Graphentheorie

Arnfried Kemnitz

28. März 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und grundlegende Definitionen 1

2 Wichtige Graphenklassen und Operationen für Graphen 10

3 Bäume 23

4 Zusammenhang 27

5 Eulersche Graphen 35

6 Hamiltonsche Graphen 44

7 Matchings 52

8 Faktoren in Graphen 56

Index 60

1 Einleitung und grundlegende Definitionen

Definition 1.1 *Ein (endlicher)* **Graph** *(engl. graph) G ist ein Paar $(V(G), E(G))$ von Mengen, wobei $V(G)$ eine endliche nichtleere Menge und $E(G)$ eine Menge verschiedener zweielementiger Teilmengen von $V(G)$ ist.*
Die Elemente von $V(G)$ heißen **Knoten** *(oder Ecken) (vertex, node) und die Elemente von $E(G)$* **Kanten** *(edge) von G.*
Schreibweise: $G = (V(G), E(G)) = (V, E)$
$V(G)$*:* **Knotenmenge** *(vertex set) von G mit* $0 < |V| < \infty$
$E(G)$*:* **Kantenmenge** *(edge set) von G mit* $E \subseteq \binom{V}{2}$

Definition 1.2 *Die Anzahl $|V(G)|$ der Knoten von G heißt* **Ordnung** *(order) von G und die Anzahl $|E(G)|$ der Kanten von G* **Größe** *(size) von G.*

Schreibweise: $|V(G)| = |V_G| = |V| = p(G) = p$,
$|E(G)| = |E_G| = |E| = q(G) = q$,
$\{v, w\} = vw = e$ $(v, w \in V,\ e \in E)$ *Kante von G;*
v,w heißen Endknoten von e.

Definition 1.3 *Ist $e = vw$ eine Kante von G, dann verbindet e die Knoten v und w. Diese Knoten v, w heißen dann* **adjazent** *oder* **benachbart** *oder* **verbunden** *(adjacent), geschrieben $v \sim w$. Die Kante e nennt man* **inzident** *(incident) zu v und zu w.*
Zwei Kanten e_1, e_2, die mit demselben Knoten inzidieren, heißen adjazent (adjacent), geschrieben $e_1 \sim e_2$.
Die Menge $N_G(V) = N(v)$ aller Knoten von G, die zu v adjazent sind, heißt **Nachbarschaft** *(neighborhood) von v, also $N_G(V) = \{u : u \in V(G), u \sim v\}$.*

Beispiel 1.1:

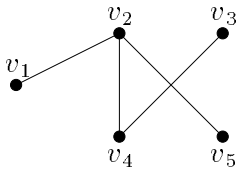
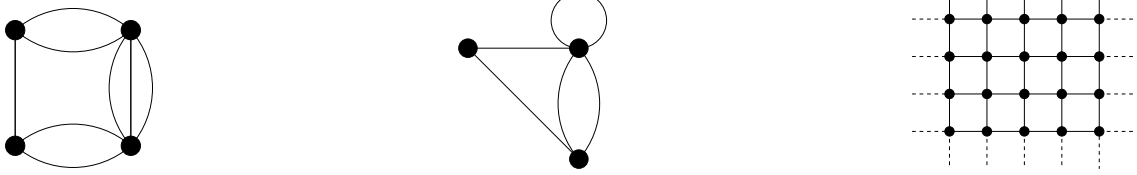


Abbildung 1: $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$, $E = \{v_1v_2, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4\}$, $|V| = 5$, $|E| = 4$, $v_2 \sim v_5$, $v_1v_2 \sim v_2v_5$, $N(v_4) = \{v_2, v_3\}$.

Bemerkung: Graphen sind abstrakt definiert. Das Beispiel enthält eine Darstellung des entsprechenden Graphen in der Ebene.
Wichtig: Klare Unterscheidung zwischen Graph und Darstellung eines Graphen.
Man kann Graphen auch in einer Adjazenzmatrix darstellen.

Definition 1.4 Mehrfache *oder* **parallele Kanten** *(multiple, parallel edges) sind Kanten mit denselben Endknoten.*
Eine **Schlinge** *(loop) ist eine Kante, deren Endknoten zusammenfallen* (e_1, e_2 *parallel* $\Rightarrow e_1 = uv$, $e_2 = uv$; $e = uv$ *Schlinge* $\Rightarrow u = v$).
Ein Graph mit Mehrfachkanten heißt **Multigraph** *(multigraph).*
Ein Graph mit Schlingen und Mehrfachkanten heißt **Pseudograph** *(pseudograph).*
Ein Graph ohne Mehrfachkanten und Schlingen wird auch **schlichter Graph** *(simple graph) genannt.*
Ein Graph mit einer unendlichen Knotenmenge und/oder einer unendlichen Kantenmenge heißt **unendlicher Graph** *(infinite graph).*
Ist in einem unendlichen Graphen die Nachbarschaft jedes Knoten endlich, dann heißt der Graph **lokal endlich** *(locally finite) .*

Beispiel 1.2:



Multigraph Pseudograph lokal endlicher Graph

Abbildung 2: Graphentypen

Anwendungsbeispiele:

1) 5 Personen: A, B, C, D, E
5 Arbeiten: a, b, c, d, e
Gibt es eine Möglichkeit, jeder Person eine geeignete Arbeit zuzuteilen?

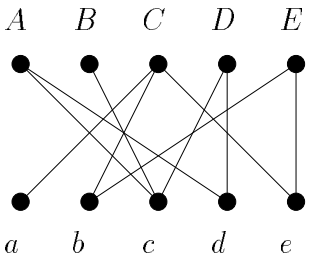


Abbildung 3: Heiratssatz von Hall

Dies ist nicht möglich, da A, B und D zusammen nur für c und d geeignet sind.

2) Atomaufbau für Moleküle (Kekulé-Strukturen)

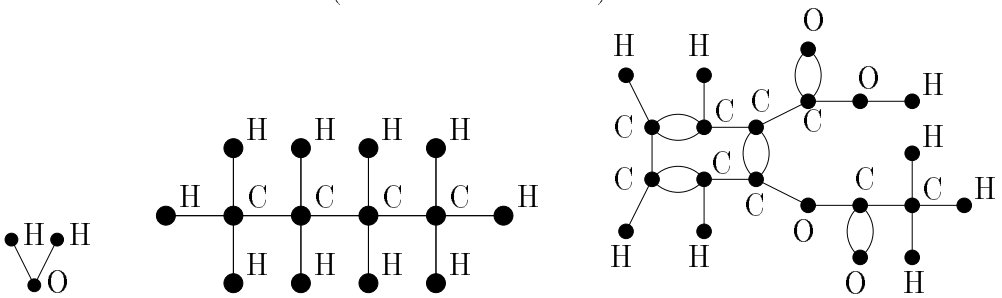


Abbildung 4: Wasser (H_2O), Butan (C_4H_{10}), Aspirin ($C_9H_8O_4$)

(das Diagramm für Aspirin ist ein Beispiel für einen Multigraph)

Definition 1.5 *Der* **Grad** *(die Valenz)* $d_G(v) = d(v)$ *(degree, valency) eines Knoten* v *in einem Graphen* G *ist die Anzahl der zu* v *inzidenten Kanten.*
Ein Knoten vom Grad 0 *heißt* **isolierter Knoten** *(isolated vertex), ein Knoten vom Grad 1* **Endknoten** *(end vertex).*

Satz 1.1 (Handschlaglemma)
Es seien $v_1, \ldots, v_p$ die Knoten eines Graphen G mit q Kanten. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q.$$

Korollar 1.1 *In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades gerade.*

Definition 1.6 *Der* **Minimalgrad** $\delta(G)$ *(minimum degree) bzw. der* **Maximalgrad** $\Delta(G)$ *(maximum degree) von G sind das Minimum bzw. das Maximum der Grade über alle Knoten von G:*

$$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}, \quad \Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$$

Gilt $\delta(G) = \Delta(G) = r$, so heißt G **regulär** *(regular) vom Grad r oder* **r-regulär**.
$(p-1)$-reguläre Graphen heißen **vollständig** *(complete), geschrieben K_p.*
3-reguläre Graphen heißen auch **kubisch** *(cubic).*

Bemerkung: Für den K_p gilt $|V| = p$ und $|E| = q = \binom{p}{2} = \frac{1}{2}p(p-1)$.

Beispiel 1.3:

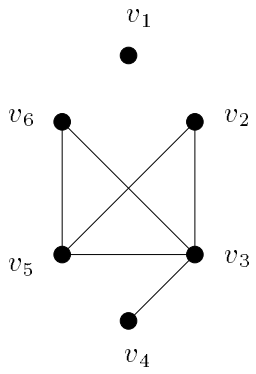


Abbildung 5: $\delta(G) = 0$, $\Delta(G) = 4$, v_1 isolierter Knoten, v_4 Endknoten

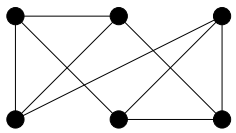


Abbildung 6: 3-regulärer (kubischer) Graph

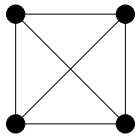
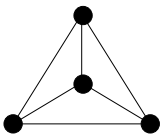


Abbildung 7: K_4



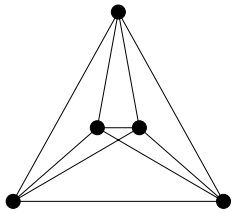


Abbildung 8: K_5

Weiteres Anwendungsbeispiel: Königsberger Brückenproblem
Frage: Gibt es eine Möglichkeit, jede Brücke genau einmal zu überqueren und zum Ausgangspunkt zurückzukehren?
Antwort: NEIN.

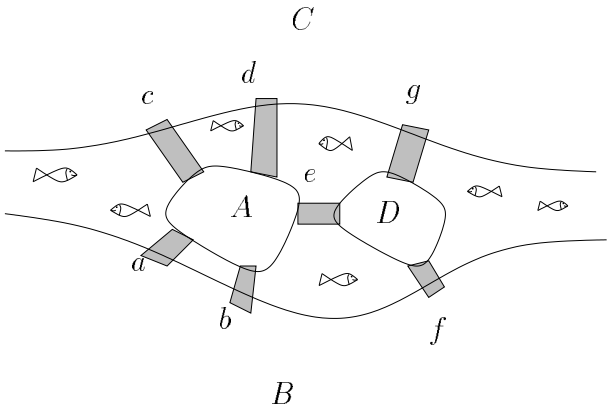


Abbildung 9: Königsberger Brückenproblem

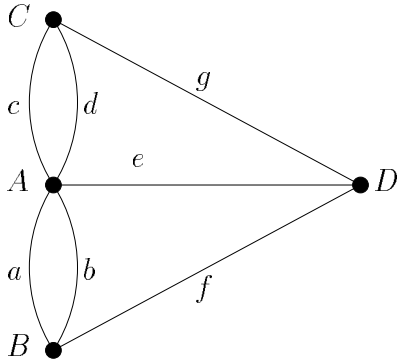


Abbildung 10: Zugeordneter Multigraph

Bemerkung: Ein Multigraph kann genau dann in der vorgegebenen Weise durchlaufen werden (jede Kante genau einmal; Anfangs- gleich Endknoten), wenn er zusammenhängend ist und jeder Knoten geraden Grad hat.

Definition 1.7 *Eine* **Kantenfolge** *(walk) W eines Graphen G ist eine Folge $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{r-1}v_r$ (nicht notwendigerweise verschiedener) Kanten, geschrieben $W = (v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{r-1}v_r)$ oder $W = (v_0, v_1, \ldots, v_r)$. Ihre Länge ist die Anzahl r der Kanten, die sie enthält.*
v_0 heißt **Anfangsknoten** *(initial vertex) und v_r* **Endknoten** *(terminal vertex) der*

Kantenfolge.
Wenn alle Kanten einer Folge verschieden sind, dann heißt die Folge **Kantenzug** *(trail).*
Sind alle Knoten verschieden, dann heißt die Folge **Weg** *(path) P. Ein Weg auf n Knoten wird mit P_n bezeichnet.*
Gilt $v_0 = v_r$, so heißt eine Kantenfolge, ein Kantenzug oder ein Weg **geschlossen** *(closed).*
Einen geschlossenen Weg nennt man auch **Kreis** *(cycle) C (circuit = closed trail, cycle=closed path).*
Ein Kreis heißt **gerade** *(even), wenn er eine gerade Anzahl von Knoten hat, sonst* **ungerade** *(odd) .*

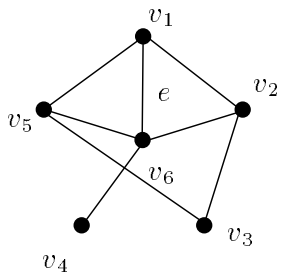
Definition 1.8 *Ein Graph G heißt* **zusammenhängend** *(connected), wenn es zwischen je zwei Knoten von G einen Weg gibt.*
Ein nicht zusammenhängender Graph G besteht aus (mindestens 2) Komponenten (components).
Eine **Komponente** *(component) k(G) von G ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G (maximal connected subgraph).*

Definition 1.9 *Ein* **Teilgraph** *(subgraph) eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ ist ein Graph $H = (V_H, E_H)$ mit $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$, geschrieben $H \subseteq G$.*
Die **Menge aller Teilgraphen** *von G wird mit* **sub G** *bezeichnet.*
Gilt $V_H = V_G$, dann heißt H **aufspannender Teilgraph** *(spanning subgraph) von G.*
Für eine Menge $V' \subseteq V$ von Knoten von G ist der von V' **induzierte Teilgraph** *(induced subgraph) von G derjenige Graph, der V' als Knotenmenge hat und als Kantenmenge diejenigen Kanten von G, die nur mit Knoten aus V' inzidieren.*
Schreibweise: $< V' >$ bzw. $G(V')$ bzw. $G[V']$.
Für eine Menge $E' \subseteq E$ von Kanten von G ist der von E' **induzierte Teilgraph** *$< E' >$ oder $G(E')$ oder $G[E']$ von G der Graph, der aus den Kanten von E' und deren Endknoten besteht.*
Ist e eine Kante von G, dann ist $G-e$ der Teilgraph von G, der dieselbe Knotenmenge wie G und die um e verminderte Kantenmenge hat.
Ist v ein Knoten von G, dann ist $G - v$ der Teilgraph von G, der aus G durch Weglassen des Knotens v und aller mit v inzidenten Kanten entsteht.

