

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

С. П. ШАРЫЙ

Институт вычислительных технологий СО РАН

Издательство “XYZ” – 2007

Оглавление

Введение	9
Обозначения	16
Глава 1. Интервальные арифметики	20
1.1 Мотивации. Классическая интервальная арифметика . .	20
1.2 Алгебраические свойства интервальных операций	27
1.3 Характеристики интервалов и их свойства	29
1.4 Полная интервальная арифметика	33
1.4a Неформальное обсуждение	33
1.4б Описание полной интервальной арифметики . . .	36
1.4в Минимаксный характер полной арифметики . . .	42
1.5 Комплексные интервальные арифметики	46
1.6 Метрика и топология на интервальных пространствах .	46
1.7 Твины и твинная арифметика	50
1.8 Другие интервальные арифметики	51
1.8a Интервальная арифметика Кахана	51
1.8б Мультиинтервальная арифметика	52
1.8в Сегментные арифметики	53
1.9 Интервалы и другие способы описания неопределённости	56
1.10 Интервальные языки программирования	59
Комментарий к Главе 1	64
Литература к главе 1	68
Глава 2. Интервальные векторы и матрицы	74
2.1 Основные факты	74
2.2 Метрика и топология на интервальных пространствах .	83

2.3	Нормы и спектральный радиус	84
2.4	Неособенные интервальные матрицы	88
2.5	Положительно определённые интервальные матрицы . .	97
2.6	Устойчивые интервальные матрицы	97
2.7	Интервальные M -матрицы и H -матрицы	97
2.8	Спектр интервальных матриц	103
2.9	Вычисление обратных матриц	103
	Комментарий к Главе 2	104
	Литература к главе 2	106

Глава 3. Интервальное оценивание

	областей значений функций	109
3.1	Интервальное расширение функций и его формы	110
3.2	Автоматическое дифференцирование	116
3.3	Наклоны функций и общие центрированные формы . .	119
3.4	Бицентрированные формы	124
3.5	Аффинная интервальная арифметика	127
3.6	Интервальные методы глобальной оптимизации	130
3.6а	Общая схема	131
3.6б	Исследование сходимости	133
3.6в	Модификации	136
3.6г	Способы обработки списка	138
3.6д	Стратегия дробления	139
3.7	Интервальные методы дробления графика	139
3.7а	Одномерная оптимизация	140
3.7б	Многомерный случай	143
3.7в	Градиентные тесты	150
3.8	Стохастические подходы в интервальной оптимизации .	151
3.9	Интервальные методы вычисления минимаксов	152
3.10	Внутреннее оценивание областей значений функции . .	152
	Комментарий к Главе 3	152
	Литература к главе 3	153

Глава 4. Постановки интервальных задач

4.1	Анализ интервально заданных систем	156
4.1а	Описание практической ситуации	156
4.1б	Предварительная постановка задачи	160
4.2	Обобщённые множества решений	163
4.2а	Кванторный формализм	163

4.2б	Интерпретация	172
4.2в	Множества АЕ-решений	174
4.3	Детализация постановки задачи	182
4.3а	Обсуждение	182
4.3б	Что такое “интервальная задача оценивания”? . .	184
4.3в	Задачи, которые будут рассматриваться	188
4.4	Оптимальные решения и их цена	196
	Комментарий к Главе 4	200
	Литература к главе 4	202

Глава 5. Множества решений

	интервальных систем уравнений	208
5.1	Характеризации множеств АЕ-решений	209
5.2	АЕ-решения интервальных линейных уравнений	214
5.2а	Кванторный формализм в линейном случае	214
5.2б	Характеризация и постановки задач	223
5.3	Топологические свойства множеств решений	232
5.4	Распознавание множеств решений	236
5.5	Управляемое множество решений	240
5.6	Интервальные уравнения со связанными параметрами .	248
5.7	Предварительное оценивание множеств решений	252
	Комментарий к Главе 5	253
	Литература к главе 5	253

Глава 6. Решение интервальной

	линейной задачи о допусках	258
6.1	Обсуждение постановки задачи	259
6.2	Строение допустимого множества решений	264
6.3	Грубое исследование разрешимости	271
6.4	Полное исследование разрешимости	275
6.5	Коррекция линейной задачи о допусках	285
6.5а	Коррекция вектора правой части	286
6.5б	Коррекция матрицы системы	288
6.6	Формулы для размеров бруса решения	292
6.7	Переборный алгоритм построения бруса решения	299
6.8	Алгоритмы типа “ветвей и границ”	303
	Комментарий к Главе 6	316
	Литература к главе 6	317

Глава 7. Внешнее оценивание

объединённого множества решений	321
7.1 Подготовительные факты	322
7.2 Интервальный метод Гаусса	325
7.3 Интервальный метод Хаусхолдера	330
7.4 Формальный подход	331
7.5 Интервальный метод Гаусса-Зейделя	339
7.6 Интервальные итерационные методы	344
7.7 Предобуславливание	345
7.8 Процедура Хансена-Блика-Рона	351
7.9 Локальные решатели	352
7.10 Интервальный метод Ньютона	356
7.11 Многомерный интервальный метод Ньютона	358
7.12 Метод Кравчика	361
7.13 Метод Хансена-Сенгупты	364
7.14 Интервальные методы распространения ограничений . .	366
Комментарий к Главе 7	366
Литература к главе 7	369

Глава 8. Доказательное решение

уравнений и систем уравнений	374
8.1 Формулировка задачи	375
8.2 Интервальные методы в решении уравнений	376
8.2a Теоретическая основа	376
8.2b Глобальное решение уравнений	379
8.3 Ревизия постановки задачи	382
8.3a Вычислительно-корректные задачи	382
8.3b Решения уравнений вычислительно некорректно .	383
8.3в ε -решения уравнений	384
8.3г Недостаточность понятия ε -решения	385
8.4 Обзор теории вращения векторных полей	386
8.4a Векторные поля и их гомотопии	387
8.4б Вращение векторного поля	390
8.4в Индексы особых точек	392
8.4г Устойчивость особых точек	393
8.5 Модифицированная постановка задачи	396
8.5a Вычислительно-корректная переформулировка . .	396
8.5б Вычислительная корректность и алгоритмическая разрешимость	399

8.6	Существование решений уравнений и систем уравнений .	401
8.7	Теоретическая основа	407
8.8	Метод Румпа	409
8.9	Вычисление ε -решений	410
8.10	Глобальное решение систем уравнений	412
8.10а	Ограничение области рассмотрения	412
8.10б	Глобальное решение на ограниченных областях .	412
8.10в	Дробление брусов	418
8.10г	Склеивание решений	418
8.10д	Практическая реализация	419
	Комментарий к Главе 8	419
	Литература к главе 8	420

Глава 9. Внешнее оценивание

	обобщённых множеств решений	425
9.1	Формальный подход	425
9.2	Оптимальность внешнего оценивания	431
9.3	Интервальный метод Гаусса-Зейделя	436
9.4	Исследование обобщённого метода Гаусса-Зейделя	440
9.5	Предобуславливание	445
9.6	Внешнее оценивание для нелинейных систем	451
	Комментарий к Главе 9	459
	Литература к главе 9	459

Глава 10. Оптимальное внешнее

	оценивание множеств решений	461
10.1	Пассивный переборный алгоритм	462
10.2	Метод Янссона	466
10.3	Методика Рона	467
10.4	Методы дробления решений	469
10.4а	Решение одномерных включений	470
10.4б	Основной алгоритм	471
10.4в	Доказательство сходимости	478
10.4г	Трудоёмкость методов дробления решений	485
10.5	Модификации методов дробления решений	489
10.5а	Оценивание по знакоопределённым брусам	490
10.5б	Использование локальных решателей	492
10.5в	Новая стратегия дробления	493
10.5г	Итоговая схема	496

10.6	Методы дробления параметров	500
10.6а	Общая схема методов	500
10.6б	Решение линейных систем	502
10.7	Модификации методов дробления параметров	510
10.7а	Тест на монотонность	510
10.7б	Стратегия дробления	513
10.7в	Модификация Рона	515
10.7г	Влияние базового алгоритма	526
10.7д	Отсев бесперспективных записей	528
10.7е	Итоговая схема	529
10.7ж	Численные эксперименты	534
10.8	Последовательно гарантирующие алгоритмы	539
10.9	Решение интервальных линейных систем со связями	546
10.9а	Теория	547
10.9б	Тест на монотонность	553
10.9в	Стратегия дробления	557
10.9г	Численный пример	558
	Комментарий к Главе 10	560
	Литература к главе 10	562
Глава 11.	Внутреннее оценивание множеств решений	567
11.1	Практический пример	567
11.2	Формальный подход для интервальных линейных систем	571
11.3	Формальный подход в общем случае	573
11.4	Максимальность внутренних оценок	579
11.5	Коррекция внутренних оценок	583
11.6	Интервальные системы с неотрицательными матрицами	590
11.6а	Теоретическая основа	590
11.6б	Алгоритм	597
11.6в	Выбор начальной точки	600
11.6г	Численные примеры	601
11.7	“Центровой” подход к внутреннему оцениванию	603
11.7а	Уточнение постановки задачи	605
11.7б	Формула для размеров внутренней оценки	607
11.7в	Вычисление размеров внутренней оценки	612
	Комментарий к Главе 11	617
	Литература к главе 11	618

Глава 12. Численное нахождение формальных решений	621
12.1 Формальные решения треугольных интервальных систем	622
12.2 Погружение в линейное пространство	623
12.2а Зачем погружать?	623
12.2б Определение и основные свойства	624
12.2в Стандартное погружение	630
12.2г Сопутствующие матрицы	633
12.2д Абсолютно неособенные матрицы	635
12.3 Исследование индуцированных уравнений	638
12.3а Выпуклость и субдифференцируемость	642
12.3б Многогранность	646
12.3в Оценки субдифференциалов	650
12.4 Существование формальных решений	653
12.5 Субдифференциальный метод Ньютона	658
12.5а Алгоритм	658
12.5б Доказательство сходимости	660
12.5в Вычисление субдифференциала	666
12.6 Численные примеры	672
12.7 Стационарные одношаговые итерационные методы	674
12.7а Общий подход: расщепление матрицы системы . .	675
12.7б Отщепление вещественного слагаемого	678
12.7в Треугольное расщепление матрицы системы . . .	684
12.8 Численные примеры	687
Комментарий к Главе 12	689
Литература к главе 12	690
Заключение	693
Предметный указатель	699

Введение

Интервалом мы называем замкнутый отрезок вещественной оси, а *интервальная неопределённость* — это состояние неполного (частичного) знания об интересующей нас величине, когда нам известна лишь её принадлежность некоторому интервалу, т.е. мы можем указать лишь границы возможных значений этой величины (либо пределы их изменения). Соответственно, *интервальный анализ* — это отрасль математического знания, исследующая задачи с интервальными неопределённостями и методы их решения.

Можно дать и более развёрнутое определение. Каждая научная дисциплина характеризуется, как известно, своим отдельным *предметом* и собственным специфическим *методом*. На наш взгляд, интервальный анализ — это область знаний на стыке вычислительной математики и информатики,

- предметом которой является решение задач с интервальными (или, более общо, ограниченными) неопределённостями и неоднозначностями в данных, возникающими в постановке задачи, либо в спецификациях на ответ, либо на промежуточных стадиях процесса решения,
- чьей характеристической особенностью является рассмотрение множеств неопределённости как самостоятельных целостных объектов, посредством установления арифметических, аналитических и т.п. операций и отношений между ними.

Интервальный анализ и его специфичные методы имеют, таким образом, наивысшую ценность в задачах, где неопределённости и неоднозначности возникают с самого начала, будучи неотъемлемой частью

постановки задачи. Хотя это никоим образом не исключает других плодотворных применений интервального анализа, в частности, в задачах формулируемых вообще без привлечения интервального языка. Например, в последние десятилетия интервальный анализ получил широчайшее распространение в качестве основы для так называемых *доказательных (надёжных, локализирующих) вычислений* на ЭВМ, *вычислений с гарантированной точностью* и т.п., несмотря на то, что в этих приложениях интервальные методы являются всего лишь вспомогательным средством для решения задач, неинтервальных по своей природе.

Интервальная идея по самой своей сути алгоритмична и требует реализации на вычислительной машине, и потому неудивительно, что в докомпьютерную эпоху развитие интервального анализа не состоялось. Но уже в 50-е годы прошлого века, с появлением и распространением первых ЭВМ, потребность в интервальных методах и оценках стала ощущаться столь остро, что пионерские работы по интервальному анализу появились практически одновременно и независимо в Советском Союзе, США, Японии и Польше.

Современный интервальный анализ и интервальные методы первоначально возникли как средство автоматического учёта ошибок округлений при счёте на ЭВМ с конечной точностью представления чисел (конечной разрядной сеткой). На протяжении ряда лет этот акцент в развитии интервального анализа был доминирующим, и именно так представлена новая научная дисциплина, например, в классической советской “Математической энциклопедии” (1977–85 годы). В некоторых странах (например, в Германии) это обстоятельство со временем повлекло за собой постепенную деформацию научной терминологии. Выявилась, в частности, отчетливая тенденция к устранению самих слов “интервальный”, “интервальность” и т.п., некогда характеризовавших отдельное и целостное научное направление. Взамен предлагается говорить о “надёжных”, “достоверных” или даже просто “научных” вычислениях (соответствующие английские термины — *reliable*, *validated*, *scientific*). Под влиянием этих веяний название специализированного научного журнала *Interval Computations*, возникшего в 1991-м году в СССР как трибуна специалистов по интервальному анализу и его приложениям, было даже изменено в 1995-м году на *Reliable Computing*.

Однако идеи, положенные в основу нового научного направления, оказались гораздо шире чисто “округленческих” приложений. Довольно скоро выяснилось, что нарождающиеся интервальные подходы и модели получают чрезвычайно плодотворное применение как язык опи-

сания некоторого особого класса неопределённостей, — так называемых ограниченных по амплитуде неопределённостей (соответствующие английские термины — *bounded disturbances*, *bounded error approach*, *bounded parameter model* и т.п.). Интервальное представление факторов неопределённости стало привлекать всё большее внимание исследователей и инженеров-практиков как наименее ограничительное и отвечающее широкому классу задач, поскольку во многих прикладных задачах часто нет оснований или недостаточно информации для того, чтобы рассматривать эти факторы как случайные, т.е. подчиняющиеся теоретико-вероятностным моделям. Интервальный анализ и возникшая практически одновременно с ним теория нечётких множеств явились ответом на вызов бурно развивающейся практики, которая требовала развития аппарата для учёта неопределённости нестатистической (или, в общем случае, неизвестной) природы. При этом интервальный анализ способен исследовать содержательные модели, которые основываются на наиболее скудных априорных допущениях о характере неопределённости, когда относительно рассматриваемых величин ничего не известно, кроме их свойства принимать значения из заданных ограниченных множеств.

Характерная черта исследований, в которых интервальный анализ используется для доказательных вычислений на ЭВМ с конечной разрядной сеткой (т.е. для получения математически гарантированных результатов с учётом ошибок округлений) — допущение о малости интервалов изменений “входных” данных, позволяющее во многих случаях осуществлять асимптотический анализ и т.п. Но погрешности вычислений необходимо учитывать при этом во всех без исключения операциях на ЭВМ, формирующих окончательный результат. Существенное влияние на работы по этой тематике оказывают конкретные особенности вычислительных машин и процессоров, их архитектура, языки программирования и пр.

Напротив, в тех работах, где интервальный анализ служит средством для исследования ограниченных по амплитуде неопределённостей, допущение о малости возмущений не работает, размеры “входных” интервалов потенциально могут быть сколь угодно велики, но зато часто предполагается, что все арифметические операции как с точечными (неинтервальными) величинами, так и с интервалами выполняются абсолютно точно. В этом же духе, в основном, выдержана и настоящая книга, посвящённая теоретическому анализу и построению численных алгоритмов решения ряда интервальных алгебраических задач, возник-

кающих в теории автоматического управления, исследовании операций, теории принятия решений, теории идентификации и оценивания параметров, а также ряде смежных дисциплин. Основным объектом рассмотрения в книге являются *интервальные алгебраические задачи*, под которыми понимаются следующие постановки.

Прежде всего, это *интервальная система уравнений* вида

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_1, \\ F_2(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ F_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (1)$$

с интервалами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$, которую мы будем также записывать в краткой форме

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (2)$$

с

$$F = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{a}, x) \\ F_2(\mathbf{a}, x) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{a}, x) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и интервальными векторами

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_l \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}.$$

Для интервальных систем уравнений, у которых количество переменных совпадает с количеством уравнений (т.е. $m = n$), мы будем наряду с (1)–(2) работать и с системами уравнений в так называемой рекуррентной форме, когда вектор неизвестной переменной выделен в левой части “в чистом виде”:

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}, \quad (3)$$

$G(\mathbf{a}, x) = (G_1(\mathbf{a}, x), G_2(\mathbf{a}, x), \dots, G_n(\mathbf{a}, x))^T$. При этом интервальные системы (1)–(3) мы понимаем как *формальные записи*, обозначающие

семейства точечных систем уравнений той же структуры, образованные варьированием параметров $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m$ в пределах соответствующих интервалов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$.

Большая часть результатов книги относится не к общим нелинейным системам (1)–(2), а к более простым (но не менее важным) *интервальным системам линейных уравнений*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2, \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \mathbf{a}_{n1}x_1 + \mathbf{a}_{n2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{nn}x_n = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (4)$$

с интервалами \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_i , или, в краткой форме,

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (5)$$

с интервальной матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и интервальным вектором правой части $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$.

Основной материал книги посвящён решению различных постановок задач, связанных с интервальными системами уравнений (1)–(2) и (4)–(5). Но помимо собственно математических результатов мы также исследуем в Главе 4 процесс постановки и формулировки интервальных задач. Необходимость детального рассмотрения этого вопроса является очень насущной и вызвана его неразработанностью в современном интервальном анализе, а также общей методологической и терминологической запутанностью.

Принятая нами точка зрения состоит в том, что в большинстве случаев некорректно говорить о *решении интервальных уравнений* (или систем уравнений, неравенств и т.п.) вообще. Правильным является вести речь о решении тех или иных *постановок задач*, связанных с интервальными уравнениями (системами уравнений, неравенств и т.п.). В свою очередь, формулировка *постановки* интервальной задачи подразумевает указание, как минимум, *множества решений задачи* и *способа его оценивания*.

В этом отношении ситуация в интервальном анализе отчасти напоминает теорию дифференциальных уравнений, где также избегают говорить о решении просто уравнений самих по себе. Вместо этого исследуются и решаются *задача Коши* или *краевая задача* (для обыкновенных дифференциальных уравнений), *смешанная задача*, *задача*

Дирихле или *задача Неймана* и т.п. (для уравнений в частных производных).

Итак, мы, прежде всего, даём аккуратную и математически корректную формулировку того, что есть постановка интервальной задачи. Одним из первых итогов нашего критического анализа является обобщение понятия *множества решений* для интервальных систем уравнений, неравенств и т.п.

Как мы уже отмечали, исторически интервальный анализ возник из необходимости учета ошибок вычислений и задач чувствительности. Поэтому неудивительно, что на первоначальном этапе своего развития множество решений задачи с интервальными данными понималось как множество всевозможных решений точечных задач с коэффициентами, могущими принимать значения из заданных интервалов.

По мере развития интервальных методов и расширения сферы их приложений постепенно выяснилось, что обыденное понимание множества решений интервальной системы уравнений (неравенств и т.п.) как множества всевозможных решений вещественных систем того же вида с параметрами из указанных интервалов не приложимо в ряде практически важных интервальных задач. Таковой, является, например, *линейная задача о допусках*, осознанная в эконометрии и позже в теории автоматического управления для объектов с интервальными неопределённостями в данных (см. Главу 6). Решение задачи о допусках приводит к необходимости рассмотрения так называемого *допустимого множества решений* интервальных линейных систем, которое является наиболее важным представителем обширнейшего семейства *обобщённых множеств решений* интервальных систем уравнений. Эти множества решений естественным образом возникают в ситуациях, когда различные интервальные параметры задачи подвержены влиянию различных конфликтующих факторов.

Один из основных итогов представляемых в книге исследований — развитие и обоснование эффективных численных методов внешнего и внутреннего оценивания множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений. Хотя столь широкая постановка задачи ранее никем не рассматривалась, отдельные частные задачи оценивания тех или иных множеств решений интервальных уравнений являются достаточно популярными и хорошо изученными.

Структурно настоящая книга состоит из введения, указателя обозначений, собственно основного текста, разбитого на двенадцать глав, ответов на упражнения и списка литературы. О её детальном содер-

жании можно составить представление из оглавления и предисловий к отдельным главам. Каждая из двенадцати глав основного текста книги концентрируется вокруг одной или нескольких родственных основных идей, либо вокруг какой-то одной постановки задачи. Отметим, что у читателя не предполагается никаких предварительных знаний в области интервального анализа, а чтобы придать тексту самодостаточный характер, конспективно даны необходимые результаты из других областей математики и приложений, снабженные подробными литературными ссылками.

Значительная часть изложенного в книге материала читалась автором в виде специальных курсов на математических факультетах Новосибирского и Алтайского государственных университетов, а также на факультете прикладной математики и информатики Университета Жироны (Испания). Большое количество тестовых расчётов и вычислительных экспериментов, результаты которых представлены в книге, были выполнены автором в Новосибирском Центре информационных технологий “УниПро”, за что хотелось бы выразить отдельную признательность его директору И.С. Голосову.

Автор благодарен своим коллегам А.В. Лакееву, В.А. Новикову, Б.С. Добронцу, Д.Г. Бакшееву, В.В. Шайдурову, Г.Г. Меньшикову и Д.В. Ширяеву за плодотворные научные дискуссии, а также академику Ю.И. Шокину за неизменную поддержку в занятиях интервальным анализом.

Обозначения

Наша система обозначений следует, в основном, проекту неформального международного стандарта на обозначения в интервальном анализе, который был выработан в результате интенсивных дискуссий весной 2002 года. В настоящее время его текст доступен в Интернете на многих сайтах, посвящённых интервальным вычислениям (например, на <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int/>). Именно, интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) всюду в тексте обозначаются жирным математическим шрифтом, например, **A**, **B**, **C**, ..., **x**, **y**, **z**, тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Арифметические операции с интервальными величинами — это операции соответствующих интервальных арифметик: либо классической интервальной арифметики \mathbb{IR} (см. §1.1), либо полной интервальной арифметики Каухера \mathbb{KR} (см. §1.5). Наконец, если не оговорено противное, под векторами (точечными или интервальными) всюду понимаются вектор-столбцы.

Другие обозначения

$:=$	левая часть равенства есть обозначение для правой
\Rightarrow	логическая импликация
\Longleftrightarrow	логическая равносильность
\rightarrow	отображение множеств
\mapsto	правило сопоставления элементов при отображении
\leftarrow	оператор присваивания в алгоритмах
$x \in X$	элемент x принадлежит множеству X
$x \notin X$	элемент x не принадлежит множеству X

\emptyset	пустое множество	
$X \cup Y$	объединение множеств X и Y	
$X \cap Y$	пересечение множеств X и Y	
$X \setminus Y$	разность множеств X и Y	
$X \subseteq Y$	множество X включено во множество Y	
$X \times Y$	прямое декартово произведение множеств X и Y	
\circ	знак композиции отображений	
\mathbb{N}	множество натуральных чисел	
\mathbb{Z}	множество целых чисел	
\mathbb{R}	множество вещественных (действительных) чисел	
\mathbb{R}_+	множество неотрицательных вещественных чисел	
\mathbb{C}	множество комплексных чисел	
\mathbb{IR}	классическая интервальная арифметика	20
\mathbb{KR}	полная интервальная арифметика Каухера	33
\mathbb{IC}	комплексная интервальная арифметика	46
\mathbb{R}^n	множество вещественных n -мерных векторов	
\mathbb{IR}^n	множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{IR}	74
\mathbb{KR}^n	множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{KR}	74
$\mathbb{R}^{m \times n}$	множество вещественных $m \times n$ -матриц	
$\mathbb{IR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из \mathbb{IR}	
$\mathbb{KR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из \mathbb{KR}	
\mathcal{EF}	семейство элементарных функций	111
$\operatorname{sgn} x$	знак вещественного числа x	
x^+, x^-	положительная и отрицательная части числа x	40
\underline{a}, \bar{a}	левый и правый концы интервала \mathbf{a}	36
$ \mathbf{a} $	абсолютная величина интервала \mathbf{a}	29
$\langle \mathbf{a} \rangle$	мигнитуда интервала \mathbf{a}	29
$\langle \mathbf{A} \rangle$	матрица сравнения для интервальной матрицы \mathbf{A}	100
$\operatorname{mid} \mathbf{a}$	середина (медиана) интервала \mathbf{a}	76
$\operatorname{wid} \mathbf{a}$	ширина интервала \mathbf{a}	76

$\text{rad } \mathbf{a}$	радиус интервала \mathbf{a}	76
$\text{dev } \mathbf{a}$	отклонение интервала \mathbf{a} от нуля	349
$\text{dual } \mathbf{a}$	дуальный к \mathbf{a} интервал	37
$\text{opp } \mathbf{a}$	противоположный к \mathbf{a} интервал	38
$\text{pro } \mathbf{a}$	правильная проекция интервала \mathbf{a}	37
$\text{vert } \mathbf{a}$	множество крайних точек интервала \mathbf{a}	230
\oplus	“внутреннее” интервальное вычитание	38
\oslash	“внутреннее” интервальное деление	40
$\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-$	положительная и отрицательная части интервала \mathbf{a}	650
$\chi(\mathbf{a})$	функционал Рачека от интервала \mathbf{a}	31
$\sigma(\mathbf{a})$	знак середины интервала \mathbf{a}	31
Ξ_{uni}	объединённое множество решений	178, 220
Ξ_{tol}	допустимое множество решений	178, 220
Ξ_{ctrl}	управляемое множество решений	178, 220, 240
$\Xi_{\alpha\beta}$	множество АЕ-решений типа $\alpha\beta$	220
\mathbf{A}^{-1}	“обратная” интервальная матрица	322
\mathbf{A}^c	характеристическая матрица ИСЛАУ	227
\mathbf{b}^c	характеристический вектор правой части ИСЛАУ	227
$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	метрика в интервальных пространствах	83
$\text{Dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	мультиметрика в интервальных пространствах	83
sti	стандартное погружение	631
$\text{range}_X f$	область значений функции f на множестве X	109
$\text{deg } f$	топологическая степень отображения f	392
$\text{epi } f$	надграфик функции f	646
$\text{hyp } f$	подграфик функции f	646
∂f	субдифференциал функции f	643
∂D	граница множества D	
$\text{int } X$	топологическая внутренность множества X	
$\text{cl } X$	топологическое замыкание множества X	
$\text{ch } X$	выпуклая оболочка множества X	

$\Box X$	интервальная оболочка множества X	75
$\Pi_r(x)$	замкнутый шар радиуса r с центром в точке x	
$\gamma(F, \partial D)$	вращение векторного поля F на границе области D	390
$\text{ind}(x, F)$	топологический индекс нуля x векторного поля F	392
\wedge	минимум в частично упорядоченном множестве	
\vee	максимум в частично упорядоченном множестве	
\mathbb{I}	условная решёточная операция	43
I	единичная матрица соответствующих размеров	
Q^\sim	матрица, сопутствующая для матрицы Q	634
$\ \cdot\ $	векторная или индуцированная матричная норма	84
$\ \cdot\ _u$	u -масштабированная норма	86
$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы A	86
$\text{diag}\{z_1, \dots, z_n\}$	диагональная $n \times n$ -матрица с элементами z_1, \dots, z_n по главной диагонали	
$\mathcal{N}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Ньютона	357
$\mathcal{K}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Кравчика	362
$\mathcal{H}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Хансена-Сенгупты	365

К интервальным векторам и матрицам все введённые выше операции за исключением операции “ $\langle \cdot \rangle$ ” — взятия мигнитуды — будут применяться покомпонентно, так что если, к примеру, $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$ — интервальный вектор, то $\text{mid } \mathbf{a}$ — это вещественный вектор ($\text{mid } \mathbf{a}_i$).

Конец доказательства теоремы или предложения выделяется в тексте стандартным знаком “■”.

Глава 1

Интервальные арифметики

Интервалом $[a, b]$ вещественной оси \mathbb{R} мы называем множество всех чисел расположенных между a и b , включая сами эти числа a и b , т.е.

$$[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}.$$

При этом a и b , называются *концами* интервала $[a, b]$, левым и правым соответственно.

Основным инструментом интервального анализа являются так называемые *интервальные арифметики* — алгебраические системы, формализующие арифметические операции между интервалами как целостными объектами. В этой главе мы даём обзор различных интервальных арифметик и их свойств, уделив особое внимание *полной интервальной арифметике Каухера*, которая играет важнейшую роль в нашей книге, но пока недостаточно известна специалистам.

1.1 Мотивации. Классическая интервальная арифметика

Согласно одному из популярных определений, “...математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира” [5]. В свою очередь, эти количественные отношения выражаются через те или иные величины, которые часто

бывают неточны, имеют неопределённость, неоднозначность и т.п. Соответственно, нам нужен инструмент для работы с такими приближёнными числами, границами ошибок и даже с целыми множествами значений тех или иных величин. Потребность в такого рода технике возникает во множестве самых разнообразных ситуаций, и некоторые наиболее типичные мы перечислим ниже.

Представление чисел. Как в ручных, так и в машинных вычислениях мы, как правило, можем эффективно оперировать объектами с конечной конструктивной сложностью, заменяя любое вещественное число на некоторое его приближение, имеющее конечное число десятичных или двоичных знаков. Например,

$$\frac{1}{3} \approx 0.33333, \quad \sqrt{2} \approx 1.4142, \quad \pi \approx 3.1415926.$$

Тем самым мы допускаем уже в начале наших вычислений некоторую неизбежную ошибку — *ошибку представления* и, кроме того, теряем информацию о том, каким именно приближением, с недостатком или с избытком, является новое значение.

Более корректное представление должно явным образом указывать границу этой ошибки, к примеру, уточняя, что все выписанные нами знаки верны и, таким образом, ошибка не превосходит половины единицы последнего разряда. Другой возможный способ указания интересующей нас ошибки, даже более предпочтительный, состоит в том, чтобы дать пользователю наиболее узкие представимые границы — нижнюю и верхнюю — для интересующей нас величины:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\in [0.33333, 0.33334], \\ \sqrt{2} &\in [1.4142, 1.4143], \\ \pi &\in [3.1415926, 3.1415927]. \end{aligned}$$

Ошибки перевода из одной системы счисления в другую. Многие десятичные числа (к примеру, 0.1) не имеют точного конечного представления среди двоичных или шестнадцатеричных чисел, которыми оперируют современные цифровые вычислительные машины.

Ошибки округления. При выполнении арифметических операций с десятичными числами результат весьма часто не представим тем же числом десятичных знаков и в некоторых ситуациях должен быть округлён. Например,

$$1/0.12345 \approx 8.1004,$$

но включение

$$1/0.12345 \in [8.1004, 8.1005]$$

является более корректным и даёт больше информации.

Физические константы и результаты измерений. Чаще всего они известны неточно. Например, значение гравитационной константы G в законе всемирного тяготения Ньютона принимается обычно равным

$$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1},$$

но более серьёзные источники (например, [21]) указывают ещё стандартное отклонение от этой величины, так что, фактически, имеем целый интервал значений G .

Допуски. Техническим термином *допуск* по определению обозначают “интервал, в котором допускается отклонение числовой характеристики параметра от его номинального (расчётного) значения. Допуски задают на геометрические параметры деталей машин и механизмов (линейные и угловые размеры, форму и расположение поверхностей и др.), на механические, физико-химические и др. параметры (например, электрическое сопротивление, твёрдость, процентное содержание химических элементов в материалах и т.д.)” [5].

“Наиболее широко понятие допуска распространено в машиностроении, где допуски устанавливают для обеспечения необходимого качества изделий и взаимозаменяемости деталей или целых узлов машин и механизмов. Допуск характеризует уровень требований к точности изготовления деталей. От него зависит выбор метода обработки, оборудования и способов контроля и в конечном итоге стоимость изготовления. На практике не стремятся получить идеальные детали, т.к. это невозможно по условиям технологии и методам контроля и необязательно для обеспечения правильной работы машины или механизма. Кроме допуска на

изготовление, устанавливают допуск на изменение характеристик изделий в процессе эксплуатации” [5].

Например, ширина железнодорожной колеи в России (и всех странах бывшего Советского Союза) задаётся допуском 1520 ± 2 мм. Опять-таки, допуск — это интервал допустимых значений величины, в пределах которого обеспечивается “штатное” функционирование устройства, системы и т.п.

Неопределённость и неоднозначность данных. Ограниченные по амплитуде неопределённости.

Внутриматематические потребности. Необходимость оперирования с целыми множествами нередко ощущается в самой математике. Например, известная теорема Брауэра о неподвижной точке

Задачи глобальной оптимизации, в которых требуется, грубо говоря, перебрать и проверить целый континуум значений

Построение математического аппарата для оперирования с целыми множествами, представляющими погрешности, неопределённости и неоднозначности, естественно начать с установления между ними простейших арифметических операций. Прецеденты в математике уже имеются: это, например, сумма Минковского выпуклых множеств [3, 16], которая берётся “по представителям”, так что сумма множеств A и B есть множество всевозможных сумм $a + b$ по всем $a \in A$ и $b \in B$.

Очевидно, что свойства вводимых операций будут зависеть не только от этих операций, но также и от вида множеств, которые мы вовлекаем в операции. При этом желательны

- 1) хорошие алгебраические свойства вводимых операций, как то:
 - коммутативность,
 - ассоциативность,
 - обратимость или какие-нибудь её ослабленные аналоги,
 - и т.п.
- 2) простота описания множеств, т.е. их невысокая конструктивная сложность, если мы собираемся реализовывать наши методики на компьютере.

Выписанными условиями существенно ограничивается класс множеств, на которых можно определить желаемые арифметические операции.

Классическая интервальная арифметика — это алгебраическая система $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$, носитель которой — множество всех вещественных интервалов $\mathbf{a} := [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$, а бинарные операции — сложение, вычитание, умножение и деление — определены “по представителям”, т.е. в соответствии со следующим фундаментальным принципом:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} := \{a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\} \quad (1.1)$$

для всех интервалов \mathbf{a}, \mathbf{b} , таких что выполнение точечной операции $a \star b$, $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$, имеет смысл для любых $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. При этом вещественные числа a отождествляются с интервалами нулевой ширины $[a, a]$, а через $(-\mathbf{a})$ обозначается интервал $(-1) \cdot \mathbf{a}$.

Предложение 1.1.1 *Развёрнутое определение интервальных арифметических операций, равносильное (1.1), задаётся следующими формулами:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \quad (1.3)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}], \quad (1.4)$$

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}] \quad \text{для } \mathbf{b} \not\ni 0. \quad (1.5)$$

Доказательство. Складывая почленно двусторонние неравенства

$$\underline{a} \leq a \leq \bar{a} \quad \text{и} \quad \underline{b} \leq b \leq \bar{b},$$

получим

$$\underline{a} + \underline{b} \leq a + b \leq \bar{a} + \bar{b}. \quad (1.6)$$

Складывая почленно двусторонние неравенства

$$\underline{a} \leq a \leq \bar{a} \quad \text{и} \quad -\bar{b} \leq -b \leq -\underline{b},$$

получим

$$\underline{a} - \bar{b} \leq a - b \leq \bar{a} - \underline{b}. \quad (1.7)$$

Ясно, что полученные оценки для суммы (1.6) и разности (1.7) являются точными. Они совпадают с (1.2) и (1.3).

Для доказательства (1.4) заметим, что функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая правилом $f(a, b) = a \cdot b$, при каждом фиксированном a

принимает минимальное и максимальное значения на концах интервала изменения переменной b . То же самое верно и для экстремумов по $a \in \mathbf{a}$ при фиксированном значении b . Следовательно, для $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$ в самом деле

$$\min\{\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\} \leq a \cdot b \leq \max\{\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\},$$

причём эта оценка достижима с обеих сторон.

Соотношение (1.5) следует из (1.4) и из того, что $a/b = a \cdot (1/b)$. ■

Коль скоро интервалы — это множества, то между ними естественно определяется частичное упорядочение по отношению включения друг в друга:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \text{ и } \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}. \quad (1.8)$$

Как связаны между собой интервальные арифметические операции (1.2)–(1.5) и частичный порядок (1.8)? Имеет место важное свойство монотонности по включению

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}', \mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}'$$

для любых интервалов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$ и любой операции $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$. Оно вытекает непосредственно из (1.1).

Теорема 1.1.1 (основная теорема интервальной арифметики)

Если для рациональной функции $f(x)$ на интервале \mathbf{x} определён результат $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ подстановки вместо её аргументов интервалов их изменения и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики, то

$$\{f(x) \mid x \in \mathbf{x}\} \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

т.е. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ содержит множество значений функции $f(x)$ на \mathbf{x} .

Напомним, что в теории графов *деревом* называют связный неориентированный граф, не содержащий циклов (см., например, [19]). Дерево с одной выделенной вершиной — *корнем* — называется *корневым деревом*. В этом случае остальные вершины дерева — это *листья*, а *высота* корневого дерева — наибольшая из длин путей от корня дерева до его листьев.

Понятие дерева необходимо нам для строгой формализации процесса вычисления значений выражений, и впервые это было сделано советским математиком Л.В. Канторовичем

Доказательство. Оно проводится индукцией по высоте дерева Канторовича рассматриваемого выражения f .

Выражения, для которых дерево Канторовича имеет нулевую высоту, являются ни чем иным как отдельными переменными. Для них справедливость утверждения теоремы очевидна.

Предположим теперь, что теорема уже доказана для всех выражений, имеющих высоту дерева Канторовича не более некоторого натурального n . ■

Станем говорить, что задана *интервальная величина* (интервальный параметр), если имеется переменная, изменяющаяся в пределах некоторого интервала.

Определение 1.1.1 *Интервальные величины $x_1 \in \mathbf{x}_1$, $x_2 \in \mathbf{x}_2$, ..., $x_n \in \mathbf{x}_n$ назовём независимыми (несвязанными), если кортеж из соответствующих переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) принимает любые значения из декартова произведения интервалов их изменения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, т.е. из бруса $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. В противном случае интервальные величины называются зависимыми или связанными.*

Будем говорить также, что на рассматриваемые интервальные величины $x_1 \in \mathbf{x}_1$, $x_2 \in \mathbf{x}_2$, ..., $x_n \in \mathbf{x}_n$ *наложены связи*, если имеются в виду какие-то соотношения для x_1, x_2, \dots, x_n в виде равенств, неравенств и т.п.

Конкретный вид связанности (зависимости) интервальных величин удобно представлять наглядно графически на чертеже, изображающем множество всевозможных значений кортежа (x_1, x_2, \dots, x_n) на фоне декартова произведения $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \dots \times \mathbf{x}_n$. Мы будем называть такие чертежи *диаграммами связанности* (диаграммами зависимости).

К примеру, пусть переменные x_1 и x_2 изменяются так, что имеет место неравенство

$$1 \leq x_1 + 2x_2 \leq 2. \quad (1.9)$$

При варьировании x_1 в пределах $[0, 2]$ переменная x_2 также изменяется в пределах $[0, 1]$, а множество их совместных значений — пар (x_1, x_2) — “заметает” подмножество прямоугольника $[0, 2] \times [0, 1]$. Диаграмма

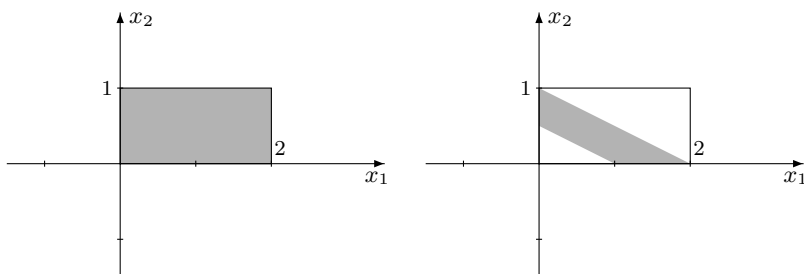


Рис. 1.1. Диаграммы связанности для независимых (слева) и связанных (справа) интервальных величин.

связанности интервальных величин $x_1 \in [0, 2]$ и $x_2 \in [0, 1]$ выглядит в этом случае так, как изображено на правом чертеже Рис. 1.1, а для тех же самых, но независимых $x_1 \in [0, 2]$ и $x_2 \in [0, 1]$ диаграмма связанности представлялась бы полным прямоугольником на левом чертеже Рис. 1.1.

Связанность переменных является весьма распространённым явлением в окружающем нас мире, но в традиционном интервальном анализе задачи со связанными переменными практически не рассматривались. Это было вызвано, прежде всего, тем обстоятельством, что подобные задачи гораздо более сложны, чем обычные постановки с независимыми входными данными, и, кроме того, классическая интервальная арифметика и другие интервальные арифметики, которые являются основным инструментом интервального анализа, нацелены на обработку именно независимых величин. Положение здесь начало меняться лишь в последние годы.

1.2 Алгебраические свойства интервальных операций

Нейтральными элементами относительно сложения и умножения являются в классической интервальной арифметике \mathbb{IR} нуль и единица, соответственно:

$$a + 0 = a,$$

$$a \cdot 1 = a.$$

Кроме того,

$$\mathbf{a} \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Интервальные арифметические операции обладают свойствами:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad \text{— ассоциативность сложения,} \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) \quad \text{— ассоциативность умножения,} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{— коммутативность сложения,} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba} \quad \text{— коммутативность умножения.} \quad (1.13)$$

Но особенностью интервальной арифметики является отсутствие дистрибутивности умножения относительно сложения: в общем случае $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$. Например,

$$[1, 2] \cdot (1 - 1) = 0 \neq [-1, 1] = [1, 2] \cdot 1 - [1, 2] \cdot 1.$$

Тем не менее, имеет место более слабое свойство

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \quad (1.14)$$

называемое *субдистрибутивностью* умножения относительно сложения. Доказательство этого соотношения следует из того, что всякое число $x \in \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ представимо в виде

$$x = a(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad \text{для некоторых } a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}.$$

В свою очередь, отсюда следует в силу Теоремы 1.1.1, что $x = ab + ac \in \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$. Обратное включение тем же способом доказать не получится потому, что числа $y \in \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ допускают представление лишь в виде

$$y = a'b + a''c \quad \text{для некоторых } a', a'' \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c},$$

где a' не обязательно совпадает с a'' .

В ряде частных случаев дистрибутивность всё-таки выполняется. Так,

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \quad \text{если } a \text{ — вещественное число,} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \quad \text{если } \mathbf{bc} > 0. \quad (1.16)$$

Полное описание всех случаев выполнения дистрибутивности в классической интервальной арифметике дано в работах [22, 65].

1.3 Характеристики интервалов и их свойства

Чем характеризуется любой интервал \mathbf{a} ?

В первую очередь, своей *серединой* (центром)

$$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})$$

и *радиусом*

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}).$$

Нередко вместо радиуса рассматривается эквивалентное понятие *ширины* интервала

$$\text{wid } \mathbf{a} = \overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{a} = \text{mid } \mathbf{a} + [-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{a}.$$

Определение 1.3.1 Интервал \mathbf{a} называется *уравновешенным*, если $\underline{\mathbf{a}} = -\overline{\mathbf{a}}$ или, что равносильно, $\text{mid } \mathbf{a} = 0$.

Далее, весьма полезными оказываются абсолютное значение интервала — магнитуда, и его антипод — мигнитуда.

Определение 1.3.2 Абсолютной величиной интервала \mathbf{a} (называемой также модулем или магнитудой интервала) называется наибольшее из абсолютных значений точек интервала \mathbf{a} , т.е. величина

$$|\mathbf{a}| := \max\{|a| \mid a \in \mathbf{a}\} = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\}.$$

Определение 1.3.3 Мигнитудой интервала \mathbf{a} назовём наименьшее из абсолютных значений точек интервала \mathbf{a} — величину

$$\langle \mathbf{a} \rangle := \min\{|a| \mid a \in \mathbf{a}\} = \begin{cases} \min\{|\overline{\mathbf{a}}|, |\underline{\mathbf{a}}|\}, & \text{если } 0 \notin \mathbf{a}, \\ 0, & \text{если } 0 \in \mathbf{a}. \end{cases}$$

Каким образом преобразуются введённые нами характеристики интервалов при арифметических операциях и как связаны с отношением порядка по включению?

Предложение 1.3.1 (свойства абсолютной величины и мигнитуды)

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}| \text{ и } \langle \mathbf{a} \rangle \geq \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (1.17)$$

$$|\mathbf{a}| - \langle \mathbf{b} \rangle \leq |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad (1.18)$$

$$\langle \mathbf{a} \rangle - |\mathbf{b}| \leq \langle \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \rangle \leq \langle \mathbf{a} \rangle + |\mathbf{b}|, \quad (1.19)$$

$$|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|, \quad (1.20)$$

$$|\mathbf{a/b}| \leq |\mathbf{a}|/\langle \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{a/b} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle/|\mathbf{b}|, \quad \text{если } 0 \notin \mathbf{b}, \quad (1.21)$$

$$\left| \frac{1}{\mathbf{a}} \right| = \langle \mathbf{a} \rangle^{-1}, \quad \text{если } 0 \notin \mathbf{a}. \quad (1.22)$$

Доказательство. Для обоснования (1.17) достаточно заметить, что

$$|\mathbf{a}| = \max_{t \in \mathbf{a}} |t| \leq \max_{t \in \mathbf{b}} |t| = |\mathbf{b}|,$$

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \min_{t \in \mathbf{a}} |t| \geq \min_{t \in \mathbf{b}} |t| = \langle \mathbf{b} \rangle$$

если $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$. ■

Предложение 1.3.2 (свойства середины)

$$\text{mid}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{mid } \mathbf{a} \pm \text{mid } \mathbf{b}, \quad (1.23)$$

$$\text{mid}(\mathbf{ab}) = \mathbf{a} \text{ mid } \mathbf{b}, \quad \text{если } \mathbf{a} \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Предложение 1.3.3 (свойства радиуса)

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow \text{rad } \mathbf{a} \leq \text{rad } \mathbf{b}, \quad (1.25)$$

$$\text{rad}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{rad } \mathbf{a} + \text{rad } \mathbf{b}, \quad (1.26)$$

$$|\mathbf{a}| \cdot \text{rad } \mathbf{b} \leq \text{rad}(\mathbf{ab}) \leq |\mathbf{a}| \cdot \text{rad } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{a} \cdot |\text{mid } \mathbf{b}|, \quad (1.27)$$

$$\text{rad } \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}| \leq \text{rad}(\mathbf{ab}) \leq \text{rad } \mathbf{a} |\mathbf{b}| + |\text{mid } \mathbf{a}| \cdot \text{rad } \mathbf{b}, \quad (1.28)$$

$$\text{rad} \left(\frac{1}{\mathbf{a}} \right) = \frac{\text{rad } \mathbf{a}}{\langle \mathbf{a} \rangle |\mathbf{a}|}, \quad \text{если } 0 \notin \mathbf{a}. \quad (1.29)$$

Доказательство. Для (1.25) оно очевидно: коль скоро $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$, то

$$\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}},$$

и потому

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}) \leq \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{b}}) = \text{rad } \mathbf{b}.$$

■

Как видим, ширина интервалов при сложении может только складываться и потому противоположного (обратного по сложению) элемента для интервалов ненулевой ширины не существует. Вместо этого имеют место более слабые свойства сокращения

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, 0 \notin \mathbf{a}, 0 \notin \mathbf{b}, 0 \notin \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Условимся обозначать

$$\mathbf{a}^n = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \dots \cdot \mathbf{a}}_{n \text{ раз}}.$$

Предложение 1.3.4

$$\text{rad } (\mathbf{a}^n) \leq |\mathbf{a}|^{n-1} \text{rad } \mathbf{a}, \quad \text{если } 0 \in \mathbf{a},$$

$$\text{rad } (\mathbf{a}^n) \leq n |\mathbf{a}|^{n-1} \text{rad } \mathbf{a}, \quad \text{если } 0 \notin \mathbf{a}.$$

Определение 1.3.4 Обозначим

$$\sigma(\mathbf{a}) = \text{sgn } (\overline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})$$

— знак середины интервала \mathbf{a} . Если $\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) \geq 0$ для некоторых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$, то будем говорить, что интервалы \mathbf{a} и \mathbf{b} одинаково расположены относительно нуля.

Для того, чтобы охарактеризовать “относительную узость” ненулевого интервала \mathbf{X} . Рачек в [66] ввёл функционал

$$\chi(\mathbf{a}) = \begin{cases} \underline{\mathbf{a}}/\overline{\mathbf{a}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{a}}| \leq |\overline{\mathbf{a}}|, \\ \overline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{a}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для нулевых интервалов функционал χ не определён. Ясно, что

$$-1 \leq \chi(\mathbf{a}) \leq 1,$$

и $\chi(\mathbf{a}) = 1$ тогда и только тогда, когда $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}$. Основные свойства функционала χ мы сведём в

Предложение 1.3.5 *Если \mathbf{a} , \mathbf{b} — ненулевые интервалы, то*

$$\chi(\mathbf{a}) = \chi(\mathbf{b}) \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{a} = t\mathbf{b}, 0 \neq t \in \mathbb{R}, \quad (1.30)$$

$$\chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\}. \quad (1.31)$$

Если \mathbf{a} и \mathbf{b} одинаково расположены относительно нуля, то

$$\chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq \min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\}. \quad (1.32)$$

Если $\mathbf{a} \supseteq \mathbf{b}$ и $\chi(\mathbf{b}) \geq 0$, то

$$\chi(\mathbf{a}) \leq \chi(\mathbf{b}). \quad (1.33)$$

Доказательство. Ясно, что если $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ с $t \neq 0$, то $\chi(\mathbf{a}) = \chi(\mathbf{b})$. Чтобы обосновать обратную импликацию,

Доказательство может быть найдено в [66].

■

Для описания интервала мы всегда указываем два числа, так что иногда бывает удобно представлять интервалы точками двумерной *интервальной плоскости*, откладывая по осям абсцисс и ординат либо левый и правый концы изображаемого интервала, либо его середину и радиус, соответственно. Например, множество всех интервалов вещественной оси изобразится левым чертежом Рис. 1.2 в системе координат “левый конец–правый конец”, а в системе координат “середина–радиус” — правым чертежом Рис. 1.2.

Некоторую неудовлетворённость может вызвать то обстоятельство, что при изображении \mathbb{IR} интервальная плоскость с любой системой координат используется “не вся”, а лишь “наполовину”. В следующем параграфе это ограничение будет преодолено.

Упражнение 1.3.1. Изобразить на интервальной плоскости множество интервалов $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$, задаваемых соотношением $|\mathbf{a} - [1, 2]| < 2$.

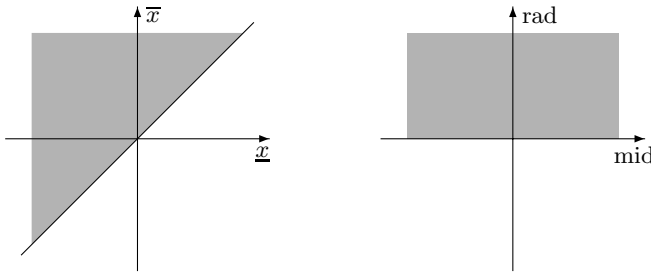


Рис. 1.2. Интервальные плоскости.

1.4 Полная интервальная арифметика

1.4а Неформальное обсуждение

К сожалению, свойства классической интервальной арифметики \mathbb{IR} являются во многих отношениях неудовлетворительными.

Алгебраические свойства \mathbb{IR} в целом плохи, поскольку

- все интервалы с ненулевой шириной, т.е. большинство элементов \mathbb{IR} , не имеют обратных по отношению к операциям (1.2)–(1.5),
- арифметические операции (1.2)–(1.5) связаны друг с другом весьма слабыми соотношениями (вроде субдистрибутивности (1.14)), а полноценная дистрибутивность умножения и деления относительно сложения и вычитания не имеет места.

Как следствие, во-первых, в \mathbb{IR} элементарные уравнения относительно неизвестной переменной x

$$a + x = b,$$

$$a \cdot x = b$$

и им подобные не всегда имеют формального решения. Во-вторых, техника символьных преобразований в классической интервальной арифметике \mathbb{IR} довольно бедна. Мы не имеем возможности даже переносить члены из одной части уравнения в другую и, из-за отсутствия дистрибутивности, приводить подобные члены.

Кроме того, неудовлетворительны также порядковые свойства классической интервальной арифметики относительно естественного упо-

рядочения по включению “ \subseteq ”. \mathbb{IR} в определённом смысле “не замкнута”, так как первая из операций

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \inf_{\subseteq} \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} = [\max\{\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}\}, \min\{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\}], \quad (1.34)$$

— взятие нижней грани относительно “ \subseteq ”, —

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} := \sup_{\subseteq} \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} = [\min\{\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}\}, \max\{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\}], \quad (1.35)$$

— взятие верхней грани относительно “ \subseteq ”, —

не всегда выполнима в классической интервальной арифметике.¹

Наконец, ниже (см. Главы 4 и 5) мы встретимся с задачами, которые являются по своей природе *минимаксными*. Это постановки, которые требуют взятия минимаксов функций многих переменных, т.е. смешанных экстремумов, в которых по части переменных берётся минимум, а по оставшимся — максимум. Для решения минимаксных задач желательно иметь в своем распоряжении специальную “минимаксную” интервальную арифметику, которая реализует вычисление минимаксов на уровне элементарных арифметических операций, т.е. при сложении, вычитании, умножении и делении, каждая из которых также является функцией “многих” (двух) переменных. Но классическая интервальная арифметика и её хорошо известные обобщения — арифметика Кахана, арифметика Хансена (см. [39]) и ряд других — разработаны для оценивания областей значений арифметических операций и выражений или, иначе, для вычисления чистых минимумов и максимумов по всем переменным сразу. Следовательно, эти интервальные арифметики иногда оказываются не вполне пригодными ещё и потому, что плохо соответствуют внутренней природе предъявляемых к решению задач.

Отсутствие дистрибутивности и вытекающая из неё невозможность приводить подобные члены является, конечно, наиболее серьёзным дефектом интервальной арифметики, для исправления которого требуется, по-видимому, её значительная переделка как алгебраической системы. В настоящий момент не вполне ясны даже возможность и целесообразность этого шага. Что же касается необратимости арифметических операций и плохих порядковых свойств интервальной арифметики, то эти неудобства могут быть частично преодолены более лёгким и естественным путём: нам следует построить \mathbb{IR} до некоторой более

¹Если \mathbf{a}, \mathbf{b} — обычные одномерные интервалы с непустым пересечением, то $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ совпадают с $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \cup \mathbf{b}$ соответственно. Но в общем случае это не так.

широкой и полной алгебраической системы \mathfrak{A} (или, иначе, вложить \mathbb{IR} в более широкую алгебраическую систему \mathfrak{A}), которая имела бы более хорошие алгебраические и порядковые свойства (обратимость элементов и т.п.), в которой была бы более богатой техника эквивалентных преобразований и более мощны аналитические средства.

В частности, если требуется найти формальное решение некоторого интервального уравнения, то мы будем искать его в расширенной алгебраической системе \mathfrak{A} , а не в обычной интервальной арифметике \mathbb{IR} , так как можно надеяться, что модифицированная подобным образом задача является более лёгкой в силу более благоприятных свойств алгебраической системы \mathfrak{A} . Но если полученный в результате этой процедуры интервальный вектор окажется лежащим в \mathbb{IR} (а не в $\mathfrak{A} \setminus \mathbb{IR}$), то он и будет искомым формальным решением исходной системы уравнений.

Как можно осуществить требуемое расширение классической интервальной арифметики? Здесь нам на выручку приходит абстрактная алгебра. С более общей точки зрения арифметика \mathbb{IR} является коммутативной полугруппой как относительно сложения, так и относительно умножения. Известно (см., например, [15]), что всякая коммутативная полугруппа, в которой справедлив так называемый “закон сокращения”, может быть вложена в группу (или, что эквивалентно, расширена до группы), т.е. в действительно более богатую алгебраическую систему, в которой каждый элемент имеет обратный. Применительно к интервальной арифметике “закон сокращения” означает, что для любых интервалов a, b, c имеет место импликация $(a \star c = b \star c \Rightarrow a = b)$, где \star — рассматриваемая операция. Нетрудно проверить, что интервальная арифметика \mathbb{IR} как раз таки и является коммутативной полугруппой, удовлетворяющей закону сокращения относительно сложения, а относительно умножения полугруппу с законом сокращения образуют все интервалы, не содержащие нуля.

По счастью, все технические конструкции, необходимые для такого согласованного расширения интервальных полугрупп по сложению и умножению были реализованы немецким исследователем Э. Каухером ещё в 70-е годы. В работах [46, 47, 48], Каухер построил алгебраическую систему, которую мы будем обозначать \mathbb{KR} , включающую в себя классическую интервальную арифметику \mathbb{IR} как собственное подмножество. Она вполне удовлетворяет нашим требованиям, так как является группой по сложению и “почти группой” по умножению. Кроме того, в \mathbb{KR} без каких-либо ограничений выполнимы операции (1.34)–

(1.35) взятия нижней и верхней граней относительно упорядочения интервалов по включению, т.е. \mathbb{KR} обладает лучшими в сравнении с классической арифметикой \mathbb{IR} порядковыми свойствами. Напомним, что алгебраическая система с двумя бинарными операциями, которые идемпотентны, коммутативны, ассоциативны и удовлетворяют закону поглощения, называется *решёткой* [4]. В частично упорядоченном множестве такими бинарными операциями естественно выступают взятие нижней и верхней граней двухэлементного множества, и в этом смысле \mathbb{KR} — решётка относительно операций “ \wedge ” и “ \vee ”, определённых посредством (1.34)–(1.35).

Э. Каухер при расширении \mathbb{IR} опирался на свойство монотонности интервальных арифметических операций по включению и сохранил его в новой интервальной арифметике. Подчёркивая хорошие свойства новой алгебраической системы \mathbb{KR} , мы будем называть её *полной интервальной арифметикой* или, по имени её создателя, *интервальной арифметикой Каухера*.

Ещё одним замечательным свойством полной интервальной арифметики Каухера является то, что именно она является минимаксной интервальной арифметикой, в которой вычисление минимаксов может быть осуществлено на уровне сложения, вычитания, умножения и деления.

1.46 Описание полной интервальной арифметики

Элементами интервальной арифметики \mathbb{KR} являются пары вещественных чисел $[\eta, \vartheta]$, не обязательно связанных соотношением $\eta \leq \vartheta$. Таким образом, \mathbb{KR} получается присоединением *неправильных* интервалов $[\eta, \vartheta]$, $\eta > \vartheta$, ко множеству $\mathbb{IR} = \{[\eta, \vartheta] \mid \eta, \vartheta \in \mathbb{R}, \eta \leq \vartheta\}$ *правильных* интервалов и вещественных чисел (отождествляемых с вырожденными интервалами нулевой ширины). Элементы арифметики Каухера и образуемые из них более сложные объекты (векторы, матрицы) мы будем выделять жирным шрифтом, как и обычные интервалы. При этом, если $\mathbf{a} = [\eta, \vartheta]$, то η называется *левым концом* интервала \mathbf{a} и обозначается \underline{a} , а ϑ называется *правым концом* интервала \mathbf{a} и обозначается \overline{a} .

Определение 1.4.1 *Интервал \mathbf{a} назовём уравновешенным, если*

$$\underline{a} = -\overline{a}.$$

Определение 1.4.2 Абсолютной величиной (модулем) интервала \mathbf{a} называется величина

$$|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\}.$$

Правильные и неправильные интервалы, две половинки \mathbb{KR} , меняются местами в результате отображения *дуализации* $\text{dual} : \mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{KR}$, меняющего местами (переворачивающего) концы интервала, т.е. такого что

$$\text{dual } \mathbf{a} := [\overline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}].$$

Правильной проекцией интервала \mathbf{a} называется величина

$$\text{pro } \mathbf{a} := \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \text{dual } \mathbf{a}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Аналогично классической интервальной арифметике \mathbb{IR} отношение включения одного интервала в другой определяется в \mathbb{KR} следующим образом:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \text{ и } \overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}. \quad (1.36)$$

Например, $[3, 1] \subseteq [2, 2] = 2 \in \mathbb{R}$. Определение (1.36) делает арифметику Каухера \mathbb{KR} не просто решёткой, но даже условно полной решёткой [4] относительно порядка по включению.²

Помимо теоретико-множественного включения на множестве интервалов \mathbb{KR} существует ещё одно частичное упорядочение, которое естественно обобщает линейный порядок “ \leq ” на вещественной оси:

Определение 1.4.3 [32] Для интервалов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$ условимся считать, что \mathbf{a} не превосходит \mathbf{b} и писать “ $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ” тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$.

Интервал называется неотрицательным (т.е. ≥ 0), если неотрицательны оба его конца.

Интервал называется неположительным (т.е. ≤ 0), если неположительны оба его конца.

²Условно полная решётка — это частично упорядоченное множество, в котором каждое непустое ограниченное подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани [4]. Таким образом, это уже больше, чем просто решётка, но меньше, чем полная решётка.

Например, $[1, 2] \leq [3, 2]$, причём оба сравниваемых интервала $[1, 2]$ и $[3, 2]$ неотрицательны. Нередко бывает удобно оперировать понятием *знака интервала*, который мы определяем как

$$\operatorname{sgn} \mathbf{a} = \begin{cases} +, & \text{если } \mathbf{a} \geq 0, \\ -, & \text{если } \mathbf{a} \leq 0, \\ \text{не определён,} & \text{если } 0 \in \operatorname{int} \mathbf{a}. \end{cases}$$

Нулю, т.е. нулевому интервалу $[0, 0]$, может быть приписан любой знак.

Сложение и умножение на вещественные числа определяются на \mathbb{KR} следующим образом:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}], \quad (1.37)$$

$$\mu \cdot \mathbf{a} := \begin{cases} [\mu \underline{\mathbf{a}}, \mu \overline{\mathbf{a}}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \overline{\mathbf{a}}, \mu \underline{\mathbf{a}}], & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.38)$$

Итак, каждый элемент \mathbf{a} из \mathbb{KR} имеет единственный обратный по сложению, обозначаемый через “орр \mathbf{a} ”, и

$$\mathbf{a} + \operatorname{орр} \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{орр} \mathbf{a} := [-\underline{\mathbf{a}}, -\overline{\mathbf{a}}]. \quad (1.39)$$

Как видим, относительно сложения арифметика \mathbb{KR} является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства \mathbb{R}^2 . Для краткости мы будем обозначать операцию, обратную сложению, так называемое внутреннее (алгебраическое) вычитание в \mathbb{KR} , через “ \ominus ”, так что

$$\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} := \mathbf{a} + \operatorname{орр} \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}].$$

Ниже нам также будут полезны следующие дистрибутивные свойства сложения по отношению к операциям взятия нижней и верхней граней (см. [32, 48]):

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad (1.40)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad (1.41)$$

Упражнение 1.4.1. Доказать, что для любого интервала \mathbf{a}

$$\mathbf{a} + \operatorname{dual} \mathbf{a} = 2 \operatorname{mid} \mathbf{a}, \quad \text{и} \quad \mathbf{a} - \operatorname{dual} \mathbf{a} = 0.$$

Для того, чтобы выписать явные формулы для умножения, выделим в \mathbb{KR} следующие подмножества:

$$\mathcal{P} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid (\underline{\mathbf{a}} \geq 0) \ \& \ (\overline{\mathbf{a}} \geq 0) \}$$

— неотрицательные интервалы,

$$\mathcal{Z} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \overline{\mathbf{a}} \}$$

— нульсодержащие интервалы,

$$-\mathcal{P} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid -\mathbf{a} \in \mathcal{P} \}$$

— неположительные интервалы,

$$\text{dual } \mathcal{Z} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \text{dual } \mathbf{a} \in \mathcal{Z} \}$$

— интервалы, содержащиеся в нуле.

В целом $\mathbb{KR} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup (-\mathcal{P}) \cup (\text{dual } \mathcal{Z})$. Тогда умножение в интервальной арифметике Каухера может быть описано следующей таблицей [48]:

Таблица 1.1. Умножение в полной арифметике

\cdot	$\mathbf{b} \in \mathcal{P}$	$\mathbf{b} \in \mathcal{Z}$	$\mathbf{b} \in -\mathcal{P}$	$\mathbf{b} \in \text{dual } \mathcal{Z}$
$\mathbf{a} \in \mathcal{P}$	$[\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	$[\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$
$\mathbf{a} \in \mathcal{Z}$	$[\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	$[\min\{\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}\}, \max\{\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}\}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	0
$\mathbf{a} \in -\mathcal{P}$	$[\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$
$\mathbf{a} \in \text{dual } \mathcal{Z}$	$[\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	0	$[\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	$[\max\{\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}\}, \min\{\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}\}]$

Как видим, умножение в арифметике Каухера допускает нетривиальные делители нуля. Например, $[-1, 2] \cdot [5, -3] = 0$. Интервальное

умножение в арифметике Каухера оказывается коммутативным и ассоциативным [32, 47, 48], но группу по умножению в \mathbb{KR} образуют лишь интервалы \mathbf{a} с $\underline{a}\bar{a} > 0$, поскольку “закон сокращения” не выполняется ни на каком более широком подмножестве \mathbb{KR} . Для краткости мы будем обозначать операцию, обратную умножению, так называемое внутреннее (алгебраическое) деление в \mathbb{KR} , через “ \oslash ”, так что

$$\mathbf{a} \oslash \mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{a} \cdot [1/\underline{b}, 1/\bar{b}] \quad \text{для } 0 \notin \text{pro } \mathbf{b},$$

т.е. для интервалов \mathbf{b} , которые не содержат нуль и сами не содержатся в нуле.

Выписанные выше явные формулы для умножения в полной интервальной арифметике являются довольно громоздкими и малообозримыми. В ряде случаев оказывается полезным прибегнуть к другим формулам для интервального умножения, которые были предложены А. В. Лакеевым в [52, 53]. Напомним следующее определение [4]:

Определение 1.4.4 Для вещественного числа a величины

$$\begin{aligned} a^+ &:= \max\{a, 0\}, \\ a^- &:= \max\{-a, 0\} \end{aligned}$$

называются положительной частью и отрицательной частью a соответственно.

При этом $a = a^+ - a^-$ и $|a| = a^+ + a^-$.

Предложение 1.4.1 (формулы Лакеева) Для любых интервалов \mathbf{a} , $\mathbf{b} \in \mathbb{KR}$ справедливо

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [& \max\{\underline{a}^+\underline{b}^+, \bar{a}^-\bar{b}^-\} - \max\{\bar{a}^+\underline{b}^-, \underline{a}^-\bar{b}^+\}, \\ & \max\{\bar{a}^+\bar{b}^+, \underline{a}^-\underline{b}^-\} - \max\{\underline{a}^+\bar{b}^-, \bar{a}^-\underline{b}^+\}]. \end{aligned}$$

Если один из интервалов \mathbf{a} , \mathbf{b} является правильным, то

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [& \underline{a}^+\underline{b}^+ + \bar{a}^-\bar{b}^- - \max\{\bar{a}^+\underline{b}^-, \underline{a}^-\bar{b}^+\}, \\ & \max\{\bar{a}^+\bar{b}^+, \underline{a}^-\underline{b}^-\} - \underline{a}^+\bar{b}^- - \bar{a}^-\underline{b}^+]. \quad (1.42) \end{aligned}$$

Эта формула не упрощается в случае, когда нам дополнительно известно, что оба интервала \mathbf{a} , \mathbf{b} правильные.

Если же из интервалов \mathbf{a} , \mathbf{b} один является правильным, а другой неправильным, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^+ + \overline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^- - \overline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^- - \underline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^+, \quad \overline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^+ + \underline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^- - \underline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^- - \overline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^+]. \quad (1.43)$$

Достоинство формул Лакеева — их глобальный характер. Они дают единое выражение для интервального произведения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ на всей области определения \mathbf{a} и \mathbf{b} , тогда как представление через Табл. 1.1 имеет кусочный характер. Это неудобно, к примеру, при исследовании свойств дифференцируемости, гладкости и их аналогов, вычислении производных и т.п.

Вычитание и деление в арифметике \mathbb{KR} определяются так же, как и в классической интервальной арифметике:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}],$$

$$\mathbf{a} / \mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot [1/\overline{\mathbf{b}}, 1/\underline{\mathbf{b}}] \quad \text{для } 0 \notin \text{pro } \mathbf{b}.$$

Наконец, аналогично своим классическим предшественникам, все операции полной интервальной арифметики являются *монотонными по включению*, т.е. относительно частичного порядка (1.36):

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}', \mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}'$$

для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$ и $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Взаимосвязь сложения и умножения в арифметике Каухера выражается следующими соотношениями:

$$\text{если } \mathbf{a} \text{ правильный, то } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1.44)$$

— субдистрибутивность,

$$\text{если } \mathbf{a} \text{ неправильный, то } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \supseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1.45)$$

— супердистрибутивность.

Эти включения обращаются в точные равенства, в частности, в том случае когда \mathbf{a} стягивается в точку, т.е. $\mathbf{a} = a \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (1.46)$$

Другой важный случай дистрибутивности — совпадение знаков интервалов \mathbf{b} и \mathbf{c} :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } \mathbf{b} \mathbf{c} \geq 0. \quad (1.47)$$

Е. Гарденьесом с соавторами в [32] для полного описания всех случаев дистрибутивности было введено понятие *областей дистрибутивности* определяемых интервалом \mathbf{a} , принадлежность к которым приводит к равенствам вместо (1.44)–(1.45). Наконец, позднее С. Марковым и его сотрудниками, как классификация всевозможных частных вариантов отношения дистрибутивности сложения относительно умножения в \mathbb{KR} , был предложен “обобщённый дистрибутивный закон” [27, 63, 64], охватывающий большое количество самых различных ситуаций. Из всего многообразия рассмотренных в [27, 63, 64] случаев нам далее понадобится следующее соотношение:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + (\text{dual } \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}, \quad (1.48)$$

если интервалы \mathbf{b} , \mathbf{c} и $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ имеют определённые знаки и $\text{sgn } \mathbf{b} = -\text{sgn } \mathbf{c} = \text{sgn } (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Упражнение 1.4.2. Докажите, что для любого интервала \mathbf{a} выполняются неравенства

$$|\text{mid } \mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}|, \quad |\text{rad } \mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}|.$$

1.4в Минимаксный характер полной интервальной арифметики

С помощью операции взятия максимума (1.35) фундаментальное свойство (1.1), определяющее операции классической интервальной арифметики можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \star b). \quad (1.49)$$

Наиболее удивительным фактом, касающимся арифметики Каухера является то, что в ней имеет место представление, обобщающее формулы (1.1) и (1.49). Именно, для любой операции $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ справедливо соотношение:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigvee_{a \in \text{pro } \mathbf{a}}^a \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}}^b (a \star b), \quad (1.50)$$

где

$$\bigvee^a := \begin{cases} \bigvee, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \bigwedge, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{условная операция} \\ \text{— взятия экстремума} \\ \text{по включению} \end{array}.$$

Это представление выражает связь между результатом интервальной операции $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$ и результатами точечных операций $a \star b$ для $a \in \text{pro } \mathbf{a}$ и $b \in \text{pro } \mathbf{b}$. Представление (1.50) можно даже взять за основу для определения арифметических операций в полной интервальной арифметике (см. [32]).

Заметим, что, как следует из (1.50), полная интервальная арифметика как раз и является требуемой минимаксной интервальной арифметикой! Действительно, в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ *концы результирующих интервалов являются минимаксом и максимумом результатов точечных арифметических операций, если из оперируемых интервалов один правилен, а другой неправилен*. Например,

$$[-3, 5] \cdot [2, -1] = 0 = \left[\min_{x \in [-3, 5]} \max_{y \in [-1, 2]} x \cdot y, \max_{x \in [-3, 5]} \min_{y \in [-1, 2]} x \cdot y \right],$$

в соответствии с таблицей умножения. Можно ли использовать это замечательное свойство для вычисления минимаксов от более сложных выражений?

Ответ на этот вопрос, в целом, положителен, но он не является столь простым и исчерпывающим, как в случае классической интервальной арифметики и “чистых” экстремумов функций. Соответствующая (весьма изошренная) теория построена в работах испанских исследователей под руководством Э. Гарденьеса и М. Сайнца и представлена в наиболее полном и корректном виде в недавних публикациях [36, 68]. Несмотря на то, что для элементарных арифметических операциях — сложения, вычитания, умножения и деления — минимум и максимум коммутируют, хорошо известно, что в общем случае операции взятия минимума и максимума не перестановочны друг с другом,

Не помогает даже наложение жесткого условия единственности вхождений переменных. Следующий выразительный пример позаимствован нами из обзора [68].

Рассмотрим функцию от четырёх переменных

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

Для интервалов изменения переменных $x_1 \in [-2, 2]$, $x_2 \in [-1, 1]$, $x_3 \in [-1, 1]$, $x_4 \in [-2, 2]$ имеем

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_1 \in [-2, 2], x_3 \in [-1, 1]} \bigwedge_{x_2 \in [-1, 1], x_4 \in [-2, 2]} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right], \\ \bigwedge_{x_2 \in [-1, 1], x_4 \in [-2, 2]} \bigvee_{x_1 \in [-2, 2], x_3 \in [-1, 1]} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right], \end{aligned}$$

что отличается от результата соответствующего “естественного интервального расширения” выражения ϕ :

$$\phi([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = 0.$$

Тем не менее, используя индукцию по дереву Канторовича рассматриваемого выражения, нетрудно вывести из (1.50), что если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой переменной x_i и y_j в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ справедливо

$$\bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) \subseteq \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} \bigvee_{x \in \mathbf{x}} f(x, y), \quad (1.51)$$

т.е., в развернутом виде,

$$\left[\min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}),$$

$$f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) \subseteq \left[\max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right].$$

Более сложные случаи, которые также доказывается по индукции. Если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой из переменных y_i в первой степени,

то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ имеет место

$$\left[\min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}). \quad (1.52)$$

Если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой из переменных x_i в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ имеет место

$$\left[\min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \supseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}). \quad (1.53)$$

При этом отклонение естественного интервального расширения от точных значений минимакса и максимина тем меньше, чем меньше размеры интервалов аргументов. Подробное доказательство соотношений (1.51), (1.52) и (1.53) было впервые получено Е. Гарденьесом и его сотрудниками и опубликовано в [36, 68] (хотя и в совершенно других терминах).

Довольно забавна история вопроса. В ранних публикациях испанской школы [32, 34] ошибочно утверждалось, что

$$\bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) = f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) = \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} \bigvee_{x \in \mathbf{x}} f(x, y),$$

если каждая из переменных x_i , y_i входит в f не более одного раза в первой степени. Тем самым, фактически, заявлялась новая неизвестная ранее теорема о минимаксе. Ошибка была замечена и исправлена лишь через десятилетие, а статья с корректной формулировкой увидела свет вообще в 1999-м году [68]. Неудивительно, что кое-кто из исследователей даже успел воспользоваться неверным результатом в своих работах.

Заключая параграф, можно резюмировать, что, хотя полная интервальная арифметика Каухера и не исправляет “до конца” всех недостатков классической интервальной арифметики, она всё же является гораздо более удобной и приспособленной для

- 1) нахождения формальных решений интервальных уравнений,
- 2) решения задач, связанных с вычислением минимаксов.

1.5 Комплексные интервальные арифметики

В отличие от одномерной вещественной оси \mathbb{R} множество комплексных чисел \mathbb{C} является уже “двумерным”, и в нём можно определить интервалы несколькими способами.

Наиболее популярные комплексные интервалы — это прямоугольники и круги комплексной плоскости.

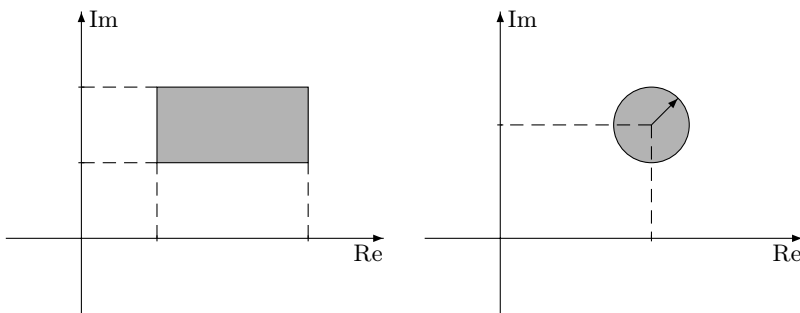


Рис. 1.3. Прямоугольный и круговой комплексные интервалы.

Отметим в заключение, что на комплексной плоскости \mathbb{C} наряду с рассмотренными типами интервалов в виде кругов и прямоугольников в некоторых задачах используются также круговые кольца [62], круговые секторы [50] и даже подмножества \mathbb{C} в виде “полумесяцев”.

1.6 Метрика и топология на интервальных пространствах

Предложение 1.6.1 *Отображения*

$$\text{dist} : \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{и} \quad \text{dist} : \mathbb{KR} \times \mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

определяемые как

$$\text{dist}(\underline{a}, \underline{b}) := \max \{ |\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}| \} = |\underline{a} \ominus \underline{b}|, \quad (1.54)$$

обладают следующими свойствами:

$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$, и равенство достигается только при $\mathbf{a} = \mathbf{b}$,

$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$,

$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ из \mathbb{IR} или \mathbb{KR} .

Доказательство. Первые два свойства следуют непосредственно из вида выражения (1.54), а последнее свойство вытекает из “неравенства треугольника” для абсолютной величины вещественных чисел. ■

Коль скоро оказывается, что величина $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обладает всеми свойствами абстрактного расстояния, то Предложение 1.6.1 мотивирует следующее

Определение 1.6.1 Величину $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, определяемую посредством (1.54), будем называть расстоянием (метрикой) на множествах интервалов \mathbb{IR} или \mathbb{KR} .

Расстояние dist имеет, в действительности, ясный геометрический смысл и является так называемым *хаусдорфовым расстоянием* между интервалами, как множествами числовой оси \mathbb{R} [3].

Предложение 1.6.2

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max \left\{ \min \{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} + t[-1, 1] \}, \min \{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a} + t[-1, 1] \} \right\}. \quad (1.55)$$

Доказательство. Для интервалов \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначим

$$d := \max \{ \min \{ t \geq 0 \mid \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} + t[-1, 1] \}, \min \{ t \geq 0 \mid \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a} + t[-1, 1] \} \}$$

Тогда

$$\mathbf{b} \subseteq \mathbf{a} + d[-1, 1], \quad (1.56)$$

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} + d[-1, 1], \quad (1.57)$$

и d — минимальное вещественное число, удовлетворяющее (1.56)–(1.57).

Условие (1.56) равносильно системе неравенств

$$\overline{\underline{a}} - \overline{\underline{b}} \geq -d, \quad (1.58)$$

$$\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{b}} \leq d, \quad (1.59)$$

а условие (1.57) равносильно системе неравенств

$$\overline{\underline{a}} - \overline{\underline{b}} \leq d, \quad (1.60)$$

$$\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{b}} \geq -d. \quad (1.61)$$

Комбинируя (1.58) с (1.60) и (1.59) с (1.61), получим

$$|\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{b}}| \leq d \quad \text{и} \quad |\overline{\underline{a}} - \overline{\underline{b}}| \leq d,$$

так что если d — наименьшее число, для которого выполнены оба эти неравенства, то

$$d = \max\{|\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{b}}|, |\overline{\underline{a}} - \overline{\underline{b}}|\}.$$

Это совпадает с определением расстояния между \underline{a} и \underline{b} . ■

Напомним, что множество, на котором введено абстрактное расстояние-метрика называется *метрическим пространством*. Говорят также, что метрическое пространство *полное*, если любая фундаментальная последовательность (называемая также *последовательностью Коши*) имеет в нём предел [10].

Предложение 1.6.3 *Множества интервалов \mathbb{IR} и \mathbb{KR} , снабжённые расстоянием dist , являются полными метрическими пространствами, а последовательность интервалов $\{\underline{a}_k\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательности концов $\{\underline{a}_k\}$ и $\{\overline{a}_k\}$ сходятся в \mathbb{R} . При этом*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_k = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_k, \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a}_k \right].$$

Доказательство очевидно. ■

Немедленным следствием Предложения 1.6.3 и известной из математического анализа теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности является

Предложение 1.6.4 (принцип вложенных интервалов)

В \mathbb{IR} всякая вложенная последовательность интервалов $\{\mathbf{a}_k\}$, т.е. такая, что $\mathbf{a}_{k+1} \subseteq \mathbf{a}_k$, имеет предел и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k.$$

Перечислим основные свойства расстояния dist :

Предложение 1.6.5

$$\text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \quad (1.62)$$

$$\text{dist}(\mathbf{ab}, \mathbf{ac}) \leq |\mathbf{a}| \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (1.63)$$

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow \text{rad } \mathbf{b} - \text{rad } \mathbf{a} \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 2(\text{rad } \mathbf{b} - \text{rad } \mathbf{a}),$$

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \subseteq \mathbf{c} \Rightarrow \max\{\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})\} \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Доказательство. Первое свойство следует непосредственно из определения расстояния dist .

Неравенство (1.62) доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) &= |(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \ominus (\mathbf{b} + \mathbf{d})| \\ &= |(\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \ominus \mathbf{d})| \\ &\leq |(\mathbf{a} \ominus \mathbf{b})| + |(\mathbf{c} \ominus \mathbf{d})| \\ &= \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{c}, \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Для доказательства (1.63) заметим, что, если $r := \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то

$$\mathbf{b} \subseteq \mathbf{c} + r[-1, 1] \quad \text{и} \quad \mathbf{c} \subseteq \mathbf{b} + r[-1, 1]$$

в силу Предложения 1.6.2. Умножая обе части этих включений на \mathbf{a} , получим

$$\mathbf{ab} \subseteq \mathbf{ac} + \mathbf{ar}[-1, 1] \quad \text{и} \quad \mathbf{ac} \subseteq \mathbf{ab} + \mathbf{ar}[-1, 1],$$

что ввиду равенства $\mathbf{a}[-1, 1] = |\mathbf{a}|[-1, 1]$ равносильно

$$\mathbf{ab} \subseteq \mathbf{ac} + |\mathbf{a}|r[-1, 1] \quad \text{и} \quad \mathbf{ac} \subseteq \mathbf{ab} + |\mathbf{a}|r[-1, 1]$$

соответственно. Повторное применение Предложения 1.6.2 приводит к заключению о том, что действительно

$$\text{dist}(\mathbf{ab}, \mathbf{ac}) \leq |\mathbf{a}|r = |\mathbf{a}|\text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

■

1.7 Твины и твинная арифметика

Слово “твин” является калькой английского термина *twin*, который, в свою очередь, есть сокращение от *TWice INterval* — “двойной интервал”. С другой стороны, в английском языке имеется самостоятельное слово *twin*, означающее “двойня”, или, более общо, “парная вещь”, что по смыслу довольно близко к нашему термину.

Как бы то ни было, твин — это “интервал интервалов”, или, что равносильно, интервал с интервальными концами. Впервые твины были рассмотрены в работе Э. Гарденьеса и его сотрудников [34].

Необходимость в таких объектах действительно возникает в ряде практических ситуаций. В примерах из §1.1 интервалы возникали как семейства значений вещественных величин, но нередко первичными объектами наблюдения являются целые интервалы. Ряд наблюдений с интервальными значениями порождает интервалы с неопределёнными концами.

Например, придя в банк по поводу обмена валюты, мы сталкиваемся с двумя величинами — курсом покупки данной валюты банком и курсом её продажи. Ясно, что где-то между ними лежит “себестоимость” данной валюты для банка, а потому результатом наблюдения в рассматриваемом случае является целый интервал. Обследование нескольких банков приводит уже к семейству интервалов, которые можно формализовать как интервал с интервальными концами.

Поскольку интервалы могут быть упорядочены различными способами, то существуют различные виды твинов. Двум основным частичным порядкам на \mathbb{IR} и \mathbb{KR} — по включению “ \subseteq ” и “ \leq ” — соответствуют и два основных типа твинов: “ \subseteq ”-твины и “ \leq ”-твины.

1.8 Другие интервальные арифметики

1.8a Интервальная арифметика Кахана

Ещё одна популярная интервальная арифметика — это *расширенная интервальная арифметика Кахана*, идея которой впервые была высказана У. Каханом [44]. Но первое систематическое описание этой арифметики было дано позже другими математиками [54].

Помимо обычных интервалов из \mathbb{IR} её элементами являются множества вида $] - \infty, p] \cup [q, +\infty[$, $p \leq q$, и $] - \infty, p]$, $[q, +\infty[$. Результаты сложения, вычитания, умножения и деления $\underline{a}/\underline{b}$ при $0 \notin \underline{b}$ в классической интервальной арифметике и арифметике Кахана полностью совпадают. Но в арифметике Кахана дополнительно определено деление обычных интервалов \underline{a} и \underline{b} с $0 \in \underline{b}$. Для удобства мы выпишем соответствующие результаты в развёрнутой форме:

$$\underline{a}/\underline{b} = \frac{[\underline{a}, \bar{a}]}{[\underline{b}, \bar{b}]}$$

$$= \begin{cases} \underline{a} \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}], & \text{если } 0 \notin \underline{b}, \\] - \infty, +\infty[, & \text{если } 0 \in \underline{a} \text{ и } 0 \in \underline{b}, \\ [\bar{a}/\underline{b}, +\infty[, & \text{если } \bar{a} < 0 \text{ и } \underline{b} < \bar{b} = 0, \\] - \infty, \bar{a}/\bar{b}] \cup [\bar{a}/\underline{b}, +\infty[, & \text{если } \bar{a} < 0 \text{ и } \underline{b} < 0 < \bar{b}, \\] - \infty, \bar{a}/\bar{b}], & \text{если } \bar{a} < 0 \text{ и } 0 = \underline{b} < \bar{b}, \\] - \infty, \underline{a}/\underline{b}], & \text{если } 0 < \underline{a} \text{ и } \underline{b} < \bar{b} = 0, \\] - \infty, \underline{a}/\underline{b}] \cup [\underline{a}/\bar{b}, +\infty[, & \text{если } 0 < \underline{a} \text{ и } \underline{b} < 0 < \bar{b}, \\ [\underline{a}/\bar{b}, +\infty[, & \text{если } 0 < \underline{a} \text{ и } 0 = \underline{b} < \bar{b}, \\ \emptyset, & \text{если } 0 \notin \underline{a} \text{ и } 0 = \underline{b}. \end{cases} \quad (1.64)$$

Подробное описание интервальной арифметики, формализующей операции над интервалами и их дополнениями, аналогичные (1.64), можно найти в [54]. Эта арифметика полезна, например, при вычислениях с цепными дробями, но для наших целей вполне достаточно использовать формулы (1.64), а затем пересечь результат с обычным интервалом.

Уместно отметить, что в арифметике Кахана выполняются как монотонность операций по включению, так и фундаментальное свойство

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \{ a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \} \quad \text{для } \star \in \{ +, -, \cdot, / \},$$

являющееся основой классической интервальной арифметики и её применений.

1.8б Мультиинтервальная арифметика

Мультиинтервал — это объединение конечного числа несвязных интервалов числовой оси. Между мультиинтервалами также могут быть определены арифметические операции “по представителям” совершенно аналогично тому, как это сделано на множестве интервалов, и впервые это осуществил А.Г. Яковлев в [25].



Рис. 1.4. Мультиинтервал в \mathbb{R} .

Алгебраические свойства мультиинтервальной арифметики заметно хуже, чем у классической интервальной арифметики, так как в ней не выполняется закон сокращения. Например,

$$([1, 2] \cup [3, 4]) + [0, 1] = [1, 3] \cup [3, 5] = [1, 5],$$

но и

$$[1, 4] + [0, 1] = [1, 5].$$

Невозможность сокращения имеет следствием отсутствие обратимости арифметических операций, которая столь важна при решении обратных задач и алгебраических преобразованиях. То есть, алгебраическое пополнение мультиинтервальной арифметики, похожее на арифметику Каухера, в принципе не может быть построено.

Но главным недостатком мультиинтервальной арифметики является быстрое нарастание сложности вычислений вследствие лавинообразного “размножения” компонент связности операндов. Например, при сложении или вычитании двух мультиинтервалов, каждый из которых имеет по две компоненты связности, результат будет иметь, вообще говоря, уже *четыре* компоненты связности.

Этот сугубо практический вывод был даже подкреплён теоретическими исследованиями. В работе М. Ногейра и А. Нандигам [61] строго доказано, что добавление к множеству интервалов хотя бы одного мультиинтервала превращает некоторые простые полиномиально разрешимые интервальные задачи в труднорешаемые (NP-трудные).

1.8в Сегментные арифметики

Сегментом или *отрезком* числовой оси \mathbb{R} называется, согласно традиционной математической терминологии [5], множество чисел, заключённых между двумя данными числами $a, b \in \mathbb{R}$, причём сами они включаются в сегмент. В нашей книге, как и во всех других работах по интервальному анализу, такие множества называют “интервалами”, и с дальнейшим развитием интервального анализа это словопотребление, по-видимому, будет распространяться всё шире. В подобных условиях авторы, пишущие на интервальные темы, иногда используют слово “сегмент” для обозначения полуоткрытых и открытых промежутков числовой оси, т.е. множеств точек между двумя данными границами, из которых либо одна, либо обе не принадлежат самому этому множеству. Соответственно, *сегментные арифметики* — это множества таких сегментов, снабжённые арифметическими операциями наподобие интервальной арифметики.

Зачем нужны подобные арифметики и имеют ли они смысл?

Цель создания таких арифметик представляется, на первый взгляд, вполне разумной: расширить запас множеств, с которыми мы можем оперировать, раздвинув, тем самым, наши возможности исследования поведения функций на границах множеств и в их окрестностях.

Но, в действительности, все вещественные арифметические операции являются одновременно открытыми и замкнутыми, в топологическом смысле, отображениями из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в \mathbb{R} : они переводят открытые множества в открытые, а замкнутые множества — в замкнутые, и исключением является лишь деление на нуль. Следовательно, результат любой арифметической операции между открытыми или полуоткрытыми интервалами отличается от результата этой же операции между замыканиями только в крайних точках, и это отличие легко может быть найдено и учтено в каждом конкретном случае. Отдельную арифметику незамкнутых множеств строить для этого совсем не стоит!

Что касается деления на интервалы, содержащие нуль, то здесь мы в самом деле способны получить определённую выгоду от аккуратного

вычленения нуля с границы интервала:

$$\frac{1}{[0, 1]} = \mathbb{R}, \quad \text{тогда как} \quad \frac{1}{]0, 1]} = [1, +\infty[,$$

т.е. вместо всей числовой оси получаем лишь полуось. И это соображение является вообще единственным аргументом за допущение незамкнутых интервалов.

“Минусов” введения незамкнутых интервалов много и все они очень серьёзные. В силу ряда принципиальных математических причин исчисление незамкнутых интервалов будет по своим возможностям значительно слабее (если вообще когда-либо будет создано), чем традиционный анализ замкнутых интервалов.

Своими математическими свойствами ограниченные замкнутые интервалы в корне отличаются от незамкнутых — открытых и полуоткрытых — интервалов. Если первые — компактные множества, то открытые и полуоткрытые интервалы некомпактны со всеми вытекающими отсюда последствиями. Рассматриваемые как топологические пространства, Незамкнутые интервалы не обладают свойством полноты, так что фундаментальные последовательности элементов таких незамкнутых интервалов не обязательно сходятся. Наконец, незамкнутые интервалы не являются полными решётками относительно стандартного порядка “ \leq ” на вещественной оси. Эти факты имеют многообразные нехорошие следствия для практики:

На компактных замкнутых интервалах непрерывные функции достигают своих экстремумов, а на некомпактных открытых и полуоткрытых интервалах могут и не достигать (теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях, см., например, [10]).

Для незамкнутых интервалов в \mathbb{R} и их многомерных аналогов неверна теорема Брауэра о неподвижной точке, лемма Лерэ-Шаудера и основанные на них интервальные тесты существования решений систем уравнений — интервальный метод Ньютона, метод Кравчика, метод Хансена-Сенгупты (см. Главы 7 и 8). Тем самым на незамкнутых интервалах вычислительный интервальный анализ лишается наиболее мощных своих инструментов, широко применяемых при решении систем линейных и нелинейных уравнений и глобальной оптимизации.

Неверным оказывается принцип вложенных интервалов (Предложение 1.6.4). Теперь последовательность полуоткрытых в нуле интервалов $]0, \frac{1}{k}]$, $k = 1, 2, \dots$, ни к чему не сходится и имеет пустое пересечение. Оно останется пустым даже в том случае, если мы допустим в нашей последовательности хотя бы один открытый в нуле интервал.

Это большая потеря. Напомним, что теория интервального интеграла (и интервальных оценок интеграла вещественной функции) базируется на этом принципе.

Наиболее практичные и эффективные интервальные методы для решения операторных уравнений (интегральных и дифференциальных) тоже основываются на принципе вложенных интервалов и теоремах Банаха или Шрёдера о сжимающих отображениях, которые также становятся неверными, коль скоро незамкнутые интервалы не являются полными топологическими пространствами.

Принцип Биркгофа-Тарского и лемма Канторовича неверны для незамкнутых интервалов, не являющихся полными решётками.

Далее, каким следует считать расстояние между $[a, b[$ и $[a, b]$? Введённое в §1.6 расстояние оказывается равным нулю и, тем самым, одно из главных назначений этого расстояния — различать несовпадающие друг с другом элементы пространства — перестаёт выполняться. Более того, на множестве всех замкнутых и незамкнутых интервалов метрика (расстояние) вообще не может введено никаким способом, т.е. как топологическое пространство это множество принципиально неметризуемо.

Известный критерий метризуемости Стоуна-Архангельского утверждает, что топология пространства может быть задана метрикой тогда и только тогда, когда это пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости (так называемой T1) и имеет счётное фундаментальное множество открытых окрестностей. Аксиома T1 — самая слабая из аксиом отделимости, она требует, чтобы у любых двух точек пространства имелось по окрестности, не содержащей другой точки. Нетрудно сообразить, что пространство всех замкнутых и незамкнутых интервалов не удовлетворяет даже этой слабейшей аксиоме: полуоткрытый интервал $[a, b[$ и его замыкание $[a, b]$ такими окрестностями окружить нельзя.

Невыполнение аксиомы T1 — это очень серьёзное свидетельство того, что рассматриваемое пространство является весьма экзотичным, на грани патологии. Фактически, оно означает, что содержательное исчисление на множестве замкнутых и незамкнутых интервалов, скорее всего, никогда не будет построено.

1.9 Интервалы в сравнении с другими способами описания неопределённости

Помимо интервалов в современной прикладной математике существуют и другие способы описания неопределённости, т.е. частичного знания. Отдельная обширная область знаний со своими ценностями и своей оригинальной идеологией — теория нечётких множеств (см. например, [2, 7, 9, 13, 20]).

Пусть задано некоторое множество X , которое будем называть *универсальным множеством*. *Нечётким множеством* C в X называется совокупность всевозможных пар вида $(x, \mu_C(x))$, где $x \in X$ и $\mu_C : X \rightarrow [0, 1]$ — функция, называемая *функцией принадлежности* нечёткого множества C . Значение $\mu_C(x)$ называется при этом *степенью принадлежности* элемента x нечёткому множеству C .

Теория нечётких множеств имеет определённое внешнее сходство с интервальным анализом, но различия и в аппарате и в основных идеях этих дисциплин всё-таки очень велики. В частности, характерная отличительная особенность теории нечётких множеств в сравнении с интервальным анализом — это наличие нетривиальной функции принадлежности и содержательные рассуждения с ней. Ничего подобного нет в интервальном анализе.

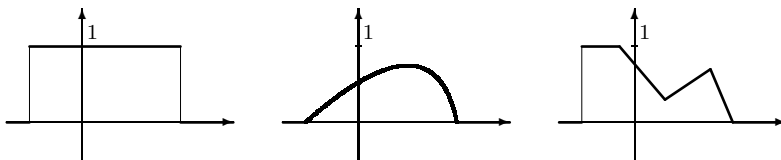


Рис. 1.5. Функции принадлежности интервала и нечётких множеств.

Имелись попытки усовершенствовать и саму интервальную арифметику путём добавления к ней дополнительных объектов.

В работе М. Ногейра и А. Нандигам [61] строго доказано, что добавление к множеству интервалов хотя бы одного неинтервала (в частности, мультиинтервала) превращает задачу нахождения области значений суммы кусочно-линейных функций из полиномиально разрешимой в труднорешаемую (NP-трудную).

В чем преимущества и недостатки интервалов в сравнении с другими способами описания неопределённости? Это очень большой и важный вопрос, к которому мы будем неоднократно возвращаться на протяжении всей книги. Интервалы и интервальные арифметики оказываются замечательными (или даже уникальными) во многих отношениях, и мы начнём освещение этой темы с простой, но методически важной предельной теоремы о сумме независимых ограниченных величин, принадлежащей В.Крейновичу [51].

Предположим, что у нас имеется прибор для измерения значений некоторой физической величины x с гарантированной точностью ϵ (сообщаемой обычно производителем прибора). Слово “гарантированный” означает, что для результата измерения \tilde{x} истинное значение величины x удовлетворяет неравенству $|x - \tilde{x}| \leq \epsilon$, или, иными словами, возможные значения ошибки $(x - \tilde{x})$ принадлежат интервалу $[-\epsilon, \epsilon]$. Являются ли все точки интервала возможными для значения ошибки?

В некоторых экзотических случаях ответ на этот вопрос отрицателен. Например, при измерении напряженности некоторого электромагнитного поля вблизи элементов памяти современного цифрового компьютера наводки от микросхем памяти будут основным источником ошибки измерения. Поскольку элемент памяти может находиться в одном из двух возможных состояний (в зависимости от того, представляет ли он 0 или 1), то и создаваемая его полем ошибка может принимать лишь два возможных значения.

Но в большинстве практических ситуаций ошибка измерения возникает в результате накопления и наложения большого количества независимых факторов, а приведённый выше пример одного источника ошибок действительно экзотичен. Оказывается, что если некоторая величина есть сумма большого количества малых независимых компонент, то множество всевозможных значений этой величины близко к интервалу, причем чем меньше значимость (вклад) суммируемых компонент, тем меньше отличие результата от непрерывного интервала. То есть, возможные “дырки” между отдельными компонентами связности множеств неопределённости замазываются, закрываются, так что результирующее множество становится всё более связным и всё более

близким к интервалу. Действительно весомый аргумент в пользу применения интервалов при обработке данных!

Похожая ситуация имеет место в статистике: распределение большого числа малозначащих случайных величин близко к одному из так называемых *безгранично делимых распределений*, к которым принадлежит и широко известное нормальное гауссово распределение. Поэтому можно с уверенностью считать, что распределение суммарной погрешности в большинстве случаев также безгранично делимо — факт, широко используемый в большинстве статистических приложений.

Перейдем к формальным определениям и утверждениям.

Под суммой $A + B$ двух множеств $A, B \subset \mathbb{R}^1$ будем понимать множество $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Для данного $\delta > 0$ назовём множество A *δ -малым*, если $|a| \leq \delta$ для любого $a \in A$. Всюду ниже мы рассматриваем в качестве расстояния $\text{dist}(A, B)$ между множествами A и B хаусдорфову метрику, определяемую как наименьшее вещественное число d , такое что

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(|a - b| \leq d) \quad \text{и} \quad (\forall b \in B)(\exists a \in A)(|a - b| \leq d).$$

Кроме того, мы рассматриваем независимые компоненты ошибки, а множества их возможных значений берутся замкнутыми в хаусдорфовой метрике в согласии с теми выводами, которые были сделаны в §1.8в.

Теорема 1.9.1 [51] *Сумма замкнутых множеств вещественной оси \mathbb{R} , диаметр каждого из которых не превосходит δ , отличается в хаусдорфовой метрике от интервала не более чем на δ .*

Если для любого $\delta > 0$ множество E вещественной оси может быть представлено как конечная сумма замкнутых множеств диаметра не более δ , то E является интервалом.

Для многомерного случая полученные В. Крейновичем результаты существенно слабее, чем для одномерного. Тем не менее, они также весьма полезны и практически, и методически.

Теорема 1.9.2 [51] *В евклидовом пространстве \mathbb{R}^n сумма замкнутых множеств, диаметр каждого из которых не превосходит δ , отличается в хаусдорфовой метрике не более чем на δ от связного множества.*

Если для любого положительного δ множество $E \subset \mathbb{R}^n$ может быть представлено как конечная сумма замкнутых подмножеств \mathbb{R}^n диаметра не более δ , то E связно.

1.10 Компьютерные реализации и интервальные языки программирования

Поскольку интервалы в интервальном анализе рассматриваются как самостоятельные целостные сущности, то при вычислениях с ними на ЭВМ естественно ввести для них отдельный тип данных (назвав его, скажем, `INTERVAL`) аналогично стандартным типам данных `REAL` или `INTEGER`. Действия между объектами этого интервального типа будут подчиняться правилам (1.2)–(1.5).

Как известно, множество машинных чисел типа `REAL`, представимых в цифровых ЭВМ, не совпадает с идеальной математической вещественной осью \mathbb{R} , так что при выполнении операций весьма часто возникает необходимость заменить результат на машинно представимое число. Здесь возникает нетривиальный вопрос о способе этой замены, или *округления* в ЭВМ. На современных компьютерах округление по умолчанию выполняют обычно к ближайшему машинно представимому числу, но при необходимости этот способ округления может быть изменён с помощью системных команд и настроек. Как же округлять результаты арифметических операций с концами интервалов?

Какими способами интервалы и интервальные типы данных могут быть адаптированы для вычислений на ЭВМ? Здесь условно можно выделить две основные тенденции, проявившиеся с самого момента возникновения вычислительного интервального анализа:

1. Создание самостоятельных “интервальных” языков программирования
2. Создание библиотек интервальных операций и отношений, сопровождающих существующие языки программирования.

Ещё в 60-е годы прошлого века в Институте прикладной математики Университета Карлсруэ (Германия) под руководством У. Кулиша было создано расширение популярного тогда языка программирования АЛГОЛ-60, имевшее встроенный тип данных “вещественный интервал” и соответствующие арифметические операции и отношения. Впоследствии этим же коллективом был разработан ещё ряд языков программирования и средства их поддержки, которые содержали всё необходимое для интервальных и доказательных вычислений на ЭВМ. Это PASCAL-XSC, ACRITH-XSC, C-XSC.

ACRITH-XSC — это расширение языка Fortran-77, разработанное в сотрудничестве и при финансовой поддержке корпорации IBM в 80-е годы прошлого века [41]. К сожалению, он был жёстко завязан на архитектуру вычислительных машин серии IBM/370, да и то лишь тех, которые работали под управлением операционной системы VM CMS.

PASCAL-XSC и C-XSC — это расширения популярнейших языков программирования PASCAL и C++, причём первые версии интервального PASCAL'я появились ещё в 70-е годы под названием PASCAL-SC. Язык C-XSC — это стандартный C++, снабжённый библиотекой интервальных классов. Аббревиатура XSC расшифровывалась как eXtension for Scientific Computations, т.е. “расширение для научных вычислений”.

PASCAL-XSC является математически проработанным и сбалансированным языком программирования, действительно удовлетворяющим большинство нужд высокоточных научных расчетов [12].

Программное обеспечение для этих языков было создано под большое количество компьютерных платформ, но полноценного компилятора, преобразующего команды языка высокого уровня непосредственно в исполняемые машинные коды, пользователи PASCAL-XSC так и не получили. На сегодня создан только прекомпилятор, переводящий исходный текст программы на PASCAL-XSC в другой текст на стандартном языке Си, который уже далее должен преобразовываться в исполняемые коды каким-либо из доступных пользователю Си-компиляторов. Отчасти это было сделано коллективом У. Кулиша сознательно для того, чтобы обеспечить возможность работы своего языка на возможно большем количестве платформ и архитектур ЭВМ. Отчасти нежелание работать над компилятором было вызвано недостатком сил, а также тем, что это увело бы разработчиков слишком далеко от конкретных задач доказательных вычислений в дебри информатики.

Наконец, последняя по времени и наиболее масштабная разработка “интервального” языка программирования была выполнена американской корпорацией Sun Microsystems в 1997–2002-м годах. Выпуск в мае 2000-го года языка программирования FORTE Fortran/HPC 6, входящего составной частью в комплекс средств разработчика FORTE Developer 6 для популярных рабочих станций Sparc, стал значительным событием на рынке программного обеспечения последних лет³. За

³Предшествующее название этого комплекса — Sun Workshop 6. Более подробную информацию об условиях распространения, конкретных требованиях к аппа-

звучными коммерческими наименованиями скрывается хорошо известный Fortran-90, дополненный интервальными типами данных, а также операциями и отношениями с ними. Коренное преимущество поставляемого фирмой Sun продукта перед описываемым в этой книге PASCAL-XSC — наличие полноценного компилятора с кодогенератором, который преобразует написанную на языке FORTE Fortran программу в исполняемые коды ЭВМ.

Другие важные особенности нового языка — полная совместимость со стандартным Fortran-90, и как следствие, возможность использования большой и качественной библиотеки фортрановского математического обеспечения. Наконец, Fortran-90 — это современный язык профессионального программирования, в избытке снабжённый мощным средствами самого различного назначения, по-видимому, наиболее кардинальное расширение традиционного Fortran'a со времени его появления в середине 50-х годов. В целом, в сравнении с PASCAL-XSC, новый язык FORTE Fortran предоставляет

- 1) большее разнообразие управляющих конструкций, в частности, разнообразные средства для работы с массивами как часть самого языка;
- 2) чрезвычайно развитые средства ввода-вывода данных, их редактирования во входном и выходном потоках;
- 3) большее разнообразие программных компонентов и их связей друг с другом, и как следствие, большую свободу в выборе структуры программы;
- 4) существенно более разработанную библиотеку встроенных процедур, как обычных, так и интервальных.

Как и PASCAL-XSC, язык FORTE Fortran ориентирован на решение задач гарантированного внешнего интервального оценивания множеств решений и областей значений функций. Интервальная арифметика, другие операции и математические функции, а также операции ввода-вывода, реализуется в нём с постоянным (неотключаемым) внешним направленным округлением, очень качественным, так что погрешность внешнего оценивания на элементарных операциях не превышает, как правило, единицы последнего разряда выдаваемого результата. Но

ратному обеспечению, примеры программ и т.п. можно получить по Интернету с сайта <http://www.sun.com>

интервальные задачи в которых требуются иные, не внешние, способы оценивания множеств решений и областей значений выражений (рассматриваемые, к примеру, Главы 4, 6 и 11 нашей книги), получившие в интервальном анализе интенсивное развитие в последние годы, остаются вне области успешной применимости рассматриваемых языков программирования.

В то же время не всё в FORTE Fortran'е является однозначно лучшим в сравнении с PASCAL-XSC. Чрезвычайно развитая (как и во всех Fortran'ax) иерархия типов данных различной точности может служить источником весьма двусмысленных ситуаций. Некоторыми конструкциями разработчики языка даже не рекомендуют пользоваться, так как это может привести к потере фундаментального свойства гарантированности вычисленной интервальной оценки⁴.

В отличие от PASCAL-XSC в FORTE Fortran'е отсутствуют комплексные интервалы (хотя “точечный” комплексный тип данных является одним базисных встроенных типов данных), а смешение в одном арифметическом выражении комплексного и интервального типа диагностируется транслятором как синтаксическая ошибка. По мысли разработчиков языка, ничто не мешает пользователю исправить такое положение самому, введя в свою программу на FORTE Fortran'е производный тип данных, соответствующий желаемой комплексной интервальной арифметике. Напомним читателю, что комплексных арифметик существует несколько — прямоугольная, круговая, секторная и арифметика круговых колец, — каждая из которых является более предпочтительной для своего определённого класса задач, и такое многообразие отчасти оправдывает странное, на первый взгляд, проектное решение не поддерживать вообще никаких комплексных интервалов.

Наконец, еще одно полезное средство PASCAL'я-XSC, отсутствующее в языке FORTE Fortran, — это тип DOTPRECISION и связанные с ним высокоточные выражения (называемые также #-выражениями). В исходном виде они позволяют чрезвычайно точно вычислять значения выражений типа скалярных произведений, что уже само по себе немало: хорошо известно, что скалярные произведения, повсеместно встречаясь в алгоритмах линейной алгебры (и численного анализа вообще), являются одним из главных источников накопления ошибок округления и искажения результатов расчётов.

Но только этим значение высокоточных выражений не исчерпыва-

⁴В английской терминологии это называется “containment failure”.

ется. Нетрудно показать (это сделано, например, в работе [30]), что с помощью высокоточных выражений и так называемого длинного накапливающего регистра мы можем смоделировать на ЭВМ арифметику произвольной (или любой требуемой конечной) точности. Подобная арифметика является весьма дорогостоящей, но всё же её ограниченное применение является совершенно необходимым в критических местах некоторых современных численных алгоритмов (и будет необходимо в обозримом будущем). Дело в том, что интервальная арифметика сама по себе не является средством повышения точности результатов. Она, по сути, всего лишь *пассивно* отслеживает ошибки округления, которые возникают в процессе вычислений, но никак не мешает их возникновению. То есть, интервальная арифметика, конечно, делает накопление ошибки вполне контролируемым (повышает тем самым *надежность* вычислений), но не позволяет избежать её вовсе или хотя бы уменьшить. Для повышения точности счёта и окончательных результатов нужны *активные* средства противодействия ошибкам округления, т.е. повышение точности промежуточных данных и вычислений с ними, хотя бы в избранных местах алгоритмов, переформулировка самих алгоритмов и т.п.

Наконец, стоит упомянуть, что первая серьёзная аппаратная реализация интервальной арифметики на уровне команд процессора была выполнена уже упоминавшейся нами корпорацией Sun Microsystems, США. Архитектура UltraSPARC III стала первым массовым микропроцессором, специально разработанным для поддержки интервальных вычислений. Постоянное переключение моды округления при арифметических операциях с плавающей точкой, которой являлось необходимой компонентой всех предшествующих реализаций интервальной арифметики, — операция весьма медленная и она существенно снижала общую производительность интервальных вычислений. Это было преодолено на машинах с процессором UltraSPARC III, и на очереди стояла аппаратная реализация полного набора инструкций интервальной арифметики, что позволило бы свести разрыв в быстродействии компьютеров на обычных и интервальных операциях к минимуму. К сожалению, кризис углубляющийся в американской экономике, вынудил корпорацию Sun Microsystems отказаться от производства собственных микропроцессоров. Кто подхватит эстафету? Пока (на конец 2004 года) это не вполне ясно.

Касаясь перспектив развития интервальных языков программирования, следует признать совершенно необходимым наличие в них пол-

ного контроля за модой округления, т.е. включение, отключение и выставление направления её в различных операциях по желанию пользователя, а также, возможно, введение в язык дублирующих интервальных арифметических операции без направленного округления, как это предусмотрено в немецком проекте языка Fortran-SC [31]. В частности, нам нужны специальные форматы ввода-вывода, которые округляют “как нужно”.

Реализация библиотеки основных операций интервальной арифметики не представляет принципиальных трудностей, и может быть выполнена практически на любом из языков высокого уровня (PASCAL, Fortran, C, C++, ...) программистом средней квалификации, знакомым с особенностями машинной арифметики с плавающей точкой (см. [37, 42, 45]). Практическое руководство к такой реализации на C++ содержится, к примеру, в книге [43] в главе “Сделай сам” (“Do it yourself”). Существенно более сложной является оптимизация производительности интервальной арифметики для конкретных типов процессоров и архитектур ЭВМ, а также реализация интервальных расширений элементарных функций (тесно связанная с математической задачей наилучшего приближения функции).

В настоящее время наиболее популярными интервальными библиотеками являются `filib++` [55].

В последнее время всё более популярным становится программный комплекс INTLAB — свободно распространяемое интервальное расширение MATLAB’a [67], которое включает в себя аккуратную реализацию классической интервальной арифметики, интервальные векторно-матричные операции и большой набор инструментов для реализации интервальных методов решения систем нелинейных уравнений и нелинейной оптимизации — встроенные алгоритмы для вычисления градиентов функций, наклонов и т.п.

Комментарий к Главе 1

Истоки интервального анализа, как, видимо, и любой глубокой и плодотворной идеи, могут быть прослежены задолго до фактического оформления соответствующего научного направления. Наиболее курьёзной является на этот счёт точка зрения, высказанная изобретателем термина “интервальный анализ” американцем Р.Е. Муром, и состоящая в том, что первым “интервальщиком” следует считать Архимеда, пи-

роко использовавшего в своих расчётах двусторонние приближения, в частности, для определения границ числа π .

Так или иначе, но развитие “интервальной идеи” состоялось лишь в XX веке, причём оно оказалось тесно связанным с развитием и распространением практических вычислений. А оформление интервального анализа в самостоятельную научную дисциплину вообще стало возможным лишь с появлением ЭВМ.

В 1931 году англичанка Розалинда Янг [71] разработала арифметику для вычислений с множествами чисел. В 1951 году П. Двайер [28] в США рассматривал специальный случай замкнутых интервалов (числовые диапазоны) в связи с необходимостью учёта погрешностей в численном анализе. В 1956–58-м годах появились работы Мечислава Вармуса в Польше [70] и Терио Сунаги в Японии [69], предлагавшие классическую интервальную арифметику и намечавшие её приложения. При этом в [69] впервые были использованы и современные термины “интервал”, “интервальный”. Кроме того, Т. Сунага заложил основы интервального алгебраического формализма и дал весьма нетривиальные примеры применений новой техники, к примеру, в численном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [56]).

1959-м годом датируется начало многосторонней деятельности Раймона Мура [57], написавшего в 1966-м году первую систематическую монографию по интервальному анализу [58]. Ясный и свежий язык этой книги, новые интересные постановки задач, поучительные применения интервальной техники — всё это оказало громадное влияние на становление и развитие нового научного направления во всём мире.

В России и Советском Союзе “интервальную” историю можно отсчитывать с 20-х годов прошлого века, и связана она с именем видного русского советского математика и педагога В.М. Брадиса.

Владимир Модестович Брадис известен всем школьникам нашей страны своими математическими таблицами. Мало кому известна другая, гораздо более серьёзная сторона его научно-педагогической деятельности. С середины 20-х годов он проповедовал так называемый *метод границ* — способ организации вычислений, приводящий к достоверным двусторонним границам точного значения вычисляемого результата, фактически аналогичный интервальной арифметике. Работая в Тверском Педагогическом институте, он выступал с научно-методическими произведениями на эту тему, в частности,

БРАДИС В.М. *Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближёнными числами.* – Тверь, 1927.

БРАДИС В.М. *Теория и практика вычислений. Пособие для высших педагогических учебных заведений.* – Москва: Учпедгиз, 1937.

В докомпьютерную эпоху “метод границ” имел мало шансов на широкое воплощение в вычислительной практике, так как требовал увеличения числа выполняемых операций и скрупулёзного их выполнения. Тем не менее, идеи В.М. Брадиса были замечены и его статья “Устный и письменный счёт. Вспомогательные средства вычислений” была внесена в “Энциклопедию элементарной математики” (Книга 1. – М.: Учпедгиз, 1951), а её основные идеи упомянуты в книге Б.П. Демидовича и И.А. Марона “Основы вычислительной математики” (М.: Физматгиз, 1960). Вышеназванная “Энциклопедия элементарной математики” была переведена на немецкий язык в Германской Демократической Республике [29] и, таким образом, стала известна и за пределами нашей страны.

В 1962-м году в одном из первых выпусков “Сибирского математического журнала” появилась статья Леонида Витальевича Канторовича [11], обозначившего эту тематику как приоритетную для нашей вычислительной науки. Она написана чрезвычайно ясно и чётко, будучи кратким конспектом лекций, прочитанных автором в Ленинграде, Москве и Киеве. Замечательно, что в этой статье, где новое научное направление ещё не называется явно, но рельефно очерчивается, акцент в приложениях нового подхода делается как на повышении точности и надёжности численных алгоритмов, так и на перспективах развития аппарата для оперирования с ограниченными неопределённостями.

К тому времени Л.В. Канторович был уже признанным мастером в области функционального анализа и его приложений. В течение ряда лет он руководил Отделом приближённых вычислений Ленинградского отделения Математического Института АН СССР, одновременно работая в Ленинградском университете на кафедре вычислительной математики математико-механического факультета. В начале 60-х годов Л.В. Канторович был избран действительным членом Академии Наук СССР по Сибирскому Отделению, уехал из Ленинграда в Новосибирск, взяв с собой группу сотрудников и переменив область научных интересов. Упомянутую статью можно, по видимому, рассматривать, как своего рода научное завещание, обращённое, прежде всего, к тем, кто

остался.

Создание настоящей школы исследователей по интервальным вычислениям в СССР стало заслугой других людей — выдающегося советского математика и механика, многолетнего директора Института теоретической и прикладной механики Сибирского Отделения Академии Наук академика Николая Николаевича Яненко и его ученика Юрия Ивановича Шокина. Сам Н.Н. Яненко не имел работ по этой тематике, но лично создал интервальную группу, поддерживал и лелеял новое направление у себя в Институте теоретической и прикладной механики в Новосибирске. Н.Н. Яненко был редактором первой на русском языке книги [24] по интервальному анализу, написанной Ю.И. Шокиным.

Для введения в интервальный анализ можно порекомендовать читателю также книги [1, 6, 8, 18, 39, 49, 60]. За обзорами результатов и подробной библиографией по “округленческому” направлению мы отсылаем читателя к книгам Р.Е. Мура [58, 59], Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [1], С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина и З.Х. Юлдашева [8], Р.Б. Кирфотта [49], О. Аберта [26], курсу проф. Г.Г. Миньшикова [17].

К §1.1. Цитируемое определение математики восходит к Фридриху Энгельсу (“Анти-Дюринг”, глава 3). См., к примеру, МАРКС К., ЭНГЕЛЬС Ф. *Избранные сочинения. В 9-ти томах. Т. 5.* – Москва: Издательство политической литературы, 1986.

Наше определение связанных (зависимых) интервальных величин близко к тому, которое Л. Заде даёт в [9] для “взаимодействующих” переменных.

К §1.2. Уравновешенные интервалы часто называют симметричными относительно нуля или даже просто симметричными, но эти термины, на наш взгляд, весьма неудачны потому, что слово “симметричный” перегружено в математике.

Например, в линейной алгебре симметричными называют матрицы, у которых элементы расположены симметрично относительно главной диагонали. Но ведь интервальная матрица с “симметричными относительно нуля элементами” тоже имеет право называться “симметричной интервальной матрицей”! Наш язык тем самым чрезвычайно запутывается.

Термин “магнитуда” происходит от латинского слова *magnitudo*, означающего “величина”, и нередко применяется в естественных науках.

В частности, в геофизике магнитудой землетрясения называют условную величину, характеризующую общую энергию упругих колебаний, вызванных землетрясением или взрывом [5].

К §1.4а. Идея облегчить нахождение формальных решений интервальных уравнений путём предварительного перехода в более широкую алгебраическую систему была впервые предложена С.П. Шарым в [23].

Сам Э. Каухер называл свою арифметику “расширенной” [48]. Мы не следуем этому словоупотреблению потому, что интервальных арифметик, так или иначе расширяющих \mathbb{IR} (подчас весьма незначительно), было предложено немало, но арифметика Каухера занимает среди них уникальное место.

Подробное описание арифметики \mathbb{KR} и её многочисленных замечательных свойств можно найти, например, в оригинальных работах Э. Каухера [46, 48], или же в трудах испанских исследователей под руководством Э. Гарденьеса [32, 33, 34, 35, 36, 68]. При этом следует иметь в виду то обстоятельство, что, интенсивно применяя арифметику Каухера, испанцы пользуются своим собственным весьма специфическим языком, говоря о так называемых “модальных интервалах” и т.п.

К §1.10. Пакет INTLAB и всю необходимую документацию к нему можно найти в Интернете на сайте

<http://www.ti3.tu-harburg.de/~rump/intlab/>

Литература к главе 1

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] АЛТУНИН А.Е., СЕМУХИН М.В. *Модели и алгоритмы принятия решений в нечётких условиях*. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000.
- [3] БЕРЖЕ М. *Геометрия*. Т. 1–2. – Москва: Мир, 1984.
- [4] БИРКГОФ Г. *Теория решёток*. – Москва: Наука, 1984.
- [5] *Большая Советская Энциклопедия*. – Москва: БСЭ, 1970–77.
- [6] ДОБРОНЕЦ Б.С., ШАЙДУРОВ В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.

- [7] Дюбуа Д., Прад А. *Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике*. – Москва: Радио и связь, 1990.
- [8] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [9] Заде Л. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений*. – Москва: Мир, 1976.
- [10] Зорич В.А. *Математический анализ*. Т. 1. – Москва: Наука, 1981. Т. 2. – Москва: Наука, 1984.
- [11] Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал*. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
- [12] Клатте Р., Кулиш У., Неага М., Рац Д., Ульбрих Х. *PASCAL-XSC – язык численного программирования*. – Москва: ДМК-пресс, 2000.
- [13] Кофман А. *Введение в теорию нечётких множеств*. – Москва: Радио и связь, 1982.
- [14] Курковский С. Интервальные методы в компьютерной графике // *Монитор*. – 1993. – №7–8. – С. 76–85.
- [15] Курош А.Г. *Лекции по общей алгебре*. – Москва: Наука, 1973.
- [16] Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*. – Москва: Наука, 1985.
- [17] Меньшиков Г.Г. *Интервальный анализ и методы вычислений. Конспект лекций*. – Санкт-Петербург: СПбГУ, Факультет прикладной математики – процессов управления, 1998–2000.
- [18] Назаренко Т.И., Марченко Л.В. *Введение в интервальные методы вычислительной математики*. – Иркутск: Издательство Иркутского университета, 1982.
- [19] Оре О. *Теория графов*. – Москва: Мир, 1980.
- [20] Орловский С.А. *Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации*. – Москва: Наука, 1981.
- [21] *Физические величины. Справочник под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Михайнова*. – Москва: Энергоатомиздат, 1991.
- [22] Шарая И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // *Вычислительные Технологии*. – 1997. – Том 2, №1. – С. 71–83.
- [23] Шарый С.П. Об одной интервальной задаче линейной алгебры // *Информационно-оперативный материал*. – Красноярск, 1987. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №2). – С. 45–46.
- [24] Шокин Ю.И. *Интервальный анализ*. – Новосибирск: Наука, 1981.

