auf kanonische Weise durch G bestimmt.

KAPITEL 7

Lie-Gruppen und Überlagerungen

Definition einer Liegruppe

(7.1) Theorem. *Sei G eine Lie-Untergruppe der multiplikativen Gruppe einer Banach-Algebra. Sei B eine normale Umgebung. Sei $V = \exp(B \cap \mathfrak{g})$. Dann ist $\mathfrak{U} = \{gV \mid g \in G\}$ eine offene Überdeckung von G und für jedes $g \in G$ ist die Abbildung*

$$\varphi_g : gV \to B \cap \mathfrak{g} : x \mapsto \log(g^{-1}x)$$

ein analytischer Diffeomorphismus. Für $\emptyset \neq U = gV \cap hV$, $U_g = \varphi_g(U)$ und $U_h = \varphi_h(U)$ ist der Kartenwechsel $\varphi_h \circ (\varphi_g\big|_U)^{-1} : U_g \to U_h$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Da V eine offene Einsumgebung von G ist, ist $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von G. Für $x \in U_g$ ist $\varphi_g^{-1}(x) = g \exp x$. Damit haben wir $f(x) := \varphi_h(\varphi_g^{-1}(x)) = \varphi_h(g \exp x) = \log(h^{-1} g \exp x)$. Also ist $\exp f(x) = h^{-1} g \exp x$, folglich

$$h^{-1}g = \exp f(x) \exp(-x) = \exp(f(x) * (-x)) \in \exp(B * B) \subseteq B_1(\mathbf{1}).$$

Setzen wir $u = \log(h^{-1}g)$, so ist $u = f(x) * (-x)$ bzw. $f(x) = u * x$, d.h. $f : U_g \to U_h$ ist ein analytischer Diffeomorphismus. □

(7.2) Definition. Sei M ein Hausdorff-Raum zusammen mit einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j \mid j \in J\}$. so daß es eine Famiie von Homöomorphismen $\varphi_j : U_j \to B_j$ auf offene Mengen B_j eines Banach-Raumes E gibt, für die die *Kartenwechsel* $\varphi_k \circ (\varphi_j\big|_{U_j \cap U_k})^{-1}$ analytische Abbildungen sind. Sei $\mathcal{V} = \{(\varphi_j, U_j) \mid j \in J\}$. Das Paar $(M, \mathcal{V})$ heißt *analytische Mannigfaltigkeit modelliert auf E*. Die Abbildungen φ_j heißen *Karten* von M, die Familie $\mathcal{V}$ wird *analytischer Atlas* von M genannt. Für $E = \mathbb{R}^n$ wird $(M, \mathcal{V})$ eine *n-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit* genannt.

Mit der obigen Definition läßt sich Satz (7.1) wie folgt formulieren:

(7.3) Korollar. *Jede Lie-Untergruppe G der multiplikativen Gruppe einer Banach-Algebra ist eine analytische Mannigfaltigkeit modelliert auf $\mathfrak{g}$. Ist G lokalkompakt, so ist G eine Mannigfaltigkeit der Dimension* $\dim \mathfrak{g}$. □

(7.4) Definition. Eine Abbildung $f : (M, \mathcal{U}) \to (N, \mathcal{V})$ zwischen zwei analytischen Mannigfaltigkeiten heißt *analytisch*, wenn es zu jedem $m \in M$, jeder Karte $\varphi_j : U_j \to B_j$ mit $m \in U_j$ und jeder Karte $\psi_k : V_k \to C_k$ mit $f(m) \in V_k$ die Komposition $x \mapsto \psi_k \circ f \circ \varphi_j^{-1}(x)$ im Punkt $\varphi_j(m)$ analytisch ist.

(7.5) Theorem. *Sei G eine Lie-Untergruppe der multiplikativen Gruppe A^{-1} einer Banach-Algebra A und sei $\mathcal{U}$ der analytische Atlas aus Satz (7.1). Stattet man $G \times G$ mit dem Produktatlas aus, so sind die Abbildungen $(x, y) \mapsto xy : G \times G \to G$ und $x \mapsto x^{-1} : G \to G$ analytische Abbildungen.* □

(7.6) Definition. Eine topologische Gruppe G, die einen analytischen Atlas $\mathcal{U}$ besitzt, so daß die Abbildungen aus Satz (7.5) analytische Abbildungen bzgl. $\mathcal{U}$ werden, heißt *Lie-Gruppe.*

Bemerkung. Die zur Lie-Gruppe gehörige *Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ ist definiert auf dem Tangentialraum $\mathrm{T}_{\mathbf{1}}G$ des Neutralelementes. Dieser besteht nach Definition aus Derivationen $X_{\mathbf{1}} : \mathrm{C}^\omega(\mathbb{1}) \to \mathrm{C}^\omega(\mathbb{1})$, wobei $X_{\mathbf{1}}$ die Auswertung eines *linksinvarianten Derivation* $X : \mathrm{C}^\omega(G) \to \mathrm{C}^\omega(G)$ ist, d.h. es ist $X(f \circ \lambda_g) = Xf \circ \lambda_g$ für alle $\lambda_g : G \to G : x \mapsto gx$ ist. Die Lie-Klammer auf $\mathrm{Der}(G)$ ist gegeben durch $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ und induziert eine Lie-Klammer auf $\mathrm{T}_{\mathbf{1}}G$ durch Auswertung am Neutralelement. Aus der Differentialgeometrie weiß man, daß $\mathfrak{g} = (\mathrm{T}_{\mathbf{1}}G, [.,.])$ zu einer Lie-Algebra wird. Diese ist die zu G gehörige Lie-Algebra. Die Exponentialabbildung wird ebenfalls wie in der Differentialgeometrie definiert: $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \mapsto \gamma_X(1)$, wobei γ_X eine Integralkurve des Vektorfeldes (=Derivation von $\mathrm{C}^\infty(G)$) ist. Die Integralkurven γ_X sind dabei Einparametergruppen von G.

(7.7) Korollar. *Jede lineare Lie-Gruppe ist eine Lie-Gruppe. Jede lokalkompakte lineare Lie-Gruppe ist eine endlich-dimensionale Lie-Gruppe.* □

Überlagerungstheorie

(7.8) Definition. Seien $f, g : M \to N$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Die Abbildungen f und g heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $H : M \times [0, 1] \to N$ mit $f(x) = h(x, 0)$ und $g(x) = H(x, 1)$ mit. Die Abbildung H wird eine *Homotopie* zwischen f und g genannt.

(7.9) Definition. Sei N ein topologischer Raum und sei $x_0 \in N$. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to N$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ heißt ein *geschlossener Weg* oder *Schleife* in N durch x_0. Zwei Schleifen γ_1, γ_2 heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie H zwischen γ_1 und γ_2 gibt mit $H(0,t) = x_0 = H(1,t)$ für alle $t \in [0,1]$.

(7.10) Definition. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum N heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede Schleife durch einen Punkt $x_0 \in N$ zur trivialen Schleife $t \mapsto x_0 : [0,1] \to N$ homotop ist.

(7.11) Definition. Eine stetige Abbildung $p : M \to N$ zwischen zwei topologischen Hausdorff-Räumen heißt *Überlagerung*, wenn es zu jedem Punkt $y \in N$ eine Umgebung U um y gibt, so daß das Urbild $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von offenen Mengen U_i ist, für die die Einschränkungen $p\big|_{U_i} : U_i \to U$ Homöomorphismen sind. Ist M einfach zusammenhängend, so nennt man p (und M) eine *universelle Überlagerung*.

Bemerkung. (1) Die Kardinalität der Urbilder $p^{-1}(y)$ ist lokal konstant. Ist N wegzusammenhängend, so ist daher $|p^{-1}(y)|$ unabhängig vom Punkt $y \in N$. Diese Zahl wird die *Anzahl der Blätter* von p genannt.

(2) Ist U zusammenhängend, so sind die Mengen U_i gerade die Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$.

(7.12) Beispiele. (i) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} : t \mapsto e^{it}$ ist eine Überlagerung, und der Raum $\mathbb{R}$ ist einfach zusammenhängend. Also ist $\mathbb{R}$ eine universelle Überlagerung vom Torus $\mathbb{T}$. Die Abbildung p hat abzählbar unendlich viele Blätter.

(ii) Die Abbildung $p_n : \mathbb{T} \to \mathbb{T} : z \mapsto z^n$ ist eine n-blättrige Überlagerung von $\mathbb{T}$.

(iii) Sei $\mathbb{S}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ||x|| = 1\right\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ und sei $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ (= reelle projektive Ebene). Dann ist die Abbildung $q : \mathbb{S}_2 \to \mathcal{P}_2\mathbb{R} : x \mapsto \langle x \rangle_{\mathbb{R}}$ eine universelle Überlagerung, wenn man $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ mit der Quotienten-Topologie bzgl. q ausstattet. Die Überlagerung q ist zwei-blättrig.

(7.13) Homotopie-Lifting-Lemma. *Sei $p : M \to N$ eine Überlagerung mit $p(x_0) = y_0$, wobei N lokal zusammenhängend ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ mit $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$, die $p \circ H = h$ erfüllt. Sind insbesondere γ_1, γ_2 zwei Schleifen in M mit $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = x_0$, und sind $p \circ \gamma_1$ und $p \circ \gamma_2$ homotop via der Homotopie $h : [0,1] \times [0,1] \to N$, so sind auch γ_1 und γ_2 homotop via der Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to M$, und es ist $\gamma_2(1) = x_0$.*

Beweis. Da h stetig und $[0,1]^2$ kmpakt ist, gibt es Partitionen

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = 1 \quad \text{und} \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = 1$$

von $[0,1]$, so daß $h([x_j, x_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}])$ in einer offenen Menge $U_{jk} \subseteq N$ liegt, wobei $p : p^{-1}(U_{jk}) \to U_{jk}$ ein Homöomorphismus auf jeder Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_{jk})$ ist. Setze $I_{jk} := [x_j, x_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$. Sei U_{00}^* die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_{00})$, die x_0 enthält und sei $q_{00} := p^{-1} : U_{00} \to U_{00}^* 0$. Setze auf I_{00}

$$H := q_{00} \circ h\big|_{I_{00}}.$$

Sei nun U_{01}^* diejenige Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_{01})$, die $H(I_{00} \cap I_{01}) = H([0, x_1] \times \{t_1\})$ enthält. Sei wieder $q_{01} = p^{-1} : U_{01} \to U_{01}^* 0$ und setze auf I_{01}

$$H := q_{01} \circ h\big|_{I_{01}}.$$

Wegen

$$q_{00} \circ h\big|_{I_{00} \cap I_{01}} = q_{01} \circ h\big|_{I_{00} \cap I_{01}}$$

ist die Abbildung $H : I_{00} \cup I_{01} \to M$ wohldefiniert und stetig. Induktiv fortfahrend erhalten wir eine stetige Abbildung $H : I_{00} \cup \ldots \cup I_{0(s-1)} \to M$. Sei nun $U_{1(s-1)}$ die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_{1(s-1)})$, die $H(I_{0(s-1)} \cap I_{1(s-1)}) = H(\{x_1\} \times [t_{s-1}, 1])$ enthält. Sei wieder $q_{1(s-1)} := p^{-1} : U_{1(s-1)} \to U_{1(s-1)}^*$ und

$$H : q_{1(s-1)} \circ h\big|_{I_{1(s-1)}}$$

auf $I_{1(s-1)}$. Dieses Verfahren wird nun rückwärts fortgesetzt, bis H auf $I_{00} \cup \ldots \cup I_{0(s-1)} \cup I_{1(s-1)} \cup \ldots \cup I_{10}$ definiert ist. Schließlich läßt sich H auf dieselbe Art und Weise auf ganz $[0,1]^2$ stetig fortsetzen und es gilt nach Konstruktion $p \circ H = h$ und $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$.

Die Homotopie ist eindeutig bestimmt, denn sind H_1 und H_2 zwei Homotopien mit $p \circ H_1 = p \circ H_2$, so folgt aus der Tatsache, daß p ein lokaler Homöomorphismus um jeden Punkt ist, daß $H_1 = H_2$ auf einer offenen Teilmenge U von $[0,1]^2$ gilt. Andererseits folgt aus obiger Gleichung und der Stetigkeit aller beteiligten Abbildungen, daß U auch abgeschlossen ist. Da $[0,1]^2$ zusammenhängend ist, folgt $U = [0,1]^2$, also $H_1 = H_2$.

Es bleibt zu zeigen, daß H eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_2 ist. Wegen $p \circ H = h$ und $h(x,0) = p(\gamma_1(x))$ ist die Menge

$$\{x \in [0,1] \mid H(x,0) = \gamma_1(x)\} \neq \emptyset$$

nach Konstruktion offen in $[0,1]$. Da H und γ_1 stetig sind, ist diese Menge auch abgeschlossen. Also folgt aus dem Zusammenhang des Einheitsintervalles, daß obige Menge gleich $[0,1]$ ist. Dies zeigt $H(x,0) = \gamma_1(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Analog beweist man die Gleichungen $H(x,1) = \gamma_2(x)$ und $H(0,t) = H(1,t) = x_0$. □

(7.14) Wege-Lifting-Lemma. *Sei $p : M \to N$ eine Überlagerung und sei γ ein Weg in N. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in p^{-1}(\gamma(0))$ einen eindeutig bestimmten Weg $\gamma^* : [0,1] \to M$ mit $\gamma^*(0) = x_0$ und $p \circ \gamma^* = \gamma$.*

Beweis. Sei $h : [0,1] \times [0,1] \to N : (x,t) \mapsto \gamma(x)$. Dann ist h eine Homotopie von γ nach γ. Nach dem Homotopie-Lifting-Lemma (7.13) gibt es eine eindeutige Fortsetzung $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ von h mit $H(0,0) = x_0$. Dann ist $\gamma^* : [0,1] \to M : X \mapsto H(x,0)$ der gesuchte Weg. □

(7.15) Theorem. *Sei N ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum, der um jeden Punkt $p \in N$ eine einfach zusammenhängende offene Umgebung besitzt. Dann gibt es einen einfach zusammenhängenden topologischen Raum M und eine Überlagerung $p : M \to N$.*

Beweis. (1) Sei $y_0 \in N$ und sei $\Omega(y_0)$ die Menge aller Wege γ in N mit $\gamma(0) = y_0$. Wir definieren auf $\Omega(y_0)$ wie folgt eine Äquivalenzrelation. Für $\gamma, \delta \in \Omega(y_0)$ sei $\gamma \sim \delta$, wenn es eine Homotopie h zwischen γ und δ mit $h(0,t) = y_0$ und $h(1,t) = \gamma(1)$ für alle $t \in [0,1]$ gibt. Wir werden zeigen, daß

$$M = \Omega(y_0)/_\sim = \{[\gamma] \mid \gamma \in \Omega(y_0)\} \quad \text{und} \quad p : M \to N : [\gamma] \mapsto \gamma(1)$$

die gesuchte Überlagerung ist. Dazu muß allerdings M noch eine geeignete Topologie bekommen. Dies wird im Beweisteil (3) geschehen. Sei U eine einfach zusammenhängende Umgebung in N. Wir definieren auf dem Urbild $p^{-1}(U)$ eine weitere Äquivalenzrelation $\sim_U$. Für $[\gamma], [\delta] \in p^{-1}(U)$ sei $[\gamma] \sim_U [\delta]$, wenn es einen Weg β in U mit $\beta(0) = \gamma(1)$, $\beta(1) = \delta(1)$ und $[\beta \# \gamma] = [\delta]$ gibt. Dabei ist

$$\beta\#\gamma : [0,1] \to N : t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ein (stetiger) wohldefinierter Weg in N.

(2) Für $[\omega]_U := \left\{[\gamma] \in p^{-1}(U) \,\middle|\, [\gamma] \sim_U [\omega]\right\}$ mit $\omega \in p^{-1}(U)$ ist die Einschränkung $p^* = p\big|_{[\omega]_U} : [\omega]_U \to U$ eine Bijektion. Die Abbildung ist surjektiv: Sei $y \in U$. Wähle ein $[\gamma] \in [\omega]_U$. Dann ist $\gamma(1) \in U$ und es existiert ein Weg δ in U von $\gamma(1)$ nach y. Dann ist $p([\delta\#\gamma]) = \delta\#\gamma(1) = \delta(1) = y$ und $[\delta\#\gamma] \sim_U [\gamma]$ nach Konstruktion. Also ist auch $[\delta\#\gamma]$ in $[\omega]_U$ und p^* ist surjektiv. Seien $[\gamma_1], [\gamma_2] \in [\omega]_U$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Dann gibt es eine Schleife δ in U mit $\delta(0) = \gamma_1(1)$ und $[\delta\#\gamma_1] = [\gamma_2] \in \Omega(y_0)$. Da U einfach zusammenhängend ist, ist δ homotop zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma_1(1)$. Also ist γ_1 homotop zu γ_2, was die Injektivität von p^* zeigt.

(3) Wir definieren eine Topologie τ auf M folgendermaßen: Es sei $\mathcal{W} \in \tau$ genau dann, wenn für alle offenen, einfach zusammenhängenden Mengen $U \subseteq N$ und für alle Äquivalenzklassen $[\omega]_U$ von $p^{-1}(U)$ die Menge $p(\mathcal{W} \cap [\omega]_U)$ offen in N ist. Die Familie ist eine Topologie

auf M: Die leere Menge ist in τ. Da $p([\omega]_U) = U$ offen ist, ist auch M offen. Sind $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in \tau$, so ist nach (2)

$$p(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \cap [\omega]_U) = p(\mathcal{W}_1 \cap [\omega]_U) \cap p(\mathcal{W}_2 \cap [\omega]_U).$$

Also ist auch $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \in \tau$. Genauso zeigt man, daß die Vereinigung beliebiger Mengen aus τ wieder in τ liegt.

(4) Es ist $[\omega]_U \in \tau$ und $p\big|_{[\omega]_U} : [\omega]_U \to U$ ist ein Homöomorphismus: Sei $\mathcal{W} \subseteq [\omega]_U$ und sei $p(\mathcal{W})$ offen in U. Wir zeigen, daß $\mathcal{W}$ offen ist in M. Sei dazu $V \subseteq N$ offen und einfach zusammenhängend und wähle eine Äquivalenzklasse $[\zeta]_V$. Wir müssen nachweisen, daß $p(\mathcal{W} \cap [\zeta]_V)$ offen in N ist. Für $[\gamma] \in \mathcal{W} \cap [\zeta]_V$ ist $p([\gamma]) = \gamma(1) \in p(\mathcal{W} \cap [\zeta]_V)$. Sei $W \subseteq p(\mathcal{W}) \cap V$ eine wegzusammenhängende Umgebung von $\gamma(1)$ und sei $w \in W$. Wähle einen Weg δ in W von $\gamma(1)$ nach w. Dann ist $[\delta \# \gamma] \in [\omega]_U \cap [\zeta]_V$. Wegen

$$w = p([\delta \# \gamma]) \in W \subseteq p(\mathcal{W})$$

folgt $[\delta \# \gamma] \in \mathcal{W}$ aus (2). Also ist $w \in p(\mathcal{W} \cap [\zeta]_V)$, und wir haben gezeigt, daß

$$W \subseteq p(\mathcal{W} \cap [\zeta]_V)$$

gilt. Dies bedeutet aber, daß $p(\mathcal{W} \cap [\zeta]_V)$ offen in N ist. Insbesondere haben wir gezeigt, daß $[\omega]_U \in \tau$ und $p\big|_{[\omega]_U}$ stetig ist. Ist $\mathcal{W} \subseteq [\omega]_U$ offen, so ist $p(\mathcal{W}) = p(\mathcal{W} \cap [\omega]_U)$ nach Definition offen, d.h. die Abbildung $p\big|_{[\omega]_U}$ ist auch offen und damit ein Homöomorphismus.