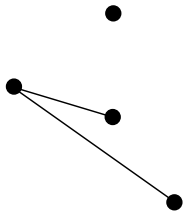
Schreibweisen ($G = (V, E)$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, $v \in V$, $e \in E$):
$G - V' = (V \setminus V', \{v_i v_j \colon v_i v_j \in E, v_i, v_j \notin V'\}) = G[V \setminus V']$

$G - v = (V \setminus \{v\}, \{v_i v_j \colon v_i v_j \in E, v_i, v_j \neq v\}) = G[V \setminus \{v\}]$
$G - E' = (V, E \setminus E')$
$G - e = (V, E \setminus \{e\})$
$G + e = (V, E \cup \{e\})$ mit $e \in \binom{V}{2} \setminus E$

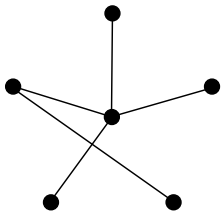
Beispiel 1.4:



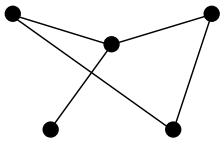
G



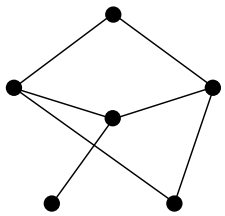
Teilgraph von G
$G \subseteq G$



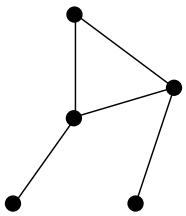
aufspannender
Teilgraph von G



induzierter Teilgraph
$G[V \setminus \{v_1\}]$



$G - e$



$G - v_5$

Abbildung 11: Teilgraphen

Bemerkung: Für Multi- und Pseudographen gelten alle Definitionen analog.

Definition 1.10 *Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ heißt* **Clique** *(clique) in einem Graphen G, wenn der von C induzierte Teilgraph $G[C]$ vollständig ist.*

Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt **unabhängig** *oder* **stabil** *(stable), wenn keine zwei Knoten aus S benachbart sind, d.h. wenn $G[S]$ keine Kanten besitzt.*
Die Mächtigkeit einer maximalen (maximal großen) Clique in einem Graphen G heißt die **Cliquenzahl** *(clique number) $\omega(G)$, die Mächtigkeit einer maximalen stabilen Menge heißt die* **Stabilitäts-** *oder* **Unabhängigkeitszahl** *(stable number) $\alpha(G)$.*

Beispiel 1.5:

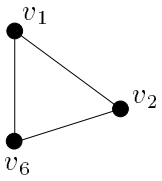


Abbildung 12: Maximale Clique in Graph G aus Beispiel 1.4

Bemerkung: $\omega(K_p) = p$, $\alpha(K_p) = 1$

Satz 1.2
a) $1 \leq \omega(G) \leq \Delta(G) + 1$
b) $\frac{p}{\Delta(G)+1} \leq \alpha(G) \leq p \quad mit\ p = |V(G)|$

Definition 1.11 Nullgraphen *(null graphs) N_p besitzen p isolierte Knoten.*

Bemerkung: Für Nullgraphen bzw. vollständige Graphen gilt in Satz 1.2 a) und b) jeweils die Gleichheit.

Definition 1.12 *Ein Graph heißt* **indiziert** *(labeled), wenn die Knoten voneinander durch Namen unterschieden werden.*

Definition 1.13 *Zwei Graphen G und H heißen* **isomorph** *(isomorphic), in Zeichen $G \cong H$, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihren Knotenmengen gibt, die adjazenzerhaltend ist.*

Bemerkung: Die Isomorphie von Graphen ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 1.6:

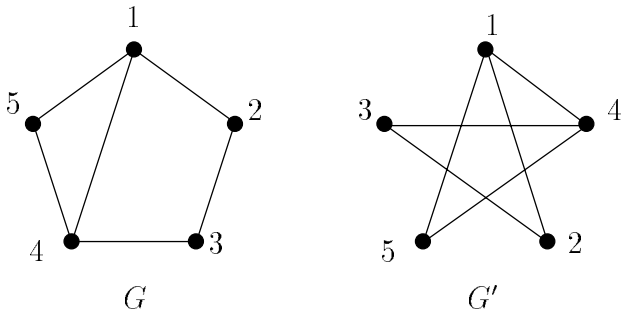


Abbildung 13: $G' \cong G$

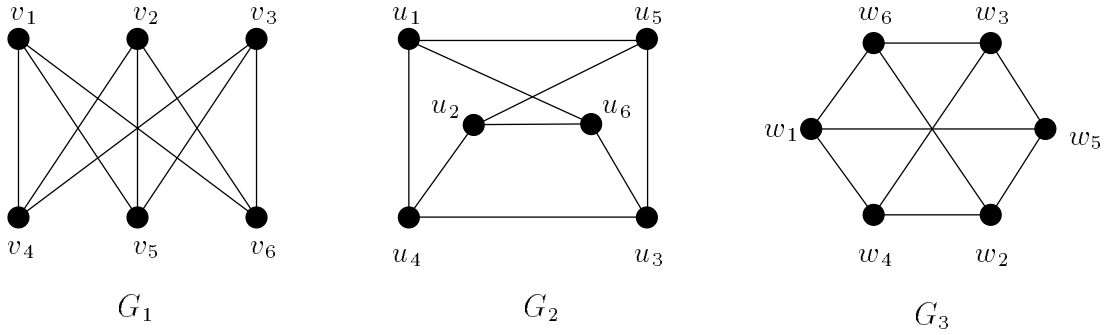


Abbildung 14: $G_1 \cong G_2(v_1 \leftrightarrow u_i)$, $G_1 \cong G_3$, $G_2 \cong G_3$

2 Wichtige Graphenklassen und Operationen für Graphen

Wichtige Graphenklassen

1. **Nullgraphen** (null graphs) N_p: p Knoten, keine Kanten.

$$|V| = p, \quad |E| = 0$$

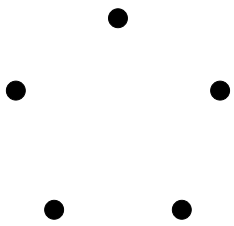


Abbildung 15: N_5

2. **Wege** (paths, path graphs) P_p: Wege der Länge $p-1$

$$|V| = p, \quad |E| = p - 1$$

Abbildung 16: P_5

3. **Kreise** (cycles) C_p: Kreise der Länge p.

$$|V| = |E| = p$$

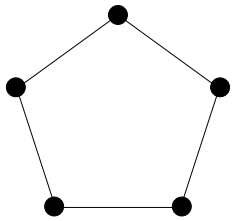


Abbildung 17: C_5

4. **Vollständige Graphen** (complete graphs) K_p: Je zwei Knoten sind adjazent.

$$|V| = p, \quad |E| = \binom{p}{2} = \frac{1}{2}p(p-1)$$

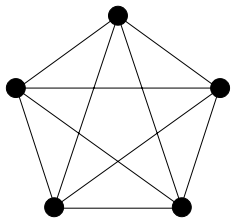


Abbildung 18: K_5

5. **Vollständige bipartite (zweigeteilte, paare) Graphen** (complete bipartite graphs) $K_{m,n}$:
   Jeder Knoten aus V_1 ist zu jedem Knoten aus V_2 adjazent und je zwei Knoten aus einer Teilmenge sind nicht benachbart.
   $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V_1| = m$, $|V_2| = n$,
   $E = V_1 \times V_2 = \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$

$$|V| = m + n, \quad |E| = m \cdot n$$

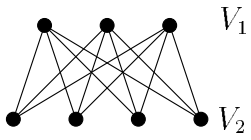


Abbildung 19: $K_{3,4}$

6. **Bipartite Graphen** (bipartite graphs) $G = (V_1, V_2, E)$:
   V_1, V_2 induzieren stabile Mengen in G.
   $V = V_1 \cup V_2$,$V_1 \cap V_2 = \emptyset$,$E \subseteq V_1 \times V_2$

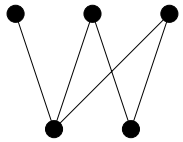


Abbildung 20: bipartiter Graph

Bemerkung: Kreise sind genau dann bipartit, wenn sie gerade sind.

Definition 2.1 *Ein* $u-v-$**Weg** *(u-v path) ist ein Weg mit Anfangsknoten* u *und Endknoten* v*.*

Definition 2.2 *Der* **Abstand** *(distance)* $d(u,v)$ *oder* $dist(u,v)$ *zweier Knoten* $u,v \in V$ *eines Graphen* G *ist die Länge eines kürzesten* $u-v-$*Weges in* G*. Es wird* $d(u,v) = \infty$ *gesetzt, falls es einen* $u-v-$*Weg in* G *nicht gibt.*

Beispiel 2.1:

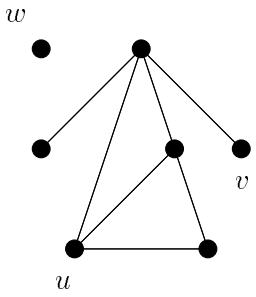


Abbildung 21: $d(u,v) = 2$, $d(w,u) = d(v,w) = \infty$

Satz 2.1 (König 1936) *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine ungeraden Kreise besitzt.*

Satz 2.2 (Erdös 1965) *Jeder Graph* $G = (V,E)$ *enthält einen bipartiten Teilgraphen* B *mit* $q_B \geq \frac{1}{2} q_G$*.*

7. **Multipartite Graphen** (multipartite graphs), **k-partite Graphen** (k-partite graphs) :
   Es existieren nur Kanten zwischen Knoten aus verschiedenen Partitionsmengen.
   $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k, V_i \cap V_j = \emptyset \ \ (i \neq j)$,
   $E \subseteq V_1 \times V_2 \cup V_1 \times V_3 \cup \ldots \cup V_1 \times V_k \cup \ldots \cup V_{k-1} \times V_k$

8. **Vollständige k-partite Graphen** (complete k-partite graphs) $K_{p_1,\ldots,p_k}$:
   Jeder Knoten ist genau zu allen Knoten aus allen anderen Teilmengen adjazent.
   $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \emptyset \ \ (i \neq j)$, $|V_i| = p_i$,
   $E = V_1 \times V_2 \cup V_1 \times V_3 \cup \ldots \cup V_{k-1} \times V_k$

$$|V| = \sum_{i=1}^{k} p_i, \quad |E| = \sum_{1 \leq i < j \leq k} p_i \cdot p_j$$

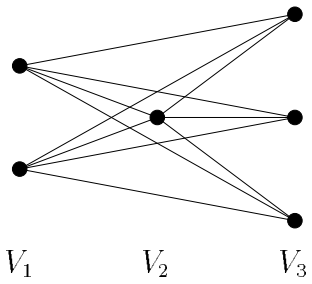


Abbildung 22: $K_{1,2,3}$

9. **Sterne** (stars, star graphs) S_p: $S_p = K_{1,p-1}$

$$|V| = p, \quad |E| = p - 1$$

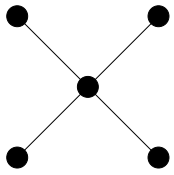


Abbildung 23: S_5

Beachte: Der Index bei der Bezeichnung von Graphenklassen bezieht sich immer auf die Knotenmengen.

10. **Räder** (wheels, wheel graphs) W_p:
Ein Rad W_p besteht aus einem C_{p-1} und einem zusätzlichen Knoten, der zu allen Knoten des Kreises adjazent ist.

$$|V| = p, \quad |E| = 2(p-1)$$

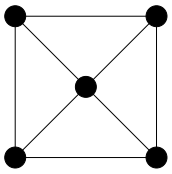


Abbildung 24: W_5

11. **Bäume** (trees, tree graphs) T_p: Zusammenhängende kreislose Graphen der Ordnung p.

$$|V| = p, \quad |E| = p-1$$

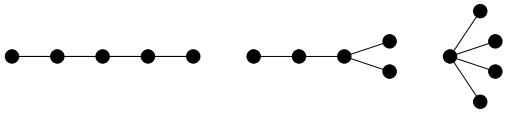


Abbildung 25: Alle Bäume der Ordnung 5

Definition 2.3 *Ein Graph heißt* **kreislos** *(acyclic), wenn er keinen Kreis als Teilgraphen besitzt.*

12. **Platonische Graphen** (Platonic solid graphs):
Ein platonischer Körper ist ein konvexes Polyeder, bei dem alle Seitenflächen reguläre $n-$Ecke sind und an jeder Ecke genau m Flächen zusammenstoßen.
Es gibt genau fünf platonische Körper.

Name	Schläfli-Symbol	p = #Ecken	q = #Kanten	f = #Flächen
T: Tetraeder	$(3,3)$	4	6	4
Q: Würfel	$(4,3)$	8	12	6
O: Oktaeder	$(3,4)$	6	12	8
D: Dodekaeder	$(5,3)$	20	30	12
I: Ikosaeder	$(3,5)$	12	30	20

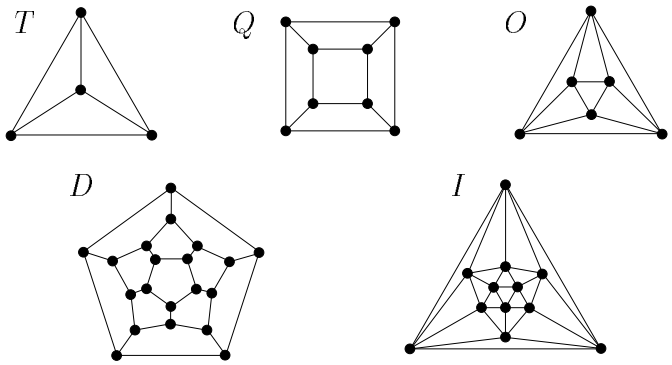


Abbildung 26: Platonische Graphen

13. **d-dimensionale Würfelgraphen** oder **Hyperwürfel** (cube graphs, d-cube, hypercube) Q_d:
Knotenmenge: Menge der Dualzahlen der Länge d (0-1-Vektoren der Länge d).
Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugeordneten Dualzahlen sich an genau einer Stelle unterscheiden.