- [25] ЯКОВЛЕВ А.Г. Машинная арифметика мультиинтервалов // *Вопросы кибернетики* (Научный Совет по компл. проблеме “Кибернетика” АН СССР). – 1986. – Вып. 125. – С. 66–81.
- [26] АВЕРТН О. *Precise numerical methods using C++*. – San Diego: Academic Press, 1998.
- [27] DIMITROVA N.S., MARKOV S.M., ПОРОВА E.D. Extended interval arithmetics: new results and applications // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods* / Atanassova L. and Herzberger J., eds. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – P. 225–232.
- [28] DWYER P.S. *Linear Computations*. – New York: John Wiley & Sons, 1951.
- [29] *Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band I Arithmetik. Dritte Auflage* / Grell H., Maruhn K., Rinow W., eds. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
- [30] FACIUS A. Influence of rounding errors in solving large sparse linear systems // *Developments in Reliable Computing* / T. Csendes, ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 17–30.
- [31] FORTRAN-SC
- [32] GARDEÑES E., TREPAT A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 161–179
- [33] GARDEÑES E., TREPAT A., JANER J.M. SIGLA-PL/1 development and applications // *Interval Mathematics 1980* / Nickel K., ed. – New York: Academic Press, 1980. – P. 301–315.
- [34] GARDEÑES E., TREPAT A., JANER J.M. Approaches to simulation and to the linear problem in the SIGLA system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – No. 81/8. – P. 1–28.
- [35] GARDEÑES E., TREPAT A., MIELGO H. Present perspective of the SIGLA interval system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1982. – No. 82/9. – P. 1–65.
- [36] GARDEÑES E., SAINZ M.A., JORBA L., CALM R., ESTELA R., MIELGO H., TREPAT A. Modal intervals // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 2. – P. 77–111.
- [37] GOLDBERG D. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic // *ACM Computing Surveys*. – 1991. – Vol. 23, No. 1. – P. 5–47.
- [38] HAMMER R., HOCKS M., KULISCH U., RATZ D. *C++ Toolbox for verified computing I. Basic numerical problems*. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

- [39] HANSEN E. *Global optimization using interval analysis*. – New York: Marcel Dekker, 1992.
- [40] HICKEY T., JU Q., VAN EMDEN M.H. Interval arithmetic: from principles to implementation // *Journal of the ACM*. – Vol. 48, No. 5. – P. 1038–1068.
- [41] IBM, *High Accuracy Arithmetic — Extended Scientific Computation (ACRITH-XSC)*, General Information, GC33-6461-01. – IBM, 1990.
- [42] IEEE COMPUTER SOCIETY, IEEE standard for binary floating-point arithmetic // *Technical Report IEEE Std. 754-1985*. – American National Standards Institute, 1985.
(См. <http://standards.ieee.org/>)
- [43] JAULIN L., KIEFFER M., DIDRIT O., WALTER E. *Applied interval analysis*. – London: Springer, 2001.
- [44] KAHAN W. A more complete interval arithmetic // *Lecture notes for a summer course*. – University of Toronto, Canada, 1968.
- [45] KAHAN W. Lecture notes on the status of IEEE-754. – Berkeley, 1996. – Электронная рукопись, доступная на <http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/ieee754status/ieee754.ps>
- [46] KAUCHER E. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. Dr. Naturwiss. Dissertation. – Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1973.
- [47] KAUCHER E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs- und Verbandsstrukturen // *Grundlagen der Computer-Arithmetic* / Albrecht R., Kulisch U., eds. – Wien: Springer, 1977. – P. 65–79. – (Computing Supplementum; 1)
- [48] KAUCHER E. Interval analysis in the extended interval space \mathbb{IR} // *Fundamentals of numerical computation (Computer-oriented numerical analysis)* / Alefeld G., Grigorieff R.D., eds. – Wien: Springer, 1980. – P. 33–49. – (Computing Supplement; 2)
- [49] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [50] KLATTE P., ULLRICH CH. Complex sector arithmetic // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 139–148.
- [51] KREINOVICH V. Why intervals? A simple limit theorem that is similar to limit theorems from statistics // *Reliable Computing*. – 1995. – Vol. 1, No. 1. – P. 33–40.
- [52] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). – P. 130–133.

- [53] LAKEYEV A.V. On existence and uniqueness of solutions of linear algebraic equations in Kaucher's interval arithmetic // *Developments in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 53–65.
- [54] LAVEUVE S.E. Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 236–245. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 29).
- [55] LERCH M., TISCHLER G., WOLFF VON GUDENBERG J., HOFSCHESTER W., KRÄMER W. The Interval Library `filib++` 2.0. Design, features and sample programs / Preprint 2001/4, Bergische Universität Wuppertal, 2001. – Can be downloaded from http://www.math.uni-wuppertal.de/wrswt/literatur/lit_wrswt.html
- [56] MARKOV S., OKUMURA K. The contribution of T. Sunaga to interval analysis and reliable computing // *Developments in Reliable Computing* / Cendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 167–188.
- [57] MOORE R.E. Automatic error analysis in digital computation // Technical report LMSD84821 of Lockheed Missiles and Space Division. – Sunnyvale: Lockheed Corp., 1959.
- [58] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [59] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [60] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [61] NOGUEIRA M., NANDIGAM A. Why intervals? If we allow other sets, tractable problems become intractable // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4, No. 4. – P. 389–394.
- [62] PETKOVIC M.S., MITROVIC Z.M., PETKOVIC L.B. Arithmetic of circular rings // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 133–142. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [63] POPOVA E.D. Algebraic solutions to a class of interval equations // *Journal of Universal Computer Science*. – 1998. – Vol. 4, No. 1. – P. 48–67.
- [64] POPOVA E.D. Generalized interval distributive relations and their applications // *MISC'99 – Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control, Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 13–23.
- [65] RATSCHKE H. Subdistributivität der Intervallarithmetik // *ZAMM*. – 1971. – Bd. 51. – S. 189–192.

- [66] RATSCHKE H. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 1972. – Bd. 252. – S. 128–138.
- [67] RUMP S.M. INTLAB — INTerval LABoratory // *Developements in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 77–104.
- [68] SIGLA/X GROUP. Modal intervals (Basic tutorial) // *MISC'99 – Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control. Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 139–207.
- [69] SUNAGA T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // *RAAG Memoirs*. – 1958. – Vol. 2, Misc. II. – P. 547–564.
- [70] WARMUS M. Calculus of approximations // *Bull. Acad. Polon. Sci.* – 1956. – Cl. III, vol. IV, No. 5. – P. 253–259.
- [71] YOUNG R.C. Algebra of many-valued quantities // *Mathematische Annalen*. – 1931. – Bd. 104. – S. 260–290.

Глава 2

Интервальные векторы и матрицы

2.1 Основные факты

Формально говоря, интервальный вектор — это упорядоченный кортеж из интервалов, расположенный вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка). Таким образом, если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — некоторые интервалы, то

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \text{ — это интервальный вектор-столбец,}$$

а

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n) \text{ — это интервальная вектор-строка.}$$

Множество интервальных векторов, компоненты которых принадлежат \mathbb{IR} , мы будем обозначать через \mathbb{IR}^n , а множество интервальных векторов с компонентами из \mathbb{KR} обозначается далее через \mathbb{KR}^n . При этом нулевые векторы, т.е. такие, все компоненты которых суть нули, мы традиционно обозначаем через “0”.

Но интервальные векторы — не вполне векторы, так как не образуют линейного векторного пространства в отличие, скажем, от \mathbb{R}^n .

Этому мешает отсутствие дистрибутивности в интервальных арифметиках, вследствие которого нарушается аксиома линейного пространства, требующая выполнения тождества

$$(\mu + \nu) \mathbf{a} = \mu \mathbf{a} + \nu \mathbf{a}$$

для любого вектора \mathbf{a} и скаляров $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Интервальные векторы из \mathbb{IR}^n неотделимы от своих геометрических образов — прямоугольных параллелепипедов в пространстве \mathbb{R}^n со сторонами, параллельными координатным осям. Мы будем называть их для краткости *брусами*.

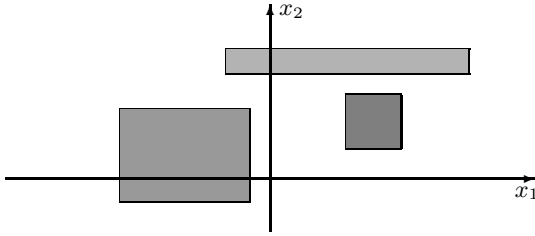


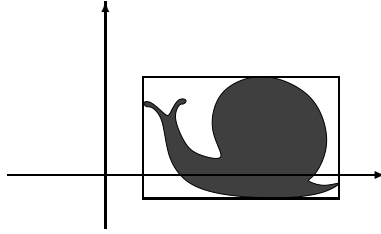
Рис. 2.1. Интервальные векторы-брусы в \mathbb{R}^2 .

Определение 2.1.1 Если S — непустое ограниченное множество в \mathbb{R}^n , то его интервальной оболочкой $\square S$ называется наименьший по включению интервальный вектор, содержащий S .

Нетрудно понять, что это определение равносильно такому: интервальная оболочка множества S — это пересечение всех интервальных векторов, содержащих S :

$$\square S = \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n \mid \mathbf{x} \supseteq S \}.$$

Определение 2.1.2 Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое подмножество пространства. Через $\mathbb{I}D$ будем обозначать множество всех брусков (интервальных векторов) $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ содержащихся в D , т.е. таких, что $\mathbf{x} \subseteq D$.

Рис. 2.2. Интервальная оболочка множества в \mathbb{R}^2 .

Интервальная матрица — это прямоугольная таблица, составленная из интервалов \mathbb{IR} либо \mathbb{KR} , и если

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix},$$

то привычно будем писать $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$. Как и в классической линейной алгебре, мы можем отождествлять интервальные векторы с интервальными матрицами размера $n \times 1$ (вектор-столбцы) либо $1 \times n$ (вектор-строки).

Операции взятия середины интервала, его радиуса и ширины —

$$\text{mid } \mathbf{x} := \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}),$$

$$\text{rad } \mathbf{x} := \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}),$$

$$\text{wid } \mathbf{x} := \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}},$$

а также операции “dual”, “pro”, “opp”, к интервальным векторам и матрицам будут применяться покомпонентно и поэлементно.

Как определить арифметические операции — сложение, вычитание и умножение — между интервальными векторами и матрицами? Для матриц с элементами из \mathbb{IR} естественным было бы определить их “по представителям”, т.е. потребовать выполнения многомерного аналога основного свойства (1.1), согласно которому результаты интервальных арифметических операций, выполняемых с интервальными матрицами совпадают с множествами всевозможных результатов тех же операций между точечными представителями этих матриц. Но в многомерном

случае это едва ли возможно в полном объёме, так как образ бруса при действии на него умножения на точечную матрицу является в общем случае косым параллелепипедом в \mathbb{R}^n , а не бруском.

Таким образом, для интервальных матриц вместо (1.1) при определении арифметических операций имеет смысл ограничиться более слабым требованием

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} := \square \{ \mathbf{A} \star \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B} \},$$

$$\star \in \{ +, -, \cdot \}.$$

Предложение 2.1.1 *Для любых интервальных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ справедливо*

$$\square \{ \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B} \} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}.$$

Мы приходим к следующему конструктивному определению интервальных матричных операций, общему как для классической интервальной арифметики \mathbb{IR} , так для полной интервальной арифметики \mathbb{KR} :

Определение 2.1.3 *Сумма (разность) двух интервальных матриц одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов.*

Если $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times l}$ и $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l \times n}$, то произведение матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} есть матрица $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times n}$, такая что

$$\mathbf{c}_{ij} := \sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}.$$

Упражнение 2.1.1. Перемножьте матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и интервальный вектор $([0, 1], [0, 1])^\top$, сравните получившийся интервальный вектор с множеством поэлементных произведений, т.е. с

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \mid x \in \begin{pmatrix} [0, 1] \\ [0, 1] \end{pmatrix} \right\},$$

сделайте выводы.

Предложение 2.1.2 Для любых интервальных матриц $A, B, C \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ справедливо

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$A \subseteq A', B \subseteq B' \Rightarrow A \pm B \subseteq A' \pm B'.$$

Особенность интервального матричного умножения — отсутствие ассоциативности. Например, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} [-1, 1] & 0 \\ 0 & [-1, 1] \end{pmatrix}$$

имеем

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 0 & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} [-2, 2] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [1, 1] \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц с элементами из полной интервальной арифметики, очевидно, также не ассоциативно.

Отсутствие ассоциативности у интервального матричного умножения — большая потеря, которая, наряду с субдистрибутивностью, делает интервальную матрично-векторную алгебру, по-существу, нелинейной, непохожей на классическую “линейную алгебру” и гораздо более бедной.

Например, решение системы линейных уравнений вида $Ax = b$ нам привычно выражать в виде $A^{-1}b$. Но в интервальном случае аналог понятия решения — так называемое формальное решение (см. Определение 4.3.2) интервальной линейной системы $Ax = b$ — уже не может быть выражено как $A^{-1}b$. Хотя в полной интервальной арифметике Каухера мы можем попытаться определить формально обратную интервальную матрицу A^{-1} через

$$AA^{-1} = I,$$

но проку от её введения будет немного, коль скоро

$$A(A^{-1}b) \neq (AA^{-1})b.$$

Важное практическое следствие из отсутствия ассоциативности в интервальном матричном умножении — это необходимость расстановкой скобок определять порядок операций в выражениях, содержащих более двух умножений подряд. В интервальной матричной алгебре выражения вида \mathbf{ABC} не имеют однозначного смысла, так как их результат зависит от порядка выполнения умножений, а нам в этих условиях нужно чётко писать, требуется ли по смыслу задачи $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ или $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Предложение 2.1.3 Если $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times l}$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times k}$, $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, то

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) \subseteq (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

Если $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times l}$ — матрица, составленная из неправильных элементов, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times k}$, $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, то

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) \subseteq (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

Доказательство. В силу субдистрибутивности

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij} &= \sum_{\mu=1}^l a_{i\mu} \left(\sum_{\nu=1}^k b_{\mu\nu} c_{\nu j} \right) \subseteq \sum_{\mu=1}^l \sum_{\nu=1}^k a_{i\mu} b_{\mu\nu} c_{\nu j} \\ &= \sum_{\mu=1}^l \left(\sum_{\nu=1}^k a_{i\mu} b_{\mu\nu} \right) c_{\nu j} = ((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij}. \end{aligned}$$

Второе соотношение доказывается аналогичным образом. ■

В некоторых важных частных ситуациях ассоциативность для интервальных матричных произведений всё-таки имеет место. В частности, справедливо

Предложение 2.1.4 Если $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l \times k}$, $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, то

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 ((AB)C)_{ij} &= \sum_{\nu} (AB)_{i\nu} c_{\nu j} = \sum_{\nu} \left(\sum_{\mu} a_{i\mu} \mathbf{b}_{\mu\nu} \right) c_{\nu j} \\
 &= \sum_{\nu} \sum_{\mu} (a_{i\mu} \mathbf{b}_{\mu\nu}) c_{\nu j} = \sum_{\nu} \sum_{\mu} a_{i\mu} (\mathbf{b}_{\mu\nu} c_{\nu j}) \\
 &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{i\mu} (\mathbf{b}_{\mu\nu} c_{\nu j}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\mu} \left(a_{i\mu} \sum_{\nu} \mathbf{b}_{\mu\nu} c_{\nu j} \right) \\
 &= \sum_{\mu} a_{i\mu} (BC)_{\mu j} = (A(BC))_{ij},
 \end{aligned}$$

где для вынесения за сумму общего множителя $a_{i\mu}$ в равенстве $(*)$ мы воспользовались дистрибутивным соотношением (1.46). ■

Пример. Рассмотрим в \mathbb{IR}^2 итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow ([1 - \epsilon, 1 + \epsilon], [-\epsilon, \epsilon])^{\top}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{1.15} R \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

с 2×2 -матрицей

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что эти итерации расходятся: их результатом являются неограниченно увеличивающиеся в размерах брусы, вращающиеся вокруг начала координат и постепенно его захватывающие.

С другой стороны, коль скоро

$$\frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

то матрица R задаёт поворот плоскости вокруг начала координат на $(-\frac{\pi}{3})$, а в итерациях (2.2) это сопровождается ещё и сжатием в 1.15 раза. Поэтому образ начального бруса, рассматриваемый в итерациях (2.1)–(2.2) как множество всевозможных образов точек из начального бруса, сходится к нулю (см. Рис. 2.1).

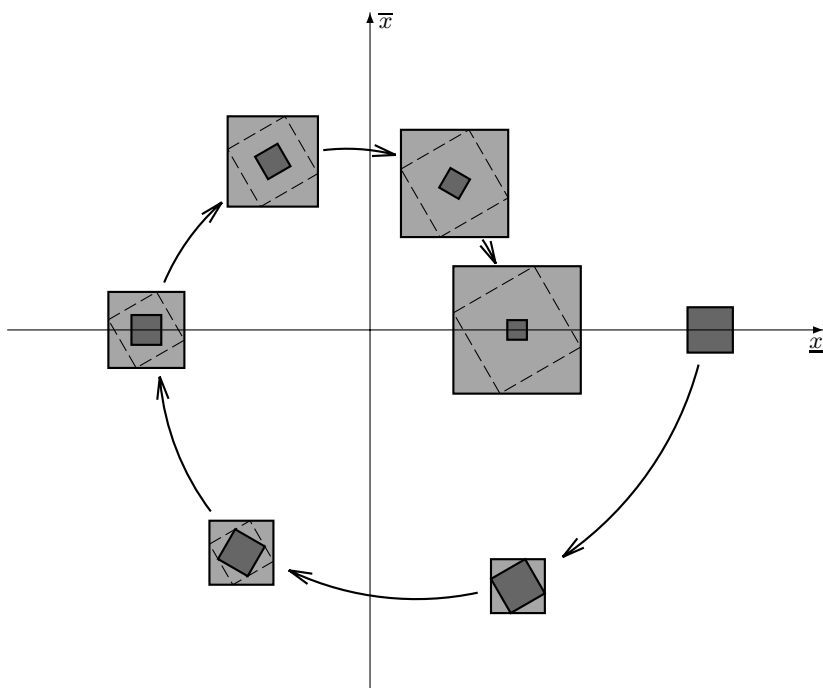


Рис. 2.3. Эффект обёртывания при многократном матрично-векторном интервальном умножении. (Интервальный вектор на каждой итерации умножается на вещественную матрицу, соответствующую повороту на -60 градусов и сжатию в 1.15 раз. При поточечном преобразовании начальный брус, вращаясь, сжимается к началу координат. При интервальном умножении на каждом шагу берется интервальная оболочка точечного преобразования, поэтому радиус бруса увеличивается примерно в 1.2 раза на каждой итерации).

Мы будем называть *эффектом обёртывания* паразитное увеличение оценивающего множества в сравнении с множеством решений при итерировании либо рекуррентных вычислениях, происходящее от последовательной (пошаговой) замены множества решений на более простые оценивающие множества.

Предложение 2.1.5

$$\begin{aligned}
 \text{mid } (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \text{mid } \mathbf{A} \pm \text{mid } \mathbf{B}, \\
 \text{mid } (\mathbf{A} \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot \text{mid } \mathbf{B}, \\
 \text{mid } (\mathbf{A} \mathbf{B}) &= \text{mid } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \\
 \text{rad } (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \text{rad } \mathbf{A} + \text{rad } \mathbf{B}, \\
 \text{rad } (\mathbf{A})|\mathbf{B}| &\leq \text{rad } (\mathbf{A} \mathbf{B}) \leq \text{rad } (\mathbf{A})|\mathbf{B}| + |\text{mid } \mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B},
 \end{aligned}$$

Упорядочение по включению на множестве интервальных векторов и матриц с элементами из \mathbb{KR} есть, по определению, прямое произведение [2, 3] порядков по включению на отдельных компонентах \mathbb{KR} . Таким образом,

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \mathbf{a}_i \subseteq \mathbf{b}_i \quad \text{для всех } i.$$

Операции \vee и \wedge в применении к интервальным векторам, будут, следовательно, пониматься покомпонентно, т.е.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \vee \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \vee \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \vee \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \wedge \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в покомпонентном смысле будет пониматься отношение “ \leq ” между интервальными векторами.

2.2 Метрика и топология на интервальных пространствах

Топология на многомерных интервальных пространствах \mathbb{IR}^n и \mathbb{KR}^n может быть определена двумя способами. Стандартный способ — введение обычной метрики

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max\{\|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}\|, \|\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}\|\}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}^n, \quad (2.3)$$

где $\|\cdot\|$ — абсолютная векторная норма на \mathbb{R}^n . Для пространства \mathbb{IR}^n эта метрика совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как брусами в \mathbb{R}^n . Но иногда бывает полезно работать с векторнозначным расстоянием — *мультиметрикой*, — которая вводится на \mathbb{KR}^n как

$$\text{Dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.4)$$

Все интервальные арифметические операции, матрично-векторные операции на \mathbb{KR}^n , а также операции \vee , \wedge , “dual”, “pro” и “opp” являются непрерывными как в метрике (2.3) (см. [23]), так и в мультиметрике (2.4).

Аналогичным образом мультиметрика вводится на множестве интервальных матриц: для $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})$ из $\mathbb{IR}^{m \times n}$ или $\mathbb{KR}^{m \times n}$ полагаем

$$\text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{b}_{11}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{1n}, \mathbf{b}_{1n}) \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{21}, \mathbf{b}_{21}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{2n}, \mathbf{b}_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{m1}, \mathbf{b}_{m1}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{mn}, \mathbf{b}_{mn}) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Наша ближайшая цель — обобщение оценки (1.63) на многомерный случай, когда \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} являются интервальными векторами или матрицами, а расстоянием между ними измеряется мультиметрикой Dist . Справедливо

Предложение 2.2.1 *Для любых интервальных матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l \times m}$ и $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})$, $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times n}$ имеет место*

$$\text{Dist}(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{B}, \mathbf{C}). \quad (2.6)$$

Доказательство. Действительно, в силу неравенств (1.62)–(1.63) мы можем заключить, что

$$\begin{aligned} \text{dist}((\mathbf{AB})_{ij}, (\mathbf{AC})_{ij}) &= \text{dist}\left(\sum_{k=1}^m \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}, \sum_{k=1}^m \mathbf{a}_{ik} \mathbf{c}_{kj}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^m \text{dist}(\mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}, \mathbf{a}_{ik} \mathbf{c}_{kj}) \\ &\leq \sum_{k=1}^m |\mathbf{a}_{ik}| \cdot \text{dist}(\mathbf{b}_{kj}, \mathbf{c}_{kj}) \end{aligned}$$

при всех $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, что и доказывает многомерную оценку (2.6). ■

Совершенно аналогичным образом доказывается

Предложение 2.2.2 Для любых интервальных матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l \times m}$, $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times n}$ имеет место

$$\text{Dist}(\mathbf{AC}, \mathbf{BC}) \leq \text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot |\mathbf{C}|.$$

Необходимость его отдельной формулировки вызвана тем, что матричное умножение некоммутативно.

Важнейший частный случай вышедоказанных предложений — неравенство

$$\text{Dist}(\mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (2.7)$$

для интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{KR}^{m \times n}$ и интервальных векторов $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{KR}^n$.

2.3 Нормы и спектральный радиус

Традиционным атрибутом большинства линейных векторных пространств, используемых в практике математического моделирования, является понятие нормы вектора. Чрезвычайно полезно ввести его и для пространств интервальных векторов \mathbb{IR}^n и \mathbb{KR}^n , несмотря на то, что линейными они не являются.

Мы будем называть *нормой* интервального вектора \mathbf{x} вещественную величину, обозначаемую $\|\mathbf{x}\|$, и удовлетворяющую следующим аксиомам

- 1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, причём $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ — неотрицательность,
- 2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ для $\alpha \in \mathbb{R}$ — абсолютная однородность,
- 3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ — “неравенство треугольника”.

Например, можно определить норму интервального вектора $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ как

$$\|\mathbf{x}\| := |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + \dots + |\mathbf{x}_n|,$$

или

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{|\mathbf{x}_1|^2 + |\mathbf{x}_2|^2 + \dots + |\mathbf{x}_n|^2},$$

или же как

$$\|\mathbf{x}\| := \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{x}_i|.$$

Эти примеры подсказывают естественный и весьма общий приём конструирования норм интервальных векторов. Именно, если выражениям $N(x)$ задаётся абсолютная норма точечных векторов $x \in \mathbb{R}^n$, то для интервальных векторов x той же размерности выражением $N(|x|)$ также задаётся норма.

Аналогично интервальным векторам желательно иметь в своём распоряжении понятие нормы и для интервальных матриц. Станем называть нормой интервальной матрицы \mathbf{A} вещественную величину $\|\mathbf{A}\|$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, причём $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$ — неотрицательность,
- 2) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$ для $\alpha \in \mathbb{R}$ — абсолютная однородность,
- 3) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ — “неравенство треугольника”.
- 4) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ — субмультипликативность.

Например, можно определить норму интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{m \times n}$ как

$$\|\mathbf{A}\| := \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}| \right),$$

или

$$\|\mathbf{A}\| := \sqrt{\text{максимальное собственное значение матрицы } (|\mathbf{A}| |\mathbf{A}|^\top)},$$

или же как

$$\|\mathbf{A}\| := \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Далее в наших построениях особую роль будет играть некоторая специальная матричная норма.

Определение 2.3.1 Для положительного вектора $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, назовём u -масштабированной максимум-нормой интервальной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ величину

$$\|\mathbf{A}\|_u := \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{u_i} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| u_k \right).$$

Нетрудно убедиться, что для вещественных матриц этим определением действительно задаётся матричная норма, подчиненная векторной u -масштабированной максимум-норме

$$\|x\|_u := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i|}{u_i}.$$

Кроме того, u -масштабированная максимум-норма интервальной матрицы является абсолютной нормой.

Напомним, что *спектральным радиусом* точечной $n \times n$ -матрицы A , обозначаемым $\rho(A)$, называется наибольшее из абсолютных значений собственных чисел A , или, иначе, наименьший радиус круга комплексной плоскости с центром в начале координат, который целиком содержит спектр матрицы A . Известно, что спектральный радиус матрицы не превосходит любую из её норм (см. [4, 16, 17]). Поэтому, в частности,

$$\rho(|\mathbf{A}|) \leq \|\mathbf{A}\|_u$$

для всякой $\mathbf{A} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *разложимой*, если существует разбиение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ первых n натуральных чисел на два непересекающихся подмножества I и J , таких что $a_{ij} = 0$ при $i \in I$ и $j \in J$. Эквивалентное определение: матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ разложима, если путём перестановок строк и столбцов она может быть приведена к блочно-треугольному виду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

с квадратными блоками A_{11} и A_{22} . Матрицы, не являющиеся разложимыми, называются *неразложимыми*.

Теорема 2.3.1 (теорема Перрона-Фробениуса) *Неразложимая неотрицательная матрица всегда имеет положительное собственное значение, которое является простым корнем характеристического уравнения, и модули других собственных чисел не превосходят его. Этому собственному значению соответствует собственный вектор с положительными компонентами.*

Предложение 2.3.1 *Пусть $A \in \mathbb{R}^n$ — неотрицательная матрица, α — положительное вещественное число. Тогда*

$$\rho(A) < \alpha \iff (\exists v \in \mathbb{R}^n) (v > 0 \text{ и } Av < \alpha v), \quad (2.8)$$

$$\rho(A) \geq \alpha \iff (\exists v \in \mathbb{R}^n) (v > 0 \text{ и } Av \geq \alpha v). \quad (2.9)$$

Доказательство этого предложения может быть найдено, например, в книге Р. Хорна и Ч. Джонсона [17], либо в англоязычных источниках [21, 28]. С другой стороны, неявным образом Предложение 2.3.1 обосновывается в доказательстве Х. Виландта теоремы Перрона-Фробениуса, которое воспроизводится во многих пособиях по теории матриц, например, в классической книге Ф. Гантмахера [6]. ■

Определение 2.3.2 *Интервальное отображение $f : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ назовём P -сжатием (или P -сжимающим), если существует неотрицательная $n \times n$ -матрица P со спектральным радиусом $\rho(P) < 1$, такая что для всех $x, y \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ имеет место*

$$\text{Dist}(f(x), f(y)) \leq P \cdot \text{Dist}(x, y).$$

Это определение — частный случай общего определения P -сжатия мультиметрического пространства (см., например, [14]), и для случая классической интервальной арифметики оно было рассмотрено, например, в [1]. Следует отметить, что исследователи, к сожалению, не придерживаются здесь единой терминологии. Ряд авторов (см. [28]) за матрицей P закрепляют отдельное понятие “оператора Липшица (матрицы Липшица) отображения f ”, и в условиях Определения 2.3.2 говорят, что “оператор Липшица для f сжимающий”.

Теорема 2.3.2 (теорема Шрёдера о неподвижной точке)

Пусть отображение $\Phi; \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является P -сжатием на замкнутом подмножестве D метрического пространства. Тогда для любого $x^{(0)}$ последовательность

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$$

сходится к единственной неподвижной точке x^* отображения Φ в D и имеет место оценка

$$\text{Dist}(x^{(k)}, x^*) \leq (I - P)^{-1} P \cdot \text{Dist}(x^{(k)}, x^{(k-1)}).$$

2.4 Неособенные интервальные матрицы

Определение 2.4.1 Интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной (невырожденной), если неособенными являются все точечные $n \times n$ -матрицы $A \in A$. Интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется особенной (вырожденной), если она содержит особенную точечную матрицу.

Упражнение 2.4.1. Особенными или неособенными являются интервальные матрицы

$$\begin{pmatrix} [0, 1] & [2, 3] \\ [4, 5] & [6, 7] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [1, 2] & [3, 4] \\ [5, 6] & [7, 8] \end{pmatrix}?$$

В общем случае проверка того, является ли данная интервальная матрица особенной или неособенной, представляет собой NP-трудную задачу [33]. В наиболее сильной форме соответствующий результат утверждает даже [32], что для всякого $\epsilon > 0$ NP-трудна задача выяснения особенности/неособенности интервальных матриц вида

$$[A - \epsilon E, A + \epsilon E],$$

где A — неотрицательная симметричная положительно определённая матрица с рациональными элементами, а E — матрица, все элементы которой равны 1. Принимая во внимание эти результаты и современное состояние теории сложности вычислений (гипотезу “ $P \neq NP$ ”, см. [8]), мы не должны ожидать существования полиномиально-сложных алгоритмов для проверки неособенности общих интервальных матриц. Что касается практических вычислений, то в них имеет смысл сосредоточиться на выработке несложных достаточных условий, причём желательно

иметь в своём распоряжении, по возможности, более широкий набор таких критериев, чтобы охватывать наиболее широкий ряд интервальных матриц, так как те или иные конкретные критерии, как правило, лучше приспособлены для каких-то отдельных классов задач.

Первое рассматриваемое нами необходимое и достаточное условие особенности интервальных матриц тесно связано с характеристикой Оеттли-Прагера для объединённого множества решений ИСЛАУ (см. §5.2б), так что по предложению И. Рона мы называем его именами этих исследователей.

Теорема 2.4.1 (критерий Оеттли-Прагера)

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ особенная тогда и только тогда, когда неравенство

$$|(\text{mid } \mathbf{A})x| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|x| \quad (2.10)$$

имеет ненулевое решение.

Доказательство. Необходимость. Если \mathbf{A} содержит особенную матрицу A , то $Ax = 0$ для некоторого ненулевого вектора x . Следовательно,

$$|(\text{mid } \mathbf{A})x| = |(\text{mid } \mathbf{A} - A)x| \leq |A - \text{mid } \mathbf{A}||x| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|x|,$$

поскольку $|A - \text{mid } \mathbf{A}| \leq \text{rad } \mathbf{A}$.

Достаточность. Если неравенство (2.10) действительно имеет решение $\tilde{x} \neq 0$, то для векторов $y = (y_i)$, $z = (z_j) \in \mathbb{R}^n$, таких что

$$y_i = \begin{cases} \frac{(\text{mid } \mathbf{A} \cdot \tilde{x})_i}{(\text{rad } \mathbf{A}|\tilde{x}|)_i}, & \text{если } (\text{rad } \mathbf{A}|\tilde{x}|)_i \neq 0, \\ 1, & \text{если } (\text{rad } \mathbf{A}|\tilde{x}|)_i = 0 \end{cases}$$

и

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{x}_j \geq 0, \\ -1, & \text{если } \tilde{x}_j < 0, \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$, рассмотрим матрицу \tilde{A} с элементами

$$(\text{mid } \mathbf{A})_{ij} - y_i z_j (\text{rad } \mathbf{A})_{ij}.$$

В матричном виде она может быть представлена как

$$\tilde{A} = \text{mid } \mathbf{A} - \text{diag } \{y\} \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{diag } \{z\}.$$

Так как все $|y_i z_j| \leq 1$, то, очевидно, \tilde{A} принадлежит \mathbf{A} . В то же время, она особенная, так как её произведение на ненулевой вектор \tilde{x} зануляется. В самом деле,

$$\begin{aligned}\tilde{A}\tilde{x} &= (\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} - \text{diag} \{y\} (\text{rad } \mathbf{A}) \text{diag} \{z\} \tilde{x} \\ &= (\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} - \text{diag} \{y\} (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|,\end{aligned}$$

причём i -ая компонента этого вектора равна

$$((\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x})_i - ((\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|)_i,$$

если $((\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|)_i \neq 0$, или разности двух нулей (в силу (2.10)), если $((\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|)_i = 0$. ■

Доказательство Теоремы 2.4.1 носит, как видим, конструктивный характер и позволяет по нетривиальному решению неравенства (2.10) указать, какую именно особенную точечную матрицу содержит данная интервальная матрица. Тем не менее, принимая во внимание результат об NP-трудности определения особенности/неособенности общих интервальных матриц, нахождение таких нетривиальных решений для (2.10) есть дело непростое.

Теорема 2.4.2 *Интервальная матрица \mathbf{A} неособенна тогда и только тогда, когда для каждого ортанта \mathcal{O} в \mathbb{R}^n существует решение системы неравенств*

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) x| > (\text{rad } \mathbf{A}) |x|,$$

удовлетворяющее $(\text{mid } \mathbf{A}) x \in \mathcal{O}$.

В отличие от предшествующей теоремы доказательство этого результата является нетривиальным и требует привлечения разнообразных фактов, касающихся линейной задачи о дополнительности, так называемых P -матриц и т.п. Практическое значение Теоремы 2.4.2 невелико, так как её применение требует, фактически, решения 2^n линейных неравенств (в каждом из ортантов пространства). Но Теоремы 2.4.1–2.4.2 составляют основу для конструирования более практичных признаков особенности/неособенности интервальных матриц, выводом которых мы и займёмся в оставшейся части параграфа.

Теорема 2.4.3 (признак Риса-Бека) Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\text{mid } \mathbf{A}$ неособенная и

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1. \quad (2.11)$$

Тогда \mathbf{A} неособенная.

Доказательство. Предположим, напротив, что интервальная матрица \mathbf{A} особенная. Тогда Теореме 2.4.1 существует ненулевой вектор x , такой что $|(\text{mid } \mathbf{A})x| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|x|$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |x| &= |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}(\text{mid } \mathbf{A})x| \\ &\leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})x| \\ &\leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot (\text{rad } \mathbf{A}) \cdot |x|, \end{aligned}$$

откуда следует, что спектральный радиус матрицы $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|(\text{rad } \mathbf{A})$ не меньше единицы. Противоречие! ■

Теорема 2.4.4 Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\text{mid } \mathbf{A}$ неособенная и

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left(\text{rad } \mathbf{A} \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \right)_{jj} \geq 1. \quad (2.12)$$

Тогда \mathbf{A} особенная.

Доказательство. Пусть j — индекс, для которого

$$(\text{rad } \mathbf{A} \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|)_{jj} \geq 1.$$

■

Для уяснения практической силы признака Риса-Бека полезен следующий результат, установленный З. Румпом [34]: для всякого $n \geq 1$ найдётся такая неособенная интервальная $n \times n$ -матрица \mathbf{A} , что

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) > n - 1.$$

Таким образом, признак Риса-Бека не отличается большой чувствительностью!

Практическое применение критериев, которые сформулированы в виде Теорем 2.4.3–2.4.4 имеет определённую специфику. Именно, если вычисление обратной средней матрицы $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ выполняется приближённо, например, на современных цифровых ЭВМ в арифметике с плавающей точкой, то и неравенства (2.11)–(2.12) мы, строго говоря, проверить не сможем. Необходимы, следовательно переформулировки результатов Теорем 2.4.3–2.4.4, которые бы учитывали приближённый характер обращения $\text{mid } \mathbf{A}$. Они были даны Г. Рексом и И. Роном в [30].

Теорема 2.4.5 *Если существует матрица $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что*

$$\rho(|I - R \cdot \text{mid } \mathbf{A}| + |R| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1, \quad (2.13)$$

то интервальная матрица \mathbf{A} — неособенная.

Теорема 2.4.6 *Если существует матрица $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что по-компонентное неравенство*

$$(I + |I - \text{mid } \mathbf{A} \cdot R|)_{:,j} \leq (\text{rad } \mathbf{A} \cdot |R|)_{:,j} \quad (2.14)$$

выполнено для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то интервальная матрица \mathbf{A} — особенная.

Для вычисления фигурирующего в Теоремах 2.4.3–2.4.5 спектрального радиуса можно с успехом применять степенные итерации [7, 9, 15, 16]. Действительно, матрицы

$$|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A} \quad \text{и} \quad |I - R \cdot \text{mid } \mathbf{A}| + |R| \cdot \text{rad } \mathbf{A}$$

— неотрицательные и в силу теоремы Перрона-Фробениуса обладают неотрицательным собственным значением, которое превосходит по модулю все остальные собственные значения. В этих условиях степенные итерации сходятся без патологий, вызванных возможным наличием у исследуемой матрицы комплексно сопряженных собственных значений или нелинейного элементарного делителя. Тем не менее, для ускорения сходимости степенных итераций может потребоваться применение так называемых сдвигов [15, 16].

Если средняя матрица $\text{mid } \mathbf{A}$ является почти особенной, то тесты, использующие обратную к ней матрицу, могут оказаться малоэффективными. З. Румп [34] был первым, кто предложил условия регулярности, не опирающиеся на нахождение “обратной средней”, хотя это и

достигается ценой вычисления информации о сингулярном спектре исследуемой матрицы. Напомним, что *сингулярными числами* матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называются корни квадратные из собственных чисел матриц $A^\top A$ или AA^\top (что одно и то же). Мы будем обозначать через σ_{\min} и σ_{\max} наименьшее и наибольшее сингулярные значения матрицы.

Теорема 2.4.7 (признак Румпа) *Если для интервальной матрицы \mathbf{A} имеет место*

$$\sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}), \quad (2.15)$$

то она неособенная.

Доказательство. Предположим обратное доказываемому: матрица \mathbf{A} — неособенная. Тогда для некоторого $x \neq 0$ справедливо неравенство (2.10), а также равносильное ему покомпонентное неравенство для вектор-строк

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) x|^\top \leq ((\text{rad } \mathbf{A})|x|)^\top.$$

Перемножая их скалярно друг с другом и принимая во внимание неотрицательность, получим

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) x|^\top |(\text{mid } \mathbf{A}) x| \leq ((\text{rad } \mathbf{A})|x|)^\top (\text{rad } \mathbf{A})|x|.$$

Далее мы можем считать, что вектор x нормализован, т.е. $\|x\|_2 = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}^2(\text{mid } \mathbf{A}) &= \lambda_{\min}((\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A})) \\ &= \min_{\|x\|=1} x^\top (\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A}) x \\ &\leq ((\text{mid } \mathbf{A}) x)^\top ((\text{mid } \mathbf{A}) x) \\ &\leq |(\text{mid } \mathbf{A}) x|^\top |(\text{mid } \mathbf{A}) x| \\ &\leq ((\text{rad } \mathbf{A})|x|)^\top (\text{rad } \mathbf{A})|x| \\ &= |x|^\top (\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})|x| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} x^\top ((\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})) x \\ &= \lambda_{\max}((\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})) = \sigma_{\max}^2(\text{rad } \mathbf{A}), \end{aligned}$$

так что в целом

$$\sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) \leq \sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}),$$

а это противоречит нашему исходному допущению. ■

Как утверждает И. Рон, существуют контрпримеры, указывающие, что ни одно из условий неособенности интервальных матриц (2.11) и (2.15) не выводится из другого.

Теорема 2.4.8 (признак Рона-Рекса)

Если для интервальной матрицы \mathbf{A} имеет место

$$\sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{A}) \geq \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{A}), \quad (2.16)$$

то она особенная.

Доказательство. Пусть, вопреки доказываемому, матрица \mathbf{A} является особенной. Тогда в силу Теоремы 2.4.2, применённой к неотрицательному ортанту \mathcal{O} , существует x , удовлетворяющий

$$(\text{mid } \mathbf{A})x > (\text{rad } \mathbf{A})|x|.$$

Опять-таки, можно далее считать, что $\|x\|_2 = 1$, и тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}((\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A})) &\geq x^\top (\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A})x \\ &> |x|^\top (\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})|x| \\ &\geq \lambda((\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})), \end{aligned}$$

что противоречит (2.16). ■

Вопросы, связанные с нахождением сингулярных чисел матриц, хорошо разработаны в современном численном анализе (см. [7, 9]). Для вычисления сингулярных чисел созданы надёжные алгоритмы, а реализующие их готовые подпрограммы входят в стандартные пакеты численных методов линейной алгебры (типа свободно распространяемого LAPACK'а [24]). В среде MATLAB также имеются средства для вычисления сингулярных чисел матриц: это функция `svd`.

Следует подчеркнуть, что рассмотренные выше признаки — Риса-Бека, Румпа и Рекса-Рона — являются лишь достаточными условиями

неособенности либо особенности интервальной матрицы, и ситуация, когда даже их совместное применение не позволяет сделать никакого определённого заключения о свойствах матрицы, не столь уж редка.

Определение 2.4.2 [28] *Будем говорить, что интервальная матрица \mathbf{A} сильно неособенная (сильно невырожденная, сильно регулярная), если неособенна интервальная матрица $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$.*

Ясно, что если интервальная матрица сильно неособенная, то она и просто неособенная. Но из неособенности не следует сильная неособенность. Контрпримером могут служить матрицы Ноймайера, предложенные в книге [28]:

$$\begin{pmatrix} t & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & t & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & t \end{pmatrix},$$

где t — вещественный параметр. Оказывается, что матрицы Ноймайера чётного порядка n неособенны при $t > n$, а матрицы нечётного порядка n неособенны при $t > \sqrt{n^2 - 1}$. Но при значениях t , близких к границе неособенности, матрицы Ноймайера уже не являются сильно неособенными. Такова, например, 3×3 -матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3 \end{pmatrix}.$$

Предложение 2.4.1 *Интервальная матрица \mathbf{A} сильно неособенна тогда и только тогда, когда*

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1.$$

Доказательство. Пусть \mathbf{A} сильно неособенна

■

Границы между неособенностью и сильной неособенностью для матриц Ноймайера различных порядков, которые оказываются полезными

Таблица 2.1. Критические значения диагонального параметра для матриц Ноймайера различных порядков

размерность матрицы	диагональный параметр t
3	3.372281323
4	4.772001872
5	6.178908345
7	8.9999999999
10	13.2377392028
20	27.3747093007
30	41.515241069
50	69.798268376
70	98.0820167858
100	140.508035483
200	281.928943074
300	423.3501507626

для ориентировки в численных тестах с решением интервальных линейных систем уравнений, сведены в Табл. 2.1, где t — это значение диагонального параметра, при котором происходит переход от сильной неособенности к простой неособенности (если t уменьшается):

Вопрос о том, как соотносятся сильная неособенность интервальной матрицы и обычная неособенность всех содержащихся в ней точечных матриц является нетривиальным (см. [35]), но сравнительно недавно его исчерпывающее решение было дано А.В. Лакеевым в работе [11].

Класс сильно неособенных интервальных матриц интересен нам потому, что он является просто описываемым классом матриц, для которых процедура предобуславливания позволяет добиться удовлетворения условиям применимости итерационных методов для интервальных линейных систем (см. Главы 7 и 9).

2.5 Положительно определённые интервальные матрицы

2.6 Устойчивые интервальные матрицы

2.7 Интервальные M -матрицы и H -матрицы

Определение 2.7.1 [4, 10] Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ является монотонной матрицей (матрицей монотонного вида), если из $Ax \geq 0$ следует $x \geq 0$.

Нетрудно показать, что квадратная матрица монотонна тогда и только тогда, когда она неособенна и $A^{-1} \geq 0$. По этой причине квадратные монотонные матрицы часто называют *положительно обратимыми*. Монотонные (положительно обратимые) матрицы интересны нам потому, что для систем линейных уравнений с такими матрицами влияние возмущений правой части на решение может быть отслежено очень просто: если $b' \leq b''$, то из $Ax' = b'$ и $Ax'' = b''$ следует $x' \leq x''$.

Задача эффективного выявления монотонности или положительной обратимости в общем случае непроста, но, тем не менее, среди положительно обратимых матриц существует один просто описываемый подкласс — так называемые M -матрицы. К его рассмотрению мы сейчас и переходим.

Определение 2.7.2 [4, 21] Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется M -матрицей, если она удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий

- (i) $A = sI - P$, где P — неотрицательная матрица и $s > \rho(P)$;
- (ii) внедиагональные элементы A неположительны и $A^{-1} \geq 0$;
- (iii) внедиагональные элементы A неположительны и существует положительный вектор $u > 0$, такой что $Au > 0$;
- (iv) внедиагональные элементы A неположительны и её собственные значения имеют положительные вещественные части;
- (v) ... и т.д.

Упражнение 2.7.1. Является ли M -матрицей матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}?$$

Теорема 2.7.1 Пусть A, B — квадратные точечные матрицы, A — M -матрица и $B \geq 0$. Матрица $(A - B)$ является M -матрицей тогда и только тогда, когда $\rho(A^{-1}B) < 1$.

Доказательство. Если A — M -матрица, то существует положительный вектор $u > 0$, такой что

$$(A - B)u > 0.$$

Тогда

$$A^{-1}Bu < u,$$

поскольку $A^{-1} \geq 0$, и в силу Предложения 2.3.1 заключаем, что

$$\rho(A^{-1}B) < 1. \quad (2.17)$$

Обратно, пусть выполняется неравенство (2.17). Тогда матрица $(I - A^{-1}B)$ обратима, и обратная матрица $(I - A^{-1}B)^{-1}$ неотрицательна, в чём можно убедиться из её разложения в матричный ряд Неймана:

$$(I - A^{-1}B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1}B)^k$$

(см., к примеру, [4]). Следовательно, взяв положительный вектор $v > 0$, мы будем иметь

$$u := (I - A^{-1}B)^{-1}A^{-1}v > 0.$$

Но тогда

$$v = A(I - A^{-1}B)u = (A - B)u > 0.$$

А так как внедиагональные элементы матрицы $(A - B)$ неположительны, то заключаем, что $(A - B)$ действительно M -матрица. ■

Предложение 2.7.1 Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица, имеющая неположительные внедиагональные элементы. A является M -матрицей тогда и только тогда, когда справедлива импликация

$$u \in \mathbb{R}^n, u \geq 0, Au \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Доказательство. Если A — М-матрица, то $A^{-1} \geq 0$, и из $Au \leq 0$ вытекает $u \leq 0$. Совместно с $u \geq 0$ это действительно влечёт $u = 0$.

Наоборот, пусть в условиях Предложения выполняется следование ($u \in \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$, $Au \leq 0 \Rightarrow u = 0$), но A не есть М-матрица. Положим

$$\alpha = \max\{1, a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\},$$

тогда $B = I - \alpha^{-1}A \geq 0$, а матрица $\alpha^{-1}A = I - B$ не является М-матрицей одновременно с A . Применяя результат Теоремы 2.7.1, можем заключить, что $\rho(B) \geq 1$. Следовательно, в силу Предложения 2.3.1 существует ненулевой вектор $v \geq 0$, такой что

$$Bv \geq v \neq 0.$$

Тогда же

$$(I - \alpha^{-1}A)v \geq v,$$

и потому $Av \leq 0$, что противоречит нашему исходному допущению. ■

Определение 2.7.3 [19] Матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется интервальной М-матрицей, если каждая вещественная матрица $A \in \mathbf{A}$ является М-матрицей.

Предложение 2.7.2 (теорема Куттлера)

Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\underline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{A}}$ неособенны и

$$\underline{\mathbf{A}}^{-1}, \overline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0.$$

Тогда \mathbf{A} также неособенная и

$$\mathbf{A}^{-1} = [\overline{\mathbf{A}}^{-1}, \underline{\mathbf{A}}^{-1}] \geq 0.$$

Доказательство. Возьмем какую-нибудь матрицу $\tilde{A} \in \mathbf{A}$, так что

$$\tilde{A} \leq \overline{\mathbf{A}} \quad \text{и} \quad \underline{\mathbf{A}} \leq \tilde{A}.$$

Домножив слева первое из этих неравенств на $\underline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$, а второе — на $\overline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$, получим

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{A} \leq I \leq \underline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{A}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим внимательнее матрицу $\overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{A}$. Её внедиагональные элементы неположительны, как следует из неравенства (2.18). ■

Дальнейшим обобщением M -матриц являются так называемые H -матрицы, рассмотрению которых мы посвятим оставшуюся часть параграфа. Они также были введены А.М. Островским и получаются из M -матриц ослаблением обременительного условия на знаки элементов, как диагональных, так и внедиагональных. При этом оказывается, что некоторые важные свойства M -матриц всё-таки удаётся сохранить и для H -матриц.

Определение 2.7.4 [28] *Для интервальной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ матрицей сравнения называется точечная матрица того же размера, обозначаемая $\langle \mathbf{A} \rangle$, такая что*

$$ij\text{-й элемент } \langle \mathbf{A} \rangle := \begin{cases} \langle a_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|a_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Если $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — вещественная M -матрица, то, очевидно,

$$\langle A \rangle = A,$$

тогда как для интервальной M -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \underline{A}.$$

И в общем случае

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \langle A \rangle$$

для некоторой $A \in \mathbf{A}$.

Предложение 2.7.3 *Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times p}$. Тогда*

$$\langle \mathbf{A} \rangle \geq \langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle - \text{rad } \mathbf{A}, \quad (2.19)$$

$$\langle \mathbf{B} \rangle \geq \langle \mathbf{A} \rangle - \text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad (2.20)$$

$$\langle \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \rangle \geq \langle \mathbf{A} \rangle - |\mathbf{B}|, \quad (2.21)$$

$$|\mathbf{A} \pm \mathbf{B}| \geq \langle \mathbf{A} \rangle - \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (2.22)$$

$$|\mathbf{AC}| \geq \langle \mathbf{A} \rangle |\mathbf{C}|, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \Rightarrow \langle \mathbf{B} \rangle \geq \langle \mathbf{A} \rangle. \quad (2.24)$$

Доказательство. Если $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{C} = (c_{ij})$, то ij -й элемент матрицы $|\mathbf{AC}|$ есть, по определению,

$$\left| \sum_k a_{ik} c_{kj} \right|.$$

Вспоминая известные оценки для модуля суммы снизу и сверху, можем заключить, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_k a_{ik} c_{kj} \right| &\geq |a_{ii} c_{ij}| - \left| \sum_{k \neq i} a_{ik} c_{kj} \right| \\ &\geq |a_{ii} c_{ij}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik} c_{kj}| \\ &= |a_{ii}| |c_{ij}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}| |c_{kj}| \\ &\geq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle |c_{ij}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}| |c_{kj}|. \end{aligned}$$

В последнем выражении легко узнаётся ij -й элемент матрицы $\langle \mathbf{A} \rangle |\mathbf{C}|$, что и требовалось доказать. \blacksquare

Определение 2.7.5 [28] *Правильная интервальная квадратная матрица \mathbf{A} называется H -матрицей, если её матрица сравнения $\langle \mathbf{A} \rangle$ является M -матрицей.*

Предложение 2.7.4 *Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ является H -матрицей тогда и только тогда, когда для неё верна импликация*

$$u \in \mathbb{R}^n, \ u \geq 0, \ \langle \mathbf{A} \rangle u \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Предложение 2.7.5 *Если $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ — интервальная H -матрица, то любая матрица $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ также является H -матрицей.*

Доказательство. Коль скоро \mathbf{A} есть H -матрица, из Предложения 2.7.4 следует существование ненулевого неотрицательного вектора u , такого что

$$\langle \mathbf{A} \rangle u \geq 0.$$

Тогда же в силу свойства (2.24)

$$\langle \mathbf{B} \rangle u \geq \langle \mathbf{A} \rangle u,$$

и поэтому \mathbf{B} также является H -матрицей. ■

Теорема 2.7.2 *Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ является H -матрицей тогда и только тогда, когда $\text{mid } \mathbf{A}$ — H -матрица и*

$$\rho(\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{A}) < 1.$$

Важный пример интервальных H -матриц — это правильные неособенные треугольные матрицы, верхние или нижние [28].

Определение 2.7.6 *Станем говорить, что интервальная матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ обладает строгим диагональным преобладанием, если она удовлетворяет неравенствам*

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.25)$$

Нетрудно понять, что матрицы со строгим диагональным преобладанием также являются H -матрицами.

Теорема 2.7.3 [28] *Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и точечная матрица $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ таковы, что их произведение $\Lambda \mathbf{A}$ является H -матрицей. Тогда \mathbf{A} сильно неособенна.*

Доказательство. Обозначим для удобства

$$\mathbf{B} = \Lambda \mathbf{A}.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{B} &= \Lambda \text{mid } \mathbf{A} \\ \text{rad } \mathbf{B} &= |\Lambda| \text{rad } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

При этом как сама \mathbf{A} , так и $\text{mid } \mathbf{B}$, будучи H -матрицами, являются неособенными. Также неособенны \mathbf{A} и Λ .

Далее,

$$\begin{aligned} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| &= |(\Lambda^{-1}(\Lambda \text{mid } \mathbf{A}))^{-1}| = |(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}\Lambda| \\ &\leq |(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}||\Lambda| \leq \langle \mathbf{B} \rangle^{-1}|\Lambda|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|) &\leq \rho(\langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle^{-1}|\Lambda| \text{rad } \mathbf{A}) \\ &= \rho(\langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle \text{rad } \mathbf{B}) < 1. \end{aligned}$$

■

Предложение 2.7.6 [28] Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что её средняя матрица $\text{mid } \mathbf{A}$ неособенна. Тогда следующие условия равносильны друг другу:

- (i) матрица \mathbf{A} сильно неособенна,
- (ii) $\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1$,
- (iii) $\|I - (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\|_u < 1$ для некоторого вектора $u > 0$,
- (iv) произведение $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$ является H -матрицей.

Предложение 2.7.7 [28] Если интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ сильно неособенна, то и любая матрица $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ также сильно неособенна. В частности, всякая сильно неособенная матрица неособенная.

Отметим также, что всякая интервальная H -матрица (а значит и всякая M -матрица) являются сильно неособенными.

2.8 Спектр интервальных матриц

2.9 Вычисление обратных матриц

В этом параграфе мы рассмотрим интервальные подходы к вычислению гарантированных интервальных оценок для матрицы, обратной к данной. Нахождения таких оценок может представлять интерес, к

примеру, при определении коэффициентов чувствительности решения системы линейных уравнений относительно её коэффициентов, как матрицы, так и правой части.

Другой пример необходимости вычисления обратных матриц представляют численные методы для решения линейных систем с блочными матрицами и задачи на собственные значения для блочных матриц. Таков, например, блочный метод Гаусса, описанный в книге [6].

Матрица A^{-1} , обратная к данной матрице A , является решением матричного уравнения

$$AX = I,$$

которое, в свою очередь, может быть расписано в виде n штук систем линейных алгебраических уравнений. Поэтому для нахождения обратной матрицы может быть с успехом применено многократное решение ИСЛАУ каким-либо из методов Главы 8.

Другой подход — конструирование чисто матричных процедур, не опирающихся на методы решения систем линейных уравнений с векторными неизвестными, и здесь простейший прием состоит в том, чтобы организовать какие-либо матричные аналоги интервальных методов Гаусса-Зейделя, Кравчика, разнообразных модификаций стационарных итерационных методов. Недостатки этого пути заключаются в следующем:

во-первых, для методов этого типа требуется знание начальных внешних оценок,

во-вторых, медленная (как правило, линейная) сходимость.

Но существуют и альтернативные матричные вычислительные процедуры для нахождения обратной матрицы, более быстрые и имеющие более широкую сферу приложимости. Их изложению и посвящен настоящий параграф.

Гиперстепенной метод порядка p для обращения матрицы

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} \sum_{i=0}^{p-1} (I - AX^{(k)})^i \quad (2.26)$$

Комментарий к Главе 2

К §2.1. Термин, “брус” для декартовых произведений одномерных интервалов — интервальных векторов по нашей терминологии — впер-

вые использовался, по-видимому, Г.Е. Шиловым в его известном курсе математического анализа [18], §5.14.

Пространства с мультиметрикой в современной литературе называют также *мультиметрическими*. Л. Коллатц [10] называет мультиметрику *псевдометрикой*.

Для случая классической интервальной арифметики \mathbb{IR} неравенство (2.6) хорошо известно, но для полной интервальной арифметике в многомерном случае оно никем ранее не упоминалось и не использовалось.

Эффект обёртывания в англоязычной математической литературе называется “wrapping effect”. Впервые он был обнаружен Р.Е. Муром при исследовании пошаговых интервальных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Впоследствии было осознано, что этот эффект носит всеобщий характер и возникает не только при решении интервальных дифференциальных уравнений [25].

К §2.4. Признак Риса-Бека (Теорема 2.4.3) впервые был предложен Ф. Рисом в неопубликованной диссертации [31], а затем переоткрыт Х. Беком в работе [20].

К §2.7. По отношению к матрицам, вводимым Определением 2.7.1, употребляется также термин *неотрицательно обратимые матрицы* [13].

Понятие M -матрицы было введено немецким математиком украинского происхождения А.М. Островским в работе [29]. Список из Определения 2.7.2 для M -матрицы может быть значительно продолжен. К примеру, А. Берман и Р. Племмонс [21] перечисляют 50 условий, равносильных утверждению “матрица A является M -матрицей”. Большое количество эквивалентных определений M -матрицы можно найти в справочнике [4] и книге А. Ноймайера [28].

В доказательстве Теоремы 2.7.1 мы следуем А. Ноймайеру [28], Теорема 3.6.3.

В отечественной литературе вопросы, рассматриваемые в этом параграфе, освещены сравнительно слабо. Автору удалось найти изложение лишь отдельных элементов теории монотонных матриц и M -матриц в книгах [4, 10, 12, 14].

Интересно, что иногда термин “ M -матрица” используется в другом смысле. Именно, специалисты по управляемым системам называют M -

матрицами вещественные матрицы с неотрицательными внедиагональными элементами (см. [5]). Впервые такие матрицы детально исследовались Л.А.Метцлером [27] и потому в некоторых западных публикациях получили наименование “метцлеровых” или, коротко, *M*-матриц. В этой ситуации для избежания путаницы наиболее разумным представляется рекомендовать специалистам по управлению всегда использовать только развёрнутый термин “метцлерова матрица” вместо двусмысленного сокращения.

Литература к главе 2

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] БИРКГОФ Г. *Теория решёток*. – Москва: Наука, 1984.
- [3] БИРКГОФ Г., БАРТИ Т. *Современная прикладная алгебра*. – Москва: Мир, 1976.
- [4] ВОЕВОДИН В.В., КУЗНЕЦОВ Ю.А. *Матрицы и вычисления*. – Москва: Наука, 1984.
- [5] ВОРОВОВ А.А. *Введение в динамику сложных управляемых систем*. – Москва: Наука, 1985.
- [6] ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – Москва: 1988.
- [7] ГОЛУБ ДЖ., ВАН ЛОУН Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1999.
- [8] ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. – Москва: Мир, 1982.
- [9] ДЕММЕЛЬ ДЖ. *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения*. – Москва: Мир, 2001.
- [10] КОЛЛАТЦ Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. – Москва: Мир, 1969.
- [11] ЛАКЕЕВ А.В. Оценка спектрального радиуса нерасширяющих матриц // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 21–30.
- [12] МАРШАЛЛ А., ОЛКИН И. *Неравенства: теория мажоризации и её приложения*. – Москва: Мир, 1983.
- [13] НИКАЙДО Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. – Москва: Мир, 1972.
- [14] ОРТЕГА ДЖ., РЕЙНБОЛДТ В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.

- [15] УИЛКИНСОН Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – Москва: Наука, 1970.
- [16] ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – Москва: Физматгиз, 1963.
- [17] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989.
- [18] ШИЛОВ Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1–2. – Москва: Наука, 1969.
- [19] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [20] BEECK H. Zur Problematik der Hüllenbestimmung von Intervallgleichungssystemen // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 150–159. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 29).
- [21] BERMAN A., PLEMMONS R.J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. – New York: Academic Press, 1979.
- [22] HERZBERGER J. Iterative methods for the inclusion of the inverse of a matrix // *Topics in Validated Computations* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 137–171.
- [23] KAUCHER E. Interval analysis in the extended interval space \mathbb{IR} // *Computing Supplement*. – 1980. – Vol. 2. – P. 33–49.
- [24] LAPACK — <http://www.netlib.org/lapack>
- [25] LOHNER R. On the ubiquity of the wrapping effect in the computation of the error bounds // *Perspectives of Enclosure Methods* / Kulisch U., Lohner R. and Facius A., eds. – Wien-New York: Springer, 2001. – P. 201–217.
- [26] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [27] METZLER L. Stability of multiple markets: the Hicks conditions // *Econometrica*. – 1945. – Vol. 13. – P. 277–292.
- [28] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [29] OSTROWSKI A.M. Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale // *Comment. Math. Helv.* – 1937. – Bd. 10. – C. 69–96.
- [30] REX G., ROHN J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1999. – Vol. 20. – P. 437–445.
- [31] RIS F.N. Interval analysis and applications to linear algebra. PhD dissertation. – Oxford: Oxford University, 1972.

- [32] ROHN J. Checking positive definiteness or stability of symmetric interval matrices is NP-hard // *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. – 1994. – Vol. 35. – P. 795–797.
- [33] POLJAK S., ROHN J. Checking robust nonsingularity is NP-hard // *Mathematics of Control, Signals & Systems*. – 1993. – Vol. 6. – P. 1–9.
- [34] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135.
- [35] RUMP S.M. The distance between regularity and strong regularity // *Scientific Computing and Validated Numerics* / Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 105–117.

Глава 3

Интервальное оценивание областей значений функций

Предметом этой главы нашей книги является задача оценивания области значений функции, т.е. множества

$$\text{range}_D f := \{ f(x) \mid x \in D \},$$

где D — интервал или же интервальный вектор-брус. Рассматриваемые постановки тесно связаны с теми, что рассматриваются в теории оптимизации и математическом программировании, т.е. дисциплинах, занимающихся отысканием экстремальных значений функций. Фактически, для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^1 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{range}_D f = \left[\min_D f, \max_D f \right].$$

Но оценивание области значений как целого также требуется в ряде практических ситуаций, например, при доказательном решении систем уравнений или при оценке погрешностей косвенных измерений, и др.

Последняя из упомянутых задач возникает, в частности, в ситуациях, когда некоторую искомую величину y нельзя измерить непосредственно, и она должна рассчитываться на основе известной зависимости

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

от одной или нескольких *первичных величин* x_1, x_2, \dots, x_n , которые только и могут быть измерены имеющимися в нашем распоряжении приборами. В этом случае говорят о *косвенном измерении* величины y . Таковым является, например, измерение температуры жидкостным термометром или с помощью термоэлемента, когда определяют не саму температуру, а объём жидкости (нередко даже длину нити жидкости в капилляре) или термо-ЭДС. Рассчёт доверительного интервала для y по доверительным интервалам $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ для x_1, x_2, \dots, x_n представляет собой задачу оценивания области значений функции f на $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.

3.1 Интервальное расширение функций и его различные формы

Определение 3.1.1 *Станем говорить, что интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ является интервальным продолжением вещественной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на $D \subset \mathbb{R}^n$, если*

$$\mathbf{f}(x) = f(x) \quad \text{для всех } x \in D.$$

С f обычно связывается её область значений — многозначная функция, действующая из $\mathbb{I}\mathbf{X}$ во множество всех подмножеств \mathbb{R} , такая что

$$f(\mathbf{Y}) = \{ f(y) \mid y \in \mathbf{Y} \}$$

для всякого $\mathbf{Y} \in \mathbb{I}\mathbf{X}$. Назовём интервальнозначную функцию $F : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ *внешней оценивающей функцией* для f , если

$$f(\mathbf{Y}) \subseteq F(\mathbf{Y}) \quad \text{для всех } \mathbf{Y} \in \mathbb{I}(\mathbf{X}).$$

Определение 3.1.2 *Интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$ называется интервальным расширением вещественной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на $D \subset \mathbb{R}^n$, если она*

- (i) *является интервальным продолжением f на D ,*
- (ii) *монотонна по включению на $\mathbb{I}D$, т.е. для любых $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{I}D$ имеет место импликация $\mathbf{x}'' \subseteq \mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}'') \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}')$.*

Полезно также

Определение 3.1.3 Интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}$ называется объединённым интервальным расширением вещественной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на $D \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \square \text{range}_{\mathbf{x}} f$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{ID}$, т.е. значения \mathbf{f} являются интервальными оболочками областей значений f на брусах $\mathbf{x} \in \mathbb{ID}$.

К примеру, объединённым интервальным расширением функции знака числа $\text{sgn } x$ является

$$\text{sgn } \mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{x}}, \\ [0, 1], & \text{если } \underline{\mathbf{x}} = 0 < \overline{\mathbf{x}}, \\ [-1, 1], & \text{если } \underline{\mathbf{x}} < 0 < \overline{\mathbf{x}}, \\ [-1, 0], & \text{если } \underline{\mathbf{x}} < 0 = \overline{\mathbf{x}}, \\ -1, & \text{если } \overline{\mathbf{x}} < 0. \end{cases}$$

Предполагаем, что читателю хорошо знакомо понятие *элементарной функции*. Обычно элементарными функциями называется некоторый фиксированный исторически сложившийся набор вещественных функций, а именно

абсолютная величина (модуль), $|x|$,

степенная функция, x^α ,

показательная функция, a^x , записываемая также как $\exp_a x$,

логарифмическая функция, $\log_a x$,

круговые тригонометрические функции, $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg } x$,

обратные тригонометрические функции, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\text{arctg } x$.

Семейство элементарных функций мы будем обозначать через \mathcal{EF} .

Определение 3.1.4 Аналитические выражения, которые составлены из символов переменных, констант, четырёх арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления, — и элементарных функций, будем называть элементарными функциональными выражениями.

Определение 3.1.5 *Интервальное расширение элементарного функционального выражения, получающееся в результате замены аргументов на объемлющие их интервалы, а арифметических операций и элементарных функций — на их интервальные аналоги называется естественным интервальным расширением.*

То, что процедура подстановки интервалов вместо переменных и выполнения всех действий в получающемся интервальном выражении по правилам интервальной арифметики действительно дают интервальное расширение, следует из основной теоремы интервальной арифметики.

Упражнение 3.1.1. Для выражения

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_1 x_3}$$

найдите область значений и естественное интервальное расширение на области $x_1 \in [1, 2]$, $x_2 \in [0, 1]$, $x_3 \in [2, 3]$. Сравните их и сделайте выводы.

Итак, интервальные расширения функций полезны тем, что дают внешние оценки областей значений функций. Но насколько точны эти оценки? Нельзя ли получить какие-либо утверждения о точности этого внешнего оценивания в интервальной метрике dist ? Получение ответов на эти вопросы являются нашей ближайшей целью.

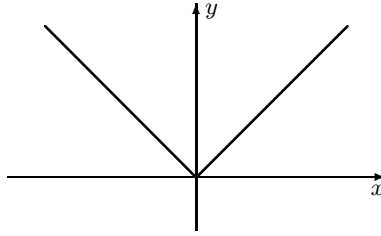
Центральную роль в нашем анализе будет играть так называемое *условие Липшица*, которое естественным образом распространяется на интервальнозначные функции.

Определение 3.1.6 *Говорят, что вещественная функция $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна по Липшицу, если существует константа L_f , такая что*

$$|f(x') - f(x'')| \leq L_f |x' - x''|$$

для любых $x', x'' \in D$. Величину L_f называют при этом константой Липшица функции F на D .

Понятие непрерывности по Липшицу формализует интуитивно понятное условие соразмерности изменения функции изменению аргумента. Именно, приращение функции не должно превосходить приращение аргумента (по абсолютной величине или в некоторой заданной метрике) более чем в определённое фиксированное число раз! При этом

Рис. 3.1. График функции модуля $y = |x|$.

сама функция может быть и негладкой, как, например, модуль числа в окрестности нуля.

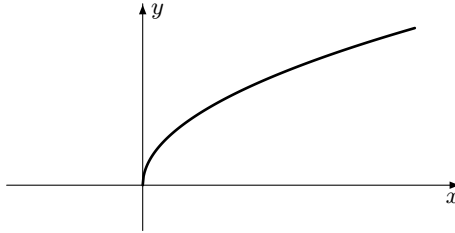
В определении непрерывности функции по Липшицу константа L_f не задаётся конструктивным образом, но можно считать, что

$$L_f = \sup \left\{ \left| \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \right| \mid x', x'' \in D, x' \neq x'' \right\}$$

для негладких функций f и

$$L_f = \sup \{ f'(x) \mid x \in D \}$$

для гладких f .

Рис. 3.2. Функция $y = \sqrt{x}$ не является непрерывной по Липшицу в окрестностях нуля.

Совершенно аналогично Определению 3.1.6 следующее

Определение 3.1.7 *Станем говорить, что интервальная функция $f : \mathbb{R}^n \supseteq ID \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна по Липшицу с константой L_f , если*

$$\text{dist} (f(x'), f(x'')) \leq L_f \cdot \text{dist} (x', x'')$$

для любых $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{ID}$.

Не все элементарные функциональные выражения и даже не все элементарные функции удовлетворяют условию Липшица. Таковы, например, \sqrt{x} и вообще x^α , $0 < \alpha < 1$, в окрестности нуля. Помимо степенной функции с показателем, меньшим единицы, условию Липшица на своих областях определения не удовлетворяют ещё две элементарные функции — арксинус и арккосинус.

Существует, тем не менее, простое достаточное условие того, что естественное интервальное расширение элементарного функционального выражения является непрерывным по Липшицу. Следуя А. Ноймайеру [25], введём

Определение 3.1.8 *Станем говорить, что элементарное функциональное выражение f от n переменных является липшицевым на брусе $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$, если*

- (i) *естественное интервальное расширение f на \mathbf{x} — $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — определено и*
- (ii) *для любых подвыражений g, h в f отношение $g = \phi(h)$, $\phi \in \mathcal{EF}$, влечёт то, что ϕ определена и непрерывна по Липшицу на некоторой окрестности $h(\mathbf{x})$, т.е. на интервале, содержащем $h(\mathbf{x})$ в своей внутренности.*

Это весьма общее и абстрактное определение, которое, в действительности, имеет смысл расшифровать применительно к рассматриваемым нами конкретным выражениям.

Предложение 3.1.1 *Элементарное функциональное выражение f , зависящее от n переменных, является липшицевым на брусе $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$, если естественное интервальное расширение $f(\mathbf{x})$ определено и для любых подвыражений g, h выражения f*

отношение $g = h^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ влечёт $h(\mathbf{x}) > 0$,

отношение $g = \arcsin h$ влечёт $|h(\mathbf{x})| < 1$,

отношение $g = \arccos h$ влечёт $|h(\mathbf{x})| < 1$.

Таким образом, проверка того, является ли рассматриваемое элементарное функциональное выражение липшицевым или нет, может быть относительно несложно выполнена в процессе вычисления естественного интервального расширения.

Упражнение 3.1.2. Является ли элементарное функциональное выражение

$$\sqrt{1 + \arcsin(2x_1 + x_2^2)}$$

липшицевым на области $x_1 \in [0, 1]$, $x_2 \in [-1, 1]$?

Теорема 3.1.1 Пусть f — элементарная функция от n переменных, липшицевая на некотором брусе $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда естественное интервальное расширение f является непрерывным по Липшицу на \mathbf{x} с константой, которая может быть определена рекуррентно по дереву Канторовича для f с помощью следующей таблицы:

$0,$	если f есть константа,
$L_g \pm L_h,$	если $f = g \pm h,$
$ g(\mathbf{x}) L_h + L_g h(\mathbf{x}) ,$	если $f = g \cdot h,$

Доказательство. Покажем, как преобразуются константы Липшица в узлах дерева Канторовича аналитического выражения для f .

Для композиции функций: если $f = \phi(g(x))$, $\phi \in \mathcal{EF}$, то

$$\lambda_f(\mathbf{x}) = \lambda_\phi(g(\mathbf{x})) \cdot \lambda_g$$

■

Предложение 3.1.2 Пусть f — элементарная функция n переменных, удовлетворяющая условию Липшица с константой L на брусе $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда

$$f(\mathbf{x}) \subseteq f(\text{mid } \mathbf{x}) + L(\mathbf{x} - \text{mid } \mathbf{x}),$$

$$\text{rad } f(\mathbf{x}) \leq L \cdot \text{rad } \mathbf{x}.$$

Определение 3.1.9 [25] Для отображения $F : \mathbb{R}^n \supseteq D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется интервальной матрицей Липшица на $D \subseteq D_0$, если для любых $x, y \in D$ равенство

$$F(y) - F(x) = A(y - x)$$

имеет место с некоторой вещественной $m \times n$ -матрицей $A \in \mathbf{A}$.

3.2 Автоматическое дифференцирование

Введение

Программа вычисляющая значения выходных переменных

$$Y = \{y(i) \mid i = 1..m\}$$

по входным переменным $X = \{x(j) \mid j = 1..n\}$ математически эквивалентна композиции функций

$$Y = \text{Fk}(\text{Fk-1}(\dots \text{F1}(X))),$$

где $\text{Fp}(\text{Zp-1}) \rightarrow \text{Zp}$ - функции представляющие промежуточные шаги программы, Zp - промежуточные наборы переменных, $\text{Z0} = X$, $\text{Zk} = Y$.

Задача состоит в нахождении частных производных $\partial y(i)/\partial x(j)$, иными словами якобиана $\partial Y/\partial X$ при заданных значениях $x(j)$

Здесь и далее знак d означает взятие частной производной!

Согласно правилу дифференцирования функций от сложного аргумента, имеем матричное уравнение:

$$dY/dX = d\text{Fk}/d\text{Zk-1} * \dots * d\text{F1}/d\text{Z0} \quad (1)$$

Существуют два подхода к вычислению правой части формулы (1) справа налево или слева направо, соответственно способы называются прямой и обратный режимы (forward и reverse modes).

1. Forward mode AD

В прямом режиме (справа налево) наряду с исполнением исходного кода программы происходит вычисление производных временных переменных по независимым переменным (x). Вычисление производных следует потоку управления исходной программы.

Сложность: $T' = n^*T$, $M' = n^*M$ n -число переменных T, M - время и память исходной программы

Плюсы:

- следует исходному потоку управления \Rightarrow простота реализации

- допускает распараллеливание если исходная программа допускает распараллеливание

- естественно расширяется на производные второго и даже высших порядков

Минусы:

- время вычисления и память зависит от n - числа переменных, и растет как n^2 , n^3 для производных высших порядков

2. Reverse mode AD

В обратном режиме вычисляются производные выходных значений Y по временным переменным в обратном порядке и в конечном итоге по входным переменным X . Для реализации алгоритма требуется обращение потока управления исходной программы, а также сохранение (или перевычисление) всех временных значений влияющих на результат.

Сложность: $T' = m \cdot T$, не зависит от n

$M' = O(Op)$, Op - число операций исходной программы

Плюсы:

- время вычисления не зависит от n - числа переменных; данный подход особенно эффективен для вычисления градиентов функций от большого числа переменных.

Минусы:

- в худшем случае требуется память пропорциональная числу операций исходной программы для сохранения временных значений, переходов и т.п.

Как правило на практике реализуются оба режима AD. В последнее время много исследований посвящено минимизации требований на память reverse mode AD. В частности, была предложена так называемая checkpointing scheme [11], где в некоторых случаях хранение промежуточных значений заменяется их перевычислением.

Кроме различных режимов AD, существуют два основных способа реализации AD: с помощью operator overloading и source-to-source преобразований.

3. AD by Operator overloading

Этот способ годится для языков с поддержкой ОО-технологии и operator overloading, например C++. Вещественные типы данных исходной программы заменяются на user-defined типы данных с переопределенными операциями. Переопределенные операции наряду с выполнением исходных операций выполняют вычисления производных. В reverse mode AD переопределенные операции сохраняют log "исполненных" операций, который затем интерпретируется в обратном порядке.

Этот подход легче программируется, однако гораздо менее эффективен, чем source-to-source подход.

4. Source-to-source AD

Данный подход используется для программ на любом языке программирования и заключается в создании по исходной программе программы вычисляющей одновременно значения выходных переменных и их производных по входным переменным.

Proposal for implementing source-to-source AD tool with forward and reverse modes of AD.

Термины.

Переменные программы зависящие от входных переменных и имеющие влияние на значение выходных переменных будем называть “активными”.

Анализ.

Знание всех активных переменных программы необходимо для генерации кода вычисляющего производные. Для нахождения активных переменных производится data flow анализ:

- значения каких переменных зависят от значений входных переменных - определение переиспользования переменных ($y = y * x$) (for reverse mode) - loop-carried зависимости (for reverse mode)

Поскольку программа может вызывать внешние процедуры и функции, для нахождения активных переменных должен осуществляться межпроцедурный анализ.

1. Forward mode AD code

С каждой входной и выходной переменной, а также с каждой активной переменной связывается дополнительный вектор промежуточных величин - градиентный объект размерности n . Градиентные объекты для $x(j)$ инициализируются единичными векторами E_j с единицей в j -ом элементе.

Если входные переменные или активные переменные являются параметрами некоторой процедуры SUB

SUB($a_1, \dots, a_N, i_1, \dots, i_M$)

$a_1..a_N$ - активные $i_1..i_M$ - пассивные

то сигнатура процедуры SUB меняется на

$$g_{SUB}(a_1, grad_{a_1}, \dots, a_N, grad_{a_N}, i_1, \dots, i_M)$$

где наряду с активными переменными передаются их градиентные объекты.

Генерация кода вычисляющего производные для тела main-блока программы и тел всех вызываемых процедур состоит в генерации для каждого присваивания активной переменной

$a = f(Z)$, где Z - набор активных переменных входящих в f
дополнительного цикла для вычисления градиентного объекта этой переменной

$$\text{grad}(a) = df/dZ * \text{grad}(Z)$$

В результате исполнения полученной программы в $\text{grad}(y(1)), \dots, \text{grad}(y(m))$ находятся значения производных по X

2. Reverse mode AD code (to be written)

3. Схема реализации

Предлагается реализовать preprocessor как транслятор принимающий на входе HiForm и выдающий на выходе HiForm либо Fortran source.

Code issues

Пользователь указывает (с помощью прагм)

- имена выходных переменных $y(i)$ - имена входных переменных $x(j)$
- имя тор-процедуры вычисляющей Y по X - метод: прямой или обратный ? префикс: префикс добавляемый к автоматически генерируемым временным переменным необходимым для хранения промежуточных значений производных (градиентных объектов в случае прямого счета)

3.3 Наклоны функций и общие центрированные формы

Как дифференциальная арифметика, так и арифметика наклонов применимы к так называемым *разложимым функциям*:

Определение 3.3.1 Функция $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *разложимой*, если она может быть представлена выражением $f(x)$, которое является последним членом конечной последовательности $\{f_i(x)\}$ выражений, таких что

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и для $i > j, k$

$$f_i(x) = c_i \in \mathbb{R},$$

либо

$$f_i(x) = -f_j(x),$$

либо

$$f_i(x) = x_j \star f_k(x) \quad \text{для } \star \in \{+, -, \cdot, /\},$$

либо

$$f_i(x) = \phi_i(f_j(x)) \quad \text{для } \phi_i \in \Phi := \{\sqrt{\cdot}, \exp(\cdot), \log(\cdot), \sin(\cdot), \dots\}.$$

В этом определении множество Φ содержит стандартный набор элементарных функций, входящий в реализацию любого языка программирования высокого уровня, такого, например, как Fortran, Pascal, C. При желании множество Φ может быть расширено.

В качестве иллюстрации Определения 3.3.1 рассмотрим, например, функцию

Тем не менее, следует отметить, что для конкретной функции $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ последовательность $(f_i(x))$, о которой говорится в Определении 3.3.1, может быть неединственной.

Теорема 3.3.1 (теорема Кравчика-Ноймайера) Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция, $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D$, $z \in \mathbf{X}$.

$$\leq \tag{3.1}$$

Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция от n переменных. Нередко нам удаётся найти естественное разложение вида

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \angle f(\tilde{x}, x)(x - \tilde{x}) \tag{3.2}$$

с некоторой функцией $\angle f(\cdot, \cdot) : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Определение 3.3.2 Вектор-строка $\angle f(\tilde{x}, x)$ из представления (3.2) называется наклоном функции f между точками \tilde{x} и x .

Ясно, что в одномерном случае ($n = 1$) при $\tilde{x} \neq x$

$$\angle f(\tilde{x}, x) = \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{x - \tilde{x}},$$

и, предполагая непрерывность функции наклона $f[\cdot, \cdot]$ по совокупности своих аргументов, получаем

$$\angle f(\tilde{x}, \tilde{x}) = f'(\tilde{x}).$$

Таким образом, в одномерном случае наклон функции совпадает с её разделённой разностью первого порядка. В частности, для полиномов в стандартном представлении в виде суммы степеней переменной коэффициенты наклона $\angle f(\tilde{x}, x)$ как полинома по x находятся как побочный продукт вычисления значения $f(\tilde{x})$ по схеме Горнера. При аналитическом вычислении наклонов полиномов полезно помнить хорошо известную из элементарной алгебры формулу

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}.$$

Сказанное, к сожалению, распространяется на многомерный случай лишь частично, а наклон функции многих переменных не определяется однозначно. Например, для функции двух переменных $f(x, y) = xy$ имеем

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= xy - \tilde{x}\tilde{y} = xy - x\tilde{y} + x\tilde{y} - \tilde{x}\tilde{y} \\ &= \tilde{y}(x - \tilde{x}) + x(y - \tilde{y}), \end{aligned}$$

так что наклоном $\angle f(\tilde{x}, x)$ функции f между точками (x, y) и (\tilde{x}, \tilde{y}) является вектор $(\tilde{y}, x)^\top$. С другой стороны

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= xy - \tilde{x}\tilde{y} = xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y} \\ &= y(x - \tilde{x}) + \tilde{x}(y - \tilde{y}), \end{aligned}$$

и потому вектор $(y, \tilde{x})^\top$ также является наклоном рассматриваемой функции между (x, y) и (\tilde{x}, \tilde{y}) .

Более того, вектор наклона этой функции на бруске $([1, 2], [1, 2])^\top$, взятый относительно нуля, можно с одинаковым успехом взять равным

$$\begin{pmatrix} [1, 2] \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ [1, 2] \end{pmatrix},$$

хотя ситуация тут, казалось бы, совершенно симметрична относительно обеих равноправных переменных.

Таким образом, следует чётко осознавать, что, взятые по отдельности и вне связи друг с другом, компоненты вектора наклона *не характеризуют* свойства функции, а реальный “физический” смысл имеет лишь весь вектор наклона целиком. В этом заключается принципиальное отличие наклона от градиента функции, жестко определенного и действительно отражающего, хотя бы и локально, свойства функции.

Справедливо

Предложение 3.3.1 Множество наклонов функции от n переменных между двумя фиксированными точками образует аффинное многообразие размерности $(n - 1)$ в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Пусть s' и s'' — два вектора наклона функции f между точками x и y , так что

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \langle s', x - y \rangle \\ f(x) - f(y) &= \langle s'', x - y \rangle. \end{aligned}$$

Умножая эти равенства на вещественные числа λ и $(1 - \lambda)$ и складывая между собой, получим

$$f(x) - f(y) = \langle \lambda s' + (1 - \lambda)s'', x - y \rangle.$$

Как видим, вектор $\lambda s' + (1 - \lambda)s''$ также является наклоном функции f между точками x и y . ■

Итак, отображение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ставящее для данной функции f в соответствие точкам x и y наклон функции между ними, реально является *многозначной функцией*. Ничего хорошего это не сулит, нам нужно попытаться выделить какую-либо однозначную ветвь наклона.

Определение 3.3.3 Интервальным наклоном функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на интервале $\mathbf{Y} \in \mathbb{IR}^n$ относительно точки x называется интервальный вектор $\mathbf{S} \in \mathbb{IR}^n$, такой что для любого $y \in \mathbf{Y}$ существует $s \in \mathbf{S}$, являющийся наклоном функции $f(x)$ между точками x и y .

Таким образом, интервальный наклон не есть интервальное расширение обычного наклона (корректно определить которое и невозможно), а некоторая коллекция всех представителей наклонов функции между точками x и y , когда y пробегает заданный брус \mathbf{Y} .

Зачем нужны наклоны функций? Если разложение (3.2) справедливо для всех x из некоторой области \mathbf{X} , а наклон $f[\cdot, \cdot]$ может быть выражен как некоторое арифметическое выражение от своих аргументов, то мы можем найти внешнюю оценку области значений функции f на \mathbf{X} посредством

$$f_s(\mathbf{X}, \tilde{x}) = f(\tilde{x}) + f[\tilde{x}, \tilde{X}](\mathbf{X} - \tilde{x}). \quad (3.3)$$

Определение 3.3.4 Наклонной формой интервального расширения функции f на \mathbf{X} с центром в точке z называется выражение вида

$$f_s(\mathbf{X}, z) := f(z) + f[z, \mathbf{X}](\mathbf{X} - z).$$

Отметим, что центр формы — точка z — может и не принадлежать интервалу \mathbf{X} , на котором мы рассматриваем интервальное расширение функции. Тем не менее, из теоремы Кравчика-Ноймайера немедленно следует, что оценка области значений с помощью наклонной формы имеет второй порядок аппроксимации, если центр формы лежит на интервале оценивания:

$$\text{dist} \left(f_s(\mathbf{X}, z), f(\mathbf{X}) \right) \leq 2 \text{rad} (f[z, \mathbf{X}]) |\mathbf{X} - z|.$$

Определение 3.3.5 Будем говорить, что интервальное расширение $F(\mathbf{X})$ функции f на \mathbf{X} имеет центрированную форму с центром z , если оно представимо в виде

$$f(z) + s(\mathbf{X} - z).$$

Все центрированные формы удовлетворяют оценке точности (3.1), которая может быть точно вычислена a posteriori, после нахождения внешней оценки множества значений. Произвольные центрированные формы не обязательно монотонны по включению, но если центр z фиксирован, то монотонность по включению становится тривиальным следствием определения.

Пример. Пусть $\mathbf{x} = [0, 1]$. Для многочлена

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

производная и наклон равны соответственно

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x + 4, \\ \angle f(y, x) &= x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 4. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} f(0) &= 5, & f(0.5) &= 6.375, & f(1) &= 7, \\ f(\mathbf{x}) &= [-3, 10], & f'(\mathbf{x}) &= [-2, 7], \\ f[0, \mathbf{x}] &= [0, 5], & f[0.5, \mathbf{x}] &= [-0.25, 4.25] & \angle f(1, \mathbf{x}) &= [-1, 4], \end{aligned}$$

то для области значений рассматриваемой функции на интервале \mathbf{x} получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= [-3, 10], \\ f_m(\mathbf{x}, \text{mid } \mathbf{x}) &= [2.875, 9.875], & f_s(\mathbf{x}, \text{mid } \mathbf{x}) &= [4.25, 8.5], \\ f_m(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}) &= [3, 12], & f_s(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}) &= [5, 10], \\ f_m(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) &= [0, 9], & f_s(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) &= [3, 8], \end{aligned}$$

Точное значение

$$\text{range}_{\mathbf{x}} f = [5, 7].$$

Как видим, конкретное значение внешней оценки существенно зависит от центра разложения. Но при одном и том же центре наклонная форма последовательно приводит к более качественным результатам, чем среднезначная форма. Можно показать, что в действительности всегда имеет место включение

$$\angle f(z, \mathbf{x}) \subseteq f'(\mathbf{x}),$$

а ширина интервального расширения наклона равна примерно половине ширины от интервального расширения производной (градиента). Поэтому ширина внешней оценки при помощи наклонной формы примерно в два раза уже, чем ширина внешней оценки с помощью среднезначной формы.

Предложение 3.3.2 Пусть

Упражнение 3.3.1. Найдите среднезначное интервальное расширение функции

$$f(x) = x - x^2$$

на $x \in [0, 1]$. Сравните с естественным интервальным расширением и точной областью значений.

3.4 Бицентрированные формы

В примере из предыдущего параграфа наилучшая внешняя оценка области значений функции получается в результате пересечения интервалов $f_{sl}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}})$ и $f_{sl}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})$, результатом чего является интервал $[5, 8]$. С

другой стороны, если для производной рассматриваемой функции мы воспользуемся эквивалентным выражением

$$f'(\xi) = 3(\xi - 1)^2 + 1,$$

то легко поймем, что $f'(\mathbf{x}) = [1, 4] > 0$ и f монотонно возрастает на \mathbf{x} . Поэтому

$$\text{range}_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} = [f(\underline{\mathbf{x}}), f(\overline{\mathbf{x}})] = [5, 7].$$

Разобранный пример приводит к вопросу о том, можно ли выбирать точку разложения \tilde{x} оптимальным образом. Мы ответим на него для обобщенных среднзначных форм. Чтобы сделать формулировку результата об оптимальности более прозрачной, нам потребуется *функция срезки*

$$\text{cut} : \mathbb{R} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R},$$

действующая как

$$\text{cut}(x, \mathbf{x}) := \begin{cases} \overline{x}, & \text{если } x > \overline{x} \\ \underline{x}, & \text{если } x < \underline{x} \\ \tilde{x}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3.4.1 (теорема Баумана)

Пусть

$$p_i := \text{cut} \left(\frac{\text{mid } f'_i(\mathbf{x})}{\text{rad } f'_i(\mathbf{x})}, [-1, 1] \right),$$

$$(z_*)_i := \text{mid } \mathbf{x}_i - p_i \text{rad } \mathbf{x}_i,$$

$$(z^*)_i := \text{mid } \mathbf{x}_i + p_i \text{rad } \mathbf{x}_i,$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$\inf f_{mv}(\mathbf{x}, z)$ достигает своего максимума по z в точке z_* ,

$\sup f_{mv}(\mathbf{x}, z)$ достигает своего минимума по z в точке z^* ,

$\text{rad } f_{mv}(\mathbf{x}, z)$ достигает своего минимума по z в точке $\text{mid } \mathbf{x}$.

Доказательство. Произвольный вектор z из \mathbf{x} может быть представлен в виде $z = \text{mid } \mathbf{x} - \tilde{p} \cdot \text{rad } \mathbf{x}$ с $\tilde{p} \in (\mathbb{R}^n)^\top$, удовлетворяющими $|\tilde{p}_i| < 1$ для $i = 1, 2, \dots, n$, так что мы имеем

$$\mathbf{x}_1 - z_i = \text{rad } \mathbf{x}_i \cdot [p_i - 1, p_i + 1] \ni 0$$

при всех i . Тогда

$$\begin{aligned}
 \inf f_{mv}(\mathbf{x}, z) &= f(z) + \inf f'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - z) \\
 &= f(z) + \sum_i \inf f'_i(\mathbf{x})(\mathbf{x}_i - z_i) \\
 &= f(z) + \sum_i (f'_i(\mathbf{x}) \cdot \text{rad } \mathbf{x}_i \cdot [\tilde{p}_i - 1, \tilde{p}_i + 1]) \\
 &= f(z) + \sum_i \text{rad } \mathbf{x}_i \cdot \min\{\underline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i + 1), \overline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i - 1)\}.
 \end{aligned}$$

Остается лишь показать, что значение

$$\alpha_i := \min\{\underline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i + 1), \overline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i - 1)\}$$

принимает наименьшее значение при $\tilde{p}_i = p_i$. Если $f'_i(\mathbf{x})_i \geq 0$, то $\alpha_i \leq 0$ с равенством для $\tilde{p}_i = 1 = p_i$, а если $\underline{f'_i(\mathbf{x})} \leq 0$, то $\alpha_i \leq 0$ с равенством для $\tilde{p}_i = -1 = p_i$. В остающемся случае $\underline{f'_i(\mathbf{x})} < 0 < \overline{f'_i(\mathbf{x})}$ мы имеем

$$p_i = \frac{\text{mid } f'_i(\mathbf{x})}{\text{rad } f'_i(\mathbf{x})} = \frac{\overline{f'_i(\mathbf{x})} + \underline{f'_i(\mathbf{x})}}{\overline{f'_i(\mathbf{x})} - \underline{f'_i(\mathbf{x})}}.$$

Следовательно, $\tilde{p}_i \leq p_i$ тогда и только тогда, когда

$$(\overline{f'_i(\mathbf{x})} - \underline{f'_i(\mathbf{x})}) \tilde{p}_i \leq \overline{f'_i(\mathbf{x})} + \underline{f'_i(\mathbf{x})}$$

тогда и только тогда, когда

$$\overline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i - 1) \leq \underline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i + 1).$$

Таким образом,

$$\alpha_i = \overline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i - 1) \leq \overline{f'_i(\mathbf{x})}(p_i - 1) \quad \text{для } \tilde{p}_i \leq p_i,$$

$$\alpha_i = \underline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i - 1) \leq \underline{f'_i(\mathbf{x})}(p_i - 1) \quad \text{для } \tilde{p}_i > p_i.$$

А так как $\alpha_i = \overline{f'_i(\mathbf{x})}(\tilde{p}_i - 1)$

■

Тщательный анализ доказательства теоремы Баумана показывает, что среднезначная форма имеет минимальный радиус для всех центров $z \in \square\{z_*, z^*\}$.

Далее, хотя среднезначная форма имеет наименьший радиус среди всех обобщенных среднезначных форм, дальнейшее сужение внешней интервальной оценки множества решений может быть получено взятием пересечения

$$f_b(\mathbf{x}) := f_{mv}(\mathbf{x}, z_*) \cap f_{mv}(\mathbf{x}, z^*).$$

Еще лучше сразу брать наклоны вместо производных и вычислить наклонные формы относительно точек z_* и z^* . Естественно, уточнение достигается ценой дополнительных трудозатрат.

Определение 3.4.1 Будем называть выражение $f_b(\mathbf{x})$ бицентрированной среднезначной формой функции $f(x)$ на брус \mathbf{x} .

В частном случае, когда $0 \notin f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$, и функция $f(x)$ является монотонной по всем переменным, мы имеем $p_i \in \{-1, 1\}$. При этом z_* и z^* суть угловые точки бруса \mathbf{x} и, как легко проверить,

$$f_{mv}(\mathbf{x}, z_*) \cap f_{mv}(\mathbf{x}, z^*) = \square\{f(z_*), f(z^*)\} = \text{range}_{x \in \mathbf{x}} f.$$

Таким образом, бицентрированная форма дает точную область значений в важном частном случае, когда среднезначные формы всё-таки огрубляют результат на множитель порядка $1 + O(\text{rad } \mathbf{x})$.

3.5 Аффинная интервальная арифметика

В этом параграфе мы изложим еще одну методику оценивания областей значений функций и выражений, основанную на применении так называемой *аффинной интервальной арифметики* [33]. Она аналогична классической интервальной арифметике в том, что позволяет отслеживать ошибки округления и усечения, но помимо этого аффинная интервальная арифметика позволяет также учитывать взаимную зависимость между величинами возникающими в процессе вычислений. Благодаря последнему обстоятельству с помощью аффинной интервальной арифметики, как правило, удается получать более качественные оценки областей значений.

В аффинной арифметике частично неизвестная величина x представлена *аффинной формой* \hat{x} , которая является многочленом первой степени:

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n.$$

Коэффициенты x_i есть числа с плавающей точкой, а ε_i — символьные вещественные переменные, чьи значения не известны, но приняты лежащими в интервале $\mathbf{U} = [-1, 1]$. Число x_0 называют центром аффинной формы \hat{x} , коэффициенты x_i — частичными отклонениями, а ε_i — символами шума.

Аффинные формы неявно выражают частичные зависимости между величинами. Когда две аффинные формы совместно используют общие символы шума, то это означает, что величины, ими представляемые, по крайней мере частично зависят одна от другой. Принятие таких зависимостей во внимание позволяет аффинной арифметике существенно повысить точность оценок по сравнению с интервальной. Особенно сильно это проявляется в длинных вычислительных цепочках, когда результаты одних алгоритмов становятся входными параметрами для других. Конечно, аффинная модель более трудоемка, но многочисленные примеры показывают, что повышенная трудоемкость почти всегда окупается точностью поставляемых оценок.

Если нам дана функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, то для поиска внешней оценки f на \mathbf{X} аффинная арифметика используется следующим образом. Вначале все входные интервалы — компоненты бруса \mathbf{X} — представляются в виде аффинных форм. Интервалу $[a, b]$ будет соответствовать аффинная форма вида

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_k,$$

где ε_k — некоторый вновь введенный символ шума. После этого f оценивается в аффинной арифметике. В результате мы получаем некоторую аффинную форму \hat{y} , которую в свою очередь оцениваем извне интервалом. Если $\hat{y} = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_s\varepsilon_s$, то для любых $\varepsilon_i \in [-1, 1]$ значения $\hat{y}(\varepsilon)$ будут принадлежать интервалу

$$\left[y_0 - \sum_{i=1}^s |y_i|, y_0 + \sum_{i=1}^s |y_i| \right],$$

а значит этот интервал будет внешней оценкой области значений f на \mathbf{X} .

При оценивании f в аффинной арифметике используется такая же методика, как и при оценивании f в интервальной арифметике. Для этого все элементарные операции и функции в записи f заменяются на соответствующие им операции и функции над аффинными формами,

после чего проводятся вычисления, дающие в результате аффинную форму.

Опишем общую идею, лежащую в основе вычислений над аффинными формами.

Пусть некоторые величины x и y представлены соответственно аффинными формами \hat{x} и \hat{y} :

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\hat{y} = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n.$$

Тогда если $z \leftarrow f(x, y)$, то z можно записать в виде :

$$z = f(x, y) = f\left(x_0 + \sum_i x_i\varepsilon_i, y_0 + \sum_i y_i\varepsilon_i\right) = f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

где $f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ есть функция, действующая из U^n в \mathbb{R} . Если f^* нелинейна, то z не может быть выражена в виде линейной комбинации символов шума ε_i . В этом случае мы должны подобрать некоторую линейную функцию от ε_i ,

$$f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \cdots + z_n\varepsilon_n$$

которая достаточно хорошо приближает $f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ на U^n , и затем добавить дополнительный член $z_k\varepsilon_k$ для представления ошибки аппроксимации. Таким образом мы получим

$$\hat{z} = f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + z_k\varepsilon_k = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \cdots + z_n\varepsilon_n + z_k\varepsilon_k.$$

Символ шума ε_k должен отличаться от всех других символов шума, которые появлялись ранее в едином вычислительном процессе, а коэффициент z_k должен сверху оценивать максимальную ошибку аппроксимации функции $f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ функцией $f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Если операция линейная, то \hat{z} можно вычислить легко:

$$\hat{x} + \hat{y} = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\varepsilon_1 + \cdots + (x_n + y_n)\varepsilon_n,$$

$$\hat{x} - \hat{y} = (x_0 - y_0) + (x_1 - y_1)\varepsilon_1 + \cdots + (x_n - y_n)\varepsilon_n,$$

$$\alpha\hat{x} = (\alpha x_0) + (\alpha x_1)\varepsilon_1 + \cdots + (\alpha x_n)\varepsilon_n, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что на практике даже при линейных операциях над аффинными формами приходится вводить новые символы шума, чтобы учесть ошибки округлений.

Для всех основных вещественных элементарных функций и операций были разработаны их аффинные эквиваленты, что дало возможность выполнять аффинное оценивание для широкого и практически важного класса функций.

Является ли аффинная интервальная арифметика алгебраической системой в обычном понимании этого слова?

3.6 Интервальные методы глобальной оптимизации

Настоящий параграф посвящён изложению общей схемы адаптивных интервальных методов глобальной оптимизации, которые будут существенно использоваться нами далее при построении алгоритмов для оптимального внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений.

Рассмотрим следующую задачу глобальной оптимизации. Пусть

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n & \text{— брус в } \mathbb{R}^n, \\ f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} & \text{— некоторая функция,} \\ f(\mathbf{X}) = \{ f(x) \mid x \in \mathbf{X} \} & \text{— множество её значений.} \end{array}$$

Глобальный “минимум” $\inf f(\mathbf{X})$ мы будем обозначать (в случае, если он существует в \mathbb{R}) через f^* . Использование \inf вместо \min существенно потому, что мы не предполагаем, вообще говоря, непрерывности функции f . Требуется найти f^* численно, т.е. мы хотим построить алгоритм, способный вычислить с любой наперёд заданной точностью нижнюю границу для f^* . Кроме того, для каждой такой вычисленной нижней границы y мы сможем оценивать и ошибку ($f^* - y$).

В случае, когда у нас нет априорной информации о характере глобального поведения целевой функции и структуре её локальных экстремумов, наиболее уместным для решения задачи (3.6), по-видимому, является применение методов, в том или ином виде осуществляющих перебор и сравнение всех точек области определения. Таковыми являются, например, методы неравномерных покрытий (см. [3]).

Поставленная нами цель будет достигнута чисто интервальными средствами, без использования статистических оценок и моделей, сеточных покрытий области определения, условий Липшица, выпуклости и тому подобных часто применяемых методик (см., к примеру, обстоятельный обзор [3]).

При построении алгоритма с желаемыми свойствами мы будем опираться на знание какого-либо интервального расширения целевой функции. Как мы могли видеть выше, конструирование и использование интервальных расширений функций не вызывает никаких проблем в случае использования для вычислений на компьютере интервальной арифметики, которая позволяет автоматически выполнять все построения и преобразования, получая при этом гарантированные нижние и верхние границы значений функций. К технике интервальных расширений функций очень близки методы мажоризации, основанные на знании констант Липшица. Тем не менее, интервальные методы предпочтительней в силу их большей универсальности: подходящее интервальное расширение функции можно построить *почти всегда*, и даже тогда, когда функция не удовлетворяет условию Липшица или не является непрерывной.

3.6а Общая схема

Из теории §3.1 следует, что, при прочих равных условиях, абсолютная погрешность интервального оценивания области значений функции тем более мала, чем меньше ширина бруса, по которому это оценивание производится (Предложение 3.1.2). Основываясь на этом результате, мы можем построить простую процедуру для уточнения внешней оценки области значений функций, которые удовлетворяют условию Липшица на некотором брус $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.

Зафиксируем натуральное число N и рассмотрим равномерное разбиение каждой компоненты \mathbf{x}_i исходного бруса на N подбрусов $\mathbf{x}_{i,j}$, такое что

$$\mathbf{x}_{i,j} := \left[\underline{\mathbf{x}}_i + \frac{j-1}{N} \cdot \text{wid } \mathbf{x}_i, \underline{\mathbf{x}}_i + \frac{j}{N} \cdot \text{wid } \mathbf{x}_i \right],$$

$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N$. Таким образом, в целом

$$\mathbf{x}_i = \bigcup_{j=1}^N \mathbf{x}_{i,j},$$

и весь исходный брус может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = \bigcup_{j_1=1}^N \bigcup_{j_2=1}^N \cdots \bigcup_{j_n=1}^N (\mathbf{x}_{1,j_1}, \mathbf{x}_{2,j_2}, \dots, \mathbf{x}_{n,j_n}),$$

т.е. как объединение N^n штук подбрусов одинакового размера. Ясно, что множество

$$\bigcup_{j_1=1}^N \bigcup_{j_2=1}^N \cdots \bigcup_{j_n=1}^N f(\mathbf{x}_{1,j_1}, \mathbf{x}_{2,j_2}, \dots, \mathbf{x}_{n,j_n})$$

содержит область значений функции f на исходном брус, но погрешность этой новой оценки гораздо меньше, поскольку диаметры брусков, по которым производится теперь интервальное оценивание, существенно уменьшились.

Вышеописанный приём уточнения оценки области значений функции был впервые рассмотрен Р.Е. Муром [22], и имеет, скорее, теоретическое значение, так как его трудоёмкость, пропорциональная N^n , чрезмерно высока для большинства приложений. Вместе с тем, приём Мура может быть кардинально усовершенствован за счёт модификации процесса дробления и оценивания, что приводит к весьма практичным вычислительным алгоритмам.

Заметим, что в приёме Мура дробление исходной области определения на подбрусы и следующее затем интервальное оценивание целевой функции по этим подбрусам связаны друг с другом односторонним образом: результаты оценивания уже никак не влияют на дробление. Можно ли ввести в этот процесс “обратную связь” и дробить брус области определения, подстраиваясь под текущие результаты оценивания?

Ответ на этот вопрос положителен, и он подразумевает смену стратегии дробления. Она должна стать такой, чтобы внешние оценки вычислялись лишь тогда, когда это действительно необходимо, минимизируя тем самым вычислительные затраты. Вычисления могут быть остановлены в случае достижения “достаточной узости” интервала, оценивающего f^* . Итак,

- для улучшения оценки области значений функции не нужно дробить все подбрусы исходного бруса \mathbf{X} , достаточно рассечь лишь те из них, на которых достигаются нижний и верхний концы интервальной оценки области значений функции;

- рассекаемые брусы не обязательно дробить по всем компонентам сразу, (это увеличивает цену каждого отдельного шага работы алгоритма), важно лишь то, что размеры получающихся после дробления брусов меньше размера исходного бруса.

Переходя к строгим определениям, ограничим себя задачей нахождения $\min_{x \in \mathbf{X}} f(x)$. Алгоритм вычисления $\max_{x \in \mathbf{X}} f(x)$ строится и исследуется совершенно аналогично.

Представляемый в Табл. 3.1 алгоритм для глобальной минимизации функции (условно названный нами **GlobOpt**) является незначительной модификацией алгоритмов С. Склелбоу [32] и Р.Е. Мура [24]. Алгоритм инициализирует *рабочий список* \mathcal{L} , первоначально состоящий из одной пары (\mathbf{Y}, y) . Далее каждый шаг алгоритма заключается в обработке и расширении этого списка. На k -ом шаге список \mathcal{L} состоит из k штук пар-записей, т.е.

$$\mathcal{L} = \{ (\mathbf{Z}^{(1n)}, z^{(1n)}), \dots, (\mathbf{Z}^{(nn)}, z^{(nn)}) \},$$

где

$$z^{(ik)} = \underline{F(\mathbf{Z}^{(ik)})}.$$

Нас будет, главным образом, интересовать первая запись списка \mathcal{L} , которую мы называем *ведущей записью*.

3.6б Исследование сходимости

Теорема 3.6.1 [26] Пусть даны брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, некоторая функция $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и её интервальное расширение $F : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$. Тогда глобальный инфимум $f^* = \inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)$ существует и имеет место включение

$$f^* \in F(\mathbf{Y})$$

для всех ведущих брусов \mathbf{Y} алгоритма **GlobOpt**.

Как видно из Табл. 3.1, алгоритм **GlobOpt** останавливается, когда ведущим брусом делается такой брус \mathbf{Y} , что $\text{wid } F(\mathbf{Y}) < \epsilon$. В этом случае результатом y^* работы алгоритма является нижняя граница для f^* , а $\delta = \text{wid } F(\mathbf{Y})$ может служить верхней границей абсолютной ошибки $f^* - y^*$, что следует из вышеприведённой Теоремы.

Теорема 3.6.2 В алгоритме **GlobOpt** сумма длин компонент ведущих брусов стремится к нулю.

Таблица 3.1. Простейший интервальный адаптивный алгоритм
глобальной оптимизации GlobOpt

Вход

Интервальное расширение $F : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$ целевой функции f .

Заданная точность $\epsilon > 0$.

Выход

Оценка глобального минимума f^* функции f на брус \mathbf{X} .

Алгоритм

$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$;

вычисляем $F(\mathbf{Y})$ и присваиваем $y \leftarrow \underline{F(\mathbf{Y})}$;

инициализируем список $\mathcal{L} := \{ (\mathbf{Y}, y) \}$;

DO WHILE ($\text{wid}(F(\mathbf{Y})) \geq \epsilon$)

 выбираем компоненту l , по которой брус \mathbf{Y} имеет

 наибольшую длину, т.е. $\text{wid } \mathbf{Y}_l = \max_i \text{wid } \mathbf{Y}_i$;

 рассекаем брус \mathbf{Y} по l -ой координате пополам

 на брусы \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'' такие что

$\mathbf{Y}' := (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\underline{\mathbf{Y}}_l, \text{mid } \mathbf{Y}_l], \mathbf{Y}_{l+1}, \dots, \mathbf{Y}_n)$,

$\mathbf{Y}'' := (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\text{mid } \mathbf{Y}_l, \overline{\mathbf{Y}}_l], \mathbf{Y}_{l+1}, \dots, \mathbf{Y}_n)$;

 вычисляем $F(\mathbf{Y}')$ и $F(\mathbf{Y}'')$;

 присваиваем $v' \leftarrow \underline{F(\mathbf{Y}')}$ и $v'' \leftarrow \underline{F(\mathbf{Y}'')}$;

 удаляем запись (\mathbf{Y}, y) из списка \mathcal{L} ;

 помещаем записи (\mathbf{Y}', v') и (\mathbf{Y}'', v'') в список \mathcal{L}

 в порядке возрастания второго поля;

 обозначаем первую запись списка через (\mathbf{Y}, y) ;

END DO

$f^* \leftarrow y$;

$\delta \leftarrow \text{wid}(F(\mathbf{Y}))$;

Доказательство. Мы покажем, что последовательность $\{\vartheta^{(k)}\}$ сумм длин компонент ведущих брусов мажорируется некоторой последовательностью $\{\Theta^{(k)}\} \rightarrow 0$. Пусть

$\vartheta(\mathbf{Y})$ — сумма длин компонент бруса \mathbf{Y} ,

$\lambda^{(k)}$ — множество всех брусов \mathbf{Y} , таких что пара $(\mathbf{Y}, \underline{F}(\mathbf{Y}))$ содержится в списке \mathcal{L} с k -го шага алгоритма и затем становится ведущей парой на шаге с некоторым номером $\geq k$.

Нетрудно видеть, что если

$$\Theta^{(k)} = \max\{\vartheta(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(k)}\}$$

то $\Theta^{(k)} > 0$, и последовательность $\{\Theta^{(k)}\}$ является невозрастающей. Действительно, множество $\lambda^{(k+1)}$ содержит все брусы из $\lambda^{(k)}$ за исключением бруса \mathbf{Y} , который был ведущим на k -м шаге: вместо \mathbf{Y} множество $\lambda^{(k+1)}$ может содержать или не содержать его потомки \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'' . Поскольку

$$\vartheta(\mathbf{Y}) > \vartheta(\mathbf{Y}') \quad \text{и} \quad \vartheta(\mathbf{Y}) > \vartheta(\mathbf{Y}''),$$

мы можем заключить, что

$$\begin{aligned} \Theta^{(k)} &= \max\{\vartheta(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(k)}\} \\ &\geq \max\{\vartheta(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(k+1)}\} = \Theta^{(k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Чему же равен $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta^{(k)}$, предел, который должен существовать в силу хорошо известной из математического анализа теоремы Вейерштрасса?

Если $\lim \Theta^{(k)} = \zeta > 0$, то найдётся положительное целое число μ , такое что

$$\frac{2n}{2n-1} \zeta > \Theta^{(k)} \geq \zeta,$$

при условии $k > \mu$ (n обозначает размерность) и поэтому

$$\frac{2n}{2n-1} \zeta > \vartheta(\mathbf{Y})$$

для всех $\mathbf{Y} \in \lambda^{(k)}$, $k > \mu$. Зафиксировав $\gamma > \mu$, мы рассмотрим какой-нибудь брус $\mathbf{Y} \in \lambda^{(\gamma)}$. Предположим, что наибольший член в сумме

$\vartheta(\mathbf{Y})$ соответствует j -й компоненте \mathbf{Y} . По самому определению $\lambda^{(\gamma)}$ существует такое положительное целое $\mu_{\mathbf{Y}}$, $\mu_{\mathbf{Y}} > \gamma > \mu$, что \mathbf{Y} делается ведущим брусом на $\mu_{\mathbf{Y}}$ -м шаге алгоритма `GlobalOpt`. Тогда же он будет рассечён по своей j -й компоненте, а для каждого из потомков \mathbf{Y}' от \mathbf{Y} справедлива оценка

$$\vartheta(\mathbf{Y}') \leq \vartheta(\mathbf{Y}) - \vartheta(\mathbf{Y})/2n = \frac{2n-1}{2n} \vartheta(\mathbf{Y}) < \zeta.$$

Если $M = \max\{\mu_{\mathbf{Y}} \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(\gamma)}\}$, то это неравенство остается верным для всех брусом из множества $\lambda^{(M+1)}$. Но это противоречит допущению о том, что $\Theta^{(k)} \geq \zeta > 0$. Следовательно, $\lim \Theta^{(k)} = 0$, как и требовалось доказать. ■

Аналогичный результат был получен также Х. Рачеком [26], но совершенно другим способом.

3.6в Модификации

Конечно, представленный выше простейший алгоритм глобальной оптимизации едва ли может быть с успехом применён к решению серьёзных практических задач. Фактически, при уменьшении размеров области, подозрительной на глобальный минимум, основной упор в нём делается на бисекцию, эффект от которой при увеличении размерности становится всё менее и менее ощутимым. Обычно в методы подобного типа вводят ряд усовершенствований, значительно ускоряющих их сходимость. Как правило, их перечень (не претендующий на полноту) включает в себя следующие модификации (см., в частности, работы [2, 9, 17, 28]):

1. посредством выявления монотонности целевой функции на брусах из списка \mathcal{L} по тем или иным переменным добиваются уменьшения размерности этих брусом;
2. строят более качественное интервальное расширение для целевой функции;
3. на основе специфических локальных свойств целевой функции в соответствующих брусах применяют более эффективные, чем бисекция, процедуры минимизации (например, методы градиентного спуска в тех брусах \mathbf{Y} , где f гладкая и выпуклая);

4. наряду с оцениванием целевой функции по целым брусам вычисляют её значения в каких-то точках этих брусков, — они доставляют верхнюю границу искомого глобального минимума, знание которой позволяет чистить рабочий список \mathcal{L} от записей, заведомо не могущих быть ведущими.

Поясним, что имеется в виду в последнем пункте. Обозначим символом $\Box \mathbf{Y}$ операцию взятия какой-то фиксированной точки из \mathbf{Y} и предположим, что для брусков \mathbf{Y} , порождаемых алгоритмом **GlobalOpt** наряду с оцениванием $F(\mathbf{Y})$ мы вычисляем ещё и величины $f(\Box \mathbf{Y})$. Очевидно, что $f(\Box \mathbf{Y}) \geq F(\mathbf{Y})$ и значения $f(\Box \mathbf{Y})$ приближают искомый $\inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)$ сверху: если для каждого шага алгоритма мы определим величину

$$\omega = \min f(\Box \mathbf{Y}), \quad (3.4)$$

где минимум берётся по всем таким брускам \mathbf{Y} , что соответствующая пара когда-либо побывала в списке \mathcal{L} до текущего шага, то всегда

$$\inf_{x \in \mathbf{X}} f(x) \leq \omega.$$

Следовательно, пара $(\mathbf{Y}, F(\mathbf{Y}))$, которая на некотором шаге алгоритма удовлетворяет неравенству

$$\underline{F(\mathbf{Y})} > \omega \quad (3.5)$$

никогда не станет ведущей и удаление её из списка \mathcal{L} не окажет никакого влияния на выполнение алгоритма **GlobalOpt**. Посредством условия (3.5) мы должны тестировать все вновь порождаемые пары на каждом шаге алгоритма, но полную чистку списка \mathcal{L} — просмотр всех его записей и удаление записей, удовлетворяющих (3.5) — имеет смысл делать лишь после того как параметр ω изменился (т.е. уменьшился).

Идеальным выбором для $\Box \mathbf{Y}$ было бы, конечно,

$$\Box \mathbf{Y} \in \text{Arg min } \{ f(x) \mid x \in \mathbf{Y} \}.$$

Но в общем случае такое удачное нахождение $\Box \mathbf{Y}$ является не менее простым чем решение исходной задачи, и потому мы будем брать $\Box \mathbf{Y} = \text{mid } \mathbf{Y}$ для того, чтобы минимизировать возможные отклонения $\Box \mathbf{Y}$ от точек множества $\text{Arg min } \{ f(x) \mid x \in \mathbf{Y} \}$.

К сказанному можно добавить, что введение в алгоритм **GlobalOpt** вычислений $f(\Box \mathbf{Y})$ позволяет получить ещё один критерий остановки:

если \mathbf{Y} — ведущий брус, то

$$\underline{F(\mathbf{Y})} \leq \inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)$$

и теперь мы можем прервать итерации когда разность $(\omega - \underline{F(\mathbf{Y})})$ достаточно мала.

3.6г Способы обработки списка

В алгоритме Табл. 3.1 мы упорядочивали список \mathcal{L} по возрастанию оценки $\Omega(\mathbf{P})$, так что первая запись списка являлась одновременно и ведущей. Мы следовали в этом С. Склбоу [32], Р.Е. Муру с соавторами [9], Х. Рачеку [26] и некоторым другим исследователям. Но существует и конкурирующий подход: в работах Е. Хансена [15, 16, 17] и П.С. Панкова [5, 6, 7], также посвящённых интервальным алгоритмам глобальной оптимизации на основе стратегии “ветвей и границ”, список \mathcal{L} вообще никак не структурируется, т.е. он, по существу, реализуется в виде *кучи* [1].

Весьма сложно сравнивать два этих возможных способа организации рабочего списка \mathcal{L} . С одной стороны, совсем нетрудно добавить дополнительную запись к неупорядоченному списку, но зато, чтобы найти в нём ведущую запись, требуется просмотреть весь список целиком. В то же время, простота обращения к ведущей записи упорядоченного списка достигается ценой определённых затрат на каждом шаге алгоритма на поддержание этой упорядоченности, также выражающихся в необходимости частичного просмотра \mathcal{L} . Кроме того, дополнив алгоритм процедурой чистки списка \mathcal{L} от бесперспективных записей, мы вновь сталкиваемся с необходимостью просмотра всего \mathcal{L} (хотя и не на каждом шаге).

Тем не менее, просматривать весь неупорядоченный список \mathcal{L} приходится на всех без исключения шагах алгоритма вне зависимости от хода его выполнения. Если же список \mathcal{L} упорядочен, то при занесении в него записей-потомков в худшем случае его нужно просмотреть целиком, в лучшем он вообще не нуждается в просмотре, а в среднем на каждом шаге мы должны будем просматривать список \mathcal{L} всё-таки не весь, т.е. в меньшей мере, чем для неупорядоченного варианта. Этим и объясняется наш выбор упорядоченного \mathcal{L} .

Некоторое ускорение обработки списка \mathcal{L} может быть достигнуто с помощью следующего приёма, предложенного П.С. Панковым [6]. В

его основе — задание и корректировка по текущим нижней и верхней оценкам глобального минимума, $\Omega(\mathbf{Q})$ и ω , соответственно, вспомогательной “пороговой константы” γ , такой что

$$\Omega(\mathbf{Q}) < \gamma < \omega,$$

и “подписка активных записей”

$$\mathcal{L}_\gamma = \{ (\mathbf{P}, \Omega(\mathbf{P})) \in \mathcal{L} \mid \Omega(\mathbf{P}) < \gamma \} \subseteq \mathcal{L}.$$

В случае неупорядоченного \mathcal{L} (кучи записей) ясно, что именно в \mathcal{L}_γ (при $\mathcal{L}_\gamma \neq \emptyset$) находится ведущая запись всего \mathcal{L} , и потому при её поиске нам достаточно, сэкономив машинное время, ограничиться лишь просмотром \mathcal{L}_γ . Если же мы придерживаемся варианта упорядоченного рабочего списка \mathcal{L} , то по аналогичным причинам эту упорядоченность достаточно поддерживать только в \mathcal{L}_γ , организовав дополнение $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\gamma$ в виде кучи. В процессе работы алгоритма подмножество \mathcal{L}_γ не возрастает, и если на некотором шаге оно сделается пустым, то тогда же перевычисляется пороговая константа γ , и из \mathcal{L} заново выделяется \mathcal{L}_γ .

Совершенно строгих рецептов по выбору величины γ дать, по-видимому, невозможно. С одной стороны, с уменьшением γ уменьшается и \mathcal{L}_γ , и тем большим должен быть наш выигрыш в трудоёмкости на каждом отдельном шаге алгоритма. С другой стороны, если γ слишком мало, то подписок \mathcal{L}_γ быстро исчерпывается, и мы вынуждены часто перевычислять γ и перестраивать \mathcal{L} . Руководствуясь отчасти эмпирическими, а отчасти эвристическими соображениями мы рекомендуем

$$\gamma = \frac{1}{3}(\omega + 2\Omega(\mathbf{Q})).$$

Отметим также, что, будучи реализованным, приём П.С. Панкова не позволяет производить “чистку” всего списка \mathcal{L} от бесперспективных записей в промежутках между перевычислениями “пороговой константы” γ , так что определённый выигрыш в быстродействии достигается им ценой дополнительной оперативной памяти.

3.6д Стратегия дробления

3.7 Интервальные методы дробления графика

В этом параграфе мы продолжим исследование задачи глобальной оптимизации вещественнозначной функции $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ на прямо-

угольном брусе \mathbf{X} со сторонами, параллельными координатным осям:

$$\text{найти} \quad \min_{x \in \mathbf{X}} f(x). \quad (3.6)$$

Ранее в этой Главе мы рассмотрели различные интервальные методики решения этой задачи, которые позволяют надёжно находить гарантированные двусторонние границы как для величины оптимума, так и для доставляющих его значений аргумента. Основой этих методов является адаптивное, в соответствии со стратегией “ветвей и границ”, дробление области определения минимизируемой функции и интервальное оценивание областей значений по получающимся подобластям. Цель настоящего параграфа — представить новый перспективный интервальный подход к решению задачи (3.6), основанный на совместном адаптивном дроблении как области определения функции, так и области её значений.

Известно, что любая функция $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$, будучи, по определению, некоторым специальным подмножеством декартова произведения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, есть $(n + 1)$ -мерный объект (в связи с которым обычно употребляют понятие *графика* функции f). Но рассмотренные ранее в этой Главе интервальные методы глобальной оптимизации осуществляют активные действия — адаптивное дробление — лишь в отношении первых n координат этого множества. Последняя $(n + 1)$ -я координата функции, представленной своим графиком, обрабатывается существенно по другому, пассивно, и то же самое верно и для подавляющего большинства классических методов оптимизации.

Как можно исправить эту ситуацию и что при этом получится?

3.7a Одномерная оптимизация

Начнём с простейшего случая и рассмотрим функцию одной переменной $f : \mathbb{R} \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$, заданную на замкнутом интервале \mathbf{X} , для которой требуется решить задачу (3.6). Пусть в плоскости $0xy$ задана прямая, параллельная первой координатной оси и имеющая уравнение $y = l$, где l — некоторая константа. Мы можем узнать, пересекает ли график функции $y = f(x)$ эту прямую, решив на \mathbf{X} уравнение

$$f(x) - l = 0 \quad (3.7)$$

или же убедившись в его несовместности. Как нетрудно понять, ответ на этот вопрос доставляет информацию об искомом минимуме (3.6):

если прямая $y = l$ пересекает график функции $y = f(x)$, то

$$\min_{x \in \mathbf{X}} f(x) \leq l.$$

Более того, если $f(x)$ непрерывна на \mathbf{X} , то

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbf{X}} f(x) &= \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{прямая } y = l \text{ пересекает} \\ \text{график функции } y = f(x) \end{array} \right\} \\ &= \min \{ l \in \mathbb{R} \mid \text{уравнение } f(x) - l = 0 \text{ совместно} \}. \end{aligned}$$

Следовательно, варьируя величину “уровня” l и повторяя процесс решения уравнения (3.7), мы можем уточнять оценку для искомого минимума (3.6).

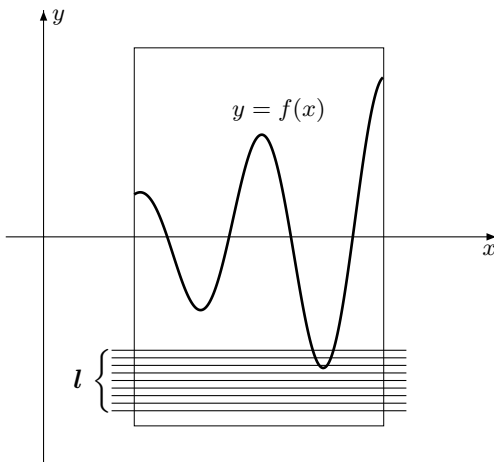


Рис. 3.3. Пересекает ли пучок прямых график функции?...

Описанная процедура может быть существенно модифицирована путём привлечения идей и методов интервального анализа:

Во-первых, интервальные методы позволяют легко найти для области значений f на \mathbf{X} грубые оценки сверху и снизу, которые нужны для определения границ варьирования величины “уровня” l в процессе уточнения минимума.