(5) Der topologische Raum (M, τ) ist ein Hausdorff-Raum: Seien dazu $[\gamma_1], [\gamma_2] \in M$ verschieden. Ist $\gamma_1(1) \neq \gamma_2(1)$, so gibt es in N zwei disjunkte offene Umgebungen U_i um $\gamma_i(1)$, die in offenen, einfach zusammenhängenden Mengen enthalten sind. Dann liefern die Urbilder $p^{-1}(U_1)$ und $p^{-1}(U_2)$ nach (4) disjunkte offene Umgebungen von $[\gamma_1]$ und $[\gamma_2]$. Ist hingegen $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, so gibt es eine offene, einfach zusammenhängende Umgebung U von $\gamma_1(1)$. Nach (2) gehören $[\gamma_1]$ und $[\gamma_2]$ zu verschiedenen U-Komponenten von $p^{-1}(U)$. Damit folgt die Behauptung wieder aus (4), denn die Urbilder dieser verschiedenen Komponenten liefern die gesuchten disjunkten Umgebungen.

(6) Die Abbildung $p : M \to N$ ist eine Überlagerung: Nach Voraussetzung wird N von offen, einfach zusammenhängenden Mengen überdeckt. Aus (4) folgt die Stetigkeit von p, sowie die lokale Homöomorphie. Also ist p eine Überlagerung.

(7) Der Raum M ist wegzusammenhängend: Sei $\delta : [0,1] \to N : t \mapsto y_0$ der konstante Weg und sei $[\gamma] \in M$ beliebig. Wir müssen einen Weg von $[\delta]$ nach $[\gamma]$ finden. Betrachte für $s \in [0,1]$ die Wege

$$\gamma_s : [0,1] \to N : t \mapsto \gamma(st) \quad \text{und} \quad \Gamma : [0,1] \to M : s \mapsto [\gamma_s].$$

Dann ist $[\gamma_0] = [\delta]$ und $[\gamma_1] = [\gamma]$. Also müssen wir nur noch die Stetigkeit von Γ nachweisen. Da $\gamma([0,1])$ kompakt ist, finden wir endlich viele offene, einfach zusammenhängende Mengen $U_1, \ldots, U_k$, die $\gamma([0,1])$ überdecken. Dann gibt es zu jedem $s \in [0,1]$ ein offenes Intervall $J_s \subseteq [0,1]$ um s mit $\gamma(J_s) \subseteq U_{j_s}$. Somit gibt es eine endliche Familie $J_1, \ldots, J_l$ mit $\gamma(J_r) \subseteq U_{j_r}$, $\bigcup_{i=1}^{r} J_i = [0,1]$ und $[\gamma_s] \sim_{U_{j_r}} [\gamma_{s'}]$ für alle $s, s' \in J_r$. Sei $[\omega_r]_{U_{j_r}}$ diejenige Komponente von $p^{-1}(U_{j_r})$, die $[\gamma_s]$ für alle $s \in J_r$ enthält. Für $\mathcal{W} \subseteq M$ offen ist dann auch

$$\Gamma^{-1}(\mathcal{W}) = \bigcup_{r=1}^{l} \Gamma^{-1}(\mathcal{W} \cap [\omega_r]_{U_{j_r}})$$

offen, da

$$\Gamma^{-1}(\mathcal{W} \cap [\omega_r]_{U_{j_r}}) = \left\{ s \in [0,1] \;\middle|\; \gamma(s) \in p(\mathcal{W} \cap [\omega_r]_{U_{j_r}}) \right\} = \gamma^{-1}(p(\mathcal{W} \cap [\omega_r]_{U_{j_r}}))$$

offen ist. Dies zeigt die Stetigkeit von Γ und den Wegzusammenhang von M.

(8) Der Raum M ist einfach zusammenhängend: Mit den Bezeichnungen aus (7) sei γ^* eine Schleife in M durch den konstanten Weg $[\delta]$. Sei $\gamma = p \circ \gamma^*$. Dann ist der Weg $\Gamma : [0,1] \to M$ aus (7) ein Weg von $[\delta]$ nach $[\gamma]$, für den $p \circ \Gamma(s) = \gamma_s(1) = \gamma(s)$ gilt. Nach der Eindeutigkeit des Wege-Liftens folgt damit $\Gamma = \gamma^*$ und $[\delta] = \gamma^*(1) = \Gamma(1) = [\gamma_1] = [\gamma]$. Also ist γ zum konstanten Weg δ homotop, Nach dem Homotopie-Lifting-Lemma ist dann auch γ^* zum konstanten Weg (in M) homotop, d.h. M ist einfach zusammenhängend. □

Das nächste Theorem zeigt, weshalb die universellen Überlagerungen ihren Namen hat.

(7.16) Satz. *Sei $p : M \to N$ eine Überlagerung, wobei M lokal wegzusammenhängend und N einfach zusammenhängend ist. Dann existiert ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $f : M \to N \times F$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ f = p$, wobei $\mathrm{pr}_1 : N \times F \to N$ die Projektion auf die erste Komponente ist. Ist M wegzusammenhängend, so ist p ein Homöomorphismus. Insbesondere gibt es bis auf Homöomorphie nur eine universelle Überlagerung eines topologischen Raumes.*

Beweis. Sei F die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von M, versehen mit der diskreten Topologie. Setze $f : M \to N \times F : m \mapsto (p(m), W_m)$, wobei W_m die Wegzusammenhangskomponente von M ist, die m enthält. Die Abbildung f is offen, da p als Überlagerung offen ist, und sie ist stetig, da M lokal wegzusammenhängend ist. Nach Konstruktion ist f surjektiv. Ist $f(m_1) = f(m_2)$, so ist $W_{m_1} = W_{m_2}$. Wir müssen also zeigen, daß $m_1 = m_2$ ist. Da m_1 und m_2 in der selben Kompomente liegen, gibt es einen Weg γ in M von m_1 nach m_2. Dann ist $p \circ \gamma$ ein Weg in N durch $p(m_1)$. Da N einfach zusammenhängend ist, ist $p \circ \gamma$ homotop zum konstanten Weg durch $p(m_1)$. Ist γ_{m_1} der konstante Weg durch m_1 in M, so folgt nach dem Wege-Lifting-Lemma (7.14) $m_2 = \gamma(1) = \gamma_{m_1}(1) = m_1$. Dies beweist das Lemma. □

Überlagerungsgruppen

Als nächstes wollen wir topologische Gruppen überlagern und zeigen, wie man auf einer Überlagerung wieder eine topologische Gruppe definieren kann. Dabei wird sich herausstellen, daß die Überlagerungsabbildung ein Gruppen-Epimorphismus mit diskretem Kern wird.

(7.17) Proposition. *Sei G eine wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende topologische Gruppe, und sei $\widetilde{G}$ eine universelle Überlagerung von G mit Überlagerungsabbildung p. Dann besitzt $\widetilde{G}$ eine Gruppenstruktur, bezüglich der die Abbildung p ein Gruppen-Epimorphismus ist, und die $\widetilde{G}$ zu einer topologischen Gruppe macht. Die Gruppe $\widetilde{G}$ wird als einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe von G bezeichnet.*

Beweis. Wir verwenden wieder die Notation aus dem letzten Lemma, Beweisteil (7). Dann ist o.E. (da je zwei universelle Überlagerungennach (7.16) homöomorph sind, siehe auch Spanier, Chapt.2, Sec.1, Corollary 13)

$$\widetilde{G} = M = \{[\gamma] \mid \gamma : [0,1] \to G, \gamma(0) = \mathbf{1}\} .$$

Durch

$$[\gamma][\delta] := [t \mapsto \gamma(t)\delta(t) : [0,1] \to G]$$

wird auf $\widetilde{G}$ eine Gruppen-Verknüpfung mit dem konstanten Weg $\omega \equiv \mathbf{1}$ als Neutralelement definiert. Diese Definition ist wohldefiniert, da das punktweise Produkt äquivalenter Wege durch das punktweise Produkt der Homotopien wieder äquivalent ist. Ebenso vererben sich die Gruppen-Eigenschaften von G punktweise auf $\widetilde{G}$ und es ist klar, daß die Äquivalenzklasse $[\omega]$ des konstanten Weges das neutrale Element ist. Schließlich zeigt

$$p([\alpha][\beta]) = p([\alpha\beta]) = \alpha(1)\beta(1) = p([\alpha])p([\beta]),$$

daß p ein Homomorphismus ist. Nach Definition ist p surjektiv. Da p außerdem ein lokaler Homöomorphismus ist, folgt aus der Stetigkeit der Multiplikation von G im Punkt $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ und der Inversion von G in Punkt $\mathbf{1}$, daß die entsprechenden Operationen in $\widetilde{G}$ in $([\omega],[\omega])$ bzw. in $[\omega]$ stetig sind. Dies zeigt, daß $\widetilde{G}$ eine topologische Gruppe ist. □

Nun wollen wir das zuletzt bewiesene Lemma für Lie-Gruppen formulieren.

(7.18) Theorem. *Sei G eine wegzusammenhängende Lie-Gruppe und G' eine topologische Gruppe. Gibt es einen Homomorphismus $p : G' \to G$, der eine Überlagerung ist, so gibt es auf G' einen analytischen Atlas, bzgl. dessen G' eine Lie-Gruppe wird und p analytisch ist. Überdies ist p ein lokaler analytischer Diffeomorphismus.*

Beweis. Über die lokalen Homöomorphismen erhält man auf G' einen analytischen Atlas, bezüglich dessen die Abbildung p sowohl analytisch als auch ein lokaler analytischer Diffeomorphismus ist. Es bleibt nachzuweisen, daß die Gruppenoperationen in G' analytisch sind. Seien dazu $g', h' \in G'$ und sei $g = p(g')$, $h = p(h')$. Dann gibt es wegzusammenhängende Umgebungen U, V, W von g, h, gh^{-1} in G mit $UV^{-1} \subseteq W$, und es gibt Umgebungen U', V' von g', h', so daß die Einschränkungen

$$p\big|_{U'} : U' \to U \quad \text{und} \quad p\big|_{V'} : V' \to V$$

Homöomorphismen sind. Außerdem soll

$$p\big|_{p^{-1}(W)} : p^{-1}(W) \to W$$

auf den Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(W)$ Homöomorphismen liefern. Sei W' diejenige Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(W)$, die den Quotienten $g'h'^{-1}$ enthält und sei q die zugehörige Umkehrabbildung von p auf dieser Komponente. Die Analytizität der Abbildung $(x', y') \mapsto x'y'^{-1} : G' \times G' \to G'$ folgt aus der Relation $x'y'^{-1} = q(p(x')p(y'^{-1}))$ für alle $x' \in U'$ und alle $y' \in V'$. Um diese Beziehung zu verifizieren, genügt es zu zeigen, daß $x'y'^{-1}$ in W' liegt, da p ein Homomorphismus und ein Homöomorphismus auf W ist. Dazu wählen wir einen Weg γ in U von g nach $p(x')$ und einen Weg δ in V von h nach $p(y')$. Dann liegt der Weg $\omega : [0,1] \to G : t \mapsto \gamma(t)\delta(t)^{-1}$ nach Wahl von U, V, W in W. Somit ist $q(\gamma(t)\delta(t))$ definiert und für den Weg $\omega' : [0,1] \to G' : t \mapsto q(\gamma(t)\delta(t))$ ist $p \circ \omega' = \omega$. Andererseits läßt sich der Weg ω eindeutig zu einem Weg ω'' von $g'h'^{-1}$ nach $x'y'^{-1}$ liften, also ist auch $p \circ \omega'' = \omega$. Aus der Eindeutigkeit des gelifteten Weges folgt $\omega' = \omega''$. Damit ist aber

$$q(p(x')p(y')) = q(\gamma(1)\delta(1)) = \omega'(1) = \omega''(1) = x'y'^{-1},$$

was zu zeigen war. □

(7.19) Korollar. *Sei G eine wegzusammenhängende Lie-Gruppe. Dann gibt es einen analytischen Atlas auf der universellen Überlagerungsgruppe $\widetilde{G}$, der diese Gruppe zu einer Lie-Gruppe macht, und die Überlagerungsabbildung ist analytisch.* □

(7.20) Theorem. *Sei G eine wegzusammenhängende Lie-Gruppe und $p : G' \to G$ ein Überlagerungshomomorphismus. Trägt G' die durch p bestimmte Lie-Gruppen-Struktur, so gibt es eine eindeutig bestimmte analytische Abbildung $\exp_{G'} : \mathfrak{L}(G) \to G'$ mit $p \circ \exp_{G'} = \exp_G$ und $\exp_{G'}(0) = \mathbb{1}$. Die Einparametergruppen von G' sind genau die Abbildungen $t \mapsto \exp_{G'} tX$ für $X \in \mathfrak{L}(G)$.*

Beweis. Nach dem Wege-Lifting-Lemma (7.14) gibt es zu dem Weg $t \mapsto \exp_G tX$ genau einen Weg γ'_X in G' mit

$$p \circ \gamma'_X(t) = \exp_G tX \quad \text{und} \quad \gamma'_X(0) = \mathbb{1}.$$

Setzen wir nun $\exp_{G'} X = \gamma'_X(1)$, so gilt $p \circ \exp_{G'} = \exp_G$ und $\exp_{G'}(0) = \mathbb{1}$. Da p nach Satz (7.18) ein lokaler analytischer Diffeomorphismus ist, folgt aus obiger Beziehung, daß $\exp_{G'}$ analytisch ist. Ist $f : \mathfrak{L}(G) \to G'$ eine weitere solche Abbildung, so ist die Menge $\{X \in \mathfrak{L}(G) \mid f(X) = \exp_{G'}(X)\}$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Da $\mathfrak{L}(G)$ zusammenhängend ist, ist diese Menge mit $\mathfrak{L}(G)$ identisch, also ist $f = \exp_{G'}$. Betrachte für festes t_0 die Wege

$$t \mapsto \exp_{G'}((t + t_0)X) \quad \text{und} \quad t \mapsto \exp_{G'}(tX) \exp_{G'}(t_0 X).$$

Da beide Wege durch p auf $\exp_G((t + t_0)X)$ abgebildet werden und in 0 übereinstimmen, folgt aus dem Wege-Lifting-Lemma, daß diese beiden Wege global übereinstimmen. Ist umgekehrt $\gamma : \mathbb{R} \to G'$ eine Einparametergruppe, so ist $p \circ \gamma$ eine Einparametergruppe in G. Diese sind von der Form $t \mapsto \exp_G tX$ für ein $X \in \mathfrak{L}(G)$. Schließlich zeigt das Wege-Lifting-Lemma, daß $\gamma(t) = \exp_{G'}(tX)$ ist. □

(7.21) Korollar. *Zu jeder Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, für die eine Liegruppe G mit $L(G) = \mathfrak{g}$ existiert, gibt es eine eindeutig bestimmte, einfach zusammenhängende Liegruppe $\widetilde{G}$ mit $L(\widetilde{G}) = \mathfrak{g}$. Die Gruppe $\widetilde{G}$ ist die universelle Überlagerung von G.*

Beweis. Es ist nurmehr zu zeigen, daß zwei universelle Überlagerungsgruppen von G als Gruppen isomorph sind. Dies ist aber klar, da jede Überlagerungsgruppe von G lokal isomorph zu G ist und jede zusammenhängende topologische Gruppe von jeder $\mathbb{1}$-Umgebung algebraisch erzeugt wird. □

Durch die Campbell-Hausdorff-Formel folgt mit Hilfe der Exponentialabbildung das folgende Ergebnis.

(7.22) Korollar. *Je zwei Liegruppen mit isomorphen Lie-Algebren sind lokal isomorph.* □

Mit Hilfe des Satzes von Ado (jede *endlich*-dimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt eine treue lineare Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$) läßt sich zeigen:

(7.23) Korollar. *Zu jeder endlich-dimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gibt es eine lineare Lie-Gruppe G mit $L(G) = \mathfrak{g}$. Insbesondere ist jede lokalkompakte Liegruppe lokal isomorph zu einer linearen Lie-Gruppe. Man sagt, jede lokalkompakte Liegruppe ist lokal linear.*

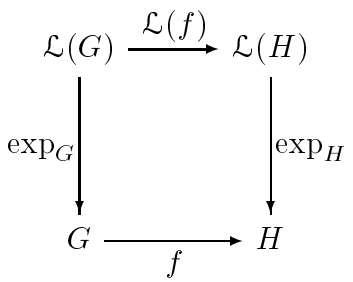
KAPITEL 8

Korrespondenz zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren

(8.1) Theorem. *Seien G und H lineare Lie-Gruppen und sei $f : G \to H$ ein Morphismus zwischen topologischen Gruppen. Dann wird durch*

$$\mathfrak{L}(f) : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H) : X \mapsto f \circ X$$

ein Morphismus zwischen topologischen reellen Lie-Algebren definiert, so daß das Diagramm



kommutiert, d.h. es ist $\exp_H \circ \mathfrak{L}(f) = f \circ \exp_G$. Der Morphismus $\mathfrak{L}(f)$ wird durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Sind $f_1, f_2 : G \to H$ zwei Morphismen im obigen Sinne mit $\mathfrak{L}(f_1) = \mathfrak{L}(f_2)$, so stimmen f_1 und f_2 auf der Zusammenhangskomponente $G_{\mathbf{1}}$ von G überein.