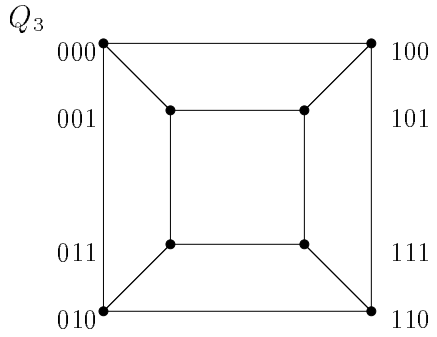


Abbildung 27: Der Würfelgraph Q_3

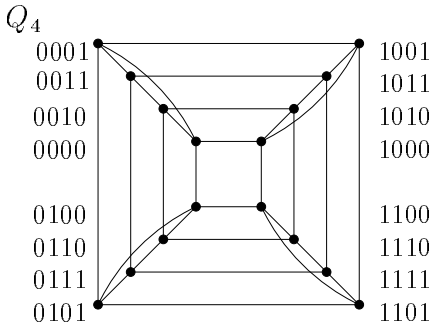


Abbildung 28: Hyperwürfel Q_4

Proposition 2.1 *Der d-dimensionale Hyperwürfel Q_d ist bipartit.*

14. **Petersen-Graph**: 3-regulärer (= kubischer) Graph

$$|V| = 10, \quad |E| = 15$$

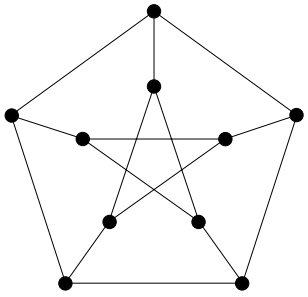


Abbildung 29: Petersen-Graph

Definition 2.4 *Das* **Komplement***(complement)* $\overline{G}$ *eines Graphen* $G = (V, E)$ *ist der Graph* $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. *Gilt* $G \cong \overline{G}$, *dann heißt* G **selbstkomplementär** *(self-complementary)* .

Beispiel 2.2:

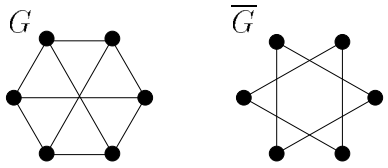


Abbildung 30: Komplement eines Graphen

Operationen für Graphen

Definition 2.5 *Es seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen.*
Die **(disjunkte) Vereinigung** *(union) $G \cup H$ von G und H ist der Graph $G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$.*
Die **Summe** *oder* **Verbindung** *(join) $G + H$ von G und H ist der Graph $G + H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H \cup \{uv : u \in V_G, v \in V_H\})$.*

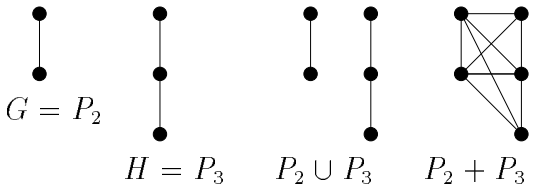


Abbildung 31: Vereinigung und Summe zweier Graphen

Beispiel 2.3:
$K_{m,n} = N_m + N_m = \overline{K_m \cup K_n}$,
$S_p = N_1 + N_{p-1}$,
$W_p = N_1 + C_{p-1}$,
$K_p = K_1 + K_{p-1}$

Definition 2.6 *Für einen zusammenhängenden Graphen G bezeichnet nG den Graphen, der aus n Komponenten besteht, die alle zu G isomorph sind.*

Bemerkung: Jeder Graph kann in der Form $\bigcup_i n_i G_i$ mit $G_i \ncong G_j$ für $i \neq j$ dargestellt werden.

Beispiel 2.4:

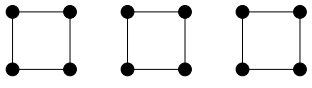


Abbildung 32: $3C_4$

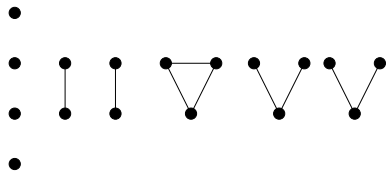


Abbildung 33: $4K_1 \cup 2P_2 \cup K_3 \cup 2P_3 = N_4 \cup 2K_2 \cup C_3 \cup 2K_{1,2}$

Definition 2.7 *Es seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen mit $V_G = \{u_1, u_2, \ldots\}$, $V_H = \{v_1, v_2, \ldots\}$, $V_G \cap V_H = \emptyset$.*
Alle folgenden Operationen für die Graphen G und H ergeben einen Graphen, dessen Knotenmenge das kartesische Produkt $V_G \times V_H = \{(u_i, v_j) : u_i \in V_G, v_j \in V_H\}$ ist.
Zwei Knoten (u_i, v_j) und (u_k, v_l) des **(kartesischen) Produktes** *(cartesian product) $G \times H$ von G und H sind genau dann adjazent, wenn entweder $u_i = u_k$ und $v_j v_l \in E_H$ gilt oder $v_j = v_l$ und $u_i u_k \in E_G$.*
Zwei Knoten (u_i, v_j) und (u_k, v_l) der **Komposition** *(composition) $G[H]$ sind genau dann adjazent, wenn entweder $u_i u_k \in E_G$ oder $u_i = u_k$ und $v_j v_l \in E_H$ gilt.*
Zwei Knoten (u_i, v_j) und (u_k, v_l) der **Konjunktion** *(conjunction) $G \wedge H$ von G und H sind genau dann adjazent, wenn sowohl $u_i u_k \in E_G$ als auch $v_j v_l \in E_H$ gilt.*
Zwei Knoten (u_i, v_j) und (u_k, v_l) der **Disjunktion** *(disjunction) $G \vee H$ von G und H sind genau dann adjazent, wenn $u_i u_k \in E_G$ oder $v_j v_l \in E_H$ gilt.*

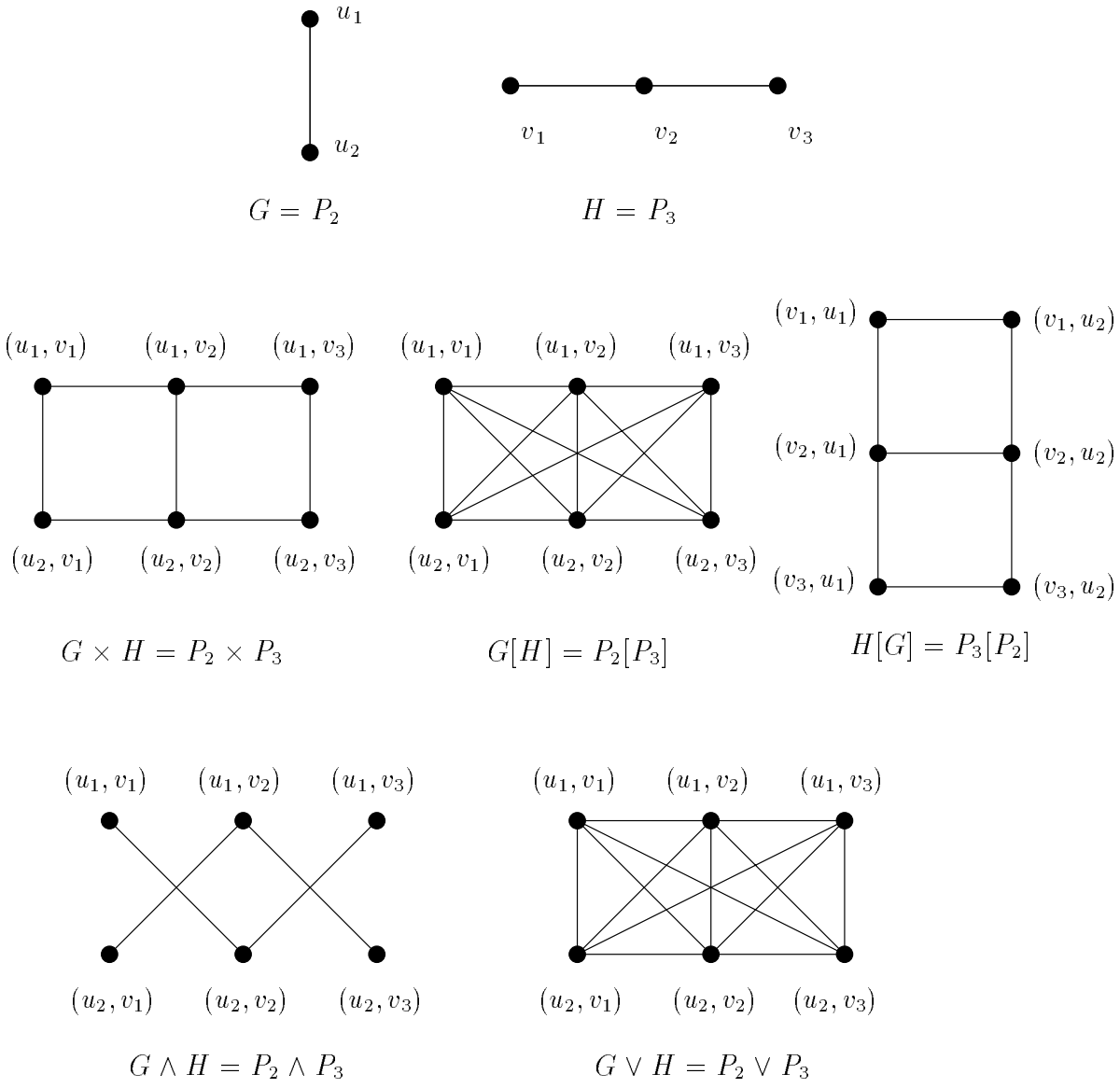


Abbildung 34: Produkt, Komposition, Konjunktion, Disjunktion zweier Graphen

Bemerkung:
1. Der Graph $G \times H$ entsteht, wenn man jeden Knoten von G durch eine Kopie von H ersetzt und entsprechende Knoten in verschiedenen Kopien von H genau dann verbindet, wenn die zugehörigen Knoten in G benachbart sind.
2. Der Graph $G[H]$ entsteht, wenn man jeden Knoten von G durch eine Kopie von

H ersetzt und verschiedene Kopien von H genau dann vollständig bipartit verbindet, wenn die zugehörigen Knoten in G benachbart sind.

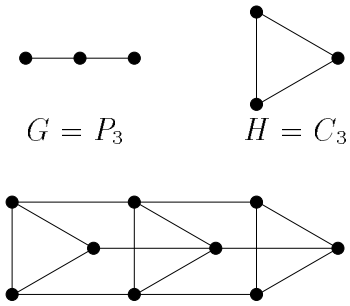


Abbildung 35: $P_3 \times C_3$

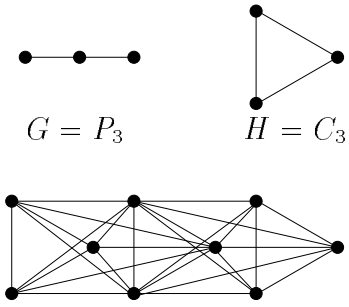


Abbildung 36: $P_3[C_3]$

Satz 2.3 *Für $G = (V_G, E_G)$ mit $|V_G| = p_1$, $|E_G| = q_1$ und $H = (V_H, E_H)$ mit $|V_H| = p_2$, $|E_H| = q_2$ gilt:*

Operation	*Graph*	*# Knoten*	*# Kanten*
Vereinigung	$G \cup H$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2$
Summe	$G + H$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2 + p_1 p_2$
Produkt	$G \times H$	$p_1 p_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_1$
Komposition	$G[H]$	$p_1 p_2$	$p_1 q_2 + p_2^2 q_1$
	$H[G]$	$p_1 p_2$	$p_2 q_1 + p_1^2 q_2$
Konjunktion	$G \wedge H$	$p_1 p_2$	$2 q_1 q_2$
Disjunktion	$G \vee H$	$p_1 p_2$	$p_1^2 q_2 + p_2^2 q_1 - 2 q_1 q_2$

Beispiele für Produktgraphen:
$C_4 = K_2 \times K_2$
$P_r \times P_s$ (zweidimensionale) $(r \times s)-$ Gittergraphen
$Q_1 = K_2$, $Q_d = K_2 \times Q_{d-1}$ Hyperwürfel (rekursiv definiert)

Definition 2.8 *Die* **k-te Potenz** *(kth power) G^k eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^k = (V, \{uv : u, v \in V, d(u, v) \leq k\})$.*

Beispiel 2.5:

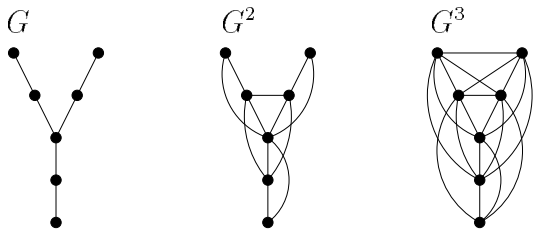


Abbildung 37: Zweite und dritte Potenz eines Graphen

Bemerkung: $G^1 = G$; G^2 heißt auch **Quadrat** von G.

Definition 2.9 *Der* **Kantengraph** *(line graph) $L(G)$ eines Graphen G ist der Graph, dessen Knoten in der Weise bijektiv auf die Kanten von G abgebildet werden können, daß zwei Knoten von $L(G)$ genau dann adjazent sind, wenn die entsprechenden Kanten in G adjazent sind.*

Beispiel 2.6:

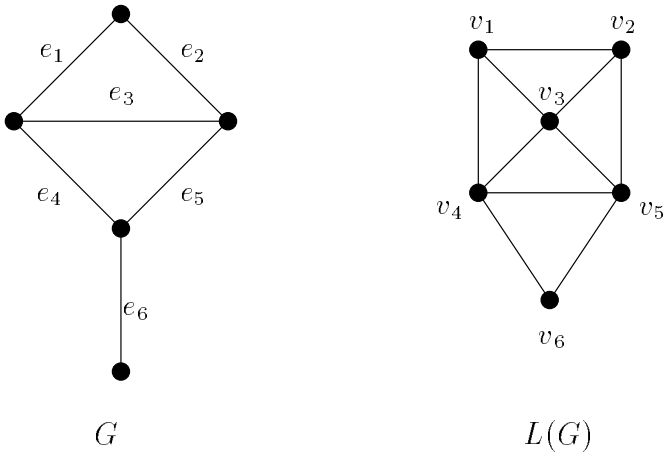


Abbildung 38: Ein Graph G und sein Kantengraph $L(G)$

Bemerkung:

$$p_{L(G)} = q_G, q_{L(G)} = \sum_{v \in V_G} \binom{d_G(v)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V_G} d_G^2(v) - q_G$$

Definition 2.10 *Ein Graph H heißt* **Kantengraph**, *wenn es einen Graphen G mit $L(G) = H$ gibt.*

3 Bäume

Definition 3.1 *Ein kreisloser Graph heißt* **Wald** *(forest),*
ein zusammenhängender, kreisloser Graph heißt **Baum** *(tree).*
Ein Endknoten (also $d(v) = 1$) in einem Baum heißt **Blatt** *(leaf).*

Bemerkungen:

1. Die Komponenten eines Waldes sind Bäume.
2. Die Teilgraphen eines Baumes sind Bäume oder Wälder.

Beispiel 3.1: *Spezielle Bäume*

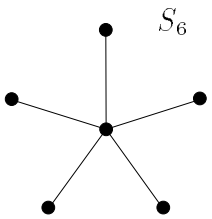


Abbildung 39: Stern (star)

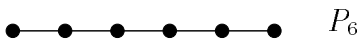


Abbildung 40: Schlange (snake), Weg

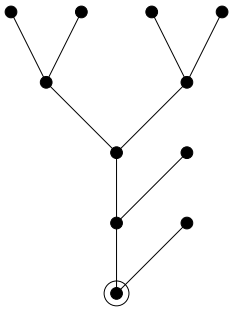


Abbildung 41: Wurzelbaum (rooted tree)

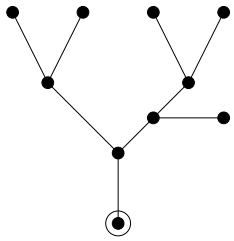


Abbildung 42: Gepflanzter oder Setzbaum (planted tree)

Bemerkungen: Bei einem Wurzelbaum ist ein Knoten als Wurzel ausgezeichnet. Bei einem gepflanzten Baum ist ein Blatt ausgezeichnet.