Во-вторых, имеет смысл исследовать пересечение графика функции $y = f(x)$ не с одиночными прямыми, а с целыми пучками прямых, параллельных оси Ox и задаваемых уравнениями $y = l$, где l — интервал в \mathbb{R} . Тем самым мы сможем оценивать искомый глобальный минимум (3.6) как сверху, так и снизу:

$$\min_{x \in X} f(x) \text{ не меньше минимума левых концов и не больше минимума правых концов всех таких интервалов } l, \text{ что пучок } y = l \text{ пересекается с графиком функции } y = f(x). \quad (3.8)$$

В-третьих, интервальные методы решения уравнений, например, интервальный метод Ньютона и его модификации (см. Главу 9 нашей книги) позволяют при минимальных требованиях на гладкость функции f исследовать вопрос о разрешимости как вещественного уравнения (3.7), так и интервального уравнения $f(x) - l = 0$, понимаемую как существование некоторого $l \in l$, для которого совместно (3.7).

Ответ, выдаваемый интервальными методами решения уравнений, может иметь одну из следующих форм:

1. Уравнение не имеет решений (т.е. несовместно) на рассматриваемом интервале.
2. Уравнение гарантированно имеет решение (или решения) на рассматриваемом интервале. В этом случае будем просто говорить, что уравнение *совместно*.
3. Применение решающей процедуры не позволяет определённо заявить как о том, что на рассматриваемом интервале у уравнения корней нет, так и о том, что они есть. В этом случае условимся говорить, что уравнение *возможно совместно*.

Третий исход является наиболее неблагоприятным с точки зрения конструируемой нами процедуры уточнения искомого глобального минимума $\min_X f(x)$, но в своих построениях нам всё же следует аккуратно принимать во внимание неопределённость подобного сорта: она весьма часто имеет место в случае наличия у уравнения (3.7) кратных корней. Важно заметить, что интервальные методы никогда не “теряют” корней и в принципе не могут выдавать сообщение о несовместности уравнения, если оно имеет корни.

Наконец, вместо не вполне строгого “варьирования уровня” l мы будем применять дробление интервала области значений. В целом, интервальная версия процедуры уточнения глобального минимума одномерной функции $f(x)$ на интервале \mathbf{X} может выглядеть следующим образом. Сначала мы находим грубую внешнюю интервальную оценку \mathbf{Y} области значений функции $f(x)$ на \mathbf{X} (например, как естественное интервальное расширение f на \mathbf{X}). Далее

рассекаем интервал \mathbf{Y} пополам на подинтервалы $\mathbf{Y}' := [\underline{\mathbf{Y}}', \text{mid } \mathbf{Y}]$ и $\mathbf{Y}'' := [\text{mid } \mathbf{Y}, \overline{\mathbf{Y}}]$, где $\text{mid } \mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}})$ — середина \mathbf{Y} ;

проверяем совместность интервальных уравнений $f(x) - \mathbf{Y}' = 0$ и $f(x) - \mathbf{Y}'' = 0$:

- если какое-либо из этих уравнений несовместно, то отбрасываем соответствующий интервал и больше не рассматриваем его;
- совместность или возможная совместность уравнения означает, что нижняя и/или верхняя оценки глобального минимума могут быть скорректированы в соответствии с (3.8).

Процедуру улучшения оценки для минимума (3.6) посредством дробления интервала области значений \mathbf{Y} можно повторить по отношению к его потомкам \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'' , затем снова разбить потомков от \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'' и снова повторить уточнение и т.д. до тех пор, пока вычисленные верхняя и нижняя границы минимума не окажутся достаточно близкими друг к другу. Отметим, что в этом процессе мы должны сохранять все подинтервалы области значений \mathbf{y} исходного интервала \mathbf{Y} , для которых соответствующие уравнения $f(x) - \mathbf{y} = 0$ совместны или возможно совместны, так как даже в случае возможной совместности они могут соответствовать пучкам прямых, имеющим непустое пересечение с графиком целевой функции.

3.76 Многомерный случай

Теоретически вычислительная схема алгоритма одномерной глобальной оптимизации, развитая в предыдущем пункте, вполне применима и к функции $f(x) := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от нескольких переменных. Теперь мы лишь должны уметь устанавливать факт пересечения или непересечения графика функции $y = f(x)$ с пучком гиперплоскостей

$y = l$, ортогональных оси Oy . Это действительно может быть сделано, например, если мы имеем в своём распоряжении какой-либо мощный решатель для систем уравнений и способны легко применять его. В частности, А.Л.Семенов в [29] реализовал процедуру похожего типа для уточнения значений оптимума в некоторых оптимизационных задачах.

Но в большинстве случаев практическая реализация этой идеи сталкивается с большими трудностями. Дело в том, что в общем многомерном случае решение системы уравнений — выяснение её совместности — является не более лёгкой задачей, чем глобальная оптимизация. Теперь, в отличие от одномерной ситуации, мы уже не располагаем для её решения простыми и эффективными подходами вроде интервального метода Ньютона и его модификаций. Выход из создавшегося затруднения может состоять в том, что мы всё-таки будем подвергать дроблению область определения функции — брус \mathbf{X} — по некоторым (но не по всем!) избранным координатным направлениям, количество и конкретный выбор которых зависят от решаемой задачи и её целевой функции.

Координатные направления, по которым область определения не будет дробиться, мы назовём *немymi* и рассмотрим сначала простейшие методы, в которых выделено всего лишь одно немое направление с номером $\mu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^{n+1} прямую, параллельную μ -ой координатной оси, и имеющую параметрическое уравнение

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & r_1, \\ & \vdots & \\ x_{\mu-1} & = & r_{\mu-1}, \\ x_\mu & = & t, \\ x_{\mu+1} & = & r_{\mu+1}, \\ & \vdots & \\ x_n & = & r_n, \\ y & = & l, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

где t — параметр, пробегающий всю числовую ось, а $r_1, \dots, r_{\mu-1}, r_{\mu+1}, \dots, r_n, l$ — некоторые константы. Аналогично одномерному случаю,

если f непрерывна на \mathbf{X} , то

$$\min_{x \in \mathbf{X}} f(x) = \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{прямая (3.9) пересекает} \\ \text{график функции } y = f(x) \end{array} \right\}.$$

Следовательно, мы будем способны “нащупывать” график минимизируемой функции одномерными прямыми, вновь используя для проверки совместности элементарных “уравнений уровня”

$$f(x) - l = 0$$

эффективные одномерные интервальные процедуры (типа интервального метода Ньютона и его модификаций, см. Главу 7). Обращаясь к построению интервальной оптимизационной процедуры, обозначим

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n) := (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}), \quad (3.10)$$

$$\phi(\mathbf{Z}, t) := f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\mu-1}, t, \mathbf{X}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{X}_n) - \mathbf{Y}. \quad (3.11)$$

n -мерные брусы \mathbf{Z} — это пучки отрезков прямых, параллельных μ -ой координатной оси и “нащупывающих” график функции $y = f(x)$, тогда как результат пересечения или непересечения пучка с графиком будет определяться из решения относительно t одномерного интервального уравнения

$$\phi(\mathbf{Z}, t) = 0.$$

Хранение всех пересекающих график функции брусков является залогом того, что мы не упустим искомый глобальный минимум.

В целом мы оформим процесс последовательного улучшения оценок глобального минимума (3.6) аналогично тому, как это делается в широко известном в комбинаторной оптимизации “методе ветвей и границ” и как это было адаптировано для рассмотренных ранее интервальных методов глобальной оптимизации:

- организуем все брусы, которые возникают в процессе дробления исходного бруса \mathbf{Z} , в некоторый *рабочий список* \mathcal{L} ;
- дроблению каждый раз будем подвергать лишь тот брус из списка \mathcal{L} , который имеет наименьший левый конец последней компоненты, т.е. доставляет рекордную гарантированную оценку снизу для искомого глобального минимума;

Таблица 3.2. Простейший интервальный алгоритм дробления графика для глобальной оптимизации функций (одна немая координата)

```

вычисляем внешнюю оценку  $\mathbf{Y}$  области значений  $f$  на  $\mathbf{X}$ ;
присваиваем  $\mathbf{Z} \leftarrow (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y})$ ;
присваиваем  $z \leftarrow \underline{\mathbf{Y}}$  и  $\bar{y} \leftarrow \overline{\mathbf{Y}}$ ;
инициализируем рабочий список  $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Z}, z)\}$ ;
DO WHILE ( $\bar{y} - z \geq \epsilon$ )
    выбираем компоненту  $k$ , по которой брус  $\mathbf{Z}$  имеет
        наибольшую ширину, т.е.  $\text{wid } \mathbf{Z}_k = \max_{1 \leq i \leq n} \text{wid } \mathbf{Z}_i$ ;
    рассекаем брус  $\mathbf{Z}$  по  $k$ -ой координате пополам
        на брусы  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$ , такие что
        
$$\mathbf{Z}' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\underline{\mathbf{Z}}_k, \text{mid } \mathbf{Z}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_n),$$

        
$$\mathbf{Z}'' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\text{mid } \mathbf{Z}_k, \overline{\mathbf{Z}}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_n);$$

    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно или
        возможно совместно и  $\underline{\mathbf{Z}}'_n \leq \bar{y}$ , то присваиваем
         $z' \leftarrow \underline{\mathbf{Z}}'_n$  и помещаем запись  $(\mathbf{Z}', z')$  в список  $\mathcal{L}$ 
        в порядке возрастания значений второго поля;
    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно, то
        присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \overline{\mathbf{Z}}'_n\}$ ;
    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно или
        возможно совместно и  $\underline{\mathbf{Z}}''_n \leq \bar{y}$ , то присваиваем
         $z'' \leftarrow \underline{\mathbf{Z}}''_n$  и помещаем запись  $(\mathbf{Z}'', z'')$  в список  $\mathcal{L}$ 
        в порядке возрастания значений второго поля;
    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно, то
        присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \overline{\mathbf{Z}}''_n\}$ ;
    удаляем бывшую ведущую запись  $(\mathbf{Z}, z)$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    обозначаем новую ведущую запись через  $(\mathbf{Z}, z)$ ;
END DO
 $\underline{y} := z$ ;

```

- в подвергаемом дроблению брусе будем делить пополам лишь самую широкую компоненту.

Кроме того, брусы вида (3.10), из которых составлен список \mathcal{L} , будут упорядочены по возрастанию левого конца последней n -ой компоненты (представляющей область значений функции), а первую запись списка мы будем называть *ведущей* на данном шаге. Полный псевдокод получающегося нового алгоритма, который мы назовём *методом дробления графика*, представлен в Табл. 3.2.

На его вход подаются

брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ и целевая функция $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$,

точность $\epsilon > 0$,

номер μ немой компоненты, $1 \leq \mu \leq n$,

метод выяснения совместности одномерных интервальных уравнений $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$ для ϕ и \mathbf{Z} , определённых в (3.10)–(3.11).

На выходе при успешном завершении алгоритма получаем нижнюю \underline{y} и верхнюю \overline{y} оценки с точностью ϵ для глобального минимума функции f на брусе \mathbf{X} .

Перейдём теперь к рассмотрению более общей ситуации, в которой немymi объявлены s , $1 \leq s \leq n$, координатных направлений. Не умаляя общности наших рассмотрений можно считать, что номера этих координат суть $1, 2, \dots, s$. Пусть в пространстве \mathbb{R}^{n+1} задана плоскость, параллельная этим координатным направлениям, и имеющая, таким образом, параметрическое уравнение

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & t_1, \\ & \vdots & \\ x_{s-1} & = & t_{s-1}, \\ x_s & = & t_s, \\ x_{s+1} & = & r_{s+1}, \\ & \vdots & \\ x_n & = & r_n, \\ y & = & l, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

где t_1, \dots, t_s — параметры, пробегающие всю числовую ось \mathbb{R} , а r_{s+1}, \dots, r_n, l — некоторые константы. Аналогично одномерному случаю, если f непрерывна на \mathbf{X} , то

$$\min_{x \in \mathbf{X}} f(x) = \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{плоскость (3.12) пересекает} \\ \text{график функции } y = f(x) \end{array} \right\}.$$

Обозначим

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{n-s+1}) := (\mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}), \quad (3.13)$$

$$\varphi(\mathbf{Z}, t) := f(t_1, \dots, t_s, \mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n) - \mathbf{Y}. \quad (3.14)$$

$(n - s + 1)$ -мерные брусы \mathbf{Z} — это пучки из прямоугольных кусков плоскостей вида (3.12), тогда как результат пересечения или непересечения таких пучков с графиком целевой функции будет определяться из решения относительно $t = (t_1, t_2, \dots, t_s)$ интервальных уравнений вида

$$\phi(\mathbf{Z}, t) = 0.$$

Следовательно, плоскостями (3.12) мы сможем “нащупывать” график минимизируемой функции, если будем уметь эффективно проверять совместность этих уравнений от s неизвестных.

Наконец, мы снова оформим процесс последовательного улучшения оценок глобального минимума в соответствии со стратегией “ветвей и границ”, так что полный псевдокод получающегося нового алгоритма, приведенный в Табл. 3.3, совершенно аналогичный случаю одного немого направления. На вход ему подаются

брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ и целевая функция $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$,

точность $\epsilon > 0$,

номера немых компонент — $1, 2, \dots, s$, где $1 \leq s \leq n$.

Кроме того, мы фиксируем метод выяснения совместности интервального уравнения $\varphi(\mathbf{Z}, t) = 0$ для $t = (t_1, \dots, t_s)$ и φ, \mathbf{Z} , определённых в (3.13)–(3.14). На выходе алгоритма получаются нижняя \underline{y} и верхняя \bar{y} оценки с точностью ϵ для глобального минимума функции f на брус \mathbf{X} .

Представленные в Табл. 3.2 и Табл. 3.3 алгоритмы предназначены, очевидным образом, для вычисления лишь величины глобального минимума (3.6), но путём несложной модификации можно сделать

Таблица 3.3. Простейший интервальный алгоритм дробления графика для глобальной оптимизации функций (случай s немых координат)

```

вычисляем внешнюю оценку  $\mathbf{Y}$  области значений  $f$  на  $\mathbf{X}$  ;
присваиваем  $\mathbf{Z} := (\mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y})$  ;
присваиваем  $z \leftarrow \underline{\mathbf{Y}}$  и  $\bar{y} := \overline{\mathbf{Y}}$  ;
инициализируем рабочий список  $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Z}, z)\}$  ;
DO WHILE ( $\bar{y} - z \geq \epsilon$ )
    выбираем компоненту  $k$ , по которой брус  $\mathbf{Z}$  имеет
        наибольшую ширину, т.е.  $\text{wid } \mathbf{Z}_k = \max \text{wid } \mathbf{Z}_i$  ;
    рассекаем брус  $\mathbf{Z}$  по  $k$ -ой координате пополам
        на брусы  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$ , такие что
         $\mathbf{Z}' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\underline{\mathbf{Z}}_k, \text{mid } \mathbf{Z}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_{n-s+1})$  ,
         $\mathbf{Z}'' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\text{mid } \mathbf{Z}_k, \overline{\mathbf{Z}}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_{n-s+1})$  ;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на брусе  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно или возможно совместно и  $\underline{\mathbf{Z}}'_n \leq \bar{y}$ , то
        присваиваем  $z' \leftarrow \underline{\mathbf{Z}}'_{n-s+1}$  и помещаем запись  $(\mathbf{Z}', z')$ 
        в  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания второго поля ;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно, то присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \overline{\mathbf{Z}}'_{n-s+1}\}$  ;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на брусе  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно или возможно совместно и  $\underline{\mathbf{Z}}''_n \leq \bar{y}$ , то
        присваиваем  $z'' \leftarrow \underline{\mathbf{Z}}''_{n-s+1}$  и помещаем запись
         $(\mathbf{Z}'', z'')$  в  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания второго поля ;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно, то присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \overline{\mathbf{Z}}''_{n-s+1}\}$  ;
    удаляем бывшую ведущую запись  $(\mathbf{Z}, z)$  из списка  $\mathcal{L}$  ;
    обозначаем новую ведущую запись через  $(\mathbf{Z}, z)$  ;
END DO
 $\underline{y} \leftarrow z$  ;

```

так, чтобы они находили и значения переменных, доставляющих этот минимум. Именно, для этого нам нужно отслеживать и хранить все корни (как гарантированные, так и возможные) “уравнений уровня” $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$ помимо информации об их разрешимости. Это потребует расширения записей, образующих рабочий список \mathcal{L} с тем, чтобы хранить информацию о двусторонних границах корней “уравнений уровня”.

Что можно сказать о сходимости методов дробления графика? Известно, что в классических интервальных методах глобальной оптимизации из §3.6, основанных на адаптивном “branch-and-bound” дроблении области определения функции, диаметры ведущих брусков стремятся к нулю (Теорема 3.6.2). Этот факт необходимо верен и для методов дробления графика, так как их логическая схема совершенно совпадает с логической схемой классических интервальных методов глобальной оптимизации. Следовательно, “уравнения уровня” $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$, определяемые посредством (3.11) и (3.14), стремятся к точечным (неинтервальным) уравнениям в том смысле, что их интервальные коэффициенты неограниченно сужаются по мере работы алгоритма. Если целевая функция f такова, что корни уравнения $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$ непрерывно зависят от параметра \mathbf{Z} , то мы можем ожидать сходимости метода дробления графика к глобальному оптимуму.

3.7в Градиентные тесты

Вынесенным в заголовок общим термином мы называем тесты, основанные на использовании градиента целевой функции, между тем как их содержательный смысл может быть весьма различен.

Если f — непрерывно дифференцируемая функция, то во внутренней для \mathbf{X} точке глобального минимума её градиент зануляется. Следовательно, если внешняя интервальная оценка градиента по некоторому внутреннему для \mathbf{X} интервальному вектору \mathbf{x} не содержит нуля, то в \mathbf{x} не может быть экстремумов функции f . Исключение интервала \mathbf{x} из области определения минимизируемой функции не окажет поэтому никакого влияния на результаты поиска. Если же подинтервал \mathbf{x} не является внутренним для \mathbf{X} , то просто так исключить его нельзя. Хотя внутренность \mathbf{x} действительно не может содержать экстремумов f , обязательно требуется дополнительное исследование той части \mathbf{x} , которая выходит на границу исходной области определения \mathbf{X} . Основанный на описанных соображениях приём исследования брусков очень

популярен в упоминавшихся нами интервальных методах глобальной оптимизации из [17, 21, 28], но применение его в методах дробления графика имеет свою специфику.

В методах дробления графика область определения дробится не по всем координатным направлениям: по немым направлениям все брусы из рабочего списка выходят на границу области определения, а потому никогда и не сделаются внутренними. Это обстоятельство нужно принимать во внимание при порождении новых записей. Пусть, к примеру, в процессе исполнения алгоритма Табл. 3.2 мы выявили запись $(\mathbf{Z}, z) \in \mathcal{L}$, $\mathbf{Z} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$, такую что на брусе $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ градиент целевой функции не содержит нуля. Следовательно, искомый экстремум может достигаться лишь в тех точках из $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$, которые выходят на границу $\partial \mathbf{X}$ исходного бруса \mathbf{X} , т.е. на пересечении

$$\mathbf{X} \cap (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (3.15)$$

Таким образом, в лучшем случае мы должны оставить для рассмотрения два $(n - 1)$ -мерных бруса

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \underline{\mathbf{X}}_{\mu}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \\ &(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \overline{\mathbf{X}}_{\mu}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \end{aligned}$$

получающихся из бруса $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ отбрасыванием внутренности, а в худшем — $(2n - 1)$ или даже $2n$ штук граней бруса пересечения (3.15).

3.8 Стохастические подходы в интервальной оптимизации

Алгоритм симулированного отжига (называемый иногда также *алгоритмом Метрополиса*) — это вероятностный метод решения задач оптимизации, имитирующий одноимённый физический процесс. Он получил значительное распространение в последнее время благодаря простоте реализации и слабыми требованиями к целевой функции. Цель этого параграфа — представить интервальную версию алгоритма, которая позволяет находить гарантированную внешнюю оценку области значений функции.

3.9 Интервальные методы вычисления минимаксов

3.10 Внутреннее оценивание областей значений функции

Комментарий к Главе 3

К §3.1 Понятия интервального расширения и естественного интервального расширения функции были введены Р.Е. Муром, но принятые нами в §3.1 определения являются плодом позднейшего развития. Английские термины, соответствующие “внешней оценивающей функции” — inclusion function, enclosing function.

К §3.6 Развитию интервальных методов глобальной оптимизации, имеющих в основе алгоритм Табл. 3.1, посвящены многочисленные работы по интервальному анализу. В значительной части из них рассматриваются способы ускорения сходимости алгоритма путём выбора тех или иных интервальных расширений функций, список соответствующих ссылок можно найти, например, в [27, 28]. Существуют также работы, исследующие саму стратегию дробления и её связь с выбором интервальных расширений. Это работы Р.Е. Мура [22, 23, 24], С. Скембоу [32], Э. Хансена [15, 16, 17], Н. Асаитамби, Шен Жуйя и Р.Е. Мура [9], Х. Рачека и Дж. Рокне [27, 28].

Идея использования интервального расширения функций совместно с измельчением области определения для вычисления глобальных экстремумов впервые была высказана Р.Е. Муром в его классической книге [22]. Следующий шаг в развитии методики сделал С. Скембоу [32], указавший эффективную стратегию дробления (измельчения области определения), заимствованную из “метода ветвей и границ”. Тем самым качественно повысилась вычислительная эффективность нового подхода. Впоследствии Р.Е. Мур [24], Н. Асаитамби, Шен Жуй и Р.Е. Мур [9], Э. Хансен [15, 16, 17], Х. Янссон [19] внесли в стратегию дробления дальнейшие усовершенствования. В частности, Э. Хансен расширил методику так, что с её помощью стало возможным находить и сами точки глобальных экстремумов.

Литература к главе 3

- [1] БАУЭР Ф.Л., ГООЗ Г. *Информатика. В 2-х ч.* – Москва: Мир, 1990.
- [2] ЕВТУШЕНКО Ю.Г., РАТЬКИН В.А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* – 1987. – №1. – С. 119–128.
- [3] ЖИГЛЯВСКИЙ А.А., ЖИЛИНСКАС А.Г. *Методы поиска глобального экстремума.* – Москва: Наука, 1991.
- [4] КОЛЕВ Л.В. Применение интервального анализа в теории цепей // *Известия вузов. Радиоэлектроника.* – 1986. – Т. 29, №7. – С. 11–19.
- [5] ПАНКОВ П.С. Алгоритм доказательного поиска экстремума с использованием миноранты по области // *Известия АН Киргизской ССР.* – 1979. – №6. – С. 12–13.
- [6] ПАНКОВ П.С. Алгоритмы доказательства устойчивых утверждений и глобальной оптимизации в ограниченной области. – Фрунзе, 1984. – 13 с. – Депонировано в ВИНТИ, №5250-84Деп.
- [7] ПАНКОВ П.С. *Доказательные вычисления на ЭВМ.* – Фрунзе: Илим, 1986.
- [8] ПАПАДИМИТРИУ Х., СТАЙГЛИЦ К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* – Москва: Мир, 1985.
- [9] ASAITHAMBI N.S., SHEN ZUHE, MOORE R.E. On computing the range of values // *Computing.* – 1982. – Vol. 28, No. 3. – P. 225–237.
- [10] GRIEWANK A. On automatic differentiation
- [11] GRIEWANK A. Achieving logarithmic growth of temporal and spatial complexity in reverse automatic differentiation.
- [12] ADIFOR - Generating Derivative Codes from Fortran Programs
- [13] R. Giering. Tangent linear and Adjoint Model Compiler. User manual
- [14] R. Giering and T.Kaminski. Recipes for Adjoint Code Construction
- [15] HANSEN E.R. Global optimization using interval analysis — the one-dimensional case // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 1979. – Vol. 29. – P. 331–344.
- [16] HANSEN E.R. Global optimization using interval analysis — the multi-dimensional case // *Numerische Mathematik.* – 1980. – Vol. 34, No. 3. – P. 247–270.
- [17] HANSEN E. *Global optimization using interval analysis.* – New York: Marcel Dekker, 1992.

- [18] HANSEN E., WALSTER G.B. *Global optimization using interval analysis*. – New York: Marcel Dekker, 2003.
- [19] JANSSON C. A global minimization method using interval arithmetic // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods* / Atanassova L. and Herzberger J., eds. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – P. 259–267. – (*IMACS Annals of Computing and Applied Mathematics*).
- [20] JANSSON C. On self-validating methods for optimization problems // *Topics in Validated Computations* / J. Herzberger, ed. – Amsterdam: North-Holland–Elsevier, 1994. – P. 381–438. – (*Studies in computational mathematics*; 5).
- [21] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [22] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [23] MOORE R.E. On computing the range of a rational function of n variables over a bounded region // *Computing*. – 1976. – Vol. 16. – P. 1–15.
- [24] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – SIAM, Philadelphia, 1979.
- [25] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [26] RATSCHKE H. Inclusion functions and global optimization // *Mathematical Programming*. – 1985. – Vol. 33. – P. 300–317.
- [27] RATSCHKE H., ROKNE J. *Computer methods for the range of functions*. – Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1984.
- [28] RATSCHKE H., ROKNE J. *New computer methods for global optimization*. – Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1988.
- [29] SEMENOV A.L. Solving optimization problems with help of the UniCalc solver // *Applications of Interval Computations* / Kearfott R.B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 211–225.
- [30] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [31] SHARY S.P. A surprising approach in interval global optimization // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 6. – P. 497–505.
- [32] SKELBOE S. Computation of rational interval functions // *BIT*. – 1974. – Vol. 14. – P. 87–95.
- [33] STOLFI J., DE FIGUEIREDO L.H. *Self-validated numerical methods and applications*. – 1997. (электронный вариант доступен в Интернете на <http://www.ic.unicamp.br/~stolfi/EXPORT/bibliography/stolfi.html>)

Глава 4

Постановки интервальных задач

Формально предметом этой главы являются математические вопросы моделирования систем в условиях неопределённости и неоднозначности, заданных в интервальной форме. Но практические постановки используются как повод для более широкого обсуждения и уточнения таких понятий как *интервальная задача*, *решение интервальной задачи*, а также некоторых других фундаментальных концепций интервального анализа, которые будут далее интенсивно использоваться во всей книге. Мы вводим, в частности, понятия *обобщённого множества решений* и *множества АЕ-решений* для интервальных систем уравнений, неравенств и более общих задач удовлетворения ограничениям.

Мы делаем попытку рассмотрения интервальных статических систем с общей нелинейной зависимостью вход-выход, хотя далее в книге детально и во всех тонкостях исследуется более простой линейный случай. Наконец, последний параграф главы посвящён обзору известных результатов по трудоёмкости решения интервальных задач в различных постановках.

4.1 Анализ интервально заданных систем

4.1a Описание практической ситуации

Основным практическим примером нам будет служить так называемая *обратная задача* системного анализа для статических (в описании которых не присутствует явно переменная времени) систем, заданных зависимостью вход-состояние-выход:

*Для заданных входов и выходов системы
найти (или как-то оценить) её состояние.*

Особенность ситуации, с которой мы будем иметь дело, заключается в том, что входы и выходы системы не являются заданными точно. Для них будут известны лишь границы их возможных значений (изменений), верхняя и нижняя, или, что эквивалентно, нам будут даны только интервалы, в пределах которых могут находиться значения входов и выходов.

Перейдём к формальным определениям. Пусть внутреннее состояние системы, входной сигнал и выходной отклик описываются вещественными векторами $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^l$ и $b \in \mathbb{R}^m$ соответственно. Во множестве всех входных воздействий мы будем выделять

- *возмущения* a_1, \dots, a_r , которые действуют независимо от нашей воли в пределах интервалов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$, и
- *управления* a_{r+1}, \dots, a_l , значения которых мы сами можем устанавливать в интервалах $\mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_l$.

Возмущения — это те воздействия на систему, которые стремятся вывести её из заданного режима, — “дестабилизируют”, — в то время как подходящими управлениями мы стремимся компенсировать влияние этих возмущений и способствовать достижению требуемых характеристик функционирования системы. В классической теории управления выходы системы, для которых требуется поддержание сигнала на некотором заранее заданном уровне или же его изменение в соответствии с предопределённым планом, называются, как известно, *регулируемыми выходами*. Но введение интервальности для описания конечного назначения системы вносит дополнительную специфику в рассматриваемую

ситуацию. Именно, мы должны разделить множество всех выходов системы на

- компоненты b_1, b_2, \dots, b_s , которые мы должны быть способны перевести в любое значение из заранее заданных интервалов b_1, \dots, b_s (будем называть их *интервалами достижимости*),
- и
- компоненты b_{s+1}, \dots, b_m , для которых мы должны обеспечить гарантированное попадание в интервалы b_{s+1}, \dots, b_m (будем называть их *интервалами стабилизации*), причём конкретные значения b_{s+1}, \dots, b_m в пределах b_{s+1}, \dots, b_m не столь важны.

Соответственно, выходы первого типа мы будем называть *управляемыми*, тогда как выходы второго типа будут называться *стабилизируемыми*.

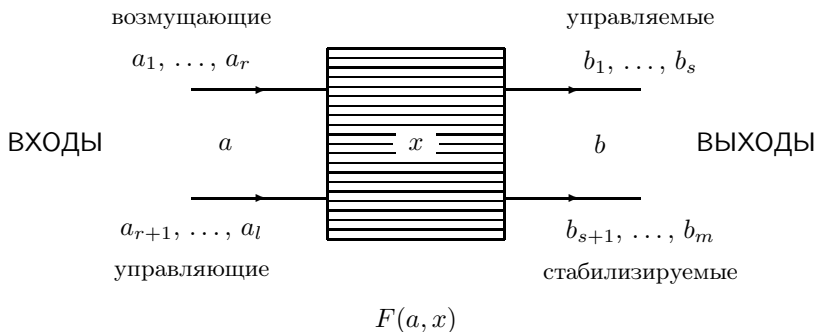


Рис. 4.1. Структурная схема статической системы управления.

Примером управляемого выхода системы может служить координата “механической руки” робота-манипулятора. Обычно требуют, чтобы положение этой руки гарантированно “накрывало” каждую точку некоторой данной рабочей области. Если это покрытие имеет место, то обычно не возражают и против того, чтобы манипулятор мог дополнительно достигать некоторые другие позиции вне рабочей области.

Типичным примером стабилизируемого выхода системы является температура внутри химического реактора в ряде химико-технологических процессов. Она не должна отличаться от номинальной \tilde{T} больше, чем на некоторую предписанную величину δT , но при этом любая температура из интервала $[\tilde{T} - \delta T, \tilde{T} + \delta T]$ в равной степени приемлема для нас. Иными словами, конкретное значение этой температуры T не столь уж и важно при условии, что выполнено включение $T \in [\tilde{T} - \delta T, \tilde{T} + \delta T]$. В частности, некоторые значения температуры из интервала $[\tilde{T} - \delta T, \tilde{T} + \delta T]$ могут оказаться недостижимыми реальным процессом.

Предположим, что зависимость вход-состояние-выход в рассматриваемой системе имеет вид

$$F(a, x) = b \quad (4.1)$$

с некоторым отображением $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$F = \begin{pmatrix} F_1(a, x) \\ F_2(a, x) \\ \vdots \\ F_m(a, x) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F_i(a, x) = F_i(a_1, a_2, \dots, a_l, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

В самом общем случае отображение F может иметь очень сложный вид, но в значительной части нашей книги мы будем считать, что все компоненты $F_i(a, x)$ являются *элементарными функциональными выражениями* в смысле Определения 3.1.4, т.е. конечными комбинациями переменных $a_1, a_2, \dots, a_l, x_1, x_2, \dots, x_n$ и констант с элементарными арифметическими операциями. Будем также предполагать, что все F_i определены и непрерывны на своих областях задания, т.е. в пределах рассматриваемых интервалов a_1, \dots, a_l и области значений x . В целом ситуация описывается структурной схемой, представленной на Рис. 4.1.

Уместно отметить, что в описанной выше ситуации наше использование терминов “управление”, “регулирование”, “управляемый” и т.п. не вполне совпадает с тем, которое принято в классической теории автоматического управления и технической кибернетике, где обычно исследуются динамические системы с непрерывным либо дискретным временем. Тем не менее, развитие общей теории систем привело к пониманию того, что зависимость от временной переменной является второстепенной при определении “управления” и “управляемости” (см., например, [23]). Это обстоятельство делается особенно прозрачным при

абстрактной математической постановке задач управления, когда фазовые траектории, фазовые ограничения, управляющие воздействия и т.п. представляются как элементы некоторых функциональных пространств. В наиболее общей форме понятие “управляемости системы” (или, более общо, “управляемости параметризованного отображения”) тесно связано с понятием “достижимости”.

М. Месарович и Я. Такаха [23], в частности, определяют “управляемость” как условие того, что всякий элемент из некоторого выделенного подмножества множества прибытия рассматриваемого отображения может быть достигнут (накрыт) при условии подходящего выбора параметров и аргументов рассматриваемого отображения. Более точно, пусть отображением

$$g : M \times U \rightarrow V,$$

описывается результат $g(m, u)$ функционирования системы (выход) в зависимости от некоторого параметра $m \in M$ и внешнего воздействия $u \in U$. Множество $V' \subseteq V$ называется *вполне управляемым* относительно g тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие (Определение 1.2 Главы VII книги [23]):

$$(\forall v)(\forall u) \left((v \in V' \text{ и } u \in U) \Rightarrow (\exists m)(g(m, u) = v) \right),$$

что равносильно

$$(\forall v \in V')(\forall u \in U)(\exists m)(g(m, u) = v),$$

т.е. для любого состояния v из некоторого выделенного множества $V' \subseteq V$ и любого внешнего воздействия $u \in U$ существует управляющее воздействие m из допустимой области M , такое что $g(m, u) = v$. Но в подобном виде понятие управляемости в равной мере применимо также и к статическим (безынерционным) системам, в которых переменная времени и временной интервал вообще не фигурируют (см. §5.5).

Напомним также, что теория автоматического управления не является единственной дисциплиной, имеющей дело с “управлениями”. В частности, смысл, в котором мы используем термин “управление” (и ему родственные) находится в хорошем согласии с терминологией такой математической дисциплины как исследование операций. Напомним следующее повсеместно принятое определение [2, 15]: *операцией* называется целенаправленное действие, которое может быть количественно описано как

$$U = f(X, Y),$$

где U есть полезность или значение критерия, характеризующего качество функционирования системы, X — вектор переменных, которыми можно *управлять*, а Y — вектор переменных (и постоянных), не поддающихся управлению (т.е. *неуправляемых*), или, иначе, *возмущающих*. Таким образом, наше употребление слов “управление”, “управляемый” и т.п. вполне законно.

Другое замечание. Термин *неопределённость*, который мы используем в связи с управляющими входами системы, строго говоря, не вполне адекватен практическому смыслу, который вкладывается в интервальность возможных значений того или иного параметра. Например, не совсем корректно говорить о “неопределённости” по отношению к интервалам, представляющим множества возможных положений рулей и закрылков в самолёте. Тем не менее, для единообразия терминологии мы далее используем все-таки слово “неопределённость”, имея в виду как наше незнание (недостаток информации), так и неединственность (неоднозначность) возможных значений (альтернатив), аналогично тому, как это имеет место в приведённом выше примере с самолётом.

4.16 Предварительная постановка задачи

В связи с описанной в предшествующих пунктах управляемой системой могут возникать вопросы различного сорта, но мы далее будем исследовать следующую математическую постановку — задачу гарантированного оценивания внутреннего состояния системы по значениям сигналов на её входах и выходах:

Для каких состояний системы x при любых внешних возмущениях $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_r \in \mathbf{a}_r$ и любых *a priori* заданных значениях $b_1 \in \mathbf{b}_1, \dots, b_s \in \mathbf{b}_s$, мы можем выбрать соответствующие управления $u_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}, \dots, u_l \in \mathbf{a}_l$ так, чтобы выходной отклик системы $F(a, x)$ был бы в точности равен b_1, \dots, b_s на управляемых выходах и находился бы внутри $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ на стабилизируемых выходах?

(4.2)

Если все входы и выходы системы были бы определены точно, то решение задачи, аналогичной (4.2) свелось бы к решению относительно x уравнения (4.1). В рассматриваемом нами случае, когда входы и

выходы системы имеют интервальную неопределённость, мы в соответствии с терминологической традицией интервального анализа также будем говорить по поводу задачи (4.2), что “задана интервальная система уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (4.3)$$

с интервальными параметрами $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l)^\top \in \mathbb{IR}^l$ и $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top \in \mathbb{IR}^m$. Но необходимо подчеркнуть, что интервальную систему (4.3) саму по себе следует понимать лишь как формальную запись, обозначающую семейство точечных систем $F(a, x) = b$ с коэффициентами $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$, не более. В частности, мы даже не имеем права выполнять с (4.3) какие-либо преобразования (приводить подобные члены, переносить члены из одной части в другую и т.п.), пока не определены точный смысл “решения” системы и то, как следует понимать эквивалентность преобразований с (4.3). Таким образом, некоторые пояснения к постановке задачи совершенно необходимы в нашем контексте, и первоначально мы определим, что имеется в виду под “множеством решений” системы (4.3).

Начнем с того, что переформулируем словесную постановку основной задачи (4.2) в математически строгих терминах. Для этого мы воспользуемся языком *исчисления предикатов* первого порядка с логическими кванторами “ \forall ” (квантор всеобщности, “для всех”) и “ \exists ” (квантор существования, “существует”) [18]. При этом условие

для любых $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_r \in \mathbf{a}_r$ и для любых $b_1 \in \mathbf{b}_1, \dots, b_s \in \mathbf{b}_s$, существуют $a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}, \dots, a_l \in \mathbf{a}_l$ такие что $F_1(a, x), \dots, F_s(a, x)$ равны b_1, \dots, b_s и $F_{s+1}(a, x), \dots, F_m(a, x)$ находятся в $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$,

которое является сердцевиной постановки задачи (4.2), должно быть эквивалентным образом переформулировано как следующий предикат (логическая формула):

$$\begin{aligned} &(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1) \cdots (\forall a_r \in \mathbf{a}_r) (\forall b_1 \in \mathbf{b}_1) \cdots (\forall b_s \in \mathbf{b}_s) \\ &(\exists a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}) \cdots (\exists a_l \in \mathbf{a}_l) (\exists b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}) \cdots (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) \\ &(F(a, x) = \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Множество всех состояний x , отвечающих на вопрос (4.2), мы будем

обозначать посредством Ξ , и оно описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Xi := \{ & x \in \mathbb{R}^n \mid \\ & (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) (\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\hat{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_s}) \\ & (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) (\exists b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\check{\delta}_t} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_t}) \\ & (F(a, x) = b) \}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Соответственно, рассматриваемая нами основная задача может быть переформулирована так:

Найти (или как-нибудь оценить)
множество Ξ , определённое (4.5).

Определение (4.5), математически наиболее корректное, организовано в соответствии с так называемой *аксиомой выделения* формальной теории множеств ZFC (названной по первым буквам фразы *Zermelo-Fraenkel-axiom of Choice*, см., например [18, 19]). Именно, точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству (4.5) тогда и только тогда, когда подстановка её значения вместо переменной x в предикате (4.4) приводит к истинному высказыванию. Иными словами, свойство (4.4), которое указано в виде предиката после вертикальной черты в записи (4.5), “выделяет” некоторые значения x , которые и образуют множество решений.

Определение 4.1.1 *Логическая формула, выписанная после вертикальной черты в определении множества решений (4.5) и задающая характеристическое свойство точек этого множества, будет называться выделяющим предикатом соответствующего множества решений.*

Подчеркнём, что, помимо задания функциональной зависимости F и интервальных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , ключевым моментом в определении (4.5) является указание нами кванторов “ \forall ” и “ \exists ” при различных параметрах a и b системы (4.3). При этом множество Ξ , определяемое посредством (4.5), имеет полное право также быть названным *множеством решений* интервальной системы уравнений (4.3), наряду, например, с множеством всевозможных решений точечных систем $F(a, x) = b$

с $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Ясно, что это и есть множество решений в некотором обобщённом смысле, который мы обсудим в следующих параграфах. Поэтому впредь множества решений, задаваемые определением (4.5) и другими ему аналогичными, в которых встречаются вхождения различных логических кванторов при интервальных параметрах, мы будем называть *обобщёнными множествами решений* интервальных систем уравнений.

4.2 Обобщённые множества решений интервальных уравнений

4.2а Кванторный формализм

Подытожим сделанное в §4.1. Взяв в качестве практического примера обратную задачу системного анализа (4.2), мы пришли к необходимости рассмотрения множества решений (4.5). При этом мы применили логические кванторы всеобщности и существования по отношению к интервально заданным входам системы a_j , чтобы выразить принципиальное различие между

входными воздействиями, которые не зависят от нашей воли и являются внешними неконтролируемыми возмущениями (это соответствует записи “ $\forall a_j \in \mathbf{a}_j$ ”),

и

входными воздействиями, которые мы сами можем варьировать в пределах некоторых заданных интервалов, т.е. управлять ими по нашему желанию (это соответствует записи “ $\exists a_j \in \mathbf{a}_j$ ”).

По отношению к интервально заданным выходам системы b_i логические кванторы были применены для того, чтобы различать между

коридорами стабилизации системы, в пределах которых требуется обеспечить функционирование системы вне зависимости от значений возмущений (это соответствует записи “ $\exists b_i \in \mathbf{b}_i$ ”),

и

множествами достижимости системы, каждое значение из которых должно быть “накрыто” в результате подходящего выбора управляющих воздействий (это соответствует записи “ $\forall b_i \in \mathbf{b}_i$ ”).

Но математический объект, описываемый определением (4.5), имеет и самостоятельное значение, а к введению общего определения множеств решений (4.5) можно было бы прийти также с совершенно абстрактной точки зрения, не привлекая практические соображения из анализа интервально заданных систем из §4.1.

Заметим, что любой интервал, представляющий неопределённость (незнание, неоднозначность) некоторой вещественной величины, может быть интерпретирован двояко в соответствии с двойственной природой, присущей самой интервальной неопределённости. Дело в том, что в реальных практических задачах интервалы редко интересуют нас сами по себе, как самостоятельные целостные и внутренне нерасчленимые объекты без внутренней структуры. Не существует “интервальной массы”, “интервальной скорости”, так же, как и интервальных температуры, зарплаты и т.п. И масса, и скорость, и температура, и величина нашей зарплаты суть величины неинтервальные, — вещественные или целые, — так как соответствующие им измерительные шкалы имеют смысл только для вещественных или целых значений этих величин. Весы, спидометр, термометр, кассовый аппарат и т.п. являются устройствами, отображающими вещественные числа (целые в случае кассового аппарата), а отнюдь не интервалы. Интервалы возникают уже потом, когда мы рассматриваем *семейства* показаний этих вышеупомянутых приборов. Таким образом, “интервальная масса” и “интервальная зарплата” суть только лингвистические обороты, обозначающие “интервал значений массы тела”, “интервал значений моей зарплаты” и т.п.

Так или иначе, в подавляющем большинстве случаев мы привлекаем для описания практической ситуации тот или иной интервал, скажем, $v \in \mathbb{R}$ лишь потому, что он содержит *точки*, для которых только и имеют смысл реальные свойства и отношения окружающего нас мира. Математически эти свойства и отношения могут выражаться, к примеру, вещественными уравнениями, неравенствами и т.п. Обозначая, к примеру, такое свойство через $P(v)$, мы можем видеть, что в этих условиях могут представиться следующие две принципиально различные ситуации:

- либо рассматриваемое свойство $P(v)$ имеет место *для всех* точек v из заданного интервала v ,
- либо свойство $P(v)$ выполняется лишь *для некоторых* точек v из интервала v , не обязательно всех (возможно,

что даже только для одного значения v).

Сказанное означает, в частности, что в первом случае интервал \mathbf{v} отождествляется с совокупностью всех своих точек, тогда как во втором он представляет собой лишь границы, “вместилище” для некоторой неизвестной величины, которая может и не принимать некоторых значений из заданного интервала. Это различие между двумя типами интервальной неопределённости особенно выпукло проявляется в тех ситуациях, когда рассматриваемая система имеет несколько интервальных параметров, описывающих воздействия различной природы, которые, возможно, конфликтуют друг с другом (как возмущения и управления в §4.1a).

В формальной записи очерченное выше различие выражается использованием логических кванторов — либо квантора всеобщности “ \forall ”, либо квантора существования “ \exists ”:

- в первом случае мы пишем “ $(\forall v \in \mathbf{v}) P(v)$ ”
и будем говорить о \forall -type (*A-type*) неопределённости,
- во втором случае мы пишем “ $(\exists v \in \mathbf{v}) P(v)$ ”
и станем говорить о \exists -type (*E-type*) неопределённости

Следует подчеркнуть, что наши рассуждения, мотивирующие использование кванторов и кванторного языка в отношении интервально неопределённых параметров в равной мере приложимы не только к интервальным алгебраическим системам вида (4.3), но также к интервальным неравенствам, интервальным дифференциальным уравнениям и т.п. В частности, при определении для них “решений” и “множеств решений” мы должны аккуратно принимать во внимание различие между указанными типами интервальной неопределённости.

Рассмотрим конкретные примеры. Пусть некоторый объект описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (4.6)$$

$$t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (4.7)$$

где t — переменная времени,
 $x(t)$ — вектор-функция фазового состояния,
 $u(t)$ — вектор-функция управления, значения которой предполагаются принадлежащими некоторому интервальному вектору $\mathbf{U} \in \mathbb{R}$, т.е. $u(t) \in \mathbf{U}$.

Множеством *достижимости* для момента $t = T$ рассматриваемой системы называется, как известно [16, 22], множество всех концов $x(T)$ траекторий системы (4.6)–(4.7), исходящих из точки x_0 и соответствующих всевозможным значениям управления $u(t)$, т.е. множество

$$\left\{ x(T) \mid (x(0) = x_0) \ \& \ (\exists u(t) \in U) \left(\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \right) \right\}.$$

Усложним ситуацию, предположив, что рассматриваемый объект подвержен воздействию внешнего ограниченного неконтролируемого возмущения (шума) $v(t) \in V$, $V \in \mathbb{R}^r$, так что его математической моделью становится система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad (4.8)$$

$$t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (4.9)$$

а не (4.6)–(4.7). Известно, что управление динамическим объектом, направленное на достижение некоторых целей и/или оптимизацию критерия качества, может быть выполнено одним из двух следующих способов. Именно,

- управляющее воздействие может иметь вид заранее определённой *программы*, вычисленной по информации о системе, которая известна нам *a priori*,
либо,
- управляющее воздействие может формироваться *a posteriori*, основываясь на информации о системе и её поведении, которую мы приобретаем уже в течение процесса; в этом случае говорят о *позиционной стратегии*.

Практически первая из этих альтернатив соответствует управлению по жестко заданному плану, а вторая — регулированию с обратной связью. Исследование и конструирование позиционных управлений в динамических системах является предметом теории *дифференциальных игр* (см. [1, 15]), интересной и сложной дисциплины, останавливаться подробнее на которой мы не будем в нашей книге. Тем не менее, в рамках позиционного подхода имеет смысл следующий “глобальный” вопрос:

Каково множество концов траекторий $x(T)$, в которые, независимо от конкретной реализации возмущения $v(t) \in \mathbf{V}$, начальные положения $x(0)$ могут быть переведены путем подходящего выбора управления $u(t) \in \mathbf{U}$?

Множеством точек, удовлетворяющих выписанному требованию, является в точности

$$\left\{ x(T) \mid (x(0) = x_0) \ \& \ (\forall v(t) \in \mathbf{V})(\exists u(t) \in \mathbf{U}) \right. \\ \left. (\dot{x} = f(t, x(t), u(t), v(t))) \right\}, \quad (4.10)$$

т.е., фактически, может быть охарактеризовано, как некоторое “обобщённое множество решений” интервальной системы дифференциальных уравнений (4.8)–(4.9).

Другим примером естественного возникновения “обобщённых множеств решений” для интервальных дифференциальных задач является *задача о живучести*, когда требуется вписать траекторию динамической системы (4.8)–(4.9) в некоторое заранее заданное множество конечных состояний или же заданную трубку траекторий.

Как видим, задача исследования управления может быть эквивалентным образом переформулирована как задача нахождения точек из множества (4.10), образованного решениями, в некотором обобщённом смысле, и которое строится с использованием кванторного формализма. Рассмотренные нами идеи кванторной формализации постановок в применении к интервальным дифференциальным уравнениям всё ещё ожидают более детальной разработки и претворения в практику. Но опыт исследования интервальных неравенств и интервальных оптимизационных задач с различными типами неопределённости уже имеется (см. [8]).

Для интервальных линейных неравенств

$$Ax \leq b, \quad (4.11)$$

А. П. Вошинин и Г. Р. Сотиров [10], по-видимому, были первыми, кто рассматривал множества решений

$$\begin{aligned} & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\exists A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \} \end{aligned}$$

в связи с линейными задачами ограниченной оптимизации в условиях интервальной неопределённости. Позднее И. Рон и Я. Креслова [69] изучали понятия *слабой разрешимости* и *сильной разрешимости* для интервальных неравенств (4.11):

- интервальная система (4.11) называется *слабо разрешимой*, если для каждого $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ точечная система $Ax \leq b$ имеет решение (которое в общем случае зависит от A и b);
- интервальная система (4.11) называется *сильно разрешимой* если найдется решение, удовлетворяющее всем вещественным системам $Ax \leq b$ для каждого $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$.

Нетрудно видеть, что сильная разрешимость интервальной системы неравенств $Ax \leq b$ эквивалентно непустоте её множества решений

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \},$$

которое может быть охарактеризовано как одно из обобщённых множеств решений интервальной системы неравенств $Ax \leq b$.

В целом, математический объект, определяемый записью (4.5), имеет самостоятельное значение и потому имеет смысл выделить его в отдельное понятие. Но, прежде чем делать это, следует отметить, что определение (4.5) всё же не является самым общим. Так как кванторы различного типа не коммутируют друг с другом, то мы можем формировать и другие множества решений для интервальных систем уравнений путём сочетания “ \forall ” и “ \exists ” с интервальными параметрами и комбинирования их порядка!

Например, для одномерного интервального уравнения

$$\phi(a_1, a_2, a_3, a_4, x) = b$$

с четырьмя интервальными параметрами в левой части можно рассмотреть в качестве множеств решений

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a_2 \in \mathbf{a}_2)(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3) \\ (\phi(a_1, a_2, a_3, a_4, x) = b) \},$$

или

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_2 \in \mathbf{a}_2)(\exists a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3) \\ (\phi(a_1, a_2, a_3, a_4, x) = b) \},$$

и т.д.

Прежде чем дать общее формальное определение, напомним, что наиболее глубоким обобщением классического понятия системы уравнений (неравенств и т.п.) является так называемая *задача удовлетворения ограничениям* возникающая в исследованиях по искусственному интеллекту в конце 70-х [55]. Нам потребуется несколько модифицированное определение *численной задачи удовлетворения ограничениям* [54]:

Определение 4.2.1 Численной задачей удовлетворения ограничениям называется тройка $P = (V, D, C(x))$, в которой

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество переменных,

$D = \{D_1, \dots, D_n\}$ — множество областей, таких что $D_i \subseteq \mathbb{R}$ представляет множество возможных числовых значений переменной x_i ,

$C(x) = \{C_1(x), \dots, C_m(x)\}$ — множество ограничений, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а ограничение $C_i(x)$ определяется некоторым числовым отношением (равенством, неравенством и т.п.), связывающим рассматриваемые переменные.

Решение численной задачи удовлетворения ограничениям $P = (V, D, C(x))$ — это множество

$$\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in D, C(x) \text{ удовлетворено} \},$$

т.е. такое множество значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n , что они содержатся в соответствующих областях D_1, D_2, \dots, D_n и удовлетворены все ограничения из $C(x)$.

Усложним ситуацию. Пусть фигурирующие в Определении 4.2.1 ограничения $C_i(x)$ зависят от некоторых параметров r_1, r_2, \dots, r_l , о которых известно лишь то, что они могут принадлежать интервалам $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_l$. Мы имеем, следовательно, зависящую от интервальных параметров систему ограничений

$$C(\mathbf{r}, x) = \{ C_1(\mathbf{r}, x), \dots, C_m(\mathbf{r}, x) \},$$

$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l)^\top$, и, как следствие, *интервальную задачу удовлетворения ограничениям* $(V, D, C(\mathbf{r}, x))$. При этом, принимая во внимание двойственную интерпретацию интервальной неопределённости, наиболее общим определением множества решений интервальной задачи удовлетворения ограничениям должно быть признано следующее: это множество

$$\{ x \in D \mid (Q_1 r_{\varkappa_1} \in \mathbf{r}_{\varkappa_1}) (Q_2 r_{\varkappa_2} \in \mathbf{r}_{\varkappa_2}) \cdots (Q_\nu r_{\varkappa_l} \in \mathbf{r}_{\varkappa_l}) \\ (C(\mathbf{r}, x) \text{ удовлетворено}) \}, \quad (4.12)$$

где Q_i — логические кванторы “ \forall ” или “ \exists ”,

$p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ — вектор параметров рассматриваемой системы ограничений $C(p, x)$,

$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_l)$ — интервальный вектор возможных значений этих параметров,

$\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_l)$ — некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, l$.

Определение 4.2.2 Множество вида (4.12) будем называть обобщённым множеством решений интервальной задачи удовлетворения ограничениям $(V, D, C(\mathbf{r}, x))$.

В частности, для интервальных систем уравнений (4.3) мы принимаем

Определение 4.2.3 Для интервальной системы уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

обобщёнными множествами решений будем называть множества ви-

да

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} & (Q_1 z_{\varkappa_1} \in z_{\varkappa_1})(Q_2 z_{\varkappa_2} \in z_{\varkappa_2}) \cdots (Q_{l+m} z_{\varkappa_{l+m}} \in z_{\varkappa_{l+m}}) \\ & (F(a, x) = b) \end{aligned} \right\},$$

где Q_1, Q_2, \dots, Q_{l+m}

— логические кванторы “ \forall ” или “ \exists ”,

$$(z_1, z_2, \dots, z_{l+m}) := (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{l+m}$$

— агрегированный (составной) вектор параметров системы уравнений,

$$(z_1, z_2, \dots, z_{l+m}) := (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{IR}^{l+m}$$

— агрегированный вектор интервалов возможных значений параметров,

$$(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{l+m})$$

— некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, l + m$.

Определения 4.2.2 и 4.2.3 являются, в действительности, чрезвычайно общими. Каждому интервальному параметру в них соответствует одно из двух возможных значений логического квантора — “ \forall ” или “ \exists ” — и порядок кванторов в выделяющем предикате также существен. Следовательно, общее число множеств решений, которые, к примеру, охватываются Определением 4.2.3 для интервальной системы уравнений (4.3) далеко превосходит 2^{l+m} , т.е. 2 в степени “количество интервальных параметров системы”. В общем случае эти множества решений можно интерпретировать как решения некоторых *игр* или *многошаговых процессов принятия решений* в условиях интервальной неопределённости (см. следующий пункт), а также как решения некоторых минимаксных задач исследования операций [29, 73].

Рассмотрим, наконец, важный вопрос об эквивалентности преобразований с интервальными системами. Именно, какие преобразования интервальных систем уравнений сохраняют неизменными их множества решений?

Из Определения 4.2.3 следует, что в случае, когда с точечным прототипом $F(a, x) = b$ интервальной системы уравнений (4.3) мы осуществляем какие-то эквивалентные в обычном смысле преобразования, не

изменяющие, вроде замены переменных, символы переменных x и параметров a, b , выделяющий предикат остаётся истинным при тех же самых значениях x , что и ранее. Следовательно, если в процессе этих преобразований мы приходим к системе уравнений $\tilde{F}(a, x) = b$, интервализацией которой является некоторая новая система уравнений

$$\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b},$$

то обобщённые множества решений систем $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и $\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ совпадают. Отсюда, в частности, вытекает привычная возможность переносить интервальные члены из одной части уравнения в другую “с переменной знака”.

4.26 Интерпретация

Известно, что одним из подходов к анализу логики взаимодействия двух или более рациональных субъектов является теория игр. Как математическая дисциплина теория игр занимается конструированием и исследованием моделей конфликтных явлений, в которых задействованы участники (называемые *игроками*), преследующие различные цели путём использования некоторых *стратегий*.

В теории игр (и, более общо, в теории многошаговых процессов принятия решений) мы должны не только описать какие параметры являются управляемым, но также и то, кто конкретно ими управляет и в каком порядке. Формально *конечная позиционная игра* (в *нормальной форме*) — это, как известно (см., например, [15]), четвёрка

$$(I, X, \mathcal{R}, \{h_i\}_{i \in I}),$$

где I — конечное множество игроков;

X — конечное дерево игры, узлы которого называются позициями, а корень называется начальной позицией, причём для позиций определено отношение следования; позиция, следующая за позицией x называется альтернативой x ; позиции, не имеющие альтернатив — это завершающие позиции, а пути, которые ведут к ним, называются партиями; множество завершающих позиций обычно обозначают через X^* ;

\mathcal{R} — разбиение множества $X \setminus X^*$ на подмножества приоритета X_1, X_2, \dots, X_n , такие, что i -ый игрок делает ход в позиции из X_i ;

h_i — платёжные функции игры, т.е. функции, назначающие платёж i -ого игрока в каждой из завершающих позиций.

Вышеприведённое определение является наиболее общим и, в действительности, в полном объёме нам не потребуются. Для интерпретации обобщённых множеств решений интервальных систем уравнений достаточно ограничиться простейшей игрой двух лиц, в которой

дерево игры является простой цепью [26],

функции платежа булевозначны,

интересы игроков (т.е. значения платёжных функций) диаметрально противоположны.

Такие игры называются *антагонистическими*. Мы, следовательно, можем считать, что множество возможных исходов игры — $\{0, 1\}$ — это просто состояния “выигрыш-проигрыш”, причём проигрыш одного игрока означает выигрыш другого и наоборот.

Рассмотрим подобную игру между игроками Π (Природа) и M (Мы), в которой ходы делаются поочерёдно, один за другим, так что дерево игры есть простая цепь, и его возможные виды представлены на Рис. 4.2 в зависимости от того, кто из игроков делает первый ход. При этом в руках игрока Π находятся параметры, которым приписывается А-неопределённость, а игрок M делает ходы путём выбора значений параметров, которым приписана Е-неопределённость. Результат игры определяется тем, достигнуто ли в конце концов равенство $F(a, x) = b$

всеобщности “ \forall ” предшествуют вхождению квантора существования “ \exists ”. Переформулируя это условие в терминах алгебры логики, можно сказать, что соответствующий выделяющий предикат должен иметь АЕ-форму.

Определение 4.2.4 Множествами АЕ-решений (или, иначе, АЕ-множествами решений) называются обобщенные множества решений интервальных уравнений (неравенств и т.п.) для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму.

Рассмотрим для множеств АЕ-решений возможные способы описания того, как распределены различные типы неопределённости по интервальным параметрам системы уравнений.

1. Поскольку порядок логических кванторов в выделяющем предикате фиксируется теперь Определением 4.2.4, то простейший способ описания типов неопределённости — прямое указание кванторов, которые соответствуют тем или иным элементам интервальной системы. Именно, введём n -вектор $\alpha = (\alpha_i)$ и m -вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет Е-неопределённость,} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\beta_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет Е-неопределённость.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Указание, наряду с самой интервальной системой (4.3), векторов α и β полностью определяет соответствующее множество АЕ-решений.

2. Другой способ представления типов неопределённости, соответствующих элементам интервальной системы, состоит в задании разбиений индексных множеств компонент векторов \mathbf{a} и правой части \mathbf{b} . Более точно, пусть все множество индексов i компонент a_i , т.е. множество $\{1, 2, \dots, l\}$, разбито на две непересекающиеся части $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} := \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$, $p + q = l$, так, что

a_i имеет интервальную А-неопределённость при $i \in \hat{\Gamma}$,
 a_i имеет интервальную Е-неопределённость при $i \in \check{\Gamma}$.

Аналогичным образом введём непересекающиеся множества натуральных индексов $\hat{\Delta} := \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_s\}$ и $\check{\Delta} := \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_t\}$, $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{1, 2, \dots, m\}$, $s + t = m$, так, что в векторе правых частей системы уравнений

b_i имеет интервальную А-неопределённость при $i \in \hat{\Delta}$,

b_i имеет интервальную Е-неопределённость при $i \in \check{\Delta}$.

Мы допускаем также естественную возможность того, что некоторые из множеств $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$ могут быть пусты. Очевидно, что если $\alpha = (\alpha_i)$ и $\beta = (\beta_i)$ — кванторные векторы, определённые в предшествующем пункте Нашего списка, то

$$\alpha_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Gamma}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Gamma}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Delta}, \end{cases}$$

так что задание $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$ приводит к полному описанию множества АЕ-решений для интервальной системы уравнений.

3. Третий способ описания распределения типов неопределённости по интервальным параметрам системы заключается в указании дизъюнктивных (взаимнодополнительных) разложений векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Именно, определим интервальные векторы $\mathbf{a}^\forall = (\mathbf{a}_i^\forall)$ и $\mathbf{a}^\exists = (\mathbf{a}_i^\exists)$ и интервальные векторы $\mathbf{b}^\forall = (\mathbf{b}_i^\forall)$ и $\mathbf{b}^\exists = (\mathbf{b}_i^\exists)$, тех же размеров, что \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, следующим образом:

$$\mathbf{a}_i^\forall := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \text{если } \alpha_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{a}_i^\exists := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \text{если } \alpha_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{b}_i^\forall := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{b}_i^\exists := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists, & \mathbf{a}_i^\forall \cdot \mathbf{a}_i^\exists &= 0, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists, & \mathbf{b}_i^\forall \cdot \mathbf{b}_i^\exists &= 0 \end{aligned}$$

для любого i . В векторах \mathbf{a}^\forall и \mathbf{b}^\forall оказываются сосредоточенными все интервальные элементы системы, соответствующие А-неопределённости, тогда как в векторах \mathbf{a}^\exists и \mathbf{b}^\exists хранятся все элементы, соответствующие интервальной Е-неопределённости.

Следует отметить, что три рассмотренные группы объектов, возникающих в связи с множествами АЕ-решений интервальных систем уравнений, именно

- 1) кванторные векторы α и β ,
- 2) разбиения индексных множеств векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma}, \check{\Gamma}, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$,
- 3) дизъюнктные разложения интервальных векторов $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\forall} + \mathbf{a}^{\exists}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$,

находятся во взаимно однозначном соответствии, таком что указание любого одного из пунктов этой триады немедленно определяет два других. Далее мы будем интенсивно использовать все три способа описания и переходить от одного из них к другому без специальных разъяснений.

Подытоживая сказанное, мы можем дать следующее

Определение 4.2.5 *Предположим, что для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ распределение типов неопределённости по интервальным элементам параметров \mathbf{a} и \mathbf{b} задаётся кванторными векторами α и β , указанными в (4.13)–(4.14), или, что эквивалентно, соответствующими разбиениями индексных множеств векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , или же дизъюнктными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\forall} + \mathbf{a}^{\exists}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$. Множество*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} &(\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) (\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\hat{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_s}) \\ &(\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) (\exists b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\check{\delta}_t} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_t}) \\ &F(a, x) = \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

мы будем называть множеством АЕ-решений типа $\alpha\beta$ для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ (либо АЕ-множеством решений типа $\alpha\beta$) и обозначать через $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Частными случаями этого определения являются следующие три множества решений, которые являлись в современном интервальном анализе объектами более или менее интенсивных исследований:

- *Объединённое множество решений*

$$\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \}, \quad (4.17)$$

образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$ с $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Оно является, несомненно, наиболее популярным из множеств решений, и часто называется просто *множеством решений*. Его аналогом для динамических систем является хорошо известное *множество достижимости* (см. [16, 22]).

- *Допустимое множество решений*

$$\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \}, \quad (4.18)$$

образованное всеми точечными векторами x , такими что образ $F(a, x)$ попадает в правую часть \mathbf{b} для любого $a \in \mathbf{a}$ (см. Главу 6).

- *Управляемое множество решений*

$$\Xi_{ctrl}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists a \in \mathbf{a})(F(a, x) = b) \}, \quad (4.19)$$

образованное точечными векторами x , такими что для любого желаемого $b \in \mathbf{b}$ мы можем найти подходящий параметр $a \in \mathbf{a}$, удовлетворяющий $F(a, x) = b$ (см. §5.5).

Интересно, что до 70-х годов объединённое множество решений было единственным объектом внимания исследователей, работавших с интервальными системами уравнений. Как свидетельствует А. Ноймайер [56], допустимое множество решений ИСЛАУ впервые было рассмотрено в докторской диссертации западногерманского математика Х. Бека (1971 год), но задачу внутреннего оценивания допустимого множества решений (так называемую *задачу о допусках*) для общих интервальных алгебраических систем, не обязательно линейных, первым сформулировал другой исследователь из Германии, Е. Нудинг, годом позже. Постановке этой же задачи для ИСЛАУ посвящена работа [61], причём в ней были указаны некоторые из возможных содержательных приложений новой задачи. Тем не менее, в последующие несколько лет посвящённые задаче о допусках работы были немногочисленными и малодоступными (см. обзор А. Ноймайера [56]). В конце 70-х И. Рон [65, 66] обратился к задаче о допусках в связи с анализом линейных балансовых экономических моделей с интервальной неопределённостью (интервального аналога уравнения В. Леонтьева).

В качестве примера естественного возникновения множеств АЕ-решений рассмотрим проблему управления качеством продукции на промышленном предприятии. Похожая модель была рассмотрена в интервальном контексте С. Хаджихасан, Э. Вольтером и Л. Пронцато [39], но в более упрощённом виде. Именно, в [39] рассмотрено управление качеством только на этапе проектирования, тогда как мы собираемся исследовать более полную и реалистичную модель, которая учитывает неопределённость (незнание) как на этапе проектирования, так и на этапе собственно производства.

Развивая идеи известного японского исследователя Г. Тагучи (см., например, [39]), естественно разделить множество всех факторов (параметров), влияющих на выходные характеристики производства некоторой продукции, на следующие три подмножества:

- *проектируемые факторы* $x \in \mathbb{R}^n$, значения которых выбираются на этапе проектирования продукции,
- *факторы помех* $v \in \mathbb{R}^q$, значения которых мы не можем ни предсказать на стадии проектирования, ни изменить в процессе производства, и
- *факторы управления производством* $u \in \mathbb{R}^p$, которые мы можем и должны использовать на стадии производства для компенсации влияний факторов помех, чтобы обеспечить желаемые выходные характеристики производства.

Типичная задача управления качеством продукции состоит в требовании достичь некоторых определенных целевых значений y_i^* рассматриваемых характеристик функционирования y_i , $i = 1, 2, \dots, m$, в то время как зависимость y_i от факторов u , v , x описывается некоторой математической моделью

$$y_i = F_i(u, v, x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

с известными функциями $F_i : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

При мы предположим, что единственная доступная информация о значениях факторов помех выражена в виде интервалов их возможных значений: $v_i \in \mathbf{v}_i = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$, $i = 1, 2, \dots, q$. Аналогично, производственные факторы u_i также не могут быть совершенно произвольными. Как правило, границы их изменений тоже конечны, т.е. мы можем выбирать их из некоторых интервалов $\mathbf{u}_i = [\underline{u}_i, \bar{u}_i]$, $i = 1, 2, \dots, p$. Наконец, существенной модификацией нашей модели в сравнении с рассмотренной

в [39], является то, что на выходе производственного процесса вместо точечных целевых значений y_i^* мы назначаем для допустимых характеристик функционирования интервалы ненулевой ширины $\mathbf{y}_i = [\underline{y}_i, \overline{y}_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, — допуски, — попадание в которые разрешается в соответствии со спецификацией процесса и/или критериями качества. В частности, если $\underline{y}_i = \overline{y}_i = y_i^*$, мы приходим к упрощённой модели из [39].

В описанной ситуации основная задача управления качеством формулируется следующим образом:

Как следует выбрать проектируемые параметры x_1, x_2, \dots, x_n , чтобы для любых возмущающих факторов $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_q$, лежащих в пределах интервалов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ соответственно, могли бы быть найдены такие факторы управления производством $\tilde{u}_1 \in \mathbf{u}_1, \dots, \tilde{u}_p \in \mathbf{u}_p$, что результирующие выходные характеристики $F_i(\tilde{u}, \tilde{v}, x)$ будут оставаться в пределах \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, \dots, m$, заданных спецификацией производственного процесса?

Нетрудно понять, что все такие проекты $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ образуют множество

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v_1 \in \mathbf{v}_1) \cdots (\forall v_q \in \mathbf{v}_q) (\exists u_1 \in \mathbf{u}_1) \cdots (\exists u_p \in \mathbf{u}_p) \right. \\ \left. (F_1(u, v, x) \in \mathbf{y}_1 \ \& \ \cdots \ \& \ F_m(u, v, x) \in \mathbf{y}_m) \right\},$$

или, если мы положим, $y = (y_1, \dots, y_m)^\top$,

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v_1 \in \mathbf{v}_1) \cdots (\forall v_q \in \mathbf{v}_q) (\exists u_1 \in \mathbf{u}_1) \cdots (\exists u_p \in \mathbf{u}_p) \right. \\ \left. (\exists y_1 \in \mathbf{y}_1) \cdots (\exists y_m \in \mathbf{y}_m) (F(u, v, x) = y) \right\},$$

что в точности является некоторым множеством АЕ-решений, как они были определены выше, для интервальной системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, x) = \mathbf{y}_1, \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}, x) = \mathbf{y}_m, \end{cases}$$

с $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)^\top$ и $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)^\top$.

Завершая параграф, необходимо сделать следующее замечание. Все наши рассуждения и построения, касающиеся кванторного формализма, носят весьма общий характер, но всё-таки ориентированы на определённый вид интервальных систем уравнений —

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \quad (4.3)$$

— в котором неизвестные переменные присутствуют в составе некоторых выражений лишь в левой части уравнения, а ненулевой свободный член находится в правой части. Но нередко возникает необходимость рассмотрения интервальных систем уравнений и других видов. Например, при внешнем оценивании множеств решений полезно перейти к так называемой рекуррентной форме

$$x = G(\mathbf{a}, x), \quad (4.20)$$

когда переменная выделена в одной из частей “в чистом виде”. В последнем случае для описания интервальной неопределённости в системе достаточно обходиться одним интервальным вектором \mathbf{a} , что, по крайней мере формально, не укладывается в выстроенную выше схему “множеств решений типа $\alpha\beta$ ”.

С другой стороны, определения обобщённых множеств решений и множеств АЕ-решений не несут никакой специфики вида рассматриваемой интервальной системы уравнений и формулируются для (4.20) и прочих форм интервальных систем уравнений совершенно так же, как и для (4.3). В частности, что касается рекуррентной формы, то её единственная особенность будет состоять в том, что, говоря о величине и характере интервальной неопределённости, мы должны будем задействовать *один* буквенный идентификатор, который соответствует одному вектору интервальной неопределённости. Иными словами, нужно говорить не о “множествах АЕ-решений типа $\alpha\beta$ ”, а о “множествах АЕ-решений типа α ”, употребляя, к примеру, обозначение $\Xi_\alpha(G, \mathbf{a})$:

$$\Xi_\alpha(G, \mathbf{a}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(x = G(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x)) \}$$

Упражнение 4.2.1. Сколько АЕ-множеств решений может быть определено для интервальной системы уравнений, имеющей N интервальных параметров?

4.3 Детализация постановки задачи

4.3а Обсуждение

Теперь, после того, как мы определили, что является множествами решений для интервальных систем уравнений (неравенств и т.п.), настало время решить, что делать с ними дальше.

Это отнюдь не праздный вопрос. Фундаментальный факт, касающийся окружающей нас реальности, состоит в том, что мы можем наблюдать, исследовать и использовать объекты, которые не просто *конечны*, но даже *не слишком сложны*. Конечность наших восприятий, рассмотрений, рассуждений, вычислений и т.п. широко осознана людьми и обычно не встречает возражений. Но какое обстоятельство является столь специфичным в интервальных задачах, что мы должны наложить второе требование — “быть не слишком сложным”?

Ответ заключается в том, что вступая в царство множеств, рассматриваемых как существенно структурированные, составные объекты, образованные из различных элементарных частей, мы сталкиваемся с растущей (и даже доминирующей ролью) комбинаторных эффектов, которые едва ли обнаруживают себя в традиционной “точечной” математике. Но комбинаторика — это, как известно, основной источник больших, очень больших и огромных чисел, которые могут превзойти любую реальную физическую величину, и уж тем более количество операций, которое способны выполнить для решения практических задач любые настоящие и будущие вычислительные устройства.

Всё сказанное в полной мере относится к обобщённым множествам решений и множествам АЕ-решений интервальных задач, введённых в §4.2а и §4.2в. Они являются неоднородными, сложно структурированными (иногда даже составными) объектами, так что уже в простейших практических ситуациях прямое вычисление и описание обобщённых множеств решений оказывается, как правило, трудоёмким, утомительным, а часто и просто невозможным. Например, для интервальных линейных систем уравнений вида $Ax = b$ с $A \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$ длина полного описания множеств АЕ-решений в общем случае может расти быстрее, чем 2^n , т.е. чем количество ортантов пространства \mathbb{R}^n . Это следует из того, что множества решений могут пересекать все ортанты в \mathbb{R}^n , а каждое из таких пересечений является выпуклым многогранником, описание которого требует перечисления всех ограничивающих его гиперплоскостей и т.п. (см. §5.26). То же самое утверждает и тео-

ретический результат А. В. Лакеева [53]: задача распознавания и оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем принципиально труднорешаема (NP-трудна) при условии, что мы не накладываем никаких ограничений на интервальную матрицу системы (см. также [48]). Таким образом, сложность упомянутого прямого описания множеств решений становится заведомо большей знаменитого “шахматного числа” ($2^{64} - 1$), если размерность интервальной системы равна всего лишь 64. Когда же эта размерность достигает нескольких сотен, то длина точного и исчерпывающего описания для множеств решений интервальных линейных систем делается сравнимой с количеством элементарных частиц во всей наблюдаемой Вселенной. Э. Борель в книге [6], к примеру, указывает величину 10^{200} как максимально число микрособытий, которое могло произойти со всеми элементарными частицами во Вселенной после так называемого Большого Взрыва, и эта оценка не увеличилась принципиально со времени выхода цитируемой книги.

Заметим, что рассматриваемые в наших примерах размерности интервальных систем уравнений являются не столь уж и большими. Для сравнения, современные экономики вовлекают тысячи взаимодействующих объектов и участников, и даже в агрегированных балансовых моделях обычно рассматриваются около сотни отраслей промышленности.

Практическим следствием этих фактов является неизбежная необходимость как-то огрублять точные описания множеств решений, т.е. заменять эти множества, полные описания которых слишком сложны, на более простые множества — их *приближения* (или оценки) с меньшей сложностью описания. И делать это нужно способом, который не противоречит постановке решаемой практической задачи. В целом такая процедура приближения должна быть введена как составная часть в постановку решаемой задачи, а её детали должны обсуждаться и сознательно приниматься во внимание.

Применяемые в задаче конкретный критерий приближения и приближающие множества должны отдельно определяться для каждой практической задачи. Кроме того, в рассмотрение уместно ввести меру (метрику) ϱ для измерения отклонения, в некотором заданном смысле, множества решений от оценивающего множества от множества решений. Но главной отличительной особенностью рассматриваемых нами интервальных, которая делает их столь непохожими, например, на классические задачи теории приближения, состоит в присутствии помимо метрики ϱ некоторого качественного (не количественного!) тре-

бования, которому должен удовлетворять ответ к задаче, и которое совсем не связано с ρ . Это качественное требование является, как правило, условием на взаимное расположение множества решений и оценивающего множества. Например, при вычислении области значений функции нам часто нужны не просто какие-то оценки этой области значений, сколь бы близки они к ней ни были, но лишь такие оценки, которые гарантированно приближают эту область значений *снизу* и *сверху*. Дальнейшие примеры могут быть найдены в следующем пункте.

4.36 Что такое “интервальная задача оценивания”?

Подытоживая обсуждение, мы приходим к следующей формализации понятия одного из широко распространённых классов интервальных задач, которые мы будем называть *интервальными задачами оценивания*:

Определение 4.3.1 Будем называть массовой интервальной задачей оценивания P упорядоченную четверку вида $(S, \mathcal{E}, M, \rho)$, где

S — семейство множеств решений — отображение некоторого подмножества Π интервального пространства \mathbb{R}^p в множество подмножеств \mathbb{R}^q ;

Π описывает возможные значения интервалов параметров задачи P , так что индивидуальная задача оценивания I выделяется из P путём присвоения переменным в S некоторых конкретных значений, которые определяют (в результате процесса решения или каким-нибудь другим способом) индивидуальное множество решений $\mathfrak{S} \in S$;

\mathcal{E} — класс оценивающих множеств, посредством которых мы собираемся приближать множества решений из S ;

M — способ оценивания множеств решений, т.е. бинарное отношение между элементами S и элементами \mathcal{E} , которое должно удовлетворяться в соответствии с содержательным смыслом решаемой задачи;

ρ обозначает неотрицательный функционал на $S \times \mathcal{E}$ (метрику), который определяется постановкой задачи и указывает “ошиб-

ку” результата, т.е. меру близости, в том или ином смысле, оценивающего множества к множеству решений \mathfrak{S} .

Под решением индивидуальной задачи I мы будем понимать оценивающее множество $\mathfrak{E} \in \mathcal{E}$, такое что удовлетворено отношение $\mathfrak{S} M \mathfrak{E}$ и, возможно, дополнительно выполняется некоторое условие на величину $\varrho(\mathfrak{S}, \mathfrak{E})$.

В современном интервальном анализе наиболее часто встречающимися способами оценивания являются

внешнее интервальное оценивание, когда ищется брус $\mathbf{E} \in \mathbb{IR}^n$,
объемлющий множество решений \mathfrak{S} , т.е. такой что $\mathbf{E} \supseteq \mathfrak{S}$,

внутреннее интервальное оценивание, когда ищется брус $\mathbf{E} \in \mathbb{IR}^n$,
содержащийся во множестве решений \mathfrak{S} , т.е. такой что $\mathbf{E} \subseteq \mathfrak{S}$.

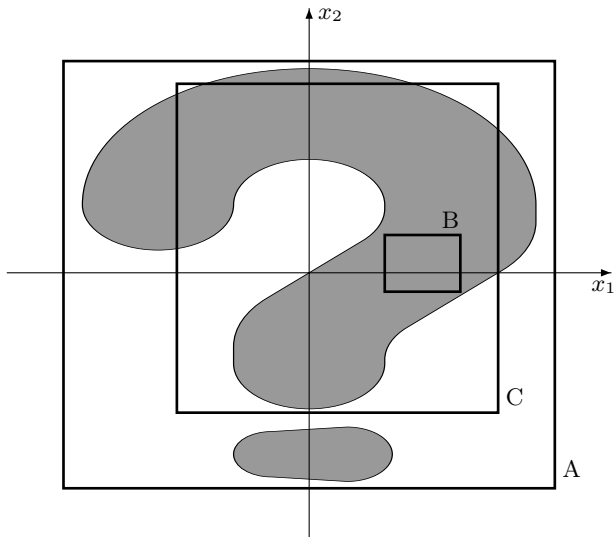


Рис. 4.3. Оценивание множества решений (затенённый вопросительный знак) “внешним” брусом (A), “внутренним” брусом (B) и “слабым внутренним” брусом (C).

Внешние и внутренние оценки, встречаясь в большом количестве разнообразных и практически важных интервальных задач не явля-

ются, конечно же, единственно возможными. Существует много других способов оценивания множеств решений, которые также возникли из реальной жизни и затем нашли отражение в исследовательских статьях.

Например, нередко необходимо минимизировать или максимизировать на множестве решений некоторый функционал. В случае линейного функционала, задаваемого скалярным произведением вида (c, x) , такая оптимизация имеет ясный геометрический смысл: она показывает, насколько далеко простирается оцениваемое множество решений в направлении вектора c , причём за единицу длины ответа принимается значение $\|c\|^{-1}$.

Другой пример. Если $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, т.е. оценивающими множествами являются n -мерные брусы (интервальные векторы), то внешнее интервальное оценивание множества решений \mathfrak{S} интервалом E эквивалентно

$$\text{pr}_i \mathfrak{S} \subseteq E_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где pr_i — операция проектирования на i -ую координатную ось. Требуя для оценивающих брусков обратные включения

$$\text{pr}_i \mathfrak{S} \supseteq E_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

мы получаем нетрадиционный способ оценивания, который может быть назван “слабым внутренним оцениванием”. Этот тип оценивания используется в ряде задач идентификации [10], а также когда необходимо знать точность внешнего интервального оценивания множеств решений [70].

Нередко мы должны гарантировать включение $\text{pr}_i \mathfrak{S} \subseteq E_i$ не для всех, а только для некоторых компонент $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, тогда как для остальных i требуется обратное включение $\text{pr}_i \mathfrak{S} \supseteq E_i$. Иными словами, для некоторых индексов i бывают нужны нижние покоординатные оценки величин $\min\{x_i \mid x \in \mathfrak{S}\}$, а для остальных i необходимо получить их верхние покоординатные оценки. Аналогичное требование можно наложить и на оценки для $\max\{x_i \mid x \in \mathfrak{S}\}$. Задаваемый таким образом способ оценивания естественно назвать “смешанным оцениванием”.

Обратимся теперь к рассмотрению классов оценивающих множеств. На практике помимо обычных интервалов одномерными оценивающими множествами могут быть мультиинтервалы (см. §1.86) или “интервалы” арифметики Кахана (см. §1.8а). В многомерном случае кроме

традиционных прямых произведений вещественных интервалов в качестве оценивающих множеств используются

- параллелепипеды со сторонами, не обязательно параллельными координатным осям [37],
- параллелотопы (иногда называемые зонотопами) и выпуклые многогранники [45, 49],
- эллипсоиды (популярные в дифференциальных задачах, см. [28, 38, 50] и указанные там ссылки),
- пары относительно некоторой нормы в \mathbb{R}^n [9],

и т.п. На комплексной плоскости \mathbb{C} наряду с интервалами в виде кругов и прямоугольников (см. §1.5) широко используются круговые кольца [62], круговые секторы [43] и даже “полумесяцы” в \mathbb{C} .

В случае небольших размерностей (2–3) нередко практикуют “исчерпывающее оценивание” множеств решений объединениями брусков (Рис. 4.4), как внешнее, так и внутреннее. Например, это может оказаться полезным при наглядном представлении областей устойчивости систем управления (см. примеры в книге [41]).

Суммируя вышесказанное, можно констатировать существование огромного многообразия как оценивающих множеств, так и способов оценивания множеств решений, что имеет следствием огромное разнообразие постановок интервальных задач.

Отметим совершенно специфическую роль третьего члена четверки $(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \varrho)$, — способа оценивания \mathcal{M} . Можно сказать, что именно присутствие отношения \mathcal{M} в первую очередь обуславливает своеобразие и особенность формы интервальных задач. Как мы уже упоминали, решение этих задач должно прежде всего удовлетворять некоторому *качественному условию*, выраженному способом оценивания \mathcal{M} , а лишь потом принимаются во внимание ошибка, близость к идеальному множеству решений и т.п. Решение задачи внешнего оценивания, к примеру, обязано оценивать множество решений извне, а иначе оно просто не есть решение этой задачи!

Завершая обсуждение, следует сказать, что ответ на вопрос ‘что делать с множеством решений?’ зависит от конкретной рассматриваемой практической задачи, т.е., к примеру, от конечных целей анализа системы в применении к нашей задаче (4.2).

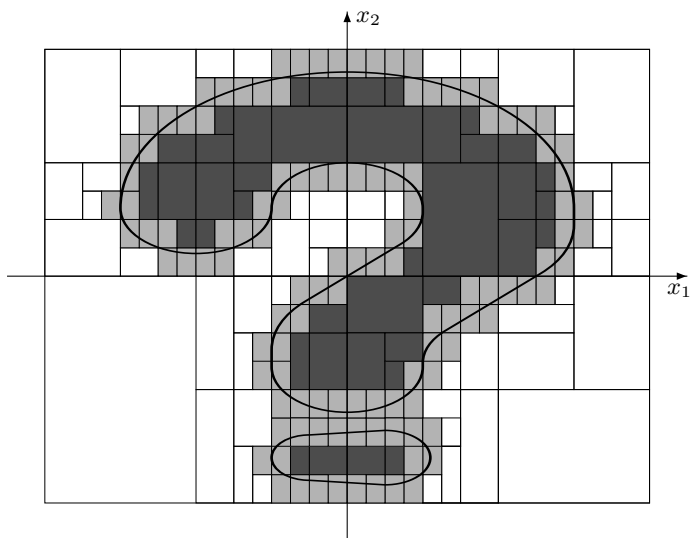


Рис. 4.4. Исчерпывание, внутреннее и внешнее, множества решений (вопросительный знак) объединением брусов.

Конечно, нужно чётко осознавать, что в интервальном анализе существуют задачи, не укладывающиеся в выписанную выше схему. Таковы, например, задачи проверки неособенности интервальной матрицы и устойчивости интервальной матрицы (Глава 2), задача вычисления формального решения интервальной системы уравнений (Глава 12), а также ряд других. Но Определением 4.3.1 выделяется широкий и практически важный класс задач, которые специфичны именно для интервального анализа, тогда как остальные постановки традиционны для математики вообще. К примеру, задачи проверки неособенности, устойчивости и т.п. свойств матрицы — это типичные задачи распознавания, а задача нахождения формального решения — не что иное, как задача вычисления решения уравнения в некоторой специальной форме.

4.3в Задачи, которые будут рассматриваться

В оставшейся части нашей книги мы собираемся рассмотреть две наиболее популярные интервальные задачи оценивания — *внутреннюю* и

внешнюю, т.е. задачи оценивания множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ подмножествами и объемлющими множествами. Они являются также теми простейшими постановками, которые могут входить составной частью в более сложные интервальные задачи оценивания.

Оценивание подмножествами важно нам в тех случаях, когда ответ к задаче, т.е. оценивающее множество, должно состоять лишь из точек, для которых справедливо определяющее условие (4.2). Оценивающие множества, которые находятся в любом другом отношении с оцениваемым множеством решений, могут содержать точки, для которых неверно (4.2), что нередко неприемлемо для практики. Короче говоря, лишь для подмножеств $\Pi \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ответ на вопрос (4.2) остаётся справедливым для всех точек $x \in \Pi$.

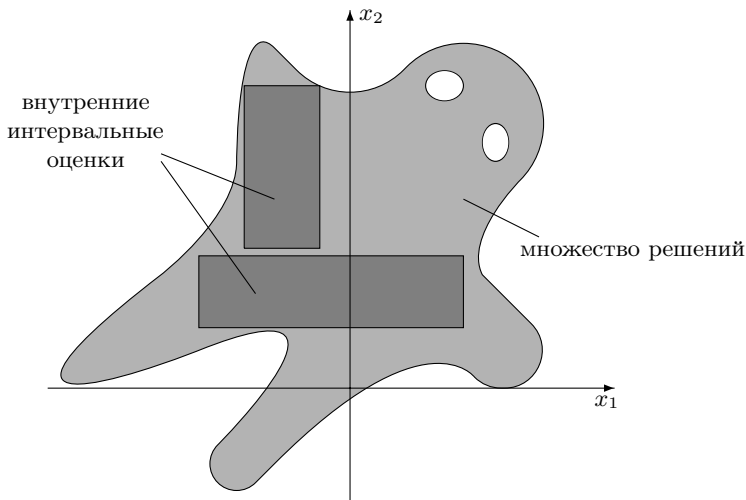


Рис. 4.5. “Внутренние задачи” — это задачи внутреннего интервального оценивания тех или иных множеств решений.

Выбирая более простыми оценочными множествами брусы со сторонами, параллельными координатным осям (т.е. интервальные векторы), мы приходим к задаче внутреннего интервального оценивания множеств решений (4.5):

Для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и кванторных векторов α и β того же размера, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, найти брус содержащийся во множестве решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

(4.21)

Ниже мы для краткости иногда будем называть эту задачу *внутренней задачей* для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ с распределением типов интервальной неопределённости, задаваемым квантификаторами α и β , или, что эквивалентно, дизъюнктивными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$.

Полезно проследить те конкретные формы, которые принимает задача (4.21) в различных практических ситуациях. Если в качестве множества решений в постановке (4.21) берётся допустимое множество решений $\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, то соответствующая задача — это известная *задача о допусках* (см. Главу 6), которая имеет многочисленные плодотворные приложения. Задача о допусках есть, по существу, задача стабилизации системы в пределах заданного выходного коридора \mathbf{b} для случая, когда *все* параметры системы a_i подвержены некоторым ограниченными возмущениям.

Пусть неопределённость параметров a_i носит смешанный характер, т.е. часть из них имеют А-неопределённость, а остальные Е-неопределённость (что соответствует ситуации, когда некоторые входные параметры являются возмущающими, а некоторые — управляющими), но все $\beta_i = \exists$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда мы приходим к задаче стабилизации системы, имеющей возможность управления, которую ряд исследователей называет “задача обеспечения устойчивости функционирования при крупномасштабных возмущениях” [14]. Такой же является задача управления качеством продукции, рассмотренная нами в §4.2в. В методологической работе [4] задача обеспечения “устойчивости функционирования” иллюстрируется на конкретных практических примерах из кораблестроения, токсикологии, экономики и электроэнергетики. В литературе интенсивно используется и другое название этого типа задач: “задача обеспечения живучести системы” [4]. Напротив, если параметры a_i имеют смешанную неопределённость (часть А-неопределённость, а остальная часть — Е-неопределённость), тогда

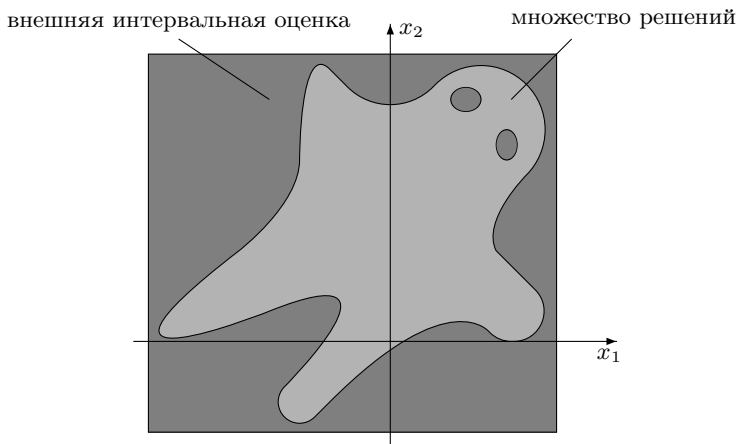


Рис. 4.6. “Внешние задачи” — это задачи внешнего интервального оценивания тех или иных множеств решений.

как все $\beta_i = \forall, i = 1, 2, \dots, m$, то перед нами задача управления в условиях ограниченных возмущений.

Следует отметить, что термин “условие живучести” давно и широко применяется в русской научной литературе для обозначения условия принадлежности выходов системы к некоторому а priori заданному множеству режимов [4]. Но этот же термин в последние годы часто применяется для совершенно других целей. Французский математик Ж.-П. Обэн и его последователи (см. [24, 25, 30, 31]) говорят об “условии живучести” (viability condition), “задаче о живучести” и т.п. в контексте некоторого специального раздела теории дифференциальных включений, вкладывая в эти понятия смысл, имеющий весьма отдаленное отношение к рассматриваемым нами вопросам.

Очень часто практический смысл имеет внешнее оценивание обобщённых множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, но это уже другая задача, отличная от (4.21), и её мы тоже рассмотрим в нашей книге:

Для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и кванторных векторов α и β того же размера, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, найти брус содержащий множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. (4.22)

Задача (4.22) — это, по существу, интервальная форма хорошо известной задачи о параметрической чувствительности системы управления, когда и вариации параметров и оценки вариаций решения рассматриваются в виде интервалов. Частный случай этой задачи, требующий внешнего оценивания объединённого множества решений, является одной из старейших и практически наиболее важных задач интервального анализа, а различным аспектам её решения с начала 60-х годов и по настоящее время посвящены несколько монографий и сотни статей. Мы посвятим решению внешней задачи Главы 7, 9 и 10 нашей книги.

Часто встречается и покомпонентная форма рассмотренной задачи:

Для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и кванторных векторов α и β того же размера, что \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, найти (по-возможности, более точные) оценки для $\min\{x_k \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$ снизу и $\max\{x_k \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$ сверху, $k = 1, 2, \dots, n$. (4.23)

Ниже мы иногда будем называть задачу (4.22)–(4.23) *внешней задачей* для интервальной системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ с распределением интервальных неопределённостей, описываемых кванторами α и β , или, что эквивалентно, дизъюнктивными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$.

До сих пор задачи вида (4.21) и (4.22) решались лишь минимаксными методами математического программирования (см., в частности, [4, 14]). Одним из итогов нашей книги является развитие новых вычислительно эффективных *интервальных* подходов к анализу статических систем с интервальной неопределённостью, т.е. к решению задач (4.21) и (4.22).

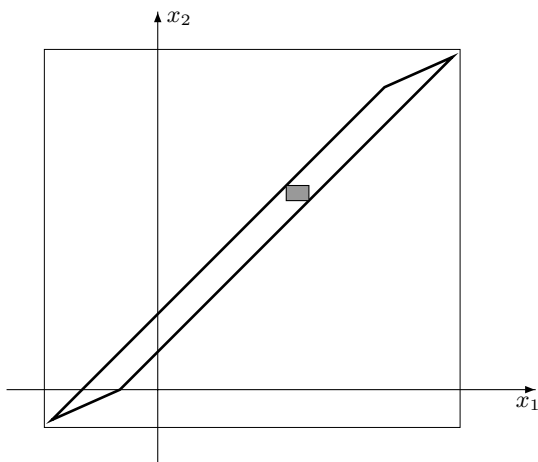


Рис. 4.7. Иногда интервальное оценивание множества решений (вытянутый косой параллелепипед) может оказаться малоинформативным.

В настоящее время существуют по-крайней мере три различных парадигмы интервальных вычислений, ориентированные на различные классы задач с интервальными данными и различные требования к математической строгости получаемого ответа:

1. пошаговая парадигма, являющаяся модификацией и дальнейшим развитием “наивного интервального анализа”. При этой модели вычислений математическая корректность конечного интервального результата является следствием того, что мы поддерживаем её на каждом шаге вычислений.
2. Апостериорное оценивание, идея которого впервые была высказана Уилкинсоном в работе J.H. Wilkinson в SIAM Review 13 (1971), pp. 548–568, в частности, писал:

“In general it is the best in algebraic computations to leave the use of interval arithmetic as late as possible so that it effectively becomes an a posteriori weapon.”

3. алгебраический подход, при котором решение исходной интервальной задачи заменяется на решение некоторой вспомогатель-

ной неинтервальной задачи. Алгебраический подход получил интенсивное развитие в самые последние годы.

В проекте FORTE Fortran нет прямых указаний ни на то, какие алгоритмы имеются в виду реализовывать на этом языке программирования, ни на то, на какую парадигму интервальных вычислений ориентировались авторы. Тем не менее, по ряду признаков можно сделать вывод, что спецификация FORTE Fortran'a ориентирована, главным образом, на первую — пошаговую — парадигму интервальных вычислений и очень плохо учитывает интересы остальных.

Наличие постоянной неотключаемой моды внешнего направленного округления необходимо только тогда, когда пользователь хочет быть уверенным в математической корректности КАЖДОГО шага своих вычислений.

Но это совсем не требуется при апостериорном оценивании, при котором некоторый промежуточный ответ мы можем получать дешево и быстро, а математическая корректность результата обеспечивается применением специальных завершающих процедур. В таких вычислениях постоянное направленное округление является совершенно излишним, так

- i) приведет к ненужным трудозатратам,
- ii) не требуется по сути алгоритмов.

Пошаговая парадигма является простой, хорошо понятной и легко реализуемой, но по качеству (избытку ширины) получаемых решений она явно проигрывает апостериорному оцениванию, которое в настоящее время является очень развитым направлением интервальной математики. Следует только упомянуть такие хорошие апостериорные алгоритмы для решения различных интервальных задач как Е-методы Румпа и Каухера, многочисленные работы Румпа, Добронца и др.

Мы развиваем, в частности, *формальный подход* к решению вышеупомянутых задач, и краеугольным камнем многих наших построений является понятие *формального решения* интервального уравнения (называемое также иногда *алгебраическим решением*):

Определение 4.3.2 *Интервал (интервальные вектор, матрица и т.п.) будем называть формальным решением интервального уравнения (системы уравнений, неравенств, ...), если подстановка этого*

интервала в рассматриваемое уравнение (систему уравнений, неравенств, ...) и выполнение всех интервальных арифметических, аналитических и т.п. операций и отношений приводят к истинному соотношению.

Например, интервал $[0, 1]$ является формальным решением интервального квадратного уравнения $[1, 2]x^2 + [-1, 1]x = [-1, 3]$. Интервальная функция $x(t) = 10.5[e^t, e^{2t}]$ есть формальное решение интервального дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = [1, 2].$$

Интервальная функция $x(t) = [0, 2t]$ на $[0, 1]$ — это формальное решение интервального интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) + \int_0^1 (1.5s + t)x(s)ds = [0, 3t + 1].$$

Последние два (чисто иллюстративных) примера показывают главный недостаток термина “алгебраическое решение”: он подчёркивает алгебраическую природу операций, которые образуют рассматриваемое интервальное уравнение, так что говорить об “алгебраическом” решении интервальных дифференциальных, интегральных и т.п. уравнений по меньшей мере некорректно.

Упражнение 4.3.1. Найдите формальное решение интервального уравнения $[1, 2] \cdot x = [-2, 5]$.

Понятие формального решения соответствует обычному общематематическому пониманию решения уравнения и выделение для него отдельного термина имеет скорее исторические причины. Впервые подобные решения рассмотрел С. Берти [33], который не дал им никакого имени и исследовал лишь простейший одномерный линейный случай. Впоследствии К. Никель [58] и Х. Рачек и В. Зауэр [64] изучали такого рода решения для интервальных линейных систем уравнений, причём в [64] и был введён термин “алгебраическое решение”.

Тем не менее, большого резонанса упомянутые работы не получили, и для интервальных уравнений и систем уравнений формальные (алгебраические) решения долгое время считались малосодержательными и почти не изучались. При этом фраза “решение интервальной задачи”

стала обозначать, главным образом, некоторую *оценку* (приближение, аппроксимацию) того или иного *множества решений* задачи в смысле Определения 4.3.1, либо процесс получения такой оценки. В этом смысле рассматриваемые нами “внешняя задача” (4.22) и “внутренняя задача” (4.21) являются типичными интервальными постановками: под их “решениями” имеются в виду внешняя и внутренняя интервальные оценки некоторых множеств решений.

Но в последние годы положение формального решения в интервальном анализе радикально изменилась. В основном трудами отечественных исследователей были обнаружены глубокие и практически важные приложения формальных решений. В частности, сущностью развиваемого нами в Главах 8, 9 и 11 так называемого *формального подхода* является замена исходной задачи оценивания (4.2) множества решений (внутреннего или внешнего) на *задачу нахождения формального решения* некоторого специального вспомогательного уравнения в полной интервальной арифметике Каухера \mathbb{KR} . Тем самым первоначальная задача, по существу, сводится к традиционной задаче численного анализа. Такое сведение является чрезвычайно привлекательным с вычислительной точки зрения, хотя и обладает тем недостатком, что формальное решение вспомогательного интервального уравнения может не обязательно существовать даже в случае существования решения у исходной задачи (4.21), т.е. когда $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ непусто.

4.4 Оптимальные решения и их цена

Часто практику может удовлетворить не всякое решение конкретной задачи оценивания, а лишь *оптимальное*, т.е. лучшее в том или ином смысле. Требование оптимальности особенно характерно для задач, в которых интервальная неопределённость изначально присутствует во входных данных и которые не являются “интервализациями” каких-то вещественных задач. В настоящее время в интервальном анализе имеется несколько подходов к определению оптимальности решения, но все они, по существу, единообразны: на множестве всех решений задачи оценивания (или на семействе оценочных множеств) вводится некоторый частичный порядок, а минимальные, наименьшие и наибольшие относительно него элементы объявляются, соответственно, оптимальными, наилучшими и наихудшими решениями данной задачи. Конкретные способы упорядочения множества решений могут быть весьма раз-

нообразными (см., например [44]). Применительно к сформулированному нами в этой Главе общему определению интервальной задачи оценивания можно указать следующие конструкции.

Во-первых, упорядочение в семействе оценочных множеств \mathcal{E} может быть индуцировано способом оценивания \mathcal{M} , принятым в решаемой задаче, причём неединственным способом. Пусть $\mathcal{M}^{-1}(\cdot)$ — операция взятия прообраза при отношении \mathcal{M} . Естественно считать, что решение \mathfrak{S}' “не хуже” решения \mathfrak{S}'' и записывать это как $\mathfrak{S}' \preceq \mathfrak{S}''$, если совокупность оцениваемых посредством \mathfrak{S}'' множеств решений из \mathcal{S} не уже совокупности множеств, оцениваемых посредством \mathfrak{S}' , т.е.

$$\mathfrak{S}' \preceq \mathfrak{S}'' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}^{-1}(\mathfrak{S}') \subseteq \mathcal{M}^{-1}(\mathfrak{S}'').$$

Тривиально проверяется, что введённое таким образом бинарное отношение “ \preceq ” на классе оценочных множеств \mathcal{E} удовлетворяет всем аксиомам порядка. Для многих интервальных задач оценивания это упорядочение оценочных множеств совпадает с естественным ранжированием интервальных решений по качеству. К примеру, для задачи внешнего оценивания множеств решений интервальных уравнений решение V' “лучше” (качественнее) решения V'' , если $V' \subseteq V''$ в теоретико-множественном смысле. Для задач внутреннего оценивания множеств решений ситуация обратная: решение U' качественнее решения U'' , если $U' \supseteq U''$.

Далее, при некоторых дополнительных условиях на способ оценивания \mathcal{M} рефлексивное отношение $(\mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{M})$ на семействе оценочных множеств \mathcal{E} (где \circ — знак композиции отношений [5]) может быть ещё антисимметричным и транзитивным, и, следовательно, также служить порядком на \mathcal{E} , индуцированным способом оценивания.

Во-вторых, интервальные решения можно сравнивать по степени их удалённости (в метрике ϱ из Определения 4.3.1) от точного множества решений. В-третьих, нередко требуется минимизировать радиус (ширину) или какой-либо другой функционал от решения (безотносительно к точному множеству решений интервальной задачи).

Но здесь мы сталкиваемся со следующим обстоятельством: в частично упорядоченных множествах нужно различать минимальные-максимальные элементы и наименьшие-наибольшие. Если первые лучше всех сравнимых с ними, то вторые обеспечивают абсолютное превосходство над всеми элементами множества. В интервальных задачах оценивания могут встретиться обе ситуации.

Критерий качества интервальных решений в задачах оценивания — степень близости (в том или ином смысле) полученной интервальной оценки к идеальному множеству решений. Ясно, что задачи внутреннего интервального оценивания могут иметь много максимальных по включению, но несравнимых между собой решений, так что наилучшего в смысле “представительности” интервального решения среди них выбрать в принципе нельзя. Но для задач внешнего интервального оценивания естественным образом определяется понятие наилучшего по включению решения.

Определение 4.4.1 *Внешняя интервальная оценка множества решений, совпадающая с его интервальной оболочкой, называется оптимальным (или наилучшим) решением задачи внешнего интервального оценивания (4.22).*

Получение оптимальных или гарантированно близких к оптимальным решений в задачах внешнего оценивания множеств решений интервальных систем является идеальной целью, относительно которой обычно судят о качестве решения задачи (4.22)–(4.23) тем или иным методом.

Необходимость и важность разработки алгоритмов, дающих именно оптимальные и наилучшие решения интервальных задач настойчиво пропагандировалась многими авторами (см., к примеру, [59]). Для обозначения подобных алгоритмов был даже введен специальный термин *bound conserving algorithm* (немецкий эквивалент — *schränkentreue Algorithm*, а буквальный русский перевод — “правильно передающий границы алгоритм”), который, учитывая крайнюю смысловую перегруженность эпитета “оптимальный”, следует признать не лишённым смысла.

К. Никель в [57] проводит аналогию между *bound conserving* алгоритмами и устойчивыми алгоритмами классической вычислительной математики, предсказывая, что “в будущем новое свойство ‘правильной передачи границ’ будет играть столь же важную роль в вычислительном интервальном анализе”, как и другие ключевые характеристики алгоритмов. В оптимистичной работе [60] Е. Нудингом приводился уже довольно внушительный список *bound conserving* алгоритмов, призванный, видимо, продемонстрировать существующую в интервальном анализе некую мощную тенденцию по непрерывному возникновению эффективных алгоритмов подобного сорта. При этом всеми упомянутыми авторами как-то обходился вопрос о той цене, которую приходится

платить за оптимальность результатов. Иначе говоря, каково неизбежное увеличение трудоёмкости алгоритмов, необходимое для получения оптимальных или хотя бы гарантированно близких к оптимальным решений интервальных задач оценивания?

Вопросы такого сорта сделались предметом интенсивного исследования лишь в 90-е годы ушедшего века и серьёзные продвижения в этом направлении стали одним из наиболее впечатляющих достижений в интервальной математике того десятилетия. Большинство из известных к настоящему времени результатов о сложности решения интервальных задач мы обязаны исследованиям А.А. Гаганова [11], В. Крейнвича, А.В. Лакеева и И. Рона [48, 46, 47, 51, 52, 20, 21, 63, 67, 68, 42], Г. Коксона [34, 35], Х. Янсона [40].

Изложим конспективно основные полученные к настоящему моменту результаты по теории сложности интервальных алгебраических задач:

- задача оценивания области значений полинома от многих переменных с заданной абсолютной или относительной точностью является NP-трудной [11];
- задачи распознавания (проверки непустоты) объединённого множества решений ИСЛАУ и задачи его внешнего оценивания являются NP-полными [46, 47, 48], причём они остаются NP-полными даже в том случае, если мы накладываем условия на знаки элементов матрицы или ограничимся неплотно заполненными матрицами (в частности, NP-полны задачи распознавания и оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ с трёхдиагональными матрицами и с неотрицательными матрицами);
- задачи распознавания и оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем являются NP-полными [53];
- задача нахождения формального решения интервальной линейной системы является NP-полной [51, 52];
- задача распознавания решения нелинейной системы уравнений в заданном бруске является NP-трудной [40, 48].

Напомним, что свойство задачи быть NP-трудной или NP-полной означает на современном этапе развития теории сложности вычислений, что, скорее всего, эта задача не может быть решена легче, чем за

время, которое является экспонентой от длины кодировки задачи. Хороший обзор теории сложности и теории NP-полноты читатель может найти в книге [12].

Таким образом, вывод, к которому приводят нас недавние результаты теории сложности, малоутешителен и заключается в том, что принятие требования оптимальности решения или же заданной близости получаемого интервального решения к оптимальному в общем случае делает интервальную задачу оценивания *труднорешаемой*. Тем самым получено теоретическое объяснение того факта, что за последние тридцать-сорок лет (в течение которых интервальный анализ развивался скорее вширь, чем вглубь) достижения в деле создания bound conserving алгоритмов были достаточно скромными. Несмотря на многочисленные плодотворные применения интервальных методов в современном естествознании и внутри самой математики алгоритмы для оптимального решения многих интервальных задач либо не найдены, либо по трудоёмкости они оказываются не намного лучшими полного перебора.

В частности, задаче (5.24) внешнего оценивания объединённых множеств решений интервальных линейных систем посвящено очень большое количество работ (см. Главу 7 и библиографию к ней). Все разработанные на данный момент методики позволяют вычислять интервальный вектор V , гарантированно содержащий множество решений Ξ_{uni} , но оптимальность V обеспечивают лишь очень немногие методы переборного типа с большой трудоёмкостью исполнения.

Было бы, очевидно, чересчур категоричным выводить из вышесказанного невозможность или бесполезность решать на практике интервальные задачи оценивания в постановках, которые требуют оптимальных ответов. Но несомненно и другое: специфическая форма интервальных задач оценивания, формализованная нами в §4.3, должна быть особо учтена и при выборе алгоритмов, решающих эти “оптимальные” постановки и при организации вычислений. Мы ещё вернемся к подробному обсуждению этого важного вопроса в §10.8.

Комментарий к Главе 4

К §4.1a Обратную задачу системного анализа в некоторых ситуациях называют также *задачей идентификации*.

Возможность теоретико-игровой интерпретации обобщённых мно-

жеств решений впервые была отмечена, по видимому, в [8].

По-видимому, исторически первая постановка для интервальных систем уравнений — это задача внешнего покоординатного оценивания множества всевозможных решений точечных систем, содержащихся в (1)–(2) (или в (4)–(5)), т.е. объединённого множества решений этих интервальных систем уравнений. Как правило, её формулируют в следующем виде

найти интервальный вектор V , включающий объединённое множество решений интервальной системы уравнений.

(4.24)

Фактически — это интервальная форма задачи о чувствительности решения системы уравнений к конечным возмущениям. Часто, имея в виду именно эту задачу, говорят (не совсем корректно) о “решении интервальной системы уравнений”.

Допустимое множество решений и впервые оно было рассмотрено ещё в 1972-м году немецким исследователем Е. Нудингом. На наш взгляд, работа Е. Нудинга явилась пионерским вкладом в интервальный анализ и была по достоинству оценена уже в 90-е годы. Нудинг, в действительности, продемонстрировал нам возможность варьирования логических кванторов в выделяющем предикате при определении множества решений интервальной задачи. Следующий шаг на этом пути был сделан лишь в 1991–92 годах, когда несколько российских исследователей независимо и почти одновременно столкнулись с необходимостью введения множества решений

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \},$$

образованного такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что для любого желаемого вектора $b \in \mathbf{b}$ мы можем подобрать соответствующую матрицу $A \in \mathbf{A}$ удовлетворяющую $Ax = b$. С.П. Шарый предложил называть его *управляемым множеством решений* и, похоже, термин постепенно привился в литературе.

Заметим, что символическое обозначение $(\forall A \in \mathbf{A})$ означает

$$(\forall a_{11} \in \mathbf{a}_{11})(\forall a_{12} \in \mathbf{a}_{12}) \dots (\forall a_{mn} \in \mathbf{a}_{mn}),$$

и то же самое верно в отношении $(\exists A \in \mathbf{A})$, $(\forall b \in \mathbf{b})$ и $(\exists b \in \mathbf{b})$. Кроме того, логические кванторы \forall и \exists не коммутируют друг с другом. Следовательно дальнейшее обобщение понятия множества решений интер-

вальной линейной системы можно получить, разделив действие логических кванторов по отдельным элементам матрицы и правой части и далее комбинируя кванторы \forall и \exists с различными интервальными параметрами и меняя их порядок. Мы видели, что такие множества решений не являются чисто теоретическим курьёзом но могут быть проинтерпретированы как решения некоторых игр или многошаговых процессов принятия решений в условиях интервальной неопределённости, т.е. как решения минимаксных задач исследования операций.

По-видимому, впервые постановку этого круга вопросов на примере задачи линейного программирования с интервальными коэффициентами осуществил А.А. Ватолина в [8].

К §4.2a По поводу “интервальной температуры” и т.п. оборотов речи следует добавить следующее.

Интервалы в математических моделях — это, как правило, объекты, которые находятся на ином, более высоком, уровне абстракции по отношению к реальности, нежели привычные “точечные” типы данных — вещественные, целые и т.п. И нужно эти уровни абстракции (которые суть уровни рассмотрения) не смешивать друг с другом во избежание нелепых ошибок. Мы ведь привычно не смешиваем употребление натуральных чисел и дробных, и еще много чего.

В качестве курьёза можно привести такой пример. Если в накладной на получение товара на складе экспедитору будет указано интервальное количество упаковок, то заказ выполнен в точности не будет. Экспедитор привезет, в лучшем случае, то целое количество, которое находится в указанных нами пределах, но это будет совершенно определенное неинтервальное количество! А в исходной постановке наше задание экспедитору будет диким и невыполнимым.

К §4.36 Для обозначения этого способа оценивания З. Румп [70] использует термин “внутреннее включение” (inner inclusion), который, на наш взгляд, алогичен и не адекватен ситуации.

Литература к главе 4

- [1] Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. — Москва: Мир, 1967.
- [2] Акофф Р., Сасиени М. *Основы исследования операций*. — Москва: Мир, 1971.

- [3] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления.* – Москва: Мир, 1987.
- [4] АЩЕПКОВ Л.Т. К проблеме повышения живучести управляемых систем // *Модели и методы исследования операций*, под ред. Б. А. Бельтюкова и В. П. Булатова. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 69–85.
- [5] БИРКГОФ Г., БАРТИ Т. *Современная прикладная алгебра.* – Москва: Мир, 1976.
- [6] БОРЕЛЬ Э. *Вероятность и достоверность.* – Москва: Физматгиз, 1961.
- [7] БОЧКОВ А.Ф., ВОЩИНИ А.П., СОТИРОВ Г.Р. // *Заводская лаборатория.* –
- [8] ВАТОЛИН А.А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики.* – 1984. – Т. 24. – С. 1629–1637.
- [9] ВЕРВИЦКИЙ В.И., ГОРБАНЬ А.Н., УТЮБАЕВ Г.Ш., ШОКИН Ю.И. Эффект Мура в интервальных пространствах // *Доклады Академии Наук.* – 1989. – Т. 304, №1. – С. 17–22.
- [10] ВОЩИНИН А.П., СОТИРОВ Г.Р. *Оптимизация в условиях неопределенности.* – Москва–София: Издательство МЭИ–Техника, 1989.
- [11] ГАГАНОВ А.А. О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных // *Кибернетика.* – 1985. – №4. – С. 6–8.
- [12] ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* – Москва: Мир, 1982.
- [13] ДОВРОНЕЦ Б.С., ШАЙДУРОВ В.В. *Двусторонние численные методы.* – Новосибирск: Наука, 1990.
- [14] ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения.* – Москва: Наука, 1988.
- [15] *Исследование операций. Методологические основы и математические методы* / под ред. Моудера Дж., Элмаграби С. – Москва: Мир, 1981.
- [16] КАЛМАН Р., ФАЛЬ П., АРБИВ М. *Очерки по математической теории систем.* – Москва: Мир, 1971.
- [17] КАЛМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.
- [18] КЛИНИ С.К. *Математическая логика.* – Москва: Мир, 1973.
- [19] КУРАТОВСКИЙ К., МОСТОВСКИЙ А. *Теория множеств.* – Москва: Мир, 1970.

- [20] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Доклады Академии Наук.* – 1993. – Т. 330, № 4. – С. 430–433.
- [21] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Сибирский Математический Журнал.* – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074–1084.
- [22] ЛИ Э.Б., МАРКУС Л. *Основы теории оптимального управления.* – Москва: Наука, 1972.
- [23] МЕСАРОВИЧ М., ТАКАХАРА Я. *Общая теория систем: математические основы.* – Москва: Мир, 1978.
- [24] ОБЭН Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* – Москва: Мир, 1988.
- [25] ОБЭН Ж.-П., ЭКЛАНД И. *Прикладной нелинейный анализ.* – Москва: Мир, 1988.
- [26] ОРЕ О. *Теория графов.* – Москва: Мир, 1980.
- [27] ИВЛЕВ Р.С., СОКОЛОВА С.П. Построение векторного управления многомерным интервально-заданным объектом // *Вычислительные Технологии.* – 1999. – Том 4, №4. – С. 3–13.
- [28] ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* – Москва: Наука, 1988.
- [29] ШАРЫЙ С.П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределённостью в данных // *Вычислительные Технологии.* – 1997. – Т. 2, №1. – С. 84–102.
- [30] AUBIN J.-P. *Viability theory.* – Boston: Birkhäuser, 1991.
- [31] AUBIN J.-P., FRANKOWSKA H. *Set-valued analysis.* – Boston: Birkhäuser, 1990.
- [32] BEAUMONT O. Solving interval linear systems with oblique boxes // IRISA Publication Interne №PI-1315. – IRISA, 2000. – 17 p.
(см. <http://www.irisa.fr/bibli/publi/pi/2000/1315/1315.html>)
- [33] BERTI S. The solution of an interval equation // *Mathematica.* – 1969. – Vol. 11 (34), №2. – P. 189–194.
- [34] COXSON G., DE MARCO C. The computational complexity of approximating the minimal perturbation scaling to achieve instability in an interval matrix // *Mathematics of Control, Signals and Systems.* – 1995. – Vol. 7. – P. 279–291.
- [35] COXSON G.E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // *Reliable Computing.* – 1999. – Vol. 5. – P. 137–142.

- [36] DEIF A.S. *Sensitivity analysis in linear systems*. – Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [37] DOBRONETS B.S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // *Interval Computations*. – 1992. – No. 1(3). – P. 6–21.
- [38] FILIPPOV A.F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equations // *Interval Computations*. – 1992. – No. 2(4). – P. 6–17.
- [39] HADJIHASSAN S., WALTER E., PRONZATO L. Quality improvement via optimization of tolerance intervals during the design stage // *Applications of Interval Computations* / Kearfott R. B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 91–131.
- [40] JANSSON C. An NP-hardness result for nonlinear systems // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 345–350.
- [41] JAULIN L., KIEFFER M., DIDRIT O., WALTER E. *Applied interval analysis*. – London: Springer, 2001.
- [42] HEINDL G., KREINOVICH V., LAKEYEV A. Solving linear interval systems is NP-hard even if we exclude overflow and underflow // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 383–388.
- [43] KLATTE P., ULLRICH CH. Complex sector arithmetic // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 139–148.
- [44] KOLACZ H. On the optimality of inclusion algorithms // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 67–80. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [45] KOSTOUSOVA E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computing // *Optimization Methods and Software*. – 1998. – Vol. 9. – P. 269–306.
- [46] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations*. – 1993. – No. 1. – P. 6–14.
- [47] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Approximate linear algebra is intractable // *Linear Algebra and its Applications*. – 1996. – Vol. 232. – P. 45–54.
- [48] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [49] KÜHN W. Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect // *Computing*. – 1998. – Vol. 61. – P. 47–67.

- [50] KURZHANSKI A.B., VALYI I. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: the problem of control synthesis // *Dynamics and Control*. – 1991. – Vol. 1. – P. 357–378.
- [51] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). – P. 130–133.
- [52] LAKEYEV A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 2. – P. 125–131.
- [53] LAKEYEV A.V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, No. 1. – С. 12–23.
- [54] LHOMME O. Consistency techniques for numeric CSPs // *IJCAI'93*. – Chambéry, France, August 1993. – P. 232–238.
- [55] MACKWORTH A.K. Consistency in network of relations // *Artificial Intelligence*. – 1977. – Vol. 8.. – P. 99–119.
- [56] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 86/9. – S. 5–19.
- [57] NICKEL K. Interval-Analysis // *The state of the art in numerical analysis: Proceedings of the Conference on the State of Art in Numerical Analysis, University of York, April 12–15, 1976* / Jacobs D., ed. – York: University of York, 1977. – P. 193–225.
- [58] NICKEL K. Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssystemen // *Linear Algebra and its Applications*. – 1982. – Vol. 44. – P. 19–40.
- [59] NUDING E. Intervallrechnung und Wirklichkeit // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 263–269. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 29).
- [60] NUDING E. Schrankentreue Algorithmen // *Beiträge zur Numerische Mathematik*. – 1983. – Vol. 11. – P. 115–137.
- [61] NUDING E., WILHELM W. Über Gleichungen und über Lösungen // *ZAMM*. – 1972. – B. 52. – P. T188–T190.
- [62] PETKOVIC M.S., MITROVIC Z.M., PETKOVIC L.B. Arithmetic of circular rings // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 133–142. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [63] POLJAK S., ROHN J. Checking robust nonsingularity is NP-hard // *Mathematics of Control, Signals & Systems*. – 1993. – Vol. 6. – P. 1–9.

- [64] RATSCHKE H., SAUER W. Linear interval equations // *Computing*. 1982. – Vol. 28, No. 2. – P. 105–115.
- [65] ROHN J. Input-output planning with inexact data // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1978. – No. 9/78. – S. 1–16.
- [66] ROHN J. Input-output model with interval data // *Econometrica*. – 1980. – Vol. 48. – P. 767–769.
- [67] ROHN J. NP-hardness results for linear algebraic problems with interval data // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: North-Holland, 1994. – P. 463–471.
- [68] ROHN J., KREINOVICH V. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear system is NP-hard // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 1995. – Vol. 16. – P. 415–420.
- [69] ROHN J., KRESLOVÁ J. Linear interval inequalities // *Linear and Multilinear Algebra*. – 1994. – Vol. 38. – P. 41–43.
- [70] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (Studies in computational mathematics; 5).
- [71] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.
- [72] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [73] SHARY S.P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // *International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations*, El Paso, TX, 1995. – P. 181–184.
- [74] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [75] SHARY S.P. Controllable solution sets to interval static systems // *Applied Mathematics and Computation*. – 1997. – Vol. 86, No. 2-3. – P. 185–196.

Глава 5

Множества решений интервальных систем уравнений

В этой главе представлены результаты по характеристике и геометрическим свойствам обобщённых множеств решений интервальных систем уравнений, как для общего нелинейного случая, так и для интервальных линейных систем.

Открывается глава параграфом, посвящённым теоретико-множественной и аналитической характеристикам множеств АЕ-решений интервальных систем общих нелинейных уравнений. Хотя полученные результаты практически и не используются далее в книге, они имеют методологическое значение, вскрывая минимаксную природу множеств АЕ-решений и связанных с ними задач.

Опираясь на свойства арифметики Каухера, далее в §5.2 выводятся аналитические характеристики множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений, фактически, мост от кванторного формализма исходных определений к технике вычисления их оценок. В следующих §§5.3–5.4 подробно обсуждаются топологические свойства множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений и способы распознавания их пустоты или непустоты.

Последний в главе §5.7 излагает способы быстрого предварительного внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ.

5.1 Характеризации множеств АЕ-решений

Теорема 5.1.1

$$\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b}\}.$$

Доказательство. По определению операций пересечения и объединения множеств

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists) \\ &\quad (F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b})\} \\ &= \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b})\} \\ &= \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \left(\bigcup_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b}\} \right). \end{aligned}$$

■

Дадим теперь для множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений аналитическое описание, использующее операции “min”, “max” и отношения “≤”, “≥”:

Теорема 5.1.2 *Для интервальной системы уравнений*

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

принадлежность точки $x \in \mathbb{R}^n$ множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

влечёт справедливость следующей системы $2t$ неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную } A\text{-неопределённость,} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную } E\text{-неопределённость.} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Если же отображение $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ таково, что каждый из параметров a_{r+1}, \dots, a_l , соответствующих интервальной E -неопределённости, входит лишь в одну из компонент $F_i(a, x)$, $i = 1, 2, \dots, t$, то принадлежность $x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ равносильна системе неравенств (5.1).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что компоненты вектора правой части \mathbf{b}_i с A -неопределённостью имеют номера $i = 1, 2, \dots, s$, тогда как компоненты \mathbf{b}_i с E -неопределённостью имеют номера $i = s + 1, \dots, n$. Кроме того, условимся для краткости обозначать через $\hat{\mathbf{b}}, \check{\mathbf{b}}$ такие точечные m -векторы, что

$$\hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}} = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m),$$

а через $\hat{\mathbf{a}}, \check{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ — такие точечные n -векторы, что

$$\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

С выделяющим предикатом рассматриваемого множества AE -решений интервальной системы уравнений можно выполнить следующие

эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned}
& \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
&= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(a, x) = b) \} \\
&= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists) \\
&\quad (F_1(a, x) = b_1 \ \& \ \dots \ \& \ F_s(a, x) = b_s \ \& \\
&\quad F_{s+1}(a, x) \in \mathbf{b}_{s+1} \ \& \ \dots \ \& \ F_m(a, x) \in \mathbf{b}_m) \} \\
&\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists) \\
&\quad (F_1(a, x) \geq b_1 \ \& \ F_1(a, x) \leq b_1 \ \& \ \dots \ \& \\
&\quad F_s(a, x) \geq b_s \ \& \ F_s(a, x) \leq b_s \ \& \\
&\quad F_{s+1}(a, x) \geq \underline{b}_{s+1} \ \& \ F_{s+1}(a, x) \leq \bar{b}_{s+1} \ \& \ \dots \ \& \\
&\quad F_m(a, x) \geq \underline{b}_m \ \& \ F_m(a, x) \leq \bar{b}_m) \} \\
&\subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) \\
&\quad ((\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_1(a, x) \geq b_1) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_1(a, x) \leq b_1) \ \& \\
&\quad \dots \ \& \\
&\quad (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_s(a, x) \geq b_s) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_s(a, x) \leq b_s) \ \& \\
&\quad (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_{s+1}(a, x) \geq \underline{b}_{s+1}) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_{s+1}(a, x) \leq \bar{b}_{s+1}) \ \& \\
&\quad \dots \ \& \\
&\quad (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_m(a, x) \geq \underline{b}_m) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_m(a, x) \leq \bar{b}_m)) \}.
\end{aligned}$$

Отметим, что последнее включение обращается в точное равенство, если верны условия, накладываемые на $F(a, x)$ во второй части условия теоремы. Именно, если каждая компонента F имеет лишь единственное вхождение переменных, соответствующих ненулевым элементам в \mathbf{a}^\exists и эти вхождения в разных компонентах F не пересекаются друг с другом, то мы имеем право “проносить” кванторы существования \exists к отдельным членам конъюнкций [6].