Beweis. Es ist

$$\exp_H(\mathfrak{L}(f)(X)) = \exp_H(f \circ X) = (f \circ X)(1) = f(X(1)) = f(\exp_G X)$$

und nach Theorem (6.10)(i) ist für alle $r, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(f)(r \cdot X)(t) &= (f \circ r \cdot X)(t) \\ &= f(r \cdot X(t)) = f(X(rt)) = (f \circ X)(rt) \\ &= r \cdot (f \circ X)(t) = r \cdot \mathfrak{L}(f)(X)(t). \end{aligned}$$

Dabei gilt das vorletzte Gleichheitszeichen nach Theorem (6.10)(i), da $f \circ X$ eine Einparametergruppe in H ist. Aus dem gleichen Theorem folgt ebenso

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(X+Y)(t) &= f(X+Y)(t)\\ &= f\left(\lim_{n\to\infty}(X(t/n)Y(t/n))^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}(f(X(t/n))f(Y(t/n)))^n\\ &= ((f\circ X)+(f\circ Y))(t)\\ &= (\mathcal{L}(f)(X)+\mathcal{L}(f)(Y))(t)\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{L}(f)[X,Y] = [\mathcal{L}(f)(X), \mathcal{L}(f)(Y)].$$

Um die Stetigkeit von $\mathcal{L}(f)$ zu zeigen, genügt es, diese an der Stelle 0 nachzuweisen, da wir schon wissen, daß $\mathcal{L}(f)$ additiv ist. Sei also $B \subset \mathcal{L}(H)$ eine offene Kugel um 0, die durch $\exp_H$ homöomorph auf eine offene Umgebung von $\mathbf{1}$ in H abgebildet wird. Dann ist $U = (f \circ \exp_G)^{-1}(\exp_H(B))$ eine offene Nullumgebung in $\mathcal{L}(G)$ und es ist $\mathcal{L}(f)(U) \subseteq B$, was die Stetigkeit von $\mathcal{L}(f)$ in 0 zeigt. Damit haben wir verifiziert, daß $\mathcal{L}(f)$ ein Morphismus zwischen topologischen reellen Lie-Algebren ist. Dieser ist eindeutig bestimmt, denn für einen weiteren solchen Morphismus $F : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$ mit $\exp_H \circ F = f \circ \exp_G$ ist $F(X)(1) = f(X(1))$. Da F die Skalarmultiplikation invariant läßt, folgt

$$F(X)(t) = (t \cdot F(X))(1) = F(t \cdot X)(1) = f(t \cdot X(1)) = f(X(t)) = \mathcal{L}(f)(X)(t)$$

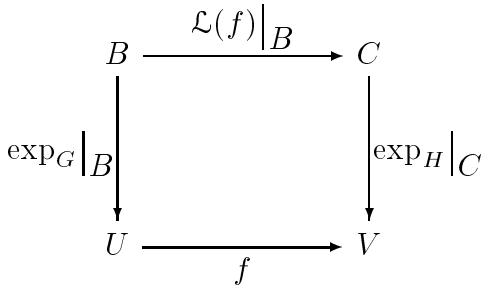
für alle $t \in \mathbb{R}$, also ist $F = \mathcal{L}(f)$. Sei schließlich $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2)$. Sei B eine offene Kugel in $\mathcal{L}(G)$ um 0, die von $\exp_G$ auf eine offene Umgebung U von $\mathbf{1}$ in G abgebildet wird. Dann ist für $g \in U$

$$f_1(g) = \exp_H \circ \mathcal{L}(f_1) \circ (\exp_G\big|_B)^{-1}(g) = \exp_H \circ \mathcal{L}(f_2) \circ (\exp_G\big|_B)^{-1}(g) = f_2(g).$$

Also ist die Menge $E := \{g \in G \mid f_1(g) = f_2(g)\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von G, die U enthält. Also ist E auch offen und enthält damit die Zusammenhangskomponente $G_{\mathbf{1}}$ von $\mathbf{1}$. Dies beweist alle Teile des Theorems. □

(8.2) Theorem. *Seien G und H lineare Lie-Gruppen und seien U und V Umgebungen von $\mathbf{1}$ in G und H. Sei $f : U \to V$ ein stetiger lokaler Gruppen-Homomorphismus, d.h. es ist $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in U$ mit $xy \in U$. Dann gibt es einen stetigen Morphismus $\mathcal{L}(f) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ zwischen reellen Lie-Algebren, so daß für hinreichend kleine Nullumgebungen*

B und C in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ das Diagramm



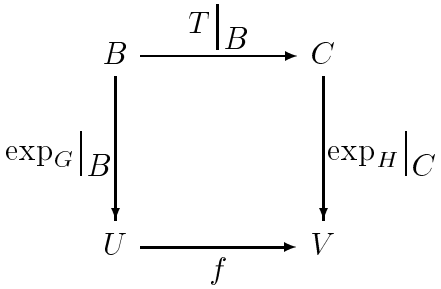
kommutiert.

Beweis. Nach Satz (6.10) können wir $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ mit $\mathcal{L}(G)$ und $\mathcal{L}(H)$ identifizieren. Sei also $X \in \mathcal{L}(G)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $X((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq U$. Nach Lemma (3.3) läßt sich die lokale Einparametergruppe $t \mapsto f(X(t)) : (-\varepsilon,\varepsilon) \to H$ zu einer globalen Einparametergruppe $\mathcal{L}(f)X : \mathbb{R} \to H$ fortsetzen. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $\mathcal{L}(f) : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$, so daß $\exp_H \circ \mathcal{L}(f) = f \circ \exp_G$ auf einer kleinen Nullumgebung B in $\mathcal{L}(G)$ gilt. Aufgrund der Gleichung

$$r \cdot (\mathcal{L}(f)X)(t) = \mathcal{L}(f)X(rt) = \mathcal{L}(f)(r \cdot X)(t)$$

erhält $\mathcal{L}(f)$ die Skalarmultiplikation. Wie im vorigen Beweis zeigt man, daß $\mathcal{L}(f)$ auch die Addition und die Lie-Klammer erhält. Also ist $\mathcal{L}(f)$ ein Morphismus zwischen reellen topologischen Lie-Algebren. □

(8.3) Fundamentalsatz von Lie. *Seien G und H lineare Lie-Gruppen und sei $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Morphismus zwischen vollständig normierbaren Lie-Algebren. Dann gibt es Umgebungen U und V von $\mathbf{1}$ in G und H, und es gibt einen stetigen lokalen Gruppenhomomorphismus $f : U \to V$, so daß für hinreichend kleine Nullumgebungen B und C von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, das Diagramm*



kommutiert.

Beweis. Da G und H lineare Lie-Gruppen sind, können wir annehmen, daß $G \subseteq A_1^{-1}$, $\mathfrak{g} \subseteq A_1$ und $H \subseteq A_2^{-1}$, $\mathfrak{h} \subseteq A_2$ für zwei geeignete Banach-Algebren A_1 und A_2 ist. Wähle normale Umgebungen (siehe (4.5)) B_i um 0 in A_i, so daß

$$\exp_G\big|_{(B_1 \cap \mathfrak{g})} : B_1 \cap \mathfrak{g} \to U \quad \text{und} \quad \exp_H\big|_{(B_2 \cap \mathfrak{h})} : B_2 \cap \mathfrak{h} \to V$$

Homöomorphismen auf offene Umgebungen U und V von $\mathbf{1}$ in G und H. Überdies können wir B_1 so wählen, daß $T(B_1 \cap \mathfrak{g}) \subseteq B_2$ ist. Dann ist $T(X * Y) = T(X) * T(Y)$ für alle $X, Y \in B_1 \cap \mathfrak{g}$ nach Theorem (4.7). Wir setzen nun

$$f : U \to V : g \mapsto \exp_H(T(\exp_G \big|_{B_1 \cap \mathfrak{g}})^{-1}).$$

Dann erfüllt f die Bedingungen des Theorems, denn wegen $T(X * Y) = T(X) * T(Y)$ ist f ein lokaler Homomorphismus und nach Konstruktion von f kommutiert das im Theorem angegebene Diagramm. □

Für das folgenden Theorem benötigen wir noch ein Lemma. Ein Beweis findet man etwa in Hilgert-Neeb, Satz I.9.10.

(8.4) Lemma. *Sei G eine einfach zusammenhängende topologische Gruppe, sei H eine beliebige Gruppe und sei U eine offene zusammenhängende Umgebung von $\mathbb{1}$ in G. Gibt es eine Abbildung $f : U \to H$ mit $f(uv) = f(u)f(v)$ für alle $u, v \in U$ mit $uv \in U$, so gibt es genau einen Gruppen-Homomorphismus $F : G \to H$, der f forsetzt.*

(8.5) Theorem. *Seien G und H lineare Lie-Gruppen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gibt Umgebungen U und V von $\mathbf{1}$ in G und H, und es gibt einen in beiden Richtungen stetigen bijektiven lokalen Gruppenhomomorphismus $f : U \to V$.

(ii) Die universellen Überlagerungsgruppen $\widetilde{G_\mathbf{1}}$ und $\widetilde{H_\mathbf{1}}$ sind isomorph.

(iii) Die Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ sind isomorph.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (iii) wurde in den letzten beiden Theoremen bewiesen. Nach Korollar (7.19) besitzt jede wegzusammenhängende Lie-Gruppe eine universelle Überlagerungsgruppe. Sind die Gruppen $\widetilde{G_\mathbf{1}}$ und $\widetilde{H_\mathbf{1}}$ isomorph via g, und sind $p : \widetilde{G_\mathbf{1}} \to G_\mathbf{1}$ und $q : \widetilde{H_\mathbf{1}} \to H_\mathbf{1}$ Überlagerungabbildungen, so gibt es Umgebungen $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$ um $\mathbf{1}$ in G und H, so daß $g(\widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V}$ ist und die Einschränkungen $p\big|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$ und $q\big|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to V$ umkehrbar sind. Dann ist $f := q \circ g \circ p^{-1} : U \to V$ der gesuchte injektive lokale Homomorphismus. Gilt umgekehrt (i), so gibt es nach Theorem (8.4) genau einen Gruppen-Homomorphismus $F : \widetilde{G_\mathbf{1}} \to \widetilde{H_\mathbf{1}}$, der die Abbildung f fortsetzt. Da f bijektiv ist, ist das Bild von F offen und damit auch abgeschlossen in $\widetilde{H_\mathbf{1}}$. Da letztere Gruppe zusammenhängend ist, ist somit $\operatorname{im} F = \widetilde{H_\mathbf{1}}$. Also ist F surjektiv. Da f bijektiv ist, ist der Kern von F diskret. Die zusammenhängende Gruppe $\widetilde{G_\mathbf{1}}$ operiert auf $\ker F$ via Konjugation. Da $\ker F$ diskret ist und die Abbildung $\widetilde{G_\mathbf{1}} \times \ker F \to \ker F : (g, x) \mapsto g^{-1}xg$ stetig ist, müssen die Bahnen $\left\{ g^{-1}xg \;\middle|\; g \in \widetilde{G_\mathbf{1}} \right\}$ zusammenhängend, also einpunktig sein, d.h. es ist $g^{-1}xg = x$ für alle $g \in \widetilde{G_\mathbf{1}}$ und alle $x \in \ker F$. Also liegt $\ker F$ im Zentrum von $\widetilde{G_\mathbf{1}}$. Da $Z := \ker F$ diskret ist, gibt es außerdem eine zusammenhängende, symmetrische

Umgebung W von $\mathbf{1}$ mit $Z \cap W = \{\mathbf{1}\}$. Mit $W' := F(W)$ ist $F^{-1}(W') = ZW$. Die Zusammenhangskomponenten von ZW sind die Mengen zW mit $z \in Z$ und $F : zW \to W'$ ist ein Homöomorphismus. Also ist F eine Überlagerung. Insbesondere ist $\widetilde{G_{\mathbf{1}}}$ eine universelle Überlagerung von $E := \widetilde{G_{\mathbf{1}}}/_{\ker F} \cong \widetilde{H_{\mathbf{1}}}$. Die Gruppen $\widetilde{H_{\mathbf{1}}}$ und E sind als topologische Gruppen isomorph. Da die erste der beiden Gruppe aber selbst einfach zusammenhängend ist, folgt $\widetilde{G_{\mathbf{1}}} \cong \widetilde{H_{\mathbf{1}}}$ aus Satz (7.16). □

(8.6) Korollar. *Seien G und H lineare Lie-Gruppen und sei $f : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus. Dann ist f eine analytische Abbildung bzgl. der kanonischen analytischen Strukturen von G und H.*

Beweis. Folgt sofort aus Theorem (8.2) und der Tatsache, daß die Exponentialfunktion und jede stetige lineare Abbildung analytisch ist. □

(8.7) Korollar. *Sei G eine lineare Lie-Gruppe. Dann gibt es auf G bis auf analytische Diffeomorphie genau einen analytischen Atlas auf G, der G zu einer Lie-Gruppe macht.*

Beweis. Die Identität $\mathrm{id} : G \to G$ ist ein stetiger Isomorphismus. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei analytische Atlanten, bzgl. deren G zu einer Lie-Gruppe wird. Nach dem vorherigen Korollar ist die Identität $\mathrm{id} : (G, \mathcal{A}) \to (G, \mathcal{B})$ analytisch und deren Umkehrung aus dem gleichen Grund ebenso. Also ist die Identität ein analytischer Diffeomorphismus. □

KAPITEL 9

Die adjungierte Darstellung

In diesem Kapitel sei E stets ein Banach-Raum und $\mathcal{A}$ die Banach-Algebra aller beschränkten linearen Operatoren auf E. Der Banach-Raum E sei mit einer stetigen bilinearen Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$ ausgestattet. Diese muß *nicht* assoziativ sein. Die Gruppe $\mathrm{Aut}\,(E)$ aller *Automorphismen von* E ist definiert durch

$$\mathrm{Aut}\,(E) := \left\{ \alpha \in \mathcal{A}^{-1} \,\middle|\, \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) \text{ für alle } x, y \in E \right\}.$$

Die Gruppe $\mathrm{Aut}\,(E)$ ist bezüglich der punktweisen Konvergenz abgeschlossen in $\mathcal{A}^{-1}$, da die Multiplikation in E stetig ist. Da die Topologie, die von der Operator-Norm induziert wird, feiner ist als die Topologie der punktweisen Konvergenz, ist $\mathrm{Aut}\,(E)$ auch bezüglich der Operator-Norm-Topologie abgeschlossen. Der Vektorraum $\mathrm{Der}(E)$ aller *stetigen Derivationen* $D \in \mathcal{A}$ (siehe (3.8)(3)) ist eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra $(\mathcal{A}, [.,.])$, siehe auch Definition (3.10).

(9.1) Lemma. *Sei* $\mathcal{E} := \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(E, E))$ *der Banach-Raum aller beschränkten linearen Operatoren von* E *nach* $\mathrm{Hom}(E, E)$ *bezüglich der Operatornorm. Wir fassen im folgenden* $\mathcal{E}$ *als Raum aller bilinearen stetigen Abbildungen von* $E \times E$ *nach* E *auf. Seien*

$$\chi_l : \mathrm{Hom}(E,E) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}) : T \mapsto T_l = (\varphi \mapsto ((x,y) \mapsto \varphi(Tx)y))$$
$$\chi_r : \mathrm{Hom}(E,E) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}) : T \mapsto T_r = (\varphi \mapsto ((x,y) \mapsto \varphi(x)(Ty)))$$
$$\chi_a : \mathrm{Hom}(E,E) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}) : T \mapsto T_a = (\varphi \mapsto ((x,y) \mapsto T(\varphi(x)y)))$$

für $\varphi \in \mathcal{E}$ *und* $x, y \in E$. *Setze* $m(x, y) := xy$ *für* $x, y \in E$. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Die Abbildungen χ_l, χ_r *und* χ_a *sind kontrahierende Banach-Raum-Operatoren. Die ersten beiden Operatoren vertauschen Produkte, während* χ_a *Produkte erhält. Insbesondere ist* $(\chi_* T)^n = \chi_*(T^n)$, *wobei* $*$ l, r *oder* a *bedeutet.*

(ii) Für alle $R, S, T \in \mathrm{Hom}(E, E)$ *kommutieren die Operatoren* $\chi_l R$, $\chi_r S$ *und* $\chi_a T$ *paarweise.*

(iii) Ein Element $D \in \mathrm{Hom}(E, E)$ *ist genau dann eine Derivation von* E, *wenn die Relation* $(\chi_l D + \chi_r D)(m) = \chi_a D(m)$ *gilt.*

(iv) Ein Element $T \in \mathrm{Hom}(E,E)$ ist genau dann ein Endomorphismus von E (d.h. T erhält die Multiplikation m), wenn $(\chi_l T \chi_r T)(m) = (\chi_a T)(m)$ gilt.

Beweis. (i) Für $\varphi \in \mathcal{E}$ und $x, y \in E$ mit $||\varphi|| = ||x|| = ||y|| = 1$ ist

$$||((\chi_l T)(\varphi))(x,y)|| = ||\varphi(Tx)(y)|| \leq ||\varphi(Tx)|| \leq ||\varphi||\,||Tx|| = ||Tx||$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} ||\chi_l T|| &= \sup\{||(\chi_l T)(\varphi)|| \mid \varphi \in \mathcal{E}, ||\varphi|| = 1\} \\ &= \sup\{||((\chi_l T)(\varphi))(x,y)|| \mid \varphi \in \mathcal{E}, ||\varphi|| = 1, x, y \in E, ||x|| = ||y|| = 1\} \\ &\leq \sup\{||Tx|| \mid x \in E, ||x|| = 1\} \\ &= ||T|| \end{aligned}$$

für alle $T \in \mathrm{Hom}(E,E)$. Also ist der Operator χ_l kontrahierend. Analog zeigt man dies für die beiden anderen Operatoren. Für $S, T \in \mathrm{Hom}(E,E)$ und $x, y \in E$ ist außerdem

$$\begin{aligned} \chi_l(ST)(\varphi)(x)(y) &= \varphi((ST)x)(y) = \varphi(S(Tx))(y) = (\chi_l S)(\varphi)(Tx)(y) \\ &= (\chi_l(T)(\chi_l(S)(\varphi)))(x)(y) = (\chi_l(T)(\chi_l(S))(\varphi)(x)(y), \end{aligned}$$

woraus

$$\chi_l(ST) = \chi_l(T)\chi_l(S)$$

folgt. Genauso zeigt man $\chi_r(ST) = \chi_r(T)\chi_r(S)$ und $\chi_a(ST) = \chi_a(S)\chi_a(T)$. Die letzte Aussage von (i) folgt unmittelbar aus den gerade bewiesenen Eigenschaften.

(ii) Wir zeigen nur die Relation $(\chi_r R)(\chi_a T) = (\chi_a T)(\chi_r R)$. Für $R, T \in \mathrm{Hom}(E,E)$ und $x, y \in E$ ist

$$\left((\chi_r R)\,(\chi_a T)\right)(\varphi)(x)(y) = T(\varphi(x)(Ry)) = T\left(\chi_r R(\varphi)(x)(y)\right) = \left((\chi_a T)\,(\chi_r R)\right)(\varphi)(x)(y),$$

woraus die Behauptung folgt.

(iii) Für $D \in \mathrm{Hom}(E,E)$ und $x, y \in E$ ist

$$(\chi_l D + \chi_r D)\,(m)(x)(y) = m(Dx)(y) + m(x)(Dy) = (Dx)y + x(Dy)$$

und

$$(\chi_a D)(m)(x)(y) = D(m(x)(y)) = D(xy).$$

Damit folgt die Behauptung.

(iv) Für $T \in \mathrm{Hom}(E,E)$ und $x, y \in E$ ist

$$(\chi_l T)\,(\chi_r T)\,(m)(x)(y) = m(Tx)(Ty)$$

und

$$(\chi_a T)\,(m)(x)(y) = T\,(m(x)(y))\,,$$

also gilt die in (iv) angegebene Äquivalenz. □

(9.2) Theorem. *Sei* $\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{-1} : T \mapsto e^T$ *die Exponentialabbildung der Banach-Algebra* $\mathcal{A}$. *Sei* $\mathcal{B}_1(\mathbf{1})$ *die offene Einheitskugel in* $\mathcal{A}$ *um die Identität. Sei* $\log : \mathcal{B}_1(\mathbf{1}) \to \mathcal{A}$ *die Logarithmusabbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\exp(\mathrm{Der}(E)) \subseteq \mathrm{Aut}(E)$,

(ii) Ist $||m|| \leq 1$ *(dies ist zum Beispiel der Fall, wenn* m *die Multiplikation einer Banach-Algebra ist!), so ist* $\log(\mathcal{B}_1(\mathbf{1}) \cap \mathrm{Aut}(E)) \subseteq \mathrm{Der}(E)$,

(iii) Ist $||m|| \leq 1$, *so ist* $\mathrm{Aut}(E)$ *eine Lie-Untergruppe von* $\mathcal{A}^{-1}$ *mit Lie-Algebra* $\mathfrak{aut}(E) = \mathrm{Der}(E)$.

Beweis. (i) Sei $D \in \mathrm{Der}(E)$. Dann ist $(\chi_l D + \chi_r D)(m) = \chi_a D(m)$ nach Lemma (9.1)(iii). Nach (ii) des selben Lemmas kommutieren die Operatoren $\chi_l D + \chi_r D$ und $\chi_a D$. Damit ist $(\chi_l D + \chi_r D)^k(m) = \chi_a D^k(m)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $p(\xi)$ eine Potenzreihe, die in den Operatoren $\chi_l D + \chi_r D$ und $\chi_a D$ konvergiert, so ist damit $p(\chi_l D + \chi_r D)(m) = p(\chi_a D)(m)$. Insbesondere ist $\exp(\chi_a D)(m) = \exp(\chi_l D + \chi_r D)(m)$. Da $\chi_l D$ und $\chi_r D$ kommutieren, gilt $\exp(\chi_l D + \chi_r D) = \exp(\chi_l D)\exp(\chi_r D)$ in $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ (siehe (2.1)(ii)). Nach Lemma (9.1)(i) ist $\exp(\chi_* D) = \chi_*(\exp D)$, wobei $*$ eines der Symbole r, l, oder a bedeute. Also ist

$$\chi_a(\exp D)(m) = \exp(\chi_a D)(m) = (\chi_l(\exp D)\chi_r(\exp D))\,(m),$$

und folglich ist $\exp D$ ein Automorphismus nach Lemma (9.1)(iv).