Proposition 3.1 *Jeder Baum T mit $|V(T)| \geq 2$ hat mindestens zwei Blätter.*

Satz 3.1 *Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = p$, $|E| = q$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *G ist ein Baum.*
2. *Je zwei Knoten von G sind durch genau einen Weg verbunden.*
3. *G ist zusammenhängend, und es gilt $q = p - 1$.*
4. *G ist kreislos, und es gilt $q = p - 1$.*
5. *G ist kreislos, und $G + e$ enthält genau einen Kreis ($e \in \binom{V}{2} \setminus E$, bel.).*
6. *G ist zusammenhängend, $G \ncong K_n$ ($n \geq 3$), $G + e$ enthlt genau einen Kreis.*

Bemerkung: Satz 1.1 (Handschlaglemma) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q = 2(p-1)$
$= 2p - 2 \overset{Schubfachprinzip}{\Rightarrow}$ Proposition 3.1

Korollar 3.1 *Ein Wald F mit $k(F)$ Komponenten hat $q = p - k(F)$ Kanten.*

Korollar 3.2 *Ein Graph G mit $k(G)$ Komponenten enthält genau dann einen Kreis, wenn $q > p - k(G)$.*

Korollar 3.3 (Kirchhoff 1847) *Ein Graph G ist genau dann zusammenhängend, wenn er einen aufspannenden Baum T als Teilgraphen besitzt.*

Definition 3.2 *Ein aufspannender Baum eines zusammenhängenden Graphen G heißt auch* **Gerüst** *(spanning tree) von G. Ein aufspannender Wald eines nicht zusammenhängenden Graphen G heißt* **Skelett** *(spanning forest) von G.*

Korollar 3.4 *Jeder (nicht zusammenhängende) Graph besitzt ein Skelett.*

Satz 3.2 (Cayley 1889) *Die Anzahl der Gerüste des vollständigen Graphen* K_n *ist* $s(K_n) = n^{n-2}$.

Beispiel 3.2:

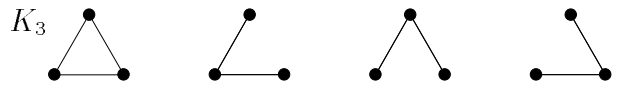


Abbildung 43: $s(K_3) = 3$

Bemerkung: Andere Formulierung des Satzes von Cayley:
Die Anzahl der inzidierten Bäume der Ordnung n ist n^{n-2}.

Unter den Bäumen einer festen Ordnung sind viele isomorph. Wieviele nichtisomorphe Bäume der Ordnung n gibt es?
Sei A_n die Anzahl nichtisomorpher Bäume der Ordnung n.

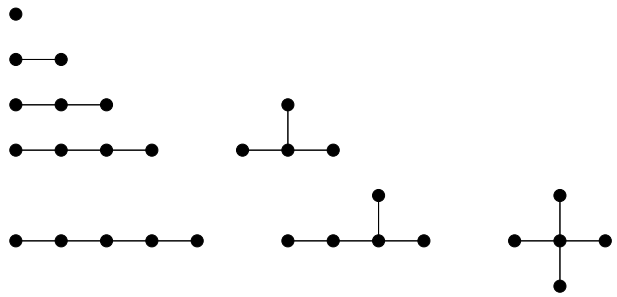


Abbildung 44: Nichtisomorphe Bäume der Ordnung n

Es gilt: $A(1) = 1$, $A(2) = 1$, $A(3) = 1$, $A(4) = 2$, $A(5) = 3$, $A(6) = 6$.

Satz 3.3 *Die Anzahl der Gerüste des vollständigen bipartiten Graphen* $K_{2,n}$ *ist* $s(K_{2,n}) = n2^{n-1}$.

Satz 3.4 *Die Anzahl der Gerüste des vollständigen bipartiten Graphen* $K_{3,n}$ *ist* $s(K_{3,n}) = n^2 3^{n-1}$.

Bemerkungen:

1. $s(K_{1,n}) = 1$
2. Satz 3.3 und Satz 3.4 sind Spezialfälle von $s(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$.
3. $s(W_p) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{p-1} + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{p-1} - 2$

Weitere spezielle Bäume

Definition 3.3 *Ein Baum T heißt* **Doppelstern** *(double star), wenn er genau zwei Knoten enthält, die keine Blätter sind. (Diese zwei Knoten sind notwendigerweise adjazent.) Eine* **Raupe** *(caterpillar) ist ein Baum T mit der Eigenschaft, daß das Entfernen der Blätter von T einen Weg ergibt. Dieser Weg heißt* **Rückgrat** *(spine) der Raupe.*

Bemerkung: Rückrad = $P_1 \Longrightarrow$ Raupe ist Stern Rückrad = $P_2 \Longrightarrow$ Raupe ist Doppelstern

Beispiel 3.3:

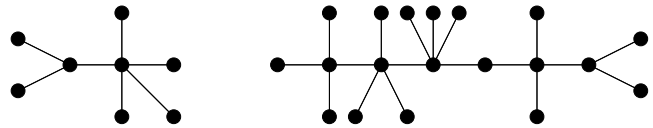


Abbildung 45: Doppelstern, Raupe

Definition 3.4 *Ein* **Hummer** *(lobster) ist ein Baum T mit der Eigenschaft, daß das Entfernen der Blätter von T eine Raupe ergibt.*
Ein **Komet** *(comet) ist ein Baum T mit der Eigenschaft, daß das Entfernen der Blätter von T einen Stern ergibt.*

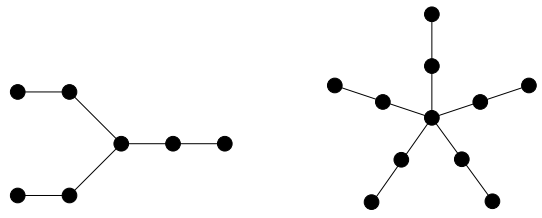


Abbildung 46: Hummer, 5-Komet

4 Zusammenhang

Definition 4.1 *Mit $k = k(G)$ wird die Anzahl der Komponenten von G bezeichnet.*

Satz 4.1 *Es sei G ein Graph und $e \in E(G)$. Dann gilt: $k(G) \leq k(G-e) \leq k(G)+1$.*

Satz 4.2 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e \in E(G)$. Es gilt genau dann $k(G) = k(G - e)$, wenn e zu einem Kreis von G gehört.*

Satz 4.3 *Für die Anzahl der Knoten, Kanten und Komponenten eines Graphen gilt: $p - k \leq q \leq \frac{1}{2}(p - k)(p - k + 1)$.*

Korollar 4.1 *Gilt $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ für einen (schlichten) Graphen G, so ist G zusammenhängend.*

Definition 4.2 *Die Zahl $m(G) = q(G) - p(G) + k(G)$ heißt* **Index** *oder* **Kreisrang** *oder* **zyklomatische Zahl** *(cycle rank, cyclomatic number) des Graphen G.*

Bemerkung: $m(G) \geq 0$ (nach Satz 4.3)

Definition 4.3 *Eine Menge $V' \subset V$ heißt* **trennende Knotenmenge** *von $G = (V, E)$ (vertex cutset, separating set of vertices), wenn $k(G) < k(G - V')$ gilt. Eine Menge $E' \subset E$ heißt* **trennende Kantenmenge** *(cutset, edge cutset), wenn $k(G) < k(G - E')$ gilt.*

Bemerkung: Ist E' inklusionsminimal mit dieser Eigenschaft dan heißt E' auch **Kokreis** (cocycle, bond) von G.

Definition 4.4 *Ein trennender Knoten v heißt* **Artikulation** *oder* **Schnittknoten** *(cut vertex, articulation vertex) von G.*
Eine trennende Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** *(bridge, cut edge, isthmus) von G.*

Definition 4.5 *Ein (nichttrivialer) zusammenhängender Graph ohne Artikulationen heißt* **nichtseparierbarer Graph** *(nonseparable graph) . Ein* **Block** *(block) eines Graphen ist ein maximaler nichtseparierbarer zusammenhängender Teilgraph.*

Bemerkungen:
1. Ein Block ist notwendigerweise ein induzierter Teilgraph.
2. Die Blöcke eines Graphen G bilden eine Partition der Kantenmenge von G.

Beispiel 4.1:

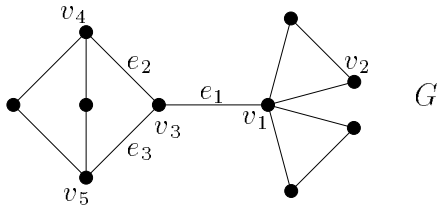


Abbildung 47: e_1: Brücke; e_2: keine Brücke; v_1, v_3: Artikulationen; v_2: keine Artikulation; $\{v_4, v_5\}$: trennende Knotenmenge; $\{e_2, e_3\}$: trennende Kantenmenge

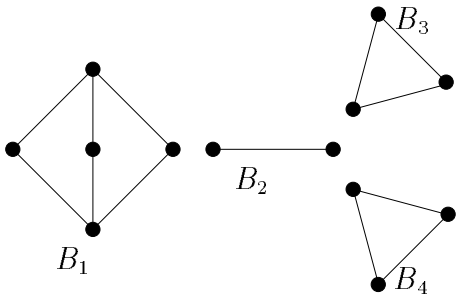


Abbildung 48: Blöcke von G

Bemerkungen: Die Endknoten vom Grad > 1 einer Brücke sind Artikulationen.
Die Menge der mit einem Knoten inzidenten Kanten ist eine trennende Kantenmenge.
Der vollständige Graph enthält keine trennende Knotenmenge (alle anderen nichttrivialen zusammenhängenden Graphen enthalten trennende Knotenmengen).

Satz 4.4 *Es sei v ein Knoten eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *v ist eine Artikulation von G.*

2. *Es existieren $v_1 \neq v$ und $v_2 \neq v$, so daß v auf jedem $v_1 - v_2 - Weg$ liegt.*

3. *Es existiert eine Partition $V \setminus \{v\} = V_1 \cup V_2$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, so daß für je zwei Knoten $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ der Knoten v auf jedem $v_1 - v_2 - Weg$ liegt.*

Satz 4.5 *Es sei e eine Kante eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *e ist eine Brücke von G.*

2. *e liegt nicht auf einem Kreis von G.*

3. *Es existieren $v_1, v_2 \in V$, so daß e auf jedem $v_1 - v_2 - Weg$ liegt.*

4. *Es existiert eine Partition $V = V_1 \cup V_2$, so daß für je zwei Knoten $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ die Kante e auf jedem $v_1 - v_2 - Weg$ liegt.*

Satz 4.6 *Es sei G ein Graph der Ordnung ≥ 3. G ist genau dann nichtseparierbar, wenn je zwei Knoten von G auf einem gemeinsamen Kreis von G liegen.*

Definition 4.6 *Zwei Wege P und P' heißen* **disjunkt** *(knotendisjunkt)(disjoint, vertex disjoint), wenn sie keinen Knoten gemeinsam haben.*
Zwei u-v-Wege eines Graphen G heißen **kreuzungsfrei** *(internally disjoint), wenn sie genau die Knoten u und v gemeinsam haben.*
Zwei Wege heißen **kantendisjunkt** *(edge disjoint), wenn sie keine Kante gemeinsam haben.*

Korollar 4.2 *Es sei G ein Graph der Ordnung ≥ 3. G ist genau dann nicht separierbar, wenn für je zwei Knoten u und v von G zwei kreuzungsfreie $u - v - Wege$ existieren.*

Definition 4.7 *Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ heißt n-***fach zusammenhängend** *(n-fach knotenzusammenhängend) oder n-***zusammenhängend** *(n-connected, n-vertex-connected), wenn jede trennende Knotenmenge von G mindestens n Knoten besitzt.*

Definition 4.8 *Ein zusammenhängender Graph G heißt n-***fach kantenzusammenhängend** *oder n-***kantenzusammenhängend** *(n-edge-connected), wenn jede trennende Kantenmenge von G mindestens n Kanten besitzt.*

Bemerkung: Satz 4.6 charakterisiert die 2-zusammenhängenden Graphen (der Ordnung ≥ 3).

Definition 4.9 *Die* **Zusammenhangszahl** *(Knotenzusammenhangszahl) (connectivity, vertex connectivity)* $\kappa(G)$ *von* G *ist die kleinste Anzahl von Knoten, deren Weglassen einen unzusammenhängenden Graphen oder den trivialen Graphen* $(= N_1)$ *ergibt.*

Definition 4.10 *Die* **Kantenzusammenhangszahl** *(edge connectivity)* $\lambda(G)$ *von* G *ist die kleinste Anzahl von Kanten, deren Weglassen einen unzusammenhängenden Graphen oder den trivialen Graphen* N_1 *ergibt.*

Bemerkungen:

1. $n-$fach zusammenhängende Graphen besitzen für $n \geq 2$ keine Artikulationen, d.h. es sind Blöcke.

2. $G \neq N_1$: $\kappa(G) = 0 \Leftrightarrow$ G unzusammenhängend
   $\kappa(G) = 1 \Leftrightarrow$ G zusammenhängend mit Artikulationen oder $G = K_2$

3. $\lambda(G) = 0 \Leftrightarrow G = N_1$ oder G unzusammenhängend
   $\lambda(G) = 1 \Leftrightarrow$ G zusammenhängend, G enthält Brücken

4. Ist $G \neq K_p$ zusammenhängend, so ist $\kappa(G)$ die Mächtigkeit der kleinsten trennenden Knotenmenge von G;
   $G = K_p : \kappa(G) = p - 1$

5. Ist $G \neq N_1$ zusammenhängend, so ist $\lambda(G)$ die Mächtigkeit der kleinsten trennenden Kantenmenge von G.

Beispiel 4.2:

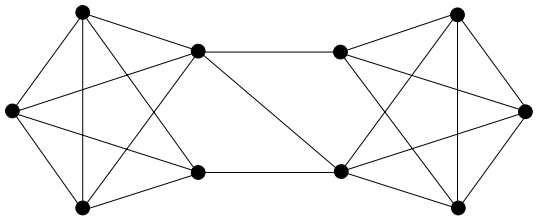


Abbildung 49: $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$, $\delta(G) = 4$

Satz 4.7 (Whitney 1932) *Für jeden Graphen G gilt: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Bemerkung: Für alle ganzen Zahlen a, b, c mit $0 \leq a \leq b \leq c$ existiert ein Graph G mit $\kappa(G) = a$, $\lambda(G) = b$, $\delta(G) = c$.