Далее, для любой функции f , определённой на некотором интервале

\mathbf{a} , имеют место следующие эквивалентности:

$$(\exists a \in \mathbf{a})(f(a) \geq b) \iff \max_{a \in \mathbf{a}} f(a) \geq b, \quad (5.2)$$

$$(\exists a \in \mathbf{a})(f(a) \leq b) \iff \min_{a \in \mathbf{a}} f(a) \leq b. \quad (5.3)$$

Поэтому мы можем продолжить наши выкладки с выделяющим предикатом следующим образом:

$$\begin{aligned} & \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ & \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) \right. \\ & \quad \left(\left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \geq b_1 \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \leq b_1 \right) \& \right. \\ & \quad \quad \dots \quad \& \\ & \quad \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \geq b_s \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \leq b_s \right) \& \\ & \quad \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{b}_{s+1} \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \leq \overline{b}_{s+1} \right) \& \\ & \quad \quad \dots \quad \& \\ & \quad \left. \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \geq \underline{b}_m \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \leq \overline{b}_m \right) \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$(\forall b \in \mathbf{b})(f(a) \geq b) \iff f(a) \geq \overline{b},$$

$$(\forall b \in \mathbf{b})(f(a) \leq b) \iff f(a) \leq \underline{b},$$

так что имеем

$$\begin{aligned}
& \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
& \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall) \right. \\
& \quad \left(\left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_1 \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_1 \right) \& \right. \\
& \quad \quad \dots \quad \& \\
& \quad \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_s \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_s \right) \& \\
& \quad \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \\
& \quad \quad \dots \quad \& \\
& \quad \left. \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_m \right) \& \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_m \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
(\forall a \in \mathbf{a})(f(a) \geq b) & \iff \min_{a \in \mathbf{a}} f(a) \geq b, \\
(\forall a \in \mathbf{a})(f(a) \leq b) & \iff \max_{a \in \mathbf{a}} f(a) \leq b,
\end{aligned}$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}
& \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \right. \\
& \quad \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_1 \right) \& \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_1 \right) \& \\
& \quad \quad \dots \quad \& \\
& \quad \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_s \right) \& \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_s \right) \& \\
& \quad \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \\
& \quad \quad \dots \quad \& \\
& \quad \left. \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_m \right) \& \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_m \right) \right\},
\end{aligned}$$

что совпадает с системой неравенств (5.1). При этом справедливость условий второй части Теоремы действительно имеет следствием выполнение равенств на всех этапах выкладок. ■

Как видно из доказательства, импликация только в одну сторону в утверждении теоремы в общем случае оказывается принципиальной. Результат теоремы может быть поэтому интерпретирован как свидетельство того, что кванторный язык описания управляемых систем, основанный на исчислении предикатов, обладает по крайней мере не меньшими выразительными возможностями, чем аналитический язык, привлекающий традиционные операции и отношения из математического анализа. Различные аспекты его использования для описания управляемых систем обсуждаются, например, в работах [28, 29].

5.2 Множества АЕ-решений интервальных линейных уравнений

5.2а Кванторный формализм в линейном случае

Этот и следующие параграфы мы посвятим более детальному рассмотрению простейших интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2, \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}x_1 + \mathbf{a}_{m2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}x_n = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (5.4)$$

с интервалами \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_i , или в краткой форме

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (5.5)$$

с интервальной $m \times n$ -матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и интервальным m -вектором $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$. Задачи такого типа естественно возникают в большом количестве практических ситуаций.

Предположим, к примеру, что нам дана статическая управляемая система в виде, описанном в §4.1, относительно которой сделаны следующие допущения:

- (i) все компоненты $F_i(a, x)$ являются билинейными функциями от $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ и $a = (a_1, a_2, \dots, a_l)^\top$, т.е.,

$$F_i(a, x) = \sum_{j,k} h_{ijk} a_j x_k$$

с некоторыми известными коэффициентами $h_{ijk} \in \mathbb{R}$,

- (ii) каждый из a_j встречается не более одного раза и не более чем в одном из компонентных выражений $F_i(a, x)$ выписанного выше билинейного вида.

Последнее означает, в частности, что каждый из входов системы a_j , $j = 1, 2, \dots, l$, может влиять лишь на один из выходов F_i , $i = 1, 2, \dots, m$. В этих условиях индекс k становится излишним, но, с другой стороны, для входов a_j имеет смысл ввести другой индекс i , указывающий компоненту F_i , в которой a_j имеет вхождение. Тем самым a_j превращаются в a_{ij} , и без потери общности все масштабирующие коэффициенты h_{ij} можно положить равными единице. В целом мы принимаем

$$F_i(a, x) = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.6)$$

или, что эквивалентно,

$$F(a, x) = Ax \quad (5.7)$$

с некоторой $m \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$. Соответственно, если во входах и/или выходах системы присутствует интервальная неопределённость, мы приходим к интервальной линейной системе вида (5.5).

Упомянем ещё один пример возникновения множеств АЕ-решений интервальных линейных систем при математическом моделировании в экономике. Рассмотрим линейное уравнение межотраслевого экономического баланса

$$x = Ax + y, \quad (5.8)$$

т.е. классическое уравнение Леонтьева [9], в котором

- $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор объёмов продукции по n отраслям,
- $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор объёмов конечного потребления по этим отраслям
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица коэффициентов прямых производственных затрат.

В реальной жизни определение коэффициентов a_{ij} для отдельно взятого предприятия не составляет труда, но в масштабах всей отрасли найти их весьма трудно. Как правило, вместо точных значений этих коэффициентов оперируют их оценками, полученными по тем или иным методикам. Разумно даже считать, что коэффициенты прямых производственных затрат известны нам лишь с некоторой неопределённостью, которую мы будем предполагать *интервальной*. Иными словами, пусть $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$ и $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$.

Аналогичным образом, требование на вектор конечного потребления y также естественно сформулировать в интервальной форме: нас, как правило, устроит ситуация, когда реальное потребление будет выдерживаться в пределах некоторого интервала $y \in \mathbb{R}^n$. В вещественном случае решение системы (5.8) относительно x позволяет спрогнозировать объёмы производства по отраслям, необходимые для получения запланированного конечного потребления y . В интервальном случае вместо (5.8) мы имеем уравнение

$$x = \mathbf{A}x + y$$

и формулировка вопроса должна быть модифицирована следующим образом:

для каких объёмов производства x при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат a_{ij} в пределах \mathbf{a}_{ij} мы всё равно получим конечное потребление из требуемого интервала y ?

Нетрудно понять, что множество всех таких векторов x образует допустимое множество решений интервальной линейной системы

$$(I - \mathbf{A})x = y. \quad (5.9)$$

Если же интервалы некоторых коэффициентов прямых производственных затрат представляют пределы их возможного управления, скажем, в результате некоторых изменений технологии производства или административных решений, то задача определения объёмов производства x , которые обеспечивают конечное потребление y , приводит уже к рассмотрению множеств АЕ-решений интервальной линейной системы (5.9).

Переформулируем понятия и обозначения, введённые нами в §4.2а и §4.2в, на случай интервальных линейных систем вида (5.5).

Определение 5.2.1 Множества АЕ-решений (или, иначе, АЕ-множества решений) — это обобщённые множества решений интервальных линейных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму, т.е. такой, что все вхождения кванторов существования “ \exists ” предшествуют в нём вхождениям кванторов всеобщности “ \forall ”.

Как и в общем случае, рассмотренном в §4.2в, для множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений существуют три эквивалентных способа описания соответствия типов неопределённости интервальным элементам системы:

- 1) указание для системы (5.5) кванторной матрицы и кванторного вектора правой части,
- 2) разбиения индексных множеств матрицы и вектора правой части системы (5.5) на подмножества, соответствующие элементам с А- и Е-неопределённостями,
- 3) дизъюнктные разложения интервальной матрицы и правой части на слагаемые, отвечающие А- и Е-неопределённостям системы (5.5).

Обратимся теперь к их подробному описанию:

1. Коль скоро порядок кванторов в выделяющем предикате зафиксирован, то простейший способ описания типов неопределённости заключается в прямом указании того, какие логические кванторы соответствуют тем или иным элементам интервальной системы. Именно, если ввести $m \times n$ -матрицу $\alpha = (\alpha_{ij})$ и m -вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_{ij} := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{a}_{ij} \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{a}_{ij} \text{ имеет Е-неопределённость,} \end{cases}$$

$$\beta_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет Е-неопределённость.} \end{cases}$$

то указание α и β полностью определяет конкретное множество АЕ-решений ИСЛАУ.

2. Другой путь представления типов неопределённости, отвечающих различным элементам линейной системы (5.5) — задание разбиения индексных множеств элементов матрицы \mathbf{A} и правой части \mathbf{b} . Более точно, пусть множество индексных пар (i, j) элементов матрицы \mathbf{A} , т.е. множество

$$\{ (1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, n), \\ \dots, (m, 1), (m, 2), \dots, (m, n) \},$$

разбито на две непересекающиеся части $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$, $p + q = mn$, такие что

элемент \mathbf{a}_{ij} имеет А-неопределённость при $(i, j) \in \hat{\Gamma}$, и

элемент \mathbf{a}_{ij} имеет Е-неопределённость при $(i, j) \in \check{\Gamma}$.

Аналогично, пусть $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_r\}$ и $\check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_s\}$, $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{1, 2, \dots, n\}$ — непересекающиеся множества натуральных индексов, такие, что в правой части ИСЛАУ

элемент \mathbf{b}_i имеет А-неопределённость при $i \in \hat{\Delta}$ и

элемент \mathbf{b}_i имеет Е-неопределённость при $i \in \check{\Delta}$.

При этом допускается естественная возможность того, что некоторые из множеств $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$ пусты. Ясно, что

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \forall, & \text{если } (i, j) \in \hat{\Gamma}, \\ \exists, & \text{если } (i, j) \in \check{\Gamma}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Delta}, \end{cases}$$

а то или иное конкретное АЕ-множество решений однозначно задаётся указанием разбиений $\hat{\Gamma} \cup \check{\Gamma}$ и $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta}$.

3. Наконец, ещё один удобный способ описывать распределения типов неопределённости по интервальным элементам системы уравнений (5.5) состоит в следующем. Определим интервальные матрицы $\mathbf{A}^\forall = (\mathbf{a}_{ij}^\forall)$ и $\mathbf{A}^\exists = (\mathbf{a}_{ij}^\exists)$ и интервальные векторы $\mathbf{b}^\forall = (\mathbf{b}_i^\forall)$ и $\mathbf{b}^\exists = (\mathbf{b}_i^\exists)$, тех же размеров, что \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно, следующим

образом

$$\mathbf{a}_{ij}^{\forall} := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{a}_{ij}^{\exists} := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{b}_i^{\forall} := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{b}_i^{\exists} := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{\forall} + \mathbf{A}^{\exists}, & \mathbf{a}_{ij}^{\forall} \mathbf{a}_{ij}^{\exists} &= 0 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}, & \mathbf{b}_i^{\forall} \mathbf{b}_i^{\exists} &= 0, \end{aligned}$$

т.е. матрицы \mathbf{A}^{\forall} , \mathbf{A}^{\exists} и векторы \mathbf{b}^{\forall} , \mathbf{b}^{\exists} образуют *дизъюнктные* (взаимнодополнительные) разложения для \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно. В матрице \mathbf{A}^{\forall} и векторе \mathbf{b}^{\forall} сосредоточены все интервальные элементы системы (5.5), соответствующие А-типу неопределённости, а в матрице \mathbf{A}^{\exists} и векторе \mathbf{b}^{\exists} — все интервальные элементы, соответствующие Е-типу неопределённости.

Важно отметить, что между тремя введёнными выше группами объектов, которые порождаются интервальной линейной системой (5.5) и её АЕ-множеством решений, именно, между

- (1) кванторными матрицей α и вектором β ,
- (2) разбиением индексных множеств матрицы и вектора правой части системы (5.5) на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$,
- (3) дизъюнктными разложениями интервальной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\forall} + \mathbf{A}^{\exists}$ и правой части $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$,

имеется взаимно однозначное соответствие, так что указание любого одного из пунктов этой триады автоматически определяет два других. Ниже мы поэтому будем свободно переходить от одного способа описания к другому без специальных комментариев.

Мы можем дать также следующее

Определение 5.2.2 Пусть для интервальной $m \times n$ -системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заданы кванторные $m \times n$ -матрица α и m -вектор β и ассоциированные с ними разбиения индексных множеств матрицы и вектора тех же размеров на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$, $p + q = mn$, $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_r\}$ и $\check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_s\}$, $r + s = m$.

Назовём множеством АЕ-решений типа $\alpha\beta$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \\ \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \\ (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) (\forall b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\check{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_s}) \\ (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) (\exists b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\hat{\delta}_r} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_r}) \\ (Ax = b) \}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

или, что эквивалентно, множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \check{b} \in \mathbf{b}^\forall) \\ (\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \hat{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}) \}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$ — соответствующие дизъюнктные разбиения матрицы ИСЛАУ и её правой части.

Как и ранее, следующие хорошо известные множества решений интервальных линейных систем —

- объединённое множество решений (нередко называемое просто “множеством решений”)

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \},$$

- допустимое множество решений (см. Главу 6)

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \},$$

- управляемое множество решений (см. §5.5)

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \}.$$

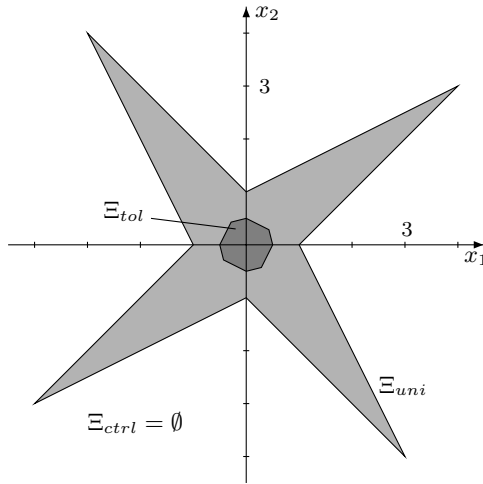


Рис. 5.1. Объединённое множество решений Ξ_{uni} и допустимое множество решений Ξ_{tol} интервальной линейной системы (5.12).

— это крайние точки обширного семейства $2^{m(n+1)}$ всевозможных множеств АЕ-решений для интервальных линейных систем вида (5.5). Четвертой крайней точкой этого семейства является

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}.$$

Его рассмотрение бессмысленно, хотя по большей части и бессодержательно, так как для уравнений с интервальными параметрами ненулевой ширины это множество решений по большей части пусто.

Вообще, пусть i -ая строка матрицы α целиком состоит из кванторов всеобщности “ \forall ” и соответствующим элементом кванторного вектора β также является “ \forall ”. Тогда $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, если среди элементов $\mathbf{a}_{1j}, \dots, \mathbf{a}_{in}, \mathbf{b}_i$ имеется хотя бы один интервал с ненулевой шириной. Из-за этого

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m - 1$$

штук множеств АЕ-решений интервальной линейной $m \times n$ -системы оказываются *a priori* пустыми. Таким образом, количество “нетривиальных” множеств АЕ-решений для таких систем уравнений уменьшается до $2^{m(n+1)} - 2^m + 1 = 2^m(2^{mn} - 1) + 1$.

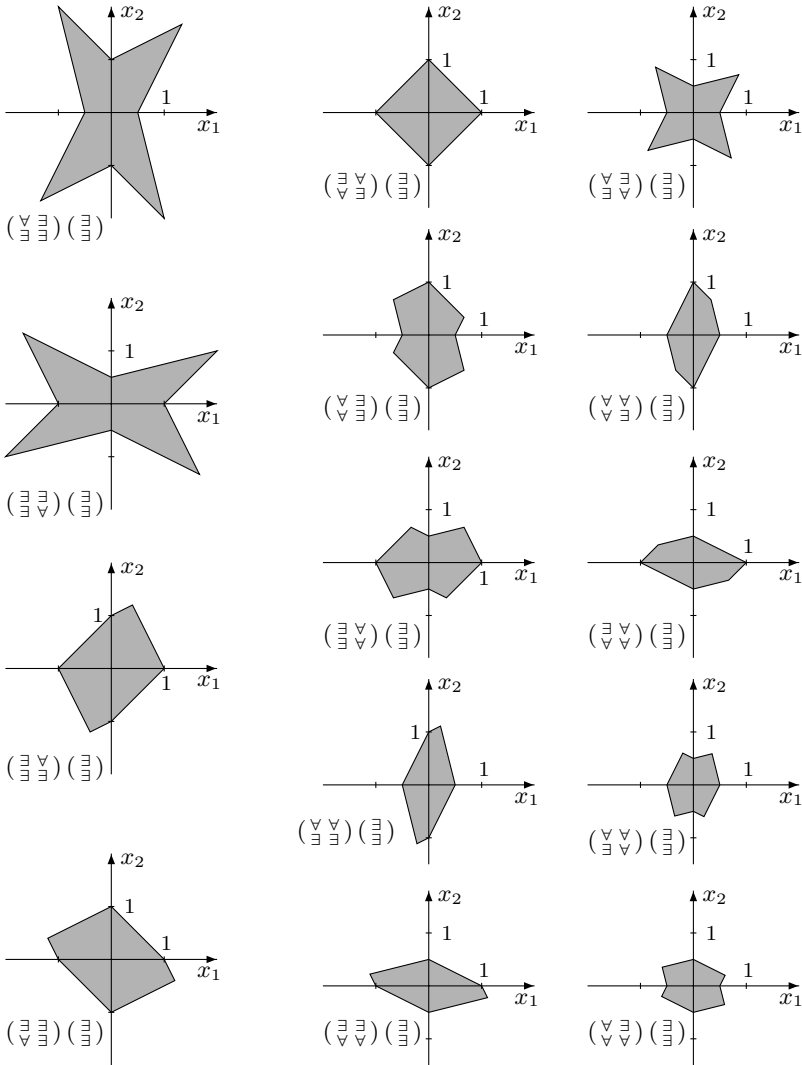


Рис. 5.2. Все другие непустые множества АЕ-решений системы (5.12).

Например, для интервальной линейной 2×2 -системы можно рассматривать $2^2(2^4 - 1) + 1 = 61$ множеств АЕ-решений. Рис. 5.1 и 5.2 изображают некоторые из множеств решений интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

из [22], неоднократно рассматривавшейся многими авторами.

Заметим, что всегда $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. объединенное множество решений является наиболее широким в семействе всех множеств АЕ-решений для интервальных систем уравнений, и это наблюдение может быть обобщено. Именно, если на множестве логических кванторов $\{\forall, \exists\}$ ввести частичный порядок “ \preceq ”, положив

$$\forall \preceq \exists, \quad (5.13)$$

а отношения $\alpha \preceq \alpha'$, $\beta \preceq \beta'$, $\alpha\beta \preceq \alpha'\beta'$ договориться понимать покомпонентно и поэлементно, то для любых \mathbf{A} и \mathbf{b} имеет место импликация

$$\alpha\beta \preceq \alpha'\beta' \Rightarrow \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{\alpha'\beta'}(\mathbf{A}, \mathbf{b}). \quad (5.14)$$

Наглядной иллюстрацией этого факта служат Рис. 5.1 и 5.2.

Свойство (5.14) может оказаться очень полезным при исследовании обобщённых множеств решений интервальных систем уравнений. Если мы уже обнаружили, к примеру, что для системы (5.12)

$$\Xi_{(\exists\exists)(\forall)} = \Xi_{(\exists\forall)(\exists)} = \emptyset,$$

то, посредством “ослабления”, в смысле порядка (5.13), кванторов в выделяющем предикате, можно заключить, что управляемое множество решений Ξ_{ctrl} для (5.12) также пусто, и пустыми являются еще 45 множеств решений системы (5.12), получающиеся из вышеупомянутых трёх путем комбинирования кванторов перед элементами матрицы. Рассуждения, использованные нами при выводе свойства (5.14), в равной степени приложимы и к общим нелинейным интервальным системам уравнений, и, по сути, мы ещё не раз используем их далее в книге (например, в Предложениях 11.5.1 и 11.5.2).

5.26 Характеризация и постановки задач

В этом параграфе мы обратимся к различным эквивалентным характеристикам (описаниям) обобщённых АЕ-множеств решений интервальных линейных систем.

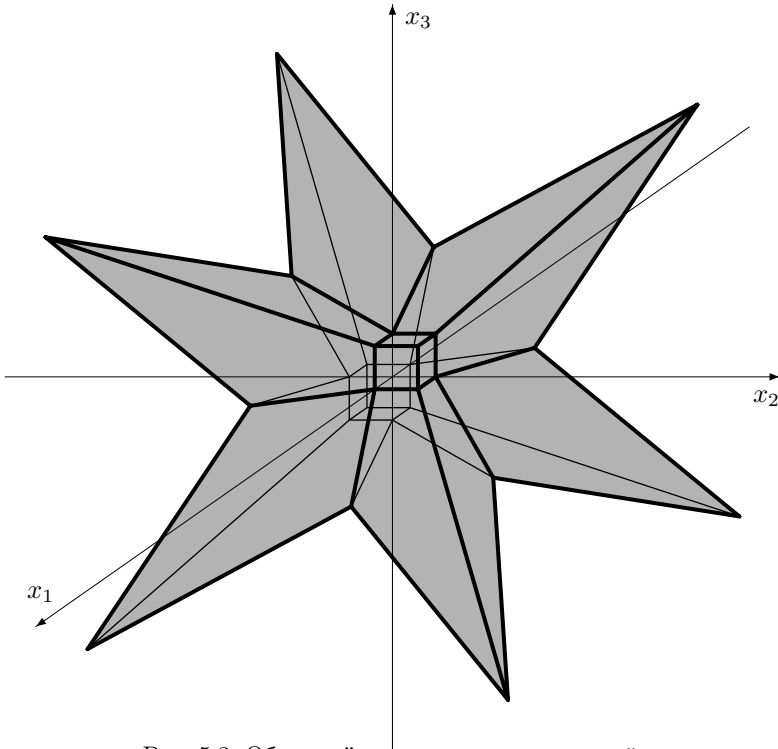


Рис. 5.3. Объединённое множество решений трёхмерной системы Ноймайера.

Теорема 5.2.1

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}$$

В частности, если \mathbf{A} — неособенная интервальная матрица, то

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

Доказательство. По определению операций пересечения и объединения множеств

$$\begin{aligned}
 \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists) \\
 &\quad ((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}) \} \\
 &= \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}) \} \\
 &= \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b} \}.
 \end{aligned}$$

■

Например, для объединённого множества решений ИСЛАУ (5.5) с неособенной матрицей \mathbf{A} имеем

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} \bigcup_{b \in \mathbf{b}} A^{-1}b,$$

что и обуславливает его название.

Обратимся теперь к аналитическим характеристикам обобщённых АЕ-множеств решений интервальных линейных систем уравнений вида (5.5). Фундаментальным результатом нашей теории является

Теорема 5.2.2 Пусть в интервальной линейной системе уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ распределение типов неопределённости по элементам системы таково, что для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ хотя бы один из интервалов

$$\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}, \mathbf{b}_i$$

имеет Е-неопределённость. Тогда точка x принадлежит множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x, \quad (5.15)$$

где “ \cdot ” — интервальное матричное умножение.

Доказательство. Привлекая матрицы \mathbf{A}^\forall , \mathbf{A}^\exists и векторы \mathbf{b}^\forall , \mathbf{b}^\exists , введённые в (5.10), мы можем переписать Определение 5.2.2 множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) \\ (\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = (\hat{b} + \check{b})) \}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства Предложения преобразуем эквивалентным образом выделяющий предикат множества решений. Имеем

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists) \\ &\quad (\hat{A}x - \hat{b} = \check{b} - \check{A}x) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\hat{A}x - \hat{b} \in \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x \}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x = \{ \check{b} - \check{A}x \mid \check{A} \in \mathbf{A}^\exists, \check{b} \in \mathbf{b}^\exists \}$$

и

$$\mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall = \{ \hat{A}x - \hat{b} \mid \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall, \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall \}$$

на основании свойств интервальных матричных операций. ■

Вышеприведённый результат впервые был получен С. П. Шарым в [45]. Заметим, что Теорема 5.2.2 обобщает все известные ранее характеристики различных множеств решений интервальных линейных систем — для объединённого множества решений (характеризацию Бека), для допустимого множества решений и управляемого множества решений.

Основываясь на Теореме 5.2.2, нетрудно рисовать картины множеств решений ИСЛАУ в случае двух или даже трех измерений. Действительно, зафиксируем знаки

Упражнение 5.2.1. Постройте объединённое множество решений интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как мы уже отмечали, логические кванторы разного типа в общем случае не перестановочны друг с другом. Не имеем права мы их переставлять и в выделяющем предикате при определении обобщённых множеств решений интервальных систем общего вида.

Введём

Определение 5.2.3 *Интервальную матрицу A^c и вектор b^c , определяемые посредством*

$$A^c := A^\forall + \text{dual } A^\exists, \quad b^c := \text{dual } b^\forall + b^\exists,$$

станем называть характеристическими для АЕ-множества решений ИСЛАУ (5.5), задаваемого дизъюнктивным разложением A на A^\forall и A^\exists , b на b^\forall и b^\exists .

Теорема 5.2.3 *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(A, b)$ тогда и только тогда, когда*

$$A^c \cdot x \subseteq b^c \quad (5.16)$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

Доказательство. Заметим, что

$$\text{opp}(-v) = \text{dual } v$$

для любого интервала $v \in \mathbb{KR}$. Следовательно, если к обеим частям включения (5.15) прибавить по $(\text{dual } b^\forall + \text{dual } (A^\exists \cdot x))$, то придём к эквивалентному включению в полной интервальной арифметике

$$A^\forall \cdot x + \text{dual } (A^\exists \cdot x) \subseteq \text{dual } b^\forall + b^\exists. \quad (5.17)$$

Но $\text{dual } (A^\exists \cdot x) = (\text{dual } A^\exists) \cdot x$, так как x — точечный вектор. Вместо (5.17) мы можем написать поэтому

$$A^\forall \cdot x + (\text{dual } A^\exists) \cdot x \subseteq \text{dual } b^\forall + b^\exists.$$

Наконец, в левой части можно воспользоваться дистрибутивностью относительно точечной переменной x , получая вместо (5.15) равносильное включение

$$(A^\forall + \text{dual } A^\exists) \cdot x \subseteq \text{dual } b^\forall + b^\exists,$$

которое совпадает с (5.16). ■

Введённое Определением 5.2.3 понятие настолько важно в развиваемой нами теории, что на его обсуждении стоит остановиться подробнее. Подчеркнём, что указание характеристических векторов полностью определяют АЕ-множество решений интервальной системы уравнений, наряду с триадой, описанной в §4.2в, т.е. кванторными матрицей α и вектором β , разбиением индексных множеств интервальных параметров системы, а также их дизъюнктивными разложениями. Но задание характеристических матрицы и правой части даёт даже больше информации, одновременно указывая как тип неопределённости, так и сами интервалы параметров в системе. Поэтому будет совершенно корректным говорить о множестве АЕ-решений (некоторой) интервальной системы линейных уравнений, *соответствующих данным характеристическим матрице и вектору правой части*, и писать $\Xi(F, \mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$, не указывая явно эту систему и распределение типов неопределённостей в ней. При рассмотрении интервальных линейных систем уравнений мы получим действительно ощутимую выгоду от введения новых понятий и терминологии.

Следующая замечательная характеристизация была предложена чешским исследователем И. Роном [41] и впервые использована А.В. Лакеевым в работе [32]. Она является переформулировкой Теоремы 5.2.2 в виде линейных неравенств с модулями, обобщая, таким образом, известные результаты Оеттли-Прагера для объединённого множества решений [37] и самого Рона для допустимого множества решений [39]. Ниже мы приводим развёрнутое доказательство этого результата.

Теорема 5.2.4 (характеризация Рона множеств АЕ-решений)

Точка x принадлежит множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall). \quad (5.18)$$

Доказательство. Включение $\mathbf{p} \subseteq \mathbf{q}$ для правильных интервальных векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} равносильно, как известно, неравенству

$$|\text{mid } \mathbf{q} - \text{mid } \mathbf{p}| \leq \text{rad } \mathbf{q} - \text{rad } \mathbf{p}$$

(см. Главу 1). Следовательно, характеристика (5.15) может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left| \text{mid}(\mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x) - \text{mid}(\mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall) \right| \\ & \leq \text{rad}(\mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x) - \text{rad}(\mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \text{rad}(\mathbf{p} \pm \mathbf{q}) &= \text{rad } \mathbf{p} + \text{rad } \mathbf{q}, \\ \text{mid}(\mathbf{p} \pm \mathbf{q}) &= \text{mid } \mathbf{p} \pm \text{mid } \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Поэтому (5.19) выполняется в том и лишь в том случае, если

$$\begin{aligned} & \left| \text{mid } \mathbf{b}^\exists - \text{mid}(\mathbf{A}^\exists \cdot x) - \text{mid}(\mathbf{A}^\forall \cdot x) + \text{mid } \mathbf{b}^\forall \right| \\ & \leq \text{rad } \mathbf{b}^\exists + \text{rad}(\mathbf{A}^\exists \cdot x) - \text{rad}(\mathbf{A}^\forall \cdot x) - \text{rad } \mathbf{b}^\forall, \end{aligned}$$

что эквивалентно характеристике (5.18), так как

$$\text{mid}(\mathbf{A}^\exists \cdot x) = (\text{mid } \mathbf{A}^\exists) \cdot x, \quad \text{mid}(\mathbf{A}^\forall \cdot x) = (\text{mid } \mathbf{A}^\forall) \cdot x$$

и

$$\text{rad}(\mathbf{A}^\exists \cdot x) = (\text{rad } \mathbf{A}^\exists) \cdot |x|, \quad \text{rad}(\mathbf{A}^\forall \cdot x) = (\text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x|.$$

■

Частный случай Теоремы 5.2.4 для объединённого множества решений — утверждение

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff |(\text{mid } \mathbf{A})x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b} \quad (5.20)$$

— часто называют *характеризацией Оеттли-Прагера* (см. [35, 37], а также [3], §2.7.5).

Определение 5.2.4 [10] *Многогранным выпуклым множеством в \mathbb{R}^p называется множество, которое можно представить как пересечение конечного числа замкнутых полупространств \mathbb{R}^p , т.е. как множество решений конечной системы линейных неравенств вида*

$$h_{(i)}^\top x \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

где $h_{(i)} \in \mathbb{R}^p$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ и M — некоторый натуральный номер.

x_2 x_2 x_1 x_1

Рис. 5.4. Примеры многогранных множеств.

Определение 5.2.5 Вершинами интервального вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ называются точки множества

$$\text{vert } \mathbf{x} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{ \underline{x}_i, \overline{x}_i \}, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Аналогичным образом определяются вершины интервальной матрицы.

Теорема 5.2.5 Для любых кванторов α и β пересечение множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов пространства \mathbb{R}^n является выпуклым многогранным множеством, чьи вершины — это решения “угловых” точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \text{vert } \mathbf{A}$ и $b \in \text{vert } \mathbf{b}$.

Доказательство. Принадлежность вещественного вектора x какому-либо ортанту определяется указанием знаков его компонент. Заметим также, что для любой интервальной $m \times n$ -матрицы \mathbf{C} компоненты произведения $\mathbf{C} \cdot x = ((\mathbf{C} \cdot x)_1, (\mathbf{C} \cdot x)_2, \dots, (\mathbf{C} \cdot x)_m)^\top$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \cdot x)_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j = \left[\sum_{j=1}^n \underline{c}_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n \overline{c}_{ij} x_j \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^n c'_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n c''_{ij} x_j \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

где c'_{ij} и c''_{ij} — некоторые числа (они могут совпадать), которые принадлежат множеству концов $\{\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}\}$ и фиксированы для каждого отдельного ортанта, содержащего x .

Далее, переписывая включения (5.15) покомпонентным образом и заменяя на основе представления (5.21) каждое из одномерных включений парой неравенств между концами интервалов, мы получим систему $3n$ линейных неравенств

$$\begin{cases} A'x \geq b', \\ A''x \leq b'', \\ \text{условие на знаки } x_i, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (5.22)$$

где $A', A'' \in \text{vert } \mathbf{A}$ и $b', b'' \in \text{vert } \mathbf{b}$. Система неравенств (5.22) определяет выпуклое многогранное множество. ■

Упражнение 5.2.2. Может ли множество АЕ-решений интервальной линейной системы иметь вид, изображенный на рисунке?

Итак, в общем случае $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть представлено как объединение не более 2^n (по числу ортантов) выпуклых многогранных множеств. Для объединённого множества решений ИСЛАУ этот простой, но очень важный факт был впервые установлен У. Оеттли [36] и впоследствии передоказан в [23, 25].

Как следствие, сложность прямого описания множеств АЕ-решений может расти экспоненциально с n несмотря на приведенные выше простые и геометрически наглядные характеризационные результаты. Подобное описание делается, таким образом, исключительно трудоёмким и практически бесполезным уже для интервальных линейных систем даже не очень больших размерностей. Это затруднение носит принципиальный характер, так как теоретический результат Лакеева [32] показывает, что даже задача распознавания того, пусто или непусто множество АЕ-решений ИСЛАУ, в общем случае (если не накладывать на \mathbf{A} и \mathbf{b} никаких ограничений) является NP-трудной, т.е. не может быть решена легче, чем за время, которое является экспонентой от длины кодировки задачи [4]. Для объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и управляемого множества решений $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ этот факт был известен ещё с начала 90-х годов [7, 8, 30].

В силу сказанного на практике не имеет смысла нацеливаться на нахождение и предъявление пользователю полного описания множеств

решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Как и в общем случае, рассмотренном в §§4.1–4.3, вполне достаточно вычислять некоторые просто устроенные приближения (оценки) для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. В качестве оценочных множеств мы снова будем брать интервальные векторы — прямые произведения интервалов вещественной оси, — т.е. с геометрической точки зрения, брусы со сторонами параллельными координатным осям. Подытоживая, можно сформулировать основные задачи для интервальных линейных систем уравнений, которые нам предстоит решать:

Для интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и кванторных матрицы α и вектора β тех же размеров, что и \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно найти внутреннюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

(5.23)

и

Для интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и кванторных матрицы α и вектора β тех же размеров, что и \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно найти внешнюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

(5.24)

Ясно, что вышеприведённые постановки задач имеет содержательный смысл лишь в случае $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и выяснение условий этой непустоты является отдельным важным вопросом.

5.3 Топологические свойства множеств решений

Напомним, что множество в топологическом пространстве называется *связным*, если оно не может быть представлено в виде объединения одновременно открытых и замкнутых подмножеств. В противном случае множество называется *несвязным*, а отдельные открыто-замкнутые

подмножества, на которые оно распадается, именуют *компонентами связности*.

Множество в метрическом пространстве называется ограниченным, если оно целиком содержится в шаре некоторого радиуса.

Множества AE -решений замкнуты.

Теорема 5.3.1 Если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособенная интервальная матрица, то для любого вектора правой части $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ объединённое множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ связно и компактно.

Доказательство. Функция из $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^n , сопоставляющая каждой $n \times n$ -матрице A и n -вектору b решение $A^{-1}b$ системы линейных уравнений $Ax = b$, определена и является непрерывной на связном компакте $\mathbf{A} \times \mathbf{b} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$ в силу того, что неособенны все $A \in \mathbf{A}$. Следовательно, множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ также связно и компактно. ■

Теорема 5.3.2 Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Для непустого объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $Ax = b$ верно одно и только одно из следующих двух утверждений:

- (i) $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ограничено,
- (ii) каждая компонента связности множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ неограничена.

Доказательство. Если множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ограничено, то, очевидно, (ii) не выполняется.

Предположим, что $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ неограничено, но существует непустая ограниченная компонента связности $\tilde{\Xi}$ этого множества. Тогда найдётся матрица $A' \in \mathbf{A}$ и векторы $b \in \mathbf{b}$, $x' \in \tilde{\Xi}$, такие что $A'x' = b$. При этом матрица A' обязана быть неособенной, так как в противном случае множество решений системы $A'x = b$ было бы неограниченным, а вместе с ним было бы неограниченным и $\tilde{\Xi}$.

Так как всё множество решений в целом неограничено, то в силу предыдущей Теоремы интервальная матрица \mathbf{A} является особенной. Обозначим, для определённости, через A'' ту вещественную матрицу из \mathbf{A} , которая является особенной. Поскольку множество \mathbf{A} выпукло, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ матрица

$$A(\lambda) := \lambda A' + (1 - \lambda)A''$$

находится в \mathbf{A} , и $A(0) = A'$, $A(1) = A''$. Обозначим

$$\tilde{\lambda} := \inf \{ \lambda \in [0, 1] \mid A(\lambda) \text{ особенная} \}.$$

Так как $A(0) = A'$ — неособенная, то все её достаточно малые возмущения также неособенны. Следовательно, $\tilde{\lambda} > 0$, а матрица $A(\tilde{\lambda})$ обязана быть особенной.

Пусть $x(\lambda)$ — единственное решение системы

$$A(\lambda)x(\lambda) = b$$

для $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$. Так как оно выражается в виде $x(\lambda) = A^{-1}(\lambda) \cdot b$, то вектор $x(\lambda)$ непрерывно зависит от $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$, а множество всех $x(\lambda)$, $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$ является непрерывным путём. Итак, все $x(\lambda)$ для $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$ содержатся в одной компоненте связности $\tilde{\Xi}$ объединённого множества решений.

Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность, сходящаяся к $\tilde{\lambda}$ снизу:

$$\lambda_k \rightarrow \tilde{\lambda}, \quad \lambda_k \leq \tilde{\lambda}.$$

Из соответствующей последовательности решений $x(\lambda_k)$ можно выделить подпоследовательность $\{\lambda_{k_l}\}$, которая сходится к некоторому пределу $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$, коль скоро множество $\tilde{\Xi}$ замкнуто и предполагается ограниченным. Но тогда

$$A(\tilde{\lambda})\tilde{x} = \lim_{\lambda_k \rightarrow \tilde{\lambda}} A(\lambda_k) \cdot \lim_{\lambda_{k_l} \rightarrow \tilde{\lambda}} x(\lambda_{k_l}) = \lim_{\lambda_{k_l} \rightarrow \tilde{\lambda}} \left(A(\lambda_{k_l})x(\lambda_{k_l}) \right) = b.$$

Получается, что система уравнений $A(\tilde{\lambda})x = b$ имеет решение $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$.

Но матрица $A(\tilde{\lambda})$ — особенная, так что множество решений системы $A(\tilde{\lambda})x = b$ неограничено. Кроме того, оно связано непрерывным путём с множеством $\tilde{\Xi}$. Поэтому компонента связности $\tilde{\Xi}$ объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не может быть ограниченной, что противоречит нашему исходному допущению. \blacksquare

Теорема 5.3.3 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ объединённое множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто. Если какая-либо его компонента связности $\tilde{\Xi}$ ограничена, то

- (i) $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ компактно,
- (ii) матрица \mathbf{A} неособенная,
- (iii) $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ связно и $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \tilde{\Xi}$.

Доказательство. (i) следует из Теоремы 5.3.2.

Для доказательства (ii) заметим, что

Наоборот, если \mathbf{A} является особенной, то

■

Верно ли вышедоказанное утверждение для произвольных множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений? Оказывается, нет. Даже если матрица ИСЛАУ неособенна, некоторые из множеств АЕ-решений этой системы могут оказаться несвязными. Контрпримером может служить система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-1, 1] & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

и её множество $(\exists \exists)(\exists)(\forall)$ -решений, изображённое на Рис. 5.5.

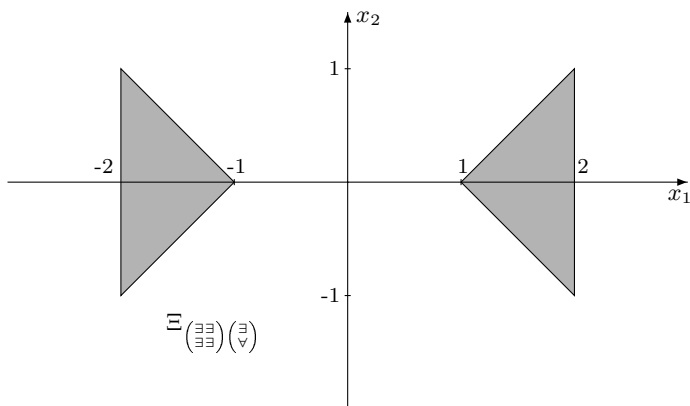


Рис. 5.5. Несвязное множество решений интервальной линейной системы (5.25)

Аналогичный пример, но с другим распределением типов неопределённостей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-2, 2] & [-3, -1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

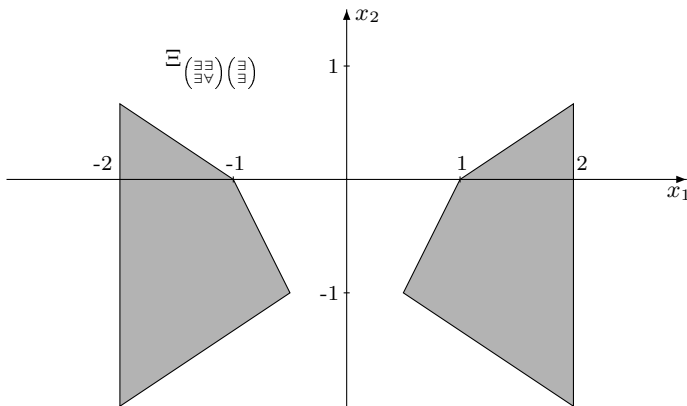


Рис. 5.6. Несвязное множество решений интервальной линейной системы (5.26)

5.4 Распознавание множеств решений

Как уже отмечалось, задачи распознавания того, пусто или непусто множество решений интервальной линейной системы $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, а также нахождения хотя бы одной точки из $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в общем случае являются NP-трудными. Универсальный метод решения этих задач может быть основан на том факте, что пересечения множеств решений ИСЛАУ с каждым из ортантов пространства \mathbb{R}^n являются выпуклыми многогранными множествами, для которых уравнения граничных гиперплоскостей легко выписываются по матрице и правой части ИСЛАУ (см. §5.26). Следовательно, пустота или непустота пересечения $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов \mathbb{R}^n может быть выявлена путём решения некоторой системы линейных неравенств, например, хорошо разработанными методами линейного программирования. В целом же распознавание множества решений ИСЛАУ и нахождение его точки потребуют не более чем 2^n решений систем линейных неравенств, причём этот результат не может быть принципиально улучшен.

Таким образом, в самой общей ситуации отыскание и корректировка точки из множества решений ИСЛАУ является весьма непростым делом, и поэтому ниже имеет смысл дать набор частных рецептов для решения проблемы в тех или иных конкретных ситуациях.

Рассмотрим, прежде всего случай квадратной $n \times n$ -матрицы \mathbf{A} . Если она неособенная (т.е. неособенны все $A \in \mathbf{A}$), то точку t из $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ можно получить, решив какую-нибудь точечную систему уравнений $At = b$ с A из \mathbf{A} и b из \mathbf{b} , скажем, “среднюю” систему

$$(\text{mid } \mathbf{A})t = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Проверка неособенности интервальной матрицы \mathbf{A} может быть выполнена, например, методами, описанными в §2.4.

Предположим теперь, что интервальная матрица \mathbf{A} — особенная, т.е. содержит особенные точечные матрицы. Хорошо известно, что во множестве всех вещественных $n \times n$ -матриц особенные матрицы образует гладкое многообразие коразмерности 1, являясь весьма “тощим” множеством с лебеговой мерой нуль в $\mathbb{R}^{n \times n}$. Следовательно, если все элементы данной интервальной матрицы \mathbf{A} имеют ненулевые ширины, то путём подходящего варьирования элементов точечной $n \times n$ -матрицы в пределах \mathbf{A} мы всегда можем надеяться попасть на какую-нибудь неособенную матрицу A . И вновь для отыскания точки t достаточно решить систему $At = b$ с каким-то $b \in \mathbf{b}$.

Что делать в случае прямоугольной системы уравнений? Иногда здесь оказывается полезной техника так называемых *распознающих функционалов*, разработанная автором в [13, 44]. Напомним некоторые факты и понятия.

Теорема 5.4.1 Пусть \mathbf{A} — интервальная $m \times n$ -матрица, \mathbf{b} — интервальный m -вектор, и выражением

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\}$$

задается функционал $\text{Uni} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Принадлежность точки x множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Uni ,

$$x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

т.е. множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ есть лебегово множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$ функционала Uni .

Если из контекста понятно, о какой интервальной системе идет речь, то мы будем писать просто $\text{Uni}(x)$ вместо $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Доказательство. Точка x принадлежит множеству решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда существует матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbf{A}$, такая что

$$\tilde{A}x \in \mathbf{b}.$$

После детального расписывания матрично-векторного произведения и представления интервалов правой части в центральной форме эта принадлежность примет вид

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \in \text{mid } \mathbf{b}_i + [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Добавив теперь по $(-\text{mid } \mathbf{b}_i)$ к обеим частям полученных включений, придём к эквивалентным соотношениям

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \in [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

которые, в свою очередь, равносильны

$$\left| \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i,$$

и поэтому

$$\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \right| \geq 0 \quad (5.27)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Итак, $x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ если и только если для каждого фиксированного i существуют такие $\tilde{a}_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$, что оказываются справедливыми неравенства (11.42). Но это эквивалентно выполнению для $i = 1, 2, \dots, m$ условий

$$\max_{\substack{\tilde{a}_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}, \\ j=1,2,\dots,n}} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0. \quad (5.28)$$

Внося максимум внутрь скобки, и учитывая, что естественное интервальное расширение выражения под знаком модуля совпадает с его

областью значений, вместо (5.28) получим для $i = 1, 2, \dots, m$

$$\left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\} \geq 0. \quad (5.29)$$

Далее посредством взятия минимума мы можем свернуть m штук условий (5.29) в одно, заключая, что точка x принадлежит множеству решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ действительно в том и лишь в том случае, если

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0,$$

как и требовалось. ■

Получается, что посредством знака своих значений функционал Uni “распознаёт” принадлежность точки множеству $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Именно поэтому мы используем по отношению к нему эпитет “распознающий”. Справедливы, кроме того, следующие свойства [13]:

- 1) Функционал Uni — вогнутый в каждом ортанте \mathbb{R}^n , а если в интервальной матрице \mathbf{A} некоторые столбцы — целиком вещественные, то $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ вогнут и на объединениях нескольких ортантов.
- 2) Функционал $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ достигает конечного максимума на всём пространстве \mathbb{R}^n .
- 3) Если $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$, то x — точка топологической внутренней $\text{int } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ множества решений.
- 4) При некоторых дополнительных ограничениях на \mathbf{A} , \mathbf{b} и x верно и обратное: из принадлежности $x \in \text{int } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ следует $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$.

Последние два свойства распознающего функционала позволяют использовать его для исследования принадлежности точек внутренней множества решений. Это имеет особую важность потому, что телесная внутренняя оценка множества решений по нашей методике может быть построена только вокруг точки-центра t , который лежит во внутренней $\text{int } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ множества решений!

Как следствие вышеизложенных результатов, получается следующий практический рецепт коррекции точки-центра t в “центровом” подходе к решению задачи (4.21): находим какое-нибудь начальное приближение, а затем, пользуясь градиентным подъёмом, пытаемся достичь бóльшего значения распознающего функционала Uni . Если полученное новое значение строго больше нуля, то мы оказались во внутренности множества решений.

5.5 Управляемое множество решений интервальных уравнений

Этот параграф посвящён управляемому множеству решений интервальных линейных систем, т.е. множеству

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \}, \quad (5.30)$$

которое в силу теоремы 5.2.2 эквивалентным образом определяется как

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x \supseteq \mathbf{b} \}.$$

Это множество образовано всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что для любого желаемого $b \in \mathbf{b}$ мы можем подобрать матрицу $A \in \mathbf{A}$, удовлетворяющую $Ax = b$. Заметим, что

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

и если \mathbf{A} — неособенная интервальная матрица, то $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ограничено одновременно с $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (а также связно).

Содержательную интерпретацию множества решений (5.30) нетрудно дать, исходя из сведений по системному анализу, которые мы привлекли в §4.1. Именно, множество (5.30) является множеством решений задачи нахождения внутренних состояний (4.2) для случая, когда все входы системы — управляющие, а все выходы — управляемые, что и оправдывает выбор названия для (4.19) и (5.30) — *управляемое множество решений*.

Для общих нелинейных систем управляемое множество решений вместе с его интерпретацией впервые было выделено автором в [42, 46]. Но для простейшего случая интервальных линейных систем управляемое множество решений рассматривалось в неявной форме еще в работе Н. А. Хлебалина и Ю. И. Шокина [12]. В первые явное определение

(5.30) было выписано А. В. Лакеевым и С. И. Носковым [7, 8], которые не дали новому множеству решений никакого имени, но исследовали некоторые его свойства. В частности, они обнаружили, что

$$\begin{aligned} & \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \\ & \quad \& (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b} \}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Основным результатом работ [7, 8], касающимся управляемого множества решений (4.19), является следующее

Предложение 5.5.1 [7, 8]

$$\begin{aligned} \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x' - x'' \mid x', x'' \in \mathbb{R}^n, x', x'' \geq 0, \\ \langle x', x'' \rangle = 0, \underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' \leq \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \geq \overline{\mathbf{b}} \}, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^n (т.е. сумма произведений компонент векторов).

Чтобы сделать наши рассуждения более живыми и наглядными обратимся к Рис. 5.7, на котором изображено управляемое множество решений интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [-2, 1] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [-1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 1] \\ [-1, 2] \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Ξ_{ctrl} представляет из себя целую плоскость \mathbb{R}^2 с вырезанной звездообразной областью вокруг начала координат.

Конфигурация этой картинки является в некотором смысле типичной, поскольку нулевой вектор может принадлежать $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ лишь в том случае, если $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{A} \cdot 0 = 0$, т.е. $\mathbf{b} = 0$. Именно по этой причине управляемое множество решений для ИСЛАУ (5.32) избегает начала координат на Рис. 5.7. Кроме того, следствием Предложения 5.5.1 является тот факт, что пересечение $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов \mathbb{R}^n — это многогранное множество (пересечение конечного числа полупространств). В частности, управляемое множество решений интервальных линейных систем уравнений всегда замкнуто.

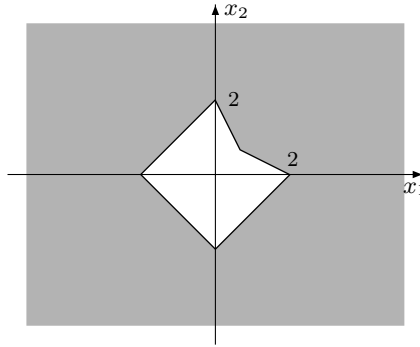


Рис. 5.7. Управляемое множество решений интервальной системы (5.32).

Как и допустимое множество решений, управляемое множество решений может оказаться пустым даже для “хороших” интервальных данных, как это, например, имеет место, для одномерного случая с $\mathbf{A} = [2, 3]$, $\mathbf{b} = [1, 2]$. Рассматривавшаяся нами интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

из работы Барта и Нудинга [22] дает более сложный пример ИСЛАУ с пустым управляемым множеством решений.

Основным математическим результатом этого параграфа является простой достаточный критерий непустоты управляемого множества решений интервальной линейной алгебраической системы уравнений, а также критерии пустоты пересечения управляемого множества решений с некоторыми ортантами. Результаты такого сорта особенно важны с учётом теоретического результата А.В. Лакеева и С.И. Носкова [7, 8] о том, что задача распознавания того, пусто или непусто $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в общем случае является NP-полной (труднорешаемой). Но прежде чем продолжить исследование, нам необходимо напомнить некоторые вспомогательные факты и понятия из интервального анализа.

Начнем с того, что если i -ая строка \mathbf{A} содержит только нулевые элементы, то необходимым условием непустоты управляемого множества решений является $\mathbf{b}_i = 0$. В этом случае свойство множества $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ быть пустым или непустым зависит уже только от других, не i -ых строк \mathbf{A} и компонент \mathbf{b} . Таким образом, без ущерба для общно-

сти мы можем впредь считать, что матрица \mathbf{A} не имеет нулевых строк.

В наших построения центральную роль будет играть функционал χ — “относительная узость” ненулевого интервала, — введенный Х. Рачеком в [38]. Помимо его свойств, уже рассмотренных нами в §1.2, нам понадобятся ещё два.

Во-первых, имеет место следующее очевидное свойство:

$$\text{если } \mathbf{p} \supseteq \mathbf{q} \text{ и } \chi(\mathbf{q}) \geq 0, \text{ то } \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q}).$$

Кроме того, потребуется и обратное, в некотором смысле, утверждение:

Предложение 5.5.2 *Если $\text{mid } \mathbf{p} = \text{mid } \mathbf{q}$ и $-1 < \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$, то $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{q}$.*

Доказательство. Обозначим $\mu = \text{mid } \mathbf{p} = \text{mid } \mathbf{q}$. Если $-1 < \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$, то $\mu \neq 0$, т.е. $\mu < 0$ или $\mu > 0$. Без ограничения общности мы можем допустить вторую возможность, так как случай отрицательного μ рассматривается совершенно сходным образом. В этих условиях $|\underline{\mathbf{p}}| < |\underline{\mathbf{p}}|$ и $|\underline{\mathbf{q}}| < |\underline{\mathbf{q}}|$, так что $\chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$ влечёт

$$\underline{\mathbf{p}} / \overline{\mathbf{p}} \leq \underline{\mathbf{q}} / \overline{\mathbf{q}},$$

или

$$\frac{\mu - \text{rad } \mathbf{p}}{\mu + \text{rad } \mathbf{p}} \leq \frac{\mu - \text{rad } \mathbf{q}}{\mu + \text{rad } \mathbf{q}}.$$

После несложных преобразований мы получаем

$$\mu \cdot \text{rad } \mathbf{p} \geq \mu \cdot \text{rad } \mathbf{q},$$

что эквивалентно (с учётом $\mu > 0$) неравенству $\text{rad } \mathbf{p} \geq \text{rad } \mathbf{q}$, т.е. $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{q}$. ■

Теперь мы готовы сформулировать и доказать наш основной результат:

Теорема 5.5.1 *Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнены условия*

$$(i) \quad \mathbf{b}_i \neq 0,$$

$$(ii) \quad -1 < \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} \leq \chi(\mathbf{b}_i).$$

Если “средняя система” линейных уравнений $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$ совместна, то её решение принадлежит управляемому множеству решений $\Xi_{\text{ctrl}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ (которое, соответственно, непусто).

Доказательство. Если \tilde{x} есть решение “средней” точечной системы, то

$$\text{mid } (\mathbf{A}\tilde{x}) = (\text{mid } \mathbf{A}) \cdot \tilde{x} = \text{mid } \mathbf{b}$$

(см. 2.1.5). Далее, так как $-1 < \chi(\mathbf{b}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, мы получаем $\text{mid } (\mathbf{A}\tilde{x})_i \neq 0$. Следовательно, для всякого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ законны следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \chi((\mathbf{A}\tilde{x})_i) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j\right) \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j \neq 0\} \quad \text{в силу (1.31)} \\ &= \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j \neq 0\} \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства $-1 < \chi((\mathbf{A}\tilde{x})_i) \leq \chi(\mathbf{b}_i)$ справедливы для $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, и в силу Предложения 2.4.2

$$(\mathbf{A}\tilde{x})_i \supseteq \mathbf{b}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

что и доказывает Теорему 5.5.1. ■

Например, оба условия Теоремы 5.5.1 удовлетворяются для рассмотренной выше интервальной системы (5.32). Решением её “средней системы” служит вектор $(1, 1)^\top$, который, как можно видеть (из Рис. 5.7, в частности), действительно лежит в управляемом множестве решений для (5.32). И всё таки доказанная Теорема является лишь грубым достаточным признаком. К примеру, условие (ii) Теоремы 5.5.1 не выполнено для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 2] \\ [-2, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 5] \\ [1, 5] \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

в то время как соответствующая “средняя система” совместна и её решение $(1, 1)^\top$ принадлежит непустому управляемому множеству решений для (5.33).

На основании утверждения Теоремы 5.5.1 может создаться впечатление, что решение “средней системы” является наиболее вероятным представителем управляемого множества решений интервальных линейных систем. Но следующий контрпример показывает, что и это не так в общем случае. Для системы

$$\begin{pmatrix} 4 & [1, 3] \\ [0, 2] & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [5, 7] \\ 4 \end{pmatrix},$$

мы имеем $\Xi_{ctrl} = \{(1, 1)^\top\}$, но решение “средней системы” есть $(\frac{8}{7}, \frac{5}{7})^\top$.

Несмотря на кажущуюся тяжеловесность Теоремы 5.5.1, реализация сформулированного в ней критерия требует всего $O(mn)$ арифметических и логических операций, а вопрос совместности “средней системы” решается просто в случае неособенной квадратной интервальной матрицы \mathbf{A} . В настоящее время имеются развитые численные алгоритмы проверки неособенности интервальной матрицы (см. §2.4), но следует отметить, что в самой общей постановке задача проверки того, особенна или неособенна интервальная матрица является всё-таки NP-трудной. Суммируя сказанное, можно утверждать, что выведенный нами критерий является вполне практичным, хотя и недостаточно чувствительным. Он предназначен для предварительного грубого исследования управляемого множества решений ИСЛАУ.

При решении практических задач помимо решения как такового часто требуются некоторые характеристики его устойчивости, показывающие границы области разрешимости, либо устойчивость совместности. В данной ситуации для таких целей вполне может подойти величина

$$\mathfrak{M} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0,$$

будучи грубой количественной мерой “показателя совместности” в случае $\mathfrak{M} > 0$.

Почувительно сопоставить Теорему 5.5.1 с Теоремой 6.3.1 из сле-

допусках): Нетрудно видеть, что утверждение Теоремы 6.3.1 находится в красивой двойственности к Теореме 5.5.1, а множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ являются в некотором смысле антагонистами друг к другу.

Наш следующий результат не столь эффектен, но он также может оказаться полезным в ряде случаев. Прежде чем формулировать его, отметим, что каждый ортант \mathbb{R}^n полностью задаётся указанием знаков компонент его внутренних точек, и по этой причине мы далее будем говорить об ортантах

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n), \quad (5.34)$$

где $\epsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Если $\epsilon_l = 0$, то условимся считать, что символ (5.34) обозначает любой из ортантов $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l-1}, -1, \epsilon_{l+1}, \dots, \epsilon_n)$ или $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l-1}, 1, \epsilon_{l+1}, \dots, \epsilon_n)$.

Теорема 5.5.2 Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что

$$\min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} > \chi(\mathbf{b}_k) \geq 0$$

для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда управляемое множество решений $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ имеет пустое пересечение с ортантами $(\sigma(\mathbf{a}_{k1}), \sigma(\mathbf{a}_{k2}), \dots, \sigma(\mathbf{a}_{kn}))$ и $(-\sigma(\mathbf{a}_{k1}), -\sigma(\mathbf{a}_{k2}), \dots, -\sigma(\mathbf{a}_{kn}))$.

Доказательство этой Теоремы будет проведено от противного.

Предположим, что условие Теоремы выполнено для некоторого индекса k , но существует точка $t \in \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ из ортанта $(\sigma(\mathbf{a}_{k1}), \sigma(\mathbf{a}_{k2}), \dots, \sigma(\mathbf{a}_{kn}))$. Тогда $\mathbf{A}t \geq \mathbf{b}$, и, в частности,

$$(\mathbf{A}t)_k \geq \mathbf{b}_k,$$

что эквивалентно

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) \leq \chi(\mathbf{b}_k), \quad (5.35)$$

поскольку $\chi(\mathbf{b}_k) \geq 0$.

С другой стороны, все интервалы $\mathbf{a}_{kj}t_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, по самому

их построению одинаково расположены относительно нуля, так что

$$\begin{aligned}
 \chi((\mathbf{A}t)_k) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj}t_j\right) \\
 &\geq \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}t_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} \quad \text{в силу (1.32)} \\
 &= \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} \\
 &\geq \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, из условия Теоремы следует, что

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) > \chi(\mathbf{b}_k)$$

в противоречие с (5.35). Этим завершается доказательство для органта $(\sigma(\mathbf{a}_{k1}), \sigma(\mathbf{a}_{k2}), \dots, \sigma(\mathbf{a}_{kn}))$. Нетрудно видеть, что наши рассуждения в равной степени подходят также и для органта $(-\sigma(\mathbf{a}_{k1}), -\sigma(\mathbf{a}_{k2}), \dots, -\sigma(\mathbf{a}_{kn}))$. ■

В качестве следствия получаем

Предложение 5.5.3 Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} имеют только неотрицательные элементы и

$$\min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} > \chi(\mathbf{b}_k)$$

для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда управляемое множество решений $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не может содержать неотрицательных векторов.

В заключение приведём ещё один интересный способ исследования управляемого множества решений ИСЛАУ. Как мы уже упоминали в начале параграфа,

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}\}, \quad (5.31)$$

т.е. пересечением управляемого и допустимого множеств решений является множество всех точечных формальных решений для (5.5). Но оно находится очень просто. Действительно, беря середины от обеих частей исходного интервального уравнения (5.5), получим

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Итак, для нахождения пересечения (5.31) нам нужно лишь решить “среднюю” линейную систему и проверить её решения на равенство $A \cdot x = b$.

Наконец, задача распознавания того, пусто или не пусто множество $\Xi_{tol}(A, b)$ является совсем нетрудной. Она может быть эффективно решена за полиномиальное время (см. Главу 6). Тогда, если, к примеру, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\} = \emptyset$, в то время как $\Xi_{tol}(A, b) \neq \emptyset$, то мы можем заключить, что $\Xi_{ctrl}(A, b) = \emptyset$.

5.6 Интервальные уравнения со связанными параметрами

До сих пор мы предполагали, что интервальные параметры, фигурирующие в уравнениях и системах уравнений, являются независимыми интервальными величинами в смысле Определения 1.1.1. Ситуация меняется решающим образом, если интервальные параметры уравнений оказываются связанными (зависимыми). Это, вообще говоря, усложняет постановки задач, так как теперь на наши результаты существенно влияет конкретный вид связей, наложенных на интервальные параметры.

В настоящем параграфе мы рассмотрим интервальные системы линейных алгебраических уравнений с простейшими видами связей между интервальными параметрами — симметричными, кососимметричными,

Интервальной симметричной линейной системой будем называть интервальную систему линейных алгебраических уравнений (5.4)–(5.5) с матрицей A , симметричной относительно главной диагонали, и такой, что в её пределах также рассматриваются только вещественные матрицы $A \in \mathbf{A}$, обладающие свойством симметричности, $A = A^\top$. Для интервальных систем уравнений существуют, как мы могли видеть в Главе 4, различные определения решений и множеств решений, для которых, в свою очередь, возможны те или иные способы оценивания. Эта общая философия применима и к системам со связанными параметрами, для которых также имеет смысл рассматривать обобщённые множества решений, см., к примеру, работу Р.С. Ивлева [5].

Но ниже мы ограничимся простейшим *объединённым множеством решений* для (5.4)–(5.5), которое образовано всевозможными решениями x точечных систем $Ax = b$, когда матрица A и вектор b пробегают

\mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно, подчиняясь наложенным на них связям. Объединённое множество решений интервальной симметричной линейной системы определяется строго как

$$\Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(A = A^\top \text{ и } Ax = b) \}.$$

Изучение интервальных линейных систем со связями и первые попытки решения для них задачи внешнего оценивания (4.22) восходят к началу 90-х годов прошлого века [21, 26]. Предложенный Г. Алефельдом и Г. Майером в [21] интервальный метод Холесского является естественным интервальным расширением вещественного метода Холесского для решения симметричных линейных систем уравнений (известного также как “метод квадратного корня”). Но численные эксперименты демонстрируют невысокое качество получаемых с его помощью внешних оценок множества Ξ_{sym} . Далее Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер в большом цикле работ [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] обратились к теоретическому исследованию ИСЛАУ с симметричными, кососимметричными, тёплицевыми и даже более общими видами связей, дав характеристику соответствующих множеств решений. Они установили, в частности, что границы множеств решений интервальных симметричных и кососимметричных линейных систем в общем случае составлены из кусков гиперплоскостей и поверхностей второго порядка (в отличие от кусочно-плоских границ множеств решений ИСЛАУ с независимыми данными). Более точно, справедлива

Теорема 5.6.1 Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда в каждом ортанте пространства \mathbb{R}^n множество решений $\Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть представлено как пересечение объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ системы без связей и некоторых множеств, имеющих границами поверхности второго порядка.

То же самое верно для множеств решений интервальных кососимметричных и персимметричных линейных систем [16].

В более общем случае, когда на элементы матрицы и правой части ИСЛАУ наложены аффинные связи, имеющие вид

$$a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^p a_{ijk} f_k$$

и

$$b_i = b_i^{(0)} + \sum_{k=1}^p b_{ik} f_k,$$

где $a_{ij}^{(0)}$, $b_i^{(0)}$, a_{ijk} , b_{ik} — вещественные константы, а $f_k \in \mathbf{f}_k$ — некоторые независимые интервальные величины, Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер доказали в статье [17, 18], что объединённое множество решений является так называемым *полуалгебраическим множеством*. Для аккуратной формулировки соответствующих результатов напомним

Определение 5.6.1 [2] *Множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ называется полуалгебраическим, если оно является конечным объединением подмножеств, каждое из которых определяется конечной системой полиномиальных уравнений $P_r(x_1, \dots, x_q) = 0$ и неравенств вида $P_s(x_1, \dots, x_q) > 0$ или $P_t(x_1, \dots, x_q) \geq 0$ с некоторыми полиномами P_i .*

Имеет место

Теорема 5.6.2 [17, 18] *Любая проекция объединённого множества решений интервальной линейной системы уравнений с аффинными связями является полуалгебраическим множеством.*

Всякое полуалгебраическое множество в \mathbb{R}^n может быть представлено как проекция множества решений некоторой интервальной линейной системы с аффинными связями на параметры.

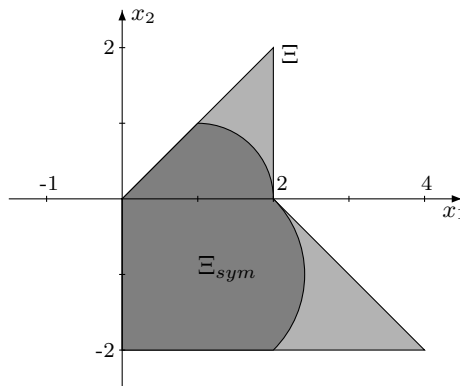


Рис. 5.8. Множество решений интервальной симметричной линейной системы уравнений (5.36) в сравнении с множеством решений такой же системы без связей.

Для точной характеристики множеств решений ИСЛАУ со связями специального вида Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер разработали в [14, 33] метод исключения, родственный процессу исключения Фурье-Мощкина для систем линейных неравенств. К сожалению, его трудоёмкость быстро растёт с размерностью задачи. Например, для интервальной симметричной линейной систем, имеющей трёхдиагональную $n \times n$ -матрицу, количество неравенств, получающихся в результате этого процесса для описания пересечения $\Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с отдельным ортантом ограничено сверху числом

$$\frac{1}{3} n(n^2 + 5),$$

причём эта оценка точна [15]. Для интервальных линейных систем со связями, имеющих плотно заполненную матрицу, ситуация ещё хуже: для 3×3 -системы, например, результирующая система неравенств, описывающая пересечение Ξ_{sym} с одним ортантом пространства \mathbb{R}^n имеет аж 44 неравенства [19]. Таким образом, в силу огромной трудоёмкости метода исключения Алефельда-Крейновича-Майера он имеет, главным образом, теоретическое значение, а задача практического вычисления оценок множеств решений ИСЛАУ с симметричными, кососимметричными и т.п. матрицами со связанными элементами стоит весьма остро.

Согласно теореме Бека-Никеля экстремальные оценки множеств решений ИСЛАУ без связей достигаются на крайних матрицах и правых частях. Но для систем со связанными параметрами этот факт уже неверен. Например, для интервальной симметричной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, 1] \\ [0, 1] & [-4, -1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер показали в [19], что её множества решений имеют вид, изображенный на Рис. 5.8, и, кроме того,

$$\max\{x_1 \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = 1 + \sqrt{2},$$

причём этот максимум достигается на вещественной системе

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

матрица которой не является крайней (при этом $x_2 = -1$).

5.7 Предварительное оценивание множеств решений

Этот параграф будет посвящен обзору методик, которые позволяют быстро находить какие-то, возможно весьма грубые, внешние оценки множеств решений интервальных линейных систем. Во-первых, они имеют самостоятельную ценность, давая иногда пользователю достаточно содержательную информацию о решении стоящей перед ним задачи. И, во-вторых, необходимость в подобных алгоритмах вызвана тем обстоятельством, что многие интервальные методы для внешнего оценивания множеств решений являются, в действительности, уточняющими процедурами, для успешного начала работы которых нужно знать хоть какое-нибудь начальное внешнее приближение.

Мы разберем три методики предварительного внешнего оценивания объединённых множеств решений ИСЛАУ. Первая и простейшая — это модификация на интервальный случай хорошо известных рассуждений, показывающих роль числа обусловленности. Эта методика весьма груба, но применима к интервальным линейным системам, относительно которых требуется лишь неособенность матрицы. Две других методики, принадлежащие соответственно Беку и Ноймайеру, более точны, но зато требуют, чтобы интервальная матрица системы была неособенной.

Вспомним характеризацию Оеттли-Прагера (5.20) для объединённого множества решений интервальных линейных систем:

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff |(\text{mid } \mathbf{A})x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}$$

Пусть $x = \hat{x} + \delta x$

Умножая обе части этого неравенства на неотрицательную матрицу $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|$, получим

$$|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| |(\text{mid } \mathbf{A}) \delta x| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} |\hat{x} + \delta x| + \text{rad } \mathbf{b}),$$

откуда

$$|\delta x| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \text{rad } \mathbf{A} |\delta x| |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} \hat{x} + \text{rad } \mathbf{b}),$$

то есть

$$(I - |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \text{rad } \mathbf{A}) |\delta x| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} \hat{x} + \text{rad } \mathbf{b}).$$

При наложенном нами на матрицу \mathbf{A} требовании сильной неособенности матрица $(I - |\text{mid } \mathbf{A}|^{-1} |\text{rad } \mathbf{A}|)$ также неособенна, а обратная к ней матрица неотрицательна. Таким образом, мы доказали следующее

Предложение 5.7.1 [24] *Если в интервальной линейной системе уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} сильно неособенная, то объединённое множество решений этой системы заключено в интервальном векторе $[\hat{\mathbf{x}} - \Delta, \hat{\mathbf{x}} + \Delta]$, где $\hat{\mathbf{x}}$ — решение “средней системы”*

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \mathbf{x} = \text{mid } \mathbf{b}$$

и

$$\Delta = (I - |\text{mid } \mathbf{A}|^{-1} |\text{rad } \mathbf{A}|)^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| ((\text{rad } \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \text{rad } \mathbf{b}))$$

Предложение 5.7.2 [35]

Комментарий к Главе 5

К §5.26 Определение характеристической матрицы и характеристического вектора правой части ИСЛАУ впервые предложено автором в [47, 48, 49]. Верхний индекс “с” у матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} — это готическая первая буква слова “characteristic” — “характеристический”.

Во многих математических текстах (например, в книге Р. Рокафеллара [11] и других) многогранные множества называются “полиэдральными”, т.е. калькой с соответствующего английского термина “polyhedral”.

Множество решений интервальной системы (11.32) впервые было нарисовано А. Ноймайером в своей книге [24] (и даже воспроизведено на её суперобложке), но в другой проекции, нежели Рис. 5.3.

Литература к главе 5

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. — Москва: Мир, 1987.
- [2] АРНОЛЬД В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. — Ижевск-Москва: “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000.
- [3] ГОЛУВ ДЖ., ВАН ЛОУН Ч. *Матричные вычисления*. — Москва: Мир, 1999.

- [4] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. – Москва: Мир, 1982.
- [5] Ивлев Р.С. Асимптотическая устойчивость и положительная определённость интервальной матрицы со связями // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, №5. – С. 63–77.
- [6] Клини С.К. *Математическая логика*. – Москва: Мир, 1973.
- [7] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Доклады Академии Наук*. – 1993. – Т. 330, № 4. – С. 430–433.
- [8] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Сибирский Математический Журнал*. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074–1084.
- [9] НИКАЙДО Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. – Москва: Мир, 1972.
- [10] ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. – Москва: Наука, 1980.
- [11] РОКАФЕЛЛАР Р. *Выпуклый анализ*. – Москва: Мир, 1973.
- [12] ХЛЕБАЛИН Н.А., ШОКИН Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // *Доклады Академии Наук*. – 1991. – Т. 316, №4. – С. 846–850.
- [13] ШАРЫЙ С.П. О характеристике объединённого множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНТИ, №726-B91.
- [14] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. Symmetric linear systems with perturbed input data // *Numerical Methods and Error Bounds* / Alefeld G. and Herzberger J., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 16–22.
- [15] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. The shape of the symmetric solution set // *Applications of Interval Computations* / Kearfott R.B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 61–79.
- [16] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On the shape of the symmetric, persymmetric, and skew-symmetric solution set // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* – 1997. – Vol. 18. – P. 693–705.
- [17] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. The shape of the solution set for systems of interval linear equations with dependent coefficients // *Mathematische Nachrichten*. – 1998. – Bd. 192. – P. 23–36.
- [18] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G., HUTH M. A comment on the shape of the solution set for systems of interval linear equations with

- dependent coefficients // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 3. – P. 275–277.
- [19] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On symmetric solution sets // *Inclusion methods for nonlinear problems with applications in engineering, economics, and physics* / Herzberger J., ed. – Wien, New York: Springer, 2003. – P. 1–23. – (Computing Supplement; 16)
- [20] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On the solution sets of particular classes of linear interval systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2003. – Vol. 152, No. 1–2. – P. 1–15.
- [21] ALEFELD G., MAYER G. The Cholesky method for interval data // *Linear Algebra and its Applications*. – 1993. – Vol. 194. – P. 161–182.
- [22] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [23] BEECK H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing*. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [24] BEECK H. Zur Problematik der Hüllenbestimmung von Intervallgleichungssystemen // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 150–159. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 29).
- [25] HARTFIEL D.J. Concerning the solution set of $Ax = b$ where $P \leq A \leq Q$ and $p \leq b \leq q$ // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 35, No. 3. – P. 355–359.
- [26] JANSSON CH. Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices, and dependencies in the right hand side // *Computing*. – 1991. – Vol. 46. – P. 265–274.
- [27] JANSSON CH. Rigorous optimal bounds for the optimal value of linear programming problems // *Global optimization and constraint satisfaction* (First International Workshop on Global Constrained Optimization and Constraint Satisfaction, COCOS 2002, Valbonne-Sophia Antipolis, France, October 2002, revised selected papers) / Blicq Ch., Jermann Ch., Neumaier A., eds. – Berlin: Springer, 2003. – P. 59–70. – (Lecture Notes in Computer Science; 2861)
- [28] JAULIN L., RATSCHAN S., HARDOUIN L. Set computation for nonlinear control // *Reliable Computing*. – 2004. – Vol. 10, No. 1. – P. 1–26.
- [29] JIRSTRAND M. Nonlinear control system design by quantifier elimination // *Journal of Symbolic Computation*. – 1997. – Vol. 24, No. 2. – P. 137–152.
- [30] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations*. – 1993. – No. 1. – P. 6–14.

- [31] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [32] LAKEYEV A.V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, №1. – С. 12–23.
- [33] MAYER G. A new way to describe the symmetric solution set S_{sym} of linear interval systems // *Topics in numerical analysis with special emphasis on nonlinear problems* / G.Alefeld, X.Chen, eds. – Wien: Springer, 2001. – P. 151–163. – (Computing Supplement; 15).
- [34] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 86/9. – S. 5–19.
- [35] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [36] OETTLI W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1965. – Vol. 2, No. 1. – P. 115–118.
- [37] OETTLI W., PRAGER W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // *Numerische Mathematik*. – 1964. – Vol. 6. – P. 405–409.
- [38] RATSCHKE H. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 1972. – Bd. 252. – S. 128–138.
- [39] ROHN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 157–158. – (Lecture Notes on Computer Science; vol. 212).
- [40] ROHN J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 39–78.
- [41] ROHN J. Personal communication. – Würzburg, 1996.
- [42] SHARY S.P. On controlled solution set of interval algebraic systems // *Interval Computations*. – 1992. – No. 4(6). – P. 66–75.
- [43] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.
- [44] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [45] SHARY S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3–33.

- [46] SHARY S.P. Controllable solution sets to interval static systems // *Applied Mathematics and Computation*. – 1997. – Vol. 86, No. 2-3. – P. 185–196.
- [47] SHARY S.P. Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // *MISC'99 — Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control, Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 51–65.
- [48] SHARY S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Developments in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 323–335.
- [49] SHARY S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 323–335.

Глава 6

Решение интервальной линейной задачи о допусках

В этой главе мы подробно останавливаемся на *линейной задаче о допусках*, требующей внутреннего оценивания допустимого множества решений интервальной линейной системы уравнений. На основе так называемого “центрового” подхода мы строим полную “технологическую цепочку” решения задачи о допусках, позволяющую для практически любых размерностей получать либо приемлемое по ширине решение задачи, либо обоснованное заключение о её неразрешимости.

После обсуждения тонкостей постановки в §6.1, мы выводим в §6.3 простой признак неразрешимости линейной задачи о допусках, предназначенный для её предварительного быстрого исследования. Далее в §6.4 развивается методика, которая не только позволяет исчерпывающим образом исследовать пустоту или непустоту допустимого множества решений, но и даёт рецепты по модификации интервальной линейной системы в соответствии с желаемыми свойствами (§6.5). Оставшаяся часть главы — §§6.6–6.8 — посвящена развитию нескольких численных методов различной точности и трудоёмкости для построения интервального решения линейной задачи о допусках вокруг заданного или ранее найденного центра. В целом развиваемый ниже подход позволяет эффективно и всесторонне исследовать поставленную линейную задачу о допусках, причём кроме числовых ответов он способен дать

ещё и качественную картину влияния на решение различных факторов. Другой, так называемый “формальный”, подход к решению линейной задачи о допусках будет подробно рассмотрен в Главе 11 нашей книги.

6.1 Обсуждение постановки задачи

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \quad (6.1)$$

с интервальной $m \times n$ -матрицей A и интервальным m -вектором b в правой части. Допустимым множеством решений системы (6.1) мы условились называть множество $\Xi_{tol}(A, b)$, образованное всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что произведение Ax попадает в b для любого $A \in A$, т.е.

$$\Xi_{tol}(A, b) := \Xi_{tol} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in A)(\exists b \in b)(Ax = b)\}. \quad (6.2)$$

Это определение иногда полезно переписать также в виде

$$\Xi_{tol}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in A)(Ax \in b)\},$$

или, пользуясь свойством $\{Ax \mid A \in A\} = Ax$, в виде *критерия принадлежности* вектора x допустимому множеству решений:

$$x \in \Xi_{tol}(A, b) \iff Ax \subseteq b. \quad (6.3)$$

Для уяснения содержательного смысла допустимого множества решений рассмотрим “чёрный ящик” (Рис. 6.1) с вектором входных воздействий $x \in \mathbb{R}^n$ и вектором выходных откликов $y \in \mathbb{R}^m$, причём зависимость вход-выход предположим линейной, $y = Ax$, с некоторой вещественной $m \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$. Пусть параметры “черного ящика” не являются заданными точно, но нам известны лишь интервалы их возможных значений a_{ij} , $a_{ij} \in a_{ij}$, из которых образована интервальная $m \times n$ -матрица $A = (a_{ij})$. Эти параметры, к примеру, могут изменяться непредсказуемым образом (дрейфовать) в пределах a_{ij} , либо интервальная неопределённость может быть следствием нашего незнания точной модели и т.п.

Предположим также, что для множества выходных состояний “черного ящика” задан интервальный вектор y , в который надо обеспечить

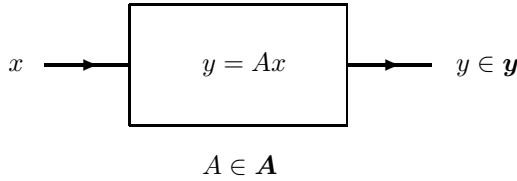


Рис. 6.1. Модель для интерпретации допустимого множества решений.

попадание y вне зависимости от конкретных значений a_{ij} из \mathbf{a}_{ij} . А именно, существуют ли такие входные сигналы \tilde{x} , что при любых возможных реализациях параметров системы a_{ij} из \mathbf{a}_{ij} на выходе всё равно получится отклик y в пределах требуемых допусков \mathbf{y} ? Допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$ является в точности множеством всех таких \tilde{x} .

Фактически, сказанное выше является уточнением той интерпретации различных множеств АЕ-решений, которая уже рассматривалась в Главе 4 на примере обратной задачи системного анализа. Допустимое множество решений (6.2) отвечает случаю, когда в “чёрном ящике” с линейной зависимостью вход-выход все входные воздействия — возмущающие, а все выходы являются стабилизируемыми (регулируемыми).

В качестве конкретных приложений допустимого множества решений ИСЛАУ упомянем задачи математической экономики (И. Рон [31, 32]), технологического проектирования (А.Ф. Бочков и Т.В. Евтушенко [1, 2]), автоматического управления (Н.А. Хлебалин [15, 16], А.В. Захаров и Ю.И. Шокин [7], И.В. Дугарова и Е.М. Смагина [6, 37, 38], Р.С. Ивлев [8]). В работах Р.С. Ивлева и С.П. Соколовой [9, 39] задача о допусках для более общих чем (6.1) интервальных линейных систем уравнений возникает в связи с оригинальным подходом к исследованию асимптотической устойчивости динамических систем, имеющих интервальную неопределённость в данных.

Предложение 6.1.1 *Допустимое множество решений интервальной линейной системы уравнений есть выпуклое многогранное множество в \mathbb{R}^n .*

Доказательство. Пусть точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ принадлежат непустому допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$. Покажем, что тогда этому множеству целиком принад-

лежит и отрезок, соединяющий x и y .

Коль скоро

$$Ax \subseteq b \quad \text{и} \quad Ay \subseteq b,$$

то, складывая эти включения с неотрицательными весами λ и $(1 - \lambda)$ при $\lambda \in [0, 1]$, получим

$$\lambda Ax + (1 - \lambda)Ay \subseteq \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Здесь в правой части включения мы воспользовались дистрибутивностью (1.16). Левая часть этого включения в силу субдистрибутивности (1.14) преобразуется в виде

$$\lambda Ax + (1 - \lambda)Ay = A(\lambda x) + A((1 - \lambda)y) \supseteq A(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Следовательно, в целом

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \subseteq b,$$

что и означает принадлежность точки $(\lambda x + (1 - \lambda)y)$, $\lambda \in [0, 1]$, лежащей на отрезке между x и y , допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(A, b)$.

Многогранность множества $\Xi_{tol}(A, b)$ следует из Теоремы 5.2.5. ■

Рис. 6.2 изображает, к примеру, допустимое множество решений (в сравнении с объединённым множеством решений) для системы

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Тем не менее, если размерность интервальной линейной системы уравнений велика, прямое описание её допустимого множества решений, при котором выписываются все ограничивающие гиперплоскости, становится трудоёмким и практически бесполезным: его сложность растёт пропорционально $m \cdot 2^n$. По этой причине имеет смысл ограничить себя нахождением некоторых просто устроенных *оценок* для допустимого множества решений, причём особенно интересны его подмножества, так как для каждого их элемента x остаётся выполненным характеристическое условие

$$(\forall A \in A)(Ax \in b),$$

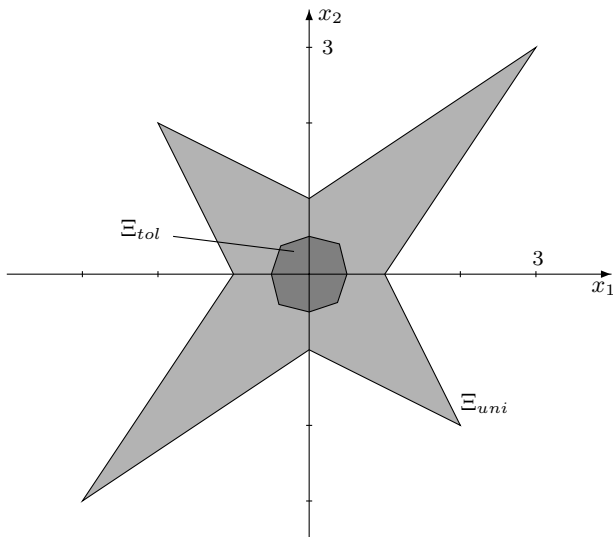


Рис. 6.2. Множества решений интервальной системы (6.4).

определяющее исходное множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Иными словами, мы заменяем $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ на его внутреннюю оценку, формулируя подлежащую решению задачу в следующем виде:

Найти (по-возможности, больший) брус, который содержится в допустимом множестве решений данной интервальной линейной системы уравнений.

(6.5)

За этой задачей закрепилось наименование *линейной задачи о допусках* (сокращённо ЛЗД), и именно она является предметом рассмотрения настоящей главы. Как мы видели, практическая значимость линейной задачи о допусках определяется тем, что она является, фактически, задачей стабилизации системы в заданном коридоре при наличии ограниченных неконтролируемых возмущений.

Специфической особенностью задачи о допусках является возможность для допустимого множества решений оказаться пустым даже для “хороших” интервальных данных, как, например, это имеет место у од-

номерного уравнения (6.1) с $\mathbf{A} = [1, 2]$, $\mathbf{b} = [2, 3]$. Двумерная система

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [1, 3] \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

даёт более сложный пример пустого допустимого множества решений. В подобных случаях будем говорить, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*, так как тогда исходная постановка задачи (6.5) теряет смысл. Соответственно, из общей постановки линейной задачи о допусках выделяется более узкая подзадача исследования её разрешимости. В этой главе мы уделим значительное внимание развитию методик для детального исследования разрешимости линейной задачи о допусках и вопросам её коррекции.

Опираясь на свойства интервальных матрично-векторных операций (см. Главу 2), можно определить допустимое множество решений интервальной линейной системы (6.1) следующим образом:

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x \subseteq \mathbf{b}\},$$

где “ \cdot ” — интервальное матричное произведение. Может даже показаться, что имеет место точное равенство

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \mathbf{b}.$$

Но это неверно, как показывает пример задачи о допусках с данными $\mathbf{A} = [-1, 1]$, $\mathbf{b} = [0, 1]$. Здесь лишь ноль может быть элементом $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, поскольку иначе умножение $y \neq 0$, $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, на $(-\text{sgn } y)$ из интервала $[-1, 1] = \mathbf{A}$ привело бы к отрицательному числу $-|y| \notin [0, 1]$. Следовательно,

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = 0 \neq [0, 1] = \mathbf{b}.$$

В свою очередь, если какое-то множество $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ удовлетворяет свойству

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \mathcal{C}\} = \mathbf{b}, \quad (6.7)$$

это не обязательно влечёт $\mathcal{C} = \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Для иллюстрации рассмотрим одномерный пример линейной задачи о допусках с $\mathbf{A} = \mathbf{b} = [-1, 1]$. Теперь $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 1]$, но для любого из интервалов $[\kappa, 1]$ или $[-1, \kappa]$, где $-1 \leq \kappa \leq 1$, равенство (6.7) также выполнено. Следовательно, свойство (6.7) не полностью характеризует допустимое множество

решений интервальных линейных систем. Нетрудно, тем не менее, сообразить, что $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ есть наибольшее по включению из множеств \mathcal{C} удовлетворяющих

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbf{b}.$$

В §5.2а мы могли видеть, что

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} = \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \end{aligned}$$

но Рис. 5.1 и 6.2 демонстрируют, что множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ могут значительно отличаться друг от друга размерами.

Хотя в настоящей книге мы всюду рассматриваем внутреннее приближение допустимого множества решений интервальными векторами, т.е. брусами со сторонами, параллельными координатным осям, следует хорошо осознавать как преимущества, так и возможные недостатки этого способа оценивания. Он, в частности, может оказаться весьма невыгодным в том смысле, что отношение объёма оценивающего бруса к объёму множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть сколь угодно малым (см. Рис. 4.7), что происходит для длинных вытянутых множеств решений ИСЛАУ. В этом случае имеет смысл рассмотреть оценивание допустимого множества решений не брусами, а какими-либо другими множествами, например, косыми параллелепипедами [21].

6.2 Строение допустимого множества решений

Как частный случай Теоремы 5.2.1 имеет место представление

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \Xi_{tol}(A, \mathbf{b}), \quad (6.8)$$

и, более того,

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \{A^{-1}b \mid b \in \mathbf{b}\}, \quad (6.9)$$

если \mathbf{A} — неособенная квадратная матрица, т.е. когда неособенны все $A \in \mathbf{A}$. Хотя определение допустимого множества решений требует, чтобы произведение Ax попадало в вектор правой части \mathbf{b} для *каждого* $A \in \mathbf{A}$, мы покажем, что достаточно выполнения включения $Ax \in \mathbf{b}$

лишь для матриц A из некоторого *конечного* подмножества в \mathbf{A} . Именно, имеет место

Предложение 6.2.1 $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall V \in \text{vert } \mathbf{A})(Vx \in \mathbf{b})\}$.

Доказательство сводится к проверке того, что

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall V \in \text{vert } \mathbf{A})(Vx \in \mathbf{b})\},$$

так как обратное включение очевидно.

Предположим, что некоторый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет

$$Vx \in \mathbf{b}$$

для всех $V \in \text{vert } \mathbf{A}$. Пусть A — какая-то матрица из \mathbf{A} . В соответствии с определением $\text{vert } \mathbf{A}$ существуют коэффициенты $\lambda_V \geq 0$ общим числом 2^{mn} , такие что

$$\sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V = 1 \quad \text{и} \quad A = \sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V V,$$

т.е. A представима в виде выпуклой комбинации крайних матриц из \mathbf{A} . Тогда

$$Ax = \left(\sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V V \right) \cdot x = \sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V Vx,$$

т.е. Ax является выпуклой комбинацией Vx , $V \in \text{vert } \mathbf{A}$. Но все $Vx \in \mathbf{b}$ в силу сделанного предположения, следовательно, их выпуклая комбинация также принадлежит выпуклому множеству \mathbf{b} . ■

Результат Предложения 6.2.1 влечёт, в частности

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \Xi_{tol}(V, \mathbf{b}), \quad (6.10)$$

а если \mathbf{A} — квадратная и все точечные матрицы $A \in \text{vert } \mathbf{A}$ неособенны (для всех $A \in \mathbf{A}$ неособенность не требуется), то

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \{V^{-1}\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{b}\},$$

т.е., мы существенно усилили представления (6.8) и (6.9).

Коль скоро уравнения гиперплоскостей, ограничивающих множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, легко могут быть выписаны в явном виде, то можно попытаться представить $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ как множество допустимых решений некоторой задачи линейного программирования. Явная форма соответствующей задачи линейного программирования впервые была представлена И. Роном в заметке [33]:

Теорема 6.2.1 (теорема Рона о допустимом множестве решений)

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допустимому множеству решений интегральной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $x = x' - x''$, где n -векторы x' и x'' образуют решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \leq \bar{\mathbf{b}}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \bar{\mathbf{A}}x'' \leq -\underline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{A}x = [(\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x|, (\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x|],$$

и поэтому принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, равносильная включению $\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}$, влечёт

$$\underline{\mathbf{b}} \leq (\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x| \quad \text{и} \quad (\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x| \leq \bar{\mathbf{b}}.$$

Делая в этих неравенствах замены $x = x^+ - x^-$ и $|x| = x^+ + x^-$ и выполняя несложные преобразования, убеждаемся, что векторы $x' = x^+$ и $x'' = x^-$ удовлетворяют (6.11).

Наоборот, пусть некоторые x', x'' являются решениями системы неравенств (6.11). Определим вектор $d \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы его компоненты были минимумами из соответствующих компонент x' и x'' , т.е.

$$d_i = \min\{x'_i, x''_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда $d \geq 0$ и для вектора $x \in \mathbb{R}^n$, такого что

$$x = x' - x'',$$

мы имеем

$$x_i^+ = \max\{0, x'_i - x''_i\} = x'_i - \min\{x'_i, x''_i\} = x'_i - d_i,$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$. По этой причине $x^+ = x' - d$, и аналогичным же образом нетрудно убедиться, что $x^- = x'' - d$.

Следовательно, $|x| = x' + x'' - 2d$ и

$$(\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x| = \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' - 2(\text{rad } \mathbf{A})d \leq \overline{\mathbf{b}},$$

$$(\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x| = \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' + 2(\text{rad } \mathbf{A})d \geq \underline{\mathbf{b}},$$

так что в целом

$$\mathbf{A}x = [(\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x|, (\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x|] \subseteq \mathbf{b},$$

и потому $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. ■

В общем случае допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть и неограниченным, но для квадратных интервальных линейных систем, т.е. когда $m = n$, если хотя бы одна точечная матрица $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}$ неособенна, то $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является ограниченным множеством, поскольку

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \{ \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{b} \}.$$

В оставшейся части параграфа будет показано, как по виду матрицы \mathbf{A} можно судить об ограниченности допустимого множества решений.

Далее мы докажем два утверждения: первое позволит по специальному виду матрицы заключать, что допустимое множество неограничено, а второе, наоборот, показывает, что для неограниченного допустимого множества матрица имеет этот специальный вид.

Напомним, что конечное множество $\{a_j\}$ вещественных векторов называется *линейно зависимым*, если существует множество $\{c_j\}$ вещественных чисел, не все из которых равны нулю, такое, что $\sum_j a_j c_j = 0$. Множество из одного вектора считается линейно зависимым тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Предложение 6.2.2 Пусть для интервальной системы (6.1) допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто. Если в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вещественные столбцы, то $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ неограничено.

Доказательство. В силу критерия (6.3) принадлежности допустимому множеству непустота Ξ_{tol} означает, что существует $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ такой,

что $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \subseteq \mathbf{b}$. Расписав произведение $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ по столбцам $\mathbf{A}_{:j}$, получим

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}. \quad (6.12)$$

Пусть J — множество номеров линейно зависимых вещественных столбцов $\mathbf{A}_{:j}$ матрицы \mathbf{A} . Тогда (6.12) можно переписать в виде

$$\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}, \quad (6.13)$$

а линейную зависимость вещественных столбцов выразить формулой

$$\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} c_j = 0, \quad (6.14)$$

где $c_j \in \mathbb{R}$ и $\sum_{j \in J} |c_j| > 0$.

Домножая (6.14) на вещественное число t , добавляя к (6.13) и пользуясь законом дистрибутивности для вещественных чисел, получим

$$\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} (\tilde{x}_j + tc_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b} \quad (6.15)$$

для произвольного $t \in \mathbb{R}$

Введем вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, дополнив множество коэффициентов линейной зависимости нулевыми для $j \notin J$. Тогда (6.15) можно переписать в виде

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} (\tilde{x}_j + tc_j) \subseteq \mathbf{b},$$

что в матричной форме выглядит так:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}} + t\mathbf{c}) \subseteq \mathbf{b}.$$

По критерию принадлежности (6.3) это означает, что вместе с решением $\tilde{\mathbf{x}}$ в множество Ξ_{tol} попадает прямая, проходящая через $\tilde{\mathbf{x}}$ и параллельная ненулевому вектору \mathbf{c} . Значит, Ξ_{tol} неограничено. \blacksquare

Предложение 6.2.3 Пусть допустимое множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто. Если оно неограничено, то в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вещественные столбцы.

Доказательство. В предыдущем параграфе мы показали, что множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — выпуклое и многогранное. Если $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ неограничено, значит, неограничено его пересечение с каким-нибудь ортантом. Тогда в этом ортанте лежит выпуклое многогранное неограниченное подмножество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, из которого можно выбрать какой-нибудь луч $(\tilde{x} + tc)$, где \tilde{x} — начало луча, c — ненулевой вектор направления, $t \in \mathbb{R}^+$ — параметр, задающий точки луча.

Так как луч $(\tilde{x} + tc)$ целиком лежит в Ξ_{tol} , то по критерию принадлежности (6.3)

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{A}(\tilde{x} + tc) \subseteq \mathbf{b}. \quad (6.16)$$

С другой стороны, луч $(\tilde{x} + tc)$ целиком лежит в одном ортанте, поэтому

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad x_j c_j \geq 0$$

и в (6.16) можно раскрыть скобки по правилу дистрибутивности:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{A}(tc) \subseteq \mathbf{b}. \quad (6.17)$$

Для произвольных интервальных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ имеет место очевидное свойство

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \\ \mathbf{x} + \mathbf{z} \subseteq \mathbf{y} \end{array} \right\} \implies |\mathbf{z}| \leq \text{wid } \mathbf{y}.$$

Используя это свойство в (6.17) для $\mathbf{x} = \mathbf{A}\tilde{x}$, $\mathbf{z} = \mathbf{A}(tc)$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, получим, что должно выполняться неравенство

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\mathbf{A}(tc)| \leq \text{wid } \mathbf{b}. \quad (6.18)$$

Для вещественного t применимо правило дистрибутивности. Это позволяет переписать (6.18) в виде

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |t(\mathbf{A}c)| \leq \text{wid } \mathbf{b}.$$

Положительное t можно вынести за знак модуля и разделить на него обе части неравенства. Тогда

$$|\mathbf{A}c| \leq \frac{\text{wid } \mathbf{b}}{t}$$

для любого $t > 0$. Это возможно только при $|\mathbf{A}c| = 0$, что эквивалентно

$$\mathbf{A}c = 0. \quad (6.19)$$

Равенство (6.19) означает, что

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} c_j = 0,$$

т.е. линейная комбинация столбцов интервальной матрицы \mathbf{A} с коэффициентами, соответствующими компонентам вектора c , равна нулю. Остается заметить, что ненулевые коэффициенты в этой сумме могут стоять только при вещественных столбцах матрицы. В противном случае радиус линейной комбинации

$$\text{rad}(\mathbf{A}c) = \sum_{j=1}^n |c_j| \text{rad} \mathbf{A}_{:j} \quad (6.20)$$

будет отличен от нуля, что противоречит (6.19). ■

Следствием Предложений 6.2.2 и 6.2.3 является

Теорема 6.2.2 (критерий неограниченности допустимого множества решений ИСЛАУ) *Пусть допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто. Оно неограничено тогда и только тогда, когда в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вещественные столбцы.*

В заключение параграфа попытаемся представить, как выглядит неограниченное допустимое множество решений ИСЛАУ. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор коэффициентов, для которого линейная комбинация столбцов интервальной матрицы \mathbf{A} равна нулю, т.е. $\mathbf{A}c = 0$. Обозначим через L линейной пространство всех таких векторов. В силу (6.20) у вектора c могут отличаться от нуля только компоненты, соответствующие вещественным столбцам матрицы \mathbf{A} . Значит, размерность пространства L равна $(p - q)$, где p — число всех вещественных столбцов, q — максимальное число линейно независимых вещественных столбцов матрицы \mathbf{A} . Например, если в матрице \mathbf{A} все вещественные столбцы нулевые, то размерность пространства L равна их числу.

Опираясь на доказательство Предложения 6.2.2, можно сказать, что $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ представляет собой объединение прямых, параллельных произвольному вектору c из L . Следовательно, допустимое множество решений состоит из пространств, полученных параллельными сдвигами

Таблица 6.1. Примеры применения критерия неограниченности для непустого допустимого множества ИСЛАУ

интервальная матрица A	допустимое множество решений
все элементы существенно интервальны	ограничено
каждый столбец имеет существенно интервальный элемент	ограничено
есть нулевые столбцы	неограничено
есть пропорциональные неинтервальные столбцы	неограничено
число неинтервальных столбцов больше общего числа строк	неограничено

L . Для выпуклого многогранного множества это означает, что все его грани лежат в гиперплоскостях, параллельных L .

6.3 Грубое исследование разрешимости

При решении линейной задачи о допусках самостоятельное значение имеет выяснение того, является допустимое множество решений пустым или непустым, — исследование разрешимости задачи. Результатам на эту тему посвящено несколько публикаций с начала 70-х годов ушедшего века. Одним из первых И. Рон обратился к исследованию линейной задачи о допусках при изучении линейных экономических моделей межотраслевого баланса в условиях интервальной неопределённости, т.е. интервального уравнения Леонтьева (см. §5.2а). В его работах [31, 32] были выведены явные формулы, позволяющие исследовать разрешимость линейной задачи о допусках, но только для интервальных матриц A специального вида и неотрицательных правых частей b .

В работе Н.А. Хлебалина [15] (а потом также в [17, 26]) рассматривался следующий простой эвристический способ проверки разрешимости ЛЗД: в качестве наиболее вероятного представителя допустимого

множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ берётся решение \tilde{x} “средней” точечной системы

$$(\text{mid } \mathbf{A}) x = \text{mid } \mathbf{b},$$

которое затем тестируется на включение $\mathbf{A}\tilde{x} \subseteq \mathbf{b}$. Если же $\mathbf{A}\tilde{x} \not\subseteq \mathbf{b}$, то мы заключаем о “практической неразрешимости” линейной задачи о допусках, хотя, строго говоря, в этом случае никакого определённого суждения выносить нельзя. Этот “тест средней системы”, как показывает практика, работает лишь когда матрица \mathbf{A} “достаточно узка” в сравнении с вектором правой части \mathbf{b} и не способен исследовать тонких пограничных ситуаций.

Например, пусть $\mathbf{A} = [-1, 2]$, $\mathbf{b} = [-2, 6]$. Тогда $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 2]$, но решение “средней системы” равно 3, и оно не принадлежит допустимому множеству решений. Более интересен двумерный контрпример с данными

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & [1, 2] \\ [1, 2] & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [5, 7] \\ [7, 9] \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Здесь $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ состоит из единственной точки $(1, 2)^\top$, тогда как решение “средней системы” есть $(\frac{8}{9}, \frac{20}{9})^\top$. Особенность этого примера состоит в том, что матрица задачи строго положительная и неособенная.

В Главе 11 этой книги мы представляем так называемый “формальный подход” к решению линейной задачи о допусках, в котором заключение о пустоте или непустоте $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ принимается по результатам вычисления формального решения интервальной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$. Нередко он позволяет выявлять разрешимость задачи и в тех случаях, когда тест средней системы терпит неудачу. Тем не менее, формальное решение не обязательно существует, даже если линейная задача о допусках для исходной интервальной системы совместна. Это иллюстрируется тем же самым одномерным примером с $\mathbf{A} = [-1, 2]$, $\mathbf{b} = [-2, 6]$. Формальное решение уравнения $[-1, 2] \cdot x = [-2, 6]$ не существует, но $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 2] \neq \emptyset$.

Упражнение 6.3.1. Докажите, что интервальное уравнение $[-1, 2]x = [-2, 6]$ действительно не имеет формальных решений.

Ниже в этой главе в §6.4 будет представлена техника для всеобъемлющего исследования разрешимости линейной задачи о допусках и некоторых родственных вопросов. В то же время, развиваемая в §6.4 методика, основанная на применении так называемых “распознающих

функционалов”, требует и немалых вычислительных затрат. А сейчас мы дадим простое достаточное условие неразрешимости линейной задачи о допусках, базирующееся на сравнении “относительных узостей” элементов интервальной матрицы и вектора правой части. Оно предназначено для предварительного быстрого исследования задачи о допусках.

Заметим, что если i -ая строка \mathbf{A} содержит только нулевые элементы, то для непустоты допустимого множества решений необходимо $\mathbf{b}_i \ni 0$. Если же это условие выполнено, то свойство $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ быть пустым или непустым зависит уже только от других, не i -ых строк матрицы \mathbf{A} и компонент \mathbf{b} . Таким образом, без потери общности можно предполагать далее, что \mathbf{A} не имеет нулевых строк.

Основной результат этого параграфа —

Теорема 6.3.1 Пусть в системе уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнены следующие условия:

- (i) $0 \notin \mathbf{b}_k$,
- (ii) $\max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} < \chi(\mathbf{b}_k)$.

Тогда допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ пусто.

Например, используя этот признак, можно легко заключить, что одномерная система с $\mathbf{A} = [1, 2]$, $\mathbf{b} = [2, 3]$, рассмотренная в начале §6.1, имеет пустое допустимое множество решений.

Доказательство Теоремы будет проведено *ad absurdum* (“от противного”) с применением техники, аналогичной той, которая применялась Х. Рачеком и В. Зауэром в [30].

Предположим, что задача о допусках всё-таки имеет решение $y \in \mathbb{R}^n$, $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, так что $\mathbf{A}y \subseteq \mathbf{b}$. При этом условие (i) делает невозможным равенство интервала $(\mathbf{A}y)_k$ нулю, и потому верны сле-

дующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 \chi((\mathbf{A}y)_k) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj}y_j\right) \\
 &\leq \max\left\{\chi(\mathbf{a}_{kj}y_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}y_j \neq 0\right\} \quad \text{в силу (1.31)} \\
 &= \max\left\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}y_j \neq 0\right\} \quad \text{в силу (1.30)} \\
 &\leq \max\left\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\right\}.
 \end{aligned}$$

Мы нашли, что

$$\chi((\mathbf{A}y)_k) \leq \max\left\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\right\}. \quad (6.22)$$

С другой стороны, наше предположение о существовании решения означает $(\mathbf{A}y)_k \subseteq \mathbf{b}_k$, что вместе с (1.33) влечёт

$$\chi((\mathbf{A}y)_k) \geq \chi(\mathbf{b}_k).$$

Сопоставляя это соотношение с (6.22), получаем

$$\max\left\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\right\} \geq \chi(\mathbf{b}_k),$$

что противоречит (ii). ■

Важность условия (i) Теоремы 6.3.1 может быть продемонстрирована на рассмотренном выше одномерном примере с $\mathbf{A} = [-1, 2]$ и $\mathbf{b} = [-2, 6]$. Здесь $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 2] \neq \emptyset$, хотя $\chi(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} = \chi(\mathbf{b})$. Более глубокое объяснение состоит в том, что свойство (1.33) функционала χ , на котором, в частности, основывается доказательство, неверно для интервалов, содержащих нуль во внутренней части:

$$[-1, 1] \subseteq [-1, 2] \subseteq [-2, 2],$$

$$\text{но } \chi([-1, 1]) = \chi([-2, 2]) = -1, \quad \chi([-1, 2]) = -\frac{1}{2}.$$

В то же время, невыполнение условий Теоремы 6.3.1 не обязательно влечёт разрешимость линейной задачи о допусках. Например, условие (ii) из формулировки теоремы неверно для системы (6.6), но её допустимое множество решений всё-таки пусто.

Если мы заключили на основании Теоремы 6.3.1 о несовместности линейной задачи о допусках с матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и вектором правой части $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$, то для дальнейшего исследования задачи может оказаться полезной величина \mathfrak{M} , введённая в §5.5. При этом

$$\mathfrak{M} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0,$$

и конкретное значение \mathfrak{M} до некоторой степени может характеризовать “меру неразрешимости” рассматриваемой задачи: чем она больше, тем более далека задача от разрешимости, и наоборот. Кроме того, индексы $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, для которых выполнено условие (ii) Теоремы 6.3.1, указывают на те строки матрицы \mathbf{A} и соответствующие компоненты вектора \mathbf{b} , которые вносят доминирующий вклад в неразрешимость рассматриваемой задачи о допусках. Для того, чтобы уменьшить отклонение задачи от разрешимого состояния, следует либо сузить наиболее широкие элементы в этих строках матрицы \mathbf{A} , т.е. увеличить $\max_{1 \leq j \leq n} \chi(\mathbf{a}_{kj})$, либо расширить правую часть, т.е. уменьшить $\chi(\mathbf{b}_k)$.

6.4 Полное исследование разрешимости

Так как допустимое множество решений ИСЛАУ может представлено в виде решения системы линейных неравенств, то вопрос о его пустоте или непустоте может быть разрешён, к примеру, посредством применения начального этапа стандартного симплекс-метода (так называемого “введения в базис”).

Основой развиваемой ниже теории разрешимости интервальной линейной задачи о допусках является новая аналитическая характеристика допустимого множества решений. В §5.26 мы уже встречались с характеристикой И. Рона: принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ эквивалентна

$$| \text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} | \leq \text{rad } \mathbf{b} - \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x|.$$

Но отправной точкой наших рассуждений является

Предложение 6.4.1 Пусть даны интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор правой части \mathbf{b} , а выражением

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

определяется функционал $Tol : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, т.е. допустимое множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала Tol .

Доказательство. Вспомним, что $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ если и только если $\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}$. Последнее включение можно переписать в следующем виде

$$\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \subseteq [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

что эквивалентно

$$\left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, x действительно принадлежит $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0.$$

■

Отметим сразу же, что функционал $Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ непрерывен по всем своим аргументам как в обычном смысле (это следует из непрерывности интервальных арифметических операций), так и в более сильном смысле по Липшицу.

Мы будем называть функционал $Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ *распознающим*, поскольку знак его значений позволяет “распознать” точки из $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Аргументы этого функционала не вполне равноправны: с одной стороны, это исследуемая точка $x \in \mathbb{R}^n$, а с другой — данные задачи, т.е. матрица \mathbf{A} и вектор правой части \mathbf{b} . По этой причине мы и отделяем их друг от друга точкой с запятой. Когда вторичные аргументы распознающего функционала — \mathbf{A} и \mathbf{b} — несущественны, мы будем опускать их, говоря просто о функционале $Tol(x)$.

Предложение 6.4.2 Функционал $Tol(x)$ вогнутый.

Доказательство. Функционал $Tol(x)$ есть нижняя огибающая функционалов

$$\varsigma_i(x) = \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right|, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и нам достаточно лишь установить вогнутость каждого из $\varsigma_i(x)$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$. Субдистрибутивность интервальной арифметики влечет тогда

$$\begin{aligned} & \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda)y_j) \\ & \subseteq \lambda \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right). \end{aligned}$$

Известно, что абсолютная величина интервала — функция $|\cdot|$ — монотонна по включению (см. Главу 1), следовательно

$$\begin{aligned} & \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda)y_j) \right| \\ & \leq \left| \lambda \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right) \right| \\ & \leq \lambda \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + (1-\lambda) \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right|, \end{aligned}$$

что и доказывает Предложение. ■

Итак, подграфик

$$\text{hup } Tol = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, t \leq Tol(x) \}$$

отображения $Tol : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклым множеством. Можно даже показать, что $\text{hup } Tol$ есть пересечение конечного числа полупространств в \mathbb{R}^{n+1} , т.е. является выпуклым многогранным множеством.

Действительно, выражая абсолютное значение через максимум, мы получим для каждого $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned}
 \text{rad } \mathbf{b}_i &= \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \\
 &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \max_{\hat{\mathbf{a}}_{ij}} \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j \right| \\
 &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \max_{\hat{\mathbf{a}}_{ij}} \left\{ \max \left\{ \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \right\} \right\} \\
 &= \min_{\hat{\mathbf{a}}_{ij}} \left\{ \min \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \text{mid } \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \text{rad } \mathbf{b}_i + \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j \right\} \right\},
 \end{aligned}$$

где n -вектор $(\hat{\mathbf{a}}_{i1}, \hat{\mathbf{a}}_{i2}, \dots, \hat{\mathbf{a}}_{in})$ пробегает по конечному множеству

$$\text{vert}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}),$$

т.е. по всем вершинам i -ой строки интервальной матрицы \mathbf{A} . По этой причине функционал Tol является нижней огибающей не более чем $m \cdot 2^{n+1}$ аффинных функционалов вида

$$\text{rad } \mathbf{b}_i \pm \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j \right),$$

$i = 1, 2, \dots, m$, а множество $\text{hur } Tol$ есть пересечение подграфиков этих функционалов.

В качестве следствия снова получаем известный результат, уже доказанный в Предложении 6.1.1: допустимое множество решений интервальной линейной системы является выпуклым многогранным множеством.

Предложение 6.4.3 Функционал $Tol(x)$ достигает конечного максимума на всем \mathbb{R}^n .

Доказательство. Подграфик функционала $\text{hyp } Tol$, будучи выпуклым многогранным множеством, является выпуклой оболочкой конечного числа точек (c_k, γ_k) , $k = 1, 2, \dots, p$, и направлений (c_k, γ_k) , $k = p+1, \dots, q$, в \mathbb{R}^{n+1} [13]. При этом мы должны исключить направление $(0, \dots, 0, 1)$, так как $Tol(x)$ всюду определён. Более точно,

$$\text{hyp } Tol = \left\{ \sum_{k=1}^q \lambda_k (c_k, \gamma_k) \mid c_k \in \mathbb{R}^n, \gamma_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}.$$

Поскольку $Tol(x) \leq \min_{1 \leq i \leq m} \text{rad } \mathbf{b}_i$, можем заключить, что все $\gamma_k \leq 0$, $k = p+1, \dots, q$, так как в противном случае функционал Tol был бы неограничен сверху. По этой причине

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x) &= \max \{ t \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, (x, t) \in \text{hyp } Tol \} \\ &= \max \left\{ \sum_{k=1}^q \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\} \\ &= \max_{1 \leq k \leq p} \gamma_k. \end{aligned}$$

Таким образом, $\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x)$ совпадает с максимумом по некоторому конечному множеству значений функционала — по всем γ_k , — и достигается на значении аргумента, соответствующем максимальному из этих γ_k , $k = 1, 2, \dots, p$. ■

Пример. Для интервальной линейной 3×2 -системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 2] \\ [1, 2] & [1, 3] \\ [-1, 1] & [0, 1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 60] \\ [10, 72] \\ [-10, 36] \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

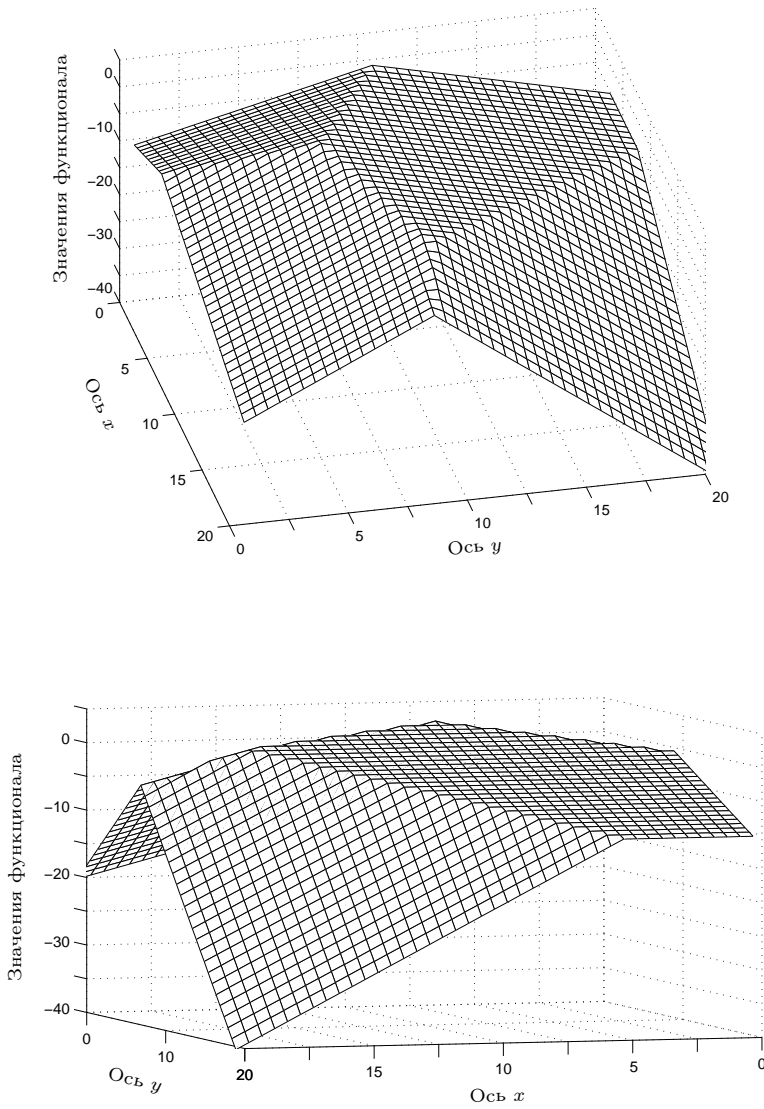


Рис. 6.3. График распознающего функционала (6.24)
с разных точек зрения

распознающий функционал допустимого множества решений

$$\begin{aligned} Tol(x) = \min \{ & 30 - |30 - [2, 3] \cdot x - [-1, 2] \cdot y|, \\ & 31 - |41 - [1, 2] \cdot x - [1, 3] \cdot y|, \\ & 23 - |13 - [-1, 1] \cdot x - [0, 1] \cdot y| \}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

и его график изображен с разных точек зрения на Рис. 6.3. Хорошо видна многогранность этого графика.

Предложение 6.4.4 *Если интервальная матрица \mathbf{A} не имеет нулевых строк, то $y \in \text{int } \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ влечёт $Tol(y; \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$.*

Доказательство. Пусть $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ и $\max Tol(x)$ достигается в некоторой точке $\tau \in \Xi_{tol}$. Если $y \in \text{int } \Xi_{tol}$, то y — внутренняя точка отрезка $[\tau, z] \subset \Xi_{tol}$, т.е. $y = \lambda\tau + (1 - \lambda)z$ для некоторых $\lambda \in (0, 1)$, $z \in \Xi_{tol}$. Следовательно,

$$Tol(y) \geq \lambda Tol(\tau) + (1 - \lambda) Tol(z),$$

так как функционал Tol вогнутый.

Предположим, что $Tol(y) = 0$. Тогда выписанное выше неравенство выполняется, если и только если $Tol(\tau) = Tol(y) = 0$, а функционал Tol обязан быть нулевым на всем множестве $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Более того, пусть $\mathbb{R}^n = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}_i$ с

$$\mathcal{O}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Tol(x) = \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Xi_{tol} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} (\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i),$$

причём все множества $\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, замкнуты. Следовательно, $\text{int } (\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i) \neq \emptyset$ по крайней мере для одного $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, и мы имеем

$$\text{rad } \mathbf{b}_k - \left| \text{mid } \mathbf{b}_k - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj} x_j \right| = 0 = \text{const}$$

для всех $x \in \text{int}(\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_k)$. Последнее соотношение может иметь место лишь когда все $\mathbf{a}_{k1}, \dots, \mathbf{a}_{kn}$ — нулевые, что противоречит исходному утверждению Предложения. ■

Предложение 6.4.5 Если $Tol(y; \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$, то $y \in \text{int} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$.

Доказательство. Так как отображение $Tol : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, множество $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tol(x) > 0\}$ является открытым. Оно также непусто, поскольку $y \in X \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, причём $X \subseteq \text{int} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Следовательно, $y \in \text{int} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$. ■

Подытоживая проведённые рассуждения, приходим к следующей методике исследования разрешимости линейной задачи о допусках, т.е. к критерию пустоты/непустоты допустимого множества решений интервальных линейных систем:

Решаем задачу безусловной максимизации вогнутого функционала

$$Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Пусть $T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ и это значение достигается функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T \geq 0$, то $\tau \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ совместна и точка τ лежит в допустимом множестве решений;
- если $T > 0$, то $\tau \in \text{int} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность точки τ допустимому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных — матрицы и правой части системы;
- если $T < 0$, то $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ несовместна.

Отметим, что Предложения 6.4.1–6.4.5, а также приведённая выше методика исследования разрешимости линейной задачи о допусках

останутся справедливыми, если определить распознающий функционал Tol более общим выражением, как

$$Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ s_i \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\},$$

где s_i , $i = 1, 2, \dots, m$, — какие-то положительные числа. Ниже мы увидим примеры того, как подобного вида функционалы плодотворно применяются в различных ситуациях.

В настоящее время максимизация негладких вогнутых функционалов является неплохо разработанным вопросом вычислительной оптимизации. За последние десятилетия прошедшего века было предложено немало эффективных численных методов решения этой задачи (см., например, монографии [4, 10, 12, 19, 20, 25] и указанные там ссылки). Это даёт основание полагать, что развитый нами в этом параграфе критерий разрешимости линейной задачи о допусках действительно вполне практичен. В частности, в [25] описаны некоторые методы, находящие точное значение максимума вогнутых функционалов с многогранными графиками, склеенными из кусков гиперплоскостей. Если же размерность задачи о допусках невелика, то для максимизации распознающего функционала можно использовать методы прямого поиска [14].

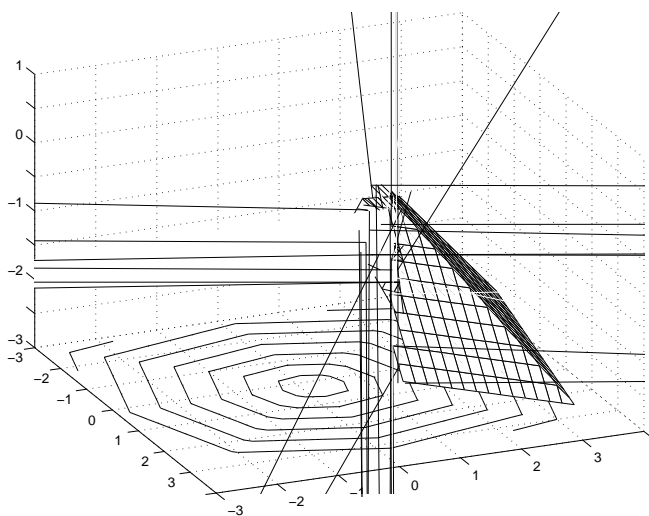
Пример. Для интервальной линейной системы (6.4) распознающий функционал допустимого множества решений имеет вид

$$\begin{aligned} Tol(x) &= \min \left\{ 1 - \left| [1, 2] x_1 + \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_2 \right|, 1 - \left| \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_1 + [1, 2] x_2 \right| \right\} \\ &= 1 - \max \left\{ \left| [1, 2] x_1 + \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_2 \right|, \left| \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_1 + [1, 2] x_2 \right| \right\}, \end{aligned}$$

и его график изображён на Рис. 6.4. Здесь модули выражений под знаками экстремумов всегда неотрицательны. Кроме того, они достигают своих наименьших значений, равных нулю, одновременно, когда $x_1 = x_2 = 0$. При всех остальных x_1 и x_2 выражения под знаками модулей ненулевые, так что значение распознающего функционала в этих точках будет меньше его значения в нуле. Таким образом

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x) = 1$$

и достигается при $x = 0$. Этот максимум надёжно находится и вычислительными оптимизационными процедурами.