(ii) Sei $T \in \mathcal{B}_1(\mathbf{1})$. Dann ist $||T - \mathbf{1}|| < 1$ und aus Lemma (9.1)(i) folgt $||\chi_* T - \mathbf{1}|| < 1$. Ist T zusätzlich in $\mathrm{Aut}(E)$, so ist $\chi_l T(\chi_r T(m)) = \chi_a T(m)$ nach Lemma (9.1)(iv). Also ist insbesondere $||(\chi_l T \chi_r T - \mathbf{1})(m)|| = ||(\chi_a T - \mathbf{1})(m)|| < 1$. Damit sind $\log((\chi_l T)(m))$, $\log((\chi_r T)(m))$ und $\log((\chi_l T \chi_r T)(m))$ definiert und es gilt

$$\log((\chi_l T \chi_r T)(m)) = \log((\chi_l T)(m)) + \log((\chi_r T)(m)).$$

Mit Lemma (9.1)(i) zeigt man wie in Teil (i) die Beziehungen $\log(\chi_* T) = \chi_*(\log T)$. Also ist

$$(\chi_l(\log T) + \chi_r(\log T))\,(m) = \log((\chi_l T \chi_r T)(m)) = \log((\chi_a T)(m)) = (\chi_a(\log T))(m).$$

Nach Lemma (9.1)(iii) ist damit $\log T$ eine Derivation, was zu zeigen war.

(iii) Sei $\mathcal{N}_0$ die Zusammenhangskomponente von 0 in $\exp^{-1}\mathcal{B}_1(\mathbf{1})$. Dann sind die Abbildungen $\exp\big|_{\mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{B}_1(\mathbf{1})$ und $\log : \mathcal{B}_1(\mathbf{1}) \to \mathcal{N}_0$ analytische Inverse zueinander

(Proposition (2.4)). Nach (i) und (ii) sind die Einschränkungen

$$\exp\big|_{\mathcal{N}_0 \cap \mathrm{Der}(E)} : \mathcal{N}_0 \cap \mathrm{Der}(E) \to \mathcal{B}_1(\mathbf{1}) \cap \mathrm{Aut}(E)$$
$$\log\big|_{\mathcal{B}_1(\mathbf{1}) \cap \mathrm{Aut}(E)} : \mathcal{B}_1(\mathbf{1}) \cap \mathrm{Aut}(E) \to \mathcal{N}_0 \cap \mathrm{Der}(E)$$

invers zueinander. Nach Definition (6.4) ist also $\mathrm{Aut}(E)$ eine Lie-Untergruppe von $\mathcal{A}^{-1}$ mit Lie-Algebra $\mathrm{Der}(E)$. □

(9.3) Fundamentalsatz über die adjungierte Darstellung. *Sei G eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Es gibt genau einen Gruppen-Homomorphismus $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, genannt die adjungierte Darstellung von G, der folgendes Diagramm kommutativ ergänzt:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_G} & & \Big\downarrow{\scriptstyle D \mapsto e^D} \\ G & \xrightarrow[\mathrm{Ad}]{} & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

(ii) $g(\exp X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}\,(g)(X))$ für alle $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$,

(iii) $\exp X \exp Y \exp -X = \exp(e^{\mathrm{ad}\,X} Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$,

(iv) Der Kern der adjungierten Darstellung Ad ist der Zentralisator $\mathrm{C}_G G_{\mathbf{1}}$ der Zusammenhangskomponente $G_{\mathbf{1}}$ der Identität in G.

Beweis. (i) Wir können annehmen, daß $G \leq A^{-1}$ für eine geeignete Banach-Algebra A ist. Dann läßt sich die Lie-Unteralgebra, wie sie in Definition (6.2) angegeben wurde, mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G identifizieren, so daß $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ durch $\exp_G = \exp_A\big|_{\mathfrak{g}} = (x \mapsto e^x)$ gegeben ist, siehe Proposition (6.9). Sei $g \in G$. Dann bildet der innere Automorphismus $\mathrm{Ad}_A(g) : A \to A : a \mapsto gag^{-1}$ (siehe Definition (3.10)) $\mathfrak{g}$ in sich ab, denn für $y \in \mathfrak{g}$ ist $\exp(\mathbb{R} \cdot y) \subseteq G$ (nach Proposition (3.4) ist $\exp(\mathbb{R} \cdot y)$ eine Einparametergruppe in G) und es folgt $g(\exp(t \cdot y))g^{-1} = \exp(t \cdot gyg^{-1})$ nach Proposition (3.13). Also ist auch $t \mapsto \exp(t \cdot gyg^{-1})$ eine Einparametergruppe in G. Damit ist $gyg^{-1} \in \mathfrak{g}$, siehe Proposition (6.9)(ii). Also ist $\mathrm{Ad}_A(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ein Homomorphismus zwischen topologischen Gruppen nach Lemma (3.11)(v). Nach Theorem (9.2)(iii) ist $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ eine lineare Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ und Exponentialabbildung $D \mapsto e^D$. Die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad}_A : A \to \mathrm{Der}(A) : y \mapsto (x \mapsto [y, x])$ bildet $\mathfrak{g}$ in $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ab und ergibt somit via Einschränkung die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Kommutativität des Diagrams folgt nun via Restriktion aus dem kommutativen Diagramm von

Proposition (3.13). Die Eindeutigkeit von Ad folgt nun aus der Tatsache, daß $\exp_G$ ein lokaler Homöomorphismus ist.

(ii) und (iii) folgen nun ebenfalls aus Proposition (3.13), (i) und (iii).

(iv) Nach (ii) gilt $\mathrm{Ad}\,(g) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ genau dann, wenn $g(\exp X)g^{-1} = \exp X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ ist, d.h. wenn g im Zentralisator von $\exp \mathfrak{g}$ liegt. Als $\mathbf{1}$-Umgebung der Zusammenhangskomponente $G_{\mathbf{1}}$ von G erzeugt $\exp \mathfrak{g}$ die Gruppe $G_{\mathbf{1}}$. Damit folgt die Behauptung. □

KAPITEL 10

Unterstrukturen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

(10.1) Definition. Ein Untervektorraum $\mathfrak{i}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *Ideal* von $\mathfrak{g}$, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i}$ ist.

(10.2) Definition. Eine Untergruppe H einer linearen Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *Lie-Untergruppe* von G, wenn es eine (abgeschlossene) Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ sowie eine offene Kugel B um 0 in $\mathfrak{g}$ gibt, so daß $\exp_G$ die Menge $B \cap \mathfrak{h}$ homöomorph auf eine offene Umgebung der Identität von H abbildet.

Bemerkung. (i) Nach Satz (6.3) und Proposition (6.5) ist jede lokalkompakte Untergruppe einer linearen Lie-Gruppe eine Lie-Untergruppe. Insbesondere ist jede abgeschlossene Untergruppe einer endlich-dimensionalen linearen Lie-Gruppe eine Lie-Untergruppe. (ii) Jede Lie-Untergruppe einer linearen Gruppe erfüllt alle Bedingungen von Definition (6.4), ist also selbst wieder eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ und der Einschränkung von $\exp_G$ auf $\mathfrak{h}$ als Exponentialabbildung.

(10.3) Proposition. *Sei $G \leq A^{-1}$ eine lineare Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in einer Banach-Algebra A. Sei $H \leq G$ und $\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(\mathbb{R} \cdot X) \subseteq H\}$. Es gelten die folgenden Aussagen*

(i) $\mathfrak{h}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{g}$,

(ii) es gibt eine Umgebung $V \subseteq B_1(\mathbf{1}) \cap G$ um $\mathbf{1}$ in G mit $\log(V \cap H) \subseteq \mathfrak{h}$.

Dann ist H eine abgeschlossene lineare Lie-Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$.

Beweis. Nach Proposition (6.9) ist $\exp : N_1 \to M_1$ ein Homöomorphismus. Wir wählen eine beliebige Umgebung $V \subseteq M_1$ von $\mathbf{1}$ in G mit $\log(V \cap H) \subseteq \mathfrak{h}$. Dann ist $U := \log V$ definiert, und es ist $U \cap \exp^{-1}(H) = \log(V \cap H)$. Dabei bildet exp die Menge $\log(V \cap H)$ homöomorph auf die $\mathbf{1}$-Umgebung $V \cap H$ in H ab. Wegen $\exp \mathfrak{h} \subseteq H$ ist

$$U \cap \mathfrak{h} \subseteq U \cap \exp^{-1} H = \log(V \cap H) \subseteq \mathfrak{h}.$$

Wegen $\log V = U$ und $\log(V \cap H) \subseteq \mathfrak{h}$ folgt ebenso $\log(V \cap H) \subseteq U \cap \mathfrak{h}$ und damit $\log(V \cap H) = U \cap \mathfrak{h}$. Somit bildet $\exp_G = \exp\big|_{\mathfrak{g}}$ die Umgebung $U \cap \mathfrak{h}$ homöomorph auf

die Umgebung $V \cap H$ ab. Wir müssen noch nachweisen, daß $\mathfrak{h}$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Abgeschlossen ist $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ nach Voraussetzung. Außerdem ist H abgeschlossen in G, denn die Menge $U \cap \mathfrak{h}$ ist abgeschlossen in U, und da $\exp_G : U \to V$ ein Homöomorphismus ist, ist auch $V \cap H$ abgeschlossen in V. Also ist H lokal abgeschlossen und damit abgeschlossen (siehe Beweis zu Proposition (6.5)). Nach Definition ist $\mathfrak{h}$ unter der Skalarmultiplikation abgeschlossen. Für $X, Y \in \mathfrak{h}$ ist also $\frac{t}{n} \cdot X, \frac{t}{n} \cdot Y \in \mathfrak{h}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition (3.5) ist $t \cdot (X+Y) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{t}{n} \cdot X * \frac{t}{n} \cdot Y\right)$. Wegen $\left(\exp_G \frac{t}{n} \cdot X\right)\left(\exp_G \frac{t}{n} \cdot Y\right) \in HH = H$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$\exp_G(t \cdot (X+Y)) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\exp_G \frac{t}{n} \cdot X\right)\left(\exp_G \frac{t}{n} \cdot Y\right)\right)^n \in \overline{H} = H.$$

Nach Definition von $\mathfrak{h}$ ist somit $X + Y \in \mathfrak{h}$. Analog zeigt man $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ mit Hilfe von Proposition (3.6). Also ist $\mathfrak{h}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. □

Die folgende Proposition zeigt, wie sich gruppentheoretische Fragenstellungen in Probleme auf dem Lie-Algebren-Niveau übersetzen lassen und umgekehrt.

(10.4) Proposition. *Sei H eine zusammenhängende Lie-Untergruppe einer zusammenhängenden linearen Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{L}(H)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) H ist ein Normalteiler von G.
(ii) $\mathfrak{h}$ ist ein $\mathrm{Ad}\,(G)$-invarianter Unterraum von $\mathfrak{g}$.
(iii) $e^{\mathrm{ad}\,X}\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.
(iv) $\mathfrak{h}$ ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

Beweis. Als zusammenhängende Gruppe wird H von jeder Menge mit nichtleerem Inneren algebraisch erzeugt, insbesondere also von $\exp \mathfrak{h}$. Damit ist H genau dann ein Normalteiler von G, wenn $g(\exp X)g^{-1} \in H$ für alle $g \in G$ und alle $X \in \mathfrak{h}$ gilt.

(i) $\iff$ (ii): Ein Element $X \in \mathfrak{g}$ liegt genau dann in $\mathfrak{h}$, wenn $\exp t \cdot X \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Nach Satz (9.3)(ii) ist $g(\exp t \cdot X)g^{-1} = \exp(t \cdot \mathrm{Ad}\,(g)(X))$. Also gilt $g(\exp t \cdot X)g^{-1} \in H$ genau dann für alle $t \in \mathbb{R}$, wenn $\mathrm{Ad}\,(g)(X) \in \mathfrak{h}$ ist.

(ii) $\implies$ (iii): Für $X \in \mathfrak{g}$ und $g := \exp X$ gilt $\mathrm{Ad}\,(g) = e^{\mathrm{ad}\,X}$ nach Satz (9.3)(i).

(iii) $\implies$ (iv): Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in \mathfrak{h}$. Dann ist nach Voraussetzung $e^{\mathrm{ad}\,X}(Y) \in \mathfrak{h}$. Es ist $e^{t \cdot \mathrm{ad}\,X}Y = Y + t \cdot [X, Y] + r(t)$ mit $\lim_{0 \neq t \to 0} \frac{r(t)}{t} = 0$. Damit ist

$$\frac{1}{t}(e^{t \cdot \mathrm{ad}\,X}(Y) - Y) = [X, Y] + \frac{r(t)}{t} \in \mathfrak{h}$$

für alle $t \neq 0$. Da $\mathfrak{h}$ abgeschlossen ist, folgt nach Übergang zum Limes $t \to 0$ die Behauptung $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$, so sind alle Summanden von

$$e^{\operatorname{ad} X}Y = Y + [X,Y] + \frac{1}{2}[X,[X,Y]] + \dots$$

für $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in \mathfrak{h}$ in $\mathfrak{h}$ enthalten. Da $\mathfrak{h}$ abgeschlossen ist, folgt $e^{\operatorname{ad} X}Y \in \mathfrak{h}$. Nach Satz (9.3)(iii) haben wir dann

$$\exp X(\exp Y)\exp -X = \exp(e^{\operatorname{ad} X}Y) \in \exp\mathfrak{h} \subseteq H.$$

Da H zusammenhängend ist, wird H von $\exp\mathfrak{h}$ algebraisch erzeugt. Also ist H invariant unter allen inneren Automorphismen $h \mapsto (\exp X)h(\exp -X)$ mit $X \in \mathfrak{g}$. Da G ebenfalls zusammenhängend ist, wird auch G von $\exp\mathfrak{g}$ algebraisch erzeugt. Somit ist H invariant unter allen inneren Autmorphismen von G, d.h. H ist ein Normalteiler von G. □

(10.5) Proposition. *Seien G, H lineare Lie-Gruppen und sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus zwischen topologischen Gruppen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) der Kern $\ker f$ ist eine normale Lie-Untergruppe von G mit zugehöriger Lie-Algebra $\ker \mathcal{L}(f)$ (siehe Theorem (8.1)).

(ii) Es ist $\ker \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\ker f)$.

(iii) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \ker \mathcal{L}(f) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathcal{L}(G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\ker f}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_G} \\ \ker f & \xrightarrow{\subseteq} & G \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. (ii) Nach Definition (6.8) ist $\mathcal{L}(\ker f) = \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, \ker f)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $X \in \mathcal{L}(\ker f)$
(b) $\mathcal{L}(f)(X)(t) = (f \circ X)(t) = \mathbf{1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
(c) $\mathcal{L}(f)(X) = 0$
(d) $X \in \ker \mathcal{L}(f)$.

Dies beweist (ii). (i) Für jeden stetigen Homomorphismus zwischen topologischen Gruppen ist $\ker f$ ein abgeschlossener Normalteiler. Wir müssen also noch zeigen, daß $\ker f$ eine Lie-Untergruppe von G ist. Sei A eine Banach-Algebra mit $G \subseteq A^{-1}$ und $\exp_G = \exp_A\big|_{\mathfrak{g}}$ (Proposition (6.9)). Wir wollen Proposition (10.3) anwenden. Da der Kern $\ker \mathcal{L}(f)$

stets abgeschlossen ist ($\mathcal{L}(f)$ ist ja stetig nach Theorem (8.1)), ist nach (ii) die Lie-Algebra $\mathcal{L}(\ker f)$ abgeschlossen in $\mathfrak{g}$. Damit ist (i) von Proposition (10.3) erfüllt. Nach Proposition (6.9) und Theorem (8.1) gibt es eine offene Kugel $B \subseteq N_1$ um 0 in $\mathfrak{g}$, so daß $\mathcal{L}(f)(B)$ in einer Nullumgebung in $\mathfrak{h}$ liegt, auf der $\exp_H$ injektiv ist. Sei $V := \exp_G B$ und $K := \exp_G^{-1}\big|_{N_1}(V \cap \ker f)$. Nach Proposition (6.9) und Theorem (8.1) ist $K = \{X \in B \mid \exp_H(\mathcal{L}(f)X)) = f(\exp_G X) = \mathbf{1}\}$. Da $\exp_H$ auf $\mathcal{L}(f)(B)$ injektiv ist, folgt $K = \{X \in B \mid \mathcal{L}(f)X = 0\} \subseteq \ker \mathcal{L}(f)$. Dies zeigt (ii) von Proposition (10.3). Also ist $\ker f$ eine Lie-Untergruppe von G.

(iii) Nach Proposition (6.9) ist $\exp_{\ker \mathcal{L}(f)}$ die Einschränkung von $\exp_G$ auf $\ker f$. Daher kommutiert das angegebene Diagramm. □

(10.6) Proposition. *Sei $\{G_j\}_{j\in J}$ eine Familie linearer Lie-Gruppen.*

(i) Sind alle G_j Lie-Untergruppen einer linearen Lie-Gruppe G, so ist $\mathcal{L}(H) = \mathfrak{h}$, wobei $H := \bigcap_{j\in J} G_j$ und $\mathfrak{h} := \bigcap_{j\in J} \mathcal{L}(G_j)$ ist. Ist J endlich, so ist H ebenfalls eine lineare Lie-Gruppe.

(ii) Ist $H := \prod_{j\in J} G_j$ und $\mathfrak{h} := \prod_{j\in J} \mathcal{L}(G_j)$, so ist $\mathcal{L}(H) \cong \mathfrak{h}$. Ist J endlich, so ist H eine lineare Lie-Gruppe.

Beweis. (i) Das Bild einer Einparametergruppe $X : \mathbb{R} \to G$ liegt in H, wenn $X(t) \in G_j$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $j \in J$ ist, d.h. es ist $X \in \mathcal{L}(G)$ genau dann, wenn $X \in \mathcal{L}(G_j)$ für alle $j \in J$. Dies zeigt $\mathcal{L}(H) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{L}(G_j) = \mathfrak{h}$. Sei nun J endlich und sei B eine offene Kugel um 0 in $\mathfrak{g}$, so daß B durch $\exp_G$ homöomorph auf eine $\mathbf{1}$-Umgebung V von G abgebildet wird. Da alle G_j Lie-Untergruppen sind, gibt es zu jedem $j \in J$ eine offene Kugel $B_j \subseteq B$ um 0 in $\mathfrak{g}$, so daß $\exp_G\big|_{B_j \cap \mathcal{L}(G_j)}$ ein Homöomorphismus auf $\exp_G(B_j) \cap G_j$ ist. Setze $V_j := \exp_G B_j$, $B_H := \bigcap_{j\in J} B_j$ und $V_H := \bigcap_{j\in J} V_j$. Da J endlich ist, sind B_H und V_H offene Umgebungen und $\exp_G\big|_{B_H} : B_H \to V_H$ ist ein Homöomorphismus, der $B_H \cap \mathfrak{h} = \bigcap_{j\in J}(B_j \cap \mathcal{L}(G_j))$ auf $V_H \cap H = \bigcap_{j\in J}(V_j \cap G_j)$ abbildet. Nach Definition einer Lie-Untergruppe ist damit H eine Lie-Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$.