Definition 4.11 *Sind $U \subset V, W \subset V$ Knotenmengen eines Graphen $G = (V, E)$, so ist ein $U - W-$***Weg** *(U-W path) ein Weg $P = (u = v_1, v_2, \ldots, v_n = w)$ mit $V(P) \cap U = \{u\}$ und $V(P) \cap W = \{w\}$.*
Zwei U-W-Wege heißen **disjunkt** *(disjoint, vertex disjoint), wenn sie keinen Knoten gemeinsam haben.*

Definition 4.12 *$V' \subseteq V$ heißt $U - W-$***trennende Knotenmenge** *(U-W separating set of vertices), wenn jeder $U - W-$Weg einen Knoten aus V' enthält.*
*$V' \subset V \setminus \{u, w\}$ heißt $u - w-$***trennende Knotenmenge**, *wenn jeder $u - w-$Weg einen Knoten aus V' enthält.*

Bemerkung: $v \in U \cap W \Rightarrow v$ ist $U - W-$Weg. U, W selbst sind trennende Knotenmengen.

Satz 4.8 (Menger 1927)
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $U, W \subseteq V$. Die minimale Mächtigkeit einer $U - W-$trennenden Knotenmenge in G ist gleich der maximalen Anzahl paarweise disjunkter $U - W-$Wege in G.

Korollar 4.3 *Es seien u und w zwei nichtbenachbarte Knoten eines Graphen G. Die minimale Mächtigkeit einer $u - w-$trennende Knotenmenge in G ist gleich der maximalen Anzahl paarweise kreuzungsfreier $u - w-$Wege in G.*

Bemerkung: Mitunter wird auch Korollar 4.3 als Satz von Menger bezeichnet.

Beispiel 4.3:

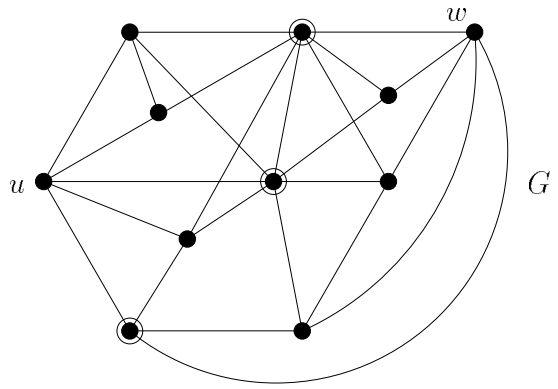


Abbildung 50: Minimale Mächtigkeit einer $u-w-$trennenden Knotenmenge = maximale Anzahl paarweise kreuzungsfreier $u-w-$Wege = 3

Satz 4.9 (Whitney 1932) *Ein (nichttrivialer) Graph G ist genau dann k-fach zusammenhängend, wenn es in G zwischen je zwei Knoten mindestens k paarweise kreuzungsfreie Wege gibt.*

Bemerkung: Satz 4.9 ist eine Verallgemeinrung von Korollar 4.2 (dort $k = 2$).

Satz 4.10 ("Kantenversion des Satzes von Menger") *Es seien u und w zwei Knoten eines Graphen G. Die minimale Mächtigkeit einer $u-w-$trennenden Kantenmenge in G ist gleich der maximalen Anzahl paarweise kantendisjunkter $u-w-$Wege in G.*

Beispiel: Für den Graphen G der Abbildung 4.8 gilt:
Maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter $u-w-$Wege = minimale Mächtigkeit einer $u-w-$trennenden Kantenmenge = 5

Satz 4.11 *Ein (nichttrivialer) Graph G ist genau dann k-kantenzusammenhängend, wenn es in G zwischen je zwei Knoten mindestens k paarweise kantendisjunkte Wege gibt.*

Definition 4.13 *Ist $G \neq K_p$ ein Graph und $t \geq 0$ eine reelle Zahl, so daß $t \leq \frac{|S|}{k(G-S)}$ für alle trennenden Knotenmengen S von G, dann heißt G* **t-tough**. *Das maximale t, so daß G t-tough ist, heißt* **Toughness** *$t(G)$ von G.*

Bemerkungen:

1. $G \neq K_p \Rightarrow t(G) = \min\limits_S \left\{ \dfrac{|\,S\,|}{k(G-S)} \right\}$ (Mimimum über alle trennenden Knotenmengen S von G)
2. $t(G) = 0 \Leftrightarrow$ G unzusammenhängend
3. $t(G) = 1 \Rightarrow$ G 2-zusammenhängend
4. Vollständige Graphen haben keine trennenden Knotenmengen, deshalb wird $t(K_p) = \infty$ definiert.

Beispiel 4.4:

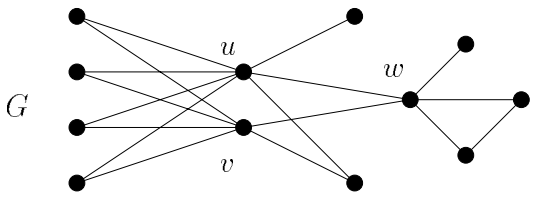


Abbildung 51: $S_1 = \{u, v, w\}$, $S_2 = \{w\}$, $S_3 = \{u, v\}$; $\frac{|S_1|}{k(G-S_1)} = \frac{3}{8}$, $\frac{|S_2|}{k(G-S_2)} = \frac{1}{3}$, $\frac{|S_3|}{k(G-S_3)} = \frac{2}{7}$, Es gibt keine trennende Knotenmenge S von G mit $\frac{|S|}{k(G-S)} < \frac{2}{7}$ $\Rightarrow$ $t(G) = \frac{2}{7}$

Bemerkung: $G \neq K_p$, S trennende Knotenmenge $\Rightarrow \kappa(G) \leq |S|,\ k(G-S) \leq \alpha(G)$

Satz 4.12 (Chvàtal 1973) *Für jeden Graph $G \neq K_p$ gilt:*

$\frac{\kappa(G)}{\alpha(G)} \leq t(G) \leq \frac{1}{2}\kappa(G)$.

Definition 4.14 *Es sei H ein Graph. Ein Graph G heißt H-***frei** *(H-free), wenn G keinen zu H isomorphen induzierten Teilgraph enthält.*

Beispiel 4.5:
1. $H = K_2 \Rightarrow G = N_p$.
2. Bipartite Graphen $G = K_{m,n}$ *sind* C_{2s+1}*-frei.*

Definition 4.15 *Ein Graph, der* $K_{1,3}$*-frei ist, heißt* **tatzen-** *oder* **klauenfrei** *(claw-free).*

Bemerkung: Für klauenfreie Graphen nimmt die Toughness die obere Schranke von Satz 4.12 an.

Satz 4.13 (Matthews, Summer 1984) *Ist* $G \neq K_p$ *ein klauenfreier Graph, so gilt:*

$t(G) = \frac{1}{2}\kappa(G)$.

Andere Maße für "Verwundbarkeit" (vulnerability) von Graphen (außer Zusammenhangszahl und Toughness):

- Integrität (integrity)
- Kanten-Integrität (edge integrity)

5 Eulersche Graphen

Beispiel 5.1: *Königsberger Brückenproblem:*

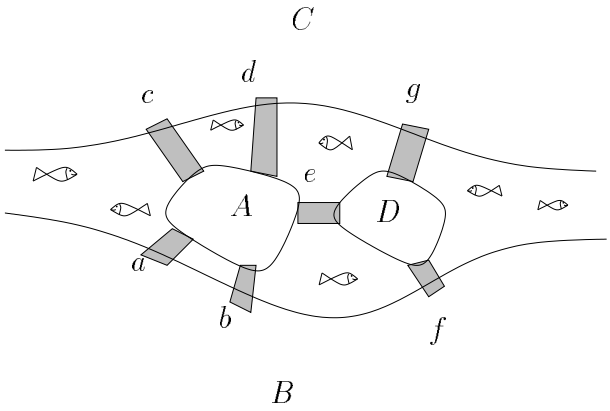


Abbildung 52: Fluß Pregel in Königsberg

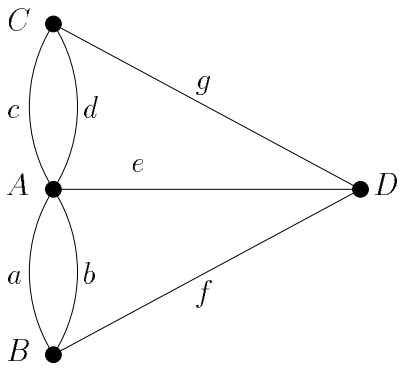


Abbildung 53: Königsberger Brücken–Graph

Definition 5.1 *Existiert in einem Graphen G ein Kantenzug Z, der alle Kanten des Graphen enthält, so heißt G* **semi-eulerscher Graph** *(semi-eulerian graph) und Z* **eulerscher Kantenzug** *(eulerian trail).*
Existiert ein geschlossener eulerscher Kantenzug Z, so heißt Z **Eulertour** *(eulerian circuit) und G* **eulerscher Graph** *(eulerian Graph).*

Bemerkung:

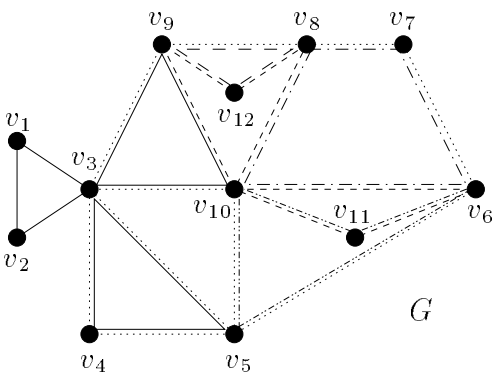
1. Jeder eulersche Graph ist semi-eulersch.
2. Alle Definitionen, Sätze und Beweise lassen sich völlig analog für Pseudographen formulieren.

Satz 5.1 (Euler 1736, Hierholzer 1873) *Ein zusammenhängender Graph G ist genau dann eulersch, wenn jeder Knoten von G geraden Grad hat.*

Algorithmen zur Konstruktion einer Eulertour in einem eulerschen Graphen:

1. Algorithmus von Hierholzer:
G eulerscher Graph, $v_1 \in V(G)$ beliebig.
Konstruiere Kantenzug $Z_1 = (v_1, ..., v_{n_1})$, der nicht mehr fortsetzbar ist.
$d(v)$ gerade $\Rightarrow v_1 = v_{n_1}$
Z_1 Eulertour: fertig.
Andernfalls setze $G_1 = G - E(Z_1)$.
G zusammenhängend $\Rightarrow$ Es existiert $v_2 \in V(Z_1)$, der mit einer Kante aus G_1 inzidiert.
Konstruiere Kantenzug $Z_2 = (v_2, ..., v_{n_2})$, der nicht fortsetzbar ist.
$d_{G_1}(v)$ gerade $\Rightarrow v_2 = v_{n_2}$
Setze Z_1 und Z_2 zu einem geschlossenen Kantenzug Z_{12} von G zusammen:
$Z_{12} = (\underbrace{v_1, ..., v_2}_{Z_1}, ..., Z_2 \underbrace{v_2, ..., v_1}_{Z_1})$
Z_{12} Eulertour: fertig.
Andernfalls Fortsetzung des Verfahrens.

Beispiel:



$Z_1 = (v_1, v_2, v_3, v_1)$
$G_1 = G - \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$
$Z_2 = (v_3, v_4, v_5, v_3, v_9, v_{10}, v_3)$
$Z_{12} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_9, v_{10}, v_3, v_1)$
$G_2 = G - \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{10}v_3, v_3v_1\}$
$v_9 \in V(Z_{12})$ inzidiert mit einer Kante von G_2
$Z_3 = (v_9, v_8, v_7, v_6, v_{10}, v_8, , v_{12}, v_9)$
$Z_{123} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_9, v_8, \ldots,$
$v_{12}, v_9, v_{10}, v_3, v_1)$
$G_3 = G_2 - \{v_9v_8, v_8v_7, \ldots, v_{12}v_9\}$
$v_5 \in V(Z_{123})$ inzidiert mit einer Kante von G_3
$Z_4 = (v_5, v_6, v_{11}, v_{10}, v_5)$
$Z_{1234} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_{11}, v_{10}, v_5, v_3, v_9,$
$\ldots, v_3, v_1)$ ist Eulertour von G

2. Fleurys Algorithmus:
G eulerscher Graph, $v \in V(G)$ beliebig.
Durchlaufe die Kanten von G unter Beachtung folgender zwei Regeln:

(i) Jede Kante wird nach Durchlauf entfernt; ebenso die Knoten, die durch solche Kantenentfernungen isolierte Knoten werden.

(ii) Bei jedem Schritt ist eine Brücke des Restgraphen nur dann zu benutzen, wenn es keine andere Möglichkeit gibt.

Satz 5.2 (Veblen 1912) *Ein zusammenhängender Graph G ist genau dann eulersch, wenn die Kantenmenge von G in Teilmengen $E_i, i = 1, ..., k$ zerlegt werden kann, so daß alle induzierten Teilgraphen $< E_i >$ Kreise sind.*

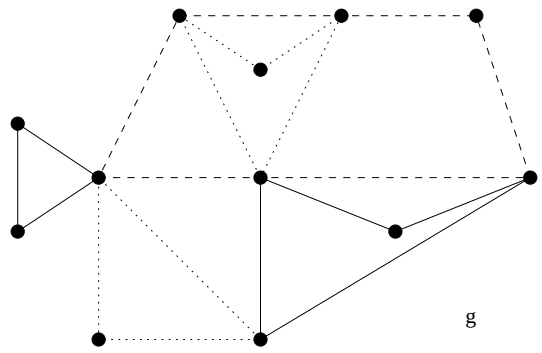


Abbildung 54: Zerlegung der Kantenmenge von G in induzierte Kreise

Bemerkung: G ist also darstellbar als Vereinigung kantendisjunkter Kreise.

Definition 5.2 *Ein Knoten heißt* **gerade** *(even) (bzw.* **ungerade***) (odd), wenn sein Grad gerade (bzw. ungerade) ist.*
Ein Graph heißt **gerade** *(bzw.* **ungerade***), wenn alle seine Knoten gerade (bzw. ungerade) sind.*

Bemerkung: Nach Satz 5.1 sind die eulerschen Graphen genau die nichttrivialen zusammenhängenden geraden Graphen.