ными, так как соответствующие им данные образуют тощее множество первой бэровской категории в пространстве всех данных. А разрешимость такой задачи может быть разрушена при сколь угодно малом шевелении входных данных. Иными словами, задачи о допусках, подобные (6.21), являются весьма трудными для исследования в силу того, что находятся на границе множества разрешимых задач.

В заключение параграфа полезно сравнить наш подход к исследованию разрешимости задачи о допусках с тем, который был предложен ранее И.Роном [33] и основан на результате Теоремы 6.2.1. Нередко решение системы линейных неравенств (6.11) оказывается привычнее или удобнее, чем максимизация негладкого распознающего функционала, но в результате решения (6.11) мы можем получить точку, которая лежит на границе допустимого множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Например,

Это неприемлемо для нас по двум причинам: во-первых, такая точка может покидать множество решений при сколь угодно малых шевелениях данных задачи и, во-вторых, не годится в качестве центра телесного бруса внутренней оценки допустимого множества решений. Кроме того, наша методика “распознающего функционала” допускает дальнейшее развитие, позволяющее оценивать степень разрешимости или неразрешимости задачи о допусках и корректировать её данные в нужном нам смысле. По сути, числовое значение максимума распознающего функционала является важной характеристикой линейной задачи о допусках, позволяя решать многие тонкие вопросы. Таких возможностей подход И. Рона также не предоставляет.

6.5 Коррекция линейной задачи о допусках

Представим себе реальный процесс решения какой-нибудь конкретной практической задачи. Почти всегда он не заканчивается после того, как мы пришли к выводу о том, что эта задача не имеет решений (неразрешима). Заказчику, как правило, интересно получить и дальнейшую информацию о том,

насколько, в количественном измерении, неразрешима рассматриваемая задача,

как следует изменить входные данные задачи, чтобы она стала разрешимой,

и т.д.

Напротив, если исходная задача оказалась разрешимой, то нередко требуется указать границы вариаций входных данных, в пределах которых задача всё ещё останется разрешимой. Мы способны дать развернутые ответы на эти и даже более сложные вопросы.

6.5a Коррекция вектора правой части

Если матрица \mathbf{A} и середина правой части $\text{mid } \mathbf{b}$ по каким-то причинам зафиксированы и остаются неизменными, то увеличение радиусов всех компонент вектора \mathbf{b} на одну и ту же величину K приводит, как легко видеть, к добавлению константы K к функционалу $\text{Tot}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$. Следовательно,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tot}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tot}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

где $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$.

Если линейная задача о допусках неразрешима и

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tot}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0,$$

мы можем сделать её разрешимой с той же самой матрицей \mathbf{A} посредством расширения вектора правой части на $K\mathbf{e}$, $K \geq 0$. При этом множество значений аргумента, доставляющих максимум функционалу Tot не изменится, но точки $\tau \in \text{Arg max } \text{Tot}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ будут наверняка принадлежать непустому допустимому множеству решений интервальной линейной системы

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} + K\mathbf{e}.$$

Наоборот, если

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tot}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T \geq 0,$$

так что линейная задача о допусках разрешима, то она останется таковой даже после того, как мы уменьшим радиусы всех компонент вектора правой части на величину K , $K \leq T$.

Нередко подобное равномерное уширение всех компонент вектора \mathbf{b} может оказаться неприемлемым на практике. По этой причине станем предполагать, что нам задан масштабирующий вектор

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_m), \quad v_i \geq 0,$$

такой что увеличение ширины \mathbf{b}_i в процессе коррекции задачи должно быть пропорциональным v_i . Вычислим теперь

$$T_v = \max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol_v(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

где

$$Tol_v(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}. \quad (6.25)$$

Если линейная задача о допусках с матрицей \mathbf{A} и вектором правой части \mathbf{b} первоначально не имела решений, то новая задача с той же матрицей \mathbf{A} и уширенным вектором $(\mathbf{b}_i + K v_i [-1, 1])_{i=1}^m$ в правой части становится разрешимой при $K \geq |T_v|$. Подбирая масштабирующие множители v_i нужных нам компонент правой части очень маленькими, можно добиться того, чтобы они практически не изменялись при коррекции, а уширялись бы только те компоненты вектора \mathbf{b} , которые имеют дополнительные к ним номера.

Наиболее важный частный случай рассмотренной конструкции — это обеспечение одинаковых относительных (пропорциональных абсолютным значениям) увеличений радиусов компонент правой части, когда $v_i = |\mathbf{b}_i|$ для ненулевых \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Обозначим

$$Tol(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ |\mathbf{b}_i|^{-1} \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}$$

и пусть

$$\mathfrak{T} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol_0(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Величина \mathfrak{T} является существенно более тонкой количественной характеристикой совместности линейной задачи о допусках, чем введённая

в §§5.5 и 6.3

$$\mathfrak{M} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0.$$

Судя по модулю \mathfrak{T} , можно весьма точно определить меру несовместности задачи в случае $\mathfrak{T} < 0$ или, наоборот, то, “насколько задача совместна” (запас устойчивости разрешимого состояния) в случае $\mathfrak{T} \geq 0$. Естественно, всё это достигается ценой дополнительных вычислений.

6.56 Коррекция матрицы системы

Мы продемонстрировали возможности коррекции линейной задачи о допусках путём модификации одного вектора правой части \mathbf{b} . Сейчас мы обсудим, как задачу о допусках можно корректировать посредством варьирования элементов матрицы \mathbf{A} . Представляемая ниже методика имеет своей основой

Предложение 6.5.1 Пусть $\mathbf{s}, \mathbf{x} \in \mathbb{IR}$, причём \mathbf{s} — уравновешенный интервал, и $\text{rad } \mathbf{x} \geq \text{rad } \mathbf{s}$. Тогда $(\mathbf{x} \ominus \mathbf{s})$ является правильным интервалом и $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{s}| = |\mathbf{x}| - |\mathbf{s}|$.

Доказательство. Обозначим для краткости $s := |\mathbf{s}| = \text{rad } \mathbf{s}$. Предположим также для определенности, что

$$|\mathbf{x}| = \max \{|\overline{\mathbf{x}}|, |\underline{\mathbf{x}}|\} = |\overline{\mathbf{x}}|,$$

т.е. $|\overline{\mathbf{x}}| \geq |\underline{\mathbf{x}}|$. В частности, это означает $\overline{\mathbf{x}} \geq 0$.

При сделанных нами предположениях оказывается, что

$$|\overline{\mathbf{x}} - s| \geq |\underline{\mathbf{x}} + s|. \quad (6.26)$$

Действительно, утверждение Предложения влечёт

$$\text{rad } \mathbf{x} = \frac{\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}}{2} \geq s,$$

так что

$$\overline{\mathbf{x}} - s \geq \underline{\mathbf{x}} + s.$$

Если $\underline{\mathbf{x}} + s \geq 0$, то неравенство (6.26) получается отсюда взятием абсолютного значения от обеих частей. Иначе, если $\underline{\mathbf{x}} + s \leq 0$, то $\underline{\mathbf{x}} \leq 0$,

$|\underline{x}| = -\underline{x}$, и мы снова имеем в силу известного неравенства для модуля разности

$$|\overline{x} - s| \geq |\overline{x}| - |s| \geq |\underline{x}| - s = -\underline{x} - s = |\underline{x} + s|.$$

Наконец, с учётом (6.26)

$$|\mathbf{x} \ominus \mathbf{s}| = \max \{|\overline{x} - s|, |\underline{x} + s|\} = |\overline{x} - s| = \overline{x} - s = |\mathbf{x}| - |\mathbf{s}|,$$

как и требовалось. Для $|\mathbf{x}| = |\underline{x}|$ доказательство проводится аналогичным образом. ■

Предположим, что нам дана несовместная линейная задача о допусках с интервальной матрицей \mathbf{A} и интервальным вектором правой части \mathbf{b} . Тогда безусловный максимум распознающего функционала $Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$, о котором будем считать известным, что он достигается в точке $\tau \in \mathbb{R}^n$, является отрицательным:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = Tol(\tau; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0.$$

Можно ли уменьшить меру неразрешимости линейной задачи о допусках путём сужения матрицы \mathbf{A} и как конкретно это сделать?

Примем следующие естественные предположения:

- (i) все компоненты вектора правой части \mathbf{b} являются невырожденными интервалами, то есть $\text{rad } \mathbf{b}_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$,
- (ii) в каждой строке матрицы \mathbf{A} существуют элементы с ненулевой шириной, т.е. $\min_{1 \leq j \leq n} \text{rad } \mathbf{a}_{ij} > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Из последнего требования немедленно следует

$$\min_{1 \leq j \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |\tau_j| \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \right\} = \Delta > 0.$$

Выберем интервальную $m \times n$ -матрицу $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_{ij})$ с уравновешенными интервальными элементами $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ так, что

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \tau_j = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.27)$$

где K — некоторая положительная константа, $0 < K \leq \Delta$, и, конечно,

$$\text{rad } \mathbf{a}_{ij} \geq e_{ij} \geq 0 \quad (6.28)$$

для всех i, j . Тогда линейная задача о допусках с тем же самым вектором правой части \mathbf{b} и интервальной матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ является “менее неразрешимой”, чем исходная задача.

В самом деле, оценивая распознающий функционал новой линейной задачи о допусках, получим

$$\begin{aligned} \text{Tot}(x; \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_{ij} \ominus \mathbf{e}_{ij}) x_j \right| \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \ominus \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} x_j \right| \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} x_j \right| \right\} \end{aligned}$$

в силу Предложения 6.5.1. Следовательно, так как (6.27) эквивалентно

$$\left| \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} \tau_j \right| = K,$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
& \max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x; \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \\
& \geq Tol(\tau; \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \\
& = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \tau_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} \tau_j \right| \right\} \\
& = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + K \right\} \\
& = K + Tol(\tau; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \\
& = K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \\
& = K + T.
\end{aligned}$$

Если $K \geq |T|$, то тогда линейная задача о допусках с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ и правой частью \mathbf{b} становится разрешимой, и, более того, мы можем наверняка утверждать, что известная нам точка τ — аргумент максимума функционала $Tol(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ — принадлежит множеству решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b})$ скорректированной задачи.

Решающим моментом процедуры коррекции с варьированием матрицы является решение недоопределенной системы уравнений (6.27)–(6.28). Если $\Delta \leq |T|$, то коррекция, выполненная в соответствии с вышеприведённым рецептом, может оказаться недостаточной для того, чтобы сделать задачу о допусках заведомо разрешимой. Для квадратных интервальных линейных систем это обстоятельство следует рассматривать, скорее, как следствие грубости нашей методики. В принципе, *любая* линейная задача о допусках с неособенной интервальной матрицей \mathbf{A} может быть сделана разрешимой путём подходящего сужения \mathbf{A} , так как в пределе, для неособенной точечной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, задача о допусках имеет решение при любом векторе правой части. Для того, чтобы всё-таки превратить исходную задачу в разрешимую при больших $|T|$, мы рекомендуем применять приём этого параграфа повторно (и, возможно, неоднократно), комбинируя его с переычислением безусловного максимума распознающего функционала.

Наконец, последнее замечание. Выше мы уменьшали взвешенные (с коэффициентами $|\tau_j|$) ширины каждой строки интервальной матрицы \mathbf{A} на одну и ту же величину K . Аналогично случаю коррекции правой части, иногда может возникнуть необходимость уменьшать эти ширины в различной степени. Решение этой усложненной задачи стандартно: мы вводим положительный вектор $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, такой что мера уменьшения (6.27) взвешенной ширины i -ой строки должна быть пропорциональна v_i , и затем оперируем с модифицированным функционалом $Tol_v(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$, определённым выражением (6.25).

6.6 Формулы для размеров бруса решения

Как только установлена разрешимость линейной задачи о допусках и найдена точка в допустимом множестве решений, мы можем обратиться собственно к построению бруса решения задачи, используя известную точку из $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ как центр этого бруса. Мы следуем, таким образом, так называемому “центровому подходу”, развивавшемуся Н.А. Хлебалиным [15], А. Ноймайером [26], В.В. Шайдуровым [5], В.В. Шайдуровым и С.П. Шарым [17] и другими авторами, в котором уже найденная точка допустимого множества решений берётся в качестве центра строящегося интервального решения. В выводимой ниже формуле для его размеров решающую роль играет взятие минимума по некоторому брусу от рациональной функции с модулями, так что дальнейшее решение линейной задачи о допусках сводится к задаче конечномерной ограниченной оптимизации на брусе. Ниже мы не обсуждаем вопросы, связанные с оптимальным выбором центра интервального решения, так как они тесно связаны с практическими нуждами конкретных заказчиков.

Отметим, что в приложениях постановка линейной задачи о допусках часто является более детализованной, нежели (6.5). Дополнительно к формулировке (6.5) мы примем, следуя В.В. Шайдурову [5, 17], что отношение допусков отдельных компонент задаётся некоторым положительным вектором $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_i > 0$, т.е., фактически, введём весовые коэффициенты для ширин искомого вектора допусков, так что

$$\text{rad } U_i / \text{rad } U_j = w_i / w_j.$$

Посредством масштабирования исходной системы диагональной матрицей $\text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ подобный случай легко привести к одному

стандартному, когда $w = (1, 1, \dots, 1)$ и мы должны вписать гиперкуб в соответствующим образом модифицированное множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Действительно, введём матрицы $D = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ и $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}D$. Пусть интервальный вектор $\tilde{\mathbf{U}}$, такой что

$$\text{rad } \tilde{\mathbf{U}}_i = \text{rad } \tilde{\mathbf{U}}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

является решением линейной задачи о допусках с матрицей $\tilde{\mathbf{A}}$ и вектором правой части \mathbf{b} . Тогда $\mathbf{U} = D\tilde{\mathbf{U}}$ — решение исходной задачи, так как

$$\{ \mathbf{A}x \mid x \in \mathbf{U} \} = \{ \mathbf{A}DD^{-1}x \mid x \in \mathbf{U} \} = \{ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \tilde{\mathbf{U}} \} \subseteq \mathbf{b},$$

причём $\text{rad } \mathbf{U}_i / \text{rad } \mathbf{U}_j = w_i / w_j$, как и требовалось. По этой причине всюду ниже в постановке линейной задачи о допусках мы будем иметь в виду поиск интервального вектора \mathbf{U} с компонентами равной ширины и такого, что $\{ \mathbf{A}x \mid x \in \mathbf{U} \} \subseteq \mathbf{b}$.

По-видимому, простейшим способом конструирования интервальных решений линейной задачи о допусках вокруг известного центра является следующий алгоритм, предложенный А. Ноймайером в [26]:

Таблица 6.2. Алгоритм Ноймайера для вычисления размера бруса решения линейной задачи о допусках

Для данного $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ вычисляем наибольшее неотрицательное η , такое что

$$\eta \cdot \mathbf{A}e \subseteq \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t.$$

Интервальный вектор $(t + \eta e)$, $e = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$, есть внутренняя оценка допустимого множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Последнее следует из того факта, что

$$\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{A}(t + \eta e) \subseteq \mathbf{A}t + \mathbf{A}(\eta e) \subseteq \mathbf{A}t + \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t = \mathbf{b}$$

для каждого $x \in t + \eta e$.

Основой развиваемой далее методики является

Теорема 6.6.1 Если $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то для

$$r = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{\mathbf{A} \in \text{vert } \mathbf{A}} \left\{ \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\} \quad (6.29)$$

интервальный вектор $\mathbf{U} = (t + r\mathbf{e})$ также целиком лежит во множестве решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Доказательство. Предположим сначала, что в рассматриваемой линейной задаче о допусках матрица \mathbf{A} имеет нулевую ширину, т.е. вещественная — $\mathbf{A} = A$ — и потому $\text{vert } \mathbf{A} = A$. Представим каждый $x \in \mathbf{U}$ в виде $x = t + y$, где $\max_{1 \leq j \leq n} |y_j| \leq r_A$ и

$$r_A = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}, \quad (6.30)$$

так что для $i = 1, 2, \dots, m$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |(Ay)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |y_j| \\ &\leq r_A \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ &\leq \left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right|. \end{aligned}$$

Следовательно, поскольку $Ax = At + Ay$, мы получаем

$$\begin{aligned} |(At)_i - \text{rad } \mathbf{b}_i + | \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i | \\ \leq (Ax)_i \leq \\ (At)_i + \text{rad } \mathbf{b}_i - | \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i | \end{aligned}$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} \underline{b}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i) + |\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i| \\ \leq (Ax)_i \leq \\ \bar{b}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i) - |\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i|. \end{aligned} \quad (6.31)$$

В силу того, что

$$-z + |z| \geq 0 \quad \text{и} \quad -z - |z| \leq 0$$

для всякого вещественного z , неравенство (6.31) влечет

$$\underline{b}_i \leq (Ax)_i \leq \bar{b}_i,$$

то есть $Ax \in \mathbf{b}$, как и ожидалось.

Пусть теперь матрица \mathbf{A} задачи имеет ненулеую ширину и $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$. Рассмотрим совокупность всех линейных задач о допусках для линейных систем $Vx = \mathbf{b}$ с $V \in \text{vert } \mathbf{A}$. Согласно представлению (6.10)

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \Xi_{tol}(V, \mathbf{b}),$$

и если для каждого $V \in \text{vert } \mathbf{A}$ интервальный вектор решения соответствующей задачи о допусках есть \mathbf{U}_V , $\mathbf{U}_V \subseteq \Xi_{tol}(V, \mathbf{b})$, то интервальный вектор \mathbf{U} , такой что

$$\mathbf{U} = \bigcap_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \mathbf{U}_V$$

также включен в $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. В частности, если все \mathbf{U}_V имеют общий центр и их радиусы определяются формулой (6.30), то имеем

$$\mathbf{U} = t + r\mathbf{e},$$

где

$$r = \min_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} r_V = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}.$$

Теорема, тем самым, доказана полностью. ■

Несмотря на внешнюю простоту доказательства, утверждение Теоремы 6.6.1 является наиболее тонким из результатов подобного сорта. Ранее В.В. Шайдуров установил в [5, 17], что если $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то для

$$r = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right|}{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right\} \quad (6.32)$$

интервальный вектор $(t + re)$ включён в $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Как видим, его формула практически совпадает с нашей за исключением того, что внутренний минимум берётся по *всем* матрицам $A \in \mathbf{A}$, а не по *конечному* множеству крайних матриц. Это, тем не менее, никоим образом не влияет на окончательный результат, который совершенно идентичен для обеих формул. Действительно, можно показать, что функция в фигурных скобках (6.32) является квазивогнутой (см. §11.7в). Минимум квазивогнутой функции достигается, как известно, в крайних точках выпуклой области определения. Таким образом, для всякого $i = 1, 2, \dots, m$, выражения в фигурных скобках (6.32) принимают свои минимальные значения на $A \in \mathbf{A}$ в вершинах интервальных векторов $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$, откуда и следует формула (6.29). Мы достигли тех же целей более элементарными средствами.

По смыслу линейной задачи о допусках нам нужны либо точные значения величин (6.29) и (6.32), либо оценки для них снизу, и простейший способ их получения состоит в том, чтобы взять левый конец *естественного интервального расширения* по \mathbf{A} для выражений в фигурных скобках (6.32). Иными словами, мы заменяем переменные a_{ij} интервалами их изменения \mathbf{a}_{ij} , выполняем арифметические операции между ними по правилам классической интервальной арифметики, затем берём нижний конец результирующего интервала. Алгоритм, представленный в Табл. 6.3 и впервые предложенный В.В. Шайдуровым (см. [5, 17]), именно так и делает.

Поскольку и числитель и знаменатель минимизируемого выражения содержат лишь по одному вхождению каждой из переменных a_{ij} в первой степени, то метод Шайдурова, в действительности, эквивалентен оцениванию минимума дроби как частного от минимума числителя на максимум знаменателя. Относительная точность такого оценивания, как нетрудно показать [5, 17], тем выше, чем меньше является ширина

Таблица 6.3. Алгоритм Шайдурова для вычисления размера бруса решения линейной задачи о допусках

Для данного $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ вычисляем интервалы

$$r_i = \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} t_j \right) \right|}{\sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}|},$$

$i = 1, 2, \dots, m$, и затем полагаем

$$\varrho := \min_{1 \leq i \leq m} r_i.$$

Интервальный вектор $(t + \varrho \mathbf{e})$, $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$, есть внутренняя оценка допустимого множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

матрицы \mathbf{A} .

Предложение 6.6.1 Для любой точки-центра $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ результаты, получаемые алгоритмом Ноймайера, совпадают с результатами алгоритма Шайдурова.

Доказательство. Действительно, условие

$$\eta \cdot \mathbf{A} \mathbf{e} \subseteq \mathbf{b} \ominus \mathbf{A} t$$

означает

$$\eta \cdot (\underline{\mathbf{A} \mathbf{e}})_i \geq (\underline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A} t})_i \quad \text{и} \quad \eta \cdot (\overline{\mathbf{A} \mathbf{e}})_i \leq (\overline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A} t})_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $\mathbf{A} \mathbf{e}$ — уравновешенный интервальный вектор, в котором

$$-(\underline{\mathbf{A} \mathbf{e}})_i = (\overline{\mathbf{A} \mathbf{e}})_i = |(\mathbf{A} \mathbf{e})_i|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Более того, для $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$(\underline{\mathbf{b}} \ominus \mathbf{A}t)_i \leq 0 \leq (\overline{\mathbf{b}} \ominus \mathbf{A}t)_i$$

и, таким образом, для всякого i верна следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \eta &\leq \min \left\{ \frac{(\underline{\mathbf{b}} \ominus \mathbf{A}t)_i}{(\underline{\mathbf{A}e})_i}, \frac{(\overline{\mathbf{b}} \ominus \mathbf{A}t)_i}{(\overline{\mathbf{A}e})_i} \right\} \\ &= \frac{\min \left\{ -(\text{mid } \mathbf{b}_i - \text{rad } \mathbf{b}_i) + (\underline{\mathbf{A}t})_i, (\text{mid } \mathbf{b}_i + \text{rad } \mathbf{b}_i) - (\overline{\mathbf{A}t})_i \right\}}{|(\mathbf{A}e)_i|} \\ &= \frac{\min \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (\underline{\mathbf{A}t})_i), \text{rad } \mathbf{b}_i - ((\overline{\mathbf{A}t})_i - \text{mid } \mathbf{b}_i) \right\}}{|(\mathbf{A}e)_i|} \\ &= \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \max \left\{ \text{mid } \mathbf{b}_i - (\underline{\mathbf{A}t})_i, (\overline{\mathbf{A}t})_i - \text{mid } \mathbf{b}_i \right\}}{|(\mathbf{A}e)_i|} \\ &= \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - |\text{mid } \mathbf{b}_i - (\mathbf{A}t)_i|}{|(\mathbf{A}e)_i|}. \end{aligned}$$

Для $i = 1, 2, \dots, m$ последнее выражение совпадает с нижней границей соответствующего интервала \mathbf{r}_i , получаемого в алгоритме Табл. 6.3, так что взятие минимума по всем i приводит к равенству $\eta = \varrho$. ■

Как метод Шайдурова, так и метод Ноймайера просты и легко реализуемы: если уже найдена точка $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то построение интервального решения вокруг неё требует всего $O(mn)$ арифметических операций. Но это достигается ценой значительного огрубления окончательного результата, особенно для широких интервальных матриц \mathbf{A} .

Пример. Построим брус внутренней оценки допустимого множества решений системы (6.4). В §6.4 мы нашли точку $(0, 0)^\top$ из внутренности её допустимого множества решений, и эту точку можно взять в качестве центра искомого бруса. В соответствии с методом Шайдурова

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\left| \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right] \right| + \left| [1, 2] \right|} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 2} = \frac{3}{8},$$

так что получаем кубик $([-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}], [-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}])^\top$. Он даже максимален по включению, так как касается границ допустимого множества решений (см. Рис. 6.2).

В выражении (6.29) взятие минимума по $i = 1, 2, \dots, m$ не представляет трудностей, так что нашей основной задачей является, по возможности, наиболее точное оценивание снизу минимума по $A \in \mathbf{A}$ от выражения в фигурных скобках в (6.29) и (6.32). По существу, остаток этой Главы будет посвящён решению именно этой задачи.

Обозначим для удобства

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)^\top := (\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})^\top$$

вне зависимости от индекса i , и пусть

$$\Phi(x) = \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |x_j|}. \quad (6.33)$$

Таким образом, подлежащая далее решению задача есть

Для функции $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, заданной выражением (6.33),
найти $\min_{x \in \text{vert } \mathbf{X}} \Phi(x)$ или хотя бы оценить его снизу.

6.7 Переборный алгоритм построения бруса решения

При алгоритмизации перебора вершин бруса $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ удобно занумеровать их с помощью n -значных двоичных чисел от $00 \dots 0$ до $11 \dots 1$. Сделать это можно различными способами, но наиболее простой и естественной является нумерация, при которой j -ый двоичный знак в номере вершины полагается равным 0, если j -ая координата этой вершины совпадает с левым концом интервала \mathbf{X}_j , и 1, если она совпадает с его правым концом. При такой нумерации вершина $(\underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_2, \dots, \underline{\mathbf{X}}_n)$, к примеру, имеет номер $00 \dots 0$, а вершина $(\overline{\mathbf{X}}_1, \overline{\mathbf{X}}_2, \dots, \overline{\mathbf{X}}_n)$ имеет номер $11 \dots 1$.

Пошаговое исследование вершин бруса \mathbf{X} может быть организовано как последовательный обход всех вершин, начиная, к примеру, с

Таблица 6.4. Простейший переборный алгоритм вычисления размеров бруса решения линейной задачи о допусках

```

 $S \leftarrow +\infty$  ;
DO FOR  $k = 0$  TO  $2^n - 1$ 
     $x \leftarrow \left( \begin{array}{l} \text{координата вершины бруса } \mathbf{X}, \\ \text{двоичный номер которой равен } k \end{array} \right)$ ;
     $s \leftarrow \Phi(x)$ ;
    IF (  $s < S$  )
         $S \leftarrow s$ 
    END IF
END DO

```

вершины $00 \dots 0$ и далее, переходя каждый раз к вершине со следующим двоичным номером. Этот процесс может быть описан псевдокодом Табл. 6.4.

Трудоёмкость выполнения этого алгоритма, пропорциональную 2^n , принципиально улучшить нельзя, но можно существенно уменьшить множитель при экспоненциальной части. Действительно, на каждом шаге процесса перебора вершин бруса \mathbf{X} мы вычисляем суммы

$$\Upsilon(x) = M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \quad \text{и} \quad \Theta(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

и затем значение целевой функции

$$\Phi(x) = \frac{R - |\Upsilon(x)|}{\Theta(x)},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{vert } \mathbf{X}$ — координаты исследуемой вершины. Если же обход вершин бруса будет выполняться некоторым специальным образом, так, что на каждом шаге мы станем переходить к соседней (смежной) вершине, координаты которой отличаются лишь в одной компоненте, то в суммах Υ и Θ изменится лишь по одному слагаемому.

Для вычисления их новых значений совсем необязательно заново суммировать все n членов. Гораздо более разумным будет перевычислить Υ и Θ посредством следующих рекуррентных формул: если новая исследуемая вершина отличается от предшествующей лишь в своей j -ой координате — она равна x''_j вместо x'_j — то

$$\text{новое значение } \Upsilon = \text{старое значение } \Upsilon + (x''_j - x'_j) \cdot t_j, \quad (6.34)$$

$$\text{новое значение } \Theta = \text{старое значение } \Theta + |x''_j| - |x'_j|. \quad (6.35)$$

Таблица 6.5. Модифицированный переборный алгоритм вычисления размеров бруса решения линейной задачи о допусках

```

 $S \leftarrow +\infty ;$ 
 $\mu \leftarrow \text{двоичное число } 00 \dots 0;$ 
DO FOR  $k = 0$  TO  $2^n - 1$ 
     $x \leftarrow \left( \begin{array}{l} \text{координата вершины бруса } \mathbf{X}, \\ \text{двоичный номер которой равен } \mu \end{array} \right);$ 
     $s \leftarrow \Phi(x);$ 
    IF (  $s < S$  )
         $S \leftarrow s$ 
    END IF
     $j \leftarrow \left( \begin{array}{l} \text{номер наибольшего разряда, в котором} \\ \text{отличаются двоичные числа } k \text{ и } k + 1 \end{array} \right);$ 
     $\mu \leftarrow \left( \begin{array}{l} \text{двоичное число, которое получается из } \mu \\ \text{заменой } j\text{-го разряда на дополнительный,} \\ \text{т.е. 0 заменяется на 1, а 1 на 0} \end{array} \right);$ 
END DO

```

Алгоритм Табл. 6.4 не обладает желаемым свойством “перехода к соседней вершине”. Например, последовательные двоичные числа 011 и 100 различаются в трёх разрядах, а не в одном, как это должно было бы быть для соседних вершин. Следовательно, для реализации сфор-

мулированной выше идеи, нам необходим специальный алгоритм, являющийся, по существу, перенумерацией вершин бруса. Мы опишем его рекуррентно, назначая, как и прежде, для шагов алгоритма n -значные двоичные номера.

Предложение 6.7.1 *Алгоритм Табл. 6.5 проходит ровно по одному разу через каждую вершину бруса X , а любые две исследуемые алгоритмом вершины с последовательными номерами μ_k и μ_{k+1} являются смежными.*

Доказательство. Оказывается, что свойство исследуемого алгоритма выполнять полный перебор вершин сохраняется также справедливым и в том случае, если в качестве начальной вершины берётся *любая* другая вершина, а не только $00\dots 00$. Мы докажем этот более общий факт индукцией по размерности n рассматриваемого бруса.

Действительно, если $n = 1$, то утверждение очевидно для обоих двоичных последовательностей $\{0, 1\}$ и $\{1, 0\}$, которые могут порождаться нашим алгоритмом. Предположив, что оно уже доказано для размерности $(n - 1)$, рассмотрим перенумерацию вершин, порождаемую алгоритмом Табл. 6.5 для размерности n :

$$\mu_{00\dots 00}, \mu_{00\dots 01}, \dots, \mu_{11\dots 11}. \quad (6.36)$$

Важно понять, что в этой последовательности n -ый знак изменяется лишь однажды, а именно, при смене номера шага с $01\dots 11$ на $10\dots 00$. Таким образом, ни одно число из первой половины последовательности (6.36) не может быть равным числу из второй половины этой последовательности в силу различности их n -ых знаков. Отбрасывая этот n -ый знак у чисел из (6.36), мы получим две последовательности, которые перенумеровывают вершины $(n - 1)$ -мерного бруса:

$$\mu'_{0\dots 00}, \mu'_{0\dots 01}, \dots, \mu'_{1\dots 11}$$

и

$$\mu''_{0\dots 00}, \mu''_{0\dots 01}, \dots, \mu''_{1\dots 11}.$$

Обе они порождаются исследуемым алгоритмом, но из разных начальных чисел $\mu'_{00\dots 0}$ и $\mu''_{00\dots 0}$, в то время как $\mu''_{00\dots 0} = \mu'_{11\dots 1}$. По индукционному предположению каждая такая последовательность содержит только различные $(n - 1)$ -значные двоичные числа от $00\dots 0$ до $11\dots 1$.

Следовательно, все числа из последовательности (6.36) также отличаются друг от друга. Всего вместе их 2^n , и потому каждое из них встречается лишь один раз в (6.36).

Последовательность (6.36) является, таким образом, некоторой перенумерацией вершин n -мерного бруса X . Кроме того, из описания алгоритма в Табл. 6.5 непосредственно видно, что вершины с номерами ν и $\nu + 1$ являются смежными. Предложение тем самым полностью доказано. ■

Выигрыш алгоритма Табл. 6.5 по трудоёмкости в сравнении с алгоритмом Табл. 6.4 является тем большим, чем больше размерность исходной задачи, но экспоненциальный характер зависимости трудоёмкости от размерности всё-таки не преодолевается. Таким образом, практическая значимость описанных в этом параграфе алгоритмов полного перебора ограничена только задачами малой размерности.

Ещё одно необходимое замечание состоит в том, что в процессе работы алгоритма Табл. 6.5 могут накапливаться значительные ошибки от рекуррентного перевычисления выражений Υ и Θ посредством (6.34)–(6.35), так как алгоритм не является самоисправляющимся. Для того, чтобы застраховаться от возможного раздувания бруса внутренней оценки за пределы допустимого множества решений, целесообразно вести все вычисления в интервальной машинной арифметике и результатом взять нижний конец получившегося интервала (если он получился положительным).

6.8 Алгоритмы типа “ветвей и границ”

Как видим, желательно иметь в своем распоряжении методы вычисления величины (6.29)–(6.32) с точностью, превосходящей точность алгоритмов Табл. 6.3–6.2, но сложностью выполнения, меньшей чем у переборных алгоритмов Табл. 6.4–6.5, основанных на Теореме 6.6.1. Именно таким является подход, развиваемый ниже в этом параграфе. Он имеет в своей основе известный “метод ветвей и границ” и занимающий промежуточное положение между простейшими алгоритмами Табл. 6.3–6.2 и переборными методами предыдущего параграфа. Время его исполнения в наихудшем случае растёт как экспонента от размерности задачи, но из-за гибкой вычислительной схемы он может быть с успехом применён к задачам любого размера. При этом точность вычисления величин

ны (6.29)–(6.32) будет лимитироваться лишь наличными вычислительными ресурсами — производительностью ЭВМ и, возможно, объёмом оперативной памяти.

Как известно, естественное интервальное расширение рациональной функции $F(x)$ ($= F(x_1, x_2, \dots, x_n)$) совпадает с точной областью её значений, если каждая переменная имеет в F лишь одно вхождение в первой степени и при выполнении интервальных арифметических операций нам не встретилось деление на интервал содержащий нуль. Таким образом, для $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \in \mathbb{IR}^n$ левый конец $\underline{F(\mathbf{X})}$ естественного интервального расширения $F(\mathbf{X})$ является глобальным минимумом F на \mathbf{X} , а его правый конец $\overline{F(\mathbf{X})}$ — это глобальный максимум F на \mathbf{X} . Но мы можем найти не только сами эти значения $\min\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$ и $\max\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$, а ещё и аргументы F , доставляющие их, т.е. множества

$$\text{Arg } \min\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\} \quad \text{и} \quad \text{Arg } \max\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\}.$$

Ниже мы будем обозначать их как

$$\text{Arg } \underline{F(\mathbf{X})} \quad \text{и} \quad \text{Arg } \overline{F(\mathbf{X})}$$

для краткости.

Действительно, если каждая переменная имеет лишь одно вхождение в первой степени в рациональном выражении F , то зависимость F , к примеру, от x_i выглядит следующим образом:

$$\text{либо } F(x_i) = \kappa x_i + \mu \tag{6.37}$$

$$\text{либо } F(x_i) = \frac{1}{\kappa x_i + \mu}, \tag{6.38}$$

где κ, μ — константы, не зависящие от x_i . В любом случае $F(x_i)$ является монотонной функцией от x_i (что касается второй возможности, это верно для $0 \notin \kappa \mathbf{X}_i + \mu$). Таким образом, для фиксированных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, значения $\min F(x_i)$ и $\max F(x_i)$ достигаются в концах интервала \mathbf{X}_i или, если $\kappa = 0$, в любой точке этого интервала \mathbf{X}_i . Поскольку подобные рассуждения справедливы для любой переменной x_i вне зависимости от конкретных значений других переменных, то множества $\text{Arg } \underline{F(\mathbf{X})}$ и $\text{Arg } \overline{F(\mathbf{X})}$ являются либо вершинами бруса \mathbf{X} , либо целыми его гранями. Как они могут быть найдены?

При выполнении с интервалами любой из четырех арифметических операций — сложения, умножения, вычитания или деления — мы можем определить одновременно с результатом этой операции также и то, какие именно концы исходных интервалов дают, складываясь (соответственно, вычитаясь, умножаясь или делясь), тот или иной конец результирующего интервала. При вычитании, например, максимум разности, т.е. правый конец результирующего интервала достигается, когда уменьшаемое равно правому концу, а вычитаемое — левому концу соответствующих интервалов.

Чтобы вычислить произведение $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2$, нужно

- 1) выполнить четыре умножения — найти $\overline{\mathbf{X}}_1 \overline{\mathbf{X}}_2$, $\underline{\mathbf{X}}_1 \overline{\mathbf{X}}_2$, $\overline{\mathbf{X}}_1 \underline{\mathbf{X}}_2$, $\underline{\mathbf{X}}_1 \underline{\mathbf{X}}_2$,
- 2) выбрать минимум и максимум из полученных чисел.

Пусть, к примеру, этими экстремумами являются $\underline{\mathbf{X}}_1 \overline{\mathbf{X}}_2$ и $\overline{\mathbf{X}}_1 \overline{\mathbf{X}}_2$. Мы, тем самым, получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Arg min} \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2 \} &= \left(\frac{\underline{\mathbf{X}}_1}{\overline{\mathbf{X}}_2} \right), \\ \text{Arg max} \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2 \} &= \left(\frac{\overline{\mathbf{X}}_1}{\overline{\mathbf{X}}_2} \right). \end{aligned}$$

Если бы минимальными элементами множества

$$\{ \overline{\mathbf{X}}_1 \overline{\mathbf{X}}_2, \underline{\mathbf{X}}_1 \overline{\mathbf{X}}_2, \overline{\mathbf{X}}_1 \underline{\mathbf{X}}_2, \underline{\mathbf{X}}_1 \underline{\mathbf{X}}_2 \}$$

были одновременно два произведения, скажем, $\underline{\mathbf{X}}_1 \underline{\mathbf{X}}_2$ и $\underline{\mathbf{X}}_1 \overline{\mathbf{X}}_2$, то мы заключили бы следующее:

$$\text{Arg min} \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X} \} = \left(\frac{\underline{\mathbf{X}}_1}{\mathbf{X}_2} \right),$$

т.е. в этом случае множество $\text{Arg min } x_1 \cdot x_2$ состоит из целой грани прямоугольника “входных данных” $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2$.

Далее, значение любого конечного рационального выражения $F(x)$ от интервальных аргументов может быть вычислено за конечное число интервальных сложений, вычитаний, умножений и делений. Если

каждая переменная встречается в этом выражении единожды $F(x)$ в первой степени, то, рекуррентно отслеживая эволюцию концов интервалов, мы сможем найти тот набор концов исходных интервалов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, на котором достигаются $\underline{F(\mathbf{X})}$ и $\overline{F(\mathbf{X})}$.

Нетрудно понять, что всё вышесказанное остается верным, если выражение $F(x)$, имеющее по одному вхождению каждой переменной, сконструировано не только из четырёх арифметических операций, но содержит также вхождения $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ любых других функций. Нам лишь необходимо при взятии “естественного интервального расширения” от F заменить $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ на вхождения соответствующих оптимальных интервальных расширений. Например, если, в выражениях

$$\Psi(x) = R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right| \quad \text{и} \quad \Theta(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

мы заменим все арифметические операции их интервальными аналогами и вместо функции абсолютного значения возьмем её оптимальное интервальное расширение

$$\text{abs } \mathbf{X} = [\langle \mathbf{X} \rangle, |\mathbf{X}|],$$

то подстановка вместо переменных x_1, x_2, \dots, x_n интервалов их возможных изменений $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ даст точные области значений для $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ на брус $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \in \mathbb{IR}^n$.

Ниже нас будут интересовать, главным образом, множества

$$\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \quad \text{и} \quad \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$$

для некоторого бруса $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$. Задача их нахождения является несколько не более трудной, чем для чисто рациональных выражений, поскольку мы знаем как вычислять Arg min и Arg max для функции абсолютного значения, входящей в $\Psi(x)$ и $\Theta(x)$ помимо основных арифметических операций. Она может быть решена той же самой методикой “отслеживания границ”, которую мы применили для определения аргументов экстремумов функций (6.37)–(6.38).

Конечно, искомое множество $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$ может иметь нетривиальную структуру. В частности, оно может быть несвязным если $\underline{\mathbf{X}}_j = -\overline{\mathbf{X}}_j \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Множество $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$ также несвязно, если

$$\overline{M - \sum_{j=1}^n [\underline{\mathbf{X}}_j, \overline{\mathbf{X}}_j] t_j} = \sum_{j=1}^n [\underline{\mathbf{X}}_j, \overline{\mathbf{X}}_j] t_j - M.$$

В любом случае отдельные компоненты связности множеств $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$ и $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$ представимы в виде прямых произведений $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_n$, где \mathcal{G}_j суть либо вершины бруса \mathbf{X} , либо целые его грани.

Договоримся ниже понимать под $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$ или $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$ некоторую компоненту связности множества точек, на которых достигаются $\underline{\Psi(\mathbf{X})}$ или $\overline{\Theta(\mathbf{X})}$ соответственно, причём неважно, какую именно. Дело в том, что для множеств $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ со структурой прямого произведения, т.е. таких что

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_n, \mathcal{G}_j \subseteq \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \dots \times \mathcal{H}_n, \mathcal{H}_j \subseteq \mathbb{R},$$

условие $(\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset)$ эквивалентно $(\mathcal{G}_j \cap \mathcal{H}_j = \emptyset)$ для по крайней мере одного из $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Далее мы будем существенно использовать это свойство.

В целом, псевдокод соответствующего алгоритма для вычисления $\overline{\Theta(\mathbf{X})}$ и $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$ может выглядеть, к примеру, следующим образом:

```

S ← 0 ;
DO FOR j = 1 TO n
  IF ( |Xj| ≤ |Xj| ) THEN
    S ← S + Xj ;
    ( Arg Θ(X) )j ← Xj
  ELSE
    S ← S + Xj ;
    ( Arg Θ(X) )j ← Xj
  END IF
END DO
Θ(X) ← S ;

```

После этих необходимых приготовлений мы переходим собственно

к решению задачи (6.6), т.е. к вычислению

$$\begin{aligned} \min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{X}\} &= \min\left\{\frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \text{vert } \mathbf{X}\right\} \\ &= \min_{\substack{x_j \in \{\underline{\mathbf{X}}_j, \overline{\mathbf{X}}_j\} \\ j=1,2,\dots,n}} \left\{ \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |x_j|} \right\}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где $R, M, t_1, t_2, \dots, t_n$ — некоторые известные константы. Как уже было отмечено §6.6, простейшим способом оценивания величины (6.39) снизу является взятие естественного интервального расширения $\Phi(\mathbf{X})$ по всему брусу \mathbf{X} для минимизируемой функции $\Phi(x)$. Его левый конец $\underline{\Phi(\mathbf{X})}$, совпадающий с

$$\frac{\underline{\Psi(\mathbf{X})}}{\overline{\Theta(\mathbf{X})}} = \frac{\min\{\Psi(x) \mid x \in \mathbf{X}\}}{\max\{\Theta(x) \mid x \in \mathbf{X}\}}$$

даёт требуемую оценку снизу для величины $\min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{X}\}$.

Найдем множества $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$ и $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$. Нам могут встретиться две взаимоисключающие ситуации:

$$1) \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})} \neq \emptyset$$

$$\text{или} \quad 2) \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})} = \emptyset.$$

В первом случае пересечение

$$\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$$

обязано содержать точку из $\text{vert } \mathbf{X}$, которая доставляет глобальный максимум на \mathbf{X} дроби $\Psi(x)/\Theta(x)$, так что задачу минимизации (6.39) можно считать успешно решенной. Если же $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})} = \emptyset$, то

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} = \frac{\min\{\Psi(x) \mid x \in \mathbf{X}\}}{\max\{\Theta(x) \mid x \in \mathbf{X}\}} \geq \min\left\{\frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \mathbf{X}\right\}$$

и существует индекс $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, такой что k -ая компонента множеств $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$ и $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$ не имеет общих значений:

$$(\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})})_k \cap (\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})})_k = \emptyset.$$

Мы станем называть подобные компоненты бруса \mathbf{X} *инцидентными*.

Если k — это индекс инцидентной компоненты (и поэтому, в частности, $\underline{\mathbf{X}}_k \neq \overline{\mathbf{X}}_k$), то положим

$$\mathbf{X}' := (\mathbf{X}_1, \dots, \underline{\mathbf{X}}_k, \dots, \mathbf{X}_n),$$

$$\mathbf{X}'' := (\mathbf{X}_1, \dots, \overline{\mathbf{X}}_k, \dots, \mathbf{X}_n).$$

Будем говорить, что брусы \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' являются *потомками* от \mathbf{X} и называть саму процедуру их порождения *дроблением* исходного бруса \mathbf{X} . Монотонность интервальной арифметики по включению влечёт

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} \leq \underline{\Phi(\mathbf{X}')} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi(\mathbf{X})} \leq \underline{\Phi(\mathbf{X}')},$$

и поэтому

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} \leq \min \left\{ \underline{\Phi(\mathbf{X}')}, \underline{\Phi(\mathbf{X}'')} \right\}.$$

В действительности, на практике это неравенство чаще всего будет строгим, так как множества $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$ и $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$ будут прямыми произведениями. Их попадание в разные брусы-потомки в результате разбиения \mathbf{X} , например, такого, что

$$\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \subseteq \mathbf{X}' \quad \text{и} \quad \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})} \subseteq \mathbf{X}'',$$

имеет следствием

$$\underline{\Psi(\mathbf{X})} = \underline{\Psi(\mathbf{X}')} \quad \text{и} \quad \overline{\Theta(\mathbf{X})} = \overline{\Theta(\mathbf{X}')},$$

тогда как

$$\underline{\Psi(\mathbf{X}'')} > \underline{\Psi(\mathbf{X})} \quad \text{и} \quad \overline{\Theta(\mathbf{X}'')} < \overline{\Theta(\mathbf{X})}.$$

Следовательно,

$$\underline{\Psi(\mathbf{X})} / \overline{\Theta(\mathbf{X})} < \underline{\Psi(\mathbf{X}')} / \overline{\Theta(\mathbf{X}')}$$

и

$$\underline{\Psi(\mathbf{X})} / \overline{\Theta(\mathbf{X})} < \underline{\Psi(\mathbf{X}'')} / \overline{\Theta(\mathbf{X}'')},$$

т.е. в действительности

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} < \min \left\{ \underline{\Phi(\mathbf{X}')}, \underline{\Phi(\mathbf{X}'')} \right\}.$$

Пусть

$$\min\{ \Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{X} \} = \Phi(y)$$

для некоторой вершины $y \in \text{vert } \mathbf{X}$. Если y' и y'' — это точки, полученные из Π заменой её k -ой компоненты на \underline{X}_k и \overline{X}_k соответственно, то, вновь воспользовавшись свойством монотонности интервальной арифметики, найдём

$$\underline{\Phi(\mathbf{X}')} \leq \Phi(y') \quad \text{и} \quad \underline{\Phi(\mathbf{X}'')} \leq \Phi(y''),$$

так что

$$\min \left\{ \underline{\Phi(\mathbf{X}')} , \underline{\Phi(\mathbf{X}'')} \right\} \leq \min \{ \Phi(\Pi'), \Phi(\Pi'') \} = \Phi(\Pi).$$

По этой причине

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} < \min \{ \underline{\Phi(\mathbf{X}')} , \underline{\Phi(\mathbf{X}'')} \} \leq \min \left\{ \frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \text{vert } \mathbf{X} \right\}.$$

Представленные рассуждения являются, таким образом, практическим рецептом улучшения оценки снизу для (6.39), причём процесс дробления может быть повторен по отношению к брусам-потомкам \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' , что даст ещё более точное приближение $\min\{ \Phi(x) \mid x \in \mathbf{X} \}$ в виде минимума полученных для этих брусков оценок. Далее потомки от \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' также могут быть разбиты пополам для дальнейшего уточнения оценки (6.39) и т.д. Имеет смысл организовать этот процесс последовательного вычисления всё более точных оценок в соответствии с общей схемой “метода ветвей и границ”, уже использованной в Главе 3: дробление бруса \mathbf{X} на потомки $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$ есть не что иное, как разбиение задачи на подзадачи, т.е. порождение “ветвей”, тогда как вычисление $\underline{\Phi(\mathbf{P})}$, $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{X}$, — это просто оценивание “границ” целевой функции по этим “ветвям”.

Будем хранить множество всех брусков \mathbf{P} , порождаемых в процессе дробления, вместе с их соответствующими оценками в виде упорядоченного *рабочего списка* \mathcal{L} , состоящего из шестичленных записей

$$(\mathbf{P}, \underline{\Phi(\mathbf{P})}, \underline{\Psi(\mathbf{P})}, \overline{\Theta(\mathbf{P})}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{P})}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{P})}),$$

$\mathbf{P} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{X}$. Как обычно, первую запись списка \mathcal{L} , имеющую наименьшее значение оценки $\underline{\Phi(\mathbf{P})}$ к началу текущего шага алгоритма, мы будем называть *ведущей записью*. В начале нашего алгоритма последовательного уточнения

$$\mathcal{L} = \left\{ (\mathbf{X}, \underline{\Phi(\mathbf{X})}, \underline{\Psi(\mathbf{X})}, \overline{\Theta(\mathbf{X})}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}) \right\},$$

а затем на каждом шаге список модифицируется в соответствии с инструкциями Табл. 6.6.

Таблица 6.6. Алгоритм уточнения размеров
бруса решения линейной задачи о допусках

```

 $Q \leftarrow X;$ 
вычисляем  $\overline{\Theta(Q)}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(Q)}$ ,  $\underline{\Psi(Q)}$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)}$ ;
вычисляем  $\Phi(X) = \Psi(X)/\Theta(X)$ ;
инициализируем рабочий список  $\mathcal{L}$ :
 $\mathcal{L} \leftarrow \{ (X, \underline{\Phi(X)}, \underline{\Psi(X)}, \overline{\Theta(X)}, \text{Arg } \underline{\Psi(X)}, \text{Arg } \overline{\Theta(X)}) \};$ 
DO WHILE (  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(Q)} = \emptyset$  )
    выбираем в ведущем бруске инцидентную компоненту  $Q_i$ ;
    разбиваем  $Q$  на потомки  $Q'$  и  $Q''$  так, чтобы  $Q'_i$  и  $Q''_i$ 
        являлись противоположными концами интервала  $Q_i$ 
        и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \subseteq Q'$ ,  $\text{Arg } \overline{\Theta(Q)} \subseteq Q''$ ;
    удаляем из рабочего списка  $\mathcal{L}$  бывшую ведущую запись
        (  $Q, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)}$  );
    вычисляем  $\overline{\Theta(Q')}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(Q')}$ ,  $\underline{\Psi(Q'')}$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q'')}$ ;
    присваиваем
         $\underline{\Phi(Q')} \leftarrow \underline{\Psi(Q)} / \overline{\Theta(Q')}$  и  $\underline{\Phi(Q'')} \leftarrow \underline{\Psi(Q'')} / \overline{\Theta(Q)}$ ;
    помещаем записи
        (  $Q', \underline{\Phi(Q')}, \underline{\Psi(Q')}, \overline{\Theta(Q')}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q')}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q')}$  ) и
        (  $Q'', \underline{\Phi(Q'')}, \underline{\Psi(Q'')}, \overline{\Theta(Q'')}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q'')}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q'')}$  )
        в список  $\mathcal{L}$  в подходящем порядке (по возрастанию
        второго поля);
    обозначаем новую ведущую запись списка  $\mathcal{L}$  через
        (  $Q, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)}$  );
END DO

```

В результате выполнения алгоритма порождается неубывающая по-

следовательность оценок $\Phi(Q)$ для ведущих прямоугольников Q , все более точно приближающая искомый $\min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } X\}$ снизу. Она конечна: если в исходном брус X ненулевую ширину имеют l компонент ($l \leq n$), то, как нетрудно видеть, ведущий брус превратится в точку y после не более чем 2^l шагов алгоритма Табл. 6.6 и $\Phi(y) = \min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } X\}$.

Идея подобных алгоритмов глобальной оптимизации, несомненно, не нова, аналогичные методы мы рассматривали в Главе 3, где указана и подробная библиография. Но при построении алгоритма Табл. 6.6 мы постарались максимально учесть особенности решаемой задачи — вид минимизируемой функции, структуру области определения и тот факт, что искомый $\min\{\Phi(x) \mid x \in X\}$ достигается в вершинах бруса X . В частности, мы дробим ведущие брусы на потомки, которые являются не просто половинками, но двумя противоположными гранями меньшей размерности. Другая оригинальная особенность алгоритма Табл. 6.6 состоит в том, что дробление (бисекция) ведущих брусков выполняется не по всем компонентам, а лишь по инцидентным, т.е. такими, уменьшение которых только и обеспечивает улучшение оценки целевой функции. Иными словами, мы не скатываемся к беспорядочному измельчению ведущих брусков, но дробим так, чтобы обеспечить гарантированное уточнение оценки для (6.39). Наконец, алгоритм Табл. 6.6 более полно учитывает информацию о своих предыдущих шагах ценой некоторого удлинения записей, хранимых в рабочем списке \mathcal{L} . Благодаря последнему обстоятельству мы, в действительности, вычисляем оценку целевой функции всего один раз для двух брусков-потомков.

Продолжим построение более практичной вычислительной процедуры на основе алгоритма Табл. 6.6. В принципе, мы можем улучшить этот простейший алгоритм, пользуясь стандартным набором модификаций, перечисленных нами в Главе 3 (в списке на стр. 136). Ниже мы реализуем только первый (“тест средней точки”) и второй (“тест на монотонность”) из представленных в нём пунктов, тем более, что в нашей ситуации они оказываются взаимно дополняющими друг друга. Кроме того, чтобы сделать улучшение оценки целевой функции более весомым, имеет смысл воспользоваться широко известной эвристической рекомендацией: на каждом шаге алгоритма ведущий брус дробится по самой длинной из инцидентных компонент.

“Тест средней точки” в применении к алгоритму Табл. 6.6 реализуется следующим стандартным образом. На каждом шаге алгоритма наряду с $\Phi(P)$ мы будем дополнительно

- вычислять величину $\Phi(\text{mid } \mathbf{P})$ и
- поддерживать вещественный параметр ϕ , равный наименьшему из значений $\Phi(\text{mid } \mathbf{P})$ для всех брусков \mathbf{P} , когда-либо порождённых алгоритмом до текущего шага.

Тогда

$$\min\{\Phi(x) \mid x \in \mathbf{X}\} \leq \phi,$$

и все записи

$$(\mathbf{P}, \underline{\Phi(\mathbf{P})}, \underline{\Psi(\mathbf{P})}, \overline{\Theta(\mathbf{P})}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{P})}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{P})}),$$

которые удовлетворяют

$$\phi < \underline{\Phi(\mathbf{P})} \tag{6.40}$$

могут быть удалены из списка \mathcal{L} без какого-либо влияния на результат работы алгоритма.

Но на пути реализации этой идеи стоят значительные трудности. Дело в том, что в алгоритме Табл. 6.6 диаметры ведущих брусков не обязательно стремятся к нулю, так как брусья дробятся только по инцидентным компонентам. Подобная особенность алгоритма Табл. 6.6, несомненно, является весьма выгодной, так как обеспечивает экономию и целенаправленность вычислительных усилий. Но она же приводит к тому, что разность

$$(\Phi(\text{mid } \mathbf{P}) - \underline{\Phi(\mathbf{P})})$$

может оставаться большей некоторого положительного числа даже для ведущих брусков \mathbf{Q} . Численные эксперименты показывают, что тогда, как правило, неравенство (6.40) выполняется крайне редко, и столь же редко мы можем признать бесперспективной ту или иную запись списка \mathcal{L} . Таким образом, имеется необходимость дополнить Алгоритм 6.6 помимо “теста на промежуточное значение” некоторой процедурой, которая уменьшает размер компонент вне зависимости от того, являются они инцидентными или нет. Эту роль может играть, например, сжатие бруса по компоненте, на которой выявлена монотонность целевой функции.

Целевая функция $\Phi(x)$ не является гладкой, но она непрерывна и почти всюду дифференцируема. Следовательно, исследование её монотонности по отдельным переменным на брусках $\mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ можно проводить посредством изучения знака интервального расширения частных

Таблица 6.7. Модифицированный алгоритм уточнения
размеров бруса решения линейной задачи о допусках

```

 $Q \leftarrow X; \phi \leftarrow \Phi(\text{mid } X);$ 
вычисляем  $\overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \Phi(X) = \Psi(X)/\Theta(X);$ 
 $\mathcal{L} \leftarrow \{ (X, \underline{\Phi(X)}, \underline{\Psi(X)}, \overline{\Theta(X)}, \text{Arg } \underline{\Psi(X)}, \text{Arg } \overline{\Theta(X)}) \};$ 
DO WHILE (  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(Q)} = \emptyset \ \& \ (\phi - \underline{\Phi(Q)}) \leq \epsilon$  )
    выбираем в ведущем брус инцидентную компоненту  $Q_i$ 
    наибольшей длины и рассекаем  $Q$  на потомки  $Q'$  и  $Q''$  так,
    чтобы  $Q'_i$  и  $Q''_i$  являлись противоположными концами
    интервала  $Q_i$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \subseteq Q', \text{Arg } \overline{\Theta(Q)} \subseteq Q''$ 
    находим естественные интервальные расширения выражений
    (6.41) на  $Q'$  для всех  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  таких, что  $\text{wid } Q'_j \neq 0$ ;
    если результатом является неотрицательный интервал, то
    заменяем  $Q'_j$  на его левый конец  $\underline{Q}'_j$ , а если неположительный,
    то на правый конец  $\overline{Q}'_j$ ;
    выполняем инструкции предыдущего пункта для бруса  $Q''$ ;
    вычисляем  $\overline{\Theta(Q')}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(Q')}, \underline{\Psi(Q'')}$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q'')};$ 
    присваиваем
         $\underline{\Phi(Q')} \leftarrow \underline{\Psi(Q)} / \overline{\Theta(Q')} \text{ и } \underline{\Phi(Q'')} \leftarrow \underline{\Psi(Q'')} / \overline{\Theta(Q)};$ 
    если  $\underline{\Phi(Q')} \leq \phi$ , то помещаем запись  $(Q', \underline{\Phi(Q')}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q')},$ 
         $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q')})$  в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке
        (по возрастанию второго члена);
    если  $\underline{\Phi(Q'')} \leq \phi$ , то помещаем запись  $(Q'', \underline{\Phi(Q'')}, \underline{\Psi(Q'')}, \overline{\Theta(Q)},$ 
         $\text{Arg } \underline{\Psi(Q'')}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)})$  в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке;
    удаляем бывшую ведущую запись  $(Q, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)},$ 
         $\overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)})$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    вычисляем  $\omega \leftarrow \min\{ \Phi(\text{mid } Q'), \Phi(\text{mid } Q'') \};$ 
    если  $\phi > \omega$ , то полагаем  $\phi \leftarrow \omega$  и чистим список  $\mathcal{L}$ , т.е.
        удаляем из него все такие записи  $(P, \underline{\Phi(P)}, \underline{\Psi(P)}, \overline{\Theta(P)},$ 
         $\text{Arg } \underline{\Psi(P)}, \text{Arg } \overline{\Theta(P)})$ , что  $\underline{\Phi(P)} > \phi$ ;
    обозначаем новую ведущую запись списка через
         $(Q, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)});$ 
END DO

```

производных $\partial\Phi(x)/\partial x_j$ на \mathbf{P} . Так как $\Phi(x) = \Psi(x)/\Theta(x)$, то имеем

$$\Phi'(x) = \frac{\Psi'(x)\Theta(x) - \Psi(x)\Theta'(x)}{(\Theta(x))^2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right| \right) \\ &= -\operatorname{sgn} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \\ &= t_j \cdot \operatorname{sgn} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right), \\ \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) = \operatorname{sgn} x_j, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Psi'(x)\Theta(x) - \Psi(x)\Theta'(x) &= \\ t_j \cdot \operatorname{sgn} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) &- \\ - \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \cdot \operatorname{sgn} x_j. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Вычисление естественных интервальных расширений для выражений (6.41) не составляет труда, а их знаки совпадают с интересующими нас знаками естественных интервальных расширения частных производных $\partial\Phi(x)/\partial x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

В целом, для практического вычисления размеров интервального решения линейной задачи о допусках мы рекомендуем алгоритм, представленный в Табл. 6.7. В условии выполнения цикла DO WHILE этого псевдокода величина ϵ определяет а priori заданное требование на абсолютную точностью результата. Но, как показывает вычислительный

опыт, для задач больших размерностей более частой причиной завершения работы является исчерпание ресурсов вычислительной системы (главным образом, времени). В подобных случаях мы, тем не менее, всё равно получаем некоторый ответ для решаемой задачи в виде последней вычисленной ведущей оценки $\Phi(\mathbf{Q})$, т.е. алгоритм Табл. 6.6 является *последовательно гарантирующим* (см. Главу 10).

Комментарий к Главе 6

К §6.1 История задачи о допусках и допустимого множества решений для интервальных систем уравнений частично уже затрагивалась в Комментарий к Главе 4.

В оригинальной статье [29] Е. Нудинг называл множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ *множеством внутренних решений*, а точки допустимого множества решений весьма длительное время назывались *внутренними решениями* ИСЛАУ [33]. Саму же задачу внутреннего оценивания допустимого множества решений (6.5) иногда называли *внутренней задачей* для интервальных линейных систем [5, 17].

А. Ноймайер в [26, 27] и некоторые другие авторы в 80-е годы прошлого века использовали для (6.2) термин *ограниченное множество решений*.

В конце концов терминология постепенно устоялась, и множество решений (6.2) стали называть *допустимым множеством решений*. История возникновения этого множества решений и связанных с ним постановок задач приведена А. Ноймайером в [26], а также Б. Келлинг и Д. Эльшлегелем в [23, 24].

В работах А.Ф. Бочкова и Т.В. Евтушенко [1, 2], выполненных на кафедре автоматики Московского Энергетического Института, допустимое множество решений ИСЛАУ исследовалось в связи с необходимостью расчёта режимов технологических процессов в условиях неопределённости. При этом возникала необходимость не просто находить оценку допустимого множества решений, но даже оптимизировать на нём некоторый функционал, характеризующий качество рассматриваемого производственного процесса.

Результат Предложения 6.1.1 — выпуклость и многогранность допустимого множества решений — может быть доказан многими способами, см. [17, 24, 28, 33]. Наше доказательство следует работе [17].

К §6.3 В англоязычной экономической литературе модели межотраслевого баланса называют также моделями “затраты-выпуск” (input-output models).

Примеры, демонстрирующие несостоятельность “теста средней системы” для выбора точки из допустимого множества решений, были впервые представлены автором в препринте [18].

К §6.6 Существуют отличные от “центрового” подходы к построению бруса-решения линейной задачи о допусках.

Как уже упоминалось, принципиально иной “формальный” подход к решению линейной задачи о допусках, при котором она сводится к нахождению формального интервального решения ИСЛАУ, подробно рассматривается в Главе 11 книги.

А.Ф. Бочков и Т.В. Евтушенко в [1] шли к построению интервала-решения ЛЗД более прямым и очевидным путем, выписывая в явном виде условия принадлежности его вершин допустимому множеству решений, и решая далее с этими ограничениями задачу максимизации объема гипербруса. Возможности этой методики исчерпываются, правда, задачами небольшой размерности, поскольку количество ограничений в получающейся оптимизационной задаче множится экспоненциально.

Впоследствии к похожим результатам пришел Н.А. Хлебакин [16], сведя вписывание во множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ бруса наибольшего периметра к решению некоторой полной задачи линейного программирования.

Литература к главе 6

- [1] Бочков А. Ф., Евтушенко Т. В. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределённости. – Москва, 1988. – 17 с. – Депонировано в ВИНТИ, №2891-B88.
- [2] Бочков А. Ф., Евтушенко Т. В. Оптимизация режимов технологических процессов по интервальным моделям // *Вопросы кибернетики. Устройства и системы* / Сб. научн. трудов под ред. Евтихьева Н.Н. – Москва: Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1989. – С. 10–17.
- [3] Данциг Дж. *Линейное программирование, его обобщения и приложения*. – М.: Прогресс, 1974.

- [4] ДЕМЬЯНОВ В.Ф., ВАСИЛЬЕВ Л.В. *Недифференцируемая оптимизация*. – Москва: Наука, 1981.
- [5] ДОВРОНЕЦ Б.С., ШАЙДУРОВ В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [6] ДУГАРОВА И.В., СМАГИНА Е.М. Обеспечение устойчивости системы с неопределёнными параметрами // *Автоматика и Телемеханика*. – 1990. – №11. – С. 176–181.
- [7] ЗАХАРОВ А.В., ШОКИН Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // *Доклады АН СССР*. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292–295.
- [8] ИВЛЕВ Р.С. Построение и исследование свойств многомерных систем управления интервально-заданными объектами управления. Дисс. ...к.т.н. – Алматы: Институт проблем информатики и управления, 1999.
- [9] ИВЛЕВ Р.С. Асимптотическая устойчивость линейных интервально-заданных систем // *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*. – Казань, 2001. – Вып. 2(14), т. 7. – С. 55–63.
- [10] МИНУ М. *Математическое программирование. Теория и алгоритмы*. – Москва: Наука, 1990.
- [11] ПАПАДИМИТРИУ Х., СТАЙГЛИЦ К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*. – Москва: Мир, 1985.
- [12] ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию*. – Москва: Наука, 1983.
- [13] РОКАФЕЛЛАР Р. *Выпуклый анализ*. – Москва: Мир, 1973.
- [14] РЫКОВ А.С. *Поисковая оптимизация. Методы деформируемых конфигураций*. – Москва: “Физико-математическая литература”, ВО “Наука”, 1993.
- [15] ХЛЕБАЛИН Н.А. Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта // *Аналитические методы синтеза регуляторов*. – Саратов: Саратовский политехнический институт, 1981. – С. 107–123.
- [16] ХЛЕБАЛИН Н.А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // *Аналитические методы синтеза регуляторов*. – Саратов: Саратовский политехнический ин-т, 1988. – С. 26–30.
- [17] ШАЙДУРОВ В.В., ШАРЫЙ С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. – Красноярск, 1988. – 27 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; №5).
- [18] ШАРЫЙ С.П. О некоторых методах решения линейной задачи о допусках. – Красноярск, 1989. – 45 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; №6).

- [19] ШОР Н.З. *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения*. – Киев: Наукова думка, 1979.
- [20] ШОР Н.З., СТЕЦЕНКО С.И. *Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация*. – Киев: Наукова думка, 1989.
- [21] BEAUMONT O. Solving linear interval tolerance problem with oblique boxes // IRISA Publication Interne №2000 PI-1313. – IRISA, 2000. – 9 p. (электронная версия статьи доступна в Интернете по адресу <http://www.irisa.fr/bibli/publi/pi/2000/1313/1313.html>)
- [22] BEAUMONT O., PHILIPPE B. Linear interval tolerance problem and linear programming techniques // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 6. – P. 433–447.
- [23] KELLING B. Geometrische Untersuchungen zur eigenschränkten Lösungsmenge Intervallgleichungssysteme // *ZAMM*. – 1994. – Bd. 74, №12. – P. 625–628.
- [24] KELLING B., OELSCHLÄGEL D. Zur Lösung von linearen Toleranzproblemen // *Wiss. Zeitschrift TH Leuna-Merseburg*. – 1991. – Bd. 33, №1. – P. 121–131.
- [25] KIWIEL K.C. *Methods of descent for nondifferentiable optimization*. – Berlin: Springer Verlag, 1985.
- [26] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 9/86. – S. 5–19.
- [27] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [28] NUDING E. Ein einfacher Beweis der Satze von Oettli-Prager und J. Rohn // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 9/86. – S. 1–3.
- [29] NUDING E., WILHELM W. Über Gleichungen und über Lösungen // *ZAMM*. – 1972. – Bd. 52. – P. T188–T190.
- [30] RATSCHKE H., SAUER W. Linear interval equations // *Computing*. 1982. – Vol. 28, No. 2. – P. 105–115.
- [31] ROHN J. Input-output planning with inexact data // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1978. – No. 9/78. – S. 1–16.
- [32] ROHN J. Input-output model with interval data // *Econometrica*. – 1980. – Vol. 48. – P. 767–769.
- [33] ROHN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 157–158. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [34] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.

- [35] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [36] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [37] SMAGINA YE.M. A new approach to the modal regulator synthesis for interval plant with scalar input // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3. – P. 401–410.
- [38] SMAGINA YE.M., BREWER I. Using interval arithmetic for robust state feedback design // *Systems & Control Letters*. – 2002. – Vol. 46. – P. 187–194.
- [39] SOKOLOVA S.P., IVLEV R.S. Asymptotic stability of interval time-delay systems // *Reliable Computing*. – 2003. – Vol. 9, No. 4. – P. 303–313.

Глава 7

Внешнее оценивание объединённого множества решений

Эта глава книги посвящена задаче внешнего интервального оценивания (4.22) для объединённого множества решений интервальных систем уравнений, как линейных, так и нелинейных. Отдельное рассмотрение объединённого множества решений обусловлено тем, что это наиболее популярное из множеств решений, для оценивания которого создано большое количество специфичных методик, не работающих для других множеств решений.

Задача внешнего оценивания объединённого множества решений интервальных систем уравнений является одной из классических постановок, с которых начинался интервальный анализ в начале 60-х годов прошлого века. За прошедшие четыре десятилетия интенсивного развития предложено немало хороших алгоритмов для решения этой задачи, так что естественно было бы ожидать угасания теоретического интереса к ней и поворота исследователей к тщательной практической реализации и доводке уже предложенных вычислительных схем. Тем не менее, поток результатов на эту тему не вполне иссяк и по настоящую пору.

Мы уже упоминали в §4.4 наиболее важные теоретические результаты, касающиеся трудоёмкости решения “внешней задачи” для объединённого множества решений. Оказывается, что даже для интерваль-

ных линейных систем задача распознавания того, пусто или непусто объединённое множество решений, в общем случае NP-трудна (труднорешаема). Кроме того, вычисление внешних покоординатных оценок для объединённого множества решений с любой заданной абсолютной или относительной точностью также есть NP-трудная задача, как в общем случае, так и во многих практически важных частных ситуациях.

Все разработанные к настоящему моменту численные методы для внешнего оценивания объединённого множества решений интервальных систем уравнений можно разделить на три большие группы:

Во-первых, это методы для нахождения оптимальных (точных) решений внешней задачи или же решений, имеющих гарантированную погрешность. Поскольку задача вычисления таких решений NP-трудна, методы этой группы являются очень трудоёмкими и по своей структуре близки переборным алгоритмам дискретной оптимизации.

Во-вторых, это методы решения внешней задачи, в которых на ответ не накладываются требования оптимальности или гарантированной погрешности. Мы будем называть их *методами общего назначения*.

Третью группу методов образуют различные специализированные алгоритмы для интервальных систем уравнений какого-либо частного вида (например, для блочных или ленточных ИСЛАУ и т.п.).

Методам первой группы целиком посвящена Глава 10 нашей книги, а сейчас мы будем рассматривать, главным образом, методы общего назначения, тем более что они нередко являются “строительным материалом” для методов оптимального оценивания. В этой главе мы называем объединённое множество решений просто *множеством решений* и обозначаем Ξ , коль скоро иные множества решений в тексте не встречаются.

7.1 Подготовительные факты

Определение 7.1.1 Для неособенной матрицы $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ обратной интервальной матрицей называют

$$A^{-1} = \square\{A^{-1} \mid A \in A\},$$

т.е. интервальную оболочку множества всех обратных для матриц, содержащихся в \mathbf{A} .

Можно считать при этом, что обозначение \mathbf{A}^{-1} выражает взятие интервального расширения матричного отображения $A \mapsto A^{-1}$.

Теорема 7.1.1 Если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — интервальная H -матрица, то она неособенна и

$$|\mathbf{A}^{-1}| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1}, \quad (7.1)$$

причём равенство в этом соотношении достигается, к примеру, когда \mathbf{A} есть M -матрица.

Доказательство. Предположим, что $Ax = 0$ для некоторой $A \in \mathbf{A}$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда необходимо $0 = |Ax| \geq \langle A \rangle |x|$ в силу (2.23). Домножая обе части этого неравенства на неотрицательную матрицу $\langle A \rangle^{-1}$, получим $0 \geq |x|$. Следовательно, $x = 0$, и потому матрица A не может быть особенной.

Далее, для всякой матрицы $A \in \mathbf{A}$ имеет место

$$I = |AA^{-1}| \geq \langle A \rangle |A^{-1}| \geq \langle \mathbf{A} \rangle |A^{-1}|.$$

Умножение обеих частей этого неравенства на $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \geq 0$ приводит к

$$|A^{-1}| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1},$$

откуда следует (7.1). Если же \mathbf{A} — M -матрица, то $\langle \mathbf{A} \rangle = \underline{\mathbf{A}}$, так что $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} = \underline{\mathbf{A}}^{-1} = |\underline{\mathbf{A}}^{-1}|$, и в соотношении (7.1) действительно достигается равенство. ■

Если для интервальной линейной системы уравнений

$$Ax = b \quad (7.2)$$

с квадратной матрицей \mathbf{A} известна обратная \mathbf{A}^{-1} , то внешняя оценка объединённого множества решений этой системы легко может быть вычислена как

$$\square \Xi(\mathbf{A}, b) \subseteq \mathbf{A}^{-1}b.$$

Это включение обращается в равенство для точечных \mathbf{A} , что вытекает из свойств интервального матричного умножения и из того, что

$$\Xi(\mathbf{A}, b) = \{A^{-1}b \mid A \in \mathbf{A}, b \in b\} \quad (7.3)$$

для неособенной интервальной матрицы \mathbf{A} . Но для существенно интервальных матриц \mathbf{A} левая и правая части включения (7.3) могут сильно различаться.

Пример. Рассмотрим ИСЛАУ

Справедливо

Предложение 7.1.1 (лемма Ноймайера) *Интервальная оболочка объединённого множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ не может быть в общем случае представлена, как произведение $\mathbf{G}\mathbf{b}$ с какой-то интервальной матрицей \mathbf{G} , не зависящей от правой части системы \mathbf{b} .*

Доказательство. Предположим, напротив, что представление

$$\square\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathbf{G}\mathbf{b}, \quad (7.4)$$

о котором идёт речь в условии Предложения, всё-таки существует для некоторой матрицы $\mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$.

Рассмотрим интервальные линейные системы с матрицей \mathbf{A} и векторами правых частей $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$, которые являются 1-м, 2-м, \dots , n -м столбцами единичной матрицы. Ясно, что множества $\square\Xi(\mathbf{A}, e^{(1)})$, $\square\Xi(\mathbf{A}, e^{(2)})$, \dots , $\square\Xi(\mathbf{A}, e^{(n)})$ суть 1-й, 2-й, \dots , n -й столбцы обратной интервальной матрицы \mathbf{A}^{-1} . С другой стороны, если верно представление (7.4), то они должны совпадать с соответствующими столбцами матрицы \mathbf{G} . Следовательно, $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}$, что невозможно в силу предшествующего Предложению контрпримера. ■

Теорема 7.1.2 (характеризация Бека) *Если $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, то*

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \cap \mathbf{b} \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \in \mathbf{A}x - \mathbf{b}\}.$$

Доказательство. Если $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ для некоторых $\tilde{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{b} \in \mathbf{b}$. Следовательно, $\tilde{b} \in \mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b}$.

Наоборот, если $\mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset$, то это пересечение $\mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b}$ содержит вектор $\tilde{b} \in \mathbb{R}^m$, для которого должно иметь место равенство $\tilde{b} = \tilde{A}\tilde{x}$ с некоторой $\tilde{A} \in \mathbf{A}$. Итак, $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Второе равенство следует из того, что $\mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $0 \in \mathbf{A}\tilde{x} - \mathbf{b}$. ■

7.2 Интервальный метод Гаусса

Метод исключения Гаусса и его многочисленные модификации являются популярнейшими алгоритмами классической вычислительной линейной алгебры, и в этом параграфе мы рассмотрим их интервальные версии, также играющие важную роль среди интервальных алгоритмов.

Для системы линейных уравнений

$$Ax = b$$

с $n \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$ и n -вектором правых частей $b = (b_i)$ расчётные формулы *прямого хода* традиционного метода Гаусса

$$\begin{array}{l}
 \text{DO FOR } j = 1 \text{ TO } n - 1 \\
 \quad \text{DO FOR } i = j + 1 \text{ TO } n \\
 \qquad r_{ij} \leftarrow a_{ij} / a_{jj} \\
 \qquad \text{DO FOR } k = j + 1 \text{ TO } n \\
 \qquad \qquad a_{ik} \leftarrow a_{ik} - r_{ij} a_{jk} \\
 \qquad \text{END DO} \\
 \qquad b_i \leftarrow b_i - r_{ij} b_j \\
 \quad \text{END DO} \\
 \text{END DO}
 \end{array} \tag{7.5}$$

выражают процесс последовательного исключения поддиагональных элементов j -го, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, столбца матрицы системы A и соответствующие преобразования b . Матрица системы тем самым приводится к верхнему треугольному виду. Далее следует *обратная подста-*

новка

$$\begin{array}{c}
 \text{DO FOR } j = n \text{ TO } 1 \text{ STEP } -1 \\
 \\
 x_j \leftarrow \left(b_j - \sum_{k>j} a_{jk} x_k \right) / a_{jj} , \\
 \\
 \text{END DO}
 \end{array} \quad (7.6)$$

позволяющая последовательно вычислить значения неизвестных, начиная с n -ой.

Предположим теперь, что нам задана интервальная квадратная система линейных уравнений

$$Ax = b, \quad (7.2)$$

в расчётных формулах (7.5)–(7.6) все величины r , a , b , x заменены на интервальные, а арифметические операции — на операции интервальной арифметики. Получающийся при этом алгоритм называется *интервальным методом Гаусса*, и его псевдокод представлен в Табл. 7.1.

Конечно, в отличие от вещественного случая треугольное разложение интервальной матрицы A мы таким образом не получим. Тем не менее, из свойства монотонности интервальной арифметики \mathbb{IR} по включению следует, что результат выполнения интервального метода Гаусса должен содержать все возможные результаты применения точечных методов Гаусса к точечным данным, содержащимся в задаваемых системой (7.2) интервалах. Но результаты точечных методов Гаусса — это решения соответствующих систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Следовательно, результат интервального метода Гаусса содержит объединённое множество решений данной ИСЛАУ.

Упражнение 7.2.1. Примените интервальный метод Гаусса к интервальной линейной системе

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Сравните ответ с Рис. 5.1 и сделайте вывод о качестве внешнего оценивания.

В каких случаях интервальный метод Гаусса прорабатывает до конца, выдавая ответ? К. Райхманом в [45] построен пример интервальной

Таблица 7.1. Интервальный метод Гаусса

```

DO FOR   $j = 1$  TO   $n - 1$ 
    DO FOR   $i = j + 1$  TO   $n$ 
         $r_{ij} \leftarrow a_{ij} / a_{jj}$ 
        DO FOR   $k = j + 1$  TO   $n$ 
             $a_{ik} \leftarrow a_{ik} - r_{ij} a_{jk}$ 
        END DO
         $b_i \leftarrow b_i - r_{ij} b_j$ 
    END DO
END DO

DO FOR   $j = n$  TO  1 STEP  -1
    
$$x_j \leftarrow \left( b_j - \sum_{k>j} a_{jk} x_k \right) / a_{jj}$$

END DO

```

3×3 -матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, 0.62] & [0, 0.62] \\ [0, 0.62] & 1 & [0, 0.62] \\ [0, 0.62] & [0, 0.62] & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

которая неособенна, но применение к ней преобразований интервального метода Гаусса приводит к досрочному завершению работы в силу того, что нам встречается деление на нульсодержащий интервал. Размерность матрицы, т.е. 3, здесь принципиальна: для двумерных вещественных интервальных линейных систем с неособенными матрицами, как оказалось, интервальный метод Гаусса всегда успешно работает до конца.

В комплексном случае в силу особенностей комплексных интервальных арифметик ситуация тяжелее, и существуют примеры даже двумерных систем с неособенными матрицами, к которым интервальный метод Гаусса неприменим.

Теорема 7.2.1 (теорема Алефельда) *Если матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ является H -матрицей, то интервальный метод Гаусса применим к интервальной линейной системе $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ для любого $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$. При этом для результата \mathbf{x}^* интервального метода Гаусса справедлива оценка*

$$|\mathbf{x}^*| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|.$$

Каково качество внешних оценок объединённых множеств решений ИСЛАУ, получаемых интервальным методом Гаусса в общем случае? Ответ на этот вопрос можно кратко резюмировать как “не очень высокое”.

В статье И. Рона [51] строится пример интервальной системы

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2/\alpha & [-\varepsilon, \varepsilon] & [-\varepsilon, \varepsilon] & [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \beta & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\varepsilon, \varepsilon] \\ [-\varepsilon, \varepsilon] \\ [-\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix},$$

в применении к которой интервальный метод Гаусса даёт произвольно плохое внешнее оценивание множества решений.

Теорема 7.2.2 (теорема Барта-Нудинга-Бека)

Если в интервальной линейной системе $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} является интервальной M -матрицей и для правой части выполнено какое-либо из условий

$$\mathbf{b} < 0, \quad 0 \in \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} > 0,$$

то результатом работы интервального метода Гаусса в применении к этой системе является интервальный вектор оптимальной внешней оценки множества решений.

Следует ли из сказанного, что интервальный метод Гаусса имеет лишь историческую ценность?

И да, и нет.

Несмотря на очевидные недостатки интервального метода Гаусса — недостаточное качество оценивания и т.п. — при решении реальных задач он может работать подчас лучше более тонких методик. Например, интервальная линейная система с матрицей Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 3.3 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.3 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

успешно просчитывается интервальным методом Гаусса и получаемый при этом ответ

$$\begin{pmatrix} [-22.4556, 22.4556] \\ [-18.2759, 18.2759] \\ [-18.2759, 18.2759] \end{pmatrix}$$

не так уж плох. Но матрица этой системы, будучи неособенной, не является уже сильно неособенной: как мы видели в §2.4 для матрицы Ноймайера 3-го порядка граница между неособенностью и сильной неособенностью пролегает при значении диагонального параметра примерно равном 3.37228132. Так что в применении к системе (7.8) другие более тонкие методики, использующие предобуславливание ИСЛАУ (см. §7.7), давно бы уже развалились, а “примитивный” метод Гаусса, использующий лишь частичные преобразования матрицы ИСЛАУ, успешно прорабатывает до конца.

Для ИСЛАУ с сильно неособенными интервальными матрицами применение интервального метода Гаусса можно порекомендовать в очень редких случаях. Почти всегда при той же затрате вычислительных усилий более узкие интервальные оценки множеств решений могут быть получены с помощью других более продвинутых подходов.

С другой стороны, сама идея интервализации, в том или ином виде, метода Гаусса для систем линейных уравнений далеко не исчерпана, и дальнейшее развитие интервальных арифметик и способов оценивания областей значений функций наверняка стимулирует рождение новых версий интервального метода Гаусса.

Например, вместо классической интервальной арифметики естественно применить в методе Гаусса аффинную или интервально-аффинную арифметику, обладающие “памятью”. На этом пути получается “интервально-аффинный метод Гаусса”, предложенный Р.Р. Ахмеровым в [2] на основе разработанной им версии интервальной аффинной

арифметики. Вычислительные эксперименты свидетельствуют о том, что интервально-аффинный метод Гаусса, во-первых, имеет существенно более широкую область применимости, нежели обычный интервальный метод Гаусса, и, во-вторых, качество выдаваемых им результатов оказывается ощутимо лучшим.

На многочисленных тестах со случайными ИСЛАУ интервально-аффинная версия метода Гаусса почти всегда была точнее обычной, а в целом всегда не хуже. При этом примерно три четверти систем, решения которых вообще удалось найти, решались только интервально-аффинным методом. Качество результатов, получаемых интервально-аффинным методом Гаусса в сравнении с традиционным, измеряемое как среднее отношений ширины компонент выдаваемых ими интервальных векторов, резко возрастает при увеличении порядка системы или расширении интервальных элементов матрицы системы.

7.3 Интервальный метод Хаусхолдера

В основе метода Хаусхолдера для решения систем линейных алгебраических уравнений (называемого также *методом отражений*) лежит та же идея, что и в методе Гаусса: привести некоторыми эквивалентными преобразованиями исходную систему к треугольному виду, а затем воспользоваться обратной подстановкой (7.6). Но теперь это приведение выполняется более глубокими, чем в методе Гаусса преобразованиями матрицы, именно, путём последовательного умножения на специальным образом подобранные ортогональные *матрицы отражений*.

Если p — ненулевой n -вектор, то уравнением

$$(x, p) = 0$$

в пространстве \mathbb{R}^n задаётся гиперплоскость, образованная всеми ортогональными p векторами. *Отражением* вектора $x \in \mathbb{R}^n$ относительно этой гиперплоскости называется линейное преобразование

$$x \mapsto x - 2 \frac{(x, p)}{\|p\|^2} p.$$

Соответственно, матрица $\mathfrak{R} = (\mathfrak{r}_{ij})$ этого линейного преобразования, с элементами

$$\mathfrak{r}_{ij} = \delta_{ij} - 2 \frac{p_i p_j}{\|p\|^2},$$

называется *матрицей отражений*. Она ортогональна и обладает тем свойством, что

7.4 Формальный подход

Развиваемый в этом параграфе подход к задаче (5.24) мы называем *формальным подходом*, потому что он сводит исходную постановку к задаче нахождения *формального решения* некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений. В принципе, это формальное решение может быть вычислено весьма разнообразными способами, но для интервальных линейных систем вида (7.2) наиболее эффективным оказывается субдифференциальный метод Ньютона, конструируемый ниже в Главе 12. Отличительной особенностью формального подхода вместе с реализующим его численным алгоритмом является, помимо высокой вычислительной эффективности, универсальность: как общая теоретическая схема подхода, так и основной численный метод с равным успехом применимы к задачам внутреннего и внешнего интервального оценивания даже более общих чем объединённое множеств решений.

Основой формального подхода являются следующие результаты:

Предложение 7.4.1 *Множество решений интервальной системы*

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$, *совпадает со множеством решений интервальной системы*

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}, \quad (7.9)$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$, $\mathbf{d} = \mathbf{b}$.

Доказательство.

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(\mathbf{A}x = \mathbf{b})\}$$

■

Результат Предложения даёт возможность заменять решение внешней задачи для исходной интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ на решение внешней задачи для системы рекуррентного вида (7.9).

Теорема 7.4.1 (теорема Майера-Варнке) Пусть $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$,

$$\Xi = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{C} \in \mathbf{C})(\exists \mathbf{d} \in \mathbf{d})(\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}) \}$$

— объединённое множество решений интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$, а $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ — формальное решение этой системы. Тогда

- (i) для любой линейной системы $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ с $\mathbf{C} \in \mathbf{C}$ и $\mathbf{d} \in \mathbf{d}$ по крайней мере одно её решение содержится в бресе \mathbf{x}^* ;
- (ii) включение $\Xi \subseteq \mathbf{x}^*$ имеет место тогда и только тогда, когда интервальная матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{C})$ неособенна.

Доказательство. Зафиксируем матрицу $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbf{C}$ и вектор $\tilde{\mathbf{d}} \in \mathbf{d}$ и рассмотрим отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{d}}.$$

Так как

$$\{ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{d}} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{x}^* \} \subseteq \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}^* + \tilde{\mathbf{d}} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d} = \mathbf{x}^*,$$

то брус \mathbf{x}^* переводится этим отображением в себя. Следовательно, в силу теоремы Брауэра о неподвижной точке на \mathbf{x}^* должно существовать хотя бы одно решение $\tilde{\mathbf{x}}$ системы уравнений

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{d}}. \quad (7.10)$$

Коль скоро проведённое рассуждение справедливо для любых $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbf{C}$ и $\tilde{\mathbf{d}} \in \mathbf{d}$, получаем утверждение (i).

Если интервальная матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{C})$ неособенна, то каждая из систем уравнений (7.10) с $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbf{C}$ и $\tilde{\mathbf{d}} \in \mathbf{d}$ имеет ровно одно решение, откуда и следует включение $\Xi \subseteq \mathbf{x}^*$.

Наоборот, если справедливо это включение, то объединённое множество решений Ξ ограничено, а потому ограничены все множества решений отдельно взятых уравнений (7.10) для $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbf{C}$ и $\tilde{\mathbf{d}} \in \mathbf{d}$. Коль скоро решения системы уравнений с особенной точечной матрицей образуют неограниченное аффинное многообразие, то все точечные матрицы из $(\mathbf{I} - \mathbf{C})$ обязаны быть неособенными. ■

Формальный подход к внешнему оцениванию множеств решений ИСЛАУ основывается на следующем неожиданном факте: фигурирующая в Теоремах 7.6.1 и 7.6.2 неподвижная точка \mathbf{x}^* отображения (7.18)

является не чем иным, как формальным решением интервального уравнения (7.9)! Поэтому мы можем переформулировать приведённые выше классические результаты в следующем модифицированном виде:

Теорема 7.4.2 *Если интервальная $n \times n$ -матрица C такова, что $\rho(|C|) < 1$, то для любого $d \in \mathbb{IR}^n$ формальное решение интервального уравнения*

$$x = Cx + d \quad (7.11)$$

существует, единственно и является внешней интервальной оценкой множества решений этого интервального уравнения.

В чём смысл переформулировки результатов Теорем 7.6.1–7.6.2 в виде Теоремы 7.4.2? Выполненная нами редукция не является “все-го лишь” языковым трюком, но имеет глубокие методические следствия. Дело в том, что утверждение Теоремы 7.4.2, организованное как “чистая” неконструктивная теорема существования, помогает лучше осознать следующий принципиальный факт: способ доказательства теоремы не обязательно должен совпадать с практическим способом нахождения решения основного уравнения (7.11). Кроме того, задача нахождения формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а, по существу, традиционная математическая задача решения некоторого уравнения. С подобными задачами имеет дело значительная часть современной математики и естествознания.

Традиционные конструктивные доказательства Теорем 7.6.1–7.6.2, основанные на известной теореме Шрёдера о сжимающих отображениях, породили целый поток работ, посвящённых построению различных стационарных итерационных алгоритмов для нахождения неподвижной точки интервального отображения (7.18). Но, вообще говоря, никто не обязывает нас при конструировании вычислительных подходов к этой задаче ограничиваться лишь стационарными сжатиями, тем более, что получающиеся при этом методы имеют довольно медленную сходимость. При построении конкретных процедур для нахождения формального решения для (7.11) (= неподвижной точки (7.18)) разработчик алгоритмов должен быть свободен в выборе и использовании любых других возможных приёмов и концепций (например, символьных преобразований). Единственным руководящим принципом должно при этом оставаться удовлетворение искомым решением уравнению (7.11) в смысле Определения 4.3.2. Ниже в Главе 12 мы представляем

эффективный нестационарный итерационный алгоритм для вычисления формальных решений интервальных линейных систем — субдифференциальный метод Ньютона — и технику для его теоретического анализа.

Каково положение развиваемого нами формального подхода среди других методов решения “внешней задачи” (4.22)? Формальный подход наследует качество внешнего оценивания множества решений от интервальных итерационных схем. Следующая теорема — это известный результат Д. М. Гея [20], переформулированный в терминах “формального подхода”.

Теорема 7.4.3 Пусть \mathbf{x}^* — формальное решение уравнения

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

и $\eta := \|\mathbf{I} - \mathbf{A}\| < \frac{1}{3}$. Тогда справедливо следующее неравенство для отклонения внешней интервальной оценки \mathbf{x}^* объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ от интервальной оболочки $\square\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$:

$$\text{Dist}(\square\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \mathbf{x}^*) \leq \left(\frac{4\eta}{1 - 3\eta} \right) \cdot \text{rad}(\square\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})).$$

Но у субдифференциального метода Ньютона, который мы используем для вычисления формального решения (7.11), вычислительная сложность почти такая же, как и конечных прямых алгоритмов. В целом, как нам представляется, формальный подход, соответствующим образом развитый и модифицированный, может служить эффективным средством для вычисления внешних оценок объединённого и обобщённых множеств решений для достаточно общих интервальных линейных систем. Иначе говоря, мы мыслим его как хороший метод общего назначения.

В настоящее время среди методов общего назначения наиболее популярны интервальный метод Гаусса-Зейделя с предобуславливанием [28, 40], интервальный метод Гаусса [1, 6, 40], который часто применяют также с предобуславливанием, а также процедура Хансена-Блика-Рона [25, 50], существенно улучшенная Нинг и Кирфоттом в [43]. Для всех этих алгоритмов развиваемый нами формальный подход является естественным конкурентом, превосходящим их по вычислительной

эффективности и не уступающим по качеству оценивания, и это заявление мы проиллюстрируем результатами вычислительных экспериментов на персональном компьютере. Мы выполнили их на задачах внешнего оценивания объединённых множеств решений ИСЛАУ с формальным подходом §9.1, в котором формальное решение основного уравнения (9.5)–(9.30) находилось с помощью субдифференциального метода Ньютона (см. Главу 12). При этом проверка условий (7.19)–(7.33), которое столь существенно для применимости формального подхода, была заменена нами на проверку неравенства $\|I - \Lambda A\| < 1$, более сильного в силу известного соотношения между спектральным радиусом и матричными нормами. Алгоритм был реализован на языке Turbo C в стандартной машинной арифметике двойной разрядности с плавающей точкой. Приводимые ниже результаты округлены до трёх десятичных знаков после запятой.

Каждая из методик внешнего оценивания объединённых множеств решений имеет свою собственную область применимости и для каждой существует некоторый специальный класс (или даже классы) интервальных линейных систем, на которых она даёт лучшие результаты — внешние оценки с меньшей избыточной шириной. Хорошо известно, что для вынесения того или иного определённого заключения о сравнительных качествах метода требуется проведение большого количества рутинной работы. Несколько случайных примеров едва ли смогут убедить в том, что некоторый подход действительно лучше остальных. Ниже мы сравниваем вышеупомянутые методы на ряде тестовых интервальных линейных систем с H -матрицами, а термин “формальный подход” мы используем для обозначения его простейшей версии, в которой решение исходной задачи (4.22) сводится к отысканию формального решения уравнения (7.9) с диагональной предобуславливающей матрицей $\Lambda := (\text{dev diag } A)^{-1}$. Это сделано для того, чтобы продемонстрировать работу формального подхода “в чистом виде”, поскольку при использовании традиционного предобуславливания “обратной средней” процедура Хансена-Блика-Рона даёт заведомо лучшие результаты.

Пример 0 из [25].

$$\begin{pmatrix} [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-14, -7] \\ [9, 12] \\ [-3, 3] \end{pmatrix}.$$

В применении к этой системе интервальный метод Гаусса даёт

$$\begin{pmatrix} [-101, 71] \\ [-62.25, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix},$$

а результатом применения подхода Хансена-Блика-Рона является

$$\begin{pmatrix} [-101, 17] \\ [-15, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix},$$

тогда как при реализации формального подхода субдифференциальный метод Ньютона сходится за две итерации к

$$\begin{pmatrix} [-101, 71] \\ [-69, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix}.$$

Поскольку средняя матрица системы является единичной, то неудивительно, что подход Хансена-Блика-Рона оказывается в этом специально подобранном примере лучшим по качеству оценивания.

Пример 1. Обратимся к интервальной линейной системе из работы [43]

$$\begin{pmatrix} [15, 17] & [-3, 3.01] & [-3, 3.01] & [-3, 3.01] \\ [-3, 3.01] & [15, 17] & [-3, 2.99] & [-3, 2.99] \\ [-3, 2.99] & [-3, 2.99] & [15, 17] & [-3, 3.01] \\ [-3, 3.01] & [-3, 3.01] & [-3, 2.99] & [15, 17] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-6, -2] \\ [4, 5] \\ [-2, 4] \\ [8, 10] \end{pmatrix}.$$

Интервальным методом Гаусса мы получаем внешнюю оценку множества решений системы в виде

$$\begin{pmatrix} [-1.03, 0.495] \\ [-0.347, 0.974] \\ [-0.770, 0.917] \\ [0.150, 1.25] \end{pmatrix},$$

а с помощью методики Хансена-Блика-Рона [25]

$$\begin{pmatrix} [-1.03, 0.363] \\ [-0.223, 0.975] \\ [-0.752, 0.919] \\ [0.149, 1.25] \end{pmatrix},$$

Формальный подход сходится за 4 итерации к внешней оценке

$$\begin{pmatrix} [-1.03, 0.495] \\ [-0.372, 0.974] \\ [-0.785, 0.917] \\ [-0.05, 1.25] \end{pmatrix},$$

что совсем неплохо: средняя матрица интервальной системы близка к диагональной и это благоприятствует хорошему качеству результатов, получаемых по методике Хансена-Блика-Рона.

Пример 2. Интервальная линейная система Хансена

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix}.$$

В данном случае формальный подход (с отщеплением матрицы диагонального отклонения) сходится за 2 итерации к точному формальному решению

$$\begin{pmatrix} [-120, 90] \\ [-60, 240] \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Этот же ответ даёт и интервальный метод Гаусса.

Заметим, что интервал (7.12) — это даже оптимальная (наиболее узкая) интервальная оценка множества решений рассматриваемой системы. Но применение к ней подхода Хансена-Блика-Рона [25] приводит к худшему результату

$$\begin{pmatrix} [-120, \frac{1845}{11}] \\ [-60, \frac{2940}{11}] \end{pmatrix},$$

что является следствием огрубляющего предобуславливания, встроенного в процедуру Хансена-Блика-Рона.

Следующий интересный ряд Примеров 3–7 с фиксированной интервальной матрицей заимствован нами из работы Нинг и Кирфотта [43], в которой делается попытка дальнейшего развития подхода Хансена-Блика-Рона.

Пример 3 [43]. Пусть дана интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] & [0, 0] \\ [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] \\ [0, 0] & [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [2, 14] \\ [3, 9] \\ [-3, 1] \end{pmatrix}$$

Матрица этой системы является интервальной M -матрицей. Применение к ней интервального метода Гаусса приводит к оценке

$$\begin{pmatrix} [0.517, 6.25] \\ [0.450, 6.07] \\ [-0.881, 2.73] \end{pmatrix}.$$

Использование методики Хансена-Блика-Рона даёт более широкий интервал

$$\begin{pmatrix} [-0.206, 6.25] \\ [-0.386, 6.07] \\ [-2.01, 2.73] \end{pmatrix},$$

в то время как интервальной оболочкой множества решений является

$$\begin{pmatrix} [0.523, 6.25] \\ [0.499, 6.07] \\ [-0.743, 2.73] \end{pmatrix}.$$

Формальный подход демонстрирует здесь своё полное превосходство: он сходится к этому наилучшему интервальному ответу за 2 итерации.

В целом, наш вычислительный опыт свидетельствует о том, что для интервальных линейных систем с H -матрицами, для которых средняя матрица не является близкой к диагональной, формальный подход с диагональным предобуславливанием работает очевидно лучше процедуры Хансена-Блика-Рона. Как следует выбирать предобуславливатели для общих интервальных линейных систем? насколько при этом

расширится сфера приложимости формального подхода? как он будет работать в сравнении с другими методами решения внешней задачи для ИСЛАУ? Всё это открытые и очень интересные вопросы, которые ещё ждут своего разрешения.

7.5 Интервальный метод Гаусса-Зейделя

Одним из наиболее популярных и эффективных алгоритмов нахождения внешних оценок объединённого множества решений для ИСЛАУ вида (7.2) является *интервальный метод Гаусса-Зейделя*, применяемый обычно после предварительного предобуславливания системы.

Предположим, что в интервальной матрице $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ элементы главной диагонали не содержат нуля, т.е. $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Если $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}$, то

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} = \tilde{\mathbf{b}}$$

для некоторых $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbf{A}$ и $\tilde{b} = (\tilde{b}_i) \in \mathbf{b}$, а потому

$$\tilde{x}_i = \left(\tilde{b}_i - \sum_{j \neq i} \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j \right) / \tilde{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.13)$$

Обозначая

$$\mathbf{x}'_i := \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

мы должны признать, что

$$\tilde{x}_i \in \mathbf{x}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

так как выражения для \mathbf{x}'_i являются естественными интервальными расширениями выражений (7.13) по $\tilde{a}_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i \in \mathbf{b}_i$ и $\tilde{x}_j \in \mathbf{x}_j$.

Глубокое теоретическое исследование интервального метода Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания объединённых множеств решений ИСЛАУ было дано В. Бартом и Е. Нудингом в [15], а затем А. Ноймайером в [37, 40], и ниже мы представляем наиболее важные из их результатов. В наших построениях существенную роль играют понятия M -матрицы и H -матрицы (см. Главу 2).

Таблица 7.2. Интервальный метод Гаусса-Зейделя
для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ

Вход

Интервальная линейная система уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Брус $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\top \in \mathbb{IR}^n$, ограничивающий желаемую часть объединённого множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Некоторая константа $\epsilon > 0$.

Выход

Уточнённая внешняя оценка $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n)^\top \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}$
либо информация “множество $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не пересекает брус \mathbf{x} ”.

Алгоритм

$d \leftarrow +\infty$;

DO WHILE ($d \geq \epsilon$)

DO FOR $i = 1$ TO n

$$\tilde{\mathbf{x}}_i \leftarrow \mathbf{x}_i \cap \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \tilde{\mathbf{x}}_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{ii};$$

IF ($\tilde{\mathbf{x}}_i = \emptyset$) THEN

STOP, сигнализируя “множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$
не пересекает брус \mathbf{x} ”

END IF

END DO

$d \leftarrow$ расстояние между векторами \mathbf{x} и $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n)^\top$;

$\mathbf{x} \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}$;

END DO

Теорема 7.5.1 Если брус $\mathbf{x}^* \in \mathbb{IR}^n$ — предел интервального метода Гаусса-Зейделя, применённого для оценивания множества решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, то

$$\langle \mathbf{A} \rangle |\mathbf{x}^*| \leq |\mathbf{b}|. \quad (7.14)$$

Если же \mathbf{A} является интервальной H -матрицей, то

$$|\mathbf{x}^*| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|. \quad (7.15)$$

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем только неособенные интервальные матрицы \mathbf{A} и без ограничения общности считаем $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Переходя к пределу в расчётных формулах, определяющих интервальные итерации Гаусса-Зейделя, и учитывая, что $\lim \mathbf{x} = \lim \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$, получим

$$\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i^* \cap \left(\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, по крайней мере

$$\mathbf{x}_i^* \subseteq \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii},$$

и потому

$$|\mathbf{x}_i^*| \leq \left| \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii} \right|$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Оценим сверху правые части полученных неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii} \right| &= |(\mathbf{a}_{ii})^{-1}| \cdot \left| \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i \right| \\ &\leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left(\sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i| \right) \end{aligned}$$

для всякого $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, в целом имеем

$$|x_i^*| \leq \langle a_{ii} \rangle^{-1} \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j^*| + |b_i| \right),$$

что равносильно

$$\langle a_{ii} \rangle |x_i^*| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j^*| \leq |b_i|,$$

или

$$(\langle A \rangle |x^*|)_i \leq |b_i|$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. совпадает с (7.14).

Если же A — интервальная H -матрица, то $\langle A \rangle$ — это M -матрица и, домножая обе части (7.14) на $\langle A \rangle^{-1} \geq 0$, получим (7.15). ■

Из неравенства (7.15) следует, что если в системе (7.2) интервальная матрица A является H -матрицей, то любой достаточно широкий начальный интервальный вектор x улучшается (т.е. уменьшается в размерах) интервальным методом Гаусса-Зейделя. Напротив, если A не есть H -матрица, то такого вывода сделать уже нельзя. А. Ноймайер в [40] доказал в этих условиях даже следующий эффектный результат:

Теорема 7.5.2 [40] *Если матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ не является H -матрицей, то существуют сколь угодно широкие интервальные векторы, которые не улучшаются интервальным методом Гаусса-Зейделя, применённым для внешнего оценивания множества решений интервальной линейной системы $Ax = 0$.*

Доказательство. Если $A = (a_{ij})$ не является H -матрицей, то в силу Предложения 2.7.4 существует ненулевой вектор $u \geq 0$, такой что $\langle A \rangle u \leq 0$. Тогда

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| u_j \geq \langle a_{ii} \rangle u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

так что при любом вещественном $\alpha \geq 0$

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| ([-\alpha, \alpha] u_j) = [-\alpha, \alpha] \sum_{j \neq i} |a_{ij}| u_j \supseteq [-\alpha, \alpha] \langle a_{ii} \rangle u_i, \quad (7.16)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Располагая начальной внешней оценкой множества решений $\Xi(\mathbf{A}, 0)$ в виде уравновешенного интервального вектора $\mathbf{x} = [-\alpha, \alpha]u$, мы, в соответствии с расчётными формулами интервального метода Гаусса-Зейделя, должны взять первую компоненту следующего приближения как

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 \cap \left(0 - \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{11}.$$

Но включение (7.16) имеет следствием

$$\left(- \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{11} \supseteq \mathbf{x}_1,$$

так что $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1$. То же самое по индукции доказывается и для остальных компонент вектора следующего приближения $\tilde{\mathbf{x}}$. Итак, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ и никакого улучшения оценки интервальный метод Гаусса-Зейделя не обеспечивает. ■

Нетрудно сообразить, что вывод теоремы останется справедливым и в случае, когда вектор правой части системы уравнений — ненулевой, но при этом матрица должна быть “достаточно далёкой” от H -матрицы.

Одним из наиболее замечательных фактов, относящихся к классическим интервальным итерациям Гаусса-Зейделя в применении к объединённому множеству решений ИСЛАУ, является следующее свойство оптимальности, впервые обнаруженное Бартом и Нудингом [15]:

Теорема 7.5.3 (теорема Барта-Нудинга) *Если в интервальной линейной системе уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} является интервальной M -матрицей, то метод интервальный Гаусса-Зейделя сходится к интервальной оболочке объединённого множества решений, будучи начатым из любого начального приближения $\mathbf{x} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.*

Доказательство. Если \mathbf{A} — M -матрица, то

■

7.6 Интервальные итерационные методы

Теорема 7.6.1 [1, 14, 44] *Итерационный процесс*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.17)$$

с $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ для любого начального вектора $\mathbf{x}^{(0)}$ сходится к единственной неподвижной точке $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ интервального отображения, задаваемого правилом

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}, \quad (7.18)$$

тогда и только тогда, когда спектральный радиус $\rho(|\mathbf{C}|)$ матрицы $|\mathbf{C}|$, составленной из модулей элементов \mathbf{C} , меньше единицы.

Доказательство. Достаточность — очевидна в силу теоремы Шрёдера о неподвижной точке.

Необходимость. Пусть итерации (7.17) сходятся из любого начального приближения к единственному формальному решению \mathbf{x}^* уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}.$$

В силу теоремы Перрона-Фробениуса неотрицательная точечная матрица $|\mathbf{A}|$ имеет неотрицательный собственный вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $v \geq 0$, соответствующий наибольшему по модулю неотрицательному собственному значению $\varrho = \rho(|\mathbf{A}|)$. Возьмём в качестве начального приближения для итерационного процесса (7.17) какой-нибудь интервальный вектор $\mathbf{x}^{(0)}$, для которого вектор покомпонентных ширин $\text{rad } \mathbf{x}^{(0)}$ коллинеарен \mathbf{v} , отмасштабировав его предварительно так, чтобы по крайней мере одна компонента $\text{rad } \mathbf{x}^{(0)}$ была больше, чем соответствующая компонента \mathbf{x}^* .

Тогда, предполагая $\varrho \geq 1$, можем заключить, что

$$\begin{aligned} \text{rad } \mathbf{x}^{(1)} &= \text{rad } (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}) = \text{rad } (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)}) + \text{rad } \mathbf{d} \\ &\geq \text{rad } (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)}) = \varrho \text{ rad } \mathbf{x}^{(0)} = \text{rad } \mathbf{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\text{rad } \mathbf{x}^{(2)} \geq |\mathbf{C}| \text{ rad } \mathbf{x}^{(1)} = \varrho |\mathbf{C}| \text{ rad } \mathbf{x}^{(0)} = \varrho^2 \text{ rad } \mathbf{x}^{(0)} \geq \text{rad } \mathbf{x}^{(0)}.$$

и т.д. Для произвольного номера k имеем поэтому

$$\text{rad } \mathbf{x}^{(k)} \geq |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}^{(k-1)} \geq \dots \geq \varrho^k \text{rad } \mathbf{x}^{(0)}.$$

В пределе при $k \rightarrow \infty$ получаем

$$\text{rad } \mathbf{x}^* \geq \text{rad } \mathbf{x}^{(0)},$$

что противоречит нашему выбору начального вектора $\mathbf{x}^{(0)}$. Следовательно, сделанное нами допущение $\varrho \geq 1$ неверно, т.е. $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 7.6.2 [1, 14] Пусть интервальная матрица $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такова, что $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$. Тогда для неподвижной точки \mathbf{x}^* интервального отображения, задаваемого правилом

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

которая существует и единственна в силу Теоремы 7.6.1, выполнено соотношение

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{C} \in \mathbf{C})(\exists \mathbf{d} \in \mathbf{d})(x = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d})\} \subseteq \mathbf{x}^*,$$

т.е. \mathbf{x}^* является внешней интервальной оценкой множества решений интервальной системы $x = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$.

$$\rho(|I - \mathbf{A}|) < 1. \quad (7.19)$$

7.7 Предобуславливание

В задаче внешнего интервального оценивания объединённого множества решений улучшение свойств матрицы системы обычно достигается с помощью так называемого *предобуславливания* — одновременного домножения матрицы и вектора правой части слева на некоторую точечную матрицу $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, так что вместо исходной системы

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (7.2)$$

мы получаем *предобусловленную интервальную систему*

$$(\Lambda \mathbf{A})\mathbf{x} = \Lambda \mathbf{b}, \quad (7.20)$$

$\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, объединённое множество решений которой не хуже, чем для (7.2). Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(\Lambda Ax = \Lambda b)\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists U \in \Lambda \mathbf{A})(\exists v \in \Lambda \mathbf{b})(Ux = v)\} \\ &= \Xi_{uni}(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b}), \end{aligned}$$

так как в общем случае $\Lambda \mathbf{A} \supseteq \{\Lambda A \mid A \in \mathbf{A}\}$ и $\Lambda \mathbf{b} \supseteq \{\Lambda b \mid b \in \mathbf{b}\}$ (см. Главу 2). Итак, от подобной трансформации объединённое множество решений расширяется, но зато свойства интервальной матрицы предобусловленной системы могут быть улучшены в сравнении с исходной ИСЛАУ.

Весьма полное исследование процедуры предобуславливания для внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ было выполнено А. Ноймайером в [37, 40]. Вкратце содержание теории Ноймайера сводится к следующему: если в рассматриваемой ИСЛАУ интервальная матрица сильно неособена, то посредством предобуславливания обратной средней матрицей можно удовлетворить условию (7.19), а также гарантировать хорошую работу интервального метода Гаусса-Зейделя.

При внешнем оценивании объединённых множеств решений интервальных линейных систем наиболее часто в качестве предобуславливающей матрицы берут обратную к “средней” матрице системы, т.е. $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$. Подобное предобуславливание привлекательно тем, что получающаяся предобусловленная система (7.20) имеет своей средней матрицей единичную матрицу. Соответственно, в матрице $(I - \Lambda \mathbf{A})$ все интервальные элементы уравновешены. Для таких систем оптимальные внешние оценки множества решений могут быть очень быстро (ценой одного обращения точечной матрицы) получены с помощью процедуры Хансена-Блика-Рона (см. §7.8). Кроме того, Ноймайер [40] доказал ряд теоретических результатов, свидетельствующих о некоторой (правда, довольно специфической) оптимальности предобуславливания с помощью обратной средней матрицы.

Но улучшение свойств интервальной системы путём предобуславливания не достигается совершенно бесплатно. Неизбежная издержка процедуры предобуславливания — увеличение множества решений предобусловленной системы (7.20) в сравнении с множеством решений ис-

ходной ИСЛАУ. И это нежелательное расширение множества решений является, вообще говоря, тем бóльшим, чем больше предобуславливающая матрица отличается от диагональной. По этой причине нежелательно брать матрицу Λ “слишком сильно” отличающейся от диагональной.

Чтобы наглядно проиллюстрировать это явление, рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

для которой

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},$$

а интервальная система, предобусловленная с помощью обратной средней, есть

$$\frac{2}{37} \begin{pmatrix} [11, 26] & [-10, 10] \\ [-10, 10] & [11, 26] \end{pmatrix} x = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Из Рис. 7.1 можно видеть взаимное соотношение множеств решений исходной системы и предобусловленной. При этом

$$|I - (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}| = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 15 \end{pmatrix},$$

собственные числа этой матрицы равны $\frac{1}{37}(15 \pm 20)$, т.е. $\frac{35}{37}$ и $-\frac{5}{37}$, так что условие (7.19) выполнено.

Замечательность неособенной диагональной матрицы Λ состоит в том, что, какова бы ни была интервальная матрица или вектор \mathbf{H} подходящего размера, имеет место равенство

$$\Lambda \mathbf{H} = \{ \Lambda H \mid H \in \mathbf{H} \},$$

т.е. результат интервального матричного умножения на такую матрицу Λ совпадает с множеством поэлементных точечных произведений. Следовательно, с неособенной диагональной матрицей Λ можно осуществлять рассуждения типа

$$H \in \mathbf{H} \text{ эквивалентно } \Lambda H \in \Lambda \mathbf{H}, \quad (7.23)$$

а предобуславливание такой матрицей оставляет множества решений ИСЛАУ неизменными. В общем случае, когда Λ не есть неособенная диагональная матрица, в логической формуле (7.23) вместо эквивалентности справедлива импликация только вправо. Соответственно, множество решений системы уравнений, предобусловленной с помощью такой матрицы, уже не будет совпадать с исходным множеством решений.

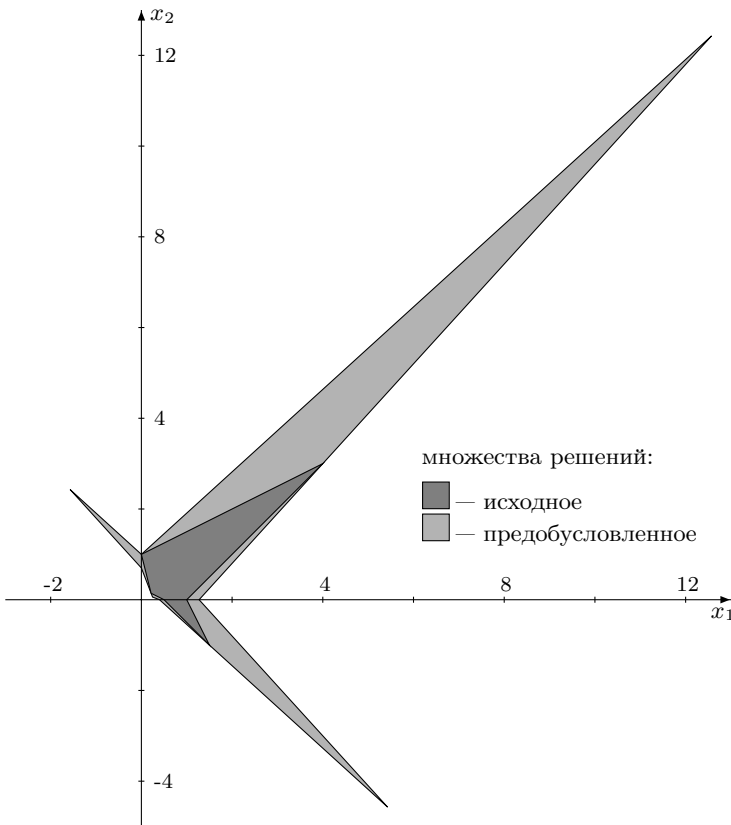


Рис. 7.1. Множество решений центрально-предобусловленной интервальной системы уравнений в сравнении с множеством решений исходной.

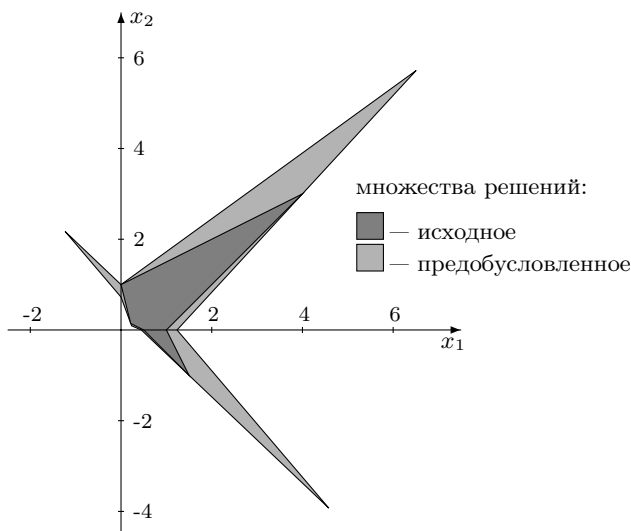


Рис. 7.2. Множество решений более удачно предобусловленной интервальной системы уравнений в сравнении с множеством решений исходной.

Определение 7.7.1 Отклонением правильного интервала \mathbf{x} назовём величину

$$\text{dev } \mathbf{x} := \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{x}}| \geq |\overline{\mathbf{x}}|, \\ \overline{\mathbf{x}}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

т.е. наиболее удалённую от нуля точку интервала \mathbf{x} .

Можно порекомендовать, например, следующий выбор диагональной предобуславливающей матрицы Λ :

$$\Lambda = (\text{dev } \text{diag } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} (\text{dev } \mathbf{a}_{11})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\text{dev } \mathbf{a}_{nn})^{-1} \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

т.е. Λ берётся диагональной матрицей, составленной из величин, обратных отклонениям диагональных элементов \mathbf{A} . Ниже мы экспериментально демонстрируем, что даже такой простейший выбор Λ ведёт

к неплохим результатам: область применимости нашего подхода действительно расширяется и улучшается качество внешнего оценивания в сравнении с немодифицированной версией (9.5). А. Ноймайер недавно теоретически доказал [41], что при оценивании объединённого множества решений наш формальный подход с “диагональным” предобуславливанием (7.24) применим в точности к интервальным линейным системам с H -матрицами (см. §9.4), т.е. тогда же, когда и интервальный метод Гаусса-Зейделя. При этом полученные результаты будут тем лучше, чем больше у матрицы \mathbf{A} диагональное преобладание, иными словами, чем больше разнятся левая и правая части в неравенстве (2.25). Это и продемонстрировано в приводимых ниже в §7.4 результатах тестовых расчетов.

С другой стороны, располагая более детальной информацией об интервальной матрице системы или об алгоритме, можно построить предобуславливающие матрицы, лучшие чем “обратная средняя”. Например, в популярном интервальном методе Гаусса-Зейделя мы имеем возможность выбирать даже *оптимальные* (в том или ином смысле) предобуславливатели, которые переычисляются для каждого отдельного шага алгоритма [28].

Может показаться, что расширение множеств решений при предобуславливании является тем меньшим, чем более узка интервальная матрица системы. К сожалению, это неверно, как показывает построенный И. Роном пример интервальной линейной 4×4 -системы с сильно неособенной матрицей, показывающий, что для даже произвольно узких интервалов предобуславливание с помощью “обратной средней” может приводить к 100% уширению множества решений по некоторым компонентам.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим интервальную линейную систему

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \quad (7.25)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & [-\varepsilon, \varepsilon] & [-\varepsilon, \varepsilon] & [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\varepsilon, \varepsilon] \\ [-\varepsilon, \varepsilon] \\ [-\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix},$$

и предобусловленная система есть

$$(\mathbf{A}_c^{-1} \cdot \mathbf{A})x = \mathbf{A}_c^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad (7.26)$$

где A_c — середина \mathbf{A} и “.” обозначает умножение в интервальной арифметике. Интервальная матрица \mathbf{A} сильно неособена ($\varrho = 0$). Пусть \mathbf{X}' — интервальная оболочка множества решений (7.25), а \mathbf{X}'' — интервальная оболочка множества решений для (7.26). Имеет место

Предложение 7.7.1

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} [-0.6, 0.6] \\ \varepsilon[-0.4, 0.4] \\ \varepsilon[-0.4, 0.4] \\ \varepsilon[-0.4, 0.4] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} [-1.2, 1.2] \\ \varepsilon[-0.4, 0.4] \\ \varepsilon[-0.4, 0.4] \\ \varepsilon[-0.4, 0.4] \end{pmatrix}.$$

Доказательство может быть проведено прямыми, хотя и несколько утомительными, вычислениями на основе идей, изложенных в статье И. Рона из *Reliable Computing* 3 (1997), pp. 363–368. В частности,

$$\mathbf{X}_1 = 2\mathbf{X}_1,$$

так что в этом примере предобуславливание действительно приводит к 100% увеличению ширины \mathbf{X}_1 независимо от ε !

Итак, любой метод внешнего оценивания, основанный на предобуславливании “обратной средней” матрицей может давать даже для произвольно узких интервальных данных задачи уширение $\geq 100\%$ по некоторым компонентам даже для размерностей $n = 4$ и сильно неособенных интервальных матриц.

7.8 Процедура Хансена-Блика-Рона

Процедурой Хансена-Блика-Рона мы называем подход к вычислению внешних оценок множеств решений интервальных линейных систем, в основе которого лежит

Теорема 7.8.1 Пусть в интервальной линейной системе $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ является интервальной H -матрицей, и пусть

$$u = \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|, \quad d_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1})_{ii}, \quad (7.27)$$

$$\alpha_i = \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle - 1/d_i, \quad \beta_i = u_i/d_i - |\mathbf{b}_i| \quad (7.28)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ содержится в интервальном векторе $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)$ с компонентами

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{b}_i + [\beta_i, \beta_i]}{\mathbf{a}_{ii} + [-\alpha_i, \alpha_i]}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если же средняя матрица в \mathbf{A} диагональна, то \mathbf{x} — оптимальная внешняя оценка множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Алгоритмическая схема процедуры Хансена-Блика-Рона легко строится из Теоремы 7.8.1, и потому мы не приводим её отдельного псевдокода.

Пример. У интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

(которая уже неоднократно встречалась нам в книге) интервальная матрица не является H -матрицей, так что процедура Хансена-Блика-Рона напрямую к ней не применима.

После предобуславливания обратной средней получается интервальная линейная система (7.22), матрица которой имеет средней диагональную матрицу и уже решается процедурой Хансена-Блика-Рона. Ответ — $([-14, 14], [-14, 14])^\top$ — весьма широк в сравнении с оптимальной внешней оценкой $([-4, 4], [-4, 4])^\top$ (см. Рис. 5.1), и причиной огрубления является предобуславливание.

7.9 Локальные решатели

Локальными решателями (local solver) интервальной линейной алгебраической системы мы будем называть любую процедуру для локального оценивания множества решений ИСЛАУ, т.е. не всего множества решений целиком, а лишь той его части, которая лежит в некотором заданном брусе. Строгое определение формулируется следующим образом:

Определение 7.9.1 *Интервальнозначное отображение*

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (7.29)$$

называется локальным решателем (локальной решающей процедурой) для интервальных систем линейных алгебраических уравнений, если для любых $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$(i) \quad \text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}, \quad (7.30)$$

$$(ii) \quad \text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}') \supseteq \text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \quad \text{при } \mathbf{z} \supseteq \mathbf{z}', \quad (7.31)$$

т.е. когда $\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ включает в себя подмножество рассматриваемого множества решений ИСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, содержащееся в \mathbf{z} , и монотонно относительно включения по аргументу \mathbf{z} .

Впервые локальные решатели рассматривались А.Ноймайером для объединённого множества решений в работе [44], но полученные им результаты почему-то не вошли в итоговую книгу [46]. Мы даём определение локального решателя в максимальной общности для всех множеств решений ИСЛАУ.

Для случая объединённого множества решений некоторые простые локальные решатели и их теоретический анализ содержатся в работе А. Ноймайера [44], но в полном объёме вопрос конструирования локальных решателей никем не исследовался. Ниже мы отчасти восполним этот пробел, рассмотрев два простых, но достаточно общих способа построения локальных решателей на основе известных методов глобального решения ИСЛАУ.