(ii) Die Isomorphie $\mathcal{L}(H) \cong \mathfrak{h}$ ist trivial. Sei nun J endlich. Für alle $j \in J$ seien $G_j \subseteq A_j^{-1}$ für geeignete Banach-Algebren A_j. Dann ist $A := \prod_{j\in J} A_j$ bezüglich der Norm $||(a_j)_{j\in J}|| := \max_{j\in J} ||a_j||$ und der Produkt-Operationen wieder eine Banach-Algebra. Nun wird die Argumentation ähnlich wie im Teil (i) beendet. □

Wir haben in Proposition (6.5) gesehen, daß jede abgeschlossene Untergruppe H einer lokalkompakten linearen Lie-Gruppe G eindeutig eine Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ bestimmt, so daß H eine lineare Lie-Gruppe mit $\mathcal{L}(H) = \mathfrak{h}$ und $H_{\mathbf{1}} = \langle \exp_G \mathfrak{h} \rangle$ ist. Die Umkehrung dieses Satzes ist sogar für kompakte Lie-Gruppen falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

(10.7) Beispiel. Betrachte die kompake Lie-Untergruppe

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi r & \sin 2\pi r & 0 & 0 \\ -\sin 2\pi r & \cos 2\pi r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\pi s & \sin 2\pi s \\ 0 & 0 & -\sin 2\pi s & \cos 2\pi s \end{pmatrix} \middle| \, r, s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}).$$

Die zu T gehörige Lie-Algebra $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & -s & 0 \end{pmatrix} \middle| \, r, s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}).$$

Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ar \\ 0 & 0 & -ar & 0 \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man verifiziert leicht, daß $\mathfrak{h}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{t}$ ist. Es gibt genau dann eine zusammenhängende lineare Lie-Untergruppe H von T mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$, wenn a rational ist.

Das letzte Teil dieses Kapitels zeigt eine Art von Umkehrung, wie sich aus einer vorgegebenen Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ eine Untergruppe H von G definieren läßt. Allerdings muß H in der Spurtopologie von G *keine* lineare Lie-Gruppe sein. Dazu muß die Spurtopologie verfeinert werden. (Man nimmt dazu die Wegzusammenhangskomponenten in der Spurtopologie als Subbasis der neuen Topologie).

(10.8) Theorem. *Sei G eine lineare Lie-Gruppe, und sei $\mathfrak{h}$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$. Sei $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ und sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Wegzusammenhangskomponenten der Spurtopologie von H in G. Sei τ die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie auf H. Dann ist (H, τ) eine topologische Gruppe. Die Topologie τ heißt die Lie-Gruppen-Topologie auf H. Ist $\mathfrak{h}$ separabel (dies ist immer richtig, wenn $\mathfrak{h}$ endlich-dimensional ist), so ist (H, τ) eine separable Untergruppe von G und es ist $\mathcal{L}(H) = \mathfrak{h}$. Ist $\mathfrak{h}$ lokalkompakt, so ist (H, τ) eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$. Beachte, daß H in der Spurtopologie i.a. keine Lie-Gruppe ist.*

Beweis. Sei A eine Banach-Algebra mit $G \leq A^{-1}$ und sei B eine normale Umgebung.
(a) (H, τ) ist eine topologische Hausdorff-Gruppe: Sei dazu $U \in \mathcal{S}$ und $h \in H$. Da $\mathfrak{h}$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine Umgebung $V \subseteq B$ von 0 in $\mathfrak{h}$ mit $\exp V \subseteq U$. Sei V' eine offene 0-Umgebung in A mit $V = V' \cap \mathfrak{h}$. Da

die Campbell-Hausdorff-Multiplikation stetig ist, gibt es eine 0-Umgebung W' in A mit $W' * W' \subseteq V'$. Setze $W := W' \cap \mathfrak{h}$. Da $\mathfrak{h}$ abgeschlossen in A ist, ist $W * W \subseteq V' \cap \mathfrak{h} = V$. Nach Korollar (2.7) ist daher

$$\log(\exp W \exp W) \subseteq V \quad \text{und} \quad \exp W \exp W \subseteq \exp V \subseteq U.$$

Sei U' die Wegzusammenhangskomponente von $\exp W$. Dann ist $U' \in \mathfrak{S}$, da exp ein lokaler Homöomorphismus ist und wir haben $U'U' \subseteq U$. Dies zeigt die Stetigkeit der Multiplikation in (H, τ) im Punkt $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Da die Translationen $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$ für $a \in H$ bzgl. der Spurtopologie von H in G Homöomorphismen sind und H invariant lassen, permutieren diese Abbildungen die Wegzusammenhnagskomponenten von H. Insbesondere sind diese Abbildungen auch bzgl. der Topologie τ Homöomorphismen. Hieraus folgt die Stetigkeit der Multiplikation auf ganz $G \times G$. Die Stetigkeit der Inversion wird analog bewiesen. Da die Topologie τ feiner als die Spurtopologie auf H ist, ist (H, τ) ein Hausdorff-Raum.

(b) Die Exponentialabbildung $\exp_G\big|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to (H, \tau)$ ist stetig, denn wählt man in Teil (a) die Umgebung W' wegzusammenhängend, so ist auch W und damit $\exp W$ wegzusammenhängend und offen (in H). Da man zu jedem $U \in \mathfrak{S}$ mit $\mathbf{1} \in U$ die Umgebung W so klein machen kann, daß $\exp W \subseteq U$ gilt, folgt, daß $\exp_G\big|_{\mathfrak{h}}$ im Punkt 0 stetig ist. Da diese Abbildung ein Homomorphismus zwischen den topologischen Gruppen $(\mathfrak{h}, *)$ und H ist, folgt die Stetigkeit in allen Punkten. Ist $\mathfrak{h}$ lokalkompakt, so lassen sich die Umgebungen W und U kompakt wählen und $\exp_G\big|_{\mathfrak{h}}$ wird zu einem lokalen Homöomorphismus.

(c) Da $\mathfrak{h}$ separabel ist, ist $\exp_G \mathfrak{h}$ als stetiges Bild in (H, τ) ebenfalls separabel. Da H durch die Menge $\exp \mathfrak{h}$ algebraisch erzeugt wird, ist auch (H, τ) separabel. Nach Definition von H ist $\mathfrak{h} \subseteq \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(\mathbb{R} \cdot X) \subseteq H\} = \mathfrak{L}(H)$. Sei B eine normale Umgebung in $\mathfrak{g}$ und setze $B_0 := B \cap \mathfrak{h}$. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{h}$ echt in $\mathfrak{L}(H)$ enthalten ist. Dann gibt es $X \in B \setminus \mathfrak{h}$ mit $[0,1] \cdot X \subseteq \exp^{-1} H$. Für $0 \leq r \leq s \leq 1$ sei

$$((r \cdot X) * B_0) \cap ((s \cdot X) * B_0) \neq \emptyset.$$

Dann gibt es $U, V \in B_0$ mit $(r \cdot X) * U = (s \cdot X) * V$. Also ist $(s-r) \cdot X = (-r \cdot X) * (s \cdot X) = U * (-V) \in B_0 * B_0 \subseteq \mathfrak{h}$ nach Theorem (4.8). Wegen $X \notin \mathfrak{h}$ impliziert dies $s - r = 0$. Also bilden die Mengen $(r \cdot X) * B_0$ für $r \in [0,1]$ eine überabzählbare Familie paarweise disjunkter Teilmengen von $N_1 \cap \exp^{-1} H$. Da $\exp B_0$ offen und die Abbildung exp bijektiv auf N_1 ist, gilt dies auch für die Mengen $\exp(r \cdot X) \exp B_0$ mit $r \in [0,1]$ aus H. Dann ist H aber nicht separabel, ein Widerspruch. Also ist doch $\mathfrak{h} = \mathfrak{L}(H)$. $\square$

KAPITEL 11

Normalisatoren, Zentralisatoren und Kommutatoren

(11.1) Definition. Für eine beliebige Gruppe G setzen wir $\iota : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ und $\kappa_h : G \to G : g \mapsto ghg^{-1}$ für alle $h \in H$.

(11.2) Lemma. *Sei G eine Gruppe und sei H eine Teilmenge von G. Dann sind folgende beiden Aussagen gleichwertig:*

(i) $gHg^{-1} = H$.

(ii) $g \in \bigcap_{h\in H} \left(\kappa_h^{-1}(H) \cap \iota(\kappa_h^{-1}(H))\right)$.

Beweis. Es ist

$$\kappa_h^{-1}(H) = \{g \in G \mid \kappa_h(g) \in H\} = \left\{g \in G \,\middle|\, ghg^{-1} \in H\right\},$$

also

$$\bigcap_{h\in H} \kappa_h^{-1}(H) = \left\{g \in G \,\middle|\, \forall\, h \in H \;:\; ghg^{-1} \in H\right\} = \left\{g \in G \,\middle|\, gHg^{-1} \subseteq H\right\}.$$

Ebenso folgt aus

$$\iota(\kappa_h^{-1}(H)) = \left\{g^{-1} \in G \,\middle|\, ghg^{-1} \in H\right\} = \left\{g \in G \,\middle|\, h \in gHg^{-1}\right\}$$

die Beziehung

$$\bigcap_{h\in H} \iota(\kappa_h^{-1}(H)) = \left\{g \in G \,\middle|\, H \subseteq gHg^{-1}\right\}.$$

Dies liefert die Behauptung des Lemmas. □

(11.3) Definition. (i) Für eine Untergruppe H einer Gruppe G heißt die Menge

$$\mathrm{N}_G H := \left\{g \in G \,\middle|\, gHg^{-1} = H\right\} = \bigcap_{h\in H} \left(\kappa_h^{-1}(H) \cap \iota(\kappa_h^{-1}(H))\right)$$

der *Normalisator von H in G*.

(ii) Für eine Teilmenge M einer Gruppe G heißt die Menge

$$\mathrm{C}_G M := \{g \in G \mid \forall\, m \in M \ : \ gmg^{-1} = m\} = \bigcap_{m \in M} \{g \in G \mid gmg^{-1} = m\}$$

der *Zentralisator von M in G*.

(iii) Der Zentralisator $\mathsf{Z}(G) := \mathrm{C}_G G$ wird das *Zentrum von G* genannt.

Bemerkung. (i) Der Normalisator $\mathrm{N}_G H$ ist eine Untergruppe von G; sie ist die größte Untergruppe von G, in der H ein Normalteiler ist. Ist G eine topologische Gruppe, so folgt aus der zweiten Darstellung des Normalisators, daß $\mathrm{N}_G H$ abgeschlossen ist, falls H abgeschlossen ist in G.

(ii) Der Zentralisator $\mathrm{C}_G H$ ist eine Untergruppe von G. Im Falle einer topologischen Gruppe G folgt aus der zweiten Darstellung des Zentralisators, daß $\mathrm{C}_G M$ *immer* abgeschlossen ist.

Aufgrund der Beziehungen zwischen den Abbildungen ad und Ad (siehe Kapitel 3) definieren wir die Begriffe Normalisator, Zentralisator und Zentrum wie folgt für Liegruppen:

(11.4) Definition. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, $\mathfrak{h}$ sei eine Lie-Unteralgebra und $\mathfrak{m}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{g}$.

(i) Die Menge

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$$

heißt *Normalisator von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$*.

(ii) Die Menge

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, Y \in \mathfrak{m} \ : \ [X, Y] = 0\}$$

heißt *Zentralisator von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{g}$*.

(iii) Der Zentralisator $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}$ wird das *Zentrum von $\mathfrak{g}$* genannt. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ (oder äquivalent dazu $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$) gilt.

Bemerkung. Der Normalisator $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ ist die größte Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, in der $\mathfrak{h}$ ein Ideal ist. Ist $\mathfrak{g}$ eine topologische Lie-Algebra und ist $\mathfrak{h}$ abgeschlossen in $\mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ abgeschlossen. Der Zentralisator ist eine Lie-Unter-Algebra von $\mathfrak{g}$, die im topologischen Falle immer abgeschlossen ist.

(11.5) Proposition. *Sei G eine lineare Lie-Gruppe und sei $\mathfrak{h}$ eine abgeschlossene, separable Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$. Sei $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$. Dann ist der Normalisator $\mathrm{N}_G H$*

eine Lie-Untergruppe von G mit $\mathcal{L}(\mathrm{N}_G H) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ und $(\mathrm{N}_G H)_{\mathbf{1}} = \langle \exp \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} \rangle$. Insbesondere ist $\mathrm{N}_G H$ abgeschlossen in G.

Beweis. Ist $g \in G$ mit $gHg^{-1} = H$, so permutiert der innere Automorphismus $x \mapsto gxg^{-1}$ die Einparametergruppen von H, d.h. es ist $\mathrm{Ad}\,(g)\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H)$. Nach Theorem (10.8) ist $\mathfrak{h} = \mathcal{L}(H)$, also $\mathrm{Ad}\,(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Ist umgekehrt $\mathrm{Ad}\,(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, so ist nach dem Fundamentalsatz (9.3)

$$gHg^{-1} = g\,\langle \exp \mathfrak{h} \rangle\, g^{-1} = \left\langle g(\exp \mathfrak{h})g^{-1} \right\rangle = \langle \exp(\mathrm{Ad}\,(g)\mathfrak{h}) \rangle = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle = H.$$

Damit haben wir gezeigt, daß

$$\mathrm{N}_G H = \{ g \in G \mid \mathrm{Ad}\,(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \}$$

gilt. Sei $B \subseteq B_{\frac{\log 2}{2}}$ eine normale Umgebung in $\mathfrak{g}$ und $X \in B$. Nach Korollar (3.14)(iv) und Proposition (10.4) ist $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ genau dann, wenn $[X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ bzw. wenn $e^{\mathrm{ad}\,X}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ ist. Wegen $\mathrm{Ad}\,(\exp X) = e^{\mathrm{ad}\,X}$ ist $e^{\mathrm{ad}\,X}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ äquivalent zu $\mathrm{Ad}\,(\exp X)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, was nach der oben bewiesenen Darstellung von $\mathrm{N}_G H$ gerade $\exp X \in \mathrm{N}_G H$ bedeutet. Somit ist $X \in B \cap \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ genau dann, wenn $\exp X \in \exp(B) \cap \mathrm{N}_G H$ gilt. Nach Definition einer Lie-Untergruppe ist daher $\mathrm{N}_G H$ eine Lie-Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$. Nach Satz (6.10)(iv) folgt dann $(\mathrm{N}_G H)_{\mathbf{1}} = \langle \exp \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} \rangle$. Nach Proposition (10.3) ist $\mathrm{N}_G H$ abgeschlossen. □

(11.6) Proposition. *Sei G eine lineare Lie-Gruppe und sei $M \subseteq G$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Der Zentralisator $\mathrm{C}_G M$ ist eine Lie-Untergruppe von G mit

$$\mathcal{L}(\mathrm{C}_G M) = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, m \in M \ : \ \mathrm{Ad}\,(m)(X) = X \}\,.$$

(ii) Ist $\mathfrak{h}$ eine abgeschlossene, separable Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$ und ist $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$, so gilt

$$\mathcal{L}(\mathrm{C}_G H) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} \quad \textit{und} \quad (\mathrm{C}_G H)_{\mathbf{1}} = \langle \exp \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} \rangle\,.$$

(iii) Das Zentrum Z von G ist eine Lie-Untergruppe von G und seine Lie-Algebra $\mathfrak{z}$ ist genau das Zentrum von $\mathfrak{g}$.

Beweis. (i) Eine Einparametergruppe $X \in \mathcal{L}(G)$ ist genau dann in $\mathcal{L}(\mathrm{C}_G M)$, wenn

$$\exp(t \cdot X) = \exp(t \cdot X) m \exp(t \cdot X)^{-1} = \exp(t \cdot \mathrm{Ad}\,(m)(X))$$

für alle $m \in M$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Ad}\,(m)(X) = X$ für alle $m \in M$ ist. Bezeichnen wir mit $\mathrm{Fix}(\mathrm{Ad}\,(m))$ die Menge der Fixpunkte von $\mathrm{Ad}\,(m)$ in $\mathfrak{g}$, so haben wir

$$\mathfrak{L}(\mathrm{C}_G M) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, m \in M \ : \ \mathrm{Ad}\,(m)X = X\} = \bigcap_{m \in M} \mathrm{Fix}\,(\mathrm{Ad}\,(m)).$$

Da die Fixpunktmenge eines stetigen Lie-Algebren-Endomorphismus von $\mathfrak{g}$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, ist auch $\mathfrak{L}(\mathrm{C}_G M)$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Sei A eine Banach-Algebra mit $G \leq A^{-1}$. Dann können wir $\mathfrak{g} \subseteq (A, [.,.])$ annehmen. Die Abbildung $\mathrm{Ad}\,(m) : G \to G$ läßt sich via $\mathrm{Ad}_A(m) : A \to A : a \mapsto mam^{-1}$ fortsetzen. Jede solche Abbildung $\mathrm{Ad}_A(m)$ ist ein Automorphismus der Banach-Algebra A und somit auch der Lie-Algebra $(A, [.,.])$. Nach Lemma (3.12)(iii) läßt exp die Menge $F := \bigcap_{m \in M} \mathrm{Fix}(\mathrm{Ad}_A(m))$ invariant und log bildet $B_1(\mathbf{1}) \cap F$ nach F ab. Wegen $F \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{L}(\mathrm{C}_G M)$ und $F \cap G = \mathrm{C}_G M$ folgt nun wie im vorherigen Beweis, daß $\mathrm{C}_G M$ eine Lie-Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{L}(\mathrm{C}_G M)$ ist.

(ii) Für $X \in \mathfrak{g}$ sind die Aussagen $X \in \mathfrak{L}(\mathrm{C}_G H)$, $\mathrm{Ad}\,(h)X = X$ für alle $h \in H$ und $e^{\mathrm{ad}\,Y}X = \mathrm{Ad}\,(\exp Y)(X) = X$ für alle $Y \in \mathfrak{h}$ gleichwertig. Nach Korollar (3.15) folgt hieraus $[\mathfrak{h}, t \cdot X] = \{0\}$ für $0 \neq t \in \mathbb{R}$ hinreichend klein. Aufgrund der Bilinearität der Lie-Klammer ist also auch $[\mathfrak{h}, X] = \{0\}$. Da $\mathrm{C}_G H$ eine lineare Lie-Gruppe ist, folgt der Rest der Behauptung aus Satz (6.10)(iv).

(iii) folgt aus (i) und (ii) mit $M = H = G$. □

(11.7) Korollar. *Eine zusammenhängende lineare Lie-Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ abelsch ist.* □

Bemerkung. Ist G abelsch, so ist $\mathfrak{g}$ abelsch, auch wenn G nicht zusammenhängend ist.