Satz 5.3 (Listing 1847, Lucas 1882) *Es sei G ein zusammenhängender Graph mit genau $2n$ Knoten ungeraden Grades ($n \geq 1$). Dann läßt sich $E(G)$ in n disjunkte Kantenzüge zerlegen, aber nicht in weniger als n.*

Korollar 5.1 *Ein zusammenhängender Graph ist genau dann semi-eulersch, wenn er keine oder genau zwei ungerade Knoten besitzt.*

Beispiel 5.2:

1. Haus vom Nikolaus

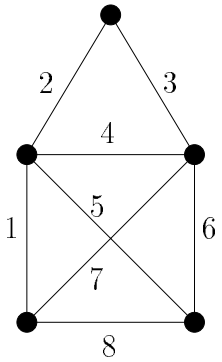


Abbildung 55: Haus-vom-Nikolaus-Graph ist semi-eulersch.

2. Ornament

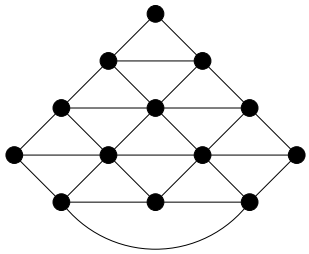


Abbildung 56: Aus einem Stück Draht zu formen? Ja!

3. Tennisplatzgraph

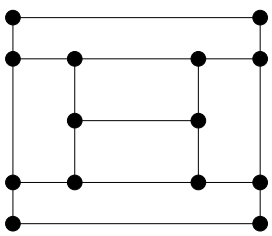


Abbildung 57: Die Kalkmaschine muß 5 mal abgestellt werden.

Korollar 5.2 *Jeder zusammenhängende Graph besitzt eine geschlossene Kantenfolge, in der jede Kante des Graphen genau zweimal vorkommt.*

Einige verwandte Probleme:

1. **Chinesisches Briefträgerproblem**

   Ein Briefträger verläßt sein Postamt, durchläuft die Straßen seines Zustellbezirks mindestens einmal und kehrt am Ende seines Rundgangs zum Ausgangspunkt (dem Postamt) zurück.
   Welche Tour hat er zu wählen, damit er möglichst wenige Straßen mehr als einmal durchläuft?

   Das Problem und die Lösung des Problems in dieser Form stammen von dem chinesischen Mathematiker Mei-Ko Kwan (1960).

   Bemerkung: Ist der entsprechende Graph ein eulerscher Graph, so ist offenbar jede Eulertour optimal (denn dabei wird ja jede Kante genau einmal durchlaufen).

   Definition 5.3 *Eine Kantenfolge in einem zusammenhängenden Graphen G heißt* **überdeckende Kantenfolge** *(covering walk), wenn sie alle Kanten von G enthält.*
   Eine kürzeste geschlossene überdeckende Kantenfolge heißt **Briefträgergang** *(postman's walk).*

   Korollar 5.3 *Für die Länge $b(G)$ eines Briefträgerganges eines Graphen G mit q Kanten gilt: $q \leq b(G) \leq 2q$.*

   Bemerkung: $b(G) = q \Leftrightarrow G$ eulersch

   Satz 5.4 (Mei-Ko Kwan 1960) *Eine geschlossene überdeckende Kantenfolge in einem zusammenhängenden Graphen G ist genau dann ein Briefträgergang, wenn sie keine Kante mehr als zweimal enthält und höchstens die Hälfte der Kanten eines jeden Kreises zweimal enthält.*

   Korollar 5.4 $b(G) = 2q \Leftrightarrow G$ *Baum*

Bemerkungen:

1. Auch für nicht-eulersche Graphen existieren gute Algorithmen zur Bestimmung eines Briefträgergangs.
2. Das chinesische Briefträgerproblem ist auch für bewertete sowie für gerichte und bewertete gerichtete Graphen gelöst.

2. Sub-eulersche Graphen

Definition 5.4 *Ein Graph G heißt* **sub-eulersch** *(sub-eulerian), wenn G aufspannender Teilgraph eines eulerschen Graphen ist.*

Bemerkung: Ein Graph ist also sub-eulersch, wenn man durch Hinzufügen von Kanten einen eulerschen Graphen erhält.

Beispiel 5.3:

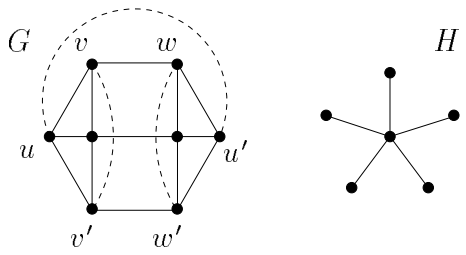


Abbildung 58: G ist sub–eulersch, denn $G + \{uu', vv', ww'\}$ ist eulersch; H ist nicht sub-eulersch

Bemerkungen:

1. $|V(G)| = 2n+1 \Rightarrow G$ sub-eulersch, denn G aufspannender Teilgraph von K_{2n+1} und K_{2n+1} eulersch.
2. G eulersch $\Rightarrow G$ sub-eulersch.

Satz 5.5 *Ein zusammenhängender Graph G ist genau dann sub-eulersch, wenn G keinen aufspannenden ungeraden vollständig bipartiten Teilgraphen enthält.*

3. Super-eulersche Graphen

Definition 5.5 *Ein Graph G heißt* **super-eulersch** *(super-eulerian), wenn G einen aufspannenden eulerschen Teilgraphen besitzt.*

Bemerkung: Ein Graph ist also super-eulersch, wenn man durch Wegnahme von Kanten einen eulerschen Graphen erhält.

Beispiel 5.4:

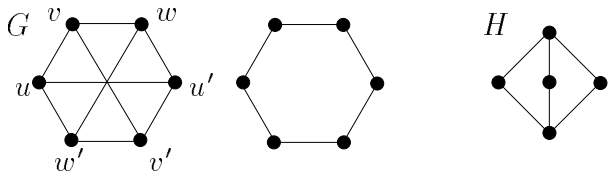


Abbildung 59: $G = K_{3,3}$ ist super-eulersch, denn $G - \{uu', vv', ww'\}$ eulersch; $H = K_{2,3}$ ist nicht super-eulersch.

Bemerkung: G eulersch $\Rightarrow$ G super-eulersch.

Bemerkung: Es gibt bis heute keine vollständigen Charakterisierungen von super-eulerschen Graphen.

Satz 5.6 *Enthält ein Graph G zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume, dann ist G super-eulersch.*

4. Cycle Double Cover Conjecture

Zur Erinnerung:
Satz 5.2: Ein eulerscher Graph ist darstellbar als Vereinigung kantendisjunkter Kreise $C_1, ..., C_k$.
Die Sammlung $C = \{C_1, C_1, C_2, C_2, ..., C_k, C_k\}$ von Kreisen von G hat die Eigenschaft, daß jede Kante von G in genau zwei Kreisen von C ist. Eine solche Sammlung von Kreisen heißt doppelte Kreisüberdeckung.

Definition 5.6 *Eine* **Sammlung** *(collection) C von Kreisen eines Graphen G (Wiederholungen sind zugelassen) mit der Eigenschaft, daß jede Kante von G in genau zwei Kreisen von C ist, heißt* **doppelte Kreisüberdeckung** *(cycle double cover) von G.*

Cycle Double Cover Conjecture (Szekeres 1973, Seymour 1979): Jeder brückenlose Graph besitzt eine doppelte Kreisüberdeckung.

Small Cycle Double Cover Conjecture (Bondy 1990): Jeder brückenlose Graph der Ordnung $p \geq 3$ besitzt eine doppelte Kreisüberdeckung aus weniger als p Kreisen.

6 Hamiltonsche Graphen

Definition 6.1 *Existiert in einem Graphen G ein Weg P, der alle Knoten des Graphen enthält, so heißt G* **semi-hamiltonscher Graph** *(semi-hamiltonian graph, traceable graph) und P* **hamiltonscher Weg** *(hamiltonian path).*
Existiert in G ein Kreis C mit dieser Eigenschaft, so heißt C **hamiltonscher Kreis** *(hamiltonian cycle) und G* **hamiltonscher Graph** *(hamiltonian graph).*

Bemerkungen:
1. G semi-hamiltonsch $\Leftrightarrow$ es existiert ein aufspannender Weg
2. G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ es existiert ein aufspannender Kreis
3. G hamiltonsch $\Rightarrow$ G semi-hamiltonsch
4. Alle Definitionen, Sätze und Beweise gelten ebenso für Pseudographen (denn Mehrfachkanten und Schlingen haben keinen Einfluß darauf, ob ein Graph hamiltonsch ist).
5. Name nach Sir William Hamilton (1805-1865).

Bemerkung: Jeder hamiltonsche Graph ist 2-zusammenhängend.

Definition 6.2 *Eine Menge $\{P_1, ..., P_s\}$ disjunkter Wege in einem Graphen G mit der Eigenschaft, daß jeder Knoten von G auf genau einem dieser Wege liegt, heißt* **Wegüberdeckung** *(path cover) von G. Die minimale Anzahl von Wegen einer Wegüberdeckung heißt* **Wegüberdeckungszahl** *(path cover number) $\pi(G)$ von G.*

Bemerkung: $\pi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ semi-hamiltonsch

Satz 6.1 *Es sei $G = (V, E)$ ein hamiltonscher Graph und $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Dann gilt:*

$$k(G - U) \leq \pi(G - U) \leq |U|.$$

Bemerkung: $k(G - U) \leq |U|$ für alle $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset \Leftrightarrow G$ ist 1-tough

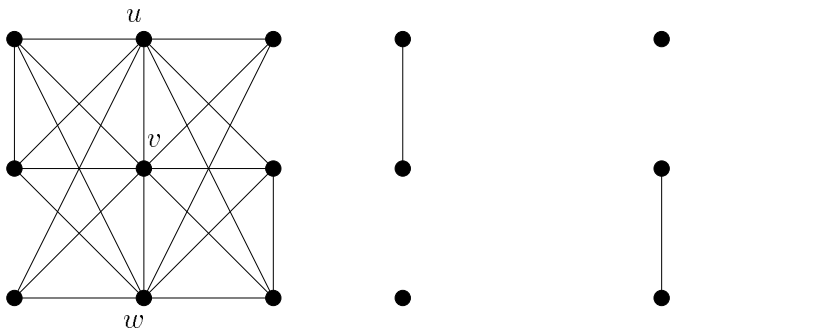
Korollar 6.1 *Jeder hamiltonsche Graph ist 1-tough.*

Definition 6.3 *Ist für jede nichtleere Knotenmenge $U \subseteq V$ eines Graphen $G = (V, E)$ die Ungleichung $\pi(G - U) \leq |U|$ erfüllt, so heißt G* **path-tough**.

Bemerkung: G path-tough $\Rightarrow G$ ist 1-tough

Korollar 6.2 *Jeder hamiltonsche Graph ist path-tough.*

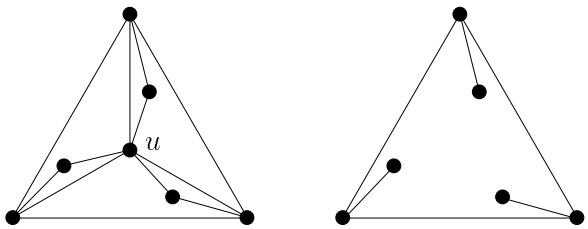
Beispiel 6.1:



G $\qquad\qquad$ $G-U,\ U=\{u,v,w\}$

Abbildung 60: $k(G-U)=4>3=|U| \Rightarrow G$ nicht 1-tough $\Rightarrow G$ nicht hamiltonsch

Beispiel 6.2:



H $\qquad\qquad$ $H-u$

Abbildung 61: $\pi(G-U)=2>1=|\{u\}| \Rightarrow H$ nicht path-tough $\Rightarrow H$ nicht Ham. (H ist 1-tough)

Beispiel 6.3: *Der Petersen-Graph ist 1-tough und auch path-tough, aber nicht hamiltonsch.*

Satz 6.2 *Es sei $G = (V, E)$ ein semi-hamiltonscher Graph und $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Dann gilt:*

$$k(G - U) \leq \pi(G - U) \leq |U| + 1.$$

Satz 6.3 *Ein Graph G ist genau dann path-tough, wenn $G - v$ für jeden Knoten $v \in V(G)$ semi-hamiltonsch ist.*

Satz 6.4 (Bondy, Chvátal 1976) *Es seien u und v nichtadjazente Knoten eines Graphen G der Ordnung p mit $d(u)+d(v) \geq p$. Dann ist G genau dann hamiltonsch, wenn $G + uv$ hamiltonsch ist.*

Definition 6.4 *Die* **Hülle** *(closure) $cl(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ mit $|V(G)| = p$ ist der kleinste Graph H mit den Eigenschaften :*
1. G ist aufspannender Teilgraph von H,
2. $d_H(u) + d_H(v) < p$ für je zwei nichtbenachbarte Knoten u,v in H.

Bemerkung: Abschluß, hamiltonhülle sind Synonyme für Hülle.

Beispiel 6.4:

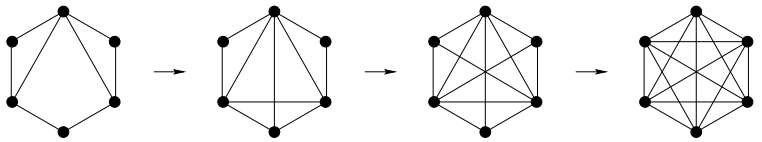


Abbildung 62: Hülle eines Graphen

Satz 6.5 *Sind H_1 und H_2 zwei Graphen, die man aus einem Graphen G der Ordnung p rekursiv dadurch erhält, daß man nicht benachbarte Knoten mit Gradsumme mindestens p durch eine Kante verbindet, so gilt $H_1 = H_2$.*

Bemerkung: Die Hülle eines Graphen ist also wohldefiniert.

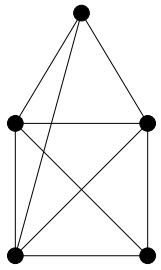
Satz 6.6 (Bondy, Chvátal 1976) *Ein Graph G ist genau dann hamiltonsch, wenn seine Hülle $cl(G)$ hamiltonsch ist.*

Korollar 6.3 (Bondy, Chvátal 1976) *Es sei G ein Graph mit mindestens drei Knoten. Ist $cl(G)$ ein vollständiger Graph, so ist G hamiltonsch.*

Korollar 6.4 (Ore 1960) *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = p \geq 3$. Gilt für je zwei nichtbenachbarte Knoten u und v stets $d(u) + d(v) \geq p$, so ist G hamiltonsch.*

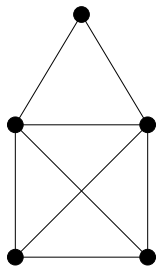
Korollar 6.5 (Dirac 1952) *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = p \geq 3$.*
Gilt $\delta(G) \geq \frac{p}{2}$, so ist G hamiltonsch.