Пусть Encl — какой-нибудь конечный метод решения “внешней задачи” для ИСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\text{Encl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — даваемый им интервальный вектор внешней оценки множества решений¹, $\text{Encl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. По-видимому, простейшим локальным решателем является

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) = \text{Encl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}.$$

Выполнение условий (i) и (ii) Определения 7.9.1 проверяется тривиально, но вот (10.28) (а тем более и (10.27)) для этого простейшего локального решателя в общем случае неверно. Модифицируем эту конструкцию.

Алгоритм Encl представляется в виде последовательности инструкций, предписывающих, какие действия следует произвести с входными

¹От английского термина enclosure, означающего “объемлющее множество” или “внешняя оценка”.

данными — \mathbf{A} и \mathbf{b} — для получения ответа $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Как правило, значения компонент ответа $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ вычисляются не все одновременно, и, кроме того, будучи уже найдены, значения тех компонент, которые вычисляются раньше, используются и далее для определения окончательных значений остальных компонент. Выделим в последовательности инструкций, порождающей $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, входящие компонент $Encl_i(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, интервального вектора-ответа $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и заменим все их пересечениями $(Encl \cap \mathbf{z})$. Получившийся в результате выполненной подстановки список инструкций задаёт, очевидно, некоторое отображение

$$LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

которое имеет хорошие предпосылки к тому, чтобы являться локальным решателем. Например, нетрудно показать, что $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ — локальный решатель для оценивания объединённого множества решений, если $Encl$ — это известный интервальный метод Гаусса или какая-нибудь из его многочисленных модификаций.

Но для использования в (10.26) нужны значения не всех компонент интервала локального решения ИСЛАУ, а одной лишь ν -ой компоненты. Если в алгоритме $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ значение ν -ой компоненты вычисляется не последней по порядку, то может возникнуть малопрятная ситуация, когда её величина окажется не зависящей от некоторых из \mathbf{z}_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Вследствие этого на оценку (10.26), получаемую с помощью локального решателя $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ никак не будут влиять значения некоторых компонент бруса \mathbf{P} , и, следовательно, нарушенными окажутся условия (10.27)–(10.28). Поэтому мы рекомендуем предварительно перенумеровывать неизвестные в ИСЛАУ так, чтобы в алгоритмах $Encl$ и $LocSol$ значение ν -ой компоненты ответа вычислялась бы самой последней. Эта мера достигает цели, если $Encl$ удовлетворяет “принципу Гаусса-Зейделя” [12], — вновь полученная информация сразу же используется, — т.е. если переменные в $Encl$ “достаточно тесно” завязаны друг с другом, хотя в общем случае и она может не спасти положения.

Если в методе $Encl$ все компоненты оценивающего бруса $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ получаются из найденных ранее компонент как суперпозиции действий интервальной арифметики (1.2)–(1.5) и операций пересечения и объединения, то очевидна монотонность величины $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ относительно включения по аргументу \mathbf{z} . Но для полной проверки справедливости для $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ определения локального решателя и условий

(10.27)–(10.28) необходимо, конечно, отталкиваться от свойств конкретного алгоритма *Encl*.

Обратимся теперь к построению локальных решателей на основе итерационных методов внешнего оценивания множеств решений. Как следует из результатов §7.6 и §7.7, внешняя оценка для множеств решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть найдена в виде формального решения уравнения

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x} + \Lambda \mathbf{b} \quad (9.30)$$

при условии $\rho(|\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}|) < 1$, а её вычисление можно организовать в виде итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := (\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} + \Lambda \mathbf{b}. \quad (7.32)$$

Предложение 7.9.1 Пусть интервальная линейная система уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и её множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, соответствующее характеристической матрице \mathbf{A} и правой части \mathbf{b} таковы, что существует квадратная точечная матрица Λ , удовлетворяющая

$$\rho(|\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}|) < 1. \quad (7.33)$$

Тогда итерационный процесс в \mathbb{IR}^n

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \mathbf{z}, \quad (7.34)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \begin{cases} ((\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} + \Lambda \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}, & \text{если } \mathbf{x}^{(k)} \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \quad (7.35)$$

сходится (либо к некоторому интервальному вектору, либо к \emptyset). Им порождается локальный решатель

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)}$$

для оценивания множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы.

Доказательство. Предположим, что все члены последовательности (7.34)–(7.35) непусты. Поскольку для любых интервальных векторов

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ с непустыми пересечениями $\mathbf{x} \cap \mathbf{z}$ и $\mathbf{y} \cap \mathbf{z}$ имеет место неравенство

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \text{dist}(\mathbf{x} \cap \mathbf{z}, \mathbf{y} \cap \mathbf{z}),$$

то последовательность (7.34)–(7.35) фундаментальна (т.е. является последовательностью Коши) в полном метрическом пространстве всех правильных интервальных векторов из \mathbf{z} по тем же самым причинам, по которым, при определённых условиях, в \mathbb{R}^n фундаментальна любая последовательность вида (7.32). Если же какой-нибудь член последовательности (7.34)–(7.35) является пустым множеством, то таковы и все последующие её члены. Следовательно, $\lim \mathbf{x}^{(k)}$ существует, и значения $\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ определены корректно.

Очевидна также монотонность отображения $\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ относительно включения по аргументу \mathbf{z} .

Свойство (i) из Определения локального решателя доказывается с помощью традиционных для подобных случаев рассуждений, которые мы проводили, к примеру, при доказательстве Теоремы 7.6.2 и поэтому мы на них здесь не останавливаемся подробно. ■

7.10 Интервальный метод Ньютона

Начиная с этого параграфа мы обращаемся к интервальным методам для нелинейных уравнений и систем уравнений.

Предположим, что $f : \mathbb{R} \supseteq \mathbf{x} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция, имеющая нуль x^* на интервале \mathbf{x} , т.е. $f(x^*) = 0$. Тогда для любой точки $\tilde{x} \in \mathbf{x}$ из этого же интервала в силу теоремы о среднем значении

$$f(\tilde{x}) - f(x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(\xi),$$

где ξ — некоторая точка между \tilde{x} и x^* . Но так как $f(x^*) = 0$, то отсюда следует

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi)}.$$

Если $f'(x)$ является каким-либо интервальным расширением производной функции $f(x)$ на \mathbf{x} , то $f'(\xi) \in f'(x)$ и

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(x)}.$$

Интервальное выражение, фигурирующее в правой части этого включения, будет играть в дальнейшем важную роль и потому достойно выделения самостоятельным понятием.

Определение 7.10.1 Для заданной функции f отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR},$$

действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\mathbf{x})}$$

называется (одномерным) интервальным оператором Ньютона.

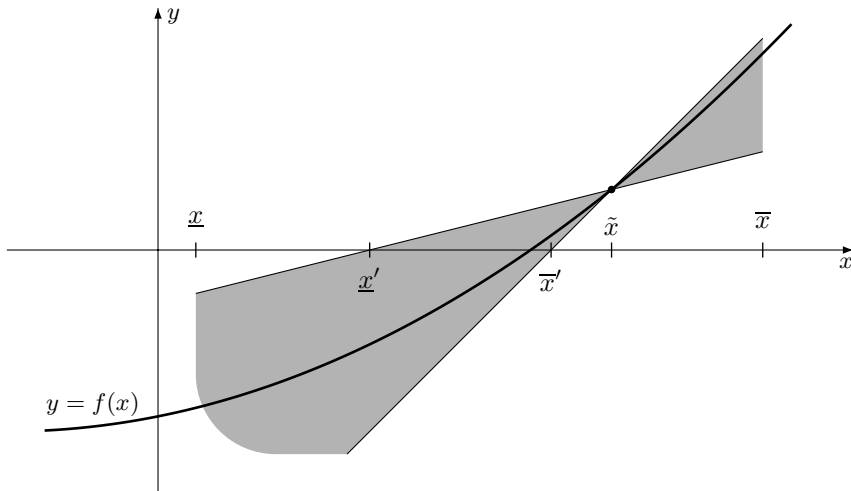


Рис. 7.3. Иллюстрация работы одномерного интервального метода Ньютона. Ситуация 1.

Допустим на время, что $0 \notin f'(\mathbf{x})$, так что $\mathcal{N}(\mathbf{x}, \tilde{x})$ является конечным интервалом. Так как любой нуль функции $f(x)$ на \mathbf{x} лежит также и в $\mathcal{N}(\mathbf{x}, \tilde{x})$, то разумно взять в качестве следующего более точного приближения к решению пересечение

$$\mathbf{x} \cap \mathcal{N}(\mathbf{x}, \tilde{x}),$$

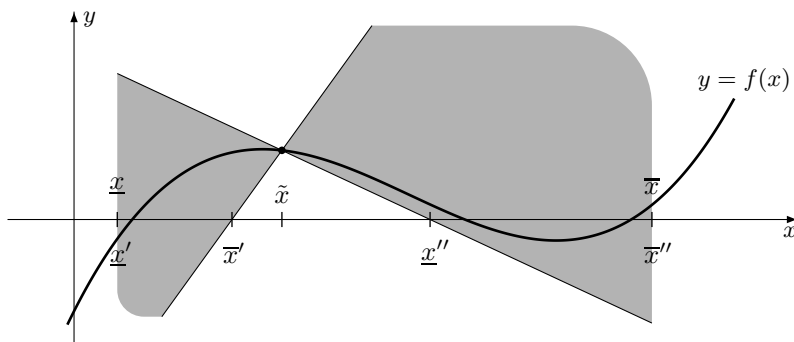


Рис. 7.4. Иллюстрация работы одномерного интервального метода Ньютона. Ситуация 2.

которое окажется, по крайней мере, не хуже \mathbf{x} .

Далее, если $0 \in f'(\mathbf{x})$, мы можем придать смысл оператору Ньютона, воспользовавшись интервальной арифметикой Кахана. В действительности, эта модификация даже усилит интервальный метод Ньютона, так как мы получим возможность отделять решения друг от друга: в результате выполнения шага интервального метода Ньютона при $0 \in \text{int } f'(\mathbf{x})$ получаются, как правило, два непересекающихся интервала.

Свойства одномерного интервального метода Ньютона

7.11 Многомерный интервальный метод Ньютона

Переходя к решению систем нелинейных уравнений, следует отметить, что многомерные версии интервального метода Ньютона гораздо более многочисленны, чем одномерные, и отличаются очень большим разнообразием. В многомерном случае мы можем варьировать не только выбор точки $\tilde{\mathbf{x}}$, вокруг которой осуществляется разложение, форму интервального расширения производных или наклонов функции, как это было в одномерном случае, но также и способ внешнего оценивания множества решений интервальной линейной системы, к которой приводится оценивание бруса решения. В оставшейся части этого параграфа мы рассмотрим простейшую форму многомерного интервального мето-

да Ньютона, а его более специальными версиями, которые связываются с именами Кравчика и Хансена-Сенгупты, будут посвящены отдельные параграфы.

Предположим, что на брусе \mathbf{x} к решению предъявлена система нелинейных уравнений

$$F(x) = 0. \quad (7.36)$$

Если \mathbf{L} — интервальная матрица Липшица отображения F на \mathbf{x} (см. Определение 3.1.9), то для любых точек $x, \tilde{x} \in \mathbf{x}$ справедливо представление

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}).$$

В частности, если x — решение системы уравнений (7.36), т.е. $F(x) = 0$, то

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}). \quad (7.37)$$

Вспомним характеризацию Бека для объединённого множества решений ИСЛАУ (Теорема 7.1.2): получается, что точка x удовлетворяет включению (7.37) тогда и только тогда, когда она принадлежит объединённому множеству решений интервальной линейной системы

$$\mathbf{L}(x - \tilde{x}) = -F(\tilde{x}). \quad (7.38)$$

Далее, если $Encl$ — процедура внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ, то справедливо включение

$$x - \tilde{x} \in Encl(\mathbf{L}, -F(\tilde{x})),$$

так что

$$x \in \tilde{x} + Encl(\mathbf{L}, -F(\tilde{x})).$$

Определение 7.11.1 Пусть для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ зафиксирована процедура $Encl$, а для отображения $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ известна интервальная матрица Липшица $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \tilde{x}) = \tilde{x} + Encl(\mathbf{L}, -F(\tilde{x})),$$

называется интервальным оператором Ньютона на \mathbb{ID} относительно точки \tilde{x} .

Как лучше выбирать центр разложения \tilde{x} ? Имеет смысл делать это так, чтобы величина $\|F(\tilde{x})\|$ была, по-возможности, меньшей. Чем меньше будет норма вектор-функции $F(\tilde{x})$, тем меньшим будет норма векторов, образующих множество решений интервальной линейной системы

$$L(x - \tilde{x}) = -F(\tilde{x}),$$

которое мы должны пересекать с исходным брусом. Может быть, мы получим при этом более узкую внешнюю оценку множества решений исходной нелинейной системы и более точно определим статус исследуемого бруса. Численные эксперименты, проведенные Э. Хансеном и Р. Гринбергом [26] как будто подтверждают этот вывод.

Процедуру для уточнения центра разложения можно организовать как метод типа Ньютона, коль скоро нам известна интервальная матрица Липшица.

Наиболее неблагоприятной ситуацией при работе интервального метода Ньютона является, конечно,

$$\mathcal{N}(x, \tilde{x}) \supseteq x.$$

Тогда все последующие шаги заклиниваются на x и не дают никакой дополнительной информации о искомым решениях системы. Как поступать в этом случае? Мы рассмотрим возможное решение этой проблемы ниже в §8.10.

Наиболее простым и универсальным приёмом, который позволяет сдвинуть уточнение решений с “мертвой точки”, является *дробление* исходного интервала на более мелкие подинтервалы. Пусть

$$x = x' \cap x'',$$

тогда мы можем применить интервальный метод Ньютона к x' и x'' по отдельности и объединить полученные результаты. Поскольку подинтервалы x' и x'' имеют, вообще говоря, меньшую ширину, чем исходный x , то применение интервального метода Ньютона к ним может быть гораздо более успешным.

Наиболее часто используется *бисекция* — дробление исходного интервала пополам, на две равные по длине части.

Резкое увеличение количества обрабатываемых интервалов вызывает необходимость организовать по-новому работу нашего алгоритма.

7.12 Метод Кравчика

Широко известный метод Кравчика для внешнего оценивания решений систем нелинейных уравнений был предложен в [29] и потом исследован в большом количестве публикаций.

Пусть на брусе \mathbf{x} задана система нелинейных уравнений

$$F(\mathbf{x}) = 0,$$

двусторонние границы решения которой нам требуется уточнить. Возьмём какую-нибудь точку $\tilde{x} \in \mathbf{x}$ и организуем относительно неё разложение функции F :

$$F(\mathbf{x}) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(\mathbf{x} - \tilde{x}),$$

где $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — интервальная матрица Липшица отображения F на брусе \mathbf{x} . Если x — это точка решения системы, то

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(\mathbf{x} - \tilde{x}), \quad (7.37)$$

но далее, в отличие от интервального метода Ньютона, мы не будем переходить к рассмотрению интервальной линейной системы (7.38), а домножим обе части этого включения слева на матрицу $(-\Lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$0 \in -\Lambda F(\tilde{x}) - \Lambda \mathbf{L}(\mathbf{x} - \tilde{x}).$$

Добавление к обеим частям получившегося соотношения по $(\mathbf{x} - \tilde{x})$ приводит к

$$\mathbf{x} - \tilde{x} \in -\Lambda F(\tilde{x}) - \Lambda \mathbf{L}(\mathbf{x} - \tilde{x}) + (\mathbf{x} - \tilde{x}),$$

что равносильно

$$\mathbf{x} \in \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{x} - \tilde{x}),$$

так как для неинтервального общего множителя $(\mathbf{x} - \tilde{x})$ можно воспользоваться дистрибутивным соотношением. Наконец, если решение x системы уравнений предполагается принадлежащим брусу \mathbf{x} , мы можем взять интервальное расширение по $x \in \mathbf{x}$ правой части полученного включения, придя к соотношению

$$\mathbf{x} \in \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{x} - \tilde{x}),$$

Определение 7.12.1 Пусть заданы некоторые правила, сопоставляющие всякому брусу $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ точку $\tilde{x} \in \mathbf{x}$ и вещественную $n \times n$ -матрицу \mathbf{L} и пусть также $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ — интервальная матрица Липшица отображения $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ на D . Отображение

$$\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \mathbf{L}F(\tilde{x}) + (I - \mathbf{L}\mathbf{L})(\mathbf{x} - \tilde{x}),$$

называется оператором Кравчика на \mathbb{ID} относительно точки \tilde{x} .

Теорема 7.12.1 Пусть $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное по Липшицу отображение и \mathbf{L} — его интервальная матрица Липшица. Если $\tilde{x} \in \mathbf{x} \subseteq \mathbb{ID}$,

- (i) каждое решение $x^* \in \mathbf{x}$ системы $F(x) = 0$ лежит также в $\mathcal{K}(\mathbf{x}, \tilde{x})$;
- (ii) если $\mathbf{x} \cap \mathcal{K}(\mathbf{x}, \tilde{x}) = \emptyset$, то в \mathbf{x} нет решений системы $F(x) = 0$;
- (iii) если $\mathcal{K}(\mathbf{x}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{x}$, то в \mathbf{x} находится хотя бы одно решение системы $F(x) = 0$;
- (iv) если $\tilde{x} \in \text{int } \mathbf{x}$ и $\emptyset \neq \mathcal{K}(\mathbf{x}, \tilde{x}) \subseteq \text{int } \mathbf{x}$, то матрица \mathbf{L} сильно неособенна и в $\mathcal{K}(\mathbf{x}, \tilde{x})$ содержится в точности одно решение системы $F(x) = 0$.

Оператор Кравчика — это не что иное, как центрированная форма интервального расширения отображения $\Phi(x) = x - \mathbf{L}F(x)$, возникающего в правой части системы уравнений после её приведения к рекуррентному виду

$$x = \Phi(x).$$

Следовательно, мы можем использовать для модификации оператора Кравчика все те средства, которые применимы к центрированным формам вообще. Одним из способов улучшения качества интервальных оценок является варьирование центра разложения \tilde{x} , и на этом пути итоговый результат — это теорема Бауманна (Теорема 3.4.1).

Как мы видели в §3.3, теорема Бауманна естественно вызывает к жизни так называемую *бицентрированную форму* интервального расширения функций, при которой мы берём пересечение двух обычных

центрированных интервальных расширений, взятых относительно оптимальных центров \tilde{x} и \hat{x} . Но эта же идея применима и к оператору Кравчика, отдельная компонента которого с номером i должна снабжаться своими собственными оптимальными центрами \tilde{x}^i и \hat{x}^i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Схема вычисления бицентрированной формы интервального оператора Кравчика выглядит следующим образом:

- 1) Вычисляем величины “смещений” центров

$$p_{ij} = \text{cut} \left(\frac{\text{mid} (\Phi'_{ij}(\mathbf{x}))_i}{\text{rad} (\Phi'_{ij}(\mathbf{x}))_i}, [-1, 1] \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где $\Phi'_{ij}(\mathbf{x})$ — интервальная оценка на \mathbf{x} производной $\partial \Phi_i / \partial x_j$ отображения $\Phi(x) = x - \Lambda F(x)$.

- 2) Вычисляем “смещённые центры”

$$\tilde{x}_j^i = \text{mid } \mathbf{x}_j - p_{ij} \text{rad } \mathbf{x}_j, \quad \hat{x}_j^i = \text{mid } \mathbf{x}_j + p_{ij} \text{rad } \mathbf{x}_j,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 3) Вычисляем собственно центрированные формы

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{x}, \tilde{x}^i) = (\tilde{x}_i^i - \Lambda F(\tilde{x}^i)) + (I - \Lambda \mathbf{G})(\mathbf{x} - \tilde{x}^i),$$

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{x}, \hat{x}^i) = (\hat{x}_i^i - \Lambda F(\hat{x}^i)) + (I - \Lambda \mathbf{G})(\mathbf{x} - \hat{x}^i),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

- 4) Вычисляем бицентрированную форму оператора Кравчика

$$\mathcal{K}_{bic}(\mathbf{x}) = \mathcal{K}(\mathbf{x}, \tilde{x}) \cap \mathcal{K}(\mathbf{x}, \hat{x})$$

Сформулированные выше в конце §?? утверждения (i)–(iv), обосновывающие применение оператора Кравчика для тестирования решений систем уравнений, останутся справедливыми и для бицентрированного оператора Кравчика. Но при этом следует специально озаботиться выбором “предобуславливающей” матрицы Λ : вопреки традиционному рецепту её нельзя брать обратной к средней матрице для интервальной оценки производных $F'(\mathbf{x})$, так как в этом случае все смещения p_{ij}

получатся нулевыми, и преимущества бицентрированной формы останутся нереализованными.

При любой форме интервального расширения точность интервального оценивания области значений функции критическим образом зависит от ширины бруса \mathbf{X} , на котором она осуществляется. Как правило, избыток ширины оценки пропорционален некоторой степени \mathbf{X} : первой степени в случае естественного интервального расширения, второй степени для центрированных форм и т.п. Но для каждого из $2n$ штук $(n - 1)$ -мерных брусов

$$\begin{array}{ll} (\underline{\mathbf{X}}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n), & (\overline{\mathbf{X}}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n), \\ (\mathbf{X}_1, \underline{\mathbf{X}}_2, \dots, \mathbf{X}_n), & (\mathbf{X}_1, \overline{\mathbf{X}}_2, \dots, \mathbf{X}_n), \\ \vdots & \vdots \\ (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \underline{\mathbf{X}}_n), & (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \overline{\mathbf{X}}_n), \end{array}$$

составляющих границу исследуемого n -мерного бруса \mathbf{X} , норма ширины является, очевидно, меньшей, чем для \mathbf{X} , так что ценой некоторого увеличения работы (примерно в $2n$ раз) мы получим более чувствительный тест существования решений.

Теорема 7.12.2 (о граничной форме оператора Кравчика)

7.13 Метод Хансена-Сенгупты

Крупным недостатком многомерного интервального метода Ньютона, в той форме как он представлен в §7.11, является его неспособность обрабатывать ситуации, в которых интервальная матрица Липшица \mathbf{L} содержит особенные вещественные матрицы, и множество решений интервальной линейной системы (7.38) поэтому неограничено. Излагаемый ниже метод Хансена-Сенгупты отчасти исправляет этот недостаток.

Он основывается на том наблюдении, что нас, в действительности, интересует не всё множество решений вспомогательной ИСЛАУ (7.38), а только та его часть, которая ограничена исходным брусом \mathbf{x} . Таким образом, для осуществления одного шага многомерного интервального метода Ньютона нужна не полноценная процедура внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ, а лишь локальный решатель в смысле

§7.9. В качестве такового Э. Хансеном и Сенгуптой было предложено использовать интервальный метод Гаусса-Зейделя, применённый к системе (7.38), возможно, после предобуславливания её некоторой матрицей $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Определение 7.13.1 Пусть $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ — интервальная матрица Липшица отображения $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ на D . Отображение

$$\mathcal{H} : \mathbb{I}D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{x}) := \tilde{x} + \Gamma(\Lambda \mathbf{L}, -\Lambda F(\tilde{x}), \mathbf{x} - \tilde{x}),$$

называется оператором Хансена-Сенгупты на $\mathbb{I}D$ относительно точки \tilde{x} .

Теорема 7.13.1 Пусть $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное по Липшицу отображение и \mathbf{L} — его интервальная матрица Липшица. Если $\tilde{x} \in \mathbf{x} \subseteq \mathbb{I}D$,

- (i) каждое решение \mathbf{x}^* системы $F(\mathbf{x}) = 0$ на \mathbf{x} удовлетворяет $\mathbf{x}^* \in \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{x})$;
- (ii) если $\mathbf{x} \cap \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{x}) = \emptyset$, то на \mathbf{x} нет решений системы $F(\mathbf{x}) = 0$;
- (iii) если $\tilde{x} \in \text{int } \mathbf{x}$ и $\emptyset \neq \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{x}) \subseteq \text{int } \mathbf{x}$, то матрица \mathbf{L} сильно неособена и на $\mathbf{x} \cap \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{x})$ содержится в точности одно решение системы $F(\mathbf{x}) = 0$.

Внимательный читатель легко сообразит, что вместо интервального метода Гаусса-Зейделя для оценивания пересечения части множества решений с заданным бруском можно взять любой другой локальный решатель из тех, что развиты в §7.9. На этом пути следует ожидать построения новых эффективных интервальных тестов существования решений уравнений и систем уравнений.

7.14 Интервальные методы распространения ограничений

Комментарий к Главе 7

История задачи внешнего оценивания объединённого множества решений для интервальных систем уравнений, линейных и нелинейных, является давней и насыщенной. Её формулировка настолько проста и естественна, что, фактически, посвященные ей работы появлялись задолго до выхода в свет классической книги Р.Е. Мура [35], с которой, как принято считать, и началось быстрое развитие интервального анализа. В частности, первой русской работой о характеристике и оценивании объединённого множества решений ИСЛАУ была статья иркутских математиков Б.И. Белова и Е.Г. Анциферова [3]. К настоящему времени среди общей массы публикаций по интервальной математике доля тех, в которых рассматриваются различные аспекты решения “внешней” задачи для ИСЛАУ, — одна из наибольших.

Сложности оценивания объединённого множества решений посвящено немало публикаций, появившихся в 90-годы прошлого века, см. [9, 10, 30] и обширную библиографию к этим работам.

Практические приложения “внешней” задачи для ИСЛАУ многочисленны и разнообразны. Е.К. Корноушенко в цикле статей [7] сводит к решению этой задачи проблему оценивания множества достижимых состояний линейной стационарной динамической системы. В работе Н.К. Пылаева и И.Б. Ядыкина [12] “внешняя задача” естественно возникает в связи с синтезом интервального управления по неявной эталонной модели. В.З. Манусов, С.М. Моисеев и С.Д. Перков в [11] приводят к “внешней задаче” для ИСЛАУ решение некоторых линейных задач электротехники с интервальными неопределённостями во входных параметрах. В последние годы трудами многих исследователей интенсивное развитие получили методы идентификации систем управления в условиях ограниченных возмущений их параметров (см. обзор А.Б. Куржанского [8] и книгу французских авторов [27]). Для случая систем, описываемых линейными зависимостями “вход-выход”, математической основой этих методов также служит решение “внешней задачи” для ИСЛАУ, как правило, с прямоугольными интервальными матрицами.

Кроме отмеченных выше приложений в технике и естествознании

“внешняя задача” для ИСЛАУ имеет и более опосредованные применения. Например, на каждом шаге популярного интервального метода Ньютона требуется решать “внешние задачи” для некоторых промежуточных ИСЛАУ. С необходимостью решения “внешней задачи” для интервальных систем алгебраических уравнений (линейных или нелинейных) сталкиваются при дискретизации различных интервальных версий краевых задач для дифференциальных уравнений (см. [6, 55]) и интегральных уравнений [5]. В интервальном методе наименьших квадратов [22] построение регрессионной прямой по заданному семейству результатов наблюдений, имеющих интервальную неопределённость, также сводится к решению “внешней задачи” для ИСЛАУ.

За прошедшие три десятилетия методология решения “внешней задачи” претерпела эволюцию от подражания известным вещественным методам решения СЛАУ (метод Гаусса, простой итерации и т.п.) до создания самостоятельных “интервальных” концепций и подходов. Хорошие обзоры методов решения задачи внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ (по состоянию на середину 80-х годов) были сделаны А. Ноймайером в [38, 40]. Немало материалов, касающихся интервальных алгебраических систем (линейных, в частности), воспроизведено в широко известных монографиях Р. Мура [35, 36], Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [1], А. Ноймайера [40], С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина и З.Х. Юлдашева [6], Б.С. Добронца и В.В. Шайдурова [5], Р.Б. Кирфотта [28]. Тем не менее, на сегодняшний день подавляющая часть результатов по этой теме остается разбросанной по разрозненным журнальным публикациям. Среди работ последних лет отметим статьи Ю. Гарлоффа [19], Д. Гея [20], монографию Р.Б. Кирфотта [28], работы Г. Майера по выяснению условий применимости интервального метода Гаусса [31, 32, 33], капитальную монографию А. Ноймайера [40] и его последующие статьи [41, 42], многочисленные исследования И. Рона [46, 47, 48, 49, 50], З. Румпа [52, 53], Х. Швандта [54].

В последние годы в связи с бурным развитием теории и практики параллельных вычислений все возрастающее количество публикаций посвящается реализации различных интервальных алгоритмов на векторных и параллельных ЭВМ. Решение на таких вычислителях “внешней задачи” для ИСЛАУ рассмотрено, например, в [55].

К §7.1 Интересно сопоставить саму постановку задачи о внешнем оценивании объединённого множества решений ИСЛАУ и интерваль-

ные подходы к её решению с другими методиками, которые более или менее успешно применялись и применяются для решения аналогичных задач. Это, во-первых, широко известные методы *анализа чувствительности* решений систем уравнений [21, 39] и, во-вторых, так называемые *методы гарантированной точности* для решений систем уравнений, интенсивно развивавшиеся в работах школы С.К. Годунова [4].

В традиционном анализе чувствительности оценке вариаций решений обычно предшествует линеаризация исходного уравнения относительно некоторого частного решения, на основе которой и выводятся заключения о влиянии на решение тех или иных параметров. Так как члены второго и более высоких порядков при этом игнорируются, то подобная методика работоспособна лишь при “достаточно малых” изменениях параметров системы и к тому же не обеспечивает гарантированности оценок решений.

В методах гарантированной точности из [4] вариации параметров (коэффициентов) системы вообще рассматриваются как нежелательный паразитный эффект, искажающий исходно точную постановку задачи. В связи с такой методологической установкой, а также из-за особенностей применяемой в [4] техники “большие” изменения параметров решаемой системы (иначе называемые также *крупномасштабными* или *нелокальными*) школой С.К. Годунова просто не рассматриваются. Напомним, что в современном интервальном анализе “очень широкие” интервальные параметры в системах уравнений также вызывают затруднения, но задачи для интервальных линейных систем с сильно неособенными (хотя и достаточно широкими) интервальными матрицами (см. Определение 2.4.2) надежно решаются без особых проблем. Наконец, как вариации параметров системы, так и оценки вариаций решения С.К. Годунов и его последователи измеряют отклонением по норме (т.е. одним числом), тогда как в интервальном анализе и в постановке задачи и ответе неопределённость с гораздо большей степенью детализации описывается многомерным интервалом-брусом.

К §7.3 Интервальный метод Хаусхолдера был впервые предложен и реализован В.В. Шайдуровым в 1984 году в рамках работ по закрытой хоздоговорной тематике на Вычислительном Центре СО АН СССР в г. Красноярске, но, к сожалению, так и не был опубликован в открытой печати. В 2001-м году он был переоткрыт марокканским математиком А. Бентбибом [16].

К §7.4 Замечательная своей простотой и общностью теорема Майера-Варнке была сформулирована и доказана в [34]. Более слабой версией этого результата, на которой первоначально основывался формальный подход к внешней задаче для ИСЛАУ, является Теорема 7.6.2.

Формальный подход к внешнему оцениванию множеств решений впервые был предложен С.П. Шарым в [13], но первоначально носил наименование “алгебраического”.

К §7.7 Предобуславливание интервальных линейных систем впервые было применено Э. Хансеном и Р. Смитом в [23]. В книге Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [1] предобуславливание даже называется “методом Хансена” (Глава 16).

К §7.8 Процедура Хансена-Блика-Рона была независимо предложена в 1992-м году К. Бликом в его диссертации (к сожалению, неопубликованной) и Э. Хансеном в работе [25]. Оба этих автора не смогли, впрочем, предложить обоснование своего метода. Это было сделано позднее И. Роном [50], который модифицировал и вычислительную схему. Далее С. Нинг и Р.Б. Кирфотт обобщили процедуру Хансена-Блика-Рона на более широкий класс интервальных линейных систем, а А. Ноймайер в [42] предложил окончательную и наиболее общую формулировку вместе с изящным обоснованием. В §7.8 мы, в основном, следуем духу этой работы.

Всё программное обеспечение автора имеет статус ‘public domain’ и находится (на момент написания книги) на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу

<http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/progr.html>

Литература к главе 7

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] АХМЕРОВ Р.Р. Аффинно-интервальный метод Гаусса и его свойства
- [3] БЕЛОВ Б.И., АНЦИФЕРОВ Е.Г. К установлению линейной зависимости в условиях неопределённости исходных данных // *Информационный сборник трудов Вычислительного Центра ИрГУ; выпуск II*. – Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1968. – С. 143–147.

- [4] Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*. – Новосибирск: Наука, 1988.
- [5] Добронец Б.С., Шайдуров В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [6] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [7] Корноушенко Е.К. Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы // *Автоматика и Телемеханика*. – 1980–1983. *Часть I*. – 1980. – №5. – С. 12–22; *Часть II*. – 1980. – №12. – С. 10–17; *Часть III*. – 1982. – №10. – С. 47–52; *Часть IV*. – 1983. – №3. – С. 81–87.
- [8] Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // *Автоматика и Телемеханика*. – 1991. – №4. – С. 3–26.
- [9] Лакеев А.В., Носков С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Доклады Академии Наук*. – 1993. – Т. 330, № 4. – С. 430–433.
- [10] Лакеев А.В., Носков С.И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Сибирский Математический Журнал*. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074–1084.
- [11] Манусов В.З., Моисеев С.М., Перков С.Д. Интервальный анализ в задачах расчета токов короткого замыкания // *Техническая Электродинамика*. – 1987. – №5. – С. 13–18.
- [12] Пылаев Н.К., Ядыкин И.Б. Интервальные алгоритмы адаптивного управления с неявной эталонной моделью // *Автоматика и Телемеханика*. – 1989. – №6. – С. 63–72.
- [13] Шарый С.П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 67–114.
- [14] Apostolatos N., Kulisch U. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // *Electron. Rechenanl.* – 1968. – Bd. 10. – S. 73–83.
- [15] Barth W., Nuding E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [16] Benthien A.H. Solving the full rank interval least squares problem // *Applied Numerical Mathematics*. – 2002. – Vol. 41. – P. 283–294.
- [17] Caprani O., Madsen K. Iterative methods for interval inclusion of fixed points // *BIT*. – 1978. – Vol. 18. – P. 42–51.

- [18] CAPRANI O., MADSEN K. Experiments with interval methods for nonlinear systems // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – No. 7/81. – S. 1–13.
- [19] GARLOFF J. Block methods for the solution of linear equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 1990. – Vol. 11. – P. 87–106.
- [20] GAY D.M. Solving interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19, No. 4. – P. 857–870.
- [21] GAY D.M. Computing perturbation bounds for nonlinear algebraic equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1983. – Vol. 20. – P. 637–651.
- [22] GAY D.M. Interval least squares — a diagnostic tool // *Reliability in Computing* / Moore R. E., ed. – New York: Academic Press, 1988. – P. 183–205.
- [23] HANSEN E., SMITH R. Interval arithmetic in matrix computations. Part II // *SIAM J. Numer. Analysis*. – 1967. – Vol. 4. – P. 1–9.
- [24] HANSEN E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / Hansen E., ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.
- [25] HANSEN E. Bounding the solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1992. – Vol. 29, No. 5. – P. 1493–1503.
- [26] HANSEN E.R., GREENBERG R.I. An interval Newton method // *Applied Mathematics and Computation*. – 1983. – Vol. 12. – P. 87–98.
- [27] JAULIN L., KIEFFER M., DIDRIT O., WALTER E. *Applied interval analysis*. – London: Springer, 2001.
- [28] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [29] KRAWCZYK R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken // *Computing*. – 1969. – Vol. 4. – P. 187–201.
- [30] KREINOVICH V., LAKEYEV A., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [31] MAYER G. Old and new aspects for the interval Gaussian algorithm // *Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling* / Kaucher E., Markov S.M. and Mayer G., eds. – Basel: Baltzer, 1991. – P. 327–349. – (IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics; vol. 12)
- [32] MAYER G., PIEPER L. A necessary and sufficient criterion to guarantee feasibility of the interval Gaussian algorithm for a class of matrices // *Applications of Mathematics*. – 1993. – Vol. 38, No. 3. – P. 205–220.

- [33] MAYER G., ROHN J. On the applicability of the interval Gaussian algorithm // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4, No. 3. – P. 205–222.
- [34] MAYER G., WARNKE I. On the fixed points of the interval function $f([x]) = [A][x] + [b]$ // *Linear Algebra and its Applications*. – 2003. – Vol. 363. – P. 201–216.
- [35] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [36] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [37] NEUMAIER A. New techniques for the analysis of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1984. – Vol. 58. – P. 273–325.
- [38] NEUMAIER A. Linear interval equations // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 107–120. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [39] NEUMAIER A. Rigorous sensitivity analysis for parameter-dependent systems of equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 1989. – Vol. 144. – P. 16–25.
- [40] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [41] NEUMAIER A. On Shary's algebraic approach for linear interval equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Vol. 21. – P. 1156–1162.
- [42] NEUMAIER A. A simple derivation of Hansen-Blik-Rohn-Ning-Kearfott enclosure for linear interval equations // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5, No. 2. – P. 131–136.
- [43] NING S., KEARFOTT R. B. A comparison of some methods for solving linear interval equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1997. – Vol. 34, No. 4. – P. 1289–1305.
- [44] MAYER O. Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen // *Computing*. – 1970. – Vol. 5. – P. 144–162.
- [45] REICHMANN K. Abbruch beim Intervall-GaußAlgorithmus // *Computing*. – 1979. – Vol. 22. – P. 355–361.
- [46] ROHN J. Formulae for exact bounds on solutions of linear systems with rank one perturbations // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1987. – No. 6/87. – S. 1–20.
- [47] ROHN J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 37–78.
- [48] ROHN J. A two-sequence method for linear interval equations // *Computing*. – 1989. – Vol. 41, No. 1–2. – P. 137–140.

- [49] ROHN J. An asymptotic result for linear interval systems // *BIT*. – 1989. – Vol. 29, No. 2. – P. 372–374.
- [50] ROHN J. Cheap and tight bounds: the recent result by E. Hansen can be made more efficient // *Interval Computations*. – 1993. – No. 4. – P. 13–21.
- [51] ROHN J. On overestimations produced by the interval Gaussian algorithm // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3. – P. 363–368.
- [52] RUMP S.M. Solving algebraic problems with high accuracy // *A New Approach to Scientific Computation* / Kulisch U. W. and Miranker W. L., eds. – New York: Academic Press, 1983. – P. 51–120.
- [53] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (Studies in computational mathematics; vol. 5)
- [54] SCHWANDT H. Iterative methods for systems of equations with interval coefficients and linear form // *Computing*. – 1987. – Vol. 38, No. 2. – P. 143–161.
- [55] SCHWANDT H. Cyclic reduction for tridiagonal systems of equations with interval coefficients on vector computer // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1989. – Vol. 26, No. 3. – P. 661–680.
- [56] WALSTER G.W., HANSEN E.R. Computing interval parameter bounds from fallable measurements using overdetermined (tall) systems of nonlinear equations // *Global optimization and constraint satisfaction* / Blik Ch., Germann Ch., Neumaier A., eds. – Berlin: Springer, 2003. – P. 171–177. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 2861)
- [57] WONGWISES P. Experimentelle Untersuchungen zur numerischen Auflösung von linearen Gleichungssystemen mit fehlererfassung // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 316–325. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 29)

Глава 8

Доказательное решение уравнений и систем уравнений

Предметом рассмотрения этой главы нашей книги является задача решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0, \end{array} \right. \quad (8.1)$$

над полем вещественных чисел \mathbb{R} , или, кратко,

$$F(x) = 0, \quad (8.2)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных переменных,

$F_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — вещественнозначные функции,

$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ — вектор-столбец из $F_i(x)$.

Всюду далее мы предполагаем, что функции $F_i(x)$ по меньшей мере непрерывны, а количество уравнений в системе (8.1)–(8.2) совпадает с количеством неизвестных переменных.

В предыдущих главах книги уже рассматривались системы уравнений и задачи оценивания их множеств решений, но в несколько идеализированных постановках, не учитывающих особенности реализации вычислительных алгоритмов на реальных цифровых ЭВМ. Сейчас мы упростим задачу, исключив из неё интервальные параметры, но зато исследуем глобальную постановку, требующую нахождения всех решений, и подробно изучим влияние на процесс решения неизбежных погрешностей вычислений. Основываясь на теории топологической степени отображения и на понятии “эпсилон-решения”, мы предлагаем переформулировку задачи решения уравнений, устойчивую к малым возмущениям в данных и, следовательно, более адекватно учитывающую приближённый характер как исходных данных задачи, так и процесса вычислений на цифровых ЭВМ с конечной разрядной сеткой. Наконец, в конце главы намечены пути адаптации существующих интервальных методов для решения новой постановки задачи.

8.1 Формулировка задачи

Задача решения уравнений и систем уравнений является одной из классических задач численного анализа, с изучения которой начинается, как правило, курс методов вычислений в высших учебных заведениях. Тогда же учащиеся узнают об основных подходах к решению этой задачи — методе простой итерации, методе Ньютона, их модификациях и т.п. Преимущества и недостатки этих классических методов хорошо известны, и мы не будем останавливаться на их подробном обсуждении. Для дальнейшего нам важны лишь два факта:

- для отображений F , не обладающих “хорошими” глобальными свойствами, все традиционные методы имеют *локальный характер*, т.е. обеспечивают сходимость к решению лишь из некоторой (иногда достаточно малой) окрестности этого решения;
- гарантированные оценки погрешности найденного приближения к решению в традиционных методах дать весьма непросто.

Указание приближённого значения величины и его максимальной погрешности равносильно тому, что мы знаем левую и правую границы возможных значений этой величины, и поэтому можно переформулировать нашу задачу в следующем усиленном виде —

Для каждого решения системы уравнений

$$F(x) = 0, \quad (8.3)$$

на данном множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ найти
гарантированные двусторонние границы

— который будем называть *задачей доказательного глобального решения* системы уравнений. Она оказывается чрезвычайно сложной, а в классическом численном анализе почти полностью отсутствуют развитые методы для её решения. Из часто используемых подходов, имеющих ограниченный успех, следует упомянуть *аналитическое исследование, мультистарт, методы продолжения*.

В то же время, в последние два десятилетия ушедшего века появились и быстро набрали силу *интервальные методы* решения задачи (8.3), основывающиеся на специфическом аппарате интервального анализа и смежных с ним дисциплин (в первую очередь, информатики). К их критическому обзору мы сейчас и приступим.

8.2 Интервальные методы в решении уравнений

8.2а Теоретическая основа

Теоретическую основу доказательного решений систем уравнений интервальными методами составляют многие результаты математического анализа, среди которых типичными и наиболее часто используемыми являются следующие:

Теорема Лерэ-Шаудера

Пусть $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — функция, непрерывная на области D , содержащей начало координат и имеющей границу ∂D . Если из

$$\tilde{x} \in \partial D, \quad t \in \mathbb{R}, \quad F(\tilde{x}) = t\tilde{x},$$

следует $t \geq 0$, то F имеет нуль в D , т.е. существует такая $x^* \in D$, что

$$F(x^*) = 0.$$

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Пусть D — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n . Если непрерывное отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводит D в себя, т.е.

$$T(D) \subseteq D,$$

то оно имеет на D неподвижную точку: существует такая $x^* \in D$, что

$$x^* = T(x^*).$$

Теорема Миранды

Пусть функция $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на брус $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ и такова, что при каждом $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i(x) \leq 0 \quad \text{для} \quad x \in (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, \underline{\mathbf{X}}_i, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_n),$$

$$F_i(x) \geq 0 \quad \text{для} \quad x \in (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, \overline{\mathbf{X}}_i, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_n).$$

Тогда $F(x)$ имеет нуль в \mathbf{X} , т.е. существует такая $x^* \in \mathbf{X}$, что

$$F(x^*) = 0.$$

Теорема Миранды — это многомерный аналог известной теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении [13], утверждающей существование нуля у непрерывной функции, которая принимает на концах отрезка разные знаки.

В классическом математическом анализе теоремы Лерэ-Шаудера, Брауэра и Миранды носили статус “чистых теорем существования”, не указывающих конкретного способа нахождения того объекта — неподвижной точки или нуля отображения, — существование которого они утверждали. Даже сама проверка выполнения условий этих теорем могла быть практически выполнена лишь в ограниченном числе частных случаев, так как упиралась в необходимость нахождения области значений функции.

Имея в своем арсенале средства для вычисления интервальных расширений функций, мы можем обойти последнее затруднение, если

во-первых, ограничим себя рассмотрением областей D в виде интервальных векторов-брусков (это относится к теоремам Брауэра и Лерэ-Шаудера), и,

во-вторых, заменим точную область значений функции её внешней оценкой с помощью интервального расширения.

На этом пути получают широко используемые в интервальном анализе теоремы Кравчика [34, 35, 38, 43], Мура [40], Куи [46], Ньютона [43] и Хансена-Сенгупты [34, 35, 43]. Первые три — это специализированные варианты теоремы Брауэра, а последние — следствия теоремы Лерэ-Шаудера (см. подробности в монографии А. Ноймайера [43]). Более того, с использованием интервальной техники возможно дальнейшее уточнение границ решения системы уравнений. Покажем, как это делается.

Итак, пусть к решению предъявлена система уравнений

$$F(x) = 0 \quad (8.2)$$

на брусе $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$, и в нашем распоряжении имеется интервальное расширение \mathbf{F} функции F . Если $0 \notin \mathbf{F}(\mathbf{X})$, то, очевидно, на \mathbf{X} нет решений рассматриваемой системы уравнений. С другой стороны, если внутренняя интервальная оценка области значений функции F на \mathbf{X} содержит нуль, то в \mathbf{X} есть решение системы уравнений.

Далее, перепишем исходную систему (8.2) в равносильной рекуррентной форме:

$$x = T(x) \quad (8.4)$$

с некоторым отображением $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое может быть взято в виде

$$T(x) = x - F(x),$$

либо

$$T(x) = x - \Lambda F(x)$$

с неособенной $n \times n$ -матрицей Λ , либо как-нибудь ещё. Пусть также \mathbf{T} — интервальное расширение отображения T . Ясно, что решения системы (8.4) могут лежать лишь в пересечении $\mathbf{X} \cap \mathbf{T}(\mathbf{X})$. Поэтому если

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{X} = \emptyset,$$

то в брусе \mathbf{X} нет решений системы уравнений (8.4).

Напротив, если для бруса \mathbf{X} выполнено

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X},$$

то в \mathbf{X} по теореме Брауэра гарантированно находится решение системы (8.4). Более точно, это решение содержится и в $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, и часто для дальнейшего уточнения мы можем организовать итерации с пересечением

$$\mathbf{X}^{(0)} \leftarrow \mathbf{X}, \quad (8.5)$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{T}(\mathbf{X}^{(k)}) \cap \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

Таким образом, наихудшим, с точки зрения уточнения информации о решении системы, является случай $\mathbf{T}(\mathbf{X}) \not\subseteq \mathbf{X}$.

Приведённую выше последовательность действий по обнаружению решения системы уравнений и уточнению его границ мы будем называть далее кратко *тестом существования*. В действительности, каждый из изложенных выше приёмов уточнения решения допускает далеко идущие модификации и улучшения. Например, это относится к итерациям вида (8.5)–(8.6), которые могут быть последовательно применены не к целым брусам $\mathbf{X}^{(k)}$, а к отдельным их компонентам в комбинации с различными способами приведения исходной системы к рекуррентному виду (8.4). На этом пути мы приходим к чрезвычайно эффективным методам *распространения ограничений* (см., к примеру, [32]).

Как простейший тест существования, так и его более продвинутые варианты без особых проблем реализуются на ЭВМ и работают тем лучше, чем более качественными являются интервальные расширения функций F в (8.2) и T в (8.4) и чем меньше ширина бруса \mathbf{X} . Последнее связано с тем, что погрешность оценивания области значений функции посредством любого интервального расширения убывает с уменьшением размеров бруса, на котором производится это оценивание.

8.2б Глобальное решение уравнений

Если ширина бруса \mathbf{X} велика, то на нём описанная выше в §8.2а методика может оказаться малоуспешной в том смысле, что она не приведёт ни к какому определённом заключению о существовании решения на брусе \mathbf{X} или же его отсутствии, и кроме того, сам этот брус несколько не будет уточнён (уменьшен). Тогда практикуют принудительное

дробление \mathbf{X} на более мелкие подбрусы. Наиболее популярна при этом *бисекция* — разбиение бруса \mathbf{X} на две (равные или неравные) части вдоль какой-нибудь грани, например, на половинки

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{X}_1, \dots, [\underline{\mathbf{X}}_i, \text{mid } \mathbf{X}_i], \dots, \mathbf{X}_n),$$

$$\mathbf{X}'' = (\mathbf{X}_1, \dots, [\text{mid } \mathbf{X}_i, \overline{\mathbf{X}}_i], \dots, \mathbf{X}_n)$$

для некоторого номера $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. При этом подбрусы \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' называются *потомками* бруса \mathbf{X} . Далее эти потомки можно разбить ещё раз, и ещё ... столько, сколько необходимо для достижения желаемой малости их размеров, при которой мы сможем успешно выполнять на этих брусах тесты существования из §8.2а.

Если мы не хотим упустить при этом ни одного решения системы, то должны хранить все возникающие в процессе такого дробления подбрусы, относительно которых тестом существования не доказано строго, что они не содержат решений. Организуем поэтому *рабочий список* \mathcal{L} из всех потомков начального бруса \mathbf{X} , подозрительных на содержание решений. В целом же алгоритм глобального доказательного решения системы уравнений организуем в виде повторяющейся последовательности следующих действий:

- извлечение некоторого бруса из списка \mathcal{L} ,
- дробление этого бруса на потомки,
- проверка существования решений в каждом из подбрусов-потомков, по результатам которой мы
 - либо выдаём этот подбрус в качестве ответа,
 - либо заносим его в рабочий список \mathcal{L} для дальнейшей обработки алгоритмом,
 - либо исключаем из последующего рассмотрения.

Кроме того, чтобы обеспечить ограниченность времени работы алгоритма, на практике имеет смысл задаться некоторым порогом мелкости (малости размеров) брусков δ , при достижении которого дальше дробить брус уже не имеет смысла. Псевдокод получающегося алгоритма приведён в Табл. 8.1.

Отметим, что неизбежные ограничения на вычислительные ресурсы ЭВМ могут воспрепятствовать решению этим алгоритмом задачи (8.3) “до конца”, поскольку могут возникнуть ситуации, когда

- 1) размеры обрабатываемого бруса уже меньше δ , но нам не удаётся ни доказать существование на нём решений, ни показать их отсутствие;
- 2) размеры обрабатываемого бруса ещё больше δ , но вычислительные ресурсы уже не позволяют продолжать его обработку: исчерпались время, память и т.п.

В реальных вычислениях остановка алгоритма Табл. 8.1 может происходить поэтому не только при достижении пустого рабочего списка \mathcal{L} (когда исчерпана вся область поиска решений), и в общем случае результатом его работы является

- I) список брусов шириной меньше δ , гарантированно содержащих решения,

а также

- II) список брусов шириной меньше δ , подозрительных на содержание решения,
- III) список недообработанных брусов, имеющих ширину больше δ ,

такие что все решения системы уравнений, не принадлежащие списку I, содержатся в списках II и III.

Алгоритмы описанного выше типа, дополненные различными усовершенствованиями, получили большое развитие в интервальном анализе в последние десятилетия (см., например, книги [34, 35, 38, 41, 43]). Но вычислительная практика выявила и ряд их слабых сторон и даже неожиданные и плохообъяснимые, на первый взгляд, феномены. В частности, на весьма простых примерах список II (а иногда даже и список III) получался неожиданно длинным, причём ни при уменьшении δ , ни при увеличении времени и точности вычислений этот эффект не исчезал. Чем это вызвано? Ответ на поставленный вопрос потребовал более глубокого анализа ситуации.

8.3 Ревизия постановки задачи

8.3а Вычислительно-корректные задачи

Отправным пунктом нашей ревизии является следующий общеизвестный факт: на вычислительных машинах (как электронных, так и механических, как цифровых, так и аналоговых) в условиях приближённого представления входных числовых данных и приближенного характера вычислений над полем вещественных чисел мы в принципе можем решать лишь те постановки задач, ответы которых непрерывно зависят от входных данных. Т.е. устойчивы по отношению к возмущениям в этих начальных данных.

Возникновение и бурное развитие компьютерной алгебры с её “безошибочными” вычислениями едва ли опровергает высказанный тезис, так как исходные постановки задач для систем символьных преобразований требуют *точную* представимость входных данных, которые поэтому подразумеваются целыми или, на худой конец, рациональными с произвольной длиной числителя и знаменателя (см. [1]).

Дело в том, что решение задачи на любой вычислительной машине сопровождается неизбежными ошибками и погрешностями, вызванными конечным характером представления чисел, конечностью исполнительных устройств и т.п. Потенциально эти погрешности могут быть сделаны сколь угодно малыми, но в принципе избавиться от них не представляется возможным.

В частности, конечными машинами являются широко распространенные ныне электронные цифровые вычислительные машины: они способны представлять, по сути дела, только конечные множества чисел. Таким образом, обречены на неудачу любые попытки использовать их для выполнения арифметических абсолютно точных операций над числовыми полями \mathbb{R} и \mathbb{C} , которые являются бесконечными (и даже непрерывными) множествами, большинство элементов которых не представимы в ЭЦВМ.

Определение 8.3.1 *Станем говорить, что массовая математическая задача \mathcal{P} является вычислительно корректной, если разрешающее отображение $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$ непрерывно относительно топологий на \mathcal{P} и \mathcal{A} .*

Те задачи, ответы на которые неустойчивы по отношению к возмущениям входных данных, могут решаться на ЭВМ с конечной разрядной сеткой лишь опосредованно, после проведения мероприятий,

необходимых для защиты от этой неустойчивости или её нейтрализации.

8.3б Задача решения уравнений не является вычислительно корректной

Уже простейшие примеры показывают, что задача решения уравнений и систем уравнений не является вычислительно-корректной. Например, квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \quad (8.7)$$

для

$$p^2 = 4q \quad (8.8)$$

имеет лишь одно решение $x = -p/2$. Но при любых сколь угодно малых возмущениях коэффициента p и свободного члена q , нарушающих равенство (8.8), уравнение (8.7) теряет это единственное решение или же приобретает ещё одно (см. Рис. 8.1).

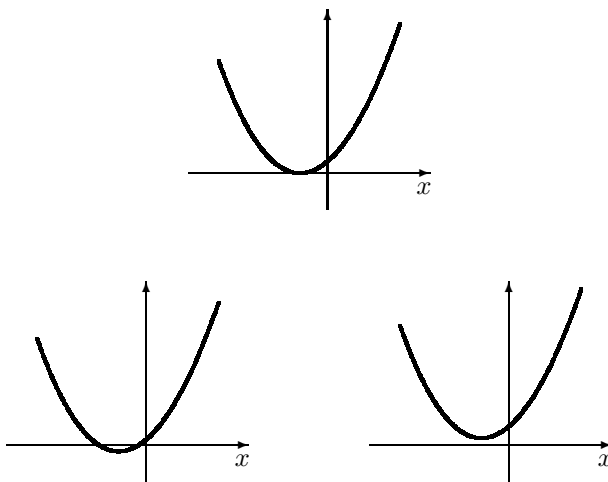


Рис. 8.1. Неустойчивая зависимость решений уравнения (8.7)–(8.8) от сколь угодно малых изменений его коэффициентов.

Нетрудно привести и многомерные примеры неустойчивости решений систем уравнений. В частности, к предыдущему одномерному примеру сводится система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases}$$

при $b = a^2/4$.

Итак, нужно скорректировать математическую постановку задачи нахождения решений уравнений и систем уравнений так, чтобы она стала соответствовать особенностям машинного решения на цифровых ЭВМ. Как это сделать?

8.3в ε -решения уравнений

Прежде чем ответить на чисто математический вопрос, поставленный в конце предыдущего пункта, отметим, что и с точки зрения практических приложений задачи, которые мы обычно формулируем в виде решения уравнений или систем уравнений, традиционно выписывая

$$F(x) = 0,$$

имеют весьма различную природу. В некоторых из таких задач пользователю требуется не точное равенство некоторого выражения нулю, а лишь его “исчезающая малость” в сравнении с каким-то а priori установленным порогом.

Таковы, например, уравнения материального баланса в большинстве физических, химических и других естественнонаучных расчётов. Точное равенство нулю здесь неявным образом и не требуется, так как масса молекулы, размеры атома, заряд элементарной частицы, длина световой волны и т.п. — все это величины вполне конечные (хотя и весьма малые), обуславливающие точность тех или иных уравнений баланса и пр.

Например, не имеет смысла требовать, чтобы закон сохранения заряда выполнялся с погрешностью, меньшей чем величина элементарного электрического заряда (заряд электрона, равный $1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Также бессмысленно требовать, чтобы погрешность изготовления деталей оптических систем была существенно меньше длины световой волны (от $4 \cdot 10^{-7}$ м до $7.6 \cdot 10^{-7}$ м в зависимости от цвета), чтобы погрешность измерения длины тела была меньше величины его температурного расширения и т.п. А что касается температуры, то при

обычных земных условиях определение её с абсолютной погрешностью, превосходящей 10^{-4} К вообще проблематично в силу принципиальных соображений.

Итак, во всех вышеприведенных примерах под решением уравнения понимается значение переменной, обращающее значение функции в пренебрежимо малую величину:

Найти значения неизвестной переменной x ,
такие что $|F(x)| < \varepsilon$ для заданного $\varepsilon > 0$.

Соответствующие точки мы будем называть ε -решениями или *почти решениями*, если порог этой пренебрежимой несуществен или не оговорен явно.

Нетрудно понять, что задача “о нахождении почти решений” является вычислительно-корректной: она устойчива к малым возмущениям входных данных при непрерывных отображениях F .

Отметим, что в некоторых задачах система уравнений более естественно записывается в виде

$$G(x) = H(x),$$

и требуется обеспечить равенство левой и правой частей с относительной погрешностью ϵ :

Для заданных отображений $G, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\epsilon > 0$
найти значения неизвестной переменной x , такие что

$$\frac{\|G(x) - H(x)\|}{\max\{\|G(x)\|, \|H(x)\|\}} < \epsilon.$$

8.3г Недостаточность понятия ε -решения

Но есть и принципиально другой тип задач, который образно может быть назван задачами “об определении перехода через нуль” и не сводится к задаче нахождения ε -решений. Это задачи, в которых требуется гарантированно отследить переход функции к значениям противоположного знака, т.е. когда в любой окрестности решения должны

присутствовать как положительные значения функции, так и её отрицательные значения. В задачах нахождения почти решений такое требование может и не выполняться.

Фазовый переход в физической (или химической системе) — типичная задача такого сорта, так как в процессе фазового перехода температура системы не меняется. Если мы хотим узнать, прошел ли фазовый переход полностью, то нужно зафиксировать момент достижения противоположного множества состояний!

Другой пример — срыв устойчивости в динамической системе, бифуркация Андронова, например. Когда ламповый генератор загенерирует колебания?

Экономические задачи?

Переходя к многомерной ситуации, мы сталкиваемся с методическими трудностями, возникающими из необходимости иметь чисто математическое определение нестрогого понятия “прохождение функции через нуль”. Из требования вычислительной корректности следует, что в любой окрестности такого решения каждая из компонент $F_i(x)$ вектор-функции $F(x)$ должна принимать как положительные, так и отрицательные значения. Но как именно? Какими должны (или могут) быть значения компонент $F_j(x)$, $j \neq i$, если $F_i(x) > 0$ или $F_i(x) < 0$?

В разрешении этого затруднения нам на помощь приходят алгебраическая топология и нелинейный анализ, необходимые сведения из которых приведены в следующих параграфах.

8.4 Обзор теории вращения векторных полей

Этот параграф носит обзорный характер и предназначен для того, чтобы, не подменяя систематических курсов нелинейного анализа или алгебраической топологии, сделать, к удобству читателя, содержание книги замкнутым и самодостаточным. Тем не менее, наше изложение может оказаться весьма полезным для практически ориентированных читателей, не ставящих целью продвинутое математическое образование.

8.4а Векторные поля и их гомотопии

Пусть M — некоторое подмножество в \mathbb{R}^n и задано отображение

$$\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Часто удобно представлять значение $\Phi(\tilde{x})$ в точке \tilde{x} как вектор, “торчащий” из \tilde{x} , т.е. как вектор, начало которого расположено в этой точке \tilde{x} . При этом говорят, что на M задано *векторное поле* Φ . Векторное поле Φ будем называть *непрерывным*, если непрерывно задающее его отображение $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$, и ниже мы рассматриваем только непрерывные векторные поля.

Например, на Рис. 8.2 изображены поля

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Psi(x) = \Psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

которые непрерывны и даже дифференцируемы.

Определение 8.4.1 Точки $x \in M$, в которых векторное поле обращается в нуль, т.е. $\Phi(x) = 0$, будем называть нулями поля или же его особыми точками.

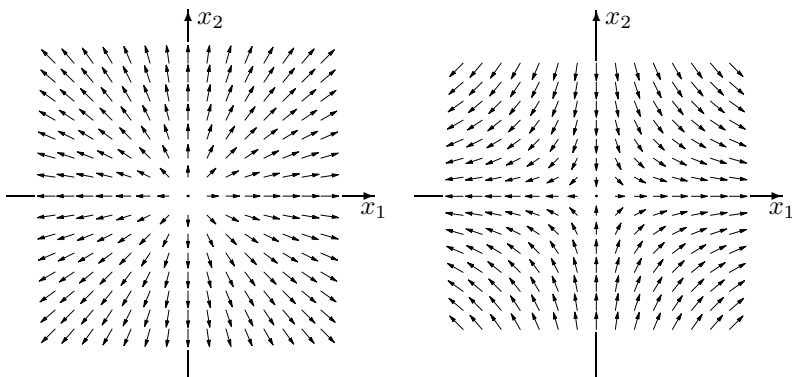


Рис. 8.2. Векторные поля $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, задаваемые формулами (8.9).

Если

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix},$$

то особая точка поля Φ — это не что иное, как решение системы n уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n .

Определение 8.4.2 *Станем говорить, что поле Φ вырождено на M , если у него есть в M особые точки. В противном случае Φ называется невырожденным на M .*

Эта терминология идёт, в частности, из теории дифференциальных уравнений, где векторные поля дают наглядную картину направлений, а особые точки действительно соответствуют неопределённым ситуациям, требующим отдельного рассмотрения.

Определение 8.4.3 *Для множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$ функция*

$$\Delta(\lambda, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

непрерывная по совокупности своих аргументов, называется деформацией векторного поля $\Delta(0, x)$ в векторное поле $\Delta(1, x)$. Станем также говорить, что деформация $\Delta(\lambda, x)$ соединяет векторные поля $\Delta(0, x)$ и $\Delta(1, x)$.

Любые два непрерывных на $M \subseteq \mathbb{R}^n$ векторных поля Φ и Ψ могут быть соединены *линейной деформацией*, определяемой как

$$\Delta(\lambda, x) = \lambda \Phi(x) + (1 - \lambda) \Psi(x),$$

$\lambda \in [0, 1], x \in M$.

Определение 8.4.4 Деформацию $\Delta(\lambda, x)$ некоторого векторного поля назовём невырожденной, если $\Delta(\lambda, x) \neq 0$ для всех $\lambda \in [0, 1]$ и $x \in M$.

Ясно, что невырожденные деформации могут соединять лишь невырожденные векторные поля. Важными примерами невырожденных деформаций являются растяжение векторного поля (т.е. умножение на некоторый множитель $k \neq 0$), поворот всех векторов поля на некоторый фиксированный угол, а также параллельный перенос (сдвиг) поля, заданного на всём \mathbb{R}^n , на некоторый фиксированный вектор.

Определение 8.4.5 Векторные поля Φ и Ψ называются гомотопными на M , если их можно соединить невырожденной деформацией.

Нетрудно убедиться в том, что отношение гомотопии векторных полей является

- рефлексивным (каждое векторное поле гомотопно самому себе),
- симметричным (если поле Φ гомотопно полю Ψ , то и поле Ψ гомотопно полю Φ),
- транзитивным (если Φ гомотопно Ψ , а Ψ гомотопно Υ , то, очевидно, Φ гомотопно Υ).

Таким образом, гомотопность векторных полей — это *отношение эквивалентности* [5, 7]. Поэтому множество невырожденных на фиксированном множестве M непрерывных векторных полей распадается на классы гомотопных между собой полей (называемых также *гомотопическими классами* векторных полей).

В случае одномерного пространства \mathbb{R} и одноточечного множества M векторные поля распадаются на два гомотопических класса, а если множество M состоит из m штук изолированных точек, то все векторные поля на M распадаются на 2^m гомотопических классов. Для наших целей особенно интересным оказывается рассмотрение гомотопических классов векторных полей, заданных на границах ограниченных областей в \mathbb{R}^n .

Теорема 8.4.1 (теорема Пуанкаре-Боля) Если в каждой точке множества M невырожденные векторные поля Φ и Ψ не направлены противоположно друг другу, то Φ и Ψ гомотопны на M .

Доказательство состоит в организации между Φ и Ψ линейной деформации. ■

8.46 Вращение векторного поля

Напомним, что непустое связное открытое множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *областью* в \mathbb{R}^n . Граница области, по традиции обозначаемая ∂D (так же как и субдифференциал) — это теоретико-множественная разность между замыканием $\text{cl } D$ и самой областью D .

Пусть D — некоторая ограниченная область в \mathbb{R}^n . Оказывается, каждому невырожденному на ∂D векторному полю Φ можно сопоставить целочисленную характеристику $\gamma(\Phi, D)$, называемую *вращением векторного поля* Φ на ∂D и однозначно определяемую следующими свойствами:

- I. Гомотопные на ∂D векторные поля имеют одинаковое вращение.
- II. Если непрерывное векторное поле Φ определено и невырождено на множестве

$$\text{cl } D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i,$$

причём области D_i попарно не пересекаются и лежат в ограниченной области D , то вращения $\gamma(\Phi, D_i)$ отличны от нуля лишь для конечного набора D_i и

$$\gamma(\Phi, D) = \gamma(\Phi, D_1) + \gamma(\Phi, D_2) + \dots$$

- III. Если $\Phi(x) = x - a$ для некоторой точки $a \in D$, то $\gamma(\Phi, D) = 1$.

Постоянное векторное поле $\Phi(x) = a = \text{const}$, $a \neq 0$, имеет нулевое вращение на границе любой ограниченной области.

Действительно, зафиксировав область D , рассмотрим поле $(x + ka)$, $k > 0$. При достаточно больших k точка $(-ka)$, очевидно, лежит вне ограниченной области D . Следовательно, вращение $\gamma(x - (-ka), D)$ равно нулю. Но тогда и вращение поля

$$\Psi(x) = \frac{x + ka}{k} = \frac{x}{k} + a,$$

получающегося из Φ сжатием в k раз, также нулевое на границе D . При $k \rightarrow \infty$ поле $\Psi(x)$ сколь угодно мало отличается от постоянного поля $\Phi(x) = a$, и мы можем применить к Φ и Ψ признак гомотопности Пуанкаре-Боля (теорему 8.4.1).

В связи со свойством I вращения возникает естественный вопрос о справедливости обратного утверждения. Именно, гомотопны ли векторные поля с одинаковым вращением? Ответ на это вопрос в общем случае отрицателен, но, тем не менее, справедлива следующая

Теорема 8.4.2 (теорема Хопфа)

Пусть S^n — сфера пространства \mathbb{R}^n и $n \geq 2$. Если невырожденные на S^n векторные поля имеют одинаковое вращение, то они гомотопны на S^n .

Теорема 8.4.3 *Если векторное поле Φ невырождено на замыкании $\text{cl } D$ ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, то вращение $\gamma(\Phi, D) = 0$.*

Доказательство. Каждую точку $\tilde{x} \in D$ можно окружить окрестностью $\Omega(\tilde{x})$, в которой векторное поле будет почти постоянным, т.е. отличаться от значения $\Phi(\tilde{x})$ настолько мало, что $\gamma(\Phi, \Omega(\tilde{x})) = 0$. ■

Теорема 8.4.4 (теорема Кронекера) *Пусть векторное поле Φ невырождено на границе ∂D ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и непрерывно на её замыкании $\text{cl } D$. Если $\gamma(\Phi, D) \neq 0$, то поле Φ имеет в D по крайней мере одну особую точку.*

Доказательство. Если бы поле Φ не имело особых точек в D , то в силу ■

С понятием вращения векторного поля тесно связано понятие *топологической* степени отображения. Более точно вращение поля Φ на границе ∂D области D есть степень отображения $\phi : \partial D \rightarrow S^{n-1}$, тако-го что

$$\phi(x) = \|\Phi(x)\|^{-1}\Phi(x).$$

8.4в Индексы особых точек

Пусть непрерывное векторное поле Φ определено на замыкании $\text{cl } D$ ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и невырождено на ∂D . Тогда все особые точки поля Φ , если таковые существуют, лежат внутри D .

Определение 8.4.6 *Особую точку векторного поля назовём изолированной, если в некоторой её окрестности нет других особых точек.*

Таким образом, если особая точка \check{x} изолирована, то в силу Теоремы 8.4.3 вращение поля Φ одинаково на всех сферах $\|x - \check{x}\| \leq \delta$ достаточно малых радиусов δ с центрами в \check{x} . Это общее вращение называют *индексом* особой точки \check{x} поля Φ или *индексом нуля* \check{x} поля Φ , и обозначают $\text{ind}(\check{x}, \Phi)$. Понятие индекса нуля аналогично понятию кратности нуля многочлена в алгебре.

Теорема 8.4.5 *Если $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование пространства \mathbb{R}^n , то его единственная особая точка — нуль — имеет индекс $\text{ind}(0, A) = \text{sgn } \det A$.*

Если в области D находится лишь конечное число особых точек, то сумму их индексов называют *алгебраическим числом особых точек*. Из Теоремы 8.4.3 вытекает важная теорема Кронекера

Теорема 8.4.6 *Пусть непрерывное векторное поле Φ имеет в области D лишь конечное число особых точек x_1, x_2, \dots, x_s и невырождено на границе ∂D этой области. Тогда*

$$\gamma(\Phi, D) = \text{ind}(x_1, \Phi) + \text{ind}(x_2, \Phi) + \dots + \text{ind}(x_s, \Phi).$$

Пример непрерывного векторного поля на плоскости, которое имеет вращение N на единичной окружности:

$$\begin{cases} x = r \cos N\phi, \\ y = r \sin N\phi, \end{cases}$$

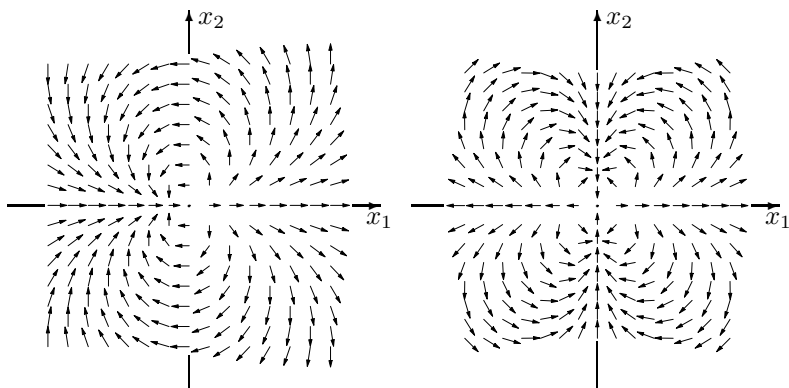


Рис. 8.3. Векторные поля, имеющие вращения $+2$ (левый чертёж) и $+3$ (правый чертёж) на любой окружности с центром в нуле.

где r — радиус-вектор точки, ϕ — угол, образуемый этим радиус-вектором с положительным направлением оси абсцисс, N — целое число. Для $N = 2$ это векторное поле показано на Рис. 8.3.

8.4г Устойчивость особых точек

Определение 8.4.7 . Особая точка z поля Φ называется устойчивой, если для любого $\tau > 0$ можно найти такое $\eta > 0$, что всякое поле, отличающееся от Φ меньше чем на η , имеет особую точку, удаленную от z менее, чем на τ . Иначе особая точка z называется неустойчивой.

Легко понять, что в связи с задачей решения систем уравнений нас интересуют именно устойчивые особые точки, поскольку задача поиска только таких точек является вычислительно-корректной.

Вторым основным результатом, ради которого мы затевали обзор теории вращения векторных полей, является следующее

Предложение 8.4.1 [19]. *Изолированная особая точка непрерывного векторного поля устойчива тогда и только тогда, когда её индекс отличен от нуля.*

Например, неустойчивое решение квадратного уравнения (8.7)–(8.8) имеет индекс 0, а у векторных полей, изображённых на Рис. 8.3 и 8.2, начало координат является устойчивой особой точкой.

Отметим отдельно, что результат об устойчивости особой точки ненулевого индекса ничего не говорит о количестве особых точек, близких к возмущаемой особой точке. В действительности, путем шевеления одной устойчивой особой точки можно получить сразу *несколько* особых точек, и это легко видеть на примере полей Рис. 8.3. Любая сколь угодно малая постоянная добавка к полю, изображённому на левом чертеже Рис. 8.3, приводит к распадению нулевой особой точки индекса 2 на две особые точки индекса 1. Аналогично, любая сколь угодно малая постоянная добавка к полю, изображённому на правом чертеже Рис. 8.3, приводит к распадению нулевой особой точки на три особые точки индекса 1. Таким образом, свойство единственности решения неустойчиво и требовать его наличия нужно со специальными оговорками.

теорема Банаха о сжимающем отображении

Если в области D находится конечное число особых точек, то сумму их индексов называют *алгебраическим числом* особых точек.

Предложение 8.4.2 . Пусть непрерывное векторное поле Φ имеет в D конечное число особых точек x_1, x_2, \dots, x_s и невырождено на границе ∂D . Тогда

$$\gamma(\Phi, D) = \text{ind}(x_1, \Phi) + \text{ind}(x_2, \Phi) + \dots + \text{ind}(x_s, \Phi).$$

Алгебраическое число особых точек устойчиво к малым возмущениям области и поля, так как охватывает совокупную сумму индексов в зависимости от рождения и уничтожения отдельных точек.

Теперь становится окончательно понятным и упоминавшийся в конце § феномен списка брусков-ответов с неопределённым статусом, которые никак не собираются исчезать в интервальных методах доказательного глобального решения уравнений ни при увеличении точности вычислений, ни при выделении дополнительного времени счета и т.п. Помимо причины, названной в предыдущем пункте, *эти списки могут соответствовать неустойчивым решениям системы уравнений, которые разрушаются при сколь угодно малых возмущениях и потому не могут быть идентифицированы никаким приближенным вычислительным алгоритмом с конечной точностью представления данных.*

К примеру, таковым является корень квадратного уравнения (8.7)–(8.8), и специалисты знают, что он чрезвычайно плохо находится численно, как традиционными, так и интервальными подходами.

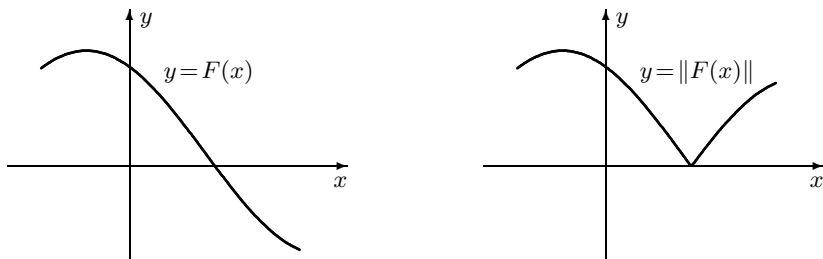


Рис. 8.4. Устойчивый нуль функции превращается в неустойчивый после взятия нормы функции.

Наконец, сделаем ещё одно важное замечание. Нередко на практике для решения систем нелинейных уравнений исходную задачу переформулируют как оптимизационную (см. [4]), пользуясь, например, тем, что справедливы следующие математические эквивалентности:

$$F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \min_x \|F(x)\| = 0$$

и

$$F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \min_x \|F(x)\|^2 = 0.$$

Далее имеющимися стандартными пакетами программ ищется решение задачи минимизации нормы $\|F(x)\|$ (или $\|F(x)\|^2$, чтобы обеспечить гладкость целевой функции) и результат сравнивается с нулём. С учётом наших знаний о задаче решения систем уравнений хорошо видна вычислительная неэквивалентность такого приведения: устойчивая особая точка *всегда* превращается при подобной трансформации в неустойчивое решение редуцированной задачи! Именно, любая сколь угодно малая добавка к $|F(x)|$ может приподнять график функции $y = |F(x)|$ над осью абсцисс (плоскостью нулевого уровня в общем случае), так что нуль функции исчезнет.

8.5 Модифицированная постановка задачи

8.5а Вычислительно-корректная переформулировка

Теперь все готово для вычислительно-корректной переформулировки задачи решения уравнений и систем уравнений. Она должна выглядеть следующим образом:

Для заданного $\varepsilon > 0$ и системы уравнений

$$F(x) = 0$$

найти на данном множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(8.10)

- 1) гарантированные двусторонние границы
всех решений ненулевого индекса,
- 2) множество ε -решений.

Мы не требуем единственности решения в выдаваемых брусах, так как свойство решения быть единственным не является, вообще говоря, устойчивым к малым возмущениям задачи (см. §5.4).

Какими средствами мы располагаем для решения задачи в такой постановке?

Интервальные алгоритмы для доказательного глобального решения уравнений типа представленного в Табл. 8.1, вполне пригодны для решения модифицированной постановки задачи (8.10), если используемые в них “тесты существования” на брусах \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'' усилить процедурой вычисления вращения поля $F(x)$ по границам $\partial\mathbf{Y}'$ и $\partial\mathbf{Y}''$. Эта задача действительно сложна и нетривиальна, являясь в самом общем случае NP-трудной (см. [48]), т.е. требующей для своего решения экспоненциальных вычислительных ресурсов [11]. Но она и не столь страшна, как может показаться вначале.

Если некоторая особая точка \tilde{x} является регулярной (не критической), т.е. $\det F' \neq 0$, то, как отмечалось в §8.4в, она надёжно находится с помощью интервального метода Ньютона, методов Кравчика, Хансена-Сенгупты и пр. Трудности представляет ситуация, когда индекс решения отличен от ± 1 , возможная когда в рассматриваемой точке функция терпит разрыв гладкости, либо когда якобиан F' вырождается. В обоих этих случаях мы должны озаботиться более тщательным вычислением индекса решения, например, методами, изложенными в [31, 33, 37].

В целом результатом работы алгоритма доказательного глобального решения модифицированной постановки (8.10) является выдача пользователю нескольких списков, именно,

- I) списка брусов с ненулевым вращением на границах,
- II) списка почти решений,

а также

- III) списка подозрительных на решения брусов,
- IV) списка недообработанных брусов,

таких что все решения системы, не принадлежащие спискам I и II, содержатся в списках III и IV.

Реализация интервальных алгоритмов для решения модифицированной постановки задачи (8.10) ставит немало нетривиальных математических вопросов. Не претендуя здесь на полный анализ, дадим их краткий обзор.

Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что дробление брусов желательно производить так, чтобы решения уравнения не оказывались на границах подбрусов. В противном случае вычисление вращения векторного поля (топологической степени отображения) невозможно. Образно говоря, чтобы убедиться в том, что решение является действительно решением, нужно рассмотреть его “со всех сторон”.

Из создавшегося затруднения существует, по крайней мере, два выхода: 1) дробить брусы можно на такие потомки, которые немного налегают друг на друга, “перекрываются”, а не просто касаются друг друга по грани меньшей размерности, 2) при необходимости дополнительного исследования подозрительных точек вокруг них можно искусственно раздуть некоторый брус малого размера, на границе которого функция гарантированно не занулялась бы.

Другая полезная операция — “склеивание” брусков решений. Цель — представить в удобном для пользователя виде протяжённые области решений одного статуса.

Наконец, наличие нескольких признаков решения уравнений может привести к их “конфликту” друг с другом. Величина ε из определения ε -решений может быть назначена такой, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{X})| < \varepsilon,$$

но

$$0 \notin \mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

Должны ли мы считать при этом, что брусок \mathbf{X} представляет “почти решения” или нет? Однозначно хорошего способа разрешения вопроса нет. Традиционные рецепты:

- 1) Установление иерархии критериев решения.
- 2) Свертывание критериев решения в один “суперкритерий”.

Но, как нам представляется, окончательное разрешение этого вопроса должно назначаться пользователем с учётом специфики решаемой задачи.

Весьма часто для анализа решений уравнений и систем уравнений привлекают понятие *кратности* решения (корня). Говорят, что решение \tilde{x} уравнения (системы уравнений) $F(x) = 0$ имеет кратность k , если все производные (в общем случае частные) отображения F до k -ого порядка включительно зануляются в \tilde{x} и производная порядка $(k + 1)$ (по крайней мере одна в общем многомерном случае) не равна нулю в \tilde{x} . Иногда даже явление плохой определимости решений напрямую связывают с кратностью решений.

Корень квадратного уравнения в модельном примере (8.7)–(8.8) в самом деле кратный, но кратность сама по себе не служит причиной вычислительной некорректности, как показывает пример уравнения $x^3 = 0$. Единственное решение этого уравнения — нулевое, имеет кратность 2, устойчиво при малых шевелениях функции в левой части, и задача нахождения этого решения вычислительно корректна.

Но кратность решения действительно усугубляет вычислительные трудности при его нахождении, так как зануление нескольких производных подряд приводит к тому, что график отображения является очень пологим в окрестности решения, буквально “стелется” вдоль координатной плоскости нулевого уровня. При этом на ЭВМ с конечной и

не очень высокой точностью представления данных решение не идентифицируется как изолированное или сосредоточенное на маленьком бруске, а “расплывается” в целое пятно. Тем не менее, несмотря на большую неприятие этого явления, потенциально оно может быть преодолено путём повышения точности вычислений, увеличением длины разрядной сетки и т.п. в отличие от принципиальных ограничений на процесс решения, вызванных вычислительной некорректностью задачи и различием индексов.

8.5б Вычислительная корректность и алгоритмическая разрешимость

Предлагаемый нами в §6 путь весьма непрост и получающиеся алгоритмы для решения систем уравнений, явно вычисляющие вращения векторных полей, могут быть очень трудоёмкими. Возникает естественный вопрос: нельзя ли обойтись чем-нибудь попроще?

В этом параграфе мы взглянем на проблему с другой стороны, именно, с точки зрения алгоритмической разрешимости исходной задачи решения уравнений и покажем, что альтернативы нашим “сложным” подходам весьма ограничены.

Известно, что теория алгоритмов и рекурсивных функций — это математическая дисциплина, исследующая конструктивные свойства различных математических объектов. Её основные понятия — это *алгоритм*, *конструктивный объект*, *вычислимость*, *разрешимость* и др.

Алгоритм — это конечная последовательность инструкций, записанных на некотором языке и определяющих процесс переработки исходных данных в искомые результаты (ответ решаемой задачи и т.п.). Алгоритм принципиально конечен и определяет собой конечный процесс. Далее, *конструктивным объектом* называется объект, который может быть построен с помощью некоторой конечной последовательности действий над каким-то конечным алфавитом. Таковы, например, рациональные числа. Строго говоря, конструктивные объекты и только они могут быть получены в качестве ответов при решении задачи на реальных цифровых ЭВМ с конечными быстродействием и объёмом памяти.

В частности, конечными машинами являются широко распространенные ныне электронные цифровые вычислительные машины: они способны представлять, по сути дела, только конечные множества чисел. Таким образом, обречены на неудачу любые попытки использо-

вать их для выполнения арифметических абсолютно точных операций над числовыми полями \mathbb{R} и \mathbb{C} , которые являются бесконечными (и даже непрерывными) множествами, большинство элементов которых не представимы в цифровых ЭВМ.

Оказывается, что значительная часть объектов, с которыми работают современная математика и её приложения, не являются конструктивными. В частности, неконструктивным является традиционное понятие вещественного числа, подразумевающее бесконечную процедуру определения всех знаков его десятичного разложения (которое в общем случае неперiodично). Факт неконструктивности вещественных чисел может быть обоснован строго математически (см. [21]), и он указывает на принципиальные границы возможностей алгоритмического подхода и ЭВМ в деле решения задач математического анализа.

Тем не менее, и в этом океане неконструктивности имеет смысл выделить объекты, которые могут быть “достаточно хорошо” приближены конструктивными объектами. На этом пути мы приходим к понятию *вычислимого вещественного числа* [21, 30]: вещественное число α называется вычислимым, если существует алгоритм (программа), дающий по всякому натуральному числу n рациональное приближение к α с погрешностью $\frac{1}{n}$. Множество всех вычислимых вещественных чисел образует *вычислимый континуум*. Соответственно, *вычислимая вещественная функция* определяется как отображение из вычислимого континуума в вычислимый континуум, задаваемая алгоритмом преобразования программы аргумента в программу значений.

Важно помнить, что и вычисляемое вещественное число, и вычислимая функция — это уже не конструктивные объекты. Но, как выясняется, даже ценой ослабления наших требований к конструктивности нельзя вполне преодолеть принципиальные алгоритмические трудности, связанные с задачей решения уравнений. Для вычислимых вещественных чисел и функций ряд традиционных постановок задач оказывается *алгоритмически неразрешимыми* в том смысле, что построение общих алгоритмов их решения принципиально невозможно.

Например, алгоритмически неразрешимыми являются задачи

- 1) распознавания для произвольного вычислимого вещественного числа равно оно нулю или нет [20, 21, 22], распознавания равенства двух вычислимых вещественных чисел [10, 20, 21, 30, 31];
- 2) нахождения для каждой совместной системы линейных

уравнений над полем конструктивных вещественных чисел какого-либо её решения [20, 22];

- 3) нахождения нулей всякой непрерывной кусочно-линейной знакопеременной функции [22].

Приведённые выше результаты задают, как нам представляется, ту абсолютную и совершенно объективную мерку (в отличие от субъективных пристрастий), с которой мы должны подходить к оценке трудоёмкости тех или иных вычислительных методов. Получается, что необходимость переформулировки задачи решения уравнений и систем уравнений связана ещё и с тем, что в традиционной постановке эти задачи оказываются алгоритмически неразрешимыми! На фоне этого мрачного факта наличие даже экспоненциально трудного алгоритма с небольшим основанием “одноэтажной” экспоненты в оценке сложности (вроде 2^n) можно рассматривать как вполне приемлемый вариант разрешимости задачи, и именно это имеет место в ситуации с вычислением вращения векторного поля (степени отображения).

Заметим, что развитые в этом параграфе соображения не являются совершенно новыми, они высказывались в близкой форме О. Абертом в [31]. Но предпринятый нами в §8.5 теоретический анализ ситуации опирался на другую основу — топологические свойства отображений, их нулей и соображения устойчивости. Он позволил даже глубже проникнуть в причину специфических явлений, возникающих при работе практических интервальных алгоритмов.

8.6 Существование решений уравнений и систем уравнений

Предложение 8.6.1 [25] Пусть ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ содержит начало координат и непрерывное отображение $F : \text{cl } D \rightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что вектор $F(x)$ нигде не направлен противоположно вектору x , т.е.

$$F(x) + \lambda x \neq 0, \quad (8.11)$$

для всех $\lambda \geq 0$ и $x \in \partial D$. Тогда уравнение

$$F(x) = 0$$

имеет решение в D .

Непосредственное практическое применение доказанного Предложения является затруднительным: нам нужно проверять неравенство (8.11) не только для всех $x \in \partial D$, но и для любого неотрицательного λ . По этой причине имеет смысл найти более просто формулируемые и легко проверяемые достаточные условия для (8.11).

Вспомним, что если

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|,$$

для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, то они не являются сонаправленными. Как следствие этого наблюдения, получается

Теорема 8.6.1 *Пусть ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ содержит начало координат и непрерывное отображение $F : \text{cl } D \rightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что*

$$\|F(x) - x\| < \|F(x)\| + \|x\| \quad (8.12)$$

для всех $x \in \partial D$. Тогда уравнение

$$F(x) = 0$$

имеет решение в D .

Доказательство. Неравенство (8.12) означает, что векторные поля x и $F(x)$ не направлены противоположно на ∂D . Следовательно, по теореме Пуанкаре-Боля (теорема 8.4.1) они гомотопны, и потому их вращения на границе рассматриваемой области совпадают. ■

Применение этой теоремы зависит от выбора конкретной нормы в \mathbb{R}^n .

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + \cos x_2 = 0, \\ \sin x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

на брус $([-3, 3], [-3, 3])^\top$. В качестве нормы в \mathbb{R}^2 возьмем 1-норму — сумму модулей компонент вектора. Тогда для грани $([-3, 3], 3)^\top$ будем

иметь

$$\begin{aligned}\|F(x) - x\| &= |x_1 + \cos 3| + |\sin x_1 + 6| \\ &< (|2x_1 + \cos 3| + |x_1|) + (|\sin x_1 + 9| + 3) \\ &= \|F(x)\| + \|x\|,\end{aligned}$$

так как

$$|x_1 + \cos 3| \leq |2x_1 + \cos 3| \quad \text{и} \quad |\sin x_1 + 6| < |\sin x_1 + 9| + 3.$$

Совершенно аналогичная ситуация на грани $([-3, 3], -3)^\top$.

Рассмотрим теперь грань $(3, [-3, 3])^\top$. Имеем

$$\begin{aligned}\|F(x) - x\| &= |3 + \cos x_2| + |\sin 3 + 2x_2| \\ &< (|6 + \cos x_2| + 3) + (|\sin 3 + 3x_2| + |x_2|) \\ &= \|F(x)\| + \|x\|,\end{aligned}$$

так как

$$|3 + \cos x_2| < |6 + \cos x_2| + 3 \quad \text{и} \quad |\sin 3 + 2x_2| \leq |\sin 3 + 3x_2| + |x_2|.$$

Аналогично и для грани $(-3, [-3, 3])^\top$.

Итак, строгое неравенство (8.12) в 1-норме действительно имеет место на брус

$$\begin{pmatrix} [-3, 3] \\ [-3, 3] \end{pmatrix}$$

для отображения

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \cos x_2 \\ \sin x_1 + 3x_2 \end{pmatrix},$$

которое должно иметь нуль на этом брус. Его нетрудно найти численно —

$$\begin{pmatrix} -0.493773237 \\ 0.157983927 \end{pmatrix},$$

например, каким-нибудь итерационным методом.

Несколько более грубое утверждение, которое, тем не менее, также может оказаться полезным:

Теорема 8.6.2 (теорема Минти)

Пусть D — ограниченная область в \mathbb{R}^n , а непрерывное отображение $F : \text{cl } D \rightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что

$$(x - a)^\top F(x) \geq 0$$

для некоторой точки $a \in D$ и всех $x \in \partial D$. Тогда уравнение

$$F(x) = 0$$

имеет решение в $\text{cl } D$.

Это утверждение является конечномерной версией весьма общего результата, полученного американским математиком Дж. Минти [39] для отображений в гильбертовых пространствах.

Теорема 8.6.3 [25] Если непрерывное отображение $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$\frac{(F(x), x)}{(x, x)} \rightarrow +\infty \quad (8.14)$$

при $|x| \rightarrow \infty$, то оно является сюръективным (отображением на), т.е. для любого $y \in \mathbb{R}^n$ уравнение

$$F(x) = y$$

имеет решение.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $y = 0$, так как иначе отображение $F(x)$ можно заменить на отображение $F(x) - y$, которое тоже удовлетворяет условию (8.14).

Из (8.14) следует, что для некоторого $R > 0$ имеет место

$$(F(x), x) \geq 0 \quad \text{при } |x| = R. \quad (8.15)$$

Если $F(x)$ зануляется в некоторых точках сферы $|x| = R$, то утверждение теоремы доказано. Если нет, то определено вращение векторного поля $F(x)$ на сфере $|x| = R$, и из неравенства (8.15) следует, что вектор $F(x)$ не направлен противоположно вектору x при $|x| = R$. Доказываемая теорема следует поэтому из результата Предложения 8.6.1. ■

Например, для системы уравнений

Теорема 8.6.4 (теорема Миранды)

Пусть функция $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на брус \mathbf{X} и такова, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i(x) \leq 0 \quad \text{для всех } x \in (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, \underline{\mathbf{X}}_i, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_n)^\top,$$

$$F_i(x) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, \overline{\mathbf{X}}_i, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_n)^\top.$$

Тогда $F(x)$ имеет по крайней мере один нуль в \mathbf{X} .

Доказательство. Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно рассмотреть ситуацию, когда хотя бы для одного i имеет место строгое неравенство

$$F_i(x) > 0 \quad \text{для всех } x \in (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, \underline{\mathbf{X}}_i, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_n)^\top,$$

$$F_i(x) < 0 \quad \text{для всех } x \in (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, \overline{\mathbf{X}}_i, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_n)^\top,$$

так как в противном случае на границе рассматриваемого бруса находится решение уравнения $F(x) = 0$.

Если так, то векторное поле $F(x)$ не имеет особых точек на границе $\partial\mathbf{X}$ и его линейная гомотопия с полем

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} (x_1 - \text{mid } \mathbf{X}_1) \cdot \text{sgn } F(\underline{\mathbf{X}}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \\ (x_2 - \text{mid } \mathbf{X}_2) \cdot \text{sgn } F(\mathbf{X}_1, \underline{\mathbf{X}}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ (x_n - \text{mid } \mathbf{X}_n) \cdot \text{sgn } F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \underline{\mathbf{X}}_n) \end{pmatrix}$$

очевидно, невырождена. Но вращение поля Ψ на ∂D равно $(+1)$ или (-1) , оно имеет особую точку $\text{mid } \mathbf{X}$ на брус \mathbf{X} . То же самое можно сказать и о поле $\Psi(x)$: внутри \mathbf{X} необходимо должна присутствовать его особая точка, т.е. решение уравнения $F(x) = 0$. ■

Теорема 8.6.5 Пусть D — выпуклое компактное множество в \mathbb{R}^n и отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводит границу ∂D в множество D , $G(\partial D) \subseteq D$. Тогда G имеет на D по крайней мере одну неподвижную точку, т.е. существует такое $x^* \in D$, что $x^* = G(x^*)$.

Доказательство. Рассмотрим на границе ∂D данной области векторное поле $(x - G(x))$. Если оно вырождается, то его особые точки как

раз таки и являются неподвижными точками отображения G , существование которых нам требуется установить. Можно, следовательно, без ограничения общности рассматривать далее ситуацию, когда на ∂D нет особых точек поля $(x - G(x))$.

Возьмем внутри области D точку a и организуем линейную деформацию

$$\Delta(\lambda, x) = x - (1 - \lambda)G(x) - \lambda a$$

между полями $(x - G(x))$ и $(x - a)$ на D . Точка $(1 - \lambda)G(x) + \lambda a$ всегда лежит в D в силу выпуклости области. Кроме того, $G(D) \subseteq D$ и $x \neq G(x)$ на границе ∂D . Следовательно, деформация Δ невырождена, а потому вращения векторных полей $(x - G(x))$ и $(x - a)$ совпадают на ∂D .

Наконец,

$$\gamma(x - a, \partial D) = 1$$

и по этой причине поле $(x - G(x))$ также имеет внутри D особую точку, являющуюся неподвижной точкой отображения G . ■

Теорема 8.6.6 (теорема Брауэра о неподвижной точке)

Пусть D — выпуклое компактное множество в \mathbb{R}^n . Если отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводит D в себя, $G(D) \subseteq D$, то оно имеет на D по крайней мере одну неподвижную точку, т.е. существует такое $x^ \in D$, что $x^* = G(x^*)$.*

Пример. Снова рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + \cos x_2 = 0, \\ \sin x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

на брус $([-3, 3], [-3, 3])^\top$.

Перепишав её в рекуррентном виде

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \cos x_2, \\ x_2 = -\frac{1}{3} \sin x_1, \end{cases}$$

нетрудно убедиться в том, что отображением

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos x_2 \\ -\frac{1}{3} \sin x_1 \end{pmatrix}$$

исходный брус будет переводится в себя, и потому ϕ необходимо имеет неподвижную точку на $([-3, 3], [-3, 3])^\top$ — решение системы уравнений (8.13).

С другой стороны, если мы перепишем нашу систему в другом эквивалентном виде, тоже рекуррентном,

$$\begin{cases} x_1 = -x_1 - \cos x_2, \\ x_2 = -\sin x_1 - 2x_2, \end{cases}$$

то условия теоремы Брауэра выполняться на $([-3, 3], [-3, 3])^\top$ уже не будут.

Из приведенного примера хорошо видны сложности преобразования системы уравнений к нужному виду так, чтобы при этом удовлетворялись требуемые специальные условия.

Утверждения, аналогичные теореме Брауэра, могут быть доказаны и для невыпуклых множеств (см., например, [26, 27]), но мы далее не будем касаться этих интересных вопросов потому, что основной предмет нашей книги — интервалы — являются существенно выпуклыми.

Другое соображение. Из проведённых нами доказательств теоремы, теоремы Минти, теоремы Миранды и теоремы Брауэра следует, что всеми ими охватываются случаи индекса особой точки F , равно-го ± 1 . Для особых точек дифференцируемых отображений, в которых якобиан является неособенной матрицей, большего и не надо, так как индекс особой точки F оказывается равным индексу особой точки линейаризованного поля. Но в случае вырождения якобиана отображения F требуется привлекать дополнительные соображения.

8.7 Теоретическая основа

Теорема 8.7.1

(конечномерный вариант теоремы Шрёдера о неподвижной точке)

Пусть

Доказательство можно найти, например, в книгах [2, 17, 27, 43]

Итак, пусть предъявлена для решения система уравнений

$$F(x) = 0,$$

и в брус \mathbf{X} нам нужно найти *все* её решения, либо убедиться, что таковых в \mathbf{X} не существует. Какими средствами мы располагаем для решения поставленной задачи?

Пользуясь машинной интервальной арифметикой, найдем интервальное расширение $F(\mathbf{X})$ функции F на \mathbf{X} . Если $0 \notin F(\mathbf{X})$, то, очевидно, мы математически строго показали отсутствие решений уравнения на \mathbf{X} .

Напротив, если внутренняя интервальная оценка $\text{In } \{x \in \mathbf{X}\}$ области значений функции F на \mathbf{X} содержит нуль, то в \mathbf{X} гарантированно лежит искомое решение (одно или несколько) системы уравнений.

Далее, рассмотрим эквивалентную исходной системе в рекуррентной форме:

$$x = \Phi(x). \quad (8.16)$$

Ясно, что

- если для бруса \mathbf{X} выполнено

$$\Phi(\mathbf{X}) \cap \mathbf{X} = \emptyset,$$

то в \mathbf{X} не могут находиться решения системы $x = \Phi(x)$, и, следовательно, и исходной системы уравнений.

Вообще, решения могут лежать лишь в пересечении $\mathbf{X} \cap \Phi(\mathbf{X})$, которое только и имеет смысл рассматривать далее.

- если для бруса \mathbf{X} выполнено

$$\Phi(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X},$$

то в \mathbf{X} по теореме Брауэра о неподвижной точке гарантированно содержится решение системы уравнений $x = \Phi(x)$, и, следовательно, также исходной системы.

Нетрудно понять, что все изложенные выше вычислительные рецепты остаются в силе даже если отображение Φ имеет интервальный параметр и вместо (8.16) мы должны решать интервальную систему уравнений

$$\Phi(\mathbf{a}, x) = 0,$$

т.е. найти внешние оценки для объединенного множества решений этой интервальной системы.

8.8 Метод Румпа

Как мы уже видели выше, интервальный анализ позволяет превратить теорему Брауэра о неподвижной точке в мощный инструмент доказательного решения уравнений на ЭВМ.

Теорема 8.8.1 Пусть даны система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \quad (8.17)$$

с матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектором правой части $b \in \mathbb{R}^n$, матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и интервальный вектор $X \in \mathbb{IR}^n$, такие что

$$Qb + (I - QA)X \subseteq \text{int } X.$$

Тогда матрицы A и Q неособенные, а решение системы (8.17) единственно и находится в X .

Доказательство. В силу теоремы Брауэра в X содержится неподвижная точка

■

Возникает закономерный вопрос: как находить фигурирующий в условиях теоремы интервальный вектор X , отображающийся в себя как это описано в условиях Теоремы?

Естественно использовать для построения требуемого интервала X известное вещественное приближение \tilde{x} к решению задачи, полученное каким-нибудь традиционным неинтервальным методом. Далее, интервал из \tilde{x} можно получить, например, беря \tilde{x} как центр, “раздутием”, либо с помощью какого-либо другого процесса.

В диссертации З. Румпа был предложен термин “ ε -раздутие” для обозначения отображения $\circ : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$, определяемого для интервала x как

$$x \circ \varepsilon = \begin{cases} x + [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot \text{wid } x, & \text{если } \text{wid } x \neq 0, \\ x + [-\eta, \eta], & \text{иначе,} \end{cases}$$

где η — 1 улып в районе вещественного числа x .

В последующих работах различными авторами был дан всесторонний анализ свойств ε -раздутия. Для случая линейных интервальных итераций

$$y^{(k)} \leftarrow x^{(k)} \circ \varepsilon, \quad \text{и} \quad x^{(k+1)} \leftarrow z + Cy^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8.18)$$

и модифицированного определения

$$\mathbf{x} \circ \varepsilon = \mathbf{x} + [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot \text{wid } \mathbf{x} + [-\eta, \eta] \quad (8.19)$$

эти результаты могут быть резюмированы следующим образом.

Если

$$\rho(|\mathbf{C}|) < \frac{1}{1 + 2\varepsilon},$$

то в итерациях (8.18) мы получаем включение

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \subseteq \text{int } \mathbf{x}^{(k)} \quad (8.20)$$

через конечное число шагов k . Наоборот, если за некоторое конечное число шагов итераций (8.18) мы получаем включение (8.20), то необходимо $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$.

При $\varepsilon = 0$, т.е. когда ε -раздутье (8.19) содержит только абсолютный член, мы приходим к красивой эквивалентности: в интервальных итерациях (8.18) соотношение $\mathbf{x}^{(k+1)} \subseteq \text{int } \mathbf{x}^{(k)}$ выполняется для некоторого k тогда и только тогда, когда $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$.

Отметим, что приведённые выше результат верен для всех положительных η . Кроме того, мы, вообще говоря, не можем положить $\eta = 0$, т.е. совсем освободиться от абсолютного члена. Как показано Румпом в заметке [47], это может привести даже к тому, что включение (8.20) в итерациях (8.18) не будут выполняться никогда.

Каким же следует брать η ? Выбор слишком маленького η приводит к увеличению числа итераций, необходимых для достижения (8.20), а при большом η гарантированные границы для решения задачи могут оказаться неоправданно широкими. Выбор ε также весьма критичен: если мы берем его бóльшим, чем это позволено неравенством $\rho(|\mathbf{C}|) \cdot (1 + 2\varepsilon) < 1$, то включение (8.20) будет невозможным.

8.9 Вычисление ε -решений

Нахождение ε -решений требует, вообще говоря, специальных средств, так как традиционные методики — интервальный метод Ньютона, метод Кравчика, метод Хансена-Сенгупты и др. — выводят в предположении, что на искомом решении функция точно зануляется. Таким образом, применение этих методов может привести к отбрасыванию областей с ε -решениями, не всегда оправданному с точки зрения пользователя.

Следовательно, интервальный метод Ньютона, методы Кравчика и Хансена-Сенгупты нужно модифицировать для целей отыскания ε -решений. Именно этому вопросу и посвящён настоящий параграф.

Начнём с интервального метода Ньютона. Его вывод опирается на разложение функции

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}), \quad (8.21)$$

где \tilde{x} — “центр разложения”, т.е. некоторая фиксированная точка рассматриваемого бруса \mathbf{X} , а \mathbf{L} — интервальная матрица Лишшица функции F на \mathbf{X} . Если x есть ε -решение, то

$$|F(x)| < \varepsilon$$

и мы получим из (8.21)

$$(-F(\tilde{x}) + [-\varepsilon, \varepsilon]) \cap \neq \emptyset,$$

так что

$$x \in \tilde{x} - \square\Xi(\mathbf{L}, F(\tilde{x}) + [-\varepsilon, \varepsilon])$$

Определение 8.9.1 Будем называть отображение $\mathcal{N}_\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}$, задаваемое как

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\tilde{x}, \mathbf{X}) := \tilde{x} - \square\Xi(\mathbf{L}, F(\tilde{x}) + [-\varepsilon, \varepsilon])$$

интервальным ε -оператором Ньютона.

Теорема 8.9.1 Если $x \in \mathbf{X}$ — ε -решение системы уравнений, то $x \in \mathcal{N}_\varepsilon(\tilde{x}, \mathbf{X})$.

Таким образом, области ε -решений оказываются, как и следовало ожидать, шире чем области обычных решений.

С помощью интервального ε -оператора Ньютона мы можем находить внешние оценки ε -решений систем уравнений.

Интервальный ε -оператор Хансена-Сенгупты строится совершенно аналогично.

8.10 Глобальное решение систем уравнений

8.10a Ограничение области рассмотрения

8.10б Глобальное решение на ограниченных областях

В этом параграфе мы обратимся к задаче доказательного нахождения *всех* решений системы уравнений

$$F(x) = 0 \quad (8.2)$$

на ограниченном брусе $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$. В этом случае говорят также о *доказательном глобальном решении* данной системы уравнений, противопоставляясь процессам локального решения, в которых ищется *какое-нибудь*, хотя бы одно, решение системы на данном брусе. Эпитет *доказательный* означает, в свою очередь, что

- ни одно из решений не будет потеряно,
- для каждого решения мы выдаем гарантированные двусторонние границы.

Если брус \mathbf{X} достаточно узок, то на нём применимы различные локальные методы вроде метода Кравчика или Хансена-Сенгупты, описанные в §§. Но нередко брус \mathbf{X} широк настолько, что прямое применение локальных процедур не приводит к каким-либо осязаемым результатам: брус \mathbf{X} уменьшается в размерах незначительно или же совсем не уменьшается. В подобных случаях обычно используют принудительное уменьшение размеров бруса \mathbf{X} посредством его дробления на более мелкие подбрусы, для которых локальные методы могут оказаться вполне успешными.

Ниже мы часто будем осуществлять дробление исходного бруса путём последовательных *бисекций* — разбиений на две равные половинки, так что вместо \mathbf{X} получаем

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{X}_1, \dots, [\underline{\mathbf{X}}_k, \text{mid } \mathbf{X}_k], \dots, \mathbf{X}_n),$$

$$\mathbf{X}'' = (\mathbf{X}_1, \dots, [\text{mid } \mathbf{X}_k, \overline{\mathbf{X}}_k], \dots, \mathbf{X}_n)$$

для некоторого заранее выбранного k . Брусы \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' называются *потомками* бруса \mathbf{X} .

Ясно, что если мы не хотим упустить решения системы уравнений (8.1), то нам нужно сохранять для последующего исследования *все* подруги исходного бруса \mathbf{X} , отбрасывая только те из них, о которых строго доказано, что они не содержат решений системы (8.1). Мы организуем поэтому *список* \mathcal{L} (либо стек, либо кучу, либо очередь) из всех потомков исходного бруса \mathbf{X} , подозрительных на содержание решений. Алгоритм глобального решения будет заключаться в выполнении следующей последовательности шагов:

- выбор бруса из списка \mathcal{L} ,
- дробление бруса на потомки,
- проверка существования решений в брусах-потомках,
- попытка применения локальных методов для брусов-потомков,

При этом, если в каком-либо из потомков установлено отсутствие решений — как результат применения действий пунктов 3) и/или 4), — то соответствующий потомок исключается из дальнейшего рассмотрения. Иначе мы заносим его в список \mathcal{L} , оставляя для исследования на будущих этапах работы алгоритма, либо, если достигнута достаточная мелкость этих потомков, то выносим в список брусов, подозрительных на решения.

Что является результатом работы этого алгоритма?

И каков критерий его остановки?

Отвечая на эти вопросы, следует иметь в виду, что утверждения о гарантированном наличии решения в том или ином брусе могут быть сделаны в нашем алгоритме лишь на основании применения локальных тестов Кравчика, Хансена-Сенгупты и пр., т.е. только на шаге 4). С другой стороны, положительный результат применения локальных тестов существования решения вовсе не гарантируется даже для очень мелких брусов: для систем уравнений с так называемыми кратными решениями, вроде рассмотренных нами в §8.3б, мы можем сколь угодно далеко продвинуть бисекцию, так и не добившись того, чтобы тесты Кравчика и Хансена-Сенгупты подтвердили бы существования решения или его отсутствие.

Следовательно, нужно обеспечить компромисс между

В идеале результатом работы нашей программы должен был бы являться список брусов (интервальных векторов), которые не превосходят размерами некоторый задаваемый пользователем порог δ , и каж-

дый из которых содержит по крайней мере одно решение системы уравнений. Но по ряду причин как теоретического, так и практического характера описанная выше форма ответа является не всегда возможной.

Во-первых, как мы уже выяснили в §8.3, задача нахождения решений уравнения и системы уравнений не является вычислительно корректной. Во-вторых, реальные вычислительные системы имеют конечную (и иногда весьма ограниченную) производительность, объем памяти и т.п., тогда как в теоретическом численном анализе возможности вычислительных устройств молчаливо предполагаются потенциально бесконечными. Мы должны быть готовы, следовательно, к тому, чтобы пересмотреть само понятие “решения уравнения (системы уравнений)”, чтобы сделать его вычислительно корректным и адаптировать к условиям конечных возможностей современных ЭВМ.

Именно в связи с этими фактами мы модифицируем постановку задачи и различаем “наверняка решения” и “почти решения” для рассматриваемой системы уравнений:

“Решениями наверняка” или просто “решениями” называются те решения, существование которых было доказано на ЭВМ математически строго (при условии правильной работы компьютера). На данном этапе развития вычислительной математики основны средством такого докательства существования решения является теоремы о неподвижной точке Брауэра, Банаха и их следствия.

“Почти решениями” или “ ε -решениями” называются те значения неизвестных переменных x , в которых абсолютная величина значения функции $F(x)$ строго меньше некоторого заранее заданного пользователем допуска ε .

Строгое неравенство $|F(x)| < \varepsilon$ взято здесь для того, чтобы сделать множество удовлетворяющих ему значений аргумента x открытым и, следовательно, устойчивым к малым шевелениям уравнения (его коэффициентов и т.п. входных данных).

Следует отметить очевидную опасность, связанную тем, что мы вручаем пользователю свободы выбора допуска ε . Его величина может быть, в принципе, назначена такой, что начнет противоречить другим критериям отбора “решений” рассматриваемой системы уравнений. Например, если ε велико в сравнении с погрешностью представления чисел в ЭВМ, то возможна ситуация, когда для некоторого бруса X будет иметь место

$$|F(X)| < \varepsilon,$$

но при этом

$$0 \notin F(X),$$

или же пересечение результата оператора Ньютона $\mathcal{N}(X)$ с самим брусом X оказывается пустым. Считать ли при этом, что брус X представляет “почти решения” или нет?

Однозначно удовлетворительного способа разрешения такого “конфликта” критериев решения указать, по видимому, невозможно. Но следующие традиционные рецепты могут, по крайней мере, частично устранить эту проблему:

1. Установление иерархии критериев решения, т.е. назначение одного из критериев более главным в сравнении с остальными, обладающим правом решающего голоса в конфликтных ситуациях;
2. Свертывание критериев в один агрегированный “суперкритерий”, значения которого вычисляются по значениям всех принимаемых к рассмотрению критериев.

В первом случае, например, мы можем договориться считать, что условие

$$|F(X)| < \varepsilon$$

является главным для признания бруса X содержащим “почти решения”, а остальные критерии несущественны. Во втором случае можно, к примеру, назначить агрегированным критерием “почти решения” конъюнкцию всех условий, т.е. что одновременно должно выполняться

$$\begin{aligned} |F(X)| &< \varepsilon, \\ 0 &\in F(X), \\ \mathcal{N}(X) \cap X &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Конкретное разрешение вопроса о том, как же следует трактовать в том или ином случае критерии “почти решения” рассматриваемой системы, видимо, следует предоставить пользователю, явно описав в руководстве к нашей программе все возникающие при этом тонкости.

Другой важный момент, связанный с понятием “почти решения”, заключается в том, что размеры представляющих их брусков становятся не так уж существенны,

Дадим необходимый комментарий по поводу единственности “наверняка решений”. Ряд авторов (Б.Кирфотт в своей известной книге

и др.) в постановке задачи о глобальном решении систем уравнений явно увязывают с доказательством существования решения и требование его единственности. Действительно, математические средства для проверки этого свойства существуют: применение теоремы Банаха или продвинутых версий теоремы Брауэра иногда позволяет не только доказать существование решения, но и гарантировать его единственность. Но это случается далеко не всегда, еще реже, чем успешное применение вышеупомянутых теорем о неподвижных точках.

В общем же случае введение требования, чтобы внутри каждого бруса ответа находилось только одно решение системы, делает постановку задачи несравненно более жесткой. Из него, фактически, неявно вытекает требование, что решения системы изолированы друг от друга, т.е. что любые два решения расположены на конечном расстоянии друг от друга. В действительности, для нелинейных уравнений и систем уравнений нередки целые кластеры сгущающихся решений и даже ветви решений, как, например, у уравнения

$$x \sin(1/x) = 0.$$

В этих условиях закладывать требование единственности решений в постановку задачи численного решения представляется нецелесообразным. Мы, в частности, впредь будем рассматривать единственность как дополнительное счастливое обстоятельство, отказываться от которого не стоит, но и требовать а priori неразумно. Удовлетворение условий единственности можно, к примеру, отмечать отдельным флагом для соответствующих брусов, а по окончании работы алгоритма по желанию пользователя информация о единственности тех или иных решений рассматриваемой системы может быть выдана ему дополнительно.

Но неизбежные ограничения на ресурсы используемой вычислительной системы (время счёта, объём потребной оперативной памяти ЭВМ, длина разрядной сетки и т.п.) могут воспрепятствовать решению той или иной конкретной задачи “до конца” в том смысле, что для некоторых подбрусов исходного бруса мы так и не сможем доказать ни наличие в них “решений” или “почти решений”, ни их отсутствие. Такие брусы также выдаются пользователю по окончании работы программы вместе с указанием причин, по которым они не смогли быть успешно обработаны. Здесь могут представиться следующие случаи:

- 1) размеры бруса сделались меньше заданного пользователем порога δ , но нам не удастся ни доказать существование на нем решений или почти решений, ни показать отсутствие таковых;

- 2) размеры бруса превосходят заданный порог δ , но ресурсы вычислительной системы не позволяют производить его обработку дальше: исчерпалось время, выделенное количество итераций и т.п. Поэтому нужно кончать работу и выдавать оставшиеся брусы “как есть”, вне зависимости от их статуса и размеров. Естественно, при этом мы заносим их в список необработанных брусков.

Брусы, охватываемые пунктом (1), мы будем называть далее “подозрительными на решения”, а охватываемые пунктом (2) — “недообработанными”.

В действительности, выше под пунктом (1) собраны несколько весьма разнообразных причин, и имеет смысл далее расшифровать их по отдельности. Именно,

если нам не удастся доказать отсутствие решений и почти решений системы на некотором брусе X , то

интервальное расширение $F(X)$ содержит нуль, по абсолютной величине оно превосходит ε , в интервальном методе Ньютона $\mathcal{N}(X)$ пересекается с X ;

если нам не удастся доказать существование решений или почти решений системы на некотором брусе X , то

в интервальном методе Ньютона $\mathcal{N}(X)$ не включается в X .

Вышесказанное означает в точности, что выполнены одновременно три условия

- I) размеры бруса сделались меньше заданного порога δ ,
- II) интервальное расширение $F(X)$ содержит нуль и по абсолютной величине превосходит ε ,
- III) в интервальном методе Ньютона $\mathcal{N}(X)$ пересекается с X , но не включается в X .

Следует чётко осознавать, что и в подозрительных на решение брусах, и в недообработанных брусах могут находиться как “навверняка”, так и “почти решения” решения рассматриваемой нами системы уравнений. Попадание тех или иных брусков в списки подозрительных или недообработанных является всего лишь следствием нашей (и вычислительной техники) немоги в отношении конкретной задачи и в принципе

может быть преодолено после привлечения дополнительных вычислительных ресурсов, назначением более высокой точности, более хитрой организацией алгоритма и т.п.

Итак, свой ответ пользователю по результатам доказательного решения системы уравнений мы формулируем в виде нескольких списков брусков:

A — список брусков, содержащих наверняка решения,

B — список брусков с почти решениями,

C — список подозрительных на решения брусков,

D — список недообработанных брусков,

таких что все решения системы (как почти, так и наверняка решения), не принадлежащие брусам из A и B, содержатся в брусках списков C и D. Деление подбрусков исходной области, имеющих неопределенный статус, на два списка — C и D — не носит принципиальный характер и обусловлено желанием предоставить пользователю наиболее подробную информацию, приобретенную о задаче в процессе её решения. Возможны ситуации, когда пользователю это различие не нужно, и тогда мы его можем не демонстрировать.

Отметим, что представленная нами выше схема спецификации результата глобального решения системы нелинейных уравнений похожа на описанную в книгах Б. Кирфотта [38] и Э. Хансена [34, 35], но существенно более развита в деталях, так как ни Б. Кирфотт, ни Э. Хансен не проводят чёткое различие между “наверняка решениями” и “почти решениями”.

8.10в Дробление брусков

нужно делать потомки “перекрывающимися”, чтобы не плодить граничные точки

8.10г Склеивание решений

Цель склеивания — представить в удобном для пользователя виде протяженные области решений одного статуса. Как правило, в задачах с аналитическими функциями таковыми являются ε -решения.

8.10д Практическая реализация

По мере роста размерности вектора неизвестных решаемой системы уравнений относительный вклад различных компонентов основного алгоритма табл. 8.1 в общее успешное решение системы изменяется.

Дробление брусков на подбрусы становится с ростом размерности все менее действенным, тогда как эффект от сжатий (методом Ньютона и т.п.), даже с близким к единице коэффициентом, становится все более ощутимым. Например, для бруса со сторонами единичной длины дробление какой-то одной компоненты пополам в двумерном пространстве приводит к уменьшению евклидовой нормы вектора ширины с 1.41 до 1.12 (на 20%), а в десятимерном пространстве эта же операция приводит к уменьшению евклидовой нормы ширины кубика с 3.16 до 3.04 (на 3.8%). Если ширину мерить в 1-норме, то эти цифры разнятся еще больше. Напомним, что именно норма вектора ширины является критичной для повышения точности интервального оценивания (см. 3.1).

Следовательно, нужно давать возможность методу Ньютона и методикам, основанным на распространении ограничений, работать как можно больше, если они действительно уменьшают норму ширины обрабатываемого бруса хотя бы на единицы процентов.

В ряде случаев тупая бисекция может оказаться вредной для процесса решения системы, если решения образуют целый отрезок вещественной оси

Комментарий к Главе 8

К §8.1. Понятие “доказательных вычислений” впервые систематически использовал, по-видимому, П.С. Панков в книге [28]. Сам термин является хорошим русским эквивалентом таких распространённых английских оборотов, как *validated numerics*, *validated computations*, *reliable computing*, немецкого *Rechnen mit Ergebnisverifikation* и т.п.

Согласно П.С. Панкову, “доказательные вычисления на ЭВМ — это вычисления, организованные таким образом, что полученные в результате их величины имеют гарантированное направленное отклонение от истинных”.

К §8.2а. Часто формулировку теоремы Лерэ-Шаудера относят к произвольным нормированным пространствам (см., например, [29]). Чтобы не отягощать изложение, мы не приводим максимально общую фор-

мулировку, так как работаем исключительно в конечномерных пространствах.

В русской литературе методы распространения ограничений часто называют также *недоопределёнными вычислениями*, термином, введённым А.С. Нариньяни [23].

К §8.56. Совершенно аналогичными являются определения *рекурсивного вещественного числа* у Р.П. Гудстейна [10] и *конструктивного вещественного числа* у Б.А. Кушнера [20].

К §8.106. Такие решения А.Л. Семёнов и его сотрудники в Институте систем информатики СО РАН называют “ползущими”.

Литература к главе 8

- [1] АКРИТАС А. *Основы компьютерной алгебры с приложениями*. – М.: Мир, 1994.
- [2] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [3] АРНОЛЬД В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. – Москва: Наука, 1984.
- [4] БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. *Численные методы*. – Москва: Наука, 1987.
- [5] БАУЭР Ф.Л., ГООЗ Г. *Информатика. В 2-х ч.* – Москва: Мир, 1990.
- [6] БЕРЖЕ М. *Геометрия. Т. 1–2*. – Москва: Мир, 1984.
- [7] БИРКГОФ Г., БАРТИ Т. *Современная прикладная алгебра*. – Москва: Мир, 1976.
- [8] ВОЕВОДИН В.В., КУЗНЕЦОВ Ю.А. *Матрицы и вычисления*. – Москва: Наука, 1984.
- [9] ГОДУНОВ С.К. *Современные аспекты линейной алгебры*. – Новосибирск: Научная книга, 1997.
- [10] ГУДСТЕЙН Р.П. *Рекурсивный математический анализ*. – Москва: Наука, 1970.
- [11] ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. – Москва: Мир, 1982.
- [12] ДЕННИС ДЖ., мл., ШНАБЕЛЬ Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения уравнений*. – Москва: Мир, 1988.

- [13] Зорич В.А. *Математический анализ. Том 2.* – Москва: Наука, 1984.
- [14] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.
- [15] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – Москва: Наука, 1978.
- [16] КАХАНЕР Д., МОУЛЕР К., НЭШ С. *Численные методы и программное обеспечение.* – Москва: Мир, 1998.
- [17] Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика.* – Москва: Мир, 1969.
- [18] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., ЗАБРЕЙКО П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – Москва: Наука, 1975.
- [19] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А, ПЕРОВ А.И., ПОВОЛОЦКИЙ А.И., ЗАБРЕЙКО П.П. *Векторные поля на плоскости.* – Москва: Физматлит, 1963.
- [20] КУШНЕР Б.А. *Лекции по конструктивному математическому анализу.* – Москва: Наука, 1973.
- [21] МАТИН-ЛЁФ П., *Очерки по конструктивной математике.* – М.: Наука, 1975.
- [22] МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ, том. 2. – Москва: Наука, 1979.
- [23] НАРИНЬЯНИ А.С. Недоопределённость в системах представления и обработки знаний // *Известия АН СССР. Техническая Кибернетика.* – 1986. – №5. – С. 3–28.
- [24] Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. *Методы анализа нелинейных динамических моделей.* – Москва: Мир, 1991.
- [25] НИРЕНБЕРГ Л. *Лекции по нелинейному функциональному анализу.* – Москва: Мир, 1977.
- [26] ОПОЙЦЕВ В.И. *Нелинейная системостатика.* – Москва: Наука, 1986.
- [27] ОРТЕГА ДЖ., РЕЙНБОЛДТ В., *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – Москва: Мир, 1975.
- [28] ПАНКОВ П.С. *Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах.* – Фрунзе: Илим, 1978.
- [29] ТРЕНОГИН В.А. *Функциональный анализ.* – Москва: Наука, 1980.
- [30] УСПЕНСКИЙ В.А., СЕМЁНОВ А.Л. *Теория алгоритмов: основные открытия и приложения.* – Москва: Наука, 1987.
- [31] АВЕРТН О. *Precise numerical methods using C++.* – San Diego: Academic Press, 1998.