(11.8) Theorem. *Sei G eine abelsche lokalkompakte lineare Lie-Gruppe. Dann ist G isomorph zu einer Gruppe der Form $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \times D$, wobei D eine diskrete Gruppe ist. Umgekehrt ist jede solche eine abelsche lineare Lie-Gruppe.*

Beweis. Nach dem letzten Korollar ist die zu G gehörige Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ abelsch. Da $\mathfrak{g}$ lokalkompakt ist, ist $\mathfrak{g}$ endlich-dimensional, d.h. es ist $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Nach Satz (6.10)(iii) und (vi) ist $\exp : \mathbb{R}^p \to G$ ein stetiger und offener Homomorphismus mit diskretem Kern und Bild $G_{\mathbf{1}}$. Also ist $G_{\mathbf{1}}$ ein Quotient von $\mathbb{R}^p$ modulo einer diskreten Untergruppe. Aus der Klassifikation solcher Gruppen (siehe etwa Hewitt-Ross, Abstarct Harmonic Analysis I, (9.11)) folgt $G_{\mathbf{1}} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ mit $n + m = p$. Dies zeigt, daß $G_{\mathbf{1}}$ offen in G ist. Dann gibt es eine Untergruppe D von G mit $G = G_{\mathbf{1}} \oplus D$, da die Gruppe $G_{\mathbf{1}}$ eine teilbare Gruppe ist (siehe Fuchs, Abelian Groups I, Theorem 21.2). Da $G_{\mathbf{1}}$ offen in G

ist, ist D diskret. Somit ist G als topologische Gruppe isomorph zu $G_{\mathbf{1}} \oplus D$. Umgekehrt ist jede diskrete Gruppe eine lineare Lie-Gruppe. Das gleiche gilt für die Gruppen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{T}^m$. Nach Proposition (10.6) ist auch deren Produkt eine abelsche lineare Lie-Gruppe. □

(11.9) Definition. (i) Sei $\mathfrak{g}$ eine (abstrakte) Lie-Algebra und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ Teilmengen. Sei $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ der lineare Aufspann der Menge $\{[a,b] \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$. Die Menge $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist ein Ideal und wird die *Kommutator-Algebra* von $\mathfrak{g}$ genannt.

(ii) Sei G eine (abstrakte) Gruppe und $A, B \subseteq G$ Teilmengen. Die von der Menge $\left\{\mathrm{comm}\,(a,b) := aba^{-1}b^{-1} \;\middle|\; a \in A, b \in B\right\}$ erzeugte Untergruppe von G bezeichnen wir mit $\mathrm{comm}\,(A,B)$. Die Gruppe $G' := \mathrm{comm}\,(G,G)$ ist ein Normalteiler von G und wird *Kommutator-Gruppe* von G genannt.

Bemerkung. Im Falle einer topologischen Gruppe wird G' die *algebraische Kommutator-Gruppe* genannt. Im allgemeinen ist G' jedoch nicht abgeschlossen in G. Deren Abschluß $\overline{G'}$ heißt *abgeschlossene Kommutator-Gruppe* von G.

(11.10) Lemma. *Sei A eine Banach-Algebra mit $\mathbf{1}$ und sei $\mathfrak{g}$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$. Sei B eine normale Umgebung in A, so daß $\mathrm{comm}_*(x,y) := x*y*(-x)*(-y)$ für alle $x, y \in B$ definiert und $e^{\mathrm{ad}\,x}y \in N_0$ für alle $x, y \in B$ ist. Dann ist $\mathrm{comm}_*(x,y) \in \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ für alle $x, y \in \mathfrak{g} \cap B$.*

Beweis. Nach Proposition (3.13)(iv) ist $x*y*(-x)*(-y) = e^{\mathrm{ad}\,x}y*(-y)$ und aus Theorem (4.6)(ii) haben wir $e^{\mathrm{ad}\,x}y*(-y) - (e^{\mathrm{ad}\,x}y - y) \in \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$. Nun ist

$$e^{\mathrm{ad}\,x}y - y = [x,y] + \frac{1}{2}[x,[x,y]] + \ldots \in \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]},$$

woraus $e^{\mathrm{ad}\,x}y*(-y) \in \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ folgt. Dies beweist das Lemma. □

(11.11) Theorem. *Sei A eine Banach-Algebra mit $\mathbf{1}$ und sei $\mathfrak{g}$ eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra von $(A, [.,.])$. Sei B eine normale Umgebung in A wie in Lemma (11.10), so daß $B*B*B*B$ definiert ist. Sei Γ die kleinste abgeschlossene lokale Gruppe in B, die die Menge $\{\mathrm{comm}_*(x,y) \mid x, y \in B \cap \mathfrak{g}\} \cap B$ enthält. Dann ist $\mathfrak{T}(\Gamma) = \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ und $\Gamma = B \cap \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$.*

Beweis. Sind $x, y, [x,y] \in B \cap \mathfrak{g}$, so ist

$$[x,y] = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n}\cdot x * \frac{1}{n}\cdot y * \frac{-1}{n}\cdot x * \frac{-1}{n}\cdot y\right) \in \mathfrak{T}(\Gamma)$$

nach Proposition (3.6) und Definition von $\mathfrak{T}(\Gamma)$. Nach Theorem (5.5) und Lemma (5.4) folgt daher $B \cap \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \subseteq \mathfrak{T}(\Gamma)$ und

$$B \cap \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \subseteq B \cap \mathfrak{T}(\Gamma) \subseteq B \cap \Gamma = \Gamma.$$

Lemma (11.10) zeigt $\mathrm{comm}_*(x,y) \in \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ für alle $x, y \in \mathfrak{g} \cap B$ mit $\mathrm{comm}_*(x,y) \in B$. Also ist umgekehrt $\Gamma \subseteq \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ nach der zweiten Bemerkung von Kapitel 5. Nach Lemma (5.4) folgt aus $\Gamma = B \cap \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ schließlich $\mathfrak{T}(\Gamma) = \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$. □

(11.12) Theorem. *Ist unter den Voraussetzungen von Theorem (11.11) die Dimension n von $\mathfrak{g}'$ endlich, so gibt es $X_j, Y_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \ldots, n$, so daß für jedes n-Tupel $(r_1, \ldots, r_n)$ mit $0 < |r_j| \leq 1$ ein $\varepsilon > 0$ existiert derart, daß die Abbildung*

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon)^n \to \Gamma : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto \mathrm{comm}_*(r_1 \cdot X_1, s_1 \cdot Y_1) * \ldots * \mathrm{comm}_*(r_n \cdot X_n, s_n \cdot Y_n)$$

ein Homöomorphismus auf eine 0-Umgebung in $\mathfrak{g}'$ ist.

Beweis. Wähle $X_1', \ldots, X_n', Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{g} \cap B$, so daß $\{[X_j', Y_j] \mid j = 1, \ldots, n\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}'$ ist. Dann bildet auch für jedes n-Tupel $(r_1, \ldots, r_n)$ nicht-verschwindender reeller Zahlen die Menge $\{[r_j \cdot X_j', Y_j] \mid j = 1, \ldots, n\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}'$. Also gibt es ein $\delta \in (0,1)$, so daß für alle $t \in (0, \delta)$ die Elemente

$$\frac{1}{t}\left(e^{t \cdot \mathrm{ad}\, r_j \cdot X_j'} Y_j - Y_j\right) = [r_j \cdot X_j', Y_j] + o_j(t)$$

linear unabhängig sind (verwende dazu Proposition (3.13)(iv)). Sei also $t \in (0, \delta)$. Nach Proposition (3.13)(iii) und Theorem (11.11) gibt es $\varepsilon_0 > 0$ so, daß für alle r_j, s_j, $j = 1, \ldots, n$ mit $|s_j| < \varepsilon_0$ und $|r_j| \leq 1$ die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi(s_1 \ldots, s_n) &= \mathrm{comm}_*(t \cdot r_1 \cdot X_1', s_1 \cdot Y_1) * \ldots * \mathrm{comm}_*(t \cdot r_n \cdot X_n', s_n \cdot Y_n) \\ &= (s_1 \cdot e^{\mathrm{ad}\, r_1 \cdot (t \cdot X_1')} Y_1 * -s_1 \cdot Y_1) * \ldots * (s_n \cdot e^{\mathrm{ad}\, r_n \cdot (t \cdot X_n')} Y_n * -s_n \cdot Y_n)\end{aligned}$$

in $\Gamma = B \cap \mathfrak{g}'$ liegt, welches offen in $\overline{\mathfrak{g}'} = \mathfrak{g}'$ ist. Setze $X_j := t \cdot X_j'$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist also $\{e^{\mathrm{ad}\, r_j \cdot X_j} Y_j - Y_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}'$. Als nächstes wollen wir den Satz über die lokale Umkehrfunktion auf φ anwenden. Dazu müssen wir das Differential von φ in 0 berechnen. Betrachte dazu die Kurven

$$\rho_j : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathfrak{g}' : s \mapsto s \cdot e^{\mathrm{ad}\, r_j \cdot X_j} Y_j * (-s \cdot Y_j) = s \cdot (e^{\mathrm{ad}\, r_j \cdot X_j} Y_j - Y_j) + u_j(s).$$

Dabei ist $\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} u_j(s) = 0$ nach Theorem (4.6)(i). Deshalb ist die Ableitung von ρ_j im Punkt 0 gerade $e^{\mathrm{ad}\, r_j \cdot X_j} Y_j - Y_j$. Für eine hinreichend kleine Nullumgebung U von $\mathfrak{g}'$ besitzt die Abbildung

$$(Z_1, \ldots, Z_n) \mapsto Z_1 * \ldots * Z_n$$

die Ableitung $(Z_1, \ldots, Z_n) \mapsto Z_1 + \ldots + Z_n : (\mathfrak{g}')^n \to \mathfrak{g}'$ im Punkt $(0, \ldots, 0)$. Nach der Kettenregel ist somit

$$\varphi'(0, \ldots, 0) = ((h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot (e^{\mathrm{ad}\, r_j \cdot X_j} Y_j - Y_j) : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{g}').$$

Nach dem zuvor Bewiesenen ist $\varphi'(0,\dots,0)$ regulär und der Satz über die lokale Umkehrfunktion beweist nun das Theorem. □

(11.13) Theorem. *Unter den Voraussetzungen von Theorem (11.12) gibt es eine Nullumgebung U in $\mathfrak{g}'$, so daß sich jedes Element von U als Produkt von höchstens n $*$-Kommutatoren schreiben läßt.* □

(11.14) Fundamentalsatz über die Kommutatorgruppe. *Sei G eine zusammenhängende lineare Lie-Gruppe, so daß $\mathfrak{g}'$ endlich-dimensional ist. Dann ist $G' = \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ und $\mathfrak{L}(G') = \mathfrak{g}'$.*

Beweis. Aus $G' = \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ folgt die zweite Gleichung $\mathfrak{L}(G') = \mathfrak{g}'$ nach Theorem (10.8). Wir zeigen zunächst, daß $G' \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ gilt. Sei $G \subseteq A^{-1}$ für eine Banach-Algebra A und sei B eine normale Umgebung in A wie in Theorem (11.11). Wegen $\dim \mathfrak{g}' < \infty$ ist $\mathfrak{g}'$ abgeschlossen in $\mathfrak{g}$ und nach Lemma (11.10) ist

$$\operatorname{comm}(\exp X, \exp Y) = \exp \operatorname{comm}_*(X,Y) \in \exp \overline{\mathfrak{g}'} = \exp \mathfrak{g}'.$$

Also ist $\left\{ ghg^{-1}h^{-1} \;\middle|\; g,h \in \exp(B \cap \mathfrak{g}) \right\} \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$. Für $g \in G$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}(g)\operatorname{comm}(X,Y) &= g \operatorname{comm}(X,Y) g^{-1} = g(XY - YX)g^{-1} \\ &= gXg^{-1}gYg^{-1} - gYg^{-1}gXg^{-1} \\ &= \operatorname{comm}(gXg^{-1}, gYg^{-1}) \in \mathfrak{g}'. \end{aligned}$$

Damit ist $g(\exp \mathfrak{g}')g^{-1} = \exp \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{g}' \subseteq \exp \mathfrak{g}'$ und $\langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ ist somit ein Normalteiler von G. Die Menge $U := \exp(B \cap \mathfrak{g})$ ist eine offene symmetrische $\mathbf{1}$-Umgebung in G. Da G zusammenhängend ist, ist $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$. Wir haben schon gezeigt, daß $\operatorname{comm}(U,U) \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{comm}(xy,z) &= xyzy^{-1}x^{-1}z^{-1} = xyzy^{-1}z^{-1}zx^{-1}z^{-1}xx^{-1} \\ &= x \operatorname{comm}(y,z)\operatorname{comm}(z,x^{-1})x^{-1} \in x \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle x^{-1} = \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle \end{aligned}$$

für alle $x,y,z \in U$ ist $\operatorname{comm}(U^2,U) \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$. Analog zeigt man $\operatorname{comm}(U,U^2) \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$. Ebenso ist $\operatorname{comm}(xy,uv) = x \operatorname{comm}(y,uv)\operatorname{comm}(uv,x^{-1})x^{-1} \in \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$, was $\operatorname{comm}(U^2,U^2) \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ beweist. Via Induktion folgt $\operatorname{comm}(U^m,U^n) \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$, woraus $G' \subseteq \langle \exp \mathfrak{g}' \rangle$ folgt. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, wählen wir eine offene Kugel $B' \subseteq B$ um 0 in $\mathfrak{g}$, so daß $B' \cap \mathfrak{g}'$ die lokale Gruppe in B' ist, die von allen Elementen der Form $\operatorname{comm}_*(X,Y) \in B'$ mit $x,y \in B'$ erzeugt wird. Eine solche Umgebung B' existiert nach Theorem (11.12). Wegen $\operatorname{comm}(\exp X, \exp Y) = \exp \operatorname{comm}_*(X,Y)$ ist $B' \cap \exp^{-1} G'$ eine lokale Untergruppe in B', die alle Kommutatoren $\operatorname{comm}_*(X,Y) \in B'$

für $X, Y \in B'$ enthält. Also ist $B' \cap \mathfrak{g}' \subseteq B' \cap \exp^{-1} G'$ und $\exp(B' \cap \mathfrak{g}') \subseteq G'$. Dies liefert $\langle \exp \mathfrak{g}' \rangle = \langle \exp(B' \cap \mathfrak{g}') \rangle \subseteq G'$. □

(11.15) Beispiel. Die lineare Lie-Gruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^u \end{pmatrix} \;\middle|\; u, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

besitzt als Kommutator-Gruppe die Gruppe

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das Zentrum von G ist gegeben durch das direkte Produkt

$$Z(G) = G' \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^u \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}.$$

(11.16) Lemma. *Sei G eine kompakte topologische Gruppe und sei U eine 1-Umgebung. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine 1-Umgebung V in G, so daß für alle $x_1, \ldots, x_n \in V$ und alle $g \in G$ die Relation $\operatorname{comm}(x_1, g) \cdot \ldots \cdot \operatorname{comm}(x_n, g) \in U$ gilt.*

Beweis. Sei W eine 1-Umgebung mit $W^n \subseteq U$. Für jedes Element $g \in G$ gibt es eine Umgebung U_g von g und eine 1-Umgebung V_g mit $\operatorname{comm}(V_g, U_g) \subseteq W$. Da G kompakt ist, gibt es endlich viele Elemente $g_1, \ldots, g_N \in G$ mit $G = U_{g_1} \cup \ldots \cup U_{g_N}$. Setze $V := V_{g_1} \cap \ldots \cap V_{g_N}$. Dann ist $\operatorname{comm}(x, g) \in W$ für alle $x \in V$ und alle $g \in G$. Damit erfüllt V die Bedingungen des Lemmas. □

(11.17) Theorem (Van der Waerden). *Sei G eine lokalkompakte lineare Lie-Gruppe, und sei H eine kompakte topologische Gruppe. Sei $f : G \to H$ ein (abstrakter) Gruppen-Homomorphismus. Ist $\mathfrak{L}(G)' = \mathfrak{L}(G)$, so ist f stetig. Ist H zusätzlich eine lineare Lie-Gruppe, so ist f analytisch.*

Beweis. Sei $\dim \mathfrak{g} = n$. Sei V eine Einsumgebung in H. Wir müssen zeigen, daß das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Einsumgebung in G ist. Nach Lemma (11.16) gibt es eine Einsumgebung W in H mit

$$\operatorname{comm}(\{h_1\} \times H) \cdot \ldots \cdot \operatorname{comm}(\{h_n\} \times H) \subseteq V$$

für alle $h_1, \ldots, h_n \in W$. Also genügt es nachzuweisen, daß

$$\bigcup \{\mathrm{comm}\,(\{g_1\} \times G) \cdot \ldots \cdot \mathrm{comm}\,(\{g_n\} \times G) \mid f(g_1), \ldots, f(g_n) \in W\}$$

eine Einsumgebung in G ist. Nach Theorem (11.12) gibt es $X_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \ldots, n$, so daß für alle n-Tupel $(r_1, \ldots, r_n) \in [-1, 1]^n$ mit $r_i \neq 0$ die Menge

$$\mathrm{comm}\,(\{\exp(r_1 \cdot X_1)\} \times G) \cdot \ldots \cdot \mathrm{comm}\,(\{\exp(r_n \cdot X_n)\} \times G)$$

eine Einsumgebung in G ist. Also müssen wir für jedes $j = 1, \ldots, n$ eine reelle Zahl r_j mit $0 < |r_j| \leq 1$ finden, für die $f(\exp(r_j \cdot X_j)) \in V$ ist. Setze $A_j := f(\exp(\mathbb{R} \cdot X_j))$. Ist $A_j = \{1\}$, so setze $r_j = \frac{1}{2}$. Ist $A_j \neq \{1\}$, so ist A_j ein nichttriviales homomorphes Bild der teilbaren Gruppe $\mathbb{R}$, also selbst eine teilbare Gruppe (siehe Fuchs, Abelian Groups I, §20). Damit kann A_j nicht endlich sein (siehe Fuchs, Abelian Groups I, §23) und der Abschluß $\overline{A_j}$ ist eine unendliche kompakte Gruppe. Insbesondere ist $\overline{A_j}$ und damit auch A_j nicht diskret. Also enthält $A_j \cap V$ ein Element $f(\exp(r_j \cdot X_j)) \neq 1$ für ein geeignetes $r_j \neq 0$. Dies beweist den ersten Teil des Theorems. Die letzte Aussage des Theorems folgt aus Korollar (8.6). □

(11.18) Korollar. *Sei G eine kompakte zusammenhängende lineare Lie-Gruppe mit $G' = G$. Dann ist die Gruppentopologie von G eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz (11.14) ist $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Ist $\mathcal{O}$ eine beliebige kompakte Gruppentopologie auf G, so ist $\mathrm{id}_G : G \to (G, \mathcal{O})$ stetig nach dem letzten Theorem. Da G kompakt ist, ist die Identität ein Homöomorphismus. □

Bemerkung. Der n-dimensionale Torus $\mathbb{T}^n$ hat unstetige Automorphismen und damit auch verschiedene kompakte Gruppentopologien. Je zwei solche Topologien ergeben jedoch homöomorphe Räume.

KAPITEL 12

Auflösbare Lie-Algebren und Lie-Gruppen, das Radikal

(12.1) Definition. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ setze rekursiv $\mathfrak{g}' := \mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $\mathfrak{g}^{(n)} := [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$. Die Unter-Algebra $\mathfrak{g}^{(n)}$ ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und wird die *n-te Kommutator-Algebra* von $\mathfrak{g}$ genannt. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *auflösbar*, falls $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ für ein $n \geq 1$ gilt.

(12.2) Lemma. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale von $\mathfrak{g}$.*

(i) Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Dann ist jede Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ und jeder Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar.

(ii) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, so ist auch $\mathfrak{g}$ auflösbar.

(iii) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auflösbar, so ist auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auflösbar.

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Dann ist $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{h}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist auflösbar. Sei $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ der kanonische Epimorphismus. Wegen $\pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g})]$ folgt via Induktion $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\pi(\mathfrak{g}))^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)} = (\pi(\mathfrak{g}))^{(n)} = \pi(\mathfrak{g}^{(n)}) = \pi(\{0\}) = \{0\}$.

(ii) Sei $\mathfrak{a}^{(m)} = \{0\}$ und $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)} = \{0\}$. Also ist $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{a}$ und damit folgt $\mathfrak{g}^{(m+n)} = (\mathfrak{g}^{(n)})^{(m)} \subseteq \mathfrak{a}^{(m)} = \{0\}$.