Beispiel 6.5:



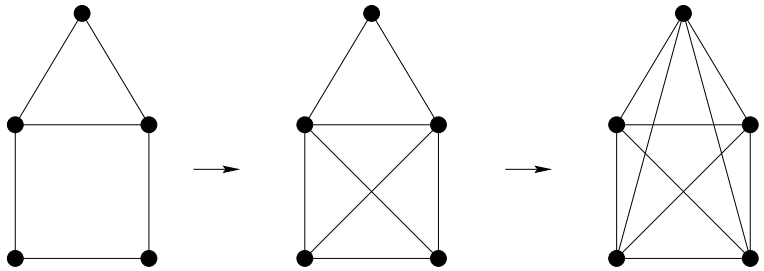
G_1

Abbildung 63: $\delta(G_1) = 3 \geq \frac{5}{2} \Rightarrow G_1$ hamiltonsch (Kor. 6.5)



G_2

Abbildung 64: u, v nicht benachbart $\Rightarrow d(u) + d(v) \geq 5 \Rightarrow G_2$ hamiltonsch (Kor. 6.4)



G'_3 G'_3 $G''_3 = K_5$

Abbildung 65: $cl(G_3) = K_5 \Rightarrow G_3$ hamiltonsch (Kor. 6.3)

Korollar 6.6 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = p \geq 2$. Gilt für je zwei nichtadjazente Knoten u und v stets $d(u) + d(v) \geq p - 1$, so ist G semi-hamiltonsch.*

Satz 6.7 *Es sei $G = K_{p_1,\ldots,p_k}$ ein vollständiger k-partiter Graph mit $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$ der Ordnung $p(G) \geq 3$. Der Graph G ist genau dann hamiltonsch, wenn*

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \geq p_k$$

gilt.

Satz 6.8 (Jung 1978) *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = p \geq 11$, der 1-tough ist. Gilt für je zwei nichtadjazente Knoten u und v stets $d(u) + d(v) \geq p - 4$, so ist G hamiltonsch.*

Satz 6.9 (Dankelmann, Niessen, Schiermeyer 1994) *Es sei G ein Graph mit $|V| = p \geq 3$, der path-tough ist. Gilt $\delta(G) \geq \frac{3p}{6+\sqrt{3}}$ oder $d(u) + d(v) \geq \frac{4(p-1)}{5}$ für je zwei nichtadjazente Knoten u und v, so ist G hamiltonsch.*

Definition 6.5
$\sigma_k(G) = \min\{\sum_{i=1}^{k} d(v_i) : \{v_1, \ldots, v_k\}$ *unabhängige Knotenmenge von* $G\}$

Zusammenfassung obiger und weiterer hinreichender Bedingungen:

Vorauss. G	Vorauss. p	Bed. f. Ham.	Autor
zushgd.	$p \geq 3$	$\sigma_2(G) \geq p$	Ore 1960
1-tough	$p \geq 11$	$\sigma_2(G) \geq p-4$	Jung 1978
path-tough	$p \geq 3$	$\sigma_2(G) \geq \frac{4(p-1)}{5}$	D., N., Sch. 1994
zushgd.	$p \geq 3$	$\sigma_3(G) \geq \frac{3p}{2}$	Bondy 1980
1-tough	$p \geq 13$	$\sigma_3(G) \geq \frac{3p-14}{2}$	Fassbender 1996/97
path-tough	$p \geq 3$	$\sigma_3(G) \geq \frac{(9+\sqrt{3})p}{6+\sqrt{3}}$	D., N., Sch. 1994

Satz 6.10 (Chvátal, Erdös 1972) *Es sei G ein Graph mit mindestens drei Knoten. Gilt $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, so ist G hamiltonsch.*

Einige verwandte Probleme:

1. Hamiltonsch-zusammenhängende Graphen

Definition 6.6 *Ein Graphen G heißt* **hamiltonsch-zusammenhängend** *(hamiltonian-connected), wenn für jedes Paar u, v verschiedener Knoten ein hamiltonscher $u-v$-Weg existiert.*

Bemerkung: G hamiltonsch-zusammenhängend, $|V(G)| \geq 3 \Rightarrow G$ hamiltonsch

Satz 6.11 (Ore 1963) *Ist $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V(G)| = p$ und $d(u)+d(v) \geq p+1$ für alle $u, v \in V(G)$ mit $u \not\sim v$, so ist G hamiltonsch-zusammenhängend.*

2. Panzyklische Graphen

Definition 6.7 *Ein G der Ordnung $p \geq 3$ heißt* **panzyklisch** *(pancyclic), wenn G einen Kreis der Länge n für jedes n mit $3 \leq n \leq p$ enthält.*

Bemerkung: G panzyklisch $RightarrowG$ hamiltonsch

Satz 6.12 (Bondy 1970) *Ist $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V(G)| = p \geq 3$ und $d(u)+d(v) \geq p$ für alle $u, v \in V(G)$ mit $u \not\sim v$, so ist G panzyklisch oder $G = K_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$.*

Bemerkung: Im zweiten Fall ist p also notwendigerweise gerade.

3. Problem des Handlungsreisenden (travelling salesman problem)

Ein Handlungsreisender will eine Rundreise durch p Städte unternehmen und am Ende der Reise wieder in seiner Heimtstadt sein. Welche Reiseroute ist, bei bekannten Entfernungen der Städte zueinander, am günstigsten?

Eine solche Rundreise nennt man **Tour** (tour) und eine günstigste (d. h. in diesem Fall eine mit kürzester Gesamtlänge) **optimale Tour** (optimal Tour)

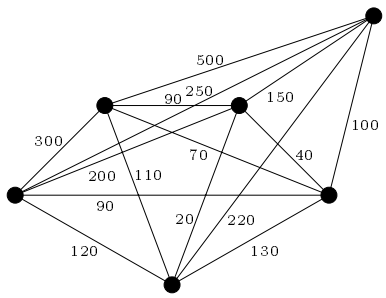


Abbildung 66: Problem des Handlungsreisender

Problem formal definiert:
Gegeben ist ein vollständiger gewichteter Graph K_p (jeder Kante e ist ein Gewicht $w(e)$ zugeordnet), gesucht ist ein hamiltonscher Kreis mit geringstem Gesamtgewicht $\sum w(e)$.

Es ist kein guter Algorithmus (polynomialer Algorithmus) zur Bestimmung einer optimalen Tour bekannt. Wahrscheinlich kann es einen solchen Algorithmus auch nicht geben, denn das TSP ist NP-vollständig.

Das TSP ist ein bekanntes Problem der algorithmischen Graphentheorie bzw. der Optimierung.

Das TSP hat viele Anwendungen, die mit Reiserouten nicht mehr viel zu tun haben.

Beispiel:
In einer Fabrik ist es erforderlich, für n verschiedene Konstruktionsprozesse die vorhandenen Maschinen umzurüsten (d. h. die Knoten sind die Konstruktionsprozesse), das Gewicht $w(e)$ gibt dann für $e = ij$ die Umrüstkosten der Maschinen zwischen den

Konstruktionsprozessen i und j an. Eine optimale Tour ist dann die kostengünstigste Reihenfolge für die Prozesse.

Das Beispiel mit dem Handlungsreisenden ist ein sogenanntes metrisches TSP, denn es gilt $w(ik) \leq w(ij) + w(jk)$ für alle Knoten i, j, k.

Für das metrische TSP gibt es einen guten approximativen Algorithmus, für das allgemeine TSP sehr wahrscheinlich nicht (s. o.).

Asymmetrisches TSP:
Es ist $w(ij) \neq w(ji)$ zugelassen (z. B. bei vollständigen Digraphen).

Weitere Variante:
Statt K_p betrachtet man einen beliebigen zusammenhängenden gewichteten Graphen G.

Hier aber schon die Frage: Gibt es überhaupt eine Tour, d. h. einen hamiltonschen Kreis in G?

7 Matchings

Definition 7.1 *Zwei nichtadjazente Kanten eines Graphen $G = (V, E)$ heißen unabhängige Kanten.*
Eine Menge $M \subseteq E$ paarweise unabhängiger Kanten von G heißt **Matching** *oder* **Paarung** *(matching) in G.*
Ein Matching maximaler Mächtigkeit heißt **maximales Matching** *(maximum matching) in G.*
Ist $V(M)$ die Menge der mit den Kanten aus M inzidenten Knoten, so heißt das Matching **perfekt** *(perfect) bzw.* **fast-perfekt** *(near-perfect), wenn $V(M) = V(G)$ bzw. $|V(M)| = |V(G)| - 1$ gilt.*

Bemerkungen:

1. G besitzt perfektes Matching $\Rightarrow |V(G)|$ gerade
2. M perfekt oder fast-perfekt $\Rightarrow M$ maximal
3. $<M>$ ist 1-regulärer Teilgraph von G.

   M perfekt $\Rightarrow <M>$ 1-regulärer und aufspannender Teilgraph von G.
4. $G' = (V, M) \subseteq G \Rightarrow d_{G'}(v) \leq 1$

Definition 7.2 *Die Mächtigkeit eines maximalen Matchings von G heißt* **Kantenunabhängigkeitszahl** *oder* **Matching-Zahl** *von G (edge independence number, matching number).*

Beispiel 7.1:

1.

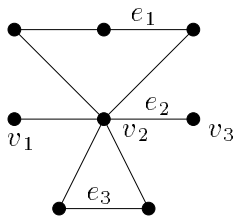


Abbildung 67: $M = \{e_1, e_2, e_3\}$ maximales Matching. Betrachte $\{v_1, v_2, v_3\}$: perfektes Matching kann nicht existieren.

2.

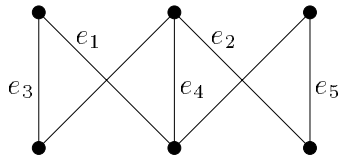


Abbildung 68: $M_1 = \{e_1, e_2\}$ Matching (gesättigt (saturated) = nicht erweiterbar); $M_2 = \{e_3, e_4, e_5\}$ perfektes Matching

Definition 7.3 *M heißt* **Matching** *von $U \subseteq V$, wenn jeder Knoten aus U mit einer Kante aus M inzidiert.*
Die Knoten aus U heißen dann (in M) **gematcht** *(gepaart).*
Die Knoten aus $V(G) \setminus V(U)$ sind ungematcht (ungepaart).

Beispiel:
v_2, v_3 aus Beispiel 7.1.1 sind in M gematcht, v_1 ist ungematcht.

Definition 7.4 *Eine Menge $U \subseteq V$ heißt* **Knotenüberdeckung** *oder* **überdeckende Knotenmenge** *(vertex cover) von $G = (V, E)$, wenn jede Kante von G mit einem Knoten aus U inzident ist.*

Satz 7.1 (König 1931, Egerváry 1931) *Es sei G ein bipartiter Graph. Dann ist die maximale Mächtigkeit eines Matchings in G gleich der minimalen Mächtigkeit einer Knotenüberdeckung von G.*

Bemerkung: Die maximale Mächtigkeit eines Matchings in einem bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ ist durch $\min\{|U|, |W|\}$ beschränkt.

Definition 7.5 *Ein Matching M eines bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ heißt* **vollständig** *(complete), wenn $|M| = \min\{|U|, |W|\}$ gilt.*

Definition 7.6 *Für eine nichtleere Teilmenge $S \subseteq V$ eines Graphen $G = (V, E)$ bezeichnet $N(S)$ (***Nachbarschaft von S***) die Menge der Knoten von G, die zu mindestens einem Knoten aus S adjazent sind:*
$S \subseteq V$, $N(S) = \{v \in V(G) : \exists s \in S$ *mit* $vs \in E(G)\}$.

Bemerkung: Notwendige Bedingung für ein perfektes Matching von $G = (U \cup W, E)$ ist, daß für alle $U' \subseteq U$ gilt: $|N(U')| \geq |U'|$.

Satz 7.2 (P. Hall 1935) *Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit $|U| \leq |W|$. Der Graph G besitzt genau dann ein vollständiges Matching, wenn $|N(U')| \geq |U'|$ für alle $U' \subseteq U$ gilt.*

Bemerkung: $|U| = |W| \Rightarrow$ vollständiges Matching ist perfektes Matching.

Korollar 7.1 *Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein regulärer bipartiter Graph. Dann hat G ein perfektes Matching.*

Bemerkung: Die Regularität ist eine hinreichende Bedingung, sie ist nicht notwendig (vgl. Beispiel 7.1.2).

Korollar 7.2 *Ein bipartiter Graph G läßt sich genau dann in r kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen, wenn er r-regulär ist.*

Satz 7.3 (König 1916) *Ein bipartiter Graph $G = (U \cup W, E)$ kann in $\Delta(G)$ kantendisjunkte Matchings zerlegt werden.*

Anwendungen:

1. **5 Personen, 5 Arbeiten, die Personen sind jeweils für einige der Arbeiten qualifiziert** (s. Anfang der Vorlesung).
   Gibt es eine Möglichkeit, jeder Person eine geeignete Arbeit zuzuteilen?
   Das Problem ist genau dann lösbar, wenn der entsprechende bipartite Graph ein vollständiges Matching besitzt.

2. **Heiratsproblem** (marriage problem)
   $D =$ endliche Menge von Damen, $H =$ endliche Menge von Herren
   Jede der Damen ist bereit, einige der Herren zu heiraten. Unter welchen Bedingungen kann jede der Damen mit einem Herrn ihrer Wahl verheiratet werden?
   Lösung: Wenn jede Menge von k Damen gemeinsam mindestens k Herren als Heiratskandidaten hat.

3. **Stundenplanprobleme** (scheduling problems)
   Bemerkung: Alle Sätze, Definitionen und Korollare dieses Kapitels gelten auch für Pseudographen.

   Schule mit m Lehrern L_i und n Schulklassen K_j.
   $L = \{L_1, ..., L_m\}, K = \{K_1, ..., K_n\}, G = (L \cup K, E)$.
   L_i unterrichtet K_j mit s_{ij} Stunden $\Rightarrow$ s_{ij} Kanten L_iK_j in G.
   Gesucht wird ein Stundenplan, der in kürzester Zeit alle Unterrichtsstunden abdeckt.
   Das Stundenplanproblem ist äquivalent damit, den Graphen G in möglichst wenig kantendisjunkte Matchings zu zerlegen (denn in jeder Zeiteinheit kann ein Lehrer höchstens eine Klasse unterrichten und jede Klasse kann von höchstens einem Lehrer unterrichtet werden).
   Satz 7.3 $\Rightarrow$ Optimaler Stundenplan besteht aus $\Delta(G)$ Zeiteinheiten.