- [32] BABICHEV A.B., KADYROVA O.B., KASHEVAROVA T.P., LESHCHENKO A.S., SEMENOV A.L., UniCalc, a novel approach to solving systems of algebraic equations // *Interval Computations*. – 1993. – №2. – P. 29–47.
- [33] DIAN J., KEARFOTT R.B. Existence verification for singular and nonsmooth zeros of real nonlinear systems // *Mathematics of Computation*. – 2003. – Vol. 72 (242). – P. 758–766.
- [34] HANSEN E. *Global optimization using interval analysis*. – New York: Marcel Dekker, 1992.
- [35] HANSEN E., WALSTER G.B. *Global optimization using interval analysis*. – New York: Marcel Dekker, 2003.
- [36] KARCANIAS N., GIANNAKOPOULOS CH., HUBBARD M. Almost zeros of a set of polynomials // *Intern. Journal of Control*. – 1983. – Vol. 38, No. 6. – P. 1213–1238.
- [37] KEARFOTT R.B. An efficient degree-computation method for a generalized method of bisection // *Numerische Mathematik*. – 1979. – Vol. 32. – P. 109–127.
- [38] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [39] MINTY G. Two theorems on nonlinear functional equations in Hilbert space // *Bull. Amer. Math. Society*. – 1963. – Vol. 69. – P. 691–692.
- [40] MOORE R.E. A test for existence of solutions to nonlinear systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1977. – Vol. 14. – P. 611–615.
- [41] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [42] MOORE R.E. Interval methods for nonlinear systems // *Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis)* / Alefeld G. and Grigorieff R.D., eds. – Wien-NewYork: Springer, 1980. – P. 113–120. – (Computing Supplement; 2)
- [43] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [44] <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>
- [45] <http://web.comlab.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/>
- [46] QI L. A note on the Moore test for nonlinear systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19. – P. 851–857.
- [47] RUMP S.M. A note on epsilon-inflation // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4, No. 4. – P. 371–375.

- [48] SIKORSKI K.A. *Optimal solution of nonlinear equations*. – London: Oxford University Press, 2000.
- [49] TREFETHEN L.N., *Approximation theory and numerical linear algebra // Algorithms for Approximation II*, Shrivenham, 1988 / Mason J.C. and Cox M.G., eds., – London: Chapman and Hall, 1990. – P. 336–360.

Таблица 8.1. Простейший интервальный алгоритм
доказательного глобального решения уравнений

```

инициализируем список  $\mathcal{L}$  начальным брусом  $X$ 
DO WHILE (  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  )
    извлекаем из  $\mathcal{L}$  брус  $Y$ 
    IF ( диаметр  $Y < \delta$  ) THEN
        выдаём брус  $Y$  в качестве ответа
        в соответствующий из списков I–III
    ELSE
        пересекаем брус  $Y$  на потомки  $Y'$  и  $Y''$ 
    END IF
    IF (  $0 \in F(Y')$  ) THEN
        применяем тест существования к  $Y'$  ;
        если результат непуст, заносим его в  $\mathcal{L}$ 
    END IF
    IF (  $0 \in F(Y'')$  ) THEN
        применяем тест существования к  $Y''$  ;
        если результат непуст, заносим его в  $\mathcal{L}$ 
    END IF
END DO

```


Глава 9

Внешнее оценивание обобщённых множеств решений

В этой главе мы обращаемся к задаче внешнего оценивания обобщённых множеств решений интервальных систем уравнений. Эта задача более молода и более трудна, чем внешнее оценивание объединённого множества решений, и потому мы сможем представить меньшее разнообразие идей и подходов, чем то, что было характерно для Главы 7 и оценивания объединённого множества решений. Тем не менее, ряд результатов на этом пути, особенно касающихся интервальных линейных систем уравнений, уже устоялся и достоин подробного изложения.

9.1 Формальный подход

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \quad (9.1)$$

и нас интересует получение внешней оценки её множества АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, соответствующего характеристической матрице \mathbf{A}^c и характеристическому вектору правой части \mathbf{b}^c . В этом параграфе мы покажем, как исходная задача оценивания сводится к задаче нахождения

формального решения некоторого вспомогательного уравнения в полной интервальной арифметике \mathbb{KR} . Соответственно, весь подход, который оказывается целиком аналогичным развитому в §7.4, мы также называем *формальным подходом*.

Ниже, помимо результатов §5.26, нам понадобится ещё одна характеристизация множеств АЕ-решений интервальных систем в рекуррентной форме (fixed-point form в англоязычной терминологии). Отправная точка наших рассуждений — результат Теоремы 5.2.3:

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \quad (9.2)$$

Добавляя к обеим частям (9.2) по $(x \ominus \mathbf{A}^c x)$, получим равносильное включение

$$x \subseteq x + \text{орр}(\mathbf{A}^c x) + \mathbf{b}^c.$$

Но $\text{орр}(\mathbf{A}^c x) = \text{орр}(\mathbf{A}^c) x$ для вещественных x . Следовательно, имеем

$$x \subseteq x + (\text{орр} \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c,$$

и далее, опять-таки в силу вещественности x , в правой части мы можем воспользоваться дистрибутивностью и вынести переменную за скобки. В целом мы получим

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff x \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c.$$

Заметим, что при $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ из проведённых нами рассуждений следует, что $((I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c)$ — правильный интервальный вектор.

Итак, имеет место

Теорема 9.1.1 *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда*

$$x \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

Теорема 9.1.2 *Пусть интервальная матрица $\mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ такова, что*

$$\rho(|\mathbf{C}|) < 1$$

— спектральный радиус матрицы $|\mathbf{C}|$, составленной из модулей элементов \mathbf{C} , меньше единицы. Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d} \quad (9.3)$$

существует и единственно для любого интервального вектора $\mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$.

Доказательство. В силу неравенства (2.6) для любых $\mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{KR}^n$

$$\begin{aligned} \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{d}, \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{d}) &= \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{C}\mathbf{v}) \\ &\leq |\mathbf{C}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Если спектральный радиус матрицы $|\mathbf{C}|$ меньше единицы, то мы оказываемся в условиях применимости конечномерного варианта теоремы Шрёдера о неподвижной точке (теорема 8.7.1). Именно, отображение $\mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

является *сжимающим* относительно метрики Dist и поэтому имеет единственную неподвижную точку, которая есть не что иное как формальное решение интервальной линейной системы (9.3). ■

Теорема 9.1.3 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ обобщённое АЕ-множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто, а \mathbf{A}^c и \mathbf{b}^c — характеристические матрица и правая часть этого множества решений — таковы что

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1. \quad (9.4)$$

Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$\mathbf{x} = (I \ominus \mathbf{A}^c)\mathbf{x} + \mathbf{b}^c \quad (9.5)$$

(которое существует и единственно в силу Теоремы 9.1.2) является правильным интервальным вектором, содержащим множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Доказательство. Пусть \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной линейной системы (9.5). Возьмём какую-нибудь точку $\tilde{\mathbf{x}} \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и покажем, что необходимо $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}^*$.

В силу Теоремы 9.1.1 принадлежность $\tilde{\mathbf{x}} \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна включению

$$\tilde{\mathbf{x}} \in (I \ominus \mathbf{A}^c)\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}^c. \quad (9.6)$$

Организуем в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ итерационный процесс по следующим формулам

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \tilde{x}, \quad (9.7)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (I \ominus \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c. \quad (9.8)$$

Пользуясь математической индукцией, нетрудно показать, что все последовательные приближения этого процесса содержат \tilde{x} . Действительно, для $\mathbf{x}^{(0)}$ это верно по построению. Если же $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$, то в силу (9.6) и свойства монотонности интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ по включению

$$\tilde{x} \in (I \ominus \mathbf{A}^c) \tilde{x} + \mathbf{b}^c \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c = \mathbf{x}^{(k+1)}. \quad (9.9)$$

Итак, $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ для любого натурального номера k . В частности, отсюда следует правильность всех интервальных векторов $\mathbf{x}^{(k)}$.

Далее, условие

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \quad (9.4)$$

влечёт сходимость итерационного процесса, определяемого формулами (9.7)–(9.8)) в мультиметрическом пространстве $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$. Ясно также, что сходится последовательность $\mathbf{x}^{(k)}$ к неподвижной точке отображения

$$\mathbf{x} \mapsto (I \ominus \mathbf{A}^c) \mathbf{x} + \mathbf{b}^c,$$

т.е. к единственному формальному решению \mathbf{x}^* уравнения (9.5). Поскольку принадлежность $x \in \mathbf{x}^{(k)}$ равносильна системе $2n$ нестрогих неравенств, то она должна сохраниться и в пределе:

$$\tilde{x} \in \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Это и требовалось доказать. ■

В заключение параграфа — необходимый комментарий по поводу практической реализации развитого выше формального подхода, т.е. методов нахождения формального решения основного уравнения (9.5). Теоремы 9.1.2–9.1.3, собственно уже дают теоретический фундамент для построения стационарных итерационных алгоритмов, основанных на теореме Шрёдера о сжимающем отображении. Именно, в условиях Теоремы 9.1.3 можно организовать интервальный итерационный процесс по формуле (9.8) (или какой-либо её модификации), который будет

сходится к внешней оценке АЕ-множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ из любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$. При этом наиболее удобным выбором $\mathbf{x}^{(0)}$ является интервальный вектор, который уже гарантированно содержит множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Из включения (9.9) следует тогда, что все последовательные приближения $\mathbf{x}^{(k)}$ процесса (9.8) также содержат оцениваемое АЕ-множество решений. Например, в качестве $\mathbf{x}^{(0)}$ можно взять внешнюю интервальную оценку объединённого множества решений ИСЛАУ, отыскание которой является хорошо изученной задачей (см. предшествующую главу).

Другая возможность вычисления требуемого формального решения — субдифференциальный метод Ньютона (см. главу 12), — применимость которого к настоящему моменту строго обоснована для интервальных систем (9.5) с матрицами \mathbf{A}^c , в каждой строке которых все элементы либо правильные, либо неправильные. Но экспериментально обнаружено, что этот метод очень хорошо работает и для общих интервальных систем, в которых правильные и неправильные элементы в характеристической матрице \mathbf{A}^c перемешаны произвольно (хотя в этом случае он уже не субдифференциальный, а *квазидифференциальный* метод Ньютона).

Наконец, следует отметить, что спектральное условие применимости развитого нами подхода —

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \quad (9.4)$$

— является очень обременительным для матрицы интервальной линейной системы. Ниже в §9.5 мы обсудим один из способов достижения этого неравенства — так называемое *предобуславливание*.

Как читатель мог убедиться из предыдущих параграфов, для внешнего оценивания множеств решений интервальных систем критичным оказывается тот факт, что спектральный радиус модуля некоторой интервальной матрицы меньше единицы. Соответствующее условие определяет применимость формального подхода из §§, а также сходимость классических итерационных методов, описанных в §§. Решение проблемы собственных значений, полной либо частичной, — это отдельная непростая вычислительная задача, а в данном случае получение информации о спектре матрицы носит вспомогательный характер, так что сколько-нибудь значительные трудозатраты на здесь нежелательны. Цель этого параграфа — рассмотрение простых способов оценки спектрального радиуса матриц, возникающих в процессе внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений.

Прежде всего отметим неотрицательность этих матриц. Следовательно, в силу теории Перрона-Фробениуса [5] у рассматриваемых матриц модулей всегда существует вещественное и даже положительное собственное значение, равное искомому спектральному радиусу, и ему отвечает неотрицательный ненулевой собственный вектор. Поэтому, в принципе, для его оценивания с произвольной точностью может быть применен известный степенной метод [2, 4], заключающийся в последовательном вычислении

$$r^{(k+1)} \leftarrow \frac{Ar^{(k)}}{\|r^{(k)}\|}, \quad \lambda^{(k+1)} \leftarrow \frac{\|Ar^{(k)}\|}{\|r^{(k)}\|}.$$

В качестве начального приближения этого процесса мы можем взять вектор со всеми единичными компонентами.

Иногда этот способ может оказаться неприемлемым из-за излишней трудоемкости, и потому имеет смысл продумать более дешевые способы оценивания спектра.

Широко известна оценка спектрального радиуса сверху любой матричной нормой. Но в общем случае, если мы не уделяем выбору матричной нормы специального внимания, этот рецепт может оказаться весьма грубым и потому будет давать лишь самую предварительную информацию о спектре рассматриваемой матрицы. С другой стороны, для любого $\epsilon > 0$ существует такая матричная норма $\|\cdot\|$, что

$$\|A\| - \epsilon \leq \rho(A) \leq \|A\|.$$

Следовательно, подобрав используемую матричную норму некоторым специальным образом, мы сможем существенно улучшить качество нашей оценки спектрального радиуса. Этим соображением и руководствовался Д.Гей в [7], предлагая специальную процедуру для итерационного уточнения весов во взвешенной максимум-норме. Изложим ее подробно.

Наш практический опыт свидетельствует о довольно высокой эффективности процедуры Гей, которая в некоторых случаях позволяла уменьшать оценку для нормы матрицы более чем на порядок в сравнении с исходной, приводя, в конце концов, к заключению о том, что она меньше единицы и итерационный процесс внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ применим, тогда как по исходной величине нормы такого заключения сделать было совершенно нельзя.

9.2 Оптимальность внешнего оценивания

Каково качество внешнего интервального оценивания АЕ-множеств решений ИСЛАУ с помощью формального подхода? Иными словами, насколько близка получаемая интервальная оценка к оптимальному решению внешней задачи? В этой работе мы не будем исследовать этот интересный вопрос в общем случае, так как он требует отдельного кропотливого рассмотрения. Недавние теоретические результаты А.В. Лакеева [10] свидетельствуют о том, что в самом общем случае, когда мы не накладываем на матрицу ИСЛАУ никаких ограничений, задача оценивания АЕ-множеств решений может оказаться труднорешаемой. Более точно, если в интервальной матрице системы \mathbf{A} “достаточно много” элементов имеют Е-неопределённость, то как задача распознавания соответствующего множества решений (т.е. задача выяснения того, пусто оно или нет), так и задача его внешнего оценивания являются NP-полными. Это свойство на нынешнем этапе развития теории сложности вычислений считается равносильным “труднорешаемости” задачи. По этой причине надеяться на качественное внешнее оценивание множеств решений ИСЛАУ с помощью методики §9.1 в общем случае нельзя.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 9.2.1 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ множество АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто и $\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c$ — соответствующие характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ. Если матрица $(I \ominus \mathbf{A}^c)$ неотрицательна,

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \quad (9.4)$$

и все компоненты вектора \mathbf{b}^c имеют одинаковый определённый знак, то формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c)x + \mathbf{b}^c \quad (9.5)$$

(которое существует, единственно и правильно в силу Теорем 9.1.2–9.1.3) является интервальной оболочкой для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. оптимальным решением задачи внешнего оценивания множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Теорема 9.2.2 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ множество АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто и $\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c$ — соответствующие характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ. Если матрица \mathbf{A} является М-матрицей, и все компоненты вектора \mathbf{b}^c

имеют одинаковый определённый знак, то формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c)x + \mathbf{b}^c \quad (9.5))$$

(которое существует, единственно и правильно в силу Теорем 9.1.2–9.1.3) является интервальной оболочкой для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. оптимальным решением задачи внешнего оценивания множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Предложение 9.2.1 В условиях Теоремы 9.2.1 во множестве АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы (9.1) существуют точки \hat{x} и \check{x} , имеющие соответственно наименьшие и наибольшие координаты относительно покомпонентного порядка в \mathbb{R}^n , т.е. такие, что $\hat{x} \leq x \leq \check{x}$ для любого $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. При этом

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c, \\ \check{x} &= \min_{\hat{A}' \in \mathbf{A}^\vee} \max_{\check{A}'' \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A}' + \check{A}'')^{-1} \overline{\mathbf{b}}^c. \end{aligned}$$

Доказательство. Мы проведём его только для точки \hat{x} с наименьшими координатами, для \check{x} оно выглядит совершенно аналогично.

Воспользуемся представлением множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которое даёт Теорема ???:

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\vee} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} (\hat{b} + \check{b}).$$

Матрица $(\hat{A} + \check{A})^{-1}$ неотрицательна, поэтому при каждом фиксированном \hat{b} во множестве

$$\bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} (\hat{b} + \check{b})$$

точка

$$\begin{aligned} &\min_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} (\hat{b} + \check{b}) \\ &= (\hat{A} + \check{A})^{-1} (\hat{b} + \underline{\mathbf{b}}^\exists). \end{aligned}$$

имеет наименьшие координаты относительно покомпонентного порядка. Аналогично, при дальнейшем взятии пересечений по $\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall$ точка

$$\begin{aligned} \max_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \underline{\mathbf{b}}^\exists) \\ = (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\overline{\mathbf{b}}^\forall + \underline{\mathbf{b}}^\exists) \\ = (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \end{aligned}$$

имеет наименьшие координаты в каждом из непустых множеств

$$\bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

Далее, коль скоро во множестве обратных матриц $\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\}$ имеются наименьшая и наибольшая матрицы, то при одинаковости всех знаков компонент $\underline{\mathbf{b}}^c$ векторный минимум

$$\min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \quad (9.10)$$

необходимо существует. Следовательно, объединение

$$\bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c$$

также имеет наименьшую точку, равную (9.10).

Наконец, пересечение

$$\bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \left(\bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \right), \quad (9.11)$$

совпадающее с множеством решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, обязано иметь наименьшую точку, так как достигается

$$\max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c. \quad (9.12)$$

Нетрудно понять, что аналитическое выражение для этой наименьшей точки пересечения (9.11) как-раз таки совпадает с (9.12). ■

Предложение 9.2.2 Если $a \geq 0$, то для любого интервала $x \in \mathbb{KR}$ имеет место

$$\underline{a \cdot x} = \underline{a \cdot \underline{x}}, \quad (9.13)$$

$$\overline{a \cdot x} = \overline{a \cdot \overline{x}}. \quad (9.14)$$

Доказательство. Оно непосредственно следует из рассмотрения первой строки Табл. 2.1 — таблицы Кэли для умножения в полной интервальной арифметике. Согласно приведённым в ней формулам

$$\underline{a \cdot x} = [\underline{a x}, \overline{a x}], \quad \text{если } x \geq 0,$$

$$\underline{a \cdot x} = [\overline{a x}, \overline{a x}], \quad \text{если } x \geq 0,$$

$$\underline{a \cdot x} = [\overline{a x}, \underline{a x}], \quad \text{если } x \leq 0,$$

$$\underline{a \cdot x} = [\underline{a x}, \underline{a x}], \quad \text{если } x \leq 0.$$

Это и доказывает равенства (9.13)–(9.14), так как любой интервал из \mathbb{KR} либо неотрицателен, либо неположителен, либо содержит нуль, либо сам содержится в нуле. ■

Доказательство Теоремы 9.2.1. Покажем, что в условиях, налагаемых на ИСЛАУ этой теоремой, для наименьшей \hat{x} и наибольшей \check{x} точек из множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (существование которых обеспечено Предложением 9.2.1) достигаются равенства

$$\mathbf{A}^c \hat{x} = \underline{\mathbf{b}}^c \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{A}^c \check{x}} = \overline{\mathbf{b}}^c. \quad (9.15)$$

Мы докажем подробно только первое из этих равенств, и обоснование будем вести “от противного”.

Если первое из равенств не достигается ни для какого x , то

$$\underline{\mathbf{A}^c x} \geq \underline{\mathbf{b}}^c \quad \text{и} \quad (\underline{\mathbf{A}^c x})_i > (\underline{\mathbf{b}}^c)_i \quad \text{хотя бы для одного } i.$$

Мы будем условно записывать это соотношение в виде

$$\underline{\mathbf{A}^c x} \gneq \underline{\mathbf{b}}^c, \quad (9.16)$$

где $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Расписывая результаты интервальных операций через минимакс, получим

$$\min_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \max_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A}) x \gneq \underline{\mathbf{b}}^c,$$

или

$$(\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^{\forall})(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^{\exists})(\hat{A} + \check{A})x \geq \underline{\mathbf{b}^c}.$$

Домножение обеих частей неравенства

$$(\hat{A} + \check{A})x \geq \underline{\mathbf{b}^c}$$

на неотрицательную неособенную матрицу $(\hat{A} + \check{A})^{-1}$, приводит к неравенству-следствию

$$x \geq (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}^c}.$$

Таким образом, следствием (9.16) является

$$(\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^{\forall})(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^{\exists})(x \geq (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}^c}).$$

и, наконец,

$$x \geq \max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^{\forall}} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^{\exists}} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}^c}$$

для любой точки $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Но, согласно Предложению 9.2.1, во множестве решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ присутствует точка \dot{x} , точное выражение для которой имеет вид (9.12). Противоречие!

Теперь мы готовы доказать основной результат этого параграфа. Нетрудно понять, что соотношения (9.15) эквивалентны

$$(\text{opp } \mathbf{A}^c) \dot{x} + \underline{\mathbf{b}^c} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{(\text{opp } \mathbf{A}^c) \dot{x} + \mathbf{b}^c} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\dot{x}, \dot{x}] + \mathbf{b}^c} &= \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\dot{x}, \dot{x}] + \underline{\mathbf{b}^c}} \\ &= \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c) \dot{x} + \underline{\mathbf{b}^c}} \quad \text{в силу соотношения (9.13)} \\ &= \underline{\dot{x} + (\text{opp } \mathbf{A}^c) \dot{x} + \underline{\mathbf{b}^c}} \quad \begin{array}{l} \text{так как умножение на} \\ \text{вещественные числа} \\ \text{дистрибутивно} \end{array} \\ &= \dot{x} + \underline{(\text{opp } \mathbf{A}^c) \dot{x} + \underline{\mathbf{b}^c}} \\ &= \dot{x}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\overline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\dot{x}, \dot{x}] + \underline{\mathbf{b}^c}} = \dot{x}.$$

Следовательно, в целом

$$(I \ominus \mathbf{A}^c)[\dot{x}, \dot{x}] + \mathbf{b}^c = [\dot{x}, \dot{x}],$$

интервальный вектор $[\dot{x}, \dot{x}]$ является формальным решением уравнения (9.5) и, по Теореме 9.1.3, $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq [\dot{x}, \dot{x}]$. Но, коль скоро точки \dot{x} и \dot{x} сами лежат во множестве решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то можем заключить, что $[\dot{x}, \dot{x}]$ — это действительно интервальная оболочка для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. ■

Как хорошо известно, классический аналог доказанного нами результата формулируется следующим образом (см., например, [1]):

Теорема 9.2.3 *Если \mathbf{A} — неотрицательная правильная интервальная квадратная матрица и $\rho(|I - \mathbf{A}|) < 1$, то формальное решение интервальной линейной системы*

$$x = (I - \mathbf{A})x + \mathbf{b}$$

существует, единственно и является оптимальной внешней интервальной оценкой объединённого множества решений ИСЛАУ (9.1).

Таким образом, для оптимальности внешней оценки объединённого множества решений требуется неотрицательность только матрицы \mathbf{A}^c , тогда как вектор \mathbf{b}^c может быть любым. В Теореме 9.2.1 мы потребовали ещё знакоопределённости компонент вектора \mathbf{b}^c и существенно использовали это ограничение в своих рассуждениях. Можно ли освободиться от него в общем случае? Это интересный вопрос, ответа на который автор пока не знает.

Отметим, что Теорема 9.2.1 носит вполне практический характер, так как существуют рабочие модели, удовлетворяющие её условиям. Такова, в частности, рассмотренная нами в §5.2 межотраслевая балансовая модель В. Леонтьева. Нетрудно показать (это сделано, к примеру, в работе [8]), что матрица Леонтьева является M -матрицей. Кроме того, компоненты вектора \mathbf{b} — величины конечного потребления по различным отраслям — по самому своему смыслу неотрицательны.

9.3 Интервальный метод Гаусса-Зейделя для обобщённых множеств решений

Цель настоящего параграфа — адаптировать рассмотренный в Главе 7 интервальный метод Гаусса-Зейделя на задачи внешнего оценивания

обобщённых множеств решений интервальных линейных систем уравнений. Мы будем предполагать, что в рассматриваемой ИСЛАУ интервальная матрица \mathbf{A} неособенна, т.е. то, что неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Ясно, что тогда путём перестановки уравнений системы (строк матрицы ИСЛАУ) можно добиться того, чтобы в новой матрице \mathbf{A} все диагональные элементы \mathbf{a}_{ii} не содержали нулей. Именно это условие и будет существенно использоваться в наших построениях.

Основой точечного метода Гаусса-Зейделя является, как известно, расписывание системы уравнений $Ax = b$ в явном покомпонентном виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и последующее решение i -го уравнения, $i = 1, 2, \dots, n$, относительно x_i в предположении $a_{ii} \neq 0$. Аналогичным образом мы будем действовать и при построении интервального метода.

Воспользуемся аналитической характеристикой АЕ-множеств решений, которую даёт Теорема 5.2.3: точка x принадлежит множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c.$$

Представляя это включение покомпонентно, получим

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}^c x_j \subseteq \mathbf{b}_i^c, \quad i = 1, \dots, n,$$

что равносильно

$$\mathbf{a}_{ii}^c x_i \subseteq \text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если же $0 \notin \text{про} \mathbf{a}_{ii}^c = \mathbf{a}_{ii}$, то обе части этого включения можно домножить на $(\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1}$, придя к

$$x_i \in (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Предположим, что нам уже известен некоторый интервальный вектор \mathbf{x} , содержащий множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Таблица 9.1. Обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя

Вход

Характеристические матрица $\mathbf{A}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор правой части $\mathbf{b}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, соответствующие оцениваемому множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Интервальный вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\top \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, ограничивающий желаемую часть множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Константа $\epsilon > 0$.

Выход

Новая внешняя оценка $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^\top \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}$, либо информация “множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не пересекает \mathbf{x} ”.

Алгоритм

```

 $d \leftarrow +\infty$  ;
DO WHILE (  $d \geq \epsilon$  )
  DO FOR  $i = 1$  TO  $n$ 
     $\tilde{\mathbf{x}}_i \leftarrow (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left( \sum_{j=1}^{i-1} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \tilde{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=i+1}^n (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right)$  ;
    IF (  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  есть неправильный интервал ) THEN
      STOP, сигнализируя “ $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  не пересекает  $\mathbf{x}$ ”
    END IF
     $\tilde{\mathbf{x}}_i \leftarrow \mathbf{x}_i \cap \tilde{\mathbf{x}}_i$ 
    IF (  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  есть пустое множество  $\emptyset$  ) THEN
      STOP, сигнализируя “ $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  не пересекает  $\mathbf{x}$ ”
    END IF
  END DO
   $d \leftarrow$  расстояние между  $\mathbf{x}$  и  $\tilde{\mathbf{x}}$  ;
   $\mathbf{x} \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}$  ;
END DO

```

Тогда, если $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то должна быть справедливой следующая цепочка соотношений

$$\begin{aligned}
 x_i &\in (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c \right) \\
 &= (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} \text{орр} (\mathbf{a}_{ij}^c x_j) + \mathbf{b}_i^c \right) \\
 &= (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр} \mathbf{a}_{ij}^c) x_j + \mathbf{b}_i^c \right) && \text{поскольку все } x_j \\
 &&& \text{суть точечные} \\
 &\subseteq (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр} \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right) && \begin{array}{l} \text{так как } x_j \in \mathbf{x}_j \text{ и} \\ \text{арифметические} \\ \text{операции в } \mathbb{KR} \\ \text{монотонны по} \\ \text{включению.} \end{array}
 \end{aligned}$$

Таким образом, если определить интервальный вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ посредством покомпонентных равенств

$$\tilde{\mathbf{x}}_i := (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр} \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.17)$$

то в рассматриваемых нами условиях он

- является правильным интервалом, несмотря на возможное наличие неправильных интервалов \mathbf{a}_{ij}^c и \mathbf{b}_i^c , взятие противоположных элементов и т.п. в выражении (9.17),
- также даёт внешнюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Естественно поэтому взять пересечение

$$\mathbf{x} \cap \tilde{\mathbf{x}} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

как более точную внешнюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Наконец, чтобы сразу же воспользоваться получаемой в ходе

работы алгоритма информацией, мы организуем, как и в классическом точечном методе Гаусса-Зейделя, немедленное вовлечение полученной новой оценки каждой компоненты (которая заведомо не хуже старой) в вычислительный процесс. Таким образом, i -ая компонента нового приближения $\tilde{\mathbf{x}}$ будет вычисляться по формуле (9.17) на основе уже вычисленных компонент $\tilde{\mathbf{x}}$ с номерами $i = 1, 2, \dots, i-1$, а также $i+1$ -ой, \dots , n -ой компонент старого приближения \mathbf{x} . Полная вычислительная схема интервального метода Гаусса-Зейделя для уточнения внешней интервальной оценки АЕ-множеств решений имеет вид, представленный в Табл. 9.1.

Если $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x} \neq \emptyset$, то результатом работы выписанного алгоритма является последовательность $\{\hat{\mathbf{x}}\}$ вложенных правильных интервалов, которая обязана иметь предел в \mathbb{R}^n (см. §1.6). Критерием останова итерирования может служить, как обычно, достижение достаточной степени близости (в некоторой метрике, или же мультиметрике Dist (2.4)) между двумя последовательными приближениями. Для начала работы интервального метода Гаусса-Зейделя нужно знать некоторое начальное интервальное приближение $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Мы всегда можем получить его как внешнюю интервальную оценку объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ для соответствующей интервальной линейной системы (коль скоро оно наиболее широкое), применив какой-либо из большого количества хорошо разработанных для этой цели методов (см. Главу 7).

Обсудим, наконец, выбор величины ϵ , которая влияет на критерий останова алгоритма. Строго говоря, она не является точностью в общепринятом смысле, расстоянием от приближенного ответа до точного решения.

9.4 Исследование обобщённого метода Гаусса-Зейделя

Теорию интервального метода Гаусса-Зейделя, представленную в Главе 7, можно частично перенести и на случай оценивания обобщённых множеств решений ИСЛАУ. Это и делается нами ниже.

Теорема 9.4.1 *Если \mathbf{x}^* — предел обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя, применённого для оценивания некоторого множества*

AE-решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, то

$$\langle \mathbf{A} \rangle |\mathbf{x}^*| \leq |\mathbf{b}|. \quad (9.18)$$

Если же \mathbf{A} является интервальной H-матрицей, то

$$|\mathbf{x}^*| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|. \quad (9.19)$$

Доказательство. Коль скоро мы рассматриваем только неособенные интервальные матрицы \mathbf{A} , то без ограничения общности можно считать, что $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Переходя к пределу в расчётных формулах, определяющих обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя, и учитывая, что $\lim \mathbf{x} = \lim \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$, получим

$$\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i^* \cap \left((\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, по крайней мере

$$\mathbf{x}_i^* \subseteq (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right), \quad (9.20)$$

и потому

$$|\mathbf{x}_i^*| \leq \left| (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \right|$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$, так как в обеих частях включения (9.20) стоят правильные интервалы. Оценим сверху правые части полученных неравенств:

$$\begin{aligned} \left| (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \right| &= |(\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1}| \cdot \left| \sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right| \\ &\leq |\mathbf{a}_{ii}^{-1}| \left(\sum_{j \neq i} |(\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i^c| \right) \\ &\leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left(\sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i| \right) \end{aligned}$$

для всякого $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, в целом имеем

$$|\mathbf{x}_i^*| \leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left(\sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i| \right),$$

что равносильно

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle |\mathbf{x}_i^*| - \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| \leq |\mathbf{b}_i|,$$

или

$$(\langle \mathbf{A} \rangle |\mathbf{x}^*|)_i \leq |\mathbf{b}_i|$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. совпадает с (9.18).

Если же \mathbf{A} — интервальная H -матрица, то $\langle \mathbf{A} \rangle$ — это M -матрица и, домножая обе части (9.18) на $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \geq 0$, получим (9.19). ■

Из неравенства (9.19) следует, что если интервальная матрица \mathbf{A} является H -матрицей, то любой достаточно широкий начальный интервальный вектор \mathbf{x} улучшается (т.е. уменьшается в размерах) обобщённым интервальным методом Гаусса-Зейделя. Напротив, если \mathbf{A} не есть H -матрица, то такого вывода сделать уже нельзя. Но и аналога Теоремы 7.5.2 о существовании сколь угодно широких неувлучшаемых начальных приближений для обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя теперь доказать не удаётся. Старое доказательство Ноймайера (как и значительная часть его теории вообще) уже не проходит, так как в нём существенно используется тот факт (неверный в полной интервальной арифметике Каухера), что абсолютная величина произведения интервалов равна произведению абсолютных величин сомножителей. Тем не менее, гарантировать улучшение начального интервала методом Гаусса-Зейделя в случае, если матрица ИСЛАУ не является H -матрицей, мы всё-таки не можем.

В Главе 7 мы познакомились со свойством оптимальности интервальных итераций Гаусса-Зейделя в применении к объединённому множеству решений ИСЛАУ (теорема Барта-Нудинга). Нам удалось распространить этот классический результат и на обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя:

Теорема 9.4.2 *Если в интервальной линейной системе $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} является интервальной M -матрицей а все компоненты вектора правой части имеют одинаковый определённый знак, то обоб-*

щённый интервальный метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной внешней интервальной оценке АЕ-множества решений рассматриваемой системы из любого начального приближения, содержащего оцениваемое множество решений.

Доказательство. Введём следующие обозначения

$E = (e_{ij})$ — матрица, полученная из матрицы системы $A = (a_{ij})$ заменой её диагональных элементов на нули,

$D = (d_{ij})$ — диагональная матрица с элементами $d_{ii} = a_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$, по главной диагонали,

$E^c = (e_{ij}^c)$ — матрица, полученная из характеристической матрицы $A^c = (a_{ij}^c)$ заменой её диагональных элементов на нули,

$D^c = (d_{ij}^c)$ — диагональная матрица с элементами $d_{ii}^c = a_{ii}^c$, $i = 1, 2, \dots, n$, по главной диагонали.

Тогда

$$\begin{aligned} A &= D + E, \\ A^c &= D^c + E^c, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} d_{ij} &= d_{ij}^c = 0 && \text{для } i \neq j, \\ e_{ij} &= e_{ij}^c = 0 && \text{для } i = j. \end{aligned}$$

Если x^* — предел обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя, применённого к ИСЛАУ $Ax = b$, то, очевидно,

$$x^* = x^* \cap (D^c)^{-1}((\text{орр } E^c)x^* + b^c),$$

а потому

$$x^* \subseteq (D^c)^{-1}((\text{орр } E^c)x^* + b^c). \quad (9.21)$$

Далее, если \mathbf{A} есть M -матрица, то её диагональ состоит из положительных элементов, $|(\mathbf{D}^c)^{-1}| = \langle \mathbf{D} \rangle^{-1}$, и поэтому

$$|(\mathbf{D}^c)^{-1}| \text{ орр } \mathbf{E}^c| = \langle \mathbf{D} \rangle^{-1} |\mathbf{E}|. \quad (9.22)$$

Кроме того, \mathbf{D} также есть M -матрица.

Но и матрица сравнения $\langle \mathbf{A} \rangle$ является M -матрицей, будучи одной из точечных матриц в пределах \mathbf{A} . Следовательно, поскольку $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{D} \rangle - |\mathbf{E}|$, из результата Ноймайера (Теорема 2.7.1) вытекает

$$\rho(\langle \mathbf{D} \rangle^{-1} |\mathbf{E}|) < 1,$$

что вместе с (9.22) приводит к неравенству

$$\rho(|(\mathbf{D}^c)^{-1}| \text{ орр } \mathbf{E}^c|) < 1.$$

Мы можем, таким образом, заключить, что итерационный процесс в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, определяемый формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &\leftarrow \mathbf{x}^*, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &\leftarrow (\mathbf{D}^c)^{-1} \left((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c \right), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

сходится к единственной неподвижной точке \mathbf{x}^* отображения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующего по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{D}^c)^{-1} \left((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x} + \mathbf{b}^c \right).$$

При этом \mathbf{x}^* является формальным решением интервальной линейной системы

$$\mathbf{x} = (\mathbf{D}^c)^{-1} \left((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x} + \mathbf{b}^c \right). \quad (9.23)$$

Далее, из включения (9.21) по индукции можно вывести, что

$$\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^*. \quad (9.24)$$

Действительно, $\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^{(0)}$, и если $\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^{(k)}$, то, принимая во внимание свойство монотонности интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ по включению, нетрудно заключить

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &\subseteq (\mathbf{D}^c)^{-1} \left((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^* + \mathbf{b}^c \right) \\ &\subseteq (\mathbf{D}^c)^{-1} \left((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c \right) = \mathbf{x}^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$, получаем (9.24).

Для завершения нашего доказательства следует лишь сослаться на Теорему 9.2.1: коль скоро \mathbf{x}^* есть формальное решение системы (9.23) и \mathbf{A} является M -матрицей, то \mathbf{x}^* — это интервальная оболочка множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Следовательно, в силу (9.24) вектор \mathbf{x}^* также является интервальной оболочкой $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. ■

9.5 Предобуславливание

Обе развитые нами выше методики для внешнего интервального оценивания АЕ-множеств решений ИСЛАУ, — формальный подход и обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя — имеют существенные ограничения на сферу своей приложимости. Ключевым моментом применимости формального подхода является приведение исходной интервальной линейной системы (9.1) к виду (9.5) таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1.$$

В свою очередь, для хорошей работы обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя, как следует из теории §9.4, желательно, чтобы интервальная линейная система имела H -матрицу. Совершенно очевидно, что оба эти условия довольно обременительны и на практике выполняются далеко не всегда. Как же находить внешние оценки АЕ-множеств решений интервальных линейных систем в общем случае?

Далее, даже если в (9.5) мы имеем $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1$ и формальный подход применим, ширина неподвижной точки уравнения (9.5) также решающим образом зависит от величины $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|)$. Чем меньше $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|)$, тем лучшую, при прочих равных условиях, внешнюю интервальную оценку множества решений мы получаем.

Как мы знаем из Главы 7, в задаче внешнего интервального оценивания объединённого множества решений поставленные вопросы обычно решаются с помощью предобуславливания — домножения обеих частей системы слева на некоторую вещественную матрицу, так что вместо исходной системы

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{9.1}$$

мы получаем *предобусловленную интервальную систему*

$$(\Lambda \mathbf{A})\mathbf{x} = \Lambda \mathbf{b}, \tag{7.20)}$$

$\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, объединённое множество решений которой не уже, чем для (9.1) (см. §7.7). К сожалению, этот рецепт, который можно называть *наивным предобуславливанием*, напрямую не применим при оценивании обобщённых множеств решений. При простом домножении интервальной матрицы и правой части ИСЛАУ слева на вещественную матрицу обобщённые множества решений не обязательно расширяются, но могут изменяться довольно сложным образом.

Пример. Для интервальной линейной системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & [0, 1]^{\exists} \\ 0 & [2, 3]^{\exists} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1, 2]^{\forall} \\ [-6, 6]^{\exists} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

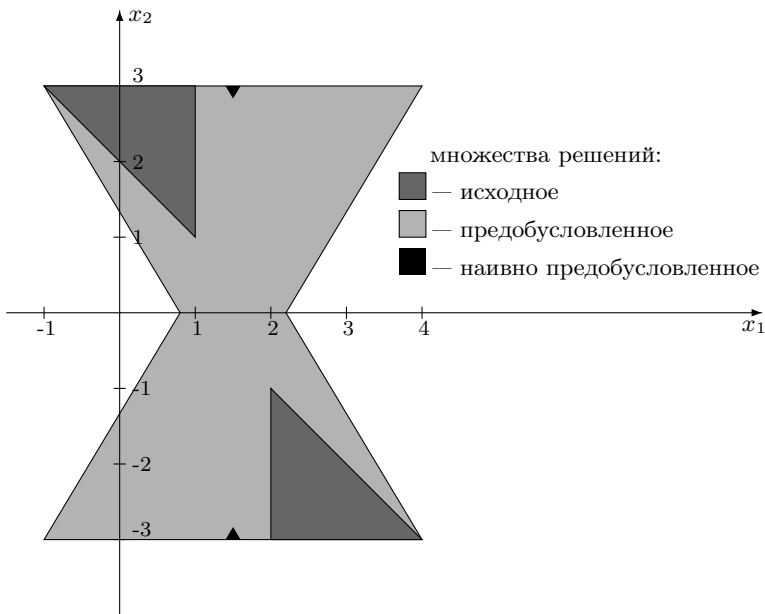


Рис. 9.1. Сравнение множеств решений исходной, предобусловленной и наивно-предобусловленной интервальных линейных систем.

Из Рис. 9.1 нетрудно видеть, что множество $(\Xi_{\Xi})(\Xi)$ -решений “наивно предобусловленной” системы (9.26) в первом ортанте не содержит вершину $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ и прилегающую к ней часть (например, точку $(1, 1)^T$) множества $(\Xi_{\Xi})(\Xi)$ -решений для исходной ИСЛАУ (9.25). Более того, нижняя оценка второй координаты точек этого множества решений, которая для исходной системы равна нулю и достигается на вершине $(\frac{1}{2}, 0)$, при наивном предобуславливании увеличивается!

Пример. Рассмотрим интервальную линейную систему,

$$\begin{pmatrix} 2 & [-3, -1]^E \\ -1 & [2, 5]^A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 3]^E \\ [1, 10]^E \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

для которой

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3.5 \end{pmatrix}, \quad (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

а интервальная система, “наивно предобусловленная” с помощью обратной средней, есть

$$\frac{2}{37} \begin{pmatrix} [11, 26] & [-10, 10] \\ [-10, 10] & [11, 26] \end{pmatrix} x = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (9.26)$$

Итак, множество решений “наивно предобусловленной” ИСЛАУ не обязательно содержит множество решений исходной ИСЛАУ, а внешняя оценка множества решений “наивно предобусловленной” системы может и не быть внешней оценкой соответствующего множества решений исходной системы. Тем не менее, выход из создавшегося затруднения есть и он состоит в том, что мы должны предобуславливать не исходную интервальную линейную систему вообще, а *характеристическую матрицу* и *характеристический вектор правой части*, соответствующие конкретному рассматриваемому множеству АЕ-решений.

Вновь обратимся к Теореме 5.2.3 из §5.26, дающей удобную аналитическую характеристику множеств АЕ-решений интервальных линейных систем:

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c.$$

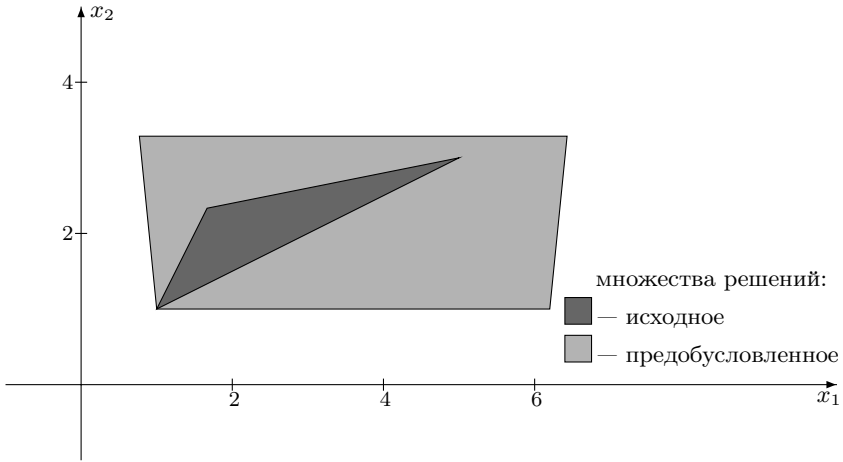


Рис. 9.2. Сравнение множеств решений
интервальных линейных систем: исходной,
предобусловленной и наивно предобусловленной.
Наивно предобусловленное — пусто.

Если Λ — какая-нибудь квадратная точечная $n \times n$ -матрица, то следствием включения, выписанного в этой эквивалентности справа, является

$$\Lambda(\mathbf{A}^c \cdot x) \subseteq \Lambda \mathbf{b}^c.$$

Известно, что произведение интервальных матриц в общем случае неассоциативно. Тем не менее, для точечных Λ и x в силу Предложения 2.1.4 имеет место равенство

$$\Lambda(\mathbf{A}^c \cdot x) = (\Lambda \mathbf{A}^c) x.$$

Следовательно, в целом приходим к импликации

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \implies \quad (\Lambda \mathbf{A}^c) x \subseteq \Lambda \mathbf{b}^c,$$

содержательный смысл которой может быть выражен следующим образом

Теорема 9.5.1 Если $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — квадратная точечная матрица, то множество ΛE -решений $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ для интервальной линейной системы (9.1), соответствующее характеристическим матрице \mathbf{A}^c и век-

тору правой части \mathbf{b}^c , содержится во множестве АЕ-решений ИСЛАУ, соответствующих характеристической матрице $\Lambda \mathbf{A}^c$ и вектору правых частей $\Lambda \mathbf{b}^c$, т.е. в $\Xi(\Lambda \mathbf{A}^c, \Lambda \mathbf{b}^c)$.

Мы будем называть домножение характеристических матрицы и правой части слева на вещественную матрицу *обобщённым предобуславливанием* интервальной линейной системы. Как видим, его результатом может быть лишь расширение множества АЕ-решений, но для новой характеристической матрицы может оказаться выполненным условие

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1,$$

которое так желательно для применимости наших подходов. Таким образом, исходную задачу внешнего интервального оценивания некоторого множества решений ИСЛАУ действительно можно будет заменить на успешно решаемую задачу внешнего оценивания другого множества решений, которое соответствует предобусловленным характеристической матрице и характеристической правой части ИСЛАУ.

Например, для множества $(\forall_{\Xi})\left(\frac{\Xi}{\Xi}\right)$ -решений интервальной линейной системы (9.25) характеристические матрица и вектор правой части есть

$$\mathbf{A}^c = \begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^c = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix},$$

а потому

$$(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^c = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [14, 23] & [10, -10] \\ [8, -8] & [26, 11] \end{pmatrix}, \quad (9.27)$$

$$(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}^c = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (9.28)$$

Множество АЕ-решений ИСЛАУ, которое соответствует характеристическим матрице (9.27) и правой части (9.28), изображено на правом нижнем чертеже Рис. 9.1 и включает в себя, как легко убедиться из сопоставления с верхним чертежом этого же рисунка, все $(\forall_{\Xi})\left(\frac{\Xi}{\Xi}\right)$ -решения исходной интервальной линейной системы (9.25).

Далее,

$$|I \ominus (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^c| = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 16 & 15 \end{pmatrix},$$

собственные числа этой матрицы равны $\frac{1}{37}(12 \pm \sqrt{329})$, т.е. примерно 0.81455 и -0.16590 , и потому условие (9.4) Теоремы 9.1.3 действительно удовлетворяется. В то же время, для матрицы исходной ИСЛАУ (9.25) это условие не выполнено.

Для удобства читателя переформулируем основные результаты §9.1 в виде, который явно учитывает предобуславливающую матрицу Λ .

Теорема 9.5.2 Пусть $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — квадратная точечная матрица. Если точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то

$$x \in (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) x + \Lambda \mathbf{b}^c.$$

Теорема 9.5.3 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и её множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, соответствующего характеристическим матрице \mathbf{A}^c и правой части \mathbf{b}^c , существует такая квадратная точечная матрица Λ , что

$$\rho(|I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c|) < 1. \quad (9.29)$$

Тогда формальное решение интервальной системы

$$x = (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) x + \Lambda \mathbf{b}^c \quad (9.30)$$

существует в \mathbb{KR}^n и единственно. Если же обобщённое множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто, то формальное решение интервальной системы (9.30) является правильным интервальным вектором, содержащим $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Доказательства вышеприведённых утверждений совершенно аналогичны доказательствам Теорем 9.1.1–9.1.3 и поэтому мы на них здесь не останавливаемся. ■

На наш взгляд, формальный подход также может получить дальнейшее развитие и расширение сферы своей применимости на основе подходящего выбора предобуславливания. Имеет смысл рассмотреть предобуславливающие матрицы, в некотором смысле промежуточные между “обратной средней” и диагональной. Тогда они не будут сильно искажать множество решений, приводя в то же время матрицу к нужному значению спектрального радиуса.

9.6 Внешнее оценивание для нелинейных систем

Развиваемый нами в этой главе формальный подход к внешнему оцениванию множеств решений интервальных систем частично применим не только к линейным, но и к нелинейным системам уравнений. В этом параграфе мы кратко наметим соответствующие результаты, касающиеся допустимого, управляемого и объединённого множеств решений, а их дальнейшее развитие и детализация могут стать предметом отдельной большой работы. Как мы видели в Главе 7, задача внешнего оценивания объединённого множества решений для общих нелинейных интервальных систем уравнений является весьма популярной в приложениях, а её решению посвящено немалое количество публикаций. Тщательное сравнение классических подходов к этой задаче — методов Кравчика, Хансена-Сенгупты и т.п. — с нашим формальным подходом останется пока за рамками исследования.

Предположим, что в интервальной системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, и мы можем эквивалентным образом привести эту систему к рекуррентной форме

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}, \quad (3)$$

в которой вектор переменной выделен в одной из частей “в чистом виде”. Подобное приведение, как правило, не является непреодолимо сложным. Если исходная интервальная система уравнений представлена в виде

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (2)$$

то мы можем, например, “перенести” все члены, образующие $F(\mathbf{a}, x)$, в одну часть с вектором \mathbf{b} , затем добавить к обеим частям системы по x и, возможно, выполнить упрощающие преобразования с выражением $(x - F(\mathbf{a}, x))$ в соответствии с рекомендациями в конце §1.2а. Другой возможный способ приведения (2) к (3) — последовательно выразить все x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, из различных уравнений системы.

Допуская некоторую вольность, мы будем обозначать в этом параграфе

$$\Xi_{tot}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{a} \in \mathbf{a})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}) \} \quad (9.31)$$

и называть это множество *допустимым множеством решений* интервальной системы уравнений (3). При выполнении вышеупомянутых

условий эквивалентности преобразований из §1.2а это множество совпадает с допустимым множеством решений интервальной системы (2), а потому далее мы можем рассматривать задачу внешнего оценивания уже для (9.31).

В качестве примера рассмотрим интервальную систему уравнений

$$\begin{cases} [1.5, 2.5] x_1 + [2.5, 3.5] x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} = [5, 15], \\ [0.9, 1.1] x_1 - [1.8, 2.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20]. \end{cases} \quad (9.32)$$

В силу результатов §1.2а она эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x_1 + [-0.5, 0.5] x_1 + [2.5, 3.5] x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} = [5, 15], \\ [0.9, 1.1] x_1 - 2x_2 + [-0.2, 0.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20], \end{cases}$$

которая, в свою очередь, после перенесения членов может быть переписана как

$$\begin{cases} 2x_1 = [-0.5, 0.5] x_1 - [2.5, 3.5] x_2 - \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} + [5, 15], \\ 2x_2 = [0.9, 1.1] x_1 + [-0.2, 0.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 - [8, 20]. \end{cases}$$

Наконец, приходим к

$$\begin{cases} x_1 = [-0.25, 0.25] x_1 - [1.25, 1.75] x_2 - \frac{[0.4, 0.7]}{1 + x_1^2} + [2.5, 7.5], \\ x_2 = [0.45, 0.55] x_1 + [-0.1, 0.1] x_2 + [0.8, 1] \cos x_2 - [4, 10]. \end{cases}$$

Возможен и другой способ эквивалентного приведения интервальной системы (9.32) к желаемой рекуррентной форме. От (9.32) мы переходим к

$$\begin{cases} [1.5, 2.5] x_1 + 3x_2 + [-0.5, 0.5] x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} = [5, 15], \\ x_1 + [-0.1, 0.1] x_1 - [1.8, 2.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20]. \end{cases}$$

Выражая x_1 из второго уравнения и x_2 из первого уравнения и меняя получающиеся уравнения местами, будем иметь

$$\begin{cases} x_1 &= [-0.1, 0.1] x_1 + [1.8, 2.2] x_2 - [1.6, 2] \cos x_2 + [8, 20], \\ x_2 &= [-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}] x_1 + [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}] x_2 - [\frac{8}{30}, \frac{14}{3}] \frac{1}{1+x_1^2} + [\frac{5}{3}, 5] \end{cases}$$

В дальнейшем принципиален также тот факт, что для $G(a, x)$ существует естественное интервальное расписание по аргументам a и x , т.е. аналитическое выражение для $G(a, x)$ есть конечная комбинация символов переменных x_i , параметров a_j , четырёх арифметических операций и, возможно, ещё элементарных функций типа \sin , \cos , \exp , \log , возведения в целую степень, взятия корня и т.п.

Теорема 9.6.1 Пусть в интервальной системе уравнений

$$x = G(a, x) + b$$

каждый из параметров a_1, a_2, \dots, a_l , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в каждое из компонентных выражений G_1, G_2, \dots, G_n отображения G . Если для некоторого интервального вектора $a \in \mathbb{IR}^l$ допустимое множество решений $\Xi_{tol}(G, a, b)$ этой системы непусто, и, кроме того, для естественного интервального расширения $G(a, x)$ выражения $G(a, x)$ отображение $G: \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$, действующее по правилу

$$x \mapsto G(\text{dual } a, x),$$

есть P -сжатие пространства \mathbb{KR}^n , то интервальная система уравнений

$$x = G(\text{dual } a, x) + b \tag{9.33}$$

имеет единственное правильное формальное решение $x^* \in \mathbb{IR}^n$, которое является внешней интервальной оценкой множества решений $\Xi_{tol}(G, a, b)$, т.е. $x^* \supseteq \Xi_{tol}(G, a, b)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для интервальной системы уравнений

$$x = G(a, x) + b \tag{3}$$

принадлежность точки x допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ влечёт справедливость следующей системы неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) + \underline{b}_i, \\ x_i \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) + \overline{b}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (9.34)$$

Как и при доказательстве Теоремы 5.1.2, мы обоснуем (9.34) путём эквивалентных преобразований с выделяющим предикатом множества решений. Имеем

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(x = G(a, x) + b) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b}) \\ &\quad (x_1 = G_1(a, x) + b_1 \ \& \\ &\quad \dots \ \& \\ &\quad x_n = G_n(a, x) + b_n) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a}) \\ &\quad ((\exists b_1 \in \mathbf{b}_1)(x_1 = G_1(a, x) + b_1) \ \& \\ &\quad \dots \ \& \\ &\quad (\exists b_n \in \mathbf{b}_n)(x_n = G_n(a, x) + b_n)) \}, \end{aligned}$$

где последнее равенство действительно является равенством потому, что для каждого i в выражение $(G_i(a, x) + b_i)$ входит лишь одна из b_i , и эти вхождения в разных выражениях $(G_i(a, x) + b_i)$ не пересекаются друг с другом. Известно, что тогда мы имеем право “проносить” кванторы существования “ \exists ” к отдельным членам конъюнкций [3].

Воспользовавшись эквивалентностями (5.2)–(5.3), мы можем продолжить наши выкладки с выделяющим предикатом следующим об-

разом

$$\begin{aligned}
 \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a}) \right. \\
 &\quad \left((x_1 \geq G_1(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_1) \ \& \right. \\
 &\quad \left. (x_1 \leq G_1(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_1) \ \& \right. \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad \left. (x_n \geq G_n(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_n) \ \& \right. \\
 &\quad \left. (x_n \leq G_n(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_n) \right) \left. \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a}) (x_1 \geq G_1(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_1) \ \& \right. \\
 &\quad (\forall a \in \mathbf{a}) (x_1 \leq G_1(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_1) \ \& \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad (\forall a \in \mathbf{a}) (x_n \geq G_n(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_n) \ \& \\
 &\quad \left. (\forall a \in \mathbf{a}) (x_n \leq G_n(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_n) \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_1(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_1) \ \& \right. \\
 &\quad \left. (x_1 \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_1(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_1) \ \& \right. \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad \left. (x_n \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_n(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_n) \ \& \right. \\
 &\quad \left. (x_n \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_n(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_n) \right\},
 \end{aligned}$$

что совпадает с системой неравенств (5.1).

Если каждый из параметров a_1, a_2, \dots, a_l , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в каждое из компонентных выражений G_1, G_2, \dots, G_n , то для всех $i = 1, 2, \dots, n$

$$\max_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) \quad \text{и} \quad \min_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x)$$

совпадают с

$$\overline{G_i(\mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \underline{G_i(\mathbf{a}, x)}$$

— верхними и нижними концами естественных интервальных расширений $G_i(\mathbf{a}, x)$. В свою очередь, основываясь на свойствах арифметики

Каухера, мы можем представить эти значения в виде

$$\underline{G_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \overline{G_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)}.$$

Итак, если точка \tilde{x} принадлежит допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b} \quad (3)$$

и выполнены условия доказываемой теоремы, касающиеся вхождения в (3) параметров с интервальной неопределённостью, то, в силу (9.34) справедливо включение

$$\tilde{x} \in G(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) + \mathbf{b}.$$

Запустим в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ итерационный процесс по формулам

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \tilde{x}, \quad (9.35)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.36)$$

Нетрудно показать по индукции, что все порождаемые этим процессом векторы содержат точку \tilde{x} . Действительно, для $\mathbf{x}^{(0)}$ это верно по построению, и если $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ для некоторого номера k , то из-за монотонности арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ по включению

$$\tilde{x} \in G(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) + \mathbf{b} \subseteq G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{b} = \mathbf{x}^{(k+1)}.$$

Следовательно, \tilde{x} на самом деле принадлежит всем $\mathbf{x}^{(k)}$, которые поэтому должны быть правильными интервальными векторами, невзирая на возможное наличие в выражении $G(\text{dual } \mathbf{a}, x)$ неправильных интервалов.

Наконец, теорема Шрёдера о неподвижной точке (теорема 8.7.1) приводит нас к выводу о том, что при наложенных на $G(\text{dual } \mathbf{a}, x)$ условиях последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ сходится к некоторому пределу \mathbf{x}^* — единственному формальному решению системы уравнений (9.33). При этом принадлежность $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ влечёт

$$\tilde{x} \in \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Поскольку наше рассуждение справедливо для любой точки \tilde{x} из множества решений $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, то действительно $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{x}^*$. ■

Совершенно сходным образом для управляемого множества решений

$$\Xi_{ctrl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{b} \in \mathbf{b})(\exists \mathbf{a} \in \mathbf{a})(x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}) \},$$

интервальной системы (3) обосновывается

Теорема 9.6.2 Пусть управляемое множество решений $\Xi_{ctrl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений (3) непусто, и, кроме того, для естественного интервального расширения $G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ выражения $G(\mathbf{a}, x)$ отображение $G : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

есть P -сжатие пространства $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$. Тогда система уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \text{dual } \mathbf{b}$$

имеет единственное правильное формальное решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, которое является внешней интервальной оценкой множества решений $\Xi_{ctrl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{ctrl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Отметим, что для объединённого множества решений результат, аналогичный Теоремам 9.6.1 и 9.6.2, известен давно, хотя и формулировался он для классической интервальной арифметики, в совершенно других терминах, и без использования понятия формального решения:

Теорема 9.6.3 (наша переформулировка результатов Теоремы 4 и Следствия 6 из Главы 11 книги [1])

Пусть для естественного интервального расширения $G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ выражения $G(\mathbf{a}, x)$ при некотором $\mathbf{a} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^l$ отображение $G : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

является P -сжатием пространства $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$. Тогда интервальная система уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) \tag{9.37}$$

имеет единственное правильное формальное решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, для которого справедливо соотношение

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{a})(x = G(\mathbf{a}, x)) \} \subseteq \mathbf{x}^*.$$

Иными словами, в этом случае формальное решение системы уравнений (9.37) является внешней интервальной оценкой её объединённого множества решений.

Как видим, живые классики интервального анализа Г. Алефельд и Ю. Херцбергер ещё в далекие 70-е годы, выражаясь словами одного из героев Мольера, “говорили прозой, но совершенно не подозревали об этом”!

Как добиться того, чтобы фигурирующие в Теоремах 9.6.1–9.6.3 интервальные отображения

$$x \mapsto G(\text{dual } \mathbf{a}, x) \quad \text{и} \quad x \mapsto G(\mathbf{a}, x)$$

являлись бы сжатиями пространства \mathbb{KR}^n . Иногда здесь помогает применение процедуры, аналогичной предобуславливанию интервальных линейных систем из §9.5 — линейное комбинирование уравнений исходной системы (2) с некоторыми специально подобранными коэффициентами.

Пусть исходная система

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \mathbf{b}_1, \\ f_2(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \mathbf{b}_2, \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \mathbf{b}_m, \end{array} \right. \quad (1)$$

преобразуется таким образом, что новое i -ое, $i = 1, 2, \dots, n$, уравнение

$$\tilde{f}_i(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_i$$

есть линейная комбинация 1-го, 2-го, ..., n -го уравнений системы (1) с коэффициентами $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}$ соответственно, полученное в соответствии с правилами из §1.2а. Если матрица $\Lambda = (\lambda_{ij})$, составленная из коэффициентов λ_{ij} , является неособенной, то получающаяся новая система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{f}_1(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \tilde{\mathbf{b}}_1, \\ \tilde{f}_2(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \tilde{\mathbf{b}}_2, \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \tilde{\mathbf{b}}_m, \end{array} \right.$$

эквивалентна исходной, но путём подходящего выбора матрицы коэффициентов Λ иногда можно действительно сделать сжатиями отображения G из Теорем 9.6.1–9.6.3. Аналогично линейному случаю, подробно изученному в §9.5, мы также будем называть это преобразование исходной интервальной системы уравнений *предобуславливанием* с матрицей Λ .

Если матрица Липшица P отображения F является сильно несобственной интервальной матрицей, то, домножая (2), например, на обратную к средней $(\text{mid } A)^{-1}$, можно надеяться, что после приведения к виду (3) мы действительно получим сжимающее отображение G .

В качестве примера вновь рассмотрим интервальную систему уравнений (9.32).

Комментарий к Главе 9

В книге Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [1] предобуславливание обратной средней матрицей называется “методом Хансена”.

Литература к главе 9

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] ГОЛУВ ДЖ., ВАН ЛОАН Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1998.
- [3] КЛИНИ С.К. *Математическая логика*. – Москва: Мир, 1973.
- [4] УИЛКИНСОН ДЖ.Х. *Алгебраическая проблема собственных значений*. – Москва: Наука, 1970.
- [5] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – Москва: Мир, 1989.
- [6] CAPRANI O., MADSEN K. Iterative methods for interval inclusion of fixed points // *BIT*. – 1978. – Vol. 18. – P. 42–51.
- [7] GAY D.M. Solving interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19, No. 4. – P. 859–870.
- [8] JERRELL M.E. Applications of interval computations to regional economic input-output models // *Applications of Interval Computations* / Kearfott R.B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 133–143.

- [9] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [10] LAKEYEV A.V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, №1. – С. 12–23.
- [11] SAINZ M.Á., GARDEÑES E., JORBA L. Interval estimation of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 4. – P. 283–305.
- [12] SHARY S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Developments in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 323–335.
- [13] SHARY S.P. Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 2. – P. 141–155.

Глава 10

Оптимальное внешнее оценивание множеств решений

Цель настоящей Главы — развитие эффективных численных алгоритмов и общей методологии вычисления оптимальных решений “внешней задачи” для интервальных систем уравнений, главным образом, линейных.

При внешнем оценивании множеств решений особую ценность и в теории и для практики имеет получение интервального вектора, включающего решение и имеющего наименьшую возможную ширину, или, что эквивалентно, нахождение оптимальных (точных) покоординатных оценок множеств решений. Но подобная усиленная постановка “внешней задачи” оказалась крепким орешком. Даже для объединённых множеств решений большинство разработанных до сих пор методов позволяют эффективно находить интервальный вектор, гарантированно содержащий множество, но лишь немногие из практических алгоритмов обеспечивают в общем случае его оптимальность. При этом все они имеют, в конечном счёте, переборный характер и потому чрезвычайно трудоёмки. Основным итогом этой главы книги — построение двух классов алгоритмов, *методов дробления решений* и *методов дробления параметров* (иначе называемых ещё *PSS-алгоритмами* и *PPS-алгоритмами*) для нахождения именно оптимальных или близких к оптимальным решений “внешней задачи” для ИСЛАУ и некоторых нелинейных систем

уравнений.

Решающей предпосылкой для их создания послужило представление “внешней задачи” как задачи конечномерной глобальной оптимизации. При этом в развиваемых ниже алгоритмах вместо традиционной формулировки “внешней задачи” предлагается перейти к вычислению $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ для каждого отдельного $\nu = 1, 2, \dots, n$. Мы доказываем сходимость развиваемых алгоритмов и рассматриваем некоторые из их обобщений.

10.1 Пассивный переборный алгоритм

Как мы установили в Предложении 5.2.5, для интервальных линейных систем вида (5) пересечение множеств АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов \mathcal{O} пространства \mathbb{R}^n является выпуклым многогранным множеством (возможно, пустым). Таким образом, вычисление величин

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}\}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (10.1)$$

— это задача линейного программирования, которая может быть эффективно решена каким-либо из известных методов, например, хорошо разработанным симплекс-методом или современным методом Дикина-Кармаркара. Далее нужно перебрать все ортанты и среди полученных величин (10.1) выбрать наименьшую. В общем случае этот подход непрактичен из-за катастрофического роста вычислительной сложности, но при небольших размерностях систем и для некоторых специальных типов ИСЛАУ (например, когда а priori известно в каких ортантах расположено множество решений) его вполне можно применять для практического решения “внешней” задачи (5.24). Для частного случая объединённого множества решений ИСЛАУ методы подобного типа рассматривались, в частности, в [22, 49].

Мы выйдем, аналогично тому, как это сделано в работах [22, 49], каноническую форму задачи линейного программирования, которую необходимо решать для каждого из ортантов \mathbb{R}^n . Воспользуемся характеристикой Рона (Теорема 5.2.4), дающей описание точек множеств АЕ-решений через неравенства с модулями: принадлежность $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна неравенству

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall),$$

или

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} \leq (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}), \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot x + \text{mid } \mathbf{b} \leq (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}), \end{cases}$$

что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| \\ \leq \text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}), \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| \\ \leq -\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}). \end{cases}$$

Правые части полученных неравенств можно упростить и далее, вспомнив определение характеристического вектора \mathbf{b}^c :

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}) &= \overline{\mathbf{b}^c}, \\ -\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}) &= \overline{(-\mathbf{b}^c)}. \end{aligned}$$

Пусть y есть вектор абсолютных значений компонент x , т.е. $y_i = |x_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$, и

$$S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \quad s_i = \text{sgn } x_i = \pm 1,$$

— диагональная матрица, образованная знаками компонент внутренних точек рассматриваемого ортанта \mathcal{O} , т.е. $x = Sy$ для $x \in \mathcal{O}$. При этом условие

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}$$

выполнено тогда и только тогда, когда существует $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий неравенствам

Таблица 10.1. Пассивный переборный алгоритм оптимального решения внешней задачи для ИСЛАУ

Вход

Интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Натуральный индекс $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Выход

Оптимальная оценка y снизу по ν -ой координате для множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Алгоритм

$y \leftarrow +\infty$;

DO FOR $i = 0$ TO $2^n - 1$

 решить задачу линейного

 программирования (10.2)–(10.3),

 вычисляя $z \leftarrow \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}_i\}$;

 IF ($y > z$) $y \leftarrow z$

END DO

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \text{mid } \mathbf{A} \cdot S - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot S - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \end{array} \right) y \leq \left(\begin{array}{c} \overline{b^c} \\ (-b^c) \end{array} \right), \\ y \geq 0. \end{array} \right. \quad (10.2)$$

Следовательно, значение $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}\}$ является решением задачи линейного программирования с ограничениями (10.2) и минимизируемым функционалом

$$c^\top y, \quad c^\top = (0, \dots, 0, s_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (10.3)$$

Каждый ортант пространства \mathbb{R}^n однозначно задаётся последовательностью знаков компонент своих внутренних точек. Нам будет удобно занумеровать все ортанты \mathbb{R}^n целыми числами от 0 до $2^n - 1$, сопоставив каждому из них n -значное двоичное число, которое получается из набора знаков компонент заменой минуса нулем, а плюса единицей. Итак, искомая оптимальная (точная) оценка значения $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ может быть найдена с помощью алгоритма, псевдокод которого приведён в Табл. 10.1.

Определение 10.1.1 [7, 15] *Алгоритм называется пассивным, если при проведении любого своего информационного вычисления (шага) он не использует информацию, полученную на своих предыдущих вычислениях.*

Алгоритм называется адаптивным, если при выполнении любого своего информационного вычисления он в той или иной форме использует информацию о предшествующих информационных вычислениях (шагах).

Итак, пассивные алгоритмы — это алгоритмы с жёстко заданной программой вычислений, которая не зависит от индивидуальных особенностей решаемой задачи. Напротив, адаптивные алгоритмы позволяют гибко подстраивать процесс решения под каждую конкретную задачу, а потому, при прочих равных условиях, они, несомненно, более предпочтительны в вычислительной практике. Но, как видим, представленный в этом параграфе простейший метод оптимального внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ является пассивным и в этом заключается один из его главных недостатков.

10.2 Метод Янссона

Если в интервальной линейной системе ширина матрицы и ширина вектора правой части стремятся к нулю, то и её множество решений стягивается в точку, которая в случае общего положения находится внутри одного определённого ортанта пространства \mathbb{R}^n . Если же матрица и правая часть имеют ненулевую ширину, то множество решений может пересекать сразу несколько ортантов пространства, хотя полное их количество может быть не слишком большим, гораздо меньшим общего числа ортантов 2^n .

В этой ситуации большую часть времени своей работы алгоритм предыдущего параграфа потратит на проверку того, что для почти всех ортантов их пересечение с множеством решений пусто. Возникает естественный вопрос: нельзя ли модифицировать подход §10.1 так, чтобы он исследовал в точности лишь те ортанты \mathbb{R}^n , которые имеют непустое пересечение с множеством решений? Такой метод был развит Х. Янссоном в работе [33], и его описанию мы посвящаем настоящий параграф.

Подход Янссона опирается на следующую

Теорема 10.2.1 (альтернатива Янссона)

Пусть для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ объединенное множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто. Тогда верно одно и только одно из следующих утверждений:

- (i) *множество $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ компактно и связно, а интервальная матрица \mathbf{A} — неособенная;*
- (ii) *множество $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ неограничено, каждая его компонента связности неограничена, а интервальная матрица \mathbf{A} — особенная.*

Немедленным следствием альтернативы Янссона является то обстоятельство, что множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не может быть объединением как ограниченных, так и неограниченных компонент связности. Поэтому всякий алгоритм, вычисляющий оптимальные границы только одной какой-нибудь компоненты связности множества решений оказывается пригодным для решения внешней задачи для ИСЛАУ с неособенной матрицей.

Для более формального описания метода введём

Определение 10.2.1 Графом множества решений *интервальной системы линейных алгебраических уравнений* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ называется граф, с множеством вершин

$$V := \{s \in \{-1, 1\}^n \mid \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}(s) \neq \emptyset\}$$

и множеством ребер

$$E := \left\{ (s, t) \mid \begin{array}{l} s, t \in V, \text{ } s \text{ и } t \text{ различаются} \\ \text{ровно в одной компоненте} \end{array} \right\}.$$

10.3 Методика Рона

Вспомним характеризацию Оеттли-Прагера объединённого множества решений ИСЛАУ:

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad |(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}.$$

Это — система неравенств, но оказывается, что значения x , обращающие её в равенство, обладают рядом замечательных свойств. Мы будем называть их *экстремальными решениями*.

Условимся обозначать через $\text{Sgn}(x)$ диагональную матрицу

$$\text{diag} \{ \text{sgn } x_1, \text{sgn } x_2, \dots, \text{sgn } x_n \},$$

образованную знаками компонент вектора x . Тогда система уравнений

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b},$$

определяющая экстремальные решения, может быть переписана в следующем эквивалентном виде

$$\text{Sgn}((\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}) \cdot |(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{Sgn}(x) \cdot x + \text{rad } \mathbf{b},$$

или

$$\text{Sgn}(y) \cdot |(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{Sgn}(x) \cdot x + \text{rad } \mathbf{b},$$

где $y = (\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}$. Учитывая, что матрицы знаков $\text{Sgn}(x)$ и $\text{Sgn}(y)$ идемпотентны, получим отсюда, что

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} = \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{Sgn}(x) \cdot x + \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{b},$$

т.е.

$$(\text{mid } \mathbf{A} - \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{Sgn}(x)) x = \text{mid } \mathbf{b} + \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{b}.$$

Так как имеется 2^n матриц знаков $\text{Sgn}(x)$ и ещё 2^n матриц знаков $\text{Sgn}(y)$, то из приведённых выкладок следует, что всего экстремальных решений существует не более чем $2^n \cdot 2^n = 4^n$ штук, т.е. гораздо меньше, чем решений крайних вещественных систем. Кроме того, множество экстремальных решений является подмножеством множества решений крайних вещественных систем. Тем не менее, выпуклая оболочка этого множества совпадает с выпуклой оболочкой всего множества решений!

Теорема 10.3.1 (теорема Рона об экстремальных решениях)

Для любой матрицы знаков $\text{Sgn}(y)$ система уравнений имеет ровно одно (экстремальное) решение. Выпуклая оболочка всех экстремальных решений совпадает с выпуклой оболочкой множества решений интервальной линейной системы.

Доказательство. Так как экстремальные решения являются решениями некоторых точечных систем уравнений $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$, то включение

$$\text{conv } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \text{conv } \{x_e \mid e \in \mathcal{E}\}$$

очевидно.

Для доказательства обратного включения возьмём какое-нибудь решение $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и покажем, что оно представимо в виде выпуклой комбинации экстремальных решений, т.е. существует набор неотрицательных коэффициентов λ_e , $e \in \mathcal{E}$, таких что

$$\tilde{x} = \sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e x_e \quad (10.4)$$

и

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e = 1.$$

Предположим, что решение \tilde{x} соответствует матрице $\tilde{A} \in \mathbf{A}$ и вектору правой части $\tilde{b} \in \mathbf{b}$. Тогда в силу невырожденности \tilde{A} условие (10.4) равносильно

$$\tilde{A} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e x_e \right) = \tilde{b},$$

так что искомые коэффициенты выпуклой комбинации (10.4) существуют тогда и только тогда, когда система уравнений относительно λ_e

$$\begin{cases} \sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e (\tilde{A}x_e) = \tilde{b}, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e = 1. \end{cases}$$

Вспомним классическую лемму Фаркаша [16] (называемую также леммой Минковского-Фаркаша [11]). Пусть C и d — соответственно матрица и вектор-столбец. Существование неотрицательного решения $x \geq 0$ системы $Cx = d$ эквивалентно тому, что для любой вектор-строки y , удовлетворяющей $yA \geq 0$, имеет место $yb \geq 0$. Следовательно, нам достаточно показать, что для $p_0 \in \mathbb{R}^1$ и $p \in \mathbb{R}^n$ истинность соотношения

$$p^\top (\tilde{A}x_e) + p_0 \geq 0$$

при любом $e \in \mathcal{E}$ необходимо влечёт

$$p^\top b + p_0 \geq 0.$$

■

10.4 Методы дробления решений

В этом параграфе мы представляем класс *методов дробления решений* (называемых также *PSS-методами*) для вычисления оптимальных внешних оценок множеств решений интервальных линейных систем уравнений вида

$$Ax = b, \tag{5}$$

доказываем их сходимость, демонстрируем результаты численных экспериментов, а также обсуждаем их сильные стороны и недостатки.

Мы будем считать уже известным некоторое начальное внешнее приближение — интервальный вектор $V \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(A, b)$. Он может быть найден каким-либо из алгоритмов для внешнего оценивания объединённого множества решений, представленных, к примеру, в Главе 7, и его размеры не играют в дальнейшем существенной роли, хотя выбор более “узкого” начального приближения способствует более быстрой сходимости развиваемых нами алгоритмов.

Матрица \mathbf{A} в подобных постановках обычно предполагается квадратной и неособенной, и таким образом неявно требуют ограниченности множества решений. Мы не будем стеснять наши рассмотрения этим условием и допустим возможность особенной или прямоугольной матрицы \mathbf{A} , но в случае неограниченного множества решений постановка задачи будет слегка изменена. Именно, удобно считать, что множество, покоординатные оценки которого мы ищем, является пересечением истинного множества решений ИСЛАУ с некоторым заранее заданным интервальным вектором. Естественно, что при этом без потери общности можно полагать его равным интервальному вектору начального приближения \mathbf{V} .

10.4a Решение одномерных включений

Цель этого пункта — решение одномерных интервальных включений вида

$$\mathbf{a}t \subseteq \mathbf{b}, \quad (10.5)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$, т.е. нахождение всех $t \in \mathbb{R}$, которые обращают (10.5) в верное включение.

Если $0 \notin \mathbf{a}$, то в полной арифметике Каухера существует алгебраически обратный к \mathbf{a} элемент

$$\mathbf{a}^{-1} = [1/\bar{\mathbf{a}}, 1/\underline{\mathbf{a}}],$$

и потому решение включения (10.5) можно найти домножением обеих его частей на \mathbf{a}^{-1} : оно равно в точности $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$. Далее нам осталось поэтому рассмотреть лишь случай, когда $\underline{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}} < 0$, т.е. когда в правильной проекции интервала \mathbf{a} содержится нуль.

Если $t \geq 0$, то $\mathbf{a}t = [\underline{\mathbf{a}}t, \bar{\mathbf{a}}t]$, а если $t \leq 0$, то $\mathbf{a}t = [\bar{\mathbf{a}}t, \underline{\mathbf{a}}t]$, и потому решением включения (10.5) является объединение решений двух систем неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{a}}t \geq \underline{\mathbf{b}}, \\ \bar{\mathbf{a}}t \leq \bar{\mathbf{b}}, \\ t \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{a}}t \geq \underline{\mathbf{b}}, \\ \underline{\mathbf{a}}t \leq \bar{\mathbf{b}}, \\ t \leq 0 \end{array} \right. \quad (10.6)$$

Далее, решение выписанных систем неравенств также не представляет трудностей и легко может быть алгоритмизовано для реализации на компьютере. Фактически, решение каждой из простейших систем

неравенств (10.6) сводится к последовательному рассмотрению следующих случаев:

$$\underline{a} < 0 < \overline{a},$$

$$\overline{a} < 0 < \underline{a},$$

$$0 = \underline{a} < \overline{a},$$

$$0 = \overline{a} < \underline{a},$$

$$\underline{a} < \overline{a} = 0,$$

$$\overline{a} < \underline{a} = 0,$$

$$\underline{a} = \overline{a} = 0,$$

Наконец, после отдельного решения каждой из систем (10.6) полный ответ получается объединением результатов.

В заключение отметим следующий принципиальный факт: если у интервала \mathbf{a} концы — не нули, то точки \underline{t} и \overline{t} , определяющие решение включения (10.5), являются непрерывными (локально) функциями от интервалов \mathbf{a} и \mathbf{b} . То же верно и при более ограничительном условии, когда концом \mathbf{a} зафиксирован нуль, но у интервала \mathbf{b} концы ненулевые.

10.4б Основной алгоритм

Обозначим через l прямую линию, имеющую в пространстве \mathbb{R}^n параметрическое уравнение

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & r_1, \\ & \vdots & \\ x_{\nu-1} & = & r_{\nu-1}, \\ x_{\nu} & = & t, \\ x_{\nu+1} & = & r_{\nu+1}, \\ & \vdots & \\ x_n & = & r_n \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R} - \text{параметр}), \quad (10.7)$$

и параллельную ν -ой координатной оси, где $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ — фиксированный индекс. Каждая такая прямая полностью определяется $(n-1)$ -мерным вещественным вектором $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$,

и, чтобы явно указать её параметры, мы иногда будем обозначать эту прямую через $l(r)$. Пусть также

$$\Omega(r) = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\}$$

— наименьшее значение ν -ой координаты точек из пересечения $l(r)$ с множеством решений ИСЛАУ (5), а если $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r) = \emptyset$, то полагаем $\Omega(r) = +\infty$. Каким образом можно вычислять значения $\Omega(r)$?

Чтобы ответить на этот вопрос “подставим” параметрическое уравнение прямой (10.7) в интервальное включение

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c, \quad (5.16)$$

характеризующее в силу Теоремы 5.2.3 точки множества $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. При этом (5.16) превратиться в систему m линейных включений с одной единственной переменной t и интервальными коэффициентами:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{a}_{1\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_1^c, & \\ \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{m\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_m^c, & \end{array} \right. \quad (10.8)$$

или, в матричной форме,

$$\mathbf{A}_{:, \nu}^c t + \tilde{\mathbf{A}}^c r \subseteq \mathbf{b}^c, \quad (10.9)$$

где $\mathbf{A}_{:, \nu}^c$ — ν -ый столбец матрицы \mathbf{A}^c ,
 $\tilde{\mathbf{A}}^c$ — интервальная $m \times (n-1)$ -матрица,
полученная из \mathbf{A}^c удалением ν -ого столбца.

Содержательный смысл этой процедуры состоит в следующем. При подстановке параметрического уравнения (10.7) в точечную систему $Ax = b$ мы получаем некоторую систему из m одномерных уравнений, которая совпадает по структуре с (10.8), но имеет вещественные коэффициенты. Далее варьируем элементы a_{ij} матрицы и элементы b_i вектора правой части в пределах заданных для них границ \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_i соответственно. Ясно, что множество всех полученных таким образом точечных систем уравнений образует в точности (10.8)–(10.9).

Множество решений каждого отдельно взятого включения из этой системы мы научились находить в предыдущем пункте. Следовательно, решив порознь все одномерные включения, образующие систему (10.8), и взяв пересечение их множеств решений друг с другом и с \mathbf{V}_ν , мы получим в точности значения ν -ой координаты точек из $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l$. Это следует из того, что в пределах всех интервалов, входящих в систему (10.8), соответствующие коэффициенты варьируются независимо друг от друга (как и в исходной ИСЛАУ). Заметим, что полученное множество может оказаться пустым, если система (10.8) несовместна, или несвязным (как показано на Рис. 10.1), если некоторые уравнения из (10.8) имеют своими множествами решений объединения двух непересекающихся лучей вида $]-\infty, p] \cup [q, +\infty[$ с $p < q$.

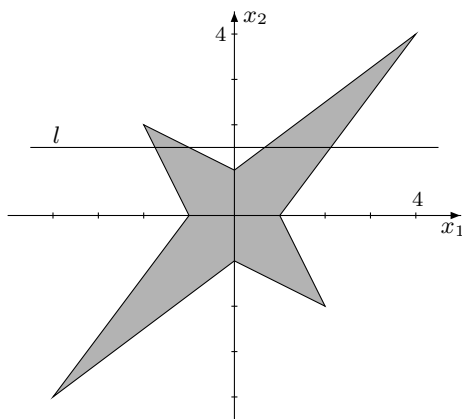


Рис. 10.1. Объединённое множество решений системы (10.11).

Для понимания принципа работы методов дробления решений фактом фундаментальной значимости является переформулировка “внешней задачи” для ИСЛАУ как некоторой задачи глобальной оптимизации.

ции. Именно,

$$\begin{aligned}
 & \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\} \\
 &= \min\left\{x_\nu \mid x \in \bigcup_{l \cap V \neq \emptyset} (\Xi_{\alpha\beta} \cap l)\right\} \\
 &= \min\left\{\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r)\} \mid \right. \\
 &\quad \left. r \in (V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)\right\} \\
 &= \min\{\Omega(r) \mid r \in (V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)\},
 \end{aligned} \tag{10.10}$$

т.е. нахождение ν -ой координатной оценки точек множества решений сводится к задаче минимизации целевой функции $\Omega(r)$ на некотором компакте $(V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)$. Мы уже видели, как вычисляются значения $\Omega(r)$, так что может сложиться впечатление, будто далее внешняя задача успешно решается применением какого-либо из хорошо разработанных методов глобальной оптимизации. Но рассматриваемая нами целевая функция $\Omega(r)$ обладает неприятной особенностью: в общем случае она не является даже непрерывной. Например, для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \tag{10.11}$$

(её объединённое множество решений изображено на Рис. 10.1), при оценивании $\min x_1$ мы имеем $r = x_2$ и

$$\lim_{r \rightarrow 2-0} \Omega(r) = -2 \neq \frac{4}{3} = \lim_{r \rightarrow 2+0} \Omega(r)$$

Более того, $\Omega(r)$ в общем случае претерпевает ещё и разрывы второго рода (в $+\infty$).

Эти обстоятельства решающим образом суживают набор алгоритмов глобальной оптимизации, применимых к задаче (10.10). Например, популярные методы неравномерных покрытий из [5, 14] очевидным образом неприменимы для решения (10.10), так как они существенно основываются на липшицевой непрерывности целевой функции.

Тем не менее, мы продемонстрируем, что оптимальное решение задачи внешнего оценивания множеств решений может быть вычислено интервальным алгоритмом глобальной оптимизации, основанным на технике “ветвей и границ” и описанном нами в §3.6. Нам нужно лишь предъявить конструктивный способ вычисления миноранты по области для функции $\Omega(r)$ (т.е. нижний конец её интервального расширения). Иными словами, для любого $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$ мы должны уметь оценивать

$$\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{r} \} = \min \left\{ \bigcup_{r \in \mathbf{r}} \{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) \} \right\} \quad (10.12)$$

снизу.

Простейший способ сделать это состоит в следующем. Мы поступаем с исходной интервальной системой (5) в точности так же, как в случае определения $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l$, но теперь вместо переменных $x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n$ в систему (5) подставляются интервалы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n$, а не вещественные числа $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$. Далее, как и раньше, мы вычисляем пересечение \mathcal{S} всех множеств решений m штук одномерных интервальных включений, образующих систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{1\nu}^\epsilon t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}^\epsilon \mathbf{r}_j \subseteq \mathbf{b}_1^\epsilon, \\ \dots \dots \dots \\ \mathbf{a}_{m\nu}^\epsilon t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}^\epsilon \mathbf{r}_j \subseteq \mathbf{b}_m^\epsilon, \end{array} \right. \quad (10.13)$$

или

$$\mathbf{A}_\nu^\epsilon t + \tilde{\mathbf{A}}^\epsilon \mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}^\epsilon$$

в обозначениях (10.9). Нетрудно понять, что

$$\mathcal{S} \supseteq \bigcup_{r \in \mathbf{r}} \{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) \},$$

поскольку

$$\left(\begin{array}{c} \text{множество решений} \\ \text{включения } \mathbf{A}_\nu^\epsilon t + \tilde{\mathbf{A}}^\epsilon \mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}^\epsilon \end{array} \right) \subseteq \left(\begin{array}{c} \text{множество решений} \\ \text{включения } \mathbf{A}_\nu^\epsilon t + \tilde{\mathbf{A}}^\epsilon \mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}^\epsilon \end{array} \right)$$

для всех $r \in \mathbf{r}$. Следовательно,

$$\Omega(\mathbf{r}) = \min\{\mathcal{S} \cap \mathbf{V}_\nu\} \quad (10.14)$$

даёт требуемую нижнюю оценку для (10.12). Если же система (10.13) несовместна для некоторого \mathbf{r} (это соответствует ситуации $\Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) = \emptyset$ для всех $r \in \mathbf{r}$), то полагаем $\Omega(\mathbf{r}) = +\infty$.

Мы используем обозначение $\Omega(\mathbf{r})$ чтобы подчеркнуть, что реализованная нами процедура является, в действительности, *естественным интервальным расширением* точечной функции $\Omega(r)$. Мы даже введём в рассмотрение функцию $\Omega : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ с областью значений в полурасширенной числовой оси $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и областью определения

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \mathbf{r} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n) \}. \quad (10.15)$$

Следует отметить, что

$$\Omega(\mathbf{r}') \geq \Omega(\mathbf{r}'') \quad \text{для } \mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}'',$$

и оценивание величины (10.12) посредством $\Omega(\mathbf{r})$ становится все более точным при уменьшении ширины вектора \mathbf{r} , т.е. при уменьшении $\|\text{rad } \mathbf{r}\|$, если некоторые естественные ограничения наложены на $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{V}, \mathbf{r}$. Это утверждение будет детально обсуждаться в §10.4в.

Теперь все готово для конструирования алгоритма, вычисляющего $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$. Это итерационная процедура для последовательного улучшения оценки этого минимума снизу, оформленная в соответствии с широко известной стратегией “метода ветвей и границ”, аналогично тому, как это сделано в интервальных методах глобальной оптимизации из Главы 3. В данном случае

“ветви” образуются в результате бисекции исходного $(n-1)$ -мерного бруса $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ на более узкие брусы \mathbf{P} ,

нахождение “границ” — это вычисление значений $\Omega(\mathbf{P})$, т.е. ν -ой координатной оценки точек из $\{\Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$.

Алгоритм порождает список \mathcal{L} , состоящий из пар $(\mathbf{P}, \Omega(\mathbf{P}))$, таких что

$$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n),$$

и упорядоченный по возрастанию второго поля. Первая пара $(\mathbf{Q}, \Omega(\mathbf{Q}))$ списка \mathcal{L} играет особую роль в наших рассуждениях. Мы будем называть её, а также соответствующие брус \mathbf{Q} и оценку $\Omega(\mathbf{Q})$, *ведущими*.

Таблица 10.2. Простейший метод дробления решений
для оптимального решения ИСЛАУ

Вход

Интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Брус начального приближения $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Заданная точность $\epsilon > 0$.

Выход

Оценка m^* с точностью ϵ для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$.

Алгоритм

присваиваем $\mathbf{Q} \leftarrow (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ и $q \leftarrow \underline{\mathbf{V}}_\nu$;

инициализируем список $\mathcal{L} \leftarrow \{(\mathbf{Q}, q)\}$;

DO WHILE (wid($\Omega(\mathbf{Q})$) $\geq \epsilon$)

выбираем компоненту k , по которой брус \mathbf{Q} имеет
наибольшую длину, т.е. $\text{wid } \mathbf{Q}_k = \max_i \text{wid } \mathbf{Q}_i$;

рассекаем брус \mathbf{Q} по k -ой координате пополам
на брусы \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'' , такие что

$$\mathbf{Q}' \leftarrow (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, [\underline{\mathbf{Q}}_k, \text{mid } \mathbf{Q}_k], \mathbf{Q}_{k+1}, \dots, \mathbf{Q}_n),$$

$$\mathbf{Q}'' \leftarrow (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, [\text{mid } \mathbf{Q}_k, \overline{\mathbf{Q}}_k], \mathbf{Q}_{k+1}, \dots, \mathbf{Q}_n);$$

вычисляем $\Omega(\mathbf{Q}')$ и $\Omega(\mathbf{Q}'')$;

присваиваем $q' \leftarrow \underline{\Omega(\mathbf{Q}')}$ и $q'' \leftarrow \underline{\Omega(\mathbf{Q}'')}$;

удаляем запись (\mathbf{Q}, q) из списка \mathcal{L} ;

помещаем записи (\mathbf{Q}', q') и (\mathbf{Q}'', q'') в рабочий список \mathcal{L}
в порядке возрастания второго поля;

обозначаем первую запись списка через (\mathbf{Q}, q) ;

END DO

$m^* \leftarrow q$;

Перед началом работы алгоритма список \mathfrak{L} содержит единственную пару $((V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n), \underline{V}_\nu)$, а далее выполняется последовательность шагов, описанных в Табл. 10.2.

Таким образом, выполнение алгоритма имеет результатом неубывающую (начиная со второго шага) последовательность ведущих оценок, которые, как следует из общей теории §3.6, приближают искомый $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$ снизу. В следующем параграфе мы докажем, что эта последовательность сходится к точному значению $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$. Методы решения “внешней задачи” для интервальных систем уравнений, аналогичные только что построенному и основанные на адаптивном дроблении множества решений мы будем называть *методами дробления решений* или *PSS-методами* (от английской фразы *Partitioning Solution Set*).

10.4в Доказательство сходимости

Доказательство сходимости простейшего метода дробления решений является нетривиальным в отличие от доказательств сходимости аналогичных интервальных методов глобальной оптимизации из Главы 3, поскольку целевая функция $\Omega(r)$ в общем случае разрывна. Для разрывных целевых функций методы глобальной оптимизации рассматриваемого нами типа уже исследовались Ю.Г. Евтушенко и В.А. Раткиным [6] и Х. Рачеком [50], но полученные ими критерии сходимости напрямую не применимы к нашей ситуации.

Пусть E — топологическое пространство. Напомним, что функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу* в точке $y \in E$, если $f(y) = \underline{\lim}_{x \rightarrow y} f(x)$. Функция называется *полунепрерывной снизу* на E , если она полунепрерывна в любой точке E . Эквивалентным определением этого свойства является, в частности, следующее [8]: функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на E тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ лебеговское множество $\{f(x) \leq c\}$ замкнуто в E .

Предложение 10.4.1 Пусть интервальная линейная алгебраическая

система $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и интервальный вектор $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ таковы, что

$$(NZ) \left\{ \begin{array}{l} \text{для каждого } i = 1, 2, \dots, m \text{ выполнено свойство:} \\ \quad \text{нуль не является концом } \mathbf{a}_{i\nu} \\ \quad \text{или} \\ \text{для каждого } \mathbf{r} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n) \\ \quad \text{нуль не является концом интервала} \\ \quad \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j \right). \end{array} \right.$$

Тогда функция $\Omega : \mathbb{R}^{n-1} \supseteq \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая посредством (10.14)–(10.15) полунепрерывна снизу.

Доказательство. Пусть \mathcal{B} обозначает множество всех целых индексов $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ для которых $0 \notin \mathbf{a}_{i\nu}$, так что множества решений соответствующих уравнений из (10.13) являются *ограниченными* интервалами $[\underline{t}_i, \bar{t}_i]$. При этом мы полагаем для удобства $\underline{t}_0 = \underline{\mathbf{V}}_\nu$ и $\bar{t}_0 = \bar{\mathbf{V}}_\nu$, так что \mathcal{B} всегда непусто. Обозначим также $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \dots, m\} \setminus \mathcal{B}$, и пусть множества $] -\infty, \underline{t}_i] \cup [\bar{t}_i, +\infty[$ для $i \in \mathcal{U}$ представляют *неограниченные* множества решений уравнений из (10.13) с $0 \in \mathbf{a}_{i\nu}$. При этом мы предполагаем, что $\underline{t}_i = -\infty$ или $\bar{t}_i = +\infty$, когда соответствующее множество решений есть луч в \mathbb{R} , и $\underline{t}_i = \bar{t}_i = 0$ когда множество решений совпадает со всей числовой осью \mathbb{R} .

На интервальных пространствах стандартная топология задается хаусдорфовой метрикой, относительно которой непрерывны все интервальные арифметические операции (см. Главу 1). Следовательно, \underline{t}_i и \bar{t}_i , $i \in \mathcal{B}$, являясь непрерывными функциями вектора $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n)^\top$ из (10.13). Но и в случае $0 \in \mathbf{a}_{i\nu}$ вещественные числа \underline{t}_i и \bar{t}_i определяющие множество решений одномерного уравнения

$$\mathbf{a}_{i\nu} t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j = \mathbf{b}_i,$$

зависят от интервального вектора $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n)^\top$ также непрерывным образом, если

$$\underline{\mathbf{a}}_{i\nu} < 0 < \bar{\mathbf{a}}_{i\nu},$$

либо если интервал

$$\left(b_i - \sum_{j \neq \nu}^n a_{ij} r_j \right)$$

не имеет одним из своих концов нуль. Это следует из формул §10.4а и обеспечивается условием (NZ) Предложения 10.4.1. Следовательно, мы далее можем считать, что значения $\max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i$, $\min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i$, $\max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i$, $\min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i$ являются непрерывными функциями вектора \mathbf{r} из (10.13) (как обычно, полагаем $\min \emptyset = +\infty$, $\max \emptyset = -\infty$).

Покажем далее, что эффективная область определения функции $\Omega(\mathbf{r})$, т.е. множество

$$\text{dom } \Omega = \{ \mathbf{r} \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-1} \mid \Omega(\mathbf{r}) < +\infty \},$$

является компактом. Принадлежность вектора \mathbf{r} множеству $\text{dom } \Omega$ означает совместность соответствующей системы (10.13). Тогда, во-первых, непусто пересечение $\bigcap_{i \in \mathcal{B}} [\underline{t}_i, \bar{t}_i]$ всех ограниченных решений уравнений из (10.13). Это эквивалентно тому, что

$$\min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i.$$

Во-вторых, $\bigcap_{i \in \mathcal{B}} [\underline{t}_i, \bar{t}_i]$ имеет непустое пересечение с неограниченными решениями одномерных уравнений системы (10.13), т.е. с $]-\infty, \underline{t}_i] \cup [\bar{t}_i, +\infty[$, $i \in \mathcal{U}$. Последнее эквивалентно условию

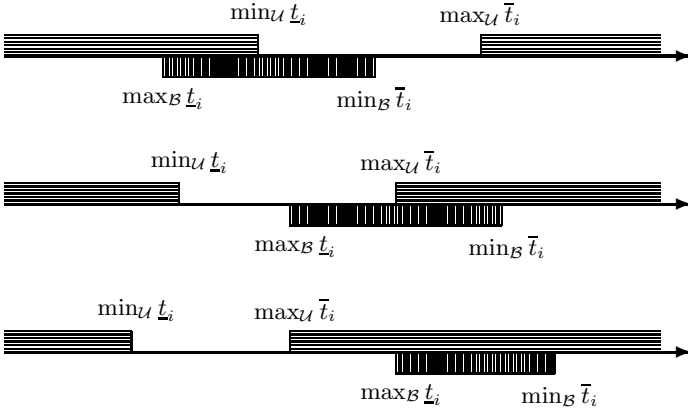
$$\left(\min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right) \vee \left(\max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \leq \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i \right),$$

где \vee — логическая дизъюнкция. В целом множество $\text{dom } \Omega$ описывается условием

$$\min \left\{ \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i - \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max \left\{ \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i - \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i - \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\} \right\} \geq 0.$$

Поскольку функция в левой части этого неравенства непрерывна по \mathbf{r} , мы тем самым доказали замкнутость множества $\text{dom } \Omega$. Кроме того, $\text{dom } \Omega$ очевидно ограничено, а потому компактно.

Как мы уже отмечали, в общем случае функция $\Omega(\mathbf{r})$ не является даже непрерывной на своей эффективной области определения. Если

Рис. 10.2. Различные ситуации при определении функции $\Omega(r)$.

$r \in \text{dom } \Omega$, то

$$\Omega(r) = \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \quad \text{если } \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i,$$

$$\text{и } \Omega(r) = \max \left\{ \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\}, \quad \text{если } \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i < \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i$$

(Рис. 10.2 изображает различные возможные ситуации). Пусть

$$\text{dom } \Omega = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1,$$

где

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ r \in \text{dom } \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \mid \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ r \in \text{dom } \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \mid \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i < \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right\}.$$

Тогда функция $\Omega(\mathbf{r})$ может быть определена следующим образом:

$$\Omega(\mathbf{r}) = \begin{cases} \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0, \\ \max \left\{ \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\}, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{D}_1, \\ +\infty, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1), \end{cases}$$

и $\Omega(\mathbf{r}') < \Omega(\mathbf{r}'') < +\infty$ для любых $\mathbf{r}' \in \mathcal{D}_0$, $\mathbf{r}'' \in \mathcal{PD}_1$.

Будучи заданным нестрогими неравенствами между непрерывными функциями, множество \mathcal{D}_0 замкнуто, а $\Omega(\mathbf{r})$ непрерывна как на \mathcal{D}_0 , так и на \mathcal{D}_1 . По этой причине лебегово множество $\{\Omega \leq c\}$ замкнуто для любого $c \leq \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$. Предположим теперь, что $c > \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$. Тогда все предельные точки $\{\Omega \leq c\}$ могут принадлежать лишь $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ в силу открытости дополнения $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1)$. Но множество $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$ замкнуто в \mathbb{IR}^{n-1} , а множество $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1$ замкнуто в \mathcal{D}_1 . Следовательно, $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0$ содержит все предельные точки $\{\Omega \leq c\}$, принадлежащие \mathcal{D}_0 , в то время как $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1$ содержит все предельные точки $\{\Omega \leq c\}$, принадлежащие \mathcal{D}_1 . Поскольку

$$\{\Omega \leq c\} = (\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0) \cup (\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1),$$

то мы тем самым получаем замкнутость лебеговых множеств $\{\Omega \leq c\}$ также и для $c > \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$. Это завершает доказательство полунепрерывности снизу функции $\Omega(\mathbf{r})$. ■

Теорема 10.4.1 Пусть интервальная линейная система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и интервальный вектор $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}$ таковы, что выполнено условие (NZ). Тогда в методе дробления решений из Табл. 10.2 с начальным приближением \mathbf{V} последовательность ведущих оценок сходится снизу к $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$.

Доказательство. Как мы уже упоминали, в интервальных алгоритмах глобальной оптимизации, основанных на адаптивном дроблении и стратегии “ветвей и границ”, оценка

$$\Omega(\mathbf{Q}) \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\} \quad (10.16)$$

для ведущих брусов \mathbf{Q} была получена Х. Рачеком в [50], а потому нам остается доказать собственно сходимость метода.

Обозначим через \mathcal{W} множество всех точечных векторов \mathcal{V} , т.е.

$$\mathcal{W} := \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}.$$

Пусть также множества \mathcal{D}_0 и \mathcal{D}_1 имеют тот же смысл, как они были определены в Лемме 1. Наши дальнейшие рассуждения существенно зависят от того, имеем ли место $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ или $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$,

Если $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, то все ведущие брусы \mathbf{Q} принадлежат \mathcal{D}_0 . Действительно, для любого $p \in \mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0$ справедливо неравенство $\Omega(p) \geq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$. В случае $\mathbf{Q} \in \mathcal{D}_1$ мы имели бы $\Omega(\mathbf{Q}) > \Omega(p)$, а потому

$$\Omega(\mathbf{Q}) > \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\},$$

что противоречит (10.16).

Каким бы ни было $\mathbf{r} \in \mathcal{D}_0$,

$$\min\{\Omega(r) \mid (r \in \mathbb{R}^{n-1}) \& (r \in \mathbf{r})\} = \Omega(\tilde{r}) \quad (10.17)$$

для некоторого точечного $\tilde{r} \in \mathbf{r}$, $\tilde{r} \in \mathbb{R}^{n-1}$, так как полунепрерывная снизу функция $\Omega(\mathbf{r})$ достигает своего наименьшего значения на компактном множестве $\{r \in \mathbb{R}^{n-1} \mid r \in \mathbf{r}\}$ [8]. Но

$$\|\tilde{r} - \mathbf{r}\| \leq 2 \|\text{rad } \mathbf{r}\|.$$

Следовательно, в силу равномерной непрерывности $\Omega(\mathbf{r})$ на \mathcal{D}_0 для любого $\epsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$0 \leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{r}\} - \Omega(\mathbf{r}) \leq \epsilon \quad (10.18)$$

при $\|\text{rad } \mathbf{r}\| \leq \delta$. Тем самым при условии (NZ) мы строго обосновали утверждение §10.46 о том, что точность оценивания (10.12) посредством $\Omega(\mathbf{r})$ тем выше, чем уже (тоньше) интервальный вектор \mathbf{r} .

Теперь мы легко можем доказать сходимость простейшего метода дробления решений из §10.46. Если $\{\mathbf{Q}^{(k)}\}$ — последовательность ведущих брусков (как и прежде, k обозначает номер шага алгоритма), то $\|\text{rad } \mathbf{Q}^{(k)}\| \rightarrow 0$ по Теореме 3.6.2. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует положительное целое K_ϵ , такое что аналогично неравенству (10.18), для $k \geq K_\epsilon$ имеет место

$$0 \leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}^{(k)}\} - \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) \leq \epsilon.$$

Используя также неравенства

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) &\leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\} \\ &= \min\{\Omega(r) \mid r \in (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)\} \\ &\leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}^{(k)}\},\end{aligned}$$

мы можем заключить, что

$$0 \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\} - \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) \leq \epsilon \quad \text{для } k \geq K_\epsilon.$$

Это и означает сходимость простейшего метода дробления решений.

Ясно также, что наш вывод останется справедливыми и в случае $\mathcal{D}_0 = \emptyset$ (при этом $\text{dom } \Omega = \mathcal{D}_1$). Для доказательства этого достаточно лишь заменить \mathcal{D}_0 на \mathcal{D}_1 во всех предшествующих рассуждениях, начиная с (10.17).

Рассмотрим теперь случай $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ и $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$. Пусть

$$\min\{\|\mathbf{r} - r\| \mid (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_0) \& (r \in \mathcal{W})\} = 2\tau.$$

Нетрудно понять, что $\tau > 0$, так как \mathcal{W} и \mathcal{D}_0 являются непересекающимися компактными множествами. Тогда множество

$$\left\{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \mid \min_{r \in \mathcal{W}} \|\mathbf{r} - r\| \leq \tau \right\} \quad (10.19)$$

также не пересекает \mathcal{D}_0 , т.е. оно целиком содержится в \mathcal{D}_1 . Для любых \mathbf{r} и r , очевидно, $\|\mathbf{r} - r\| \geq \|\text{rad } \mathbf{r}\|$, а потому

$$\min_r \|\mathbf{r} - r\| \geq \|\text{rad } \mathbf{r}\|.$$

Таким образом, множество (10.19) как и множество \mathcal{D}_1 , содержит подмножество

$$\mathcal{D}_\tau = \{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \mid \|\text{rad } \mathbf{r}\| \leq \tau \},$$

которому принадлежат, начиная с некоторой итерации, все ведущие брусы. Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны тем, что мы проводили в ранее рассмотренном случае: так как функция $\Omega(\mathbf{r})$ равномерно непрерывна на компакте \mathcal{D}_τ , то выполняется неравенство (10.18), и т.д.

Тем самым теорема оказывается полностью доказанной. ■

Второй член дизъюнкции в условии (NZ) является практически труднопроверяемым в своей исходной форме, но, используя интервальную арифметику, мы можем дать простое достаточное условие выполнения (NZ):

$$\begin{array}{l} \text{для каждого } i = 1, 2, \dots, m, \\ \text{нуль не является концом } \mathbf{a}_{i\nu} \\ \text{или } 0 \notin \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{V}_j \right). \end{array}$$

10.4г Трудоемкость методов дробления решений

В этом параграфе мы представляем результаты численных экспериментов, выполненных с методами дробления решений на рабочей станции Sun ULTRA-10. Наши версии алгоритмов были реализованы на языке FORTE Fortran корпорации Sun Microsystems и использовали стандартную арифметику с плавающей точкой двойной точности. Модельной тестовой задачей служила интервальная линейная система уравнений

$$\begin{cases} [n-1, N] x_1 + [\alpha-1, 1-\beta] x_2 + \dots + [\alpha-1, 1-\beta] x_n = [1-n, n-1], \\ [\alpha-1, 1-\beta] x_1 + [n-1, N] x_2 + \dots + [\alpha-1, 1-\beta] x_n = [1-n, n-1], \\ \vdots \cdot \ddots \\ [\alpha-1, 1-\beta] x_1 + [\alpha-1, 1-\beta] x_2 + \dots + [n-1, N] x_n = [1-n, n-1], \end{cases} \quad (10.20)$$

где n обозначает размерность ($n \geq 2$), $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, а N — вещественное число, не меньшее $(n-1)$.

Для $n = 2$ и $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$, объединённое множество решений этой системы показано на Рис. 10.1, для $n = 2$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 1$, т.е. для системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [-\frac{3}{4}, 0] \\ [-\frac{3}{4}, 0] & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (10.21)$$

объединённое множество решений показано на Рис. 10.3, а Рис. 10.4

изображает его для $n = 2$ и $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$, т.е. для системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] \\ [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad (10.22)$$

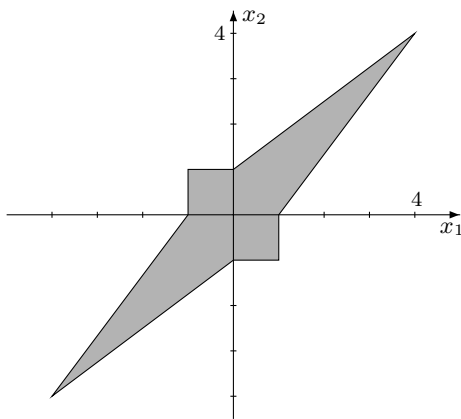


Рис. 10.3. Объединённое множество решений системы (10.21).

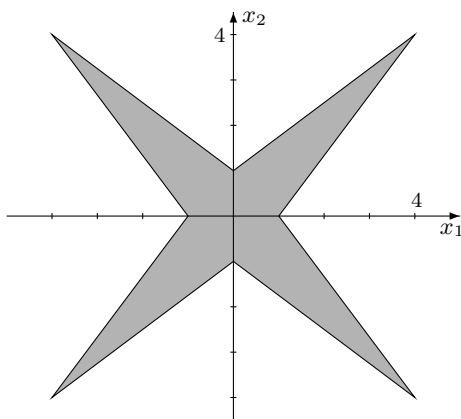


Рис. 10.4. Объединённое множество решений для системы (10.22).

Варьируя значения α , β , n и N , из (10.20) нетрудно получить широ-

кий набор интервальных линейных систем для тестирования алгоритмов решения “внешней задачи”. Когда β уменьшается, приближаясь к нулю, матрица системы (10.20) становится все более близкой к особенной, а множество решений неограниченно увеличивается в размерах. Изменяя отношение α и β , мы можем модифицировать форму множества решений и т.п.

Структуру множества решений $\tilde{\Xi}$ для (10.20) легко выявить из соображений симметрии. Начнем с того, что рассматриваемая интервальная линейная система инвариантна относительно изменения знаков всех компонент решения на противоположный, так как вектор правой части уравновешен. Следовательно, множество решений $\tilde{\Xi}$ является центрально симметричным относительно начала координат, и, в частности,

$$\min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} = -\max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.23)$$

Далее, для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ после замены x_i на x_j и наоборот интервальная система (10.20) также остается неизменной. Из этого можно заключить, что множество $\tilde{\Xi}$ симметрично относительно биссектрисы положительного и отрицательного ортантов пространства \mathbb{R}^n , так что

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= \min\{x_j \mid x \in \tilde{\Xi}\}, \\ \max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= \max\{x_j \mid x \in \tilde{\Xi}\} \end{aligned}$$

для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Сопоставляя эти соотношения с (10.23), можно, наконец, прийти к выводу, что интервальная оболочка множества решений $\tilde{\Xi}$, т.е. оптимальное интервальное решение задачи внешнего оценивания объединённого множества решений системы (10.20), является гиперкубом с центром в начале координат. Для определения его размеров положим $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ в (10.20), в результате чего все уравнения системы сольются в одно

$$[n-1, N] \cdot x_1 + (n-1)[\alpha-1, 1-\beta] \cdot x_1 = [1-n, n-1],$$

или

$$\left[1, \frac{N}{n-1}\right] \cdot x_1 + [\alpha-1, 1-\beta] \cdot x_1 = [-1, 1].$$

При решении для этого уравнения “внешней задачи” переменная x_1 должна рассматриваться как *вещественное число*, которое, в силу дис-

трибутивности, можно вынести в качестве общего множителя. Мы приходим к

$$\left[\alpha, 1 - \beta + \frac{N}{n-1} \right] \cdot x_1 = [-1, 1].$$

Объединённое множество решений этого одномерного интервального уравнения есть

$$x_1 = [-1/\alpha, 1/\alpha],$$

и потому оптимальными (точными) покомпонентными оценками объединённого множества решений системы (10.20) являются

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= -1/\alpha, \\ \max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= 1/\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

причём они не зависят от конкретного значения N .

Результаты вычислительных экспериментов с простейшими методами дробления решений из §10.4, применёнными к модельной ИСЛАУ (10.20) с увеличивающейся размерностью для различных α и β показывают, что его трудозатраты растут экспоненциально с размерностью задачи. Этот тезис может быть также обоснован посредством рациональных рассуждений.

Сложность выполнения методов дробления решений в применении к каждой конкретной ИСЛАУ зависит, конечно же, от структуры её множества решений, но худший случай обеспечивается как раз таки тестовой системой (10.20) при $\alpha = \beta$. Действительно, смоделируем процесс исполнения алгоритма Табл. 10.2 как процедуру глобальной оптимизации функции $\Omega(r)$ из представления (10.10). На начальном этапе исполнения алгоритма ведущие брусы концентрируются вокруг локальных минимумов целевой функции $\Omega(r)$ на её области определения $(V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)$. Далее, по мере того, как достигается достаточное уточнение этих локальных минимумов (т.е. вместе с измельчением ведущих брусков), алгоритм постепенно отсеивает те из них, которые не являются глобальными минимумами. Более точно, всякий неглобальный локальный минимум имеет такую окрестность, что в неё, начиная с некоторого шага алгоритма, ведущие брусы уже не попадают. Раньше или позже, но все ведущие брусы будут сконцентрированы лишь вокруг глобальных минимумов (их может быть несколько), после чего алгоритм выполняет окончательное уточнение результата, т.е. значения этих глобальных минимумов. Естественно, в приведенной

выше схеме некоторые этапы могут отсутствовать для тех или иных конкретных ИСЛАУ.

Если $0 < \alpha = \beta < 1$, то множество решений системы (10.20) является совершенно симметричным, а его пересечения с ортантами пространства \mathbb{R}^n конгруэнтны друг другу. Соответственно, в каждом из пересечений вектора области определения $(V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)$ с ортантами \mathbb{R}^{n-1} имеется лишь один локальный минимум целевой функции $\Omega(r)$ из представления (10.10) (так что всего их 2^{n-1} штук), причём величины всех этих локальных минимумов одинаковы и равны $-1/\alpha$. Выполнение алгоритма Табл. 10.2 в применении системе (10.20) с $\alpha = \beta$ происходит в соответствии с описанным выше стандартным сценарием: после некоторого количества шагов список \mathcal{L} разбивается на непересекающиеся подмножества $\mathcal{L}', \mathcal{L}'', \dots$ записей, принадлежащие каждому из которых записи сгущаются в окрестности некоторого локального минимума целевой функции $\Omega(r)$. Но теперь, поскольку все локальные минимумы равны друг другу, их уточнение, сколь бы тщательным оно ни было, не может выделить из них ни наименьших (т.е. наилучших), ни бесперспективных, а каждое из подмножеств $\mathcal{L}', \mathcal{L}'', \dots$ никогда не станет пустым.

Но, как мы уже отмечали, у целевой функции $\Omega(r)$, соответствующей ИСЛАУ (10.20) с $\alpha = \beta$, количество локальных минимумов растёт экспоненциально с размерностью n , и каждый из них требует от алгоритма отдельного уточнения, на которое затрачивается как минимум линейное по n время и память. Следовательно, сложность выполнения методов дробления решений, которая необходима для достижения заданной относительной или абсолютной погрешности, по крайней мере пропорциональна 2^n в худшем случае. Этот же вывод справедлив и для гибридных методов дробления решений, вводимых ниже в §10.5.

10.5 Модификации методов дробления решений

Несмотря на доказанную нами выше сходимость простейшего метода дробления решений, было бы неразумным пытаться применить его непосредственно для решению серьёзных практических задач. Исходный алгоритм может быть значительно улучшен несколькими возможными способами, ряд из которых мы перечисляли в §3.6.

В этом параграфе мы подробно обсудим возможности модификации

методов дробления решений для ИСЛАУ с помощью каждого из приёмов, перечисленных на стр. 136, за исключением самого первого. Дело в том, что разрывность целевой функции $\Omega(r)$ чрезвычайно осложняет обнаружение её монотонности по тем или иным переменным на брусах $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$. Применяемый обычно для этого стандартный способ — исследование знака области значений на \mathbf{P} производных $\partial\Omega(r)/\partial r_k$, $k = 1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n$, — в общем случае теперь уже не проходит. Так же непросто определить, является ли $\Omega(r)$ непрерывной на данном брус \mathbf{P} . В связи с этим автор берёт на себя смелость утверждать, что введение в методы дробления решений для ИСЛАУ процедуры проверки целевой функции на монотонность не приведёт к существенному повышению их эффективности, но, скорее, сделает эти алгоритмы более тяжеловесными и труднореализуемыми. Поэтому мы не будем далее развивать этот путь.

10.5а Оценивание по знакоопределённым брусам

Наиболее радикальным усовершенствованием методов дробления решений в применении к интервальным линейным системам является “встраивание” в них эффективных локальных оптимизационных процедур, которые эксплуатируют факт локальной многогранности целевой функции $\Omega(r)$.

Действительно, пересечение множества АЕ-решений ИСЛАУ с каждым ортантом в \mathbb{R}^n (а в некоторых частных случаях даже и с несколькими объединениями ортантов) — многогранное выпуклое множество. Пусть $(n-1)$ -мерный брус \mathbf{P} , $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$, имеет своими компонентами интервалы, не содержащие внутри себя нуль. Мы будем называть такие брусы *знакоопределёнными*. Тогда множество прямых $\{l(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ пересекает всего лишь два ортанта \mathcal{O}' и \mathcal{O}'' в \mathbb{R}^n , образованные точками, у которых знаки 1-ой, \dots , $(\nu-1)$ -ой, $(\nu+1)$ -ой, \dots , n -ой компонент те же, что и у \mathbf{P} , а ν -ая компонента, соответственно, неположительна или неотрицательна. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\} \\ &= \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \text{ \& } (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P}\} \\ &= \min\{\ell', \ell''\}, \end{aligned}$$

где

$$\ell' = \min \{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}' \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P} \},$$

$$\ell'' = \min \{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}'' \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P} \}.$$

Но $\Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}'$ и $\Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}''$ — выпуклые многогранные множества, которые определяются несложно выписываемыми системами линейных неравенств, и потому значения ℓ' и ℓ'' могут быть эффективно найдены путём решения задач линейного программирования. Укажем их каноническую форму аналогично тому, как это было сделано в §10.1.

Пусть $S' = \text{diag} \{ s'_1, s'_2, \dots, s'_n \}$ — диагональная матрица знаков внутренних точек ортанта \mathcal{O}' , т.е. $x = S'|x|$ для $x \in \mathcal{O}'$, а вектор $p' \in \mathbb{R}^{2n}$ определяется как

$$p' = \left(-\underline{P}_1, \dots, -\underline{P}_{\nu-1}, +\infty, -\underline{P}_{\nu+1}, \dots, -\underline{P}_n, \right. \\ \left. \overline{P}_1, \dots, \overline{P}_{\nu-1}, +\infty, \overline{P}_{\nu+1}, \dots, \overline{P}_n \right)^\top.$$

Тогда оценка ℓ' является решением задачи линейного программирования

$$c^\top y \rightarrow \min, \quad c = (0, \dots, 0, s'_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad (10.24)$$

с ограничениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \text{mid } \mathbf{A} \cdot S' - (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot S' - (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \end{array} \right) y \leq \left(\begin{array}{c} \overline{\mathbf{b}}^\epsilon \\ (-\mathbf{b}^\epsilon) \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c} -S' \\ S' \end{array} \right) y \leq p', \\ y \geq 0. \end{array} \right. \quad (10.25)$$

Аналогичным образом выписывается и задача линейного программирования, определяющая оценку ℓ'' .

Отметим, что при $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}' \neq \emptyset$ справедливо неравенство

$$\ell' < \ell'',$$

а потому практическое нахождение $\min \{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \}$ для знакоопределённых брусков \mathbf{P} целесообразно начинать с вычисления оценки ℓ' .

Если определяемое неравенствами (10.25) множество непусто, то

$$\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \} = \ell'$$

и можно даже не приступать к решению задачи линейного программирования для нахождения ℓ'' . В противном случае, когда система ограничений (10.25) несовместна,

$$\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \} = \ell''.$$

10.56 Использование локальных решателей

В §10.4 при построении миноранты по области для целевой функции $\Omega(r)$ мы применили процедуру её естественного интервального расширения. Другой, более совершенный способ приближённого оценивания величины

$$\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \} \quad (10.12)$$

снизу может быть основан на использовании локальных решателей (см. §7.9).

Если мы располагаем каким-либо локальным решателем *LocSol*, то, очевидно, требуемой оценкой снизу для $\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{IR}^{n-1}$, может быть взята

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu}, \mathbf{P}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{P}_n)),$$

а если в методе дробления решений брус \mathbf{P} является потомком бруса $\mathbf{Q} \supseteq \mathbf{P}$, то и более точная величина

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\nu-1}, [\Omega(\mathbf{Q}), \overline{\mathbf{V}}_{\nu}], \mathbf{P}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{P}_n)). \quad (10.26)$$

Но не все локальные решатели одинаково пригодны для использования посредством этой конструкции в методах дробления решений. Анализ доказательства сходимости простейшего метода дробления решений показывает, что для оптимальности даваемых им результатов необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\min\{ x_{\nu} \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z} \} - (\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}))_{\nu} \rightarrow 0$$

$$\text{при } \text{wid}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \rightarrow 0$$

(10.27)

Это довольно сильное требование, тем более, что, в конечном счёте, нам важно не асимптотическое поведение оценки, а, по-возможности, наиболее точное оценивание по брусам конечной ширины. Кроме того, теперь мы располагаем для оценивания $\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \}$ по знакоопределённым брусам \mathbf{P} мощной методикой §10.5а. Рекомендуем поэтому ограничиться для решения вопроса о пригодности тех или иных локальных решателей в методах дробления решений более слабыми условиями:

$$\left(\min\{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z} \} - \left(\underline{\text{LocSol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \right)_\nu \right) \\ \text{монотонно уменьшается с уменьшением вектора} \\ (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \text{ по включению} \quad ,$$

или даже совсем грубым

$$\left(\underline{\text{LocSol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \right)_\nu \text{ монотонно возрастает при уменьшении} \\ \text{бруса } (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \text{ по включению} \quad .$$

(10.28)

Как и прежде, вопрос о дальнейшем использовании полученного локального решателя в методах дробления решений, т.е. выполнение условий (10.27)–(10.28), должны решаться отдельно в каждом конкретном случае.

Суммируя итоги параграфов §§10.4 и 10.5а–10.5б, условимся обозначать через $\Omega(\mathbf{P})$ оценку для величины $\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \}$, получаемую способом, изложенным в §10.5а, т.е. посредством решения задач линейного программирования вида (10.24), если брус \mathbf{P} знакоопределённый;

с помощью техники §§10.4 или 10.5б, — либо как естественное интервальное расширение $\Omega(r)$ на \mathbf{P} , либо в виде (10.26) с привлечением какого-нибудь из локальных решателей, — если брус \mathbf{P} не знакоопределённый.

10.5в Новая стратегия дробления

Изменение в методах дробления решений способа вычисления оценок для $\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \}$ естественно приводит к необходимости мо-

дификации и самого способа дробления ведущих брусков. Рассмотрим простой пример. Если при существующей стратегии дробления при решении “внешней задачи” для двумерной ИСЛАУ ведущим бруском \mathbf{Q} сделался отрезок $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, то одним из его потомков от дальнейшего дробления “ровно пополам” всегда будут нульсодержащие интервалы

$$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}], [-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}], \dots,$$

общими формулами для которых являются

$$[-\frac{1}{3 \cdot 2^{k+1}}, \frac{1}{3 \cdot 2^k}] \quad \text{и} \quad [-\frac{1}{3 \cdot 2^k}, \frac{1}{3 \cdot 2^{k+1}}], \quad k = 1, 2, \dots$$

Точная оценка величины (10.12) по таким брусам может быть получена лишь в результате бесконечного уточняющего итерационного процесса, при котором придется оценивать столько же измельчающихся знакоопределённых брусков. С учётом построений §10.5а неразумность подобных действий очевидна: гораздо проще и экономнее, разбив \mathbf{Q} на два неравных, но знакоопределённых интервала $[\mathbf{Q}, 0]$ и $[0, \mathbf{Q}]$, решить в каждом из них задачу линейного программирования вида (10.24), и взять затем $\min\{x \mid x \in \mathbf{X}\}$ как минимум получившихся результатов.

Более того, порождение знакоопределённых брусков может быть сделано одной из конечных целей процедуры дробления и в многомерной ситуации (наряду с измельчением ведущих брусков). При этом, правда, следует учесть, что для многомерного вектора \mathbf{Q} рассечение какой-либо одной нульсодержащей компоненты \mathbf{Q}_i на $[\underline{\mathbf{Q}}_i, 0]$ и $[0, \overline{\mathbf{Q}}_i]$ в общем случае ещё не делает знакоопределёнными брусы-потомки

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &= (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}, [\underline{\mathbf{Q}}_i, 0], \mathbf{Q}_{i+1}, \dots, \mathbf{Q}_n) \\ \text{и } \mathbf{Q}'' &= (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}, [0, \overline{\mathbf{Q}}_i], \mathbf{Q}_{i+1}, \dots, \mathbf{Q}_n), \end{aligned}$$

и потому мы вынуждены будем прибегнуть для оценивания величин

$$\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}'\} \quad \text{и} \quad \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}''\}$$

к приближенным методам из §§10.4 и 10.5б. Но слишком большое различие размеров потомков \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'' нежелательно потому, что оно ставит их в “неравное” положение перед процедурами приближённого оценивания, точность которых, как правило, тем выше, чем меньше ширина брусков. Следовательно, стратегия дробления должна обеспечивать компромисс между двумя противоположными требованиями —

- нульсодержащие интервалы должны быть в конце концов рассечены на знакоопределённые потомки,
- при каждом дроблении потомки не должны слишком сильно различаться своими размерами.