(iii) Es ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auflösbar, denn da $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ isomorph zu $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ ist, ist $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ nach Teil (i) auflösbar und es folgt mit (ii), daß auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auflösbar ist. □

(12.3) Die Lie-Algebren der Dimension 1 und 2. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ mit $\dim \mathfrak{g} \leq 2$. Um $\mathfrak{g}$ festzulegen, muß nur die Lie-Klammer auf einer $\mathbb{K}$-Basis von $\mathfrak{g}$ bestimmt werden (die Lie-Klammer ist ja nach Definition bilinear).

(i) $\dim \mathfrak{g} = 1$. Dann ist $\mathfrak{g} = \mathbb{K} \cdot e$ für jeden Vektor $e \neq 0$. Wegen $[e, e] = 0$ ist $\mathfrak{g}$ also kommutativ.

(ii) $\dim \mathfrak{g} = 2$. (a) Ist $\mathfrak{g}' = \{0\}$, so ist die Lie-Klammer wieder identisch Null und $\mathfrak{g}$ ist kommutativ.

(b) Sei $\mathfrak{g}' \neq \{0\}$. Sei $\{e, f\}$ eine $\mathbb{K}$-Basis von $\mathfrak{g}$. Dann ist nur $g := [e, f]$ zu bestimmen. Nach Voraussetzung ist $[e, f] \neq 0$ und $\mathfrak{g}' = \langle g \rangle$. O.E. seien g und f linear unabhängig. Dann ist $0 \neq [g, f] \in \mathfrak{g}'$, also $[g, f] = \lambda g$ für ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Bezüglich der Basis

$\{e_1 = g, e_2 = \lambda^{-1} f\}$ ist also $[e_1, e_2] = e_1$. Diese Lie-Algebra wird mit ℓ_2 bezeichnet. Sie ist *die* zwei-dimensionale nicht-kommutative Lie-Algebra. Die Unteralgebra $\mathfrak{a} := \langle e_1 \rangle$ ist ein Ideal von ℓ_2. Nach (a) ist ℓ_2 also auflösbar.

(12.4) Definition. Besitzt eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ein kleinstes Ideal $\mathfrak{s}$, welches alle auflösbaren Ideale von $\mathfrak{g}$ enthält, so heißt $\mathfrak{s}$ das *Radikal* von $\mathfrak{g}$, geschrieben $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \{0\}$ ist.

(12.5) Lemma. *Jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt ein Radikal $\mathfrak{s}$. Ist $\dim \mathfrak{g} < \infty$, so ist $\mathfrak{s}$ auflösbar.*

Beweis. Die Vereinigung $\mathfrak{s}$ aller auflösbaren Ideale ist selbst ein Ideal von $\mathfrak{g}$, siehe Lemma (12.2)(iii). Im Falle $\dim \mathfrak{g} < \infty$ ist $\mathfrak{s}$ ebenfalls auflösbar, siehe Lemma (12.2)(ii). Natürlich enthält $\mathfrak{s}$ alle auflösbaren Ideale. □

(12.6) Lemma. *Seien $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ Lie-Algebren und sei $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Dann gilt:*

(i) Sei π surjektiv. Für alle (auflösbaren) Ideale $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ ist $\pi(\mathfrak{a})$ ein (auflösbares) Ideal in $\mathfrak{h}$.

(ii) Für alle Ideale $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{h}$ ist $\pi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$.

Für $\dim \mathfrak{g} < \infty$ gilt zudem:

(iii) Der Quotient $\mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ ist eine halbeinfache Lie-Algebra.

(iv) Das Radikal $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ ist das kleinste Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ halbeinfach ist.

(v) Für π surjektiv ist $\pi(\operatorname{rad} \mathfrak{g}) = \operatorname{rad}(\mathfrak{h})$.

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist $[\pi(\mathfrak{a}), \mathfrak{h}] = [\pi(\mathfrak{a}), \pi(\mathfrak{g})] = \pi([\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]) \subseteq \pi(\mathfrak{a})$, d.h. $\pi(\mathfrak{a})$ ist ein Ideal in $\mathfrak{h}$. Wegen $\pi(\mathfrak{g}^{(n)}) = (\pi(\mathfrak{g}))^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch die Aussage mit den Klammern.
(ii) Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal in $\mathfrak{h}$. Dann ist $[\pi^{-1}(\mathfrak{b}), \mathfrak{g}] = [\pi^{-1}(\mathfrak{b}), \pi^{-1}(\mathfrak{h})] = \pi^{-1}([\mathfrak{b}, \mathfrak{h}]) \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{b})$, d.h. $\pi^{-1}(\mathfrak{b})$ ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$.
(iii) Sei $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g} : X \mapsto X + \operatorname{rad} \mathfrak{g}$ der kanonische Epimorphismus. Sei $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}$. Dann ist nach (ii) und Lemma (12.2)(ii) auch das Urbild $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein auflösbares Ideal (in $\mathfrak{g}$). Wegen $\operatorname{rad} \mathfrak{g} \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{a})$ folgt aus der Definition des Radikals $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \pi^{-1}(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} = \{0\}$. Damit ist der Quotient $\mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ halbeinfach.
(iv) Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ halbeinfach ist. Sei $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ der kanonische Epimorphismus und sei $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$. Da $\pi(\mathfrak{a})$ nach (i) ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ ist, folgt $\pi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{b}$. Da dies für alle auflösbaren Ideale $\mathfrak{a}$ gilt, folgt auch $\pi(\operatorname{rad} \mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}$.
(v) Sei $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist $\pi(\mathfrak{a})$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{h}$, also $\pi(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{h})$. Da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ das kleinste Ideal ist, daß alle auflösbaren Ideale enthält, folgt $\pi(\operatorname{rad} \mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{h})$. Die Abbildung π induziert eine Abbildung $\pi' : \mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/\pi(\operatorname{rad} \mathfrak{g})$. Dann ist

$\mathfrak{j} := \mathfrak{h}/\pi(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ halbeinfach, denn wäre $\mathfrak{c}$ ein nichttriviales auflösbares Ideal in $\mathfrak{j}$, so ist nach (ii) und Lemma (12.2)(ii) $\pi'^{-1}(\mathfrak{c})$ ein nichttriviales auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, was (iii) widerspricht. Damit folgt aber nach (iv) $\operatorname{rad}(\mathfrak{h}) \subseteq \pi(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$. □

(12.7) Proposition. *Seien $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ endlich-dimensionale Lie-Algebren und sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$. Dann ist* $\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$.

Beweis. Nach Lemma (12.2) ist $\mathfrak{s} := \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$ auflösbar, also ist $\mathfrak{s} \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}$. Ist $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ die kanonische i-te Projektion, so ist $\pi_i(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}_i$, also ist $\pi_i(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$. Damit folgt $\operatorname{rad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{s}$. Dies beweist die Proposition. □

(12.8) Semidirekte Produkte von Lie-Algebren. Seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zwei Lie-Algebren über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\sigma : \mathfrak{m} \to \operatorname{Der}\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Wir wollen auf dem direkten Produkt $\mathfrak{h} := \mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$ der Vektorräume $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ eine bilineare Multiplikation $[.,.]$ so einführen, daß $\mathfrak{h}$ eine Lie-Algebra ist. Dazu setzen wir

$$[(X,Y),(X',Y')] := ([X,X'],[Y,Y'] + X^\sigma Y' - X'^\sigma Y).$$

Natürlich ist die so definierte Klammer bilinear. Es ist

$$[(X,Y),(X,Y)] := ([X,X],[Y,Y] + X^\sigma Y - X^\sigma Y) = (0,0)$$

und die Jacobi-Identität folgt aus der Tatsache, daß X^σ und X'^σ Derivationen sind. Also ist $(\mathfrak{h}, [.,.])$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$, die das *semidirekte Produkt von* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{n}$ genannt wird. Man schreibt $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \ltimes_\sigma \mathfrak{n}$. Für $\sigma \equiv 0$ ist $\mathfrak{h}$ gerade das *direkte Produkt* von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, geschrieben als $\mathfrak{h} := \mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$. Setzen wir $\mathfrak{m}^* := \mathfrak{m} \times \{0\}$ und $\mathfrak{n}^* := \{0\} \times \mathfrak{n}$, so folgt unmitelbar aus der Definition der Klammer auf $\mathfrak{h}$, daß $\mathfrak{m}^*$ eine Lie-Unteralgebra und $\mathfrak{n}^*$ ein Ideal von $\mathfrak{h}$ ist. Dabei ist $\mathfrak{m}^* \cap \mathfrak{n}^* = \{(0,0)\}$ und also $\mathfrak{m}^* \oplus \mathfrak{n}^* = \mathfrak{m} \ltimes_\sigma \mathfrak{n}$. Sei umgekehrt $\mathfrak{h}$ eine beliebige Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ mit einer Lie-Unteralgebra $\mathfrak{m}$ und einem Ideal $\mathfrak{n}$, so daß $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ gilt. Setzt man $\sigma : \mathfrak{m} \to \operatorname{Der}\mathfrak{n} : X \mapsto (Y \mapsto [X,Y])$, so ist $\varphi : \mathfrak{m} \ltimes_\sigma \mathfrak{n} \to \mathfrak{m} + \mathfrak{n} : (X,Y) \mapsto X + Y$ ein Isomorphismus zwischen Lie-Algebren mit $\varphi(\mathfrak{m} \times \{0\}) = \mathfrak{m}$ und $\varphi(\{0\} \times \mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$.

Bis zum Ende dieses Kapitels sei $\mathfrak{g}$ eine *endlich-dimensionale* Lie-Algebra über $\mathbb{K} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(12.9) Definition. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Die symmetrische Bilinearform

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K} : (X,Y) \mapsto \operatorname{spur}(\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y))$$

auf $\mathfrak{g}$ heißt die *Killing-Form* von $\mathfrak{g}$.

(12.10) Beispiele. (i) Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{K}$ aus (3.8) besitzt

$$\left\{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

als Basis. Dann ist

$$[X,Y] = Z, \quad [Z,X] = 2X, \quad [Z,Y] = -2Y$$

und

$$\operatorname{ad} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit wird die Killing-Form κ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Da diese Matrix regulär ist, ist die Killing-Form von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{K}$ nicht-ausgeartet.

(ii) Die Lie-Algebra $\ell_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ist durch $[e_1, e_2] = e_1$ gegeben. Dies ergibt

$$\operatorname{ad} e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Killing-Form von ℓ_2 wird beschrieben durch $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ist die Killing-Form von ℓ_2 ausgeartet.

(12.11) Lemma. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Sei κ die Killing-Form auf $\mathfrak{g}$ und sei κ' die Killing-Form auf der Lie-Algebra $\mathfrak{a}$. Dann ist $\kappa' = \kappa\big|_{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Sei f ein linearer Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, der $\mathfrak{a}$ invariant läßt. Seien f_1 und f_2 die von f auf $\mathfrak{a}$ bzw. auf $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ induzierte lineare Endomorphismen. Dann ist $\operatorname{spur}(f) = \operatorname{spur}(f_1) + \operatorname{spur}(f_2)$. Seien $X, Y \in \mathfrak{a}$. Setze $f = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} Y)$. Dann ist $f_1 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} X)(\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} Y)$. Wegen $X, Y \in \mathfrak{a}$ ist $f_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{q}} X)(\operatorname{ad}_{\mathfrak{q}} Y) = 0$ und die Behauptung folgt. □

(12.12) Definition. Eine symmetrische Bilinearform f auf einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *total invariant*, wenn $f(DX, Y) + f(X, DY) = 0$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ und alle $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ gilt.

(12.13) Lemma. *Die Killing-Form κ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist total invariant.*

Beweis. Sei $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Betrachte den Körper $\mathbb{K}$ als kommutative ein-dimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\sigma : \mathbb{K} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) : \lambda \mapsto \lambda D$ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Im semi-direkten Produkt $\mathfrak{h} := \mathbb{K} \ltimes_\sigma \mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{g} \cong \{0\} \times \mathfrak{g}$ ein Ideal, und es ist $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{g} = 1$ und $DX = [(1,0), X]$ für alle $X \in \mathfrak{g}$. Sei κ' die Killing-Form von $\mathfrak{h}$. Es ist $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Deshalb ist für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $X_0 := (1,0)$

$$\begin{aligned}
\kappa'([X, X_0], Y) &= \mathrm{spur}((\mathrm{ad}\,[X, X_0])(\mathrm{ad}\,Y)) \\
&= \mathrm{spur}((\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,X_0)(\mathrm{ad}\,Y)) - \mathrm{spur}((\mathrm{ad}\,X_0)(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y)) \\
&= \mathrm{spur}((\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,X_0)(\mathrm{ad}\,Y)) - \mathrm{spur}((\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y)(\mathrm{ad}\,X_0)) \\
&= \mathrm{spur}((\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,[X_0, Y])) = \kappa'(X, [X_0, Y]),
\end{aligned}$$

woraus $\kappa'(DX, Y) + \kappa'(X, DY) = 0$ folgt. Nach Lemma (12.11) ist $\kappa'\big|_{\mathfrak{g}} = \kappa$, woraus die Behauptung folgt. □

(12.14) Proposition. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Dann ist*

$$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'^{\perp} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, Y \in \mathfrak{g}' : \kappa(X, Y) = 0\}$$

und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{g}$ *ist auflösbar.*

(ii) $\kappa(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') = 0$.

Beweis. Für die erste Ausage siehe etwa Bourbaki, Lie Groups and Lie Algebras, Theorem 2 und Proposition 5, p. 48. Die Äquivalenz folgt sofort aus der ersten Aussage. □

(12.15) Korollar. *Die Kommutator-Algebra $\mathfrak{g}'$ und das Radikal einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind charakteristische Ideale in $\mathfrak{g}$, d.h. sie sind invariant unter allen Derivationen von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{g}'$ ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}$, denn für $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ ist $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \in \mathfrak{g}'$, also $D\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}'$. Nach Lemma (12.13) ist die Killing-Form von $\mathfrak{g}$ total invariant. Damit ist $\mathfrak{g}'^{\perp}$ ein charakteristisches Ideal, denn für $X \in \mathfrak{g}'^{\perp}$ und $Y \in \mathfrak{g}'$ ist $\kappa(DX, Y) = -\kappa(X, DY) = 0$ (es ist ja $DY \in \mathfrak{g}'$), also $DX \in \mathfrak{g}'^{\perp}$. Damit folgt die Behauptung aus der vorigen Proposition. □

(12.16) Korollar. *Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn die Killing-Form κ von $\mathfrak{g}$ nicht ausgeartet ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = \{0\}$. Nach Proposition (12.14) ist

$$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, Y \in \mathfrak{g}' : \kappa(X, Y) = 0\}\,,$$

d.h. es folgt aus $\kappa(X,Y)=0$ für alle $Y\in\mathfrak{g}'$ schon $X=0$. Also ist κ nicht ausgeartet. Ist $\mathfrak{g}$ nicht halbeinfach, so gibt es ein nichttriviales auflösbares Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$. Nach (12.14) ist $\kappa(\mathfrak{a},\mathfrak{a}')=0$. Ist $\mathfrak{a}'\neq\{0\}$, so ist κ ausgeartet: Sei $Y\in\mathfrak{a}$ und $Z\in\mathfrak{a}'$ mit $[Y,Z]\neq 0$ (die Existenz von solchen Y,Z folgt aus $\mathfrak{a}'\neq\{0\}$). Dann ist $\kappa(X,[Y,Z])=\kappa([X,Y],Z)=0$ für alle $X\in\mathfrak{g}$, also ist κ ausgeartet. Andernfalls ($\mathfrak{a}'=\{0\}$) ist $\mathfrak{a}$ kommutativ, also $[X,Y]=0$ für alle $X,Y\in\mathfrak{a}$. Damit ist $\operatorname{ad}X=\operatorname{ad}Y=0$ und es folgt mit Lemma (12.11) $\kappa\big|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}=0$. Also folgt wie im ersten Fall, daß die Killing-Form ausgeartet ist. □

(12.17) Definition. Für eine Lie-Gruppe G definiere rekursiv

$$G':=G^{(1)}:=\operatorname{comm}(G,G)=\left\langle\left\{ghg^{-1}h^{-1}\;\middle|\;g,h\in G\right\}\right\rangle$$

und $G^{(n)}:=\operatorname{comm}(G^{(n-1)},G^{(n-1)})$. Die Untergruppe $G^{(n)}$ ist ein Normalteiler von G und wird die *n-te Kommutator-Gruppe* von G genannt. Die Lie-Gruppe G heißt *auflösbar*, falls $G^{(n)}=\{0\}$ für ein $n\geq 1$ gilt.

(12.18) Theorem. *Sei G eine endlich-dimensionale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann auflösbar, wenn die Zusammenhangskomponente $G_{\mathbf{1}}$ von $\mathbf{1}$ in G auflösbar ist.*

Beweis. Sei $G_{\mathbf{1}}$ auflösbar, also $G_{\mathbf{1}}^{(n)}=\mathbf{1}$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Dann ist nach dem Fundamentalsatz über die Kommutatorgruppe (11.14) die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auflösbar (verwende Induktion über n und beachte, daß mit G auch G' zusammenhängend ist.) Die Umkehrung folgt nach dem gleichen Schema. □

(12.19) Proposition. *Sei G eine endlich-dimensionale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist $R:=\langle\exp\operatorname{rad}\mathfrak{g}\rangle$ eine Lie-Untergruppe von G, die invariant unter jedem stetigen Automorphismus von G ist. Jeder zusammenhängende auflösbare Normalteiler von G ist in R enthalten.*

Beweis. Nach Theorem (12.18) ist R auflösbar. Sei H ein zusammenhängender auflösbarer Normalteiler von G. Dann ist auch $\overline{H}$ zusammenhängend und eine Lie-Untergruppe von G nach Theorem (6.5). Für Teilmengen $A,B\subseteq G$ ist $\overline{(A,B)}=\overline{(\overline{A},\overline{B})}$, denn die Abbildung $f:G\times G\to G:(x,y)\mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ ist stetig, also

$$f(\overline{A}\times\overline{B})=f(\overline{A\times B})\subseteq\overline{f(A\times B)}\subseteq\overline{(A,B)},$$

woraus $(\overline{A},\overline{B})\subseteq\overline{(A,B)}$ und damit $\overline{(\overline{A},\overline{B})}\subseteq\overline{(A,B)}$ folgt. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. Daher ist auch $\overline{H}$ auflösbar. Nach Theorem (12.18) ist $\mathfrak{L}(\overline{H})$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}$, woraus $\mathfrak{L}(\overline{H})\subseteq\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ folgt. Damit ist

$$\overline{H}=\left\langle\exp\mathfrak{L}(\overline{H})\right\rangle\subseteq\langle\exp\operatorname{rad}\mathfrak{g}\rangle=R.$$

Insbesondere ist $\overline{R} \subseteq R$, d.h. R ist abgeschlossen und somit eine Lie-Untergruppe von G. Außerdem haben wir gezeigt, daß R der größte zusammenhängende auflösbare Normalteiler in G ist. Deshalb ist R unter allen stetigen Automorphismen von G invariant. □

(12.20) Definition. Der Normalteiler R von G aus Proposition (12.19) wird das *Radikal* von G genannt.

Bemerkung. Auch wenn G zusammenhängend ist, kann G auflösbare *Untergruppen* von G besitzen, die *nicht* im Radikal von G enthalten sind.