   Literatur: L. Lovász, M. D. Plummer: Matching Theory: Annals of Discrete Mathematics 29, North-Holland, Amsterdam 1986.

8 Faktoren in Graphen

Definition 8.1 *Ein* **Faktor** *(factor) F eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein aufspannender Teilgraph von G.*
Ein **r-Faktor** *ist regulär vom Grad r.*
Ein 1-Faktor heißt auch **linearer Faktor** *(linear factor) und ein 2-Faktor* **quadratischer Faktor** *(square factor).*
G heißt **faktorisierbar** *(factorable) in die Faktoren $F_i = (V, E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, wenn die Faktoren paarweise kantendisjunt sind (also $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$) und $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$, geschrieben $G = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$.*
Eine solche Darstellung von G heißt **Faktorzerlegung***(factorization) von G.*
Sind alle Faktoren regulär vom Grad r, so heißt G **r-faktorisierbar** *und die Zerlegung* **r-Faktorzerlegung** *.*

Bemerkung:

1. F quadratisch, zusammenhängend $\Rightarrow$ F hamiltonscher Kreis
2. F linear $\Rightarrow$ $E(F)$ perfektes Matching
   (oder: M perfektes Matching $\Rightarrow < M >$ linearer Faktor)
3. $|V(G)|$ ungerade $\Rightarrow$ G besitzt keinen 1-Faktor

Beispiel 8.1:

1.

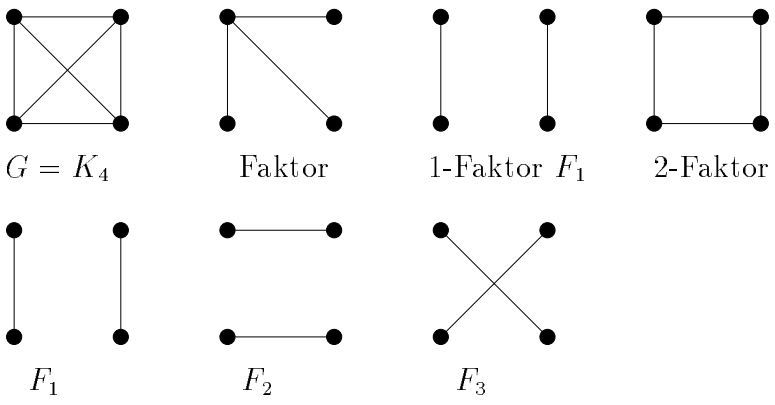


Abbildung 69: $G = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \Rightarrow K_4$ ist 1-faktorisierbar

2.

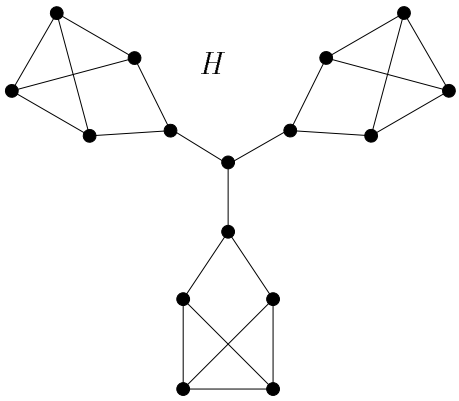


Abbildung 70: $|V(H)|$ gerade, H kubisch, H besitzt keinen 1-Faktor.

Bemerkung: Abbildung 68 zeigt, daß die notwendige Bedingung für die Existenz eines linearen Faktors von G, nämlich $|V(G)|$ gerade, nicht auch hinreichend ist.

Satz 8.1 *Der vollständige Graph K_{2n} ist 1-faktorisierbar.*

Beispiel 8.2:

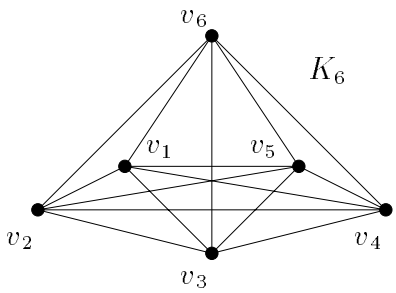


Abbildung 71: K_6

$E_1 = \{v_1v_2, v_3v_5, v_4v_6\}$, $E_2 = \{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_6\}$, $E_3 = \{v_3v_4, v_2v_5, v_1v_6\}$, $E_4 = \{v_4v_5, v_1v_3, v_2v_6\}$, $E_5 = \{v_1v_5, v_2v_4, v_3v_6\}$, $E(K_6) = \bigcup_{i=1}^{5} E_i$, $K_6 = F_1 \oplus ... \oplus F_5$, $E(F_i) = E_i$

Satz 8.2 *Ein bipartiter Graph G ist genau dann 1-faktorisierbar, wenn er regulär ist.*

Definition 8.2 $k_o(G)$ = *Anzahl Komponenten von G mit ungerader Ordnung (o wie odd).*

Satz 8.3 (Tutte 1947) *Ein nichttrivialer Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen 1-Faktor, wenn $k_o(G - S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V(G)$ gilt.*

Beispiel 8.3:

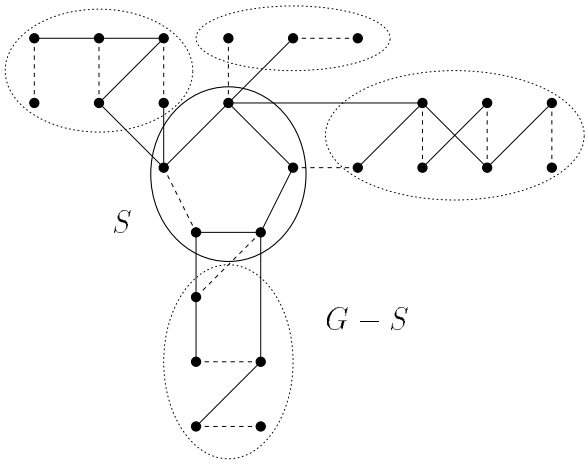


Abbildung 72: Notwendige Bedingung für Existenz eines 1-Faktors: $k_o(G - S) \leq |S|$ (sog. Tutte-Bedingung)

Bemerkung: $S = \emptyset \Rightarrow G$ hat nur Komponenten gerader Ordnung $\Rightarrow G$ hat gerade Ordnung

Satz 8.4 (Petersen 1891) *Ein Graph G ist genau dann 2-faktorisierbar, wenn er $2r$-regulär ($r > 0$) ist.*

Korollar 8.1 *Der vollständige Graph K_{2n+1} ist 2-faktorisierbar.*

Satz 8.5 (Petersen 1891) *Ein kubischer brückenloser Graph G besitzt einen linearen Faktor.*

Korollar 8.2 *Ein kubischer brückenloser Graph G ist faktorisierbar in einen linearen und einen quadratischen Faktor.*

Bemerkungen:

1. Der Graph H aus Abbildung 68 ist kubisch, besitzt Brücken und hat keinen 1-Faktor.

2. Petersen hat gezeigt, daß sich Korollar 8.2 nicht verschärfen läßt, indem er einen brückenlosen kubischen Graphen konstruierte, der nicht in drei lineare Faktoren zu zerlegen ist. Dies ist der wohlbekannte Petersen-Graph.

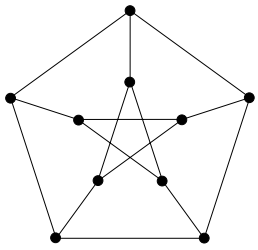


Abbildung 73: Petersen-Graph

Index

$u-v-$weg, 12
überdeckende Kantenfolge, 40
überdeckende Knotenmenge, 53

linearer Faktor, 56

Abstand, 12
acyclic, 14
adjacent, 1
adjazent, 1
Anfangsknoten, 5
articulation vertex, 27
Artikulation, 27
aufspannender Teilgraph, 6

Bäume, 14
Baum, 23
benachbart, 1
bipartite Graphen, 11
bipartite graphs, 11
Blatt, 23
Block, 27
block, 27
bond, 27
Brücke, 27
bridge, 27
Briefträgergang, 40

cartesian product, 18
circuit, 6
Clique, 7
clique, 7
clique number, 8
Cliquenzahl, 8
closed, 6
closure, 46
cocycle, 27
comet, 26
complement, 16
complete, 4
complete bipartite graphs, 11
complete graphs, 11
complete k-partite graphs, 13
component, 6
composition, 18
conjunction, 18
connected, 6
connectivity, 30
coverind walk, 40
cube graphs, d-cube, hypercube, 15
cubic, 4
cut edge, 27
cut vertex, 27
cycle, 6
cycle rank, 27
cycles, 10
cyclomatic number, 27

d-dimensionale Würfelgraphen, 15
degree, 3
disjoint, 29
disjunction, 18
disjunkt, 29
disjunkte Vereinigung, 17
Disjunktion, 18
distance, 12
Doppelstern, 26
doppelte Kreisüberdeckung, 43

edge, 1
edge connectivity, 30
edge disjoint, 29
edge set, 1
end vertex, 3
Endknoten, 3, 5

eulerscher Graph, 35
eulerscher Kantenzug, 35
Eulertour, 35
even, 6

Faktor, 56
faktorisierbar, 56
Faktorzerlegung, 56
fast-perfektes Matching, 52
forest, 23

Gerüst, 24
gerade, 6, 37
geschlossen, 6
Größe, 1
Grad, 3
Graph, 1

H-frei, 33
Hülle, 46
hamiltonian cycle, 44
hamiltonian graph, 44
hamiltonian path, 44
hamiltonian-connected, 49
hamiltonsch-zusammenhängend, 49
hamiltonscher Graph, 44
hamiltonscher Kreis, 44
hamiltonscher Weg, 44
Hummer, 26
Hyperwürfel, 15

incident, 1
Index, 27
indiziert, 8
induced subgraph, 6
induzierte Teilgraph, 6
infinite graph, 2
initial vertex, 5
internally disjoint, 29
inzident, 1
isolated vertex, 3
isolierter Knoten, 3
isomorph, 8
isomorphic, 8
isthmus, 27

join, 17

k-partite graphs, 13
k-partite Graphen, 13
k-te Potenz, 20
Kanten, 1
kantendisjunkt, 29
Kantenfolge, 5
Kantengraph, 21, 22
Kantenmenge, 1
Kantenunabhängigkeitszahl, 52
Kantenzug, 6
Kantenzusammenhangszahl, 30
kartesisches Produkt, 18
klauenfrei, 34
Knoten, 1
Knotenüberdeckung, 53
knotendisjunkt, 29
Knotenmenge, 1
Kokreis, 27
Komet, 26
Komplement, 16
Komponente, 6
Komposition, 18
Konjunktion, 18
Kreis, 6
Kreise, 10
kreislos, 14
Kreisrang, 27
kreuzungsfrei, 29
kth power, 20
kubisch, 4

labeled, 8

leaf, 23
line graph, 21
lobster, 26
locally finite, 2
lokal endlich, 2
loop, 2

Matching, 52
matching, 52
Matching-Zahl, 52
maximal connected subgraph, 6
maximales matching, 52
Maximalgrad, 4
maximum degree, 4
mehrfachkanten, 2
Menger, 31
Minimalgrad, 4
minimum degree, 4
Multigraph, 2
multigraph, 2
multipartite Graphen, 13
multipartite graphs, 13
multiple, parallel edges, 2

n-connected, 29
n-edge-connected, 29
n-fach kantenzusammenhängend, 29
n-fach zusammenhängend, 29
n-kantenzusammenhängend, 29
n-vertex-connected, 29
n-zusammenhängend, 29
Nachbarschaft, 1
Nachbarschaft einer Teilmenge, 54
neighborhood, 1
nichtseparabler, 27
node, 1
nonseparable graph, 27
null graph, 8
null graphs, 10
Nullgraphen, 8, 10

odd, 6
optimale Tour, 50
order, 1
Ordnung, 1

Paarung, 52
pancyclic, 49
panzyklisch, 49
parallele Kanten, 2
path, 6
path cover, 44
path cover number, 44
path-tough, 44
paths, path graphs, 10
perfektes Matching, 52
Petersen-Graph, 16
Platonic solid graphs, 14
platonische Graphen, 14
postman's walk, 40
Problem des Handlungsreisenden, 50
Pseudograph, 2
pseudograph, 2

Quadrat, 21
quadratischer Faktor, 56

r-Faktor, 56
r-faktorisierbar, 56
r-Faktorzerlegung, 56
Räder, 14
Rückgrat, 26
Raupe, 26
regulär, 4
regular, 4

Sammlung, 43
schlichter Graph, 2
Schlinge, 2
Schnittknoten, 27
selbstkomplementär, 16

self-complementary, 16
semi-eulerscher Graph, 35
semi-hamiltonian graph, 44
semi-hamiltonscher Graph, 44
simple graph, 1
simple graph, 2
size, 1
Skelett, 24
spanning subgraph, 6
stabil, 8
Stabilitätszahl, 8
stable, 8
stable number, 8
stars, star graphs, 13
Sterne, 13
sub-eulersch, 41
subgraph, 6
Summe, 17
super-eulersch, 42

t-tough, 33
tatzenfrei, 34
Teilgraph, 6
terminal vertex, 5
Toughness, 33
Tour, 50
tracceable graph, 44
trail, 6
travelling salesman problem, 50
tree, 23
trees, tree graphs, 14
trennende Kantenmenge, 27
trennende Knotenmenge, 27

u-v path, 12
U-W path, 31
U-W separating set of vertices, 31
U-W-trennende Knotenmenge, 31
u-w-trennende Knotenmenge, 31
U-W-Weg, 31
unabhängig, 8
Unabhängigkeitszahl, 8
unendlicher Graph, 2
ungerade, 6, 37
union, 17

valency, 3
Valenz, 3
Verbindung, 17
verbunden, 1
vertex, 1
vertex set, 1
vertex connectivity, 30
vertex cover, 53
vertex disjoint, 29
Verwundbarkeit, 34
vollständig, 4
vollständige bipartite (zweigeteilte, paare) Graphen, 11
vollständige Graphen, 11
vollständige k-partite Graphen, 13
vollständiges Matching, 53
vulnerability, 34

Wald, 23
walk, 5
Weg, 6
Wegüberdeckung, 44
Wegüberdeckungszahl, 44
Wege, 10
wheels,wheel graphs, 14

zusammenhängend, 6
Zusammenhangszahl, 30
zyklomatische Zahl, 27