Мы формализуем эти эвристические рекомендации в следующем правиле дробления:

Пусть Q_i — самая длинная компонента ведущего бруса $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$.

Если $-2 < \overline{Q}_i / \underline{Q}_i < -1/2$, то

рассекаем Q на потомки Q' и Q'' , такие что

$$Q'_k = Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i$$

$$\text{и } Q'_i = [\underline{Q}_i, 0], \quad Q''_i = [0, \overline{Q}_i],$$

(10.29)

иначе

рассекаем Q на потомки Q' и Q'' , такие что

$$Q'_k = Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i$$

$$\text{и } Q'_i = [Q_i, \text{mid } Q_i], \quad Q''_i = [\text{mid } Q_i, Q_i].$$

При небольшом общем количестве компонент V , содержащих внутри себя нуль лишь их можно и дробить в ведущих брусах, ограничив, таким образом, цели дробления только порождением знакоопределённых потомков:

Пусть Q_i — самая длинная компонента ведущего бруса $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$, которая содержит ноль в своей внутренности.

Если $-2 < \overline{Q}_i / \underline{Q}_i < -1/2$, то

рассекаем Q на потомки Q' и Q'' , такие что

$$\begin{aligned} Q'_k &= Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i \\ \text{и } Q'_i &= [\underline{Q}_i, 0], \quad Q''_i = [0, \overline{Q}_i], \end{aligned} \tag{10.30}$$

иначе

рассекаем Q на потомки Q' и Q'' , такие что

$$\begin{aligned} Q'_k &= Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i \\ \text{и } Q'_i &= [Q_i, \text{mid } Q_i], \quad Q''_i = [\text{mid } Q_i, Q_i]. \end{aligned}$$

Фактически, следствием правила (10.30) является перебор всех знакоопределённых потомков V .

Принятие стратегий дробления (10.29) и (10.30) в сочетании с новым уточнённым способом вычисления оценок для $\min\{\Omega(r) \mid r \in P\}$, использующим алгоритмы линейного программирования, коренным образом меняет сам характер исходного метода дробления решений из §10.4. Он становится конечным (т.е. даёт точное решение за конечное число шагов), и теперь уже дробление брусков играет в нём не столь важную роль. С другой стороны, при этом возрастает значимость выбора качественного (достаточно узкого) начального приближения $V \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(A, b)$.

10.5г Итоговая схема

Наконец, дополняя метод дробления решений наиболее очевидной модификацией из списка стр. 136, которая предусматривает “отслеживание средних значений” целевой функции по брусам, мы приходим к наиболее совершенной версии алгоритма для вычисления $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(A, b)\}$. Его основа — адаптивное дробление множества решений ИСЛАУ — несмотря на значительные модификации осталась неизменной. Он также оперирует со списком \mathcal{L} , но состоящим из записей двух

видов —

$$(\mathbf{P}, p) \quad \text{и} \quad (p),$$

где $p = \Omega(\mathbf{P})$, $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$. Записи второго типа, состоящие из одного числа, мы будем называть *короткими записями*. Они предназначены для хранения информации о тех брусах \mathbf{P} , для которых

$$\Omega(\mathbf{P}) = \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\},$$

т.е. оценка $\Omega(\mathbf{P})$ — точная. Дробить далее такие брусы, очевидно, уже не имеет смысла, а потому мы можем не хранить и сами координаты \mathbf{P} . Список \mathfrak{L} поддерживается упорядоченным по возрастанию значений оценки $\Omega(\mathbf{P})$, и, кроме того, с алгоритмом связывается определённый в (3.4) параметр ω . Перед началом работы алгоритма $\omega = \overline{\mathbf{V}}_\nu$, список \mathfrak{L} состоит из единственной пары

$$((\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n), \underline{\mathbf{V}}_\nu),$$

а псевдокод нового модифицированного алгоритма имеет вид, представленный в Табл. 10.3.

Как и прежде, результатом работы Алгоритма 10.3 является (конечная) последовательность ведущих оценок $\{\Omega(\mathbf{Q})\}$, приближающая $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ снизу. При этом ϵ — заданная абсолютная точность. В том случае, когда требуется обеспечить относительную точность ϵ , условием остановки внешнего цикла DO WHILE в алгоритме следует взять

$$(\omega - \Omega(\mathbf{Q}))/\Omega(\mathbf{Q}) \leq \epsilon$$

или

$$(\omega - \Omega(\mathbf{Q}))/\text{wid } \mathbf{V}_\nu \leq \epsilon.$$

Методы, аналогичные представленному в Табл. 10.3, которые используют

- 1) нестандартную схему дробления ведущих брусов из §10.5в и
- 2) разнотипные специализированные процедуры для оценки целевой функции (основанные на аккуратном учёте её свойств в соответствующих брусах),

мы будем называть *гибридными методами дробления решений*.

Теперь — несколько практических советов по реализации вышеописанного алгоритма.

Таблица 10.3. Гибридный метод дробления решений

```

присваиваем  $Q \leftarrow (V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)$ ,  $q \leftarrow \underline{V}_\nu$ ,  $\omega \leftarrow \overline{V}_\nu$ ;
инициализируем список  $\mathcal{L} \leftarrow \{ (Q, q) \}$ ;
DO WHILE ( ( ведущая запись не короткая ) AND (  $\omega - q > \epsilon$  ) )
    пересекаем ведущий брус  $Q$  на потомки  $Q'$  и  $Q''$  в соответствии
        с правилом (10.29) (или (10.30));
    удаляем бывшую ведущую пару  $(Q, q)$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    вычисляем  $q' \leftarrow \Omega(Q')$  и  $q'' \leftarrow \Omega(Q'')$ ;
    IF (  $q' < \omega$  ) THEN
        IF ( оценка  $\Omega(Q')$  точна ) THEN
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке (по возрастанию
                второго поля) короткую запись  $(q')$ ;
             $\eta' \leftarrow q'$ ;
        ELSE
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке запись  $(Q', q')$ ;
             $\eta' \leftarrow \Omega(\text{mid } Q')$ ;
        END IF
    ELSE
         $\eta' \leftarrow +\infty$ ;
    END IF
    IF (  $q'' < \omega$  ) THEN
        IF ( оценка  $\Omega(Q'')$  точна ) THEN
            заносим в  $\mathcal{L}$  в нужном порядке короткую запись  $(q'')$ ;
             $\eta'' \leftarrow q''$ ;
        ELSE
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке запись  $(Q'', q'')$ ;
             $\eta'' \leftarrow \Omega(\text{mid } Q'')$ ;
        END IF
    ELSE
         $\eta'' \leftarrow +\infty$ ;
    END IF
    полагаем  $\eta \leftarrow \min\{ \eta', \eta'' \}$ ;
    IF (  $\omega > \eta$  ) THEN
        полагаем  $\omega \leftarrow \eta$ ;
        удаляем из  $\mathcal{L}$  все такие записи  $(P, p)$  или  $(p)$ , что  $p > \omega$ ;
    END IF
    обозначаем первую запись списка  $\mathcal{L}$  через  $(Q, q)$ ;
END DO

```

После нахождения значений $\Omega(Q')$ и $\Omega(Q'')$ целесообразно первой заносить в список \mathcal{L} запись с меньшей оценкой (пусть, для определённости, это будет $\Omega(Q')$). Тогда для занесения в \mathcal{L} второго потомка, соответствующего Q'' , просмотр списка можно начинать не с самого начала, а с записи, непосредственно следующей за (Q'', q'') (или (q'')). Реализуя это соображение практически, можно специально ввести в Алгоритм 10.3 операцию переобозначения, при необходимости, Q' на Q'' , а Q'' на Q' .

Аналогичным образом модифицируется и последняя инструкция цикла DO WHILE алгоритма. Если к началу её исполнения запись, соответствующая брусу Q'' , была занесена нами в список \mathcal{L} , то это уже свидетельствует о неравенстве $\Omega(Q'') < \omega$. Опять таки, чтобы сэкономить машинное время, при $\Omega(Q') < \Omega(Q'')$ просмотр \mathcal{L} для его последующей чистки можно начинать сразу со следующей за (Q'', q'') (или (q'')) записи. Если же в этой ситуации $Z'' \notin \mathcal{L}$, то просмотр-чистку \mathcal{L} следует начинать с записи, стоящей за Z' .

Отметим также, что выбранная нами форма последней инструкции цикла DO WHILE с дорогостоящей чисткой списка нацелена, прежде всего, на экономию оперативной памяти ЭВМ. Если размер выделяемой алгоритму памяти не критичен, а более важно его быстродействие, то чистку списка \mathcal{L} от бесперспективных записей следует проводить не после каждого очередного уменьшения параметра ω , а лишь через некоторое количество последовательных уменьшений ω .

Псевдокод из Табл. 10.3 представляет собой, скорее, общую схему целого класса однотипных алгоритмов для решения “внешней задачи” для ИСЛАУ, поскольку содержит несколько подлежащих конкретизации “свободных параметров—

- способ получения оценки $\Omega(P)$,
- стратегию дробления ведущих брусов,
- способ чистки списка \mathcal{L}
- и пр.

В алгоритмах Таблиц 10.2 и 10.3 мы упорядочивали список \mathcal{L} по возрастанию оценки $\Omega(P)$, так что первая запись списка являлась одновременно и ведущей. Но следует отметить, что по поводу конкретной организации рабочего списка справедливо всё сказанное ранее в §3.6:

его может быть удобнее сделать кучей, стеком и т.п. в зависимости от конкретных особенностей решаемой задачи.

В §10.4г мы показали, что трудоёмкость выполнения методов дробления решений в худшем случае экспоненциальная, построив в явном виде пример ИСЛАУ, на котором она достигается. Если так, то в чём преимущество методов дробления решений перед “переборными” методами из §§10.1–10.3? Во-первых, несомненно, что методы дробления решений являются адаптивными. Имея более гибкую вычислительную схему, позволяющую им хорошо “приспосабливаться” к каждой конкретной задаче, в среднем они работают гораздо быстрее, и этот выигрыш тем значительней, чем больше размерность задачи. Другое важное преимущество методов дробления решений и состоящее в том, что они являются *последовательно гарантирующими*, будет рассмотрено далее в §10.8.

10.6 Методы дробления параметров

Цель настоящего и следующего параграфов — представить ещё один класс эффективных вычислительных алгоритмов для нахождения оптимальных решений “внешней задачи” для интервальных систем алгебраических уравнений общего вида. Мы называем их *методами дробления параметров* (или *PPS-методами*), и их основная идея является той же самой, что и для методов дробления решений — представить “внешнюю задачу” как оптимизационную и применить для её решения интервальные методы глобальной оптимизации из §3.6. Но реализуем мы эту идею существенно по-другому, способом, который в определённом смысле двойственен вычислительной схеме методов дробления решений.

10.6а Общая схема методов

Пусть дана интервальная система алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_1(x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l) & = \mathbf{b}_1, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l) & = \mathbf{b}_2, \\ \vdots & \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l) & = \mathbf{b}_m, \end{array} \right. \quad (1)$$

с интервальными параметрами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$, которую мы будем также записывать в краткой форме

$$F(x, \mathbf{a}) = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где $F = (F_1(\mathbf{a}, x), \dots, F_m(\mathbf{a}, x))^\top$ и

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l)^\top \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)^\top.$$

В этом пункте мы не будем рассматривать обобщённые множества решений и ограничимся только задачей оптимального внешнего оценивания объединённого множества решений интервальной системы (1)–(2), т.е. множества

$$\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{a})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(F(x, \mathbf{a}) = \mathbf{b})\},$$

образованного всевозможными решениями вещественных алгебраических систем $F(x, \mathbf{a}) = \mathbf{b}$, когда параметры a_1, a_2, \dots, a_l и b_1, b_2, \dots, b_m независимо пробегает $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ и $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$.

Итак, нас интересует следующая постановка:

Найти интервальную оболочку объединённого множества решений $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной алгебраической системы уравнений $F(x, \mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Но, как и в случае с методами дробления решений, нам будет удобно находить отдельные покомпонентные оценки для множества решений, т.е. переформулировать нашу задачу в виде

Найти $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, либо как можно более точные их оценки снизу.

(10.31)

Ясно, далее, что эта задача эквивалентна задаче глобальной минимизации величины

$$\min\{x_\nu \mid F(a, x) = b\} \quad (10.32)$$

как функции параметров $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Как могут быть вычислены значения (10.32) или хотя бы оценки для них снизу? Любым интервальным методом решения нелинейных систем уравнений, к примеру,

методами Кравчика или Хансена-Сенгупты, рассмотренными в Главе 7, которые позволяют находить внешнюю интервальную оценку для множества всех решений нелинейной системы, лежащих в заданном бруске. Далее с помощью этих же методов мы сможем находить интервальные расширения величины (10.32) по параметрам \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Зафиксируем какой-нибудь метод $Encl$ внешнего оценивания объединённого множества решений для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$, мы будем называть этот метод *базовым*. Пусть $Encl(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки для множества решений системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$, т.е. $Encl(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{IR}^n$ и

$$Encl(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Тогда величины

$$\left(\underline{Encl}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)_\nu$$

являются нижними концами интервальных расширений целевой функции (10.32). В этих условиях для решения задачи глобальной минимизации (10.32) применим соответствующим образом адаптированный алгоритм **GlobOpt**. Псевдокод получающегося нового алгоритма приведён в Табл. 10.4.

При достаточно общих условиях на систему $F(x, \mathbf{a}) = 0$ и метод $Encl$ порождаемая алгоритмом последовательность ведущих оценок сходится, как можно показать, к оптимальным (точным) покоординатным оценкам Ξ_{uni} .

Этот алгоритм и другие, ему подобные, предназначенные для решения “внешней задачи” для интервальных систем алгебраических уравнений, и имеющие в своей основе адаптивное дробление множества параметров, мы будем называть *методами дробления параметров* или PPS-методами (от английской фразы *Partitioning Parameter Set*).

10.66 Решение линейных систем

Пусть \mathbf{A} — интервальная $n \times n$ -матрица, содержащая лишь неособенные вещественные матрицы, \mathbf{b} — интервальный n -вектор. Цель этого пункта — построение на основе сформулированной в §10.6а идеи эффективно-го метода нахождения оптимальных внешних покоординатных оценок множеств АЕ-решений интервальных линейных систем, т.е. вычисление величин $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$,

Таблица 10.4. Простейший метод дробления параметров

Вход

Интервальная алгебраическая система $F(x, \mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Заданная точность $\epsilon > 0$.

Выход

Оценка M^* с точностью ϵ для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$.

Алгоритм

присваиваем $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{a}$ и $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b}$;

инициализируем список $\mathcal{L} \leftarrow \{(\mathbf{q}, \mathbf{r}, -\infty)\}$;

DO WHILE (wid($Encl(F, \mathbf{q}, \mathbf{r})$) $\geq \epsilon$)

в агрегированном интервальном векторе параметров (\mathbf{q}, \mathbf{r})

выбираем элемент \mathbf{s} , который имеет наибольшую ширину;

порождаем системы-потомки $F(\mathbf{q}', x) = \mathbf{r}'$ и $F(\mathbf{q}'', x) = \mathbf{r}''$:

если $\mathbf{s} = \mathbf{q}_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, l\}$, то полагаем

$$\mathbf{q}'_i \leftarrow \mathbf{q}''_i \leftarrow \mathbf{q}_i \text{ для } i \neq k,$$

$$\mathbf{q}'_k \leftarrow [\underline{\mathbf{q}}_k, \text{mid } \mathbf{q}_k], \mathbf{q}''_k \leftarrow [\text{mid } \mathbf{q}_k, \overline{\mathbf{q}}_k],$$

$$\mathbf{r}' \leftarrow \mathbf{r}'' \leftarrow \mathbf{r};$$

если $\mathbf{s} = \mathbf{r}_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, то полагаем

$$\mathbf{q}' \leftarrow \mathbf{q}'' \leftarrow \mathbf{q},$$

$$\mathbf{r}'_k \leftarrow [\underline{\mathbf{r}}_k, \text{mid } \mathbf{r}_k], \mathbf{r}''_k \leftarrow [\text{mid } \mathbf{r}_k, \overline{\mathbf{r}}_k],$$

$$\mathbf{r}'_i \leftarrow \mathbf{r}''_i \leftarrow \mathbf{r}_i \text{ для } i \neq k;$$

вычисляем внешние оценки $Encl(F, \mathbf{q}', \mathbf{r}')$ и $Encl(F, \mathbf{q}'', \mathbf{r}'')$;

присваиваем $v' \leftarrow (Encl(F, \mathbf{q}', \mathbf{r}'))_\nu$ и $v'' \leftarrow (Encl(F, \mathbf{q}'', \mathbf{r}''))_\nu$;

удаляем бывшую ведущую запись $(\mathbf{q}, \mathbf{r}, v)$ из списка \mathcal{L} ;

помещаем записи $(\mathbf{q}', \mathbf{r}', v')$ и $(\mathbf{q}'', \mathbf{r}'', v'')$ в список \mathcal{L}

в порядке возрастания третьего поля;

обозначаем первую запись списка \mathcal{L} через $(\mathbf{q}, \mathbf{r}, v)$;

END DO

$M^* \leftarrow v$;

$\nu = 1, 2, \dots, n$, — оптимального решения “внешней задачи для ИСЛАУ”. Как и ранее в этой главе, мы сосредоточимся на вычислении $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, поскольку

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = -\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, -\mathbf{b})\}.$$

Основа алгоритма предыдущего пункта — адаптивное дробление области параметров интервальной системы. В случае решения ИСЛАУ (4)–(5) непосредственное применение этого принципа означало бы необходимость измельчения элементов матрицы \mathbf{A} и вектора правых частей \mathbf{b} . Оказывается, что, учтя специфику линейного случая, мы можем фактически до предела упростить этот процесс.

По-видимому, К. Никелем в [48] впервые был указан тот замечательный факт, что точные значения $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, достигаются в крайних значениях матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b} \in \mathbf{b}$. На основе этого результата в той же работе был предложен метод внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ, использующий полный перебор всех возможных комбинаций концов элементов из \mathbf{A} и \mathbf{b} и последующее решение получающихся при этом вещественных систем $Ax = b$. Алгоритм Никеля является *пассивным* в смысле Определения 10.1.1, а потому его практическая значимость невелика из-за катастрофического роста вычислительной сложности в зависимости от размерности ИСЛАУ. Так, уже для системы с интервальной 5×5 -матрицей в общем случае требуется решить $2^{5^2+5} = 2^{30} \approx 10^9$ штук вещественных линейных систем того же размера. Кроме того, алгоритм Никеля имеет и другой не менее серьёзный недостаток, который нам предстоит подробно обсудить в заключительном параграфе главы: он является лишь *финально гарантирующим*.

Дальнейшим обобщением результата К. Никеля является Теорема 5.2.5 нашей работы, и на её основе может быть построен совершенно аналогичный никелевскому метод оптимального внешнего оценивания множеств АЕ-решений ИСЛАУ, использующий полный перебор всех возможных комбинаций концов интервальной матрицы системы и интервального вектора правой части. Его недостатки те же, что и в предыдущем случае — пассивность и отсутствие последовательной гарантии. Тем не менее, ниже будет показано, как, скрестив основу подхода Никеля с развиваемыми нами идеями, можно получить практически вычислительную процедуру.

Как и ранее в этой Главе, пусть $Encl$ — какой-нибудь фиксированный метод внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ (мы будем называть его *базовым*). Пусть $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки для множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ системы $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, т.е. $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{IR}^n$ и

$$Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Зафиксируем также номер $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ оцениваемой компоненты множества решений и обозначим

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) := \left(\underline{Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})} \right)_\nu$$

— нижний конец ν -ой компоненты внешней интервальной оценки множества решений, получаемой методом $Encl$. Потребуем также от базового метода удовлетворения “свойству монотонности”

оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ монотонна по включению относительно матрицы \mathbf{Q} и вектора \mathbf{r} , т.е. для всех $\mathbf{Q}', \mathbf{Q}'' \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и $\mathbf{r}', \mathbf{r}'' \in \mathbb{IR}^n$ при $\mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{Q}''$ и $\mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}''$ верно неравенство

$$\Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}') \geq \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'').$$

(10.33)

Если базовый метод $Encl$ является естественным интервальным расширением какого-нибудь вещественного метода (как, например, интервальный метод Гаусса), или, более общо, дерево Канторовича базового метода $Encl$ своими узлами имеет только интервальные арифметические операции, то свойство (10.33) очевидным образом выполняется в силу свойства монотонности интервальных арифметик по включению. Иначе, если в алгоритме базового метода встречаются неинтервальные операции, то свойство (10.33) может и нарушаться. Проверку того, что данный конкретный базовый метод обладает “свойством монотонности” (10.33), мы возлагаем на разработчиков программ.

Для представленных в Главе 7 методов внешнего оценивания множеств АЕ-решений ИСЛАУ и для большинства популярных алгоритмов внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ (интервальный метод Гаусса [1, 10, 46], интервальный метод Гаусса-Зейделя [34, 46], интервальные прогонки [10], методы Гея [25], разнообразные модификации метода простой итерации [1], метод Кравчика

[46] и др.) выполнимость условия (10.33) легко выводится из свойства монотонности интервальных арифметических операций в \mathbb{IR} и \mathbb{KR} по включению.

В силу результата Теоремы 5.2.5

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = (\tilde{A}^{-1}\tilde{b})_\nu$$

для некоторых точечных матрицы $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектора $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, составленных из концов элементов матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} , причём по самому определению оценки Υ

$$\Upsilon(\tilde{A}, \tilde{b}) \leq (\tilde{A}^{-1}\tilde{b})_\nu.$$

Предположив, что в матрице \mathbf{A} элемент \mathbf{a}_{ij} имеет ненулевую ширину, обозначим

\mathbf{A}' и \mathbf{A}'' — матрицы, полученные из \mathbf{A} заменой элемента \mathbf{a}_{ij} на $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$ и $\overline{\mathbf{a}}_{ij}$, соответственно,

\tilde{A}' и \tilde{A}'' — матрицы, полученные из \tilde{A} заменой элемента \tilde{a}_{ij} на $\underline{\tilde{a}}_{ij}$ и $\overline{\tilde{a}}_{ij}$, соответственно.

Далее, так как

$$\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}'' \subseteq \mathbf{A},$$

и $\tilde{b} \subseteq \mathbf{b}$, то свойство (10.33) имеет своим следствием неравенства

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}', \tilde{b})$$

и

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}'', \tilde{b}).$$

Следовательно, беря почленный минимум от соответствующих частей неравенств, мы получим

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &\leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \\ &\leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \\ &\leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \tilde{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \tilde{b})\}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\min\{\Upsilon(A', \tilde{b}), \Upsilon(A'', \tilde{b})\} \leq (\tilde{A}^{-1}\tilde{b})_\nu = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(A, b)\}.$$

Сопоставление полученных неравенств приводит к следующему практическому выводу: решив две интервальных “системы-потомка” $A'x = b$ и $A''x = b$, мы можем прийти, вообще говоря, к более точной оценке снизу для искомого $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(A, b)\}$ в виде

$$\min\{\Upsilon(A', b), \Upsilon(A'', b)\}.$$

Совершенно аналогичный эффект имеет и распадение в векторе правых частей b какого-нибудь интервального элемента b_i на концы \underline{b}_i и \bar{b}_i . Поэтому впредь для единообразия договоримся обозначать ИСЛАУ-потомки, получающиеся из $Ax = b$ рассечением на концы одного интервального элемента либо в матрице A , либо в векторе b , через $A'x = b'$ и $A''x = b''$.

Процедуру улучшения оценки для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(A, b)\}$ посредством дробления исходной системы (5) можно повторить по отношению к системам-потомкам $A'x = b'$ и $A''x = b''$, затем снова разбить потомков от $A'x = b'$ и $A''x = b''$ и снова улучшить оценку и т.д. Мы оформим этот процесс последовательного улучшения оценки снизу для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(A, b)\}$ совершенно аналогично тому, как это делается в широко известном в комбинаторной оптимизации “методе ветвей и границ” [13]:

во-первых, организуем все возникающие в процессе дробления исходной ИСЛАУ системы $Qx = r$ вместе с их оценками $\Upsilon(Q, r)$ в некоторый список \mathcal{L} , и,

во-вторых, дроблению каждый раз будем подвергать лишь ту из интервальных систем-потомков $Qx = r$, которая обеспечивает рекордную (наихудшую) на данный момент оценку $\Upsilon(Q, r)$.

Итак, в процессе выполнения алгоритма мы будем поддерживать список \mathcal{L} , состоящий из записей-троек

$$(Q, r, \Upsilon(Q, r)), \tag{10.34}$$

где Q — интервальная $n \times n$ -матрица, $Q \subseteq A$, r — интервальный n -вектор, $r \subseteq b$. Кроме того, образующие \mathcal{L} записи упорядочены по возрастанию значений оценки $\Upsilon(Q, r)$, а первую запись списка, так же

Таблица 10.5. Алгоритм **GLinPPS** — простейший метод дробления параметров для интервальных линейных систем уравнений.

Вход

Интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Выход

Значение $M^* = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$.

Алгоритм

присваиваем $\mathbf{Q} \leftarrow \mathbf{A}$ и $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b}$;

вычисляем оценку $v \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$;

инициализируем список $\mathcal{L} \leftarrow \{(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)\}$;

DO WHILE (система $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ интервальная)

в матрице $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ и векторе $\mathbf{r} = (r_i)$ выбираем элемент s , имеющий наибольшую ширину;

порождаем интервальные линейные системы-потомки $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$:

если $s = q_{kl}$ для некоторых $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем

$$q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij} \text{ для } (i, j) \neq (k, l),$$

$$q'_{kl} \leftarrow [\underline{q}_{kl}, \underline{q}_{kl}], \quad q''_{kl} \leftarrow [\bar{q}_{kl}, \bar{q}_{kl}], \quad \mathbf{r}' \leftarrow \mathbf{r}'' \leftarrow \mathbf{r};$$

если $s = r_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем

$$\mathbf{Q}' \leftarrow \mathbf{Q}'' \leftarrow \mathbf{Q}, \quad \mathbf{r}'_k \leftarrow [\underline{r}_k, \underline{r}_k], \quad \mathbf{r}''_k \leftarrow [\bar{r}_k, \bar{r}_k],$$

$$\mathbf{r}'_i \leftarrow \mathbf{r}''_i \leftarrow \mathbf{r}_i \text{ для } i \neq k;$$

вычисляем оценки $v' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$ и $v'' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$;

удаляем из \mathcal{L} бывшую ведущей запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)$;

записываем $(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', v')$ и $(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', v'')$ в список \mathcal{L} в порядке возрастания третьего поля;

обозначаем первую запись списка через $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)$;

END DO

$M^* \leftarrow v$;

как и соответствующие ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ и оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ (наименьшую в списке), мы будем называть ведущими (на данном шаге). Полный псевдокод получающегося нового алгоритма, который мы назовём аббревиатурой **GLinPPS**, представлен в Табл. 10.5.

Если T — общее количество интервальных (с ненулевой шириной) элементов в матрице \mathbf{A} и векторе \mathbf{b} исходной ИСЛАУ (в общем случае $T \leq (n+1)n$), то алгоритм **GLinPPS** остановится не более чем через $2\overline{T}$ шагов, и его результатом явится оценка снизу для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$. То, насколько близкими окажутся результат работы алгоритма и $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$, зависит, прежде всего, от способа получения оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, т.е. от выбранного нами базового метода для решения промежуточных ИСЛАУ. В частности, для оптимальности вычисленного значения (т.е. для того, чтобы оно было в точности равно $\Upsilon = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$) необходимым и достаточным является выполнение следующего “условия точности”:

$$\begin{aligned} &\text{оценка } \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \text{ является точной на вещественных} \\ &\text{линейных алгебраических системах, т.е.} \\ &\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r})_\nu \text{ для всех } \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ и } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{10.35}$$

Этому условию удовлетворяют далеко не все из известных методов решения “внешней задачи для ИСЛАУ”. Таков, например, широко известный метод Румпа [54, 55, 56, 57].

Впрочем, если задача имеет сколько-нибудь значительные размеры и величина T превосходит 20–30, то на современных ЭВМ среднего класса алгоритм **GLinPPS**, как правило, никогда не будет прорабатывать до конца, и потому целесообразней рассматривать его как итерационную уточняющую процедуру.

Весьма популярными в практической оптимизации являются релаксационные методы, обеспечивающие улучшение целевой функции на каждом шаге. Мы, со своей стороны, дословно перенесём это определение и на решатели ИСЛАУ. Особенно привлекательно использование подобных методов в условиях ограниченности вычислительных ресурсов или когда а priori известно, что количество шагов алгоритма, которое мы сможем выполнить, невелико, но, тем не менее, требуется получить от использования этого алгоритма некий ощутимый эффект. Нетрудно видеть, что для релаксационности метода **GLinPPS** уже до-

статочным является выполнение “свойства монотонности” (10.33).

10.7 Модификации методов дробления параметров

Приступим теперь к построению более совершенных методов дробления параметров для решения задачи внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ. При этом алгоритм **GLinPPS** будет играть роль основы, которую мы будем развивать и дополнять посредством ряда уже стандартных усовершенствований в соответствии со списком §3.6. Необходимость решительной модификации алгоритма **GLinPPS** диктуется, в частности, его большой информационной сложностью: фактически, каждый шаг алгоритма сопровождается ростом рабочего списка, так что начиная с некоторого момента оперативная память ЭВМ может стать дефицитным ресурсом, а обмен с внешними носителями может стать фактором, который замедляет на порядки производительность процессора.

10.7a Тест на монотонность

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений $Qx = r$, и нам известны

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

— интервальные расширения соответствующих производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

от ν -ой компоненты вектора решения системы уравнений $Qx = r$ по ij -ому элементу матрицы Q и i -ому элементу вектора r . Если интер-

важные $n \times n$ -матрица $\tilde{\mathbf{Q}}$ и n -вектор $\tilde{\mathbf{r}}$ образованы из элементов

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} [\underline{q}_{ij}, \underline{q}_{ij}], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \geq 0, \\ [\bar{q}_{ij}, \bar{q}_{ij}], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \leq 0, \\ q_{ij}, & \text{при } \text{int } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \ni 0, \end{cases} \quad (10.36)$$

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} [\underline{r}_i, \underline{r}_i], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \geq 0, \\ [\bar{r}_i, \bar{r}_i], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \leq 0, \\ r_i, & \text{при } \text{int } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \ni 0, \end{cases} \quad (10.37)$$

то, очевидно,

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{r}})\} = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}.$$

А поскольку количество существенно интервальных (с ненулевой шириной) элементов в $\tilde{\mathbf{Q}}$ и $\tilde{\mathbf{r}}$ может быть, вообще говоря, существенно меньшим, чем в \mathbf{Q} и \mathbf{r} , то, переходя от исходной ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ к решению системы $\tilde{\mathbf{Q}}x = \tilde{\mathbf{r}}$, мы, тем самым, добьёмся упрощения задачи вычисления $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$.

Как найти фигурирующие в (10.36)–(10.37) интервальные расширения производных? Традиционно это делается следующим образом. Из курса математического анализа известно, что если $Z = (z_{ij})$ — обратная матрица для $Q = (q_{ij})$, то производные решения вещественной линейной системы $Qx = r$ по её коэффициентам даются формулами

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_{ij}} = -z_{\nu i} x_j, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial r_i} = z_{\nu i}$$

(см., например, [9]). Следовательно, в случае, когда $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ — “обратная интервальная матрица” для \mathbf{Q} , т.е.

$$\mathbf{Z} \supseteq \{Q^{-1} \mid Q \in \mathbf{Q}\},$$

а \mathbf{x}_j — j -ая компонента некоторого интервального вектора \mathbf{x} . такого что $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, то мы можем принять следующие интервальные оценки производных

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} = -z_{\nu i} \mathbf{x}_j, \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} = z_{\nu i}. \quad (10.38)$$

Обычно для вычисления \mathbf{Z} и \mathbf{x} используют какие-нибудь дешёвые приближенные алгоритмы (вроде метода Хансена [43] для локализации “обратной интервальной матрицы”). Тем не менее, в целом процедура интервального оценивания производных из (10.36)–(10.37) всё равно остается весьма дорогостоящей. Поэтому с точки зрения эффективности было бы неразумным выполнять это оценивание на каждом шаге алгоритма. Мы будем “замораживать” обратную интервальную матрицу на некоторое фиксированное число шагов (подобно тому, как это делается в отношении якобиана в ряде квазиньютоновских методов для решения алгебраических систем [4]). При этом, правда, несколько усложнится доступ к обратным интервальным матрицам и их обработка, поскольку PPS-алгоритм является, по существу, ветвящимся процессом.

Целесообразно, хранить обратные интервальные матрицы в виде *кучи* \mathfrak{H} , обращаясь к ним с помощью *указателей*, или *ссылок* (см., например, [2]). Соответственно, в образующие список \mathcal{L} записи-тройки $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))$ добавится ещё одно поле p , — указатель на интервальную матрицу \mathbf{Z} из \mathfrak{H} , объемлющую $\{Q^{-1} \mid Q \in \mathbf{Q}\}$. В такой ситуации мы станем говорить, что запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), p)$ *обслуживается* матрицей \mathbf{Z} . С каждой обратной интервальной матрицей \mathbf{Z} будут связаны ещё два натуральных параметра τ и ς , так что, фактически, куча \mathfrak{H} оказывается состоящей из записей $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$. Параметр τ — счетчик шагов алгоритма, на которых происходило обращение к \mathbf{Z} , а ς учитывает количество записей списка \mathcal{L} , обслуживаемых посредством \mathbf{Z} . Если τ велико, — превосходит некоторый эмпирически устанавливаемый порог, — то это свидетельствует о предыдущем длительном использовании матрицы \mathbf{Z} в алгоритме, т.е. о необходимости её перевычисления и замены на новую, возможно более узкую. Напротив, если $\varsigma = 0$, то соответствующая обратная матрица не обслуживает ни одной записи списка \mathcal{L} , и потому тройка $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$ может быть удалена из \mathfrak{H} без какого-либо влияния на работу алгоритма.

Закон изменения для τ очевиден. Параметр ς полагается равным 2 в момент занесения записи $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$ в \mathfrak{H} , а далее, как нетрудно понять,

порядок его перевычисления должен быть таким:

- если запись, обслуживаемая \mathbf{Z} , дробится на потомки без перевычисления обратной матрицы, то увеличиваем ς на единицу;
- если запись, обслуживаемая \mathbf{Z} , дробится на потомки с перевычислением обратной матрицы, то уменьшаем ς на единицу;
- если обслуживаемая \mathbf{Z} запись удаляется из рабочего списка \mathfrak{L} , то уменьшаем ς на единицу.

10.76 Стратегия дробления

Способ дробления ведущих брусов параметров должен, прежде всего, обеспечивать сходимость алгоритма, т.е. стремление к нулю диаметров ведущих брусов. Это особенно важно, когда результатом разбиения интервала являются два подинтервала ненулевой длины (а не два его конца, как в рассматриваемых нами алгоритмах). Как отмечалось в Главе 3, при циклической бисекции компонент сходимости в общем случае может и не быть.

Традиционно в методах подобного типа ведущие брусы параметров на каждом шаге дробятся по самой длинной грани. Этот способ дробления гарантирует (см. §3.6) сходимость использующих его методов, и мы тоже применили его в алгоритме **GLinPPS**, хотя для него подобные проблемы и не возникают (из-за его конечности).

После того, как собственно сходимость достигнута, на первый план выходит требование наиболее значительного улучшения целевой функции на начальном этапе работы алгоритма, т.е. обеспечение наиболее быстрой сходимости алгоритма на его первых шагах. Строгая и точная оптимизация алгоритма в указанном смысле трудна и вряд ли целесообразна в полном объёме. Мы будем решать этот вопрос, руководствуясь разумными эвристическими соображениями, на основе знания оценок производных целевой функции.

Ясно, что дробление ведущей ИСЛАУ целесообразно выполнять уже после исследования её на монотонность и оверхествления (“сжатия”) соответствующих интервальных элементов. Следовательно, теперь в дробимой ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ ненулевую ширину будут иметь лишь те элементы, производные по которым оцениваются интервалами, содержащими внутри себя нуль. Если $\check{\mathbf{Q}} = (\check{q}_{ij})$ и $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{q}_{ij})$ — интервальные матрицы, отличающиеся друг от друга лишь (i, j) -м элемен-

том, такие что

$$\check{\mathbf{q}}_{ij} = [\bar{\mathbf{q}}_{ij}, \bar{\mathbf{q}}_{ij}], \quad \hat{\mathbf{q}}_{ij} = [\underline{\mathbf{q}}_{ij}, \underline{\mathbf{q}}_{ij}]$$

то в силу известной теоремы Лагранжа о среднем

$$\begin{aligned} \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\check{\mathbf{Q}}, \mathbf{r})\} - \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{r})\} \\ = \frac{\partial x_\nu(\check{\mathbf{Q}}, \check{\mathbf{r}})}{\partial q_{ij}} \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij} \end{aligned}$$

для некоторых матрицы $\check{\mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$ и вектора $\check{\mathbf{r}} \in \mathbf{r}$. Аналогично, если $\check{\mathbf{r}} = (\check{r}_i)$ и $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}_i)$ отличаются только i -ым элементом и

$$\check{\mathbf{r}}_i = [\bar{r}_i, \bar{r}_i], \quad \hat{\mathbf{r}}_i = [\underline{r}_i, \underline{r}_i],$$

то

$$\begin{aligned} \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \check{\mathbf{r}})\} - \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{r}})\} \\ = \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \check{\mathbf{r}})}{\partial r_i} \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

для некоторых матрицы $\check{\mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$ и вектора $\check{\mathbf{r}} \in \mathbf{r}$. Поэтому, в известном смысле мерой того, как влияет рассеивание какого-либо элемента в \mathbf{Q} или \mathbf{r} на точное значение $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$ может служить величина произведения модуля интервальной оценки производной на ширину соответствующего интервала.

Далее, получаемые по большинству существующих методов решения ИСЛАУ оценки множеств решений являются тем более точными, чем меньше размеры этого объединённого множества решений. Д. Гей, например, в [25] доказал для своих методов квадратичную сходимость.

С подобными базовыми методами требование наиболее быстрого улучшения целевой функции за один шаг метода дробления параметров становится, по существу, эквивалентным условию наиболее быстрого уменьшения размеров множества решений при дроблении ведущей ИСЛАУ. Учитывая сделанный выше вывод, мы рекомендуем поэтому рассекать ведущие ИСЛАУ по элементам, на которых достигается максимум величин

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad (10.39)$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, т.е. по элементам, на которых достигается максимум произведения оценки производной решения на ширину интервала, а не просто по самым широким элементам ИСЛАУ.

10.7в Модификация Рона

b^σ , т.е.

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left((A^{\sigma\tau})^{-1} b^\sigma \right)_\nu, \quad (10.40)$$

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \max_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left((A^{\sigma\tau})^{-1} b^\sigma \right)_\nu \quad (10.41)$$

для каждого индекса $\nu = 1, 2, \dots, n$. Как можно использовать этот факт в наших методах дробления параметров?

Важно осознавать, что приведённый выше результат не накладывает никаких ограничений на концы отдельно взятого интервального элемента матрицы \mathbf{A} либо правой части \mathbf{b} , если в рассмотрение не привлечена информация о концах других элементов. Ограничение на ту или иную комбинацию концов интервалов, следующее из (10.40)–(10.41), является существенно коллективным, и, чтобы принять его во внимание, мы должны отслеживать концы задействованных интервальных элементов по всей матрице \mathbf{A} и всему вектору \mathbf{b} . Для практической реализации этих идей с каждой интервальной линейной системой $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i)$, порождённой в процессе дробления исходной ИС-ЛАУ (4)–(5), мы связываем

- 1) вспомогательную целочисленную $n \times n$ -матрицу $W = (w_{ij})$, элементы которой равны ± 1 или 0, такую что

$$w_{ij} := \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \overline{\mathbf{a}}_{ij}, \\ 0, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}, \\ 1, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \underline{\mathbf{a}}_{ij}, \end{cases}$$

и

- 2) вспомогательные целочисленные n -векторы $s = (s_i)$ и $t = (t_j)$ с компонентами ± 1 или 0, такие что

$$w_{ij} = s_i t_j \quad (10.42)$$

для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, и

$$s_i := \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{r}_i = \underline{\mathbf{b}}_i, \\ 0, & \text{если } \mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i, \\ 1, & \text{если } \mathbf{r}_i = \overline{\mathbf{b}}_i. \end{cases}$$

Матрицу W и векторы s, t мы будем называть *контрольными*, имея в виду с их помощью контролировать в нашем алгоритме процесс дробления ведущих ИСЛАУ на потомки. Как видим, значения элементов t_j определяются опосредованно, через матрицу W , вектор s и соотношения (10.42). Рабочий список \mathcal{L} , кроме того, будет состоять теперь из расширенных записей

$$\left(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), W, s, t \right), \quad (10.43)$$

имеющих *шесть* полей за счёт добавления трёх полей для хранения значений W, s и t , которые получаются с предыдущих шагов алгоритма.

Контрольным векторам s и t предстоит быть “приближениями” соответственно к векторам σ и τ , входящим в равенства (10.40)–(10.41), в то время как $W = s t^\top$ — это “приближение” к матрице $(\sigma \tau^\top)$. В начале работы алгоритма мы инициализируем все элементы контрольной матрицы W и контрольных векторов s и t нулями, а затем перевычисляем их с целью заменить нулевые элементы (соответствующие нашему незнанию того, какой именно конец интервала задействован в той или иной комбинации) на ненулевые (соответствующие определённому концу интервала). Контрольные матрица W и векторы s, t , взаимно влияя друг на друга и перевычисляясь в процессе работы алгоритма, предназначены, следовательно, для наблюдения над процессом дробления исходной интервальной линейной системы и его корректировки таким образом, чтобы порождать лишь варианты, допускаемые равенствами (10.40)–(10.41). Это реализуется следующим образом.

На каждом шаге алгоритма при разбиении интервального элемента \mathbf{h} ведущей ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, мы смотрим на соответствующее значение

- матрицы $W = (w_{ij})$, если элемент \mathbf{h} есть \mathbf{q}_{kl} из матрицы \mathbf{Q} ,
- вектора $s = (s_i)$, если элемент \mathbf{h} есть \mathbf{r}_k из вектора правой части \mathbf{r} .

В случае $w_{kl} = 0$ ($s_k = 0$ соответственно), мы порождаем, согласно обычной процедуре бисекции из простейшего метода дробления параметров Табл. 10.5, *две* интервальных системы-потомка $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$, которые отвечают обоим концам рассекаемого интервала \mathbf{h} . Но если $w_{kl} \neq 0$ ($s_k \neq 0$ соответственно), то после бисекции ведущей ИСЛАУ мы можем оставить в рабочем списке только *одного* потомка

от $Qx = r$. Какого именно, зависит от знака элемента w_{kl} (s_k соответственно). Более точно, вместо традиционной бисекции мы выполняем процедуру, представленную в Табл. 10.6.

Таблица 10.6. Порождение систем-потомков

```

IF ( пересекается  $q_{kl}$  ) THEN
  IF (  $w_{kl} = 0$  ) THEN
    порождает системы  $Q'x = r'$  и  $Q''x = r''$  так, что
       $q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij}$  для  $(i, j) \neq (k, l)$ ,
       $q'_{kl} \leftarrow \underline{q}_{kl}$ ,  $q''_{kl} \leftarrow \bar{q}_{kl}$ ,  $r' \leftarrow r'' \leftarrow r$ ;
  ELSE
    порождает систему  $Q'x = r'$  так, что
       $r' \leftarrow r$ ,  $q'_{ij} \leftarrow q_{ij}$  для  $(i, j) \neq (k, l)$ ,
       $q'_{kl} \leftarrow \begin{cases} \underline{q}_{kl}, & \text{для } w_{kl} = 1, \\ \bar{q}_{kl}, & \text{для } w_{kl} = -1; \end{cases}$ 
  END IF
END IF

IF ( пересекается  $r_k$  ) THEN
  IF (  $s_k = 0$  ) THEN
    порождает системы  $Q'x = r'$  и  $Q''x = r''$  так, что
       $Q' \leftarrow Q'' \leftarrow Q$ ,
       $r'_i \leftarrow r_i$  для  $i \neq k$ ,  $r'_k \leftarrow \underline{r}_k$ ,  $r''_k \leftarrow \bar{r}_k$ ,
  ELSE
    порождает систему  $Q'x = r'$  так, что
       $Q' \leftarrow Q$ ,  $r'_i \leftarrow r_i$  для  $i \neq k$ ,
       $r'_k \leftarrow \begin{cases} \underline{r}_k, & \text{для } s_k = -1, \\ \bar{r}_k, & \text{для } s_k = 1; \end{cases}$ 
  END IF
END IF

```

Почему это в принципе возможно? Другими словами, не может ли отбрасывание второй интервальной системы-потомка в вышеописанной процедуре нарушить то свойство ведущих оценок $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, что они приближают искомым $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ снизу?

Для ответа на этот вопрос заметим, что в новой процедуре дробления из Табл. 10.6 мы отбрасываем лишь те системы, которые

- не принадлежат множеству точечных систем $\{A^{\sigma\tau}x = b^\sigma \mid \sigma, \tau \in \mathcal{E}\}$,
- не содержат такие системы.

Следовательно, в силу свойства (10.33) базисного оценивающего метода и, принимая во внимание равенство (10.40), мы получаем

$$\begin{aligned}
 & \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \\
 &= \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left((A^{\sigma\tau})^{-1}b^\sigma \right)_\nu \geq \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \Upsilon(A^{\sigma\tau}, b^\sigma) \\
 &\geq \min\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \mathbf{Q} \ni A^{\sigma\tau} \text{ и } \mathbf{r} \ni b^\sigma \text{ для некоторых } \sigma, \tau \in \mathcal{E}\} \\
 &\geq \min\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \text{система } \mathbf{Q}x = \mathbf{r} \text{ присутствует в списке } \mathcal{L}\} \\
 &= \text{ведущая оценка } \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Таким образом, с новой процедурой дробления Табл. 10.6 ведущая оценка действительно приближает $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ снизу.

Приступая к описанию формальной вычислительной схемы “модификации Рона”, мы начнём с установления правил перевычисления контрольных матрицы W и векторов s и t в процессе работы алгоритма. Если в результате дробления ведущей ИСЛАУ порождаются системы-потомки $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$, то соответствующие им новые контрольные матрицы будем обозначать через W' и W'' , а пары новых контрольных векторов — через s', t' и s'', t'' .

Существует взаимно-однозначное соответствие между вектором s и правой частью интервальной системы $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, в то время как дробление интервальной матрицы \mathbf{Q} рассматриваемой ИСЛАУ влияет на векторы s и t лишь неявно, посредством матрицы W и условий (10.42). Последнее, тем не менее, позволяет организовать перевычисление W , s и t на каждом таком шаге алгоритма, который завершается дроблением

интервального элемента ведущей системы *на два конца*. В противном случае, если ведущая интервальная система порождает только одного потомка $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ в соответствии с Табл. 10.6, векторы s , t и матрица W остаются неизменными, так что

$$s' := s, \quad t' := t, \quad W' := W.$$

Итак, пусть ведущая интервальная система $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ рассечена на два ИСЛАУ-потомка $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$, определённые в Табл. 10.6. Каким должен быть закон, в соответствии с которым формируются матрицы W' , W'' и векторы s' , s'' , t' , t'' соответствующие системам-потомкам? Сначала мы можем присвоить

$$W'' \leftarrow W' \leftarrow W, \quad s'' \leftarrow s' \leftarrow s, \quad t'' \leftarrow t' \leftarrow t,$$

а затем выполнить следующую двухэтапную процедуру перевычисления:

Во-первых, модифицируем W' , W'' и s' , s'' на основе информации о только что выполненной бисекции ведущей ИСЛАУ. Именно,

- (I) если рассечённым элементом был q_{kl} из матрицы \mathbf{Q} , то в матрицах $W' = (w'_{ij})$ и $W'' = (w''_{ij})$ мы присваиваем

$$w'_{kl} \leftarrow 1 \quad \text{и} \quad w''_{kl} \leftarrow -1;$$

- (II) если рассечённым элементом был r_k из вектора правой части \mathbf{r} , то в векторах $s' = (s'_i)$ и $s'' = (s''_i)$ мы присваиваем

$$s'_k \leftarrow -1 \quad \text{и} \quad s''_k \leftarrow 1.$$

Во-вторых, перевычисляем каждое из двух семейств взаимосвязанных объектов, — W' , s' , t' и W'' , s'' , t'' соответственно, — используя соотношения (10.42). Именно,

- (I) если s' или t' изменился, пытаемся перевычислить матрицу W' ;
 (II) если W' или t' изменился, пытаемся перевычислить вектор s' ;
 (III) если W' или s' изменился, пытаемся перевычислить вектор t' .

Таблица 10.7. Перевычисление W' , W'' , s' , s'' , t' , t'' .

```

 $W'Change \leftarrow false;$        $s'Change \leftarrow false;$        $t'Change \leftarrow false;$ 
 $W''Change \leftarrow false;$     $s''Change \leftarrow false;$     $t''Change \leftarrow false;$ 
IF ( ( пересекается  $q_{kl}$  из  $Q$  ) AND (  $q_{kl}$  пересекается на два конца ) ) THEN
   $w'_{kl} \leftarrow 1;$    $w''_{kl} \leftarrow -1;$    $W'Change \leftarrow true;$    $W''Change \leftarrow true;$ 
END IF
IF ( ( пересекается  $r_k$  из  $r$  ) AND (  $r_k$  пересекается на два конца ) ) THEN
   $s'_k \leftarrow -1;$    $s''_k \leftarrow 1;$    $s'Change \leftarrow true;$    $s''Change \leftarrow true;$ 
END IF
DO WHILE (  $W'Change$  OR  $s'Change$  OR  $t'Change$  )
  IF (  $s'Change$  OR  $t'Change$  ) THEN
    пытаемся перевычислить матрицу  $W'$  согласно (10.42);
    IF (  $W'$  изменилась ) THEN  $W'C \leftarrow true$ 
    ELSE  $W'C \leftarrow false$   END IF
  END IF
  IF (  $W'Change$  OR  $t'Change$  ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $s'$  согласно (10.42);
    IF (  $s'$  изменился ) THEN  $s'C \leftarrow true$ 
    ELSE  $s'C \leftarrow false$   END IF
  END IF
  IF (  $W'Change$  OR  $s'Change$  ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $t'$  согласно (10.42);
    IF (  $t'$  изменился ) THEN  $t'C \leftarrow true$ 
    ELSE  $t'C \leftarrow false$   END IF
  END IF
   $W'Change \leftarrow W'C;$    $s'Change \leftarrow s'C;$    $t'Change \leftarrow t'C;$ 
END DO
DO WHILE (  $W''Change$  OR  $s''Change$  OR  $t''Change$  )
  IF (  $s''Change$  OR  $t''Change$  ) THEN
    пытаемся перевычислить матрицу  $W''$  согласно (10.42);
    IF (  $W''$  изменилась ) THEN  $W''C \leftarrow true$ 
    ELSE  $W''C \leftarrow false$   END IF
  END IF
  IF (  $W''Change$  OR  $t''Change$  ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $s''$  согласно (10.42);
    IF (  $s''$  изменился ) THEN  $s''C \leftarrow true$ 
    ELSE  $s''C \leftarrow false$   END IF
  END IF
  IF (  $W''Change$  OR  $s''Change$  ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $t''$  согласно (10.42);
    IF (  $t''$  изменился ) THEN  $t''C \leftarrow true$ 
    ELSE  $t''C \leftarrow false$   END IF
  END IF
   $W''Change \leftarrow W''C;$    $s''Change \leftarrow s''C;$    $t''Change \leftarrow t''C;$ 
END DO

```

Инструкции (I)–(III) повторяются последовательно одна за другой в цикле до тех пор, пока изменения в W' , s' и t' не прекратятся. Та же самая процедура применяется затем к W'' , s'' , t'' .

Полная алгоритмическая схема приведённой выше процедуры оказывается довольно сложной, так что имеет смысл снабдить читателя более строгим и детальным её описанием. Таблица 10.7 представляет соответствующий псевдокод и ниже мы даём объяснения к нему. Булевские переменные

$W'Change$, $s'Change$, $t'Change$, $W'C$, $s'C$, $t'C$

и

$W''Change$, $s''Change$, $t''Change$, $W''C$, $s''C$, $t''C$

— это “флаги”, введённые с целью отображения текущего статуса изменений в W' , s' , t' и W'' , s'' , t'' соответственно. Значения **true** означают, что объект, с которым связан флаг, был изменен на текущей итерации процесса перевычисления, тогда как значение **false** означает “без изменений”. $W'C$, $s'C$, $t'C$, $W''C$, $s''C$, $t''C$ — это вспомогательные булевские переменные, необходимые для организации работы программы. Фактически, алгоритм из Табл. 10.7. Во-первых, это перевычисление контрольных матриц W' и W'' по итогам дробления ведущей ИСЛАУ. Во-вторых, это попытка улучшить уже насчитанные значения контрольных матриц и векторов, основываясь на связывающих их соотношениях (10.42).

Для того, чтобы завершить формальное описание модификации Рона, нам нужно лишь определить, что имеется в виду под “пытаемся перевычислить матрицу W' согласно (10.42)”, “пытаемся перевычислить вектор s' согласно (10.42)” и тому подобные инструкции из Табл. 10.7.

Обозначим прописными греческими буквами K' , Λ' и Ω' подмножества индексов элементов вектора s' , вектора t' и матрицы W' соответственно, которые изменили свои значения (с 0 на ± 1) на текущем шаге процедуры перевычисления Табл. 10.7. K' и Λ' — это, следовательно, подмножества множества первых n натуральных чисел

$$\{1, 2, \dots, n\},$$

тогда как Ω есть подмножество множества всех пар, составленных из первых n натуральных чисел, т.е. подмножество множества

$$\{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (n, n)\}.$$

Каждое из множеств K' , Λ' , Ω' может быть пустым, но может содержать и более чем один элемент. Тогда наша “попытка перевычислить вектор s' ” может быть организована следующим образом:

Таблица 10.8. Перевычисление s'

```

IF (  $W'Change$  ) THEN
  DO FOR  $(k, l) \in \Omega'$ 
    IF (  $t'_l \neq 0$  )  $s'_k \leftarrow w'_{kl}/t'_l$ 
  END DO
END IF
IF (  $t'Change$  ) THEN
  DO FOR  $l \in \Lambda'$ 
    DO FOR  $k = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $s_k = 0$  AND  $w'_{kl} \neq 0$  )  $s'_k \leftarrow w'_{kl}/t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF

```

“Попытка перевычислить вектор t' ” может быть выполнена аналогично приведённому выше с тем единственным отличием, что цикл “DO FOR $l \in \Lambda'$ ” во втором IF-операторе должен быть заменен на “DO FOR $k \in K'$ ”.

Далее в Табл. 10.9 приводится процедура перевычисления W' . То же самое следует организовать для перевычисления s'' , t'' и W'' . При этом нам необходимо организовать индексные подмножества K'' , Λ'' и Ω'' для представления индексов компонент вектора s'' , вектора t'' и матрицы W'' соответственно, которые изменились на текущем шаге перевычислительного процесса.

Наконец, мы должны упомянуть следующее замечательное свойство контрольной матрицы W : в каждой её 2×2 -подматрице любой элемент равен произведению остальных трех элементов. Чтобы убедиться в этом, обозначим через i_1 , i_2 номера строк и через j_1 , j_2 — номера столбцов, образующих рассматриваемую подматрицу. Тогда в соответ-

Таблица 10.9. Перевычисление W'

```

IF (  $s'Change$  ) THEN
  DO FOR  $k \in K'$ 
    DO FOR  $l = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $t'_l \neq 0$  )  $w'_{kl} \leftarrow s'_k t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF
IF (  $t'Change$  ) THEN
  DO FOR  $l \in \Lambda'$ 
    DO FOR  $k = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $s'_k \neq 0$  )  $w'_{kl} \leftarrow s'_k t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF

```

ствии с определением (10.42)

$$w_{i_1 j_1} = \sigma_{i_1} \tau_{j_1},$$

$$w_{i_1 j_2} = \sigma_{i_1} \tau_{j_2},$$

$$w_{i_2 j_1} = \sigma_{i_2} \tau_{j_1},$$

$$w_{i_2 j_2} = \sigma_{i_2} \tau_{j_2}.$$

Перемножая любые три из вышеприведённых равенств, к примеру, первое, второе и четвертое, получим

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_2} = \sigma_{i_1} \tau_{j_1} \sigma_{i_1} \tau_{j_2} \sigma_{i_2} \tau_{j_2}.$$

Квадрат любой компоненты векторов σ и τ есть 1, так что

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_2} = \tau_{j_1} \sigma_{i_2} = w_{i_2 j_1}. \quad (10.44)$$

То же самое с остальными элементами подматрицы:

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_1} = w_{i_2 j_2}, \quad (10.45)$$

$$w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_1} w_{i_2 j_2} = w_{i_1 j_1}, \quad (10.46)$$

$$w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_1} w_{i_2 j_2} = w_{i_1 j_2}. \quad (10.47)$$

Иногда соотношения (10.44)–(10.47) могут оказаться полезными для дальнейшего уточнения контрольной матрицы W . Например, пусть мы намереваемся рассесть ведущую интервальную систему $Qx = r$ по элементу q_{kl} , в то время как соответствующий элемент w_{kl} матрицы W равен нулю. При этом согласно обычному правилу дробления мы должны были бы породить две системы-потомка вместо ИСЛАУ $Qx = r$. Но разумно сделать попытку доопределить w_{kl} , поискав 2×2 -подматрицы в W , имеющие ненулевыми все элементы за исключением w_{kl} . Если такая подматрица в W найдётся, то мы присваиваем элементу w_{kl} значение произведения остальных трёх элементов. Сказанное может быть реализовано в виде следующего алгоритма

Таблица 10.10. Уточнение W с помощью 2×2 -подматриц

```

DO FOR i = 1 TO n
  DO FOR j = 1 TO n
    IF ( i ≠ k AND j ≠ l ) THEN
      IF ( wij ≠ 0 AND wil ≠ 0 AND wkj ≠ 0 ) THEN
        wkl ← wijwilwkj;
      EXIT
    END IF
  END IF
END DO
END DO

```

где оператор EXIT означает выход из всех блоков и циклов выписанного псевдокода.

10.7г Влияние базового алгоритма

Обсудим теперь очень важный вопрос о влиянии базового метода *Encl* и, следовательно, способа получения оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ на вычислительную схему конкретных реализаций методов дробления параметров.

Для работы многих методов внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ требуются некоторые начальные приближения, содержащие оцениваемое множество решений. Таковы, например, интервальный метод Гаусса-Зейделя, методы Кравчика, Гея и др. Нетрудно понять, что интервальный вектор внешней оценки объединённого множества решений ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, уже найденный на предшествующих шагах алгоритма, может служить начальным приближением для процедуры внешнего оценивания объединённых множеств решений систем-потомков $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ с $\mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{Q}$ и $\mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}$. То же самое относится и к вычислению “обратной интервальной матрицы”, которая нужна в тесте на монотонность из §10.7а и при выборе рассекаемого интервального элемента из §10.7б.

Имеет смысл поэтому при выборе соответствующих базовых методов хранить интервальные векторы внешней оценки множеств решений и “обратную интервальную матрицу” с предыдущих шагов алгоритма. Для этого потребуется расширить образующие рабочий список \mathfrak{L} записи ещё на два поля, так что теперь мы будем оперировать не тройками (10.34) или шестёрками (10.43), а восьмерками

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), W, s, t, \mathbf{Y}, x), \quad (10.48)$$

т. е. записями, состоящими из восьми членов, где

\mathbf{Q} — интервальная $n \times n$ -матрица, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$,

\mathbf{r} — интервальный n -вектор, $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$,

$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — нижний конец ν -ой компоненты (для заданного фиксированного номера ν) внешней интервальной оценки множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$,

W, s, t — вспомогательные величины, необходимые для реализации модификации Рона и определенные в §10.7в,

\mathbf{Y} — интервальная $n \times n$ -матрица, такая что
 $\mathbf{Y} \supseteq \{ \mathbf{Q}^{-1} \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{Q} \},$

\mathbf{x} — интервальный n -вектор, такой что $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$.

Ещё одно соображение. Как правило, любая из методик решения внешней задачи для ИСЛАУ, удовлетворяющая “условию точности” (10.35), даёт точную оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ не только тогда, когда \mathbf{Q} и \mathbf{r} — точечные (неинтервальные), но и на некотором более широком множестве начальных данных, когда часть элементов в \mathbf{Q} и \mathbf{r} могут быть интервалами. Например, интервальный метод Гаусса-Зейделя [34, 46], методы Гея [25] и другие итерационные методы, основанные на теореме о сжимающем отображении [1], обеспечивают точную оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ в случае вещественной матрицы \mathbf{Q} , а вектор правых частей \mathbf{r} может быть при этом любым. Получаемая по интервальному методу Гаусса оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, очевидно, точна для верхних треугольных матриц \mathbf{Q} , и т.д. Возможны и более хитроумные условия на взаимное расположение элементов интервальной матрицы \mathbf{Q} , их знак, ширину и т.п. Как правило, выявление всех практически наиболее значимых подобных ситуаций нетрудно алгоритмизовать.

Таким образом, для естественной остановки метода дробления параметров совсем не обязательно дожидаться полного “овеществления” ведущей ИСЛАУ $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ (условие завершения цикла “DO WHILE” в Табл. 10.5). Достаточно уже и того, чтобы ведущая оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ являлась точной.

Можно пойти ещё дальше и предусмотреть возможность динамической смены в алгоритме базового метода *Encl.* Первоначально это может быть какой-нибудь метод с широкой сферой применимости, но и с большой погрешностью внешнего оценивания. Затем, по мере до-

стижения в процессе дробления заданной узости интервальных систем-потомков, он заменяется на более точный специализированный алгоритм.

Мораль, вытекающая из вышеизложенного, прежняя: для достижения наибольшей эффективности методов дробления параметров все составляющие реального алгоритма, применяемого к той или иной конкретной задаче, как то

структура записей в рабочем списке \mathcal{L} ,

способ их обработки,

способ дробления ведущих ИСЛАУ,

другие характеристики алгоритма

должны быть тщательно увязаны с особенностями решаемой задачи. Общая схема методов дробления параметров предоставляет большую свободу разработчику, но нужно умело ей пользоваться.

10.7д Отсев бесперспективных записей

Рассмотрим, наконец, модификацию простейшего алгоритма GLinPPS , связанную с вычислением оценок $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}, \text{mid } \mathbf{r})$ для “середин” ведущих систем. Она позволит отчасти контролировать точность вычисления $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \}$, а также удалять из списка \mathcal{L} *бесперспективные записи*, т.е. такие, которые никогда не сделаются ведущими. Благодаря последнему обстоятельству несколько ограничивается рост длины списка \mathcal{L} .

Действительно, пусть наряду с оценкой $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ для интервальных систем $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, порождаемых алгоритмом, вычисляются ещё и величины $\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$, где, как и ранее, символом \square обозначена операция взятия какой-то фиксированной точки из интервала. Очевидно, что

$$\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \geq \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}),$$

и значения $\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$ приближают $\min\{x \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ сверху: если для каждого шага алгоритма определять

$$\omega = \min \Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \tag{10.49}$$

по всем интервальным линейным системам $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, когда-либо побывавшим в списке \mathfrak{L} до этого шага, то

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \leq \omega.$$

С другой стороны, если $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ — ведущая ИСЛАУ, то

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\},$$

и потому ещё одним критерием естественной остановки алгоритма может служить достижение требуемой малости величины $(\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))$.

Далее, запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), p) \in \mathfrak{L}$, удовлетворяющая на некотором шаге условию

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \omega, \quad (10.50)$$

при дальнейшем выполнении алгоритма уже никогда не станет ведущей, и её удаление из списка \mathfrak{L} не окажет никакого влияния на результат работы алгоритма. Вообще, тестироваться неравенством (12) должны на каждом шаге алгоритма все вновь заносимые в список \mathfrak{L} записи, тогда как “чистки” списка, — его просмотр и удаление всех удовлетворяющих (12) записей, — имеет смысл проводить лишь после изменений (т.е. уменьшений) параметра ω .

Конечно, было бы идеальным выбирать точечные матрицу $\Box\mathbf{Q}$ и вектор $\Box\mathbf{r}$ так, чтобы

$$(\Box\mathbf{Q}, \Box\mathbf{r}) \in \text{Arg min}\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{Q}, \mathbf{r} \in \mathbf{r}\}.$$

Фактически, мы так и будем поступать, если оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — точная, полагая

$$\Upsilon(\Box\mathbf{Q}, \Box\mathbf{r}) = \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}).$$

Но в общем случае подобный “удачный” выбор не менее труден, чем решение исходной задачи, и потому в целях минимизации возможных отклонений $(\Box\mathbf{Q}, \Box\mathbf{r})$ от множества $\text{Arg min}\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{Q}, \mathbf{r} \in \mathbf{r}\}$ целесообразней всего брать тогда в качестве $\Box\mathbf{Q}$ и $\Box\mathbf{r}$ середины матрицы \mathbf{Q} и вектора \mathbf{r} , т.е. $\text{mid } \mathbf{Q}$ и $\text{mid } \mathbf{r}$, соответственно.

10.7е Итоговая схема

Приводимые ниже псевдокоды Табл. 10.11 и 10.12 суммируют развитые в предшествующих пунктах модификации методов дробления параметров (PPS-методов) для внешнего оценивания объединённого множеств решений ИСЛАУ.

Таблица 10.11. Алгоритм LinPPS1

DO WHILE ((ведущая оценка $\Upsilon(Q, r)$ неточна) или $(\omega - \Upsilon(Q, r) > \epsilon)$)
 по формулам (10.38) вычисляем интервальные расширения для

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i},$$

соответствующие элементам q_{ij} и r_i с ненулевой шириной;
 “сжимаем” в соответствии с (10.36)–(10.37) в Q и r элементы, на
 которых была выявлена монотонная зависимость x_ν от q_{ij} и r_i ;
 ищем в ведущей ИСЛАУ $Qx = r$ интервальный элемент s ,
 которому соответствует наибольшее из произведений

$$\left| \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } q_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } r_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\};$$

порождаем интервальные системы-потомки $Q'x = r'$ и $Q''x = r''$:
 если $s = q_{kl}$ для некоторых $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем
 $q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij}$ для $(i, j) \neq (k, l)$, $q'_{kl} \leftarrow \underline{q}_{kl}$, $q''_{kl} \leftarrow \bar{q}_{kl}$,
 $r' \leftarrow r'' := r$;
 если $s = r_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем
 $r'_i \leftarrow r''_i \leftarrow r_i$ для $i \neq k$, $r'_k \leftarrow \underline{r}_k$, $r''_k \leftarrow \bar{r}_k$,
 $Q' \leftarrow Q'' \leftarrow Q$;
 вычисляем брусы $x' \leftarrow \text{Encl}(Q', r')$ и $x'' \leftarrow \text{Encl}(Q'', r'')$;
 вычисляем оценки $\Upsilon(Q', r')$ и $\Upsilon(Q'', r'')$;
 вычисляем внешние оценки для “обратных интервальных
 матриц” $Y' \supseteq (Q')^{-1}$ и $Y'' \supseteq (Q'')^{-1}$;
 вычисляем оценки $\Upsilon(\text{mid } Q', \text{mid } r')$ и $\Upsilon(\text{mid } Q'', \text{mid } r'')$,
 полагаем $\mu \leftarrow \min\{\Upsilon(\text{mid } Q', \text{mid } r'), \Upsilon(\text{mid } Q'', \text{mid } r'')\}$;
 удаляем из \mathcal{L} бывшую ведущей запись $(Q, r, \Upsilon(Q, r), Y, x)$;
 если $\Upsilon(Q', r') \leq \omega$, то заносим запись $(Q', r', \Upsilon(Q', r'), Y', x')$
 в список \mathcal{L} в порядке возрастания значений третьего поля;
 если $\Upsilon(Q'', r'') \leq \omega$, то заносим запись $(Q'', r'', \Upsilon(Q'', r''), Y'', x'')$
 в список \mathcal{L} в порядке возрастания значений третьего поля;
 если $\omega > \mu$, то полагаем $\omega \leftarrow \mu$ и чистим список \mathcal{L} : удаляем
 из него все такие записи $(Q, r, \Upsilon(Q, r), Y, x)$, что $\Upsilon(Q, r) > \omega$;
 END DO

Теоретически модификация Рона позволяет нам уменьшить экспоненциальный множитель в верхней оценке трудоёмкости PPS-методов с 2^{n^2+n} до 4^n , но

- это сделано ценой существенного утяжеления алгоритма, так что его программная сложность становится весьма высокой,
- при решении больших практических задач размерности, превосходящей несколько десятков, как 2^{n^2+n} , так и 4^n делаются недостижимыми величинами, а методы дробления параметров следует рассматривать, скорее, как итерационную уточняющую процедуру, которая никогда не выполняется до своего естественного завершения.

На наш взгляд, в каждом конкретном случае пользователь, основываясь на информации о размере задачи, её структуре, наличных вычислительных ресурсах и т.п., самостоятельно должен решать вопрос о целесообразности включения модификации Рона в ту или иную реализацию метода дробления параметров. По этой причине мы приводим ниже две итоговые вычислительные схемы методов дробления параметров, с модификацией Рона и без неё.

В Табл. 10.11 и 10.12 предполагается, что в качестве базового метода внешнего оценивания *Encl* взят интервальный метод Гаусса-Зейделя, но это сделано лишь для определённости. Подчеркнем, что методы дробления параметров — это общая схема, а Табл. 10.11 и 10.12 представляют лишь две её возможные конкретизации. Разработанные нами выше конструкции содержат ряд “свободных переменных”, которые должны быть настраиваемы под конкретную задачу, так что мы можем, следовательно, говорить о целом *классе методов*, основанных на общей идее дробления интервальных параметров системы.

Алгоритм Табл. 10.11 описывает метод дробления параметров без модификации Рона. Его рабочий список \mathcal{L} образуется пятичленными записями вида $((\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x}))$, а для начала работы этого алгоритма, который мы называем **LinPPS1**, нам нужно

- найти предварительные (“грубые”) внешние оценки для объединённого множества решений исходной интервальной системы и “обратной интервальной матрицы”, т.е. вычислить $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\mathbf{Y} \supseteq \mathbf{A}^{-1}$.
- назначить точность $\epsilon > 0$,

Таблица 10.12. Алгоритм LinPPS2

```

DO WHILE ( ( ведущая оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  неточна ) или  $(\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \epsilon)$  )
    по формулам (10.38) вычисляем интервальные расширения для
        
$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i};$$

    “сжимаем” в соответствии с (10.36)–(10.37) в  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$  элементы,
        на которых выделена монотонность зависимости  $x_\nu$  от  $q_{ij}$  и  $r_i$ ;
    находим среди элементов системы  $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$  интервал  $\mathbf{h}$ , который
        соответствует наибольшему из произведений
        
$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\};$$

    пытаемся уточнить матрицу  $W$  процедурой из Табл. 7;
    “дробим” элемент  $\mathbf{h}$  и порождаем одну или две ИСЛАУ-потомки
         $\mathbf{Q}'\mathbf{x} = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''\mathbf{x} = \mathbf{r}''$  процедурой из Табл. 3;
    если порождены две системы-потомка, перевычисляем матрицы
         $W'$ ,  $W''$  и векторы  $s'$ ,  $s''$ ,  $t'$ ,  $t''$  процедурами из Табл. 4
        и Табл. 5–6; иначе присваиваем  $W' \leftarrow W$ ,  $s' \leftarrow s$ ,  $t' \leftarrow t$ ;
    вычисляем интервальный вектор  $\mathbf{x}' \leftarrow \text{Encl}(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$  и, возможно,
         $\mathbf{x}'' \leftarrow \text{Encl}(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$ , беря  $\mathbf{x}$  в качестве начального приближения;
    присваиваем оценку  $v' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$  и, возможно,  $v'' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$ ;
    уточняем оценку обратной интервальной матрицы  $\mathbf{Y}' \supseteq (\mathbf{Q}')^{-1}$ 
        и, возможно,  $\mathbf{Y}'' \supseteq (\mathbf{Q}'')^{-1}$ , беря  $\mathbf{Y}$  начальным приближением;
    вычисляем оценку  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}')$  и, возможно,  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'')$ 
        и присваиваем  $\mu \leftarrow \min\{ \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}'), \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'') \}$ ;
    удаляем бывшую ведущую запись  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    если  $v' \leq \omega$ , то помещаем запись  $(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', v', W', s', t', \mathbf{Y}', \mathbf{x}')$  в список
         $\mathcal{L}$  в порядке возрастания третьего поля;
    если ведущая ИСЛАУ породила две системы-потомка и  $v'' \leq \omega$ ,
        то помещаем запись  $(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', v'', W'', s'', t'', \mathbf{Y}'', \mathbf{x}'')$  в список  $\mathcal{L}$ 
        в порядке возрастания третьего поля;
    если  $\omega > \mu$ , то присваиваем  $\omega \leftarrow \mu$  и чистим список  $\mathcal{L}$ , т.е. удаляем
        из него все такие записи  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ , что  $v > \omega$ ;
END DO

```

- положить $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leftarrow \underline{\mathbf{x}}$ и $\omega \leftarrow +\infty$,
- инициализировать рабочий список \mathcal{L} записью $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{x}}, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$.

Алгоритм Табл. 10.12, названный нами **LinPPS2**, представляет метод дробления параметров с модификацией Рона, который оперирует с восьмичленными записями вида (10.48). Для начала его работы необходимо выполнить первые три пункта, как для алгоритма **LinPPS1**, далее положить

$$W \leftarrow 0, \quad s \leftarrow 0, \quad t \leftarrow 0$$

для матрицы W и векторов s и t , введённых в §3.3, и инициализировать рабочий список \mathcal{L} записью $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{x}}, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$.

В заключение полезно проследить, в каком отношении построенные нами алгоритмы находятся к другим методам решения ИСЛАУ. Прежде всего, отметим, что имеется глубокая связь (фактически, являющаяся двойственностью) между развиваемыми в настоящей работе методами дробления параметров и предложенными автором ранее классом методов дробления решений [58, 60]. Но к идее построения методов дробления параметров для интервальных линейных систем можно прийти и несколько иным путём, доводя до логического завершения некоторые из давно и широко известных в интервальном анализе подходов к решению ИСЛАУ.

Одним из прародителей алгоритма **LinPPS1** можно, по-видимому, считать процедуру Купермана-Хансена (см. [1]), в которой внешние интервальные оценки для объединенного множества решений ИСЛАУ ищутся на основе пассивного однократного использования информации о производных компонент решения по элементам матрицы и правой части системы, подобно тому как это делается в §10.7а. Но в реальных интервальных системах не всегда удастся выявить определенный знак этих производных, а потому какие-то интервальные элементы всё равно останутся интервальными и после применения теста на монотонность. И Куперман и Хансен в этом месте останавливались и завершали процесс решения “внешней задачи”. Дальнейшее уточнение искомой оценки на этом пути возможно лишь при добавлении активной процедуры измельчения элементов матрицы ИСЛАУ, хотя рассматривать при этом будет нужно все получающиеся при таком измельчении-дроблении интервальные системы.

Фактически, это и реализуется в алгоритмах **GlinPPS**, **LinPPS1** и **LinPPS2**. Их рабочий список \mathcal{L} хранит все возникшие в процессе ра-

боты варианты (за исключением тех заведомо бесперспективных, которые выявляются посредством теста из (6.40)), а обрабатывается на каждом шаге алгоритма “самый перспективный” вариант, если мерой этой перспективности считать значение оценки $\Upsilon(Q, r)$.

10.7ж Численные эксперименты

Сказанное в предыдущих параграфах мы проиллюстрируем результатами вычислительных экспериментов, выполненных с несколькими версиями методов дробления параметров. Для того, чтобы выявить влияние на их работу различных факторов, были проанализированы результаты тестовых расчётов с четырьмя методами:

- А — простейший метод дробления параметров (т.е. алгоритм **GLinPPS**) дополненный процедурой удаления из списка \mathcal{L} бесперспективных записей;
- В — тот же алгоритм, что и А, но дополненный процедурой сжатия элементов матрицы ИСЛАУ на основе информации о монотонности оценки (см. §10.7а);
- С — тот же алгоритм, что и В, но дополненный процедурой сжатия компонент правой части ИСЛАУ на основе информации о монотонности оценки (см. §10.7а);
- Д — алгоритм **LinPPS1**. Он отличается от алгоритма С тем, что рас-секаемый элемент в нём выбирается из условия максимизации произведения оценки производной на ширину интервала (как это описано в §10.7б).

Модификация Рона из §10.7в нами в этих алгоритмах не использовалась. Фактически на основании приводимых ниже результатов можно сравнивать даже пять алгоритмов, включая самый простейший алгоритм **GLinPPS** поскольку он отличается от алгоритма А лишь длиной списка.

В качестве базового метода мы использовали интервальный метод Гаусса-Зейделя со стандартным предобуславливанием обратной средней матрицей, и этот же метод использовался для внешнего оценивания “обратной интервальной матрицы” ИСЛАУ. Модельной задачей

нам служила интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} t & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & t & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & t \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (10.51)$$

которая была предложена А. Ноймайером в книге [46] и уже встречалась нам в Главе 2.

Как и для рассмотренной ранее тестовой системы (10.20), некоторую информацию о строении объединённого множества решений интервальной линейной системы (10.51) можно получить из соображений симметрии. Из-за уравниваемости вектора правой части рассматриваемая ИСЛАУ инвариантна относительно изменения знаков всех компонент решения на противоположный, так что её множество решений Ξ' является центрально симметричным относительно начала координат, и, в частности,

$$\min\{x_i \mid x \in \Xi'\} = -\max\{x_i \mid x \in \Xi'\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.52)$$

Так как для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ после замены x_i на x_j и наоборот интервальная система (10.51) остается неизменной, то множество Ξ' симметрично относительно биссектрисы положительного и отрицательного ортантов пространства \mathbb{R}^n , так что

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \Xi'\} &= \min\{x_j \mid x \in \Xi'\}, \\ \max\{x_i \mid x \in \Xi'\} &= \max\{x_j \mid x \in \Xi'\} \end{aligned}$$

для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Сопоставляя эти соотношения с (10.52), можно заключить, что интервальная оболочка множества решений Ξ' системы (10.51) является гиперкубом с центром в начале координат.

При приближении значения t к границам неособенности (n для чётных размерностей и $\sqrt{n^2 - 1}$ для нечётных) размеры объединённого множества решений ИСЛАУ (10.51) неограниченно возрастают. Варьируя t легко получить набор тестов для проверки развитых нами алгоритмов оптимального решения “внешней задачи” для ИСЛАУ.

Наконец, для интервальной 7×7 -системы Ноймайера с диагональю 10 алгоритмы А, В и С вообще не просчитывают оптимальную оценку объединённого множества решений до конца даже за время порядка часов. Дело в том, что примерно после 50000 итераций алгоритма

“быстрая” оперативная память ЭВМ оказывается исчерпанной списком \mathfrak{L} и начинающийся обмен с “медленной” памятью на жёстком магнитном диске практически сводит на нет производительность процессора, так что вычисления делаются чрезвычайно медленными. Но наиболее продвинутый алгоритм D всё же позволяет успешно решить задачу до конца за 112 секунд процессорного времени, сделав 5246 итераций-бисекций при максимальной длине списка 4050.

Из анализа результатов прогонов можно сделать выводы об эффективности тех или иных модификаций методов дробления параметров. Довольно неожиданными являются данные о процессорном времени решения задач, согласно которым алгоритм B оказывается наименее эффективным. То есть, затраты на исследование монотонности только по элементам матрицы оборачиваются (по крайней мере, для систем Ноймайера) лишь утяжелением алгоритма.

Интересно и поучительно сравнить на интервальных линейных системах методы дробления параметров с методами Рона, предложенными в 80-е годы [53] и в настоящее время наиболее популярными среди зарубежных исследователей и пользователей интервального анализа [46, 35]. Методы Рона были реализованы и тщательно оттестированы К. Мадсенем и О. Тофтом [42, 61], которые использовали в качестве модельных задач разнообразные интервальные линейные системы размерности от 2 до 30. Для нас особенную ценность имеют их результаты на ИСЛАУ предельной размерности 30 с тремя матрицами, являющимися интервализацией известных тестовых матриц вычислительной линейной алгебры из справочника [26]:

матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}, \quad (10.53)$$

матрицы конечно-разностной аппроксимации второй производной на симметричном шаблоне¹

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ & -1 & 2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 2 & -1 & \\ 0 & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (10.54)$$

и матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Интервальный вектор правой части для всех трех случаев брался одинаковым и равным

$$([0.999, 1.001], [0.999, 1.001], \dots, [0.999, 1.001])^\top.$$

Интересно, что ещё в начале 90-х годов на персональном компьютере с процессором Intel 80486DX и математическим сопроцессором К. Мадсен и О. Тофт не смогли успешно просчитать до конца интервальные линейные 30×30 -системы

¹Она является M -матрицей. См., например, [46].

- 1) с матрицей (10.53), все элементы которой равномерно уширены на интервал $[-0.002, 0.002]$;
- 2) с матрицей (10.54), все элементы которой уширены на $[-0.0003, 0.0003]$;
- 3) с матрицей (10.55), все элементы которой уширены на $[-0.00001, 0.00001]$.

Вскоре задача 2 из этого списка всё-таки была успешно решена, но для этого К. Мадсену и О. Тофту потребовалось привлечение транспьютера Meiko Transputer System и распараллеливание вычислений на 32-х процессорах. Общее последовательное время работы всех процессоров составило при этом 2471.27 секунд (более 40 минут). О решении же задач 1 и 3 даже на транспьютере в работах [42, 61] ничего не сообщается.

Что касается методов дробления параметров, то алгоритм, фигурирующий под литерой D (наиболее продвинутый), успешно справился со всеми тремя упомянутыми задачами на однопроцессорной рабочей станции SUN Ultra-10 (тактовая частота процессора 300 MHz, шины — 100 MHz, ёмкость ОЗУ — 128 Мбайт). При этом

Задача 1 была решена всего за 2 итерации-бисекции и время порядка одной секунды по каждой отдельной оцениваемой компоненте множества решений,

Задача 2 была решена всего за 2 итерации-бисекции и время порядка одной секунды по каждой из отдельных оцениваемых компонент множества решений,

Задача 3 даже с более широкой матрицей радиуса 0.0001 успешно решалась для отдельной оцениваемой компоненты множества решений за время, не превосходящее 14 минут и не более чем за 1646 итераций-бисекций. Этот худший результат был достигнут для 10-й компоненты множества решений, а для других компонент трудоёмкость исполнения варьировалась в широких пределах от 50–60 итераций-бисекций до нескольких сотен и тысячи с лишним.

Наконец, рекордный результат: алгоритм D позволил успешно вычислить оптимальные координатные оценки множества решений интервальной линейной системы размера 300 на 300 с матрицей, полученной из (10.53) уширением всех ненулевых элементов на $[-0.002, 0.002]$,

всего за 2 (две) итерации-бисекции и время порядка 20 минут (по любой из компонент).

Завершая параграф, можно резюмировать, что данные тестовых прогонов, а также свойство последовательной гарантии методов дробления параметров (см. §10.8), убедительно свидетельствуют в пользу их решительного предпочтения перед методами Рона.

10.8 Последовательно гарантирующие и финально гарантирующие алгоритмы

Предположим, что нам предъявлена труднорешаемая интервальная задача (можно даже отвлечься от требования оптимальности её решения). При сколько-нибудь значительных её размерах типична ситуация, когда

*количество машинных операций и/или памяти,
необходимых для решения поставленной задачи,
намного превосходит ресурсы вычислительной
системы, имеющейся в нашем распоряжении.*

(CRA)

Это условие столь важно для наших последующих рассуждений, что достойно выделения специальной аббревиатурой

CRA — от английского “Complexity Predominance Assumption”

— *Допущение о Преобладании Сложности* задачи над возможностями ЭВМ. В подобной ситуации мы, скорей всего, столкнемся с необходимостью насильственной остановки вычислений (например, из-за истечения срока аренды ЭВМ, либо в силу необходимости получения хоть каких-то результатов в установленный срок и т.п.) и довольствоваться тем, что уже насчитано к моменту остановки. Главная неприятность при таком развитии событий состоит в том, что поспешно выдаваемый интервальный ответ может даже не удовлетворять нужному способу оценивания, и, следовательно, не является решением поставленной интервальной задачи оценивания (т.к. используемый нами алгоритм “до конца” не доработал). В этом случае затраченное нами машинное время и другие ресурсы фактически пропадут впустую.²

²Возможный выход из этого положения — не дожидаясь полного исчерпания ресурсов ЭВМ, остановить трудоёмкий алгоритм и попытаться за оставшееся вре-

Целесообразно поэтому разделить все интервальные алгоритмы на “хорошие” и “плохие” в зависимости от того, обеспечивают ли они требуемый задачей способ оценивания интервального ответа лишь в момент своей естественной остановки, когда прорабатывают “до конца”, или же этот способ оценивания достигается для последовательного ряда эффективно вычисляемых промежуточных результатов, каждый из которых, следовательно, может быть выдан в качестве правильного ответа задачи при прерывании алгоритма в любой момент. При сделанном нами допущении *СПА*, когда сложность решаемой задачи значительно превосходит возможности ЭВМ именно алгоритмы второго класса более предпочтительны с точки зрения обеспечения гарантированности (удовлетворения заданному способу оценивания) результата вычислений. Далее будем называть такие алгоритмы *последовательно гарантирующими* (пошагово гарантирующими) или же *алгоритмами с последовательной гарантией* (sequentially guaranteeing или with sequential guarantee), в отличие от *финально гарантирующих*, или *алгоритмов с финальной гарантией* (finally guaranteeing или with final guarantee), которые обеспечивают нужный способ оценивания результата лишь по завершении их работы. В известном смысле проведенное нами разделение “интервальных” алгоритмов является аналогом существующего в традиционной вычислительной математике противопоставления “итерационные методы — прямые методы”.

При строгом определении понятий последовательно гарантирующего и финально гарантирующего алгоритмов можно исходить из того, что по современным представлениям эффективно вычислимыми считаются алгоритмы с полиномиальной верхней оценкой сложности. Таким образом, мы принимаем следующее

Определение 10.8.1 *Алгоритм для решения интервальной задачи оценивания назовём последовательно гарантирующим, если при своём выполнении он порождает последовательность (конечную или бесконечную) полиномиально вычисляемых ответов решаемой задачи (т.е. приближённых оценок в смысле требуемого способа оценивания). Алгоритм, решающий интервальную задачу оценивания, назовём финально гарантирующим, если он выдаёт ответ к решаемой задаче лишь при естественном завершении своей работы.*

мя получить хоть какое-то решение задачи другим, “быстрым” методом. Но мы не будем рассматривать таких вычислительных процессов. Следуя терминологии А.Г. Сухарева [15], можно сказать, что в наших рассмотрениях итоговая операция алгоритма остается неизменной.

В частности, алгоритм *a priori* является последовательно гарантирующим, если он сам имеет полиномиальную сложность выполнения. Итоговый результат последовательно гарантирующего алгоритма может быть пределом бесконечной последовательности промежуточных ответов, или последним членом некоторой конечной последовательности, или же ещё чем то иным.

Естественно, что сфера действия введённой нами классификации интервальных алгоритмов не является строго очерченной, поскольку не вполне строг смысл самого понятия труднорешаемости. Несомненную пользу она способна принести и при рассмотрении, например, полиномиально сложных алгоритмов, не являющихся “трудными” в традиционном понимании, но которые имеются в виду использовать в ситуации, когда выполнено допущение *CPA*. Поэтому будет более правильным, хотя и менее строгим, определить последовательно гарантирующие алгоритмы, как противоположность к финально гарантирующим, т.е. к таким, которые обеспечивают правильный ответ задачи лишь при своём естественном завершении.

Впервые понятия последовательно гарантирующего алгоритма и финально гарантирующего алгоритма были введены С. П. Шарым в работе [60] применительно к алгоритмам для нахождения оптимального решений “внешней задачи” для интервальных алгебраических систем, но, основные его положения и выводы, как нетрудно понять, в равной мере применимы к алгоритмам для любых труднорешаемых интервальных задач оценивания. Мы, в свою очередь, имея общее понимание того, что является интервальной задачей смогли корректно распространить концепцию последовательной гарантии на все алгоритмы для решения подобных задач.

Для иллюстрации вышесказанного вновь обратимся, следуя работе [60], к “внешней задаче” для интервальной линейной системы $Ax = b$, т.е. к задаче нахождения оценок для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ снизу и для $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ сверху, $\nu = 1, 2, \dots, n$, по отношению к объединённому множеству решений

$$\Xi_{uni}(A, b) = \Xi_{uni} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}.$$

На сегодняшний день существуют четыре принципиально различных подхода к вычислению оптимальных (точных) оценок объединённого множества решений для общих интервальных линейных систем. Первый из них восходит к работе У. Оеттли [49], который обнаружил, что пересечение объединённого множества решений с ортантами простран-

ства \mathbb{R}^n является выпуклым многогранником. Таким образом, точное значение $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ может быть найдено путём решения в каждом из ортантов некоторой задачи линейного программирования и последующим взятием минимума из результатов. Но этот алгоритм, как нетрудно понять, основывается на пассивной переборной стратегии, а трудоёмкость его экспоненциально растёт в зависимости от размерности n . Поэтому практическая значимость его невелика.

Следующие два вычислительных подхода к оптимальному решению “внешней задачи” для квадратных интервальных линейных систем — это методы дробления решений и методы дробления параметров (PSS-методы и PPS-методы), предложенные С.П. Шарым в работах [17, 58, 59, 60]. Оба подхода имеют в своей основе стратегию метода “ветвей и границ”. Хотя в худшем случае сложность выполнения методов дробления решений пропорциональна 2^n , а верхняя оценка сложности выполнения методов дробления параметров равна даже 2^{n^2} , эти методы являются *адаптивными* в отличие от подхода Оеттли. Иными словами, при исполнении каждого последующего шага как в методах дробления решений, так и в методах дробления параметров мы полностью используем информацию о ходе и результатах исполнения предыдущих шагов. Алгоритмы подобного типа являются более предпочтительными в практических вычислениях, поскольку имеют более гибкую вычислительную схему, позволяющую им подстраиваться под конкретную решаемую задачу. Уже первые реализации методов дробления решений и параметров продемонстрировали их высокую вычислительную эффективность, практичность и открытость для дальнейших усовершенствований и модификаций.

Наконец, четвёртый и в настоящий момент наиболее популярный в литературе подход к оптимальному решению “внешней задачи” предложен И. Роном [53] (см. также [46]). Отталкиваясь от характеристики Оеттли-Прагера (5.20) для объединённого множества решений, он показывает, что для случая квадратной неособенной матрицы \mathbf{A} искомые значения $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, достигаются на множестве не более чем 2^n решений так называемого “уравнения Оеттли-Прагера”

$$|\text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}. \quad (10.56)$$

Вычисляя все возможные решения этого уравнения и сравнивая их между собой, мы получим оптимальные оценки множества решений за конечное число шагов. Поскольку процесс определения каждого по-

следующего решения для (10.56) никак не зависит от решений, уже найденных раньше, алгоритм Рона в целом не является адаптивным (т.е. подобен переборным методикам), в то время как его трудоёмкость пропорциональна 4^n в худшем случае.

Таким образом, все подходы, разработанные к настоящему моменту для вычисления оптимальных решений “внешней задачи” для общих интервальных линейных систем имеют экспоненциальную в наихудшем случае трудоёмкость. Но этот факт не является следствием “плохости” самих алгоритмов, а отражает глубокие свойства самого объединённого множества решений интервальных линейных систем. Как мы уже неоднократно отмечали (см. §4.4 и далее), даже задача распознавания того, пусто или нет множество Ξ_{uni} , является NP-полной. NP-трудна также задача вычисления оптимальных по координатным оценкам объединённого множества решений. Следовательно, экспоненциальная сложность всех перечисленных выше алгоритмов является существенной и не может быть устранена (при повсеместно принимаемом условии “ $P \neq NP$ ”) [3].

Каковы же преимущества и недостатки методов дробления решений и методов дробления параметров в сравнении с другими подходами для нахождения оптимальных решений “внешней задачи”? Наиболее важная особенность методов дробления решений и параметров состоит в том, что они порождают последовательности приближённых оценок искомых величин “с нужной стороны”, т.е. для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ снизу, а для $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ сверху. Именно такие оценки и требуются в соответствии со смыслом “внешней задачи”. Процесс выполнения метода дробления параметров, например, разбивается на ряд эффективно вычислимых этапов-шагов, в результате каждого из которых мы получаем некоторое решение “внешней задачи”. После того, как в таком алгоритме проработал хотя бы один из этих этапов, его прерывание в любой момент приведёт к тому, что мы всё равно будем иметь в своём распоряжении некоторое решение “внешней задачи”. Иными словами, если у нас имеются достаточные вычислительные мощности, то, реализуя методы дробления параметров (равно как и методы дробления решений) мы можем быть вполне уверены, что некоторый ответ к задаче будет наверняка получен, хотя, возможно, и не оптимальный. Следовательно, как методы дробления решений, так и методы дробления параметров являются *последовательно гарантирующими*. С учётом труднорешаемости “внешней задачи” для интервальных линейных систем, это свойство радикальным образом выделяет методы дробле-

ния решений и методы дробления параметров из всех других подходов для вычисления оптимального решения.

Напротив, два других рассмотренных подхода к нахождению оптимальных решений “внешней задачи”, — Оеттли и Рона, — имея экспоненциальную в худшем случае трудоёмкость, дают желаемые “внешние” оценки объединённого множества решений лишь в финале, при естественном завершении своей работы, поскольку раньше мы не можем гарантировать то, что вычисленная оценка в действительности не превосходит $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ (соответственно, не меньше $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$). Следовательно, эти алгоритмы являются *финально гарантирующими*. Если размерность интервальной линейной системы достаточно велика (всего несколько десятков), то, в силу труднорешаемости “внешней задачи”, количество арифметических и логических операций, необходимое для того, чтобы задача была наверняка решена, начинает превосходить количество операций, выполнимое на сколь угодно мощном компьютере за любое разумное время (час, день, год или даже столетие). В этих условиях совершенно нельзя быть уверенным, что финально гарантирующий алгоритм, будучи применённым к задаче, вообще завершит свою работу и, таким образом, что будет получено решение поставленной задачи. Иначе говоря, применяя финально гарантирующий алгоритм, мы рискуем совершенно попусту растратить время и деньги без того, чтобы получить хоть какой-то ответ к нашей задаче.

Этот пессимистичный прогноз особенно справедлив для пассивных переборных алгоритмов, какими являются подходы Оеттли-Прагера и Рона к оптимальному решению “внешней задачи” для интервальных линейных систем. Ситуация была бы более благоприятной, если бы эти алгоритмы являлись адаптивными: в этом случае их экспоненциальная трудоёмкость достигалась бы лишь на наихудших вариантах, а в среднем, для “не очень плохих задач”, алгоритмы работали бы с приемлемыми трудозатратами. Но, к сожалению, это не так.

Итак, финально гарантирующие алгоритмы оказываются малопригодными для практического решения больших труднорешаемых задач, ответ на которые должен удовлетворять некоторым качественным требованиям. Естественный выход из создавшегося затруднения состоит в переконструировании алгоритма таким образом, чтобы он выдавал в процессе своего выполнения, до своего полного естественного завершения, некоторые несложно вычисляемые промежуточные результаты, которые могут быть служить более или менее точными ответами к

решаемой задаче. Именно это подразумевается определением последовательно гарантирующего алгоритма.

Отметим, что алгоритмы из [49, 48, 53] для нахождения оптимальных решений “внешней задачи” — всё-таки последовательно гарантирующие, но относительно “слабого внутреннего” оценивания, описанного в примере (C) из §4.3б. Фактически, эти алгоритмы решают не “внешнюю”, а некоторую другую задачу для интервальной линейной системы, требующую оценивания $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ сверху и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ снизу, иными словами, когда оценивание должно проводиться *слабым внутренним* образом.

Другой пример. З. Румпом в цикле работ [54, 55, 56, 57] и др. развит оригинальный подход к решению “внешней задачи” для систем алгебраических уравнений (как линейных, так и нелинейных), в основе которого — базирующийся на теореме Брауэра тест существования объединённого множества решений системы внутри заданного интервального вектора. Отправляясь от какого-нибудь приближенного точечного решения системы строится расширяющаяся последовательность интервальных векторов, для каждого из них проверяется тест существования. Итерирование прекращается, если последующий результат оказывается включенным в предыдущий. Поскольку требуемая внешняя интервальная оценка множества решений получается лишь после того, как выполнено условие остановки алгоритма, а до этого момента ничего определённого о промежуточных результатах сказать нельзя, то подход Румпа следует отнести к финально гарантирующим.

Наконец, обратимся к линейной задаче о допусках для интервальной системы линейных уравнений $Ax = b$, т.е. к задаче о внутреннем интервальном оценивании “допустимого множества решений”

$$\Xi_{tol}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in A)(Ax \in b)\}.$$

Изложенный в Главе 6 “центровой подход” к её решению является, очевидно, последовательно гарантирующим: отыскание центра интервального решения сводится к максимизации вогнутого функционала и, следовательно, эффективно осуществляется за полиномиальное время, а дальнейшее “раздувание” центра до интервального решения задачи о допусках хотя и выполняется экспоненциально сложными алгоритмами, но все его промежуточные результаты содержатся в $\Xi_{tol}(A, b)$.

Естественно, что признание какого-либо алгоритма последовательно гарантирующим или же финально гарантирующим не должно восприниматься как “окончательный приговор” для него. Лучше рассмат-

ривать наличие последовательной гарантии или её отсутствие лишь как ещё одну, дополнительную характеристику этого алгоритма, которая в некоторых случаях позволит более компетентно решить вопрос о его практической применимости. Несомненно, что ценность обладания этим качеством различна для различных алгоритмов и наивысшей она является для наиболее трудоёмких алгоритмов.

К примеру, значительная часть этой книги посвящена развитию так называемого “формального подхода” к решению различных задач внутреннего и внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений. Этот подход является финально гарантирующим, так как искомая интервальная оценка находится лишь по завершении процесса решения вспомогательного “уравнения в дуализациях”, т.е. задачи, которая, как было показано А.В. Лакеевым [39, 40], в большинстве случаев NP-трудна (труднорешаема). Тем не менее, при практическом решении с помощью формального подхода различных постановок для интервальных линейных систем $Ax = b$ с “не слишком широкими” интервальными матрицами субдифференциальный метод Ньютона (см. Главу 12) демонстрирует столь высокую вычислительную эффективность, что даже не вполне ясно, нужно ли в данной ситуации что-либо лучшее.

10.9 Решение интервальных линейных систем со связями

Предмет этого параграфа — задачи оценивания множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений, на элементы матрицы которых наложены некоторые связи. Мы подробно рассмотрим случай интервальных симметричных линейных систем, а на некоторые другие типы ИСЛАУ со связями — имеющими кососимметричные, персимметричные, ганкелевы, тёплицевы или циркулянтные матрицы — наши рассуждения переносятся с минимальными модификациями. Таким образом, мы решаем задачу:

Найти (по возможности меньший) брус U , содержащий множество решений $\Xi_{sym}(A, b)$ интервальной линейной системы $Ax = b$.	(10.57)
---	---------

В свою очередь, задача (4.22) может быть редуцирована к следующей покомпонентной форме:

$$\begin{aligned} &\text{Для интервальной линейной системы } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\text{найти как можно более точные оценки для} \\ &\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \text{ снизу и для} \\ &\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \text{ сверху, } \nu = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.58)$$

В этой постановке, как и ранее, можно даже ограничиться требованием вычисления только минимума $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, поскольку

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = -\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, -\mathbf{b})\}.$$

Ниже мы предполагаем неособенность интервальной матрицы \mathbf{A} .

10.9a Теория

Для уточнения внешних оценок множеств решений интервальных систем уравнений в §§10.6–10.7 были подробно разработаны *методы дробления параметров*, основанные на часто используемой в интервальном анализе идее адаптивного (т.е. подстраивающегося под задачу и текущий результат) дробления интервалов входных данных. Для интервальных линейных систем с независимыми величинами на входе вычислительная схема методов дробления параметров выглядит особенно просто, так как экстремальные оценки множеств решений достигаются на крайних матрицах и правых частях (теорема Никеля). Дробление интервальных параметров системы сводится в этом случае, фактически, к распадению интервала на его концы.

Но для систем со связанными параметрами этот факт, как мы уже отмечали, неверен. Таким образом, описанная в §§10.6–10.7 вычислительная схема методов дробления параметров не применима напрямую для решения задач (10.57)–(10.58). Тем не менее, путём несложной модификации исходной схемы мы можем исправить это положение, получив в результате методы для вычисления точных (оптимальных) оценок множеств решений ИСЛАУ со связями.

Основная идеи этой модификации просты и естественны:

- мы отказываемся от поконцевого дробления элементов интервальной системы и дробим интервальные параметры системы, как это обычно делается в интервальных методах глобальной оптимизации, на подинтервалы ненулевой длины, в объединении дающие исходный дробимый интервал,
- мы дробим интервальную систему уравнений так, чтобы получающиеся системы-потомки соответствовали связям, накладываемым на систему.

Например, если рассматривается интервальная симметричная система уравнений, то в единичном акте дробления должны одновременно дробиться симметричные относительно главной диагонали элементы матрицы, чтобы получающиеся ИСЛАУ снова имели интервальные симметричные системы. Если же матрица исходной системы была интервальной кососимметричной (персимметричной, ганкелевой, тёплицевой, циркулянтной и т.п.), то и системы-потомки на каждом шаге алгоритма должны порождаться так, чтобы иметь кососимметричную (персимметричную, ганкелеву, тёплицеву, циркулянтную и т.п.) матрицу.

Приступая к реализации наших задумок, обозначим аналогично тому, как это было сделано ранее,

$Encl$ — некоторый фиксированный метод внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ, который будем называть *базовым методом*;

$Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки для множества решений $\Xi_{sym}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ системы $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, т. е. $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^n$ и

$$Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \supseteq \Xi_{sym}(\mathbf{Q}, \mathbf{r});$$

$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — нижний конец ν -ой компоненты (для заданного фиксированного номера $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$) внешней интервальной оценки множества решений $\Xi_{sym}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, получаемой методом $Encl$, т. е.

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) := \left(\underline{Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})} \right)_{\nu}. \quad (10.59)$$

Подчеркнем, что, коль скоро $\Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то в качестве базовых методов можно брать традиционные и хорошо разработанные

методы внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ без связей, описанные, к примеру, в Главе 7. Получается, что алгоритм оценивания множеств решений ИСЛАУ со связями конструируется из более простых и грубых методов решения ИСЛАУ с независимыми данными.

Мы потребуем лишь от базового метода *Encl* удовлетворения “условию монотонности” (10.33) и “условию точности” (10.35) из §10.66. Имеем

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = (\tilde{A}^{-1}\tilde{b})_\nu$$

для некоторых точечной симметричной матрицы $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и точечного вектора $\tilde{b} = (\tilde{b}_i) \in \mathbb{R}^n$, составленных из представителей элементов матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} , причём по самому определению оценки Υ

$$\Upsilon(\tilde{A}, \tilde{b}) \leq (\tilde{A}^{-1}\tilde{b})_\nu.$$

Предположив, что в матрице \mathbf{A} симметричные относительно главной диагонали элементы \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{a}_{ji} имеют ненулевую ширину, обозначим

\mathbf{A}' — матрицу, полученную из \mathbf{A} заменой элементов \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{a}_{ji} на $[\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \text{mid } \mathbf{a}_{ij}]$,

\mathbf{A}'' — матрицу, полученную из \mathbf{A} заменой элементов \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{a}_{ji} на $[\text{mid } \mathbf{a}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$,

$\tilde{\mathbf{A}}'$ — матрицу, полученную из \tilde{A} заменой элементов \tilde{a}_{ij} и \tilde{a}_{ji} на $[\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \text{mid } \mathbf{a}_{ij}]$,

$\tilde{\mathbf{A}}''$ — матрицу, полученную из \tilde{A} заменой элементов \tilde{a}_{ij} и \tilde{a}_{ji} на $[\text{mid } \mathbf{a}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$.

Интервальные системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}$ и $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}$, полученные из исходной системы путём рассечения пары симметричных относительно главной диагонали интервальных элементов пополам, мы будем называть *системами-потомками* для $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Далее, так как

$$\tilde{\mathbf{A}}' \subseteq \mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}, \quad \tilde{\mathbf{A}}'' \subseteq \mathbf{A}'' \subseteq \mathbf{A},$$

и $\tilde{b} \subseteq \mathbf{b}$, то “свойство монотонности” (10.33) имеет своим следствием

неравенства

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}})$$

и

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}}).$$

Следовательно, беря почленный минимум от соответствующих частей неравенств, мы получим

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &\leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \\ &\leq \min\{\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}})\}. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Кроме того, поскольку матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ обязательно содержится либо в $\tilde{\mathbf{A}}'$, либо в $\tilde{\mathbf{A}}''$, то справедливо, по крайней мере, одно из неравенств

$$\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}) \quad \text{или} \quad \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}),$$

так что

$$\begin{aligned} \min\{\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}})\} &\leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}) \leq (\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_{\nu} \\ &= \min\{x_{\nu} \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Сопоставление неравенств (10.60) и (10.61) приводит к соотношению

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \leq \min\{x_{\nu} \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\},$$

и, как следствие, к следующему практическому рецепту:

решив две интервальных линейных “системы-потомка”

$$\mathbf{A}'x = \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}''x = \mathbf{b},$$

мы можем прийти, вообще говоря, к более точной оценке снизу для искомого значения $\min\{x_{\nu} \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ в виде

$$\min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\}.$$

Такой же эффект имеет и дробление в векторе правых частей \mathbf{b} какой-нибудь компоненты \mathbf{b}_i на подинтервалы $[\underline{\mathbf{b}}_i, \text{mid } \mathbf{b}_i]$ и $[\text{mid } \mathbf{b}_i, \overline{\mathbf{b}}_i]$, что может быть обосновано выкладками, совершенно аналогичными (10.60)–(10.61). Поэтому впредь для единообразия мы договоримся обозначать ИСЛАУ-“потомки”, получающиеся из $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ дроблением пополам одного интервального элемента в матрице \mathbf{A} либо в векторе \mathbf{b} , через $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}''\mathbf{x} = \mathbf{b}''$.

Процедуру улучшения оценки для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\text{sym}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ посредством дробления элементов интервальной системы (5) можно повторить по отношению к системам-потомкам $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}''\mathbf{x} = \mathbf{b}''$, затем снова разбить потомков от $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}''\mathbf{x} = \mathbf{b}''$ и снова улучшить оценку и т. д. Мы оформим подобный процесс последовательного улучшения оценки снизу для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\text{sym}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ так, как это делается в широко известном в комбинаторной оптимизации “методе ветвей и границ” [13] и как это было адаптировано для интервальных методов глобальной оптимизации (см. §3.6):

во-первых, организуем все интервальные системы $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$, которые возникают в процессе дробления исходной ИСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, вместе с их оценками $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ в некоторый список \mathcal{L} ;

во-вторых, дробить будем лишь ту интервальную систему $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ из списка \mathcal{L} , которая обеспечивает рекордную (наилучшую) на данный момент оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ для искомой величины $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\text{sym}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$;

в-третьих, в подвергаемой дроблению ИСЛАУ мы будем дробить лишь самый широкий из интервальных элементов.

Итак, в процессе выполнения алгоритма мы будем поддерживать список \mathcal{L} , состоящий из записей-троек вида

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})),$$

где

\mathbf{Q} — интервальная $n \times n$ -матрица, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$,

\mathbf{r} — интервальный n -вектор, $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$.

Кроме того, образующие \mathcal{L} записи будут упорядочены по возрастанию значений оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, а первую запись списка, так же как и соответствующие ИСЛАУ $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ и оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ (рекордную в списке), мы будем называть *ведущими* на данном шаге. Полный псевдокод

Таблица 10.13. Простейший метод дробления параметров
для интервальных симметричных линейных систем

Вход

Интервальная симметричная линейная система $Ax = b$.

Номер оцениваемой компоненты $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Допуск $\delta > 0$.

Метод *Encl*, формирующий оценку Υ по правилу (10.59).

Выход

Оценка Z снизу для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(A, b)\}$.

Алгоритм

присваиваем $Q \leftarrow A$ и $r \leftarrow b$;

вычисляем оценку $v \leftarrow \Upsilon(Q, r)$;

инициализируем рабочий список $\mathcal{L} \leftarrow \{(Q, r, v)\}$;

DO WHILE (максимум ширины элементов в Q и r больше δ)

в матрице $Q = (q_{ij})$ и векторе $r = (r_i)$ выбираем
элемент s , имеющий наибольшую ширину;

порождаем интервальные линейные системы-потомки

$Q'x = r'$ и $Q''x = r''$ следующим образом:

если $s = q_{kl}$ для некоторых $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, то

$q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij}$ для $(i, j) \neq (k, l)$ или $(i, j) \neq (l, k)$,

$q'_{lk} \leftarrow q'_{kl} \leftarrow [\underline{q}_{kl}, \text{mid } q_{kl}]$, $q''_{lk} \leftarrow q''_{kl} \leftarrow [\text{mid } q_{kl}, \bar{q}_{kl}]$,

$r' \leftarrow r'' \leftarrow r$;

если $s = r_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то

$Q' \leftarrow Q'' \leftarrow Q$, $r'_k \leftarrow [\underline{r}_k, \text{mid } r_k]$, $r''_k \leftarrow [\text{mid } r_k, \bar{r}_k]$,

$r'_i \leftarrow r''_i \leftarrow r_i$ для $i \neq k$;

вычисляем оценки $v' \leftarrow \Upsilon(Q', r')$ и $v'' \leftarrow \Upsilon(Q'', r'')$;

удаляем из \mathcal{L} бывшую ведущей запись (Q, r, v) ;

заносим записи (Q', r', v') и (Q'', r'', v'') в список \mathcal{L}

в порядке возрастания третьего поля;

обозначаем первую запись списка через (Q, r, v) ;

END DO

$Z \leftarrow v$;

получающегося нового алгоритма, который мы аналогично [18] также назовём *методом дробления параметров*, представлен в таблице (где через “ \leftarrow ” обозначен оператор присваивания). Он отличается от метода дробления параметров, представленного ранее способом порождения интервальных систем-потомков из ведущей интервальной системы и условием остановки.

То, насколько близкими окажутся результат работы алгоритма и искомый $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, зависит, с одной стороны, от способа получения оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}$, т. е. от выбранного нами базового метода для решения ИСЛАУ-потомков, а с другой — от обусловленности точечных систем, образующих последнюю ведущую систему (её можно оценивать в процессе выполнения алгоритма). В частности, для того, чтобы при $\delta \rightarrow 0$ вычисленное алгоритмом значение стремилось бы к $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, необходимо и достаточно выполнения “условия точности” (10.35). Если же в исходной ИСЛАУ суммарная ширина интервальных элементов оказывается “большой” в сравнении с δ , то, как правило, простейший метод дробления параметров не будет прорабатывать до конца, и потому целесообразней рассматривать его как итеративную уточняющую процедуру.

10.96 Тест на монотонность

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, и нам известны

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i}$$

— интервальные расширения соответствующих производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

от ν -ой компоненты вектора решения системы уравнений $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ по ij -ому элементу матрицы $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ и i -ому элементу вектора $\mathbf{r} = (r_i)$, взятых с учётом наложенных на систему связей. Если интервальные

$n \times n$ -матрица $\tilde{\mathbf{Q}} = (\tilde{q}_{ij})$ и n -вектор $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_i)$ образованы из элементов

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} [\underline{q}_{ij}, \underline{q}_{ij}], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \geq 0, \\ [\bar{q}_{ij}, \bar{q}_{ij}], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \leq 0, \\ \mathbf{q}_{ij}, & \text{при } \text{int } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \ni 0, \end{cases} \quad (10.62)$$

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} [\underline{r}_i, \underline{r}_i], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \geq 0, \\ [\bar{r}_i, \bar{r}_i], & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \leq 0, \\ \mathbf{r}_i, & \text{при } \text{int } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \ni 0, \end{cases} \quad (10.63)$$

где “int” обозначает внутренность интервала, то, очевидно,

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{r}})\} = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}.$$

А поскольку количество существенно интервальных (с ненулевой шириной) элементов в $\tilde{\mathbf{Q}}$ и $\tilde{\mathbf{r}}$ может быть, вообще говоря, меньшим, чем в \mathbf{Q} и \mathbf{r} , то, переходя от исходной ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ к системе $\tilde{\mathbf{Q}}x = \tilde{\mathbf{r}}$, мы упрощаем задачу вычисления $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{sym}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$.

Ранее в интервальном анализе в ряде численных методик уже использовались производные решений систем линейных уравнений по элементам матрицы и правой части (см., к примеру, Главу 17 книги [1]). Выведем формулы для этих производных с учётом симметричности матрицы системы уравнений.

Пусть k и l — некоторые фиксированные индексы, такие что $1 \leq k \leq l \leq n$. Распишем систему уравнений $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ в виде

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} x_j = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.64)$$

и продифференцируем по q_{kl} . Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial q_{kl}}(q_{ij}x_j) = \frac{\partial q_{ij}}{\partial q_{kl}}x_j + q_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}},$$

где

$$\frac{\partial q_{ij}}{\partial q_{kl}} = \begin{cases} 0, & \text{если } (i, j) \neq (k, l), \\ 1, & \text{если } (i, j) = (k, l), \end{cases}$$

мы получим из (10.64)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}} = 0, \quad \text{если } i \neq k \text{ и } i \neq l, \\ \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}} + x_l = 0, \quad \text{если } i = k, \\ \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}} + x_k = 0, \quad \text{если } i = l. \end{array} \right.$$

Таким образом, если

$$\frac{\partial x}{\partial q_{kl}} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_{kl}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial q_{kl}} \right)^\top,$$

то

$$Q \cdot \frac{\partial x}{\partial q_{kl}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow k\text{-е место} \\ \\ \longleftarrow l\text{-е место.} \end{array}$$

По этой причине

$$\frac{\partial x}{\partial q_{kl}} = Q^{-1} \cdot \left(0, \dots, 0, -x_l, 0, \dots, 0, -x_k, 0, \dots, 0 \right)^\top,$$

и если $Y = (y_{ij})$ — обратная матрица для Q , то производные решения вещественной симметричной линейной системы $Qx = r$ по элементам матрицы даются формулами

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_{kl}} = -y_{\nu k}x_l - y_{\nu l}x_k.$$

Дифференцирование уравнений (10.64) по r_k приводит к более простым соотношениям

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial r_k} = 0, & \text{если } i \neq k, \\ \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial r_k} = 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Таким образом, если

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial r_k}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial r_k} \right)^\top,$$

то

$$Q \cdot \frac{\partial x}{\partial r_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow k\text{-е место.}$$

По этой причине

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} = Q^{-1} \cdot \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \right)^\top,$$

и если $Y = (y_{ij})$ — обратная матрица для Q , то производные решения вещественной симметричной линейной системы $Qx = r$ по элементам вектора правой части даются формулами

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial r_k} = y_{\nu k}.$$

Следовательно, если $Y = (y_{ij})$ — “обратная интервальная матрица” для Q , т. е. внешняя интервальная оценка для множества обратных матриц из Q ,

$$Y \supseteq \{ Q^{-1} \mid Q \in Q \},$$

а x_k и x_l — k -ая и l -ая компоненты некоторого интервального вектора $x \supseteq \Xi_{sym}(Q, r)$, то мы можем принять следующие интервальные оценки производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{kl}} = -y_{\nu k} x_l - y_{\nu l} x_k, \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_k} = y_{\nu k}.$$

Для интервальных линейных систем с кососимметричными матрицами аналогичные интервальные оценки производных, как нетрудно убедиться, имеют вид

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{kl}} = -y_{\nu k} x_l + y_{\nu l} x_k, \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_k} = y_{\nu k}.$$

Вычисление “обратной интервальной матрицы” для Q можно выполнить как решение задачи внешнего оценивания объединённого множества решений интервального матричного уравнения

$$QY = I, \quad I — \text{единичная матрица,}$$

применив, к примеру, n раз (для каждого столбца) тот же самый метод внешнего оценивания *Elc1*, который выбран базовым для всего алгоритма. Соответствующие инструкции — пересчёт обратной интервальной матрицы и проверку на монотонность с возможным последующей заменой некоторых интервальных элементов на их концы по формулам (10.62)–(10.63) — следует выполнять сразу после порождения интервальных систем потомков в основном цикле алгоритма.

10.9в Стратегия дробления

В простейшем методе дробления параметров мы рассекали на каждом шаге самый широкий из интервальных элементов ведущей ИСЛАУ. Можно ли путём специального выбора элемента для дробления обеспечить наиболее значительное улучшение целевой функции на каждом шаге алгоритма? Строгая и точная оптимизация методов дробления параметров в таком виде трудна и вряд ли целесообразна в полном

объёме. Мы будем решать этот вопрос, руководствуясь следующими эвристическими соображениями: величина произведения ширины (или радиуса) интервального элемента на модуль интервального расширения соответствующей производной решения может служить, в некотором смысле, мерой того, как бисекция элементов из \mathbf{Q} либо \mathbf{r} влияет на $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\text{sym}}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$ и размеры объединённого множества решений ИСЛАУ.

Далее, оценки объединённого множества решений ИСЛАУ, получаемые по большинству существующих методов, являются тем более точными, чем меньше размеры этого множества решений. С подобными базовыми методами уменьшение размеров множества решений $\Xi_{\text{sym}}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ должно приводить к аналогичному и сравнимому по величине изменению в оценке $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$. При этом, следовательно, требование наиболее быстрого улучшения целевой функции за один шаг метода дробления параметров становится, по существу, эквивалентным условию наиболее быстрого уменьшения размеров множества решений при дроблении ведущей ИСЛАУ.

Учитывая сделанные выше заключения, мы, как и ранее, рекомендуем дробить ведущие ИСЛАУ по элементам, на которых достигается максимальная из величин

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad (10.39)$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, т. е. по элементам, на которых достигается максимум произведения оценки производной решения на ширину интервала, а не просто по самым широким элементам ИСЛАУ. Стратегия дробления, требующая максимизации величин (10.39), была впервые рассмотрена автором в статье [59].

10.9г Численный пример

В качестве примера применения разработанного нами подхода рассмотрим интервальную симметричную линейную систему

$$\begin{pmatrix} [1, 10] & [0, 1] \\ [0, 1] & [-4, -1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}, \quad (10.65)$$

которая отличается от системы (5.36) из работы [19] единственным элементом \mathbf{a}_{11} в матрице. Кажется, что Алефельд, Крейнович и Майер намеренно взяли его точечным, так как иначе выполненные ими вручную

выкладки (и без того весьма длинные), приводящие к точному описанию формы множества решений системы (5.36) ещё бы значительно усложнились. Мы не стеснены подобными ограничениями и легко можем вычислить оценки множеств решений этой системы с существенно интервальным элементом \mathbf{a}_{11} .

Метод дробления параметров, в котором в качестве базового метода использовался интервальный метод Гаусса-Зейделя (описание которого можно найти, к примеру, в [34, 46]), снабженный проверкой монотонности (из §10.9б) и модифицированной стратегией выбора дробимого элемента §10.9в, надёжно находит внешнюю оценку множества решений этой ИСЛАУ в виде

$$\begin{pmatrix} [-7.61868e-8, 2.41421] \\ [-2.00000, 1.00000] \end{pmatrix}$$

(мы сохранили по шесть значащих цифр результата). При этом брус начальной оценки, вычисленный с помощью процедуры Хансена-Блика из §7.8, оказался равным

$$\begin{pmatrix} [-14.9333, 23.7333] \\ [-44.6667, 38.0000] \end{pmatrix},$$

т.е. весьма грубым. Для нахождения нижних оценок множества решений системы (10.65) мы затратили по каждой координате по 1000 итераций, и уточнение этих оценок шло исключительно за счет бисекции элементов ИСЛАУ, хотя (любопытный факт!) диагностика свидетельствует, что тест на монотонность (10.62)–(10.63) почти на каждом шаге сужал те или иные интервальные элементы в системах-потомках, появляющихся по ходу работы алгоритма. Но, как ни странно, это не привело к повышению эффективности всего алгоритма в целом. Что касается верхних оценок, то здесь тесты монотонности сыграли свою положительную роль, и количества шагов метода дроблений параметров оказались равными всего 40 по первой компоненте и 33 по второй.

Как видим, оценки множества решений системы (10.65) не изменились в сравнении с системой (5.36), т.е. интервализация элемента \mathbf{a}_{11} никак не повлияла на них.

Отметим в заключение, что при проведении вычислительных экспериментов с подобного сорта задачами одной из основных трудностей является в настоящее время отсутствие тестовых примеров.

Комментарий к Главе 10

К §10.1. Иногда адаптивные алгоритмы называют также “последовательными”, но мы не придерживаемся этого словоупотребления потому, что в последнее время термин “последовательные алгоритмы” все более применяется как антитеза параллельным алгоритмам вычислений и обработки информации.

В определённом смысле разделение алгоритмов на пассивные/адаптивные соответствует отмеченному в Главе 4 противопоставлению программных и позиционных способов управления динамическим объектом.

К §10.76. За рубежом имеется тенденция связывать такой способ выбора рассеканной компоненты в интервальных методах глобальной оптимизации, типа описанных в §3.6, с именем Д. Ратца, рассматривавшего его в своих работах [51, 52]. Мы не следуем этой моде потому, что независимо от Д. Ратца и даже раньше его стратегия дробления, требующая максимизации величин (10.39), была предложена автором в статье [59].

К §10.8. За время, прошедшее после введения в работе [60] в научный обиход понятий последовательно гарантирующего и финально гарантирующего алгоритмов выяснилось, что моделируемая ими ситуация не является столь уж экзотичной для современной практической информатики. Эффект преобладания сложности задач над возможностями вычислительных устройств характерен не только для интервального анализа, и совершенно независимо с ним столкнулись специалисты по искусственному интеллекту. В 1988 году, исследуя большие задачи теории расписаний и планирования, Т. Дин и М. Бодди [23] предложили термин *anytime algorithm* для обозначения алгоритмов, в которых

- ответ доступен в любой момент выполнения алгоритма,
- по мере продолжения выполнения алгоритма качество ответа улучшается.

Как видим, понятие *anytime algorithms* (что можно вольно перевести как *в любое время (готовые предъявить ответ) алгоритмы*) соответствует понятию последовательно гарантирующих алгоритмов интервального анализа. Но термин *anytime algorithm* представляется неудачным в интервальном контексте (и не только), а потому заменять им

термины “последовательно/финально гарантирующий”, на наш взгляд, нецелесообразно.

К понятию последовательно гарантирующего алгоритма близко понятие *монотонного вычислительного алгоритма*, введённое К. Никелем в связи с потребностями общей теории интервальных алгоритмов, интенсивно разрабатывавшейся им в 70-е годы [47].

Пусть X — метрическое пространство, n, l — натуральные индексы. По К. Никелю, для каждого фиксированного номера $l \in \mathbb{N}$ вычислительный алгоритм — это четвёрка

$$(x, \{x_\nu\}, \{\tilde{x}_\nu(