(12.21) Proposition. *Seien G_1 und G_2 endlich-dimensionale Lie-Gruppen mit Radikalen R_1 und R_2. Ist $f : G_1 \to G_2$ ein stetiger Gruppen-Epimorphismus, so ist $f(R_1) = R_2$.*

Beweis. Betrachte das Diagramm in Theorem (8.1). Da $\mathfrak{g}_1 := \mathcal{L}(G_1)$ und $\mathfrak{g}_2 := \mathcal{L}(G_2)$ endlich-dimensional sind und die Exponentialabbildung ein lokaler Homöomorphismus ist, folgt mit Hilfe des besagten Diagramms, daß $\mathcal{L}(f)$ surjektiv ist ($\mathcal{L}(f)$ ist ja linear). Nach Proposition (12.19) ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g}_i$ die Lie-Algebra von R_i. Damit folgt die Aussage aus Lemma (12.6). □

(12.22) Korollar. *Seien $G_1, \ldots, G_n$ endlich-dimensionale Lie-Gruppen mir Radikalen $R_1, \ldots, R_n$. Dann ist das Radikal von $\prod_{i=1}^n G_i$ das Produkt aller Radikale R_i.*

Beweis. Folgt aus Proposition (12.7) und der vorigen Proposition. □

KAPITEL 13

Halbeinfache und einfache Lie-Gruppen und -Algebren

In diesem Kapitel sei G stets eine endlich-dimensionale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Im letzten Kapitel haben wir das folgende Theorem bewiesen.

(13.1) Theorem. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*

(ii) Jedes kommutative Ideal $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{g}$ *ist trivial.*

(iii) Die Killing-Form κ *von* $\mathfrak{g}$ *ist nicht ausgeartet.*

Außerdem ist $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ *für jede halbeinfache Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$.

Beweis. $(i) \to (ii)$: Folgt sofort aus der Definition des Radikals.
$(ii) \to (iii)$: Folgt aus Proposition (12.14).
$(iii) \to (i)$: Korollar (12.16).
Die letzte Aussage folgt aus Proposition (12.14): Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $\{0\} = \operatorname{rad}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'^{\perp}$. Wäre $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$, so ist $k := \dim\mathfrak{g}' < n := \dim\mathfrak{g}$. Sei $\{e_1, \ldots, e_k\}$ eine Vektorraumbasis von $\mathfrak{g}'$. Es ist $\mathfrak{g}'^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{k} \ker\kappa(.,e_i)$ aufgrund der Bilimearität von κ. Damit folgt mit der Dimensionformel für lineare Unterräume $\dim\mathfrak{g}'^{\perp} \geq n - k > 0$, also $\mathfrak{g}'^{\perp} \neq \{0\}$, ein Widerspruch. Somit ist doch $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. □

(13.2) Korollar. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie-Algebra über* $\mathbb{K}$ *und sei* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *ein Lie-Algebren-Homomorphismus, wobei* V *ein endlich-dimensionaler* $\mathbb{K}$*- Vektorraum ist. Dann ist* $f(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$.

Beweis. Wir betrachten $\mathfrak{sl}(V)$ als Teilraum von $\mathfrak{gl}(V)$. Die Linearform $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K} : X \mapsto \operatorname{spur} f(X)$ ist 0 auf Elementen der Form $[X, Y]$, also auf $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Also ist $f(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$. □

(13.3) Lemma. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra mit einer halbeinfachen Lie-Unteralgebra* $\mathfrak{a}$. *Dann gilt*

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ *als Vektorräume,*

(ii) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] \subseteq \mathfrak{a}^{\perp}$,

(iii) Ist $\mathfrak{a}$ *ein Ideal von* $\mathfrak{g}$*, so ist auch* $\mathfrak{a}^{\perp}$ *ein Ideal von* $\mathfrak{g}$ *und es ist* $\mathfrak{a}^{\perp} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}$.

Beweis. Eine Bilinearform $f : V \times V \to \mathbb{K}$ eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist genau dann nicht ausgeartet, wenn die lineare Abbildung $f^* : V \to V^*$ in den Dualraum V^* von V ein Isomorphismus ist.
(i) Die Einschränkung $\kappa_\mathfrak{a}$ der Killing-Form von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{a}$ ist nach Lemma (12.11) die Killing-Form auf $\mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{a}$ halbeinfach ist, ist $\kappa_\mathfrak{a}$ nicht ausgeartet nach Korollar (12.16). Sei $X \in \mathfrak{g}$ und betrachte die Linearform $\lambda = \kappa(.,X)$, eingeschränkt auf $\mathfrak{a}$. Dies ist also eine Linearform auf $\mathfrak{a}$. Da $\kappa_\mathfrak{a}$ nicht ausgeartet ist, ist $\kappa_\mathfrak{a}^* : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^*$ ein Isomorphismus. Insbesondere gibt es ein $Y \in W$ mit $\kappa_\mathfrak{a}^*(Y) = \lambda$. Damit gilt für alle $Z \in \mathfrak{a}$

$$\kappa(Z,X) = \lambda(Z) = \kappa_\mathfrak{a}^*(Y)(Z) = \kappa_\mathfrak{a}(Z,Y) = \kappa(Z,Y).$$

Also ist $\kappa(Z, X-Y) = \kappa(Z,X) - \kappa(Z,Y) = 0$ für alle $Z \in \mathfrak{a}$, und es folgt $X = Y + (X-Y) \in \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp$. Also ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp$.
Ist $Z \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$, so ist $\kappa_\mathfrak{a}(Z,X) = \kappa(Z,X) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{a}$. Da $\kappa_\mathfrak{a}$ nicht ausgeartet ist, folgt hieraus $Z = 0$. Dies zeigt $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$.

(ii) Für $X, Y \in \mathfrak{a}$ und $Z \in \mathfrak{a}^\perp$ ist $\kappa(X,[Y,Z]) = \kappa([X,Y],Z) = 0$ nach der Gleichung im Beweis von Lemma (12.13)(beachte, daß $[X,Y] \in \mathfrak{a}$ ist). Also ist $[Y,Z] \in \mathfrak{a}^\perp$, was $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp] \subseteq \mathfrak{a}^\perp$ beweist.

(iii) Für $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{g}$ und $Z \in \mathfrak{a}^\perp$ ist $\kappa([X,Y],Z) = \kappa(X,[Y,Z]) = 0$, da $[Y,Z] \in \mathfrak{a}$ ist. Also ist $[\mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}^\perp$. Also ist $\mathfrak{g}$ als Lie-Algebra isomorph zum direkten Produkt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$. Wegen $\mathfrak{z}_\mathfrak{a} = \{0\}$ folgt daraus $\mathfrak{a}^\perp = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}\mathfrak{a}$. □

(13.4) Korollar. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra. Dann ist jede Derivation von $\mathfrak{g}$ eine innere Derivation.*

Beweis. Nach Satz (9.3) ist $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus mit $\ker \mathrm{ad} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g} = \{0\}$, da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist. Also ist $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ ebenfalls halbeinfach. Zudem ist $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ ein Ideal von $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, denn für $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ ist

$$[D, \mathrm{ad}\,X](Y) = D([X,Y]) - [X, DY] = [DX, Y] = (\mathrm{ad}\,DX)(Y).$$

Für $D \in \mathfrak{z}_{\mathrm{Der}(\mathfrak{g})}\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ ist

$$(\mathrm{ad}\,DX)(Y) = [DX, Y] = D[X,Y] - [X, DY] = D(\mathrm{ad}\,X(Y)) - \mathrm{ad}\,X(DY) = [D, \mathrm{ad}\,X](Y),$$

woraus $DX = 0$ und weiter $D = 0$ folgt. Also ist $\mathfrak{z}_{\mathrm{Der}(\mathfrak{g})}\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \{0\}$ und es folgt nach Lemma (13.3)(i) und (iii) $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ und $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. □

(13.5) Proposition. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra. Dann ist jedes Ideal und jeder Quotient von $\mathfrak{g}$ auch halbeinfach.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$.
(i) Wir zeigen, daß die Killing-Form κ auf $\mathfrak{a}$ nicht ausgeartet ist. Angenommen, es gäbe $0 \neq X \in \mathfrak{a}$ mit $\kappa(X,Y) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{a}$. Dann ist $\kappa([X,Y],Z) = \kappa(X,[Y,Z]) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{a}$ und alle $Z \in \mathfrak{g}$ nach Lemma (12.13)(Beweis). Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, ist κ auf $\mathfrak{g}$ nicht ausgeartet. Also folgt $[X,Y] = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{a}$. Dies zeigt $X \in \mathfrak{z}\mathfrak{a}$. Wegen $0 = \kappa(X,[Y,Z]) = -\kappa(X,[Z,Y]) = -\kappa([X,Z],Y)$ für alle $Y \in \mathfrak{a}$ ist nach dem selben Argument auch $[[X,Z],Y] = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{a}$. Dies zeigt, daß $\mathfrak{z}\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. Dies widerspricht aber Theorem (13.1). Also ist $\mathfrak{a}$ doch halbeinfach.
(ii) Es ist $\mathfrak{a}^\perp$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$, denn für $X \in \mathfrak{a}^\perp$, $Y \in \mathfrak{a}$ und $Z \in \mathfrak{g}$ ist $\kappa([X,Z],Y] = \kappa(X,[Z,Y]) = 0$, d.h. es ist $[X,Z] \in \mathfrak{a}^\perp$. Nach (i) ist $\mathfrak{a}^\perp$ halbeinfach. Der Durchschnitt $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ ist ebenfalls ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dieses ist kommutativ, denn für $X, Y \in \mathfrak{b}$ und $Z \in \mathfrak{g}$ ist $\kappa([X,Y],Z) = \kappa(X,[Y,Z]) = 0$, woraus wie in (i) $[X,Y] = 0$ folgt. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, ist $\mathfrak{b} = \{0\}$. Damit haben wir $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ als Lie-Algebra und es folgt, daß der Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}^\perp$ halbeinfach ist. □

(13.6) Definition. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, wenn $\mathfrak{g}$ nicht kommutativ ist und keine nicht-trivialen Ideale besitzt.

(13.7) Proposition. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra. Dann ist $\mathfrak{g}$ eine endliche Summe einfacher Lie-Algebren. Umgekehrt ist jede endliche Summe einfacher Lie-Algebren halbeinfach.*

Beweis. Jede einfache Lie-Algebra ist nach Definition halbeinfach. Jede endliche Summe halbeinfacher Lie-Algebren ist halbeinfach, da die Bilder eines kommutativen Ideals $\mathfrak{a}$ unter den Projektionen auf die einzelnen Faktoren trivial sind, also $\mathfrak{a} = \{0\}$ ist. Sei umgekehrt $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei $\mathfrak{a}_1$ ein minimales Ideal in $\mathfrak{g}$. Ein solches existiert aufgrund der endlichen Dimension von $\mathfrak{g}$. Dann ist nach dem Beweis von (13.5) $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1^\perp$ und $\mathfrak{a}_1$ ist halbeinfach, also auch nicht kommutativ. Das Ideal $\mathfrak{a}_1^\perp$ ist ebenfalls halbeinfach und wir können $\mathfrak{a}_1^\perp$ wieder zerlegen in $\mathfrak{a}_1^\perp = \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_2^\perp$, wonei $\mathfrak{a}_2$ ein minimales Ideal in $\mathfrak{a}_1$ ist. So fortfahrend erhalten wir $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$ mit minimalen, nicht kommutativen Idealen $\mathfrak{a}_i$ (hier geht wieder $\dim \mathfrak{g} < \infty$ ein). Da die Ideale $\mathfrak{a}_i$ minimal sind, enthalten diese keine nicht-trivialen Ideale, sind also einfach. □

(13.8) Theorem. *Sei G eine endlich-dimensionale, zusammenhängende Lie-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{L}(G)$ ist halbeinfach.

(ii) Das Radikal R von G ist $\{\mathbf{1}\}$.

(iii) Jede normale kommutative Untergruppe $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ für eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{L}(G)$ ist trivial.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus der Definition von R. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Theorem (10.8) und Theorem (13.1). □

(13.9) Definition. Eine zusammenhängende Lie-Gruppe G heißt *halbeinfach*, wenn G endlich-dimensional ist und eine der Bedingungen aus Theorem (13.8) erfüllt.

(13.10) Korollar. *Sei G eine endlich-dimensionale, zusammenhängende Lie-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{L}(G)$ ist einfach.

(ii) G ist nicht kommutativ und die einzigen normalen Untergruppen der Form $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ für eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{L}(G)$ sind G und $\{\mathbf{1}\}$.

Beweis. Folgt sofort aus Theorem (10.8). □

(13.11) Definition. Eine zusammenhängende Lie-Gruppe G heißt *fast-einfach*, wenn G endlich-dimensional ist und eine der Bedingungen aus Theorem (13.10) erfüllt.

(13.12) Korollar. *Sei G eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) G ist halbeinfach.

(ii) G ist isomorph zu einem endlichen Produkt fast-einfacher Gruppen.

Beweis. Ist G ein Produkt fast-einafcher Lie-Gruppen, so ist nach (13.10) $\mathfrak{L}(G)$ eine Summe einfacher Lie-Algebren. Also ist $\mathfrak{L}(G)$ halbeinfach nach Proposition (13.7). Aus Theorem (13.8) folgt nun, daß G halbeinfach ist. Sei umgekehrt G halbeinfach. Dann ist $\mathfrak{L}(G)$ halbeinfach und damit isomorph zu einer direkten Summe einfacher Lie-Algebren $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$. Sei G_i die einfach zusammenhängende Lie-Gruppe zur Lie-Algebra $\mathfrak{g}_i$ (siehe Kapitel 7). Dann ist G_i fast-einfach nach Definition. Die Lie-Algebren von G und dem direkten Produkt $G_1 \times \ldots \times G_n$ sind nach Voraussetzung isomorph. Da beide Gruppen G und $G_1 \times \ldots \times G_n$ einfach zusammenhängend sind, folgt $G \cong G_1 \times \ldots \times G_n$ nach Korollar (7.21) und Korollar (7.23). □

Bemerkung. Eine (nicht notwendig einfach zusammenhängende) halbeinfache Lie-Gruppe G ist isomorph zu einem Quotienten eines endlichen Produktes fast-einfacher Lie-Gruppen modulo einer diskreten Untergruppe, d.h. G wird von einem endlichen Produkt fast-einfacher Gruppen überlagert. Dies folgt aus den nächsten Resultaten.

(13.13) Lemma. *Sei G ein zusammenhängende topologische Gruppe mit Zentrum Z und sei Z' eine diskrete Untergruppe von Z. Dann ist Z/Z' das Zentrum von G/Z'.*

Beweis. Sei $g \in G$ mit $gZ' \in Z(G/Z')$. Betrachte die Abbildung $f : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$. Da f stetig und G zusammenhängend ist, ist $f(G)$ zusammenhängend und

in Z' enthalten. Da Z' diskret ist, folgt $f(G) = \{\mathbf{1}\}$. Also ist $g \in Z$ und wir haben $Z(G/Z') \subseteq Z/Z'$ gezeigt. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. □

(13.14) Proposition. *Sei G eine halbeinfache, zusammenhängende Lie-Gruppe mit Zentrum Z. Die gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $G = G'$

(ii) Das Zentrum Z ist diskret.

(iii) Das Zentrum von G/Z ist $\{\mathbf{1}\}$.

Beweis. (i) folgt aus Theorem (13.1) und dem Fundamentalsatz (11.14).
(ii) Es ist $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\mathfrak{L}(G)) = \{0\}$. Nach Proposition (11.6)(iii) hat Z die Lie-Algebra $\mathfrak{z}$ und Z ist eine Lie-Untergruppe von G. Nach Satz (6.10) ist daher Z diskret.
(iii) folgt sofort aus (ii) und Lemma (13.13). □

(13.15) Proposition. *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so besteht die Zusammenhangskomponente von* id *in* $\mathrm{Aut}\,(G)$ *aus inneren Derivationen. Ist G eine zusammenhängende halbeinfache Lie-Gruppe, so ist die Zusammenhangskomponente von* id *in* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}(G))$ *gerade* $\mathrm{Ad}\,(G)$.

Beweis. Nach Korollar (13.4) ist jede Derivation von $\mathfrak{g}$ eine innere Derivation, d.h. es ist $\mathfrak{L}(\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}))$. Aus $(\mathrm{Aut}\,(G))_{\mathbf{1}} = \mathfrak{L}(\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}))$ folgt nun die erste Behauptung. Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit Hilfe von Theorem (10.8). □

KAPITEL 14

Die Levi-Zerlegung

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis der sogenannten *Levi-Zerlegung* von G bzw. von $\mathfrak{g}$ in einen auflösbaren und einen halbeinfachen Anteil.

(14.1) Definition. Eine Lie-Unteralgebra $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{g}$ heißt *Levi-Unteralgebra* von $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \operatorname{rad}\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{l} \cap \operatorname{rad}\mathfrak{g} = \{0\}$ ist. Die angegebene Zerlegung von $\mathfrak{g}$ heißt eine *Levi-Zerlegung* von $\mathfrak{g}$.

Bemerkung. (i) Jede Levi-Unteralgebra $\mathfrak{s}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist halbeinfach, denn es ist $\mathfrak{s}$ kanonisch isomorph zur halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$.

(ii) Während das Radikal einer Lie-Algebra eindeutig bestimmt ist, kann es viele verschiedende Levi-Unteralgebren geben: (???Beispiel)

(14.2) Theorem von Levi-Malcev. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra. Dann besitzt $\mathfrak{g}$ eine Levi-Unteralgebra $\mathfrak{l}$. Diese ist auch eine Levi-Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ und es ist $\mathfrak{g}' = [\operatorname{rad}\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{l}$ eine Levi-Zerlegung von $\mathfrak{g}'$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q} := \operatorname{rad}\mathfrak{g}$. Der Beweis wird via Induktion über $n = \dim\mathfrak{q}$ geführt.

Für $n = 0$ ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach und die Aussage des Satzes ist trivial.

Es gelte die Aussage des Satzes für alle Lie-Algebren $\mathfrak{h}$ mit $\dim\operatorname{rad}\mathfrak{h} < n$. Sei $\dim\mathfrak{q} = n$.

1. Fall: $\mathfrak{g}' \neq \{0\}$. Es ist $\mathfrak{q}'$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$, da $\mathfrak{q}'$ unter allen Derivationen von $\mathfrak{q}$ invariant ist. Setze $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}/\mathfrak{q}'$ und sei $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der kanonische Epimorphismus.

□

(14.3) Theorem. *Je zwei Levi-Unteralgebren einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind konjugiert zueinander.*

Beweis. □

(14.4) Theorem. *Sei G eine endlich-dimensionale Lie-Gruppe mit Radikal R. Dann gibt es eine halbeinfache Untergruppe H von G, genannt eine Levi-Untergruppe von G, d.h. es ist $R \cap H$ diskret und $G = R \cdot H$.*

Beweis. □

Bemerkung. Eine Levi-Untergruppe muß keine Lie-Untergruppe sein. Ist H einfach zusammenhängend, so ist G das semi-direkte Produkt von R und H, also $R \cap H = \{\mathbf{1}\}$.

Literatur

[1] Diedonné, J., Foundations of Modern Analysis, New York – London: Academic Press **1969**

[2] Hilgert, J., Neeb, K.-H., Lie-Gruppen und Lie-Algebren, Braunschweig: Vieweg **1991**

[3] Hochschild, G., The structure of Lie groups, Holdan-Day **1965**

[4] Knapp, A.W., Lie groups beyond: An introduction, Basel: Birkhäuser **1996**

[5] Onishchik, A.L., Vinberg, E.B., Lie groups and algebraic groups, New York – Heidelberg – Berlin: Springer **1990**

[6] Onishchik, A.L. (Ed.), Lie groups and Lie algebras, Enc. of Math. Sci. Vol. 20, Springer **1993**

[7] Reed, M., Simon, B., Functional Analysis I, New York – London: Academic Press **1980**

[8] Tits, J., Liesche Gruppen und Algebren, New York – Heidelberg – Berlin: Springer **1972**

[9] Warner, F.W., Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, New York – Heidelberg – Berlin: Springer **1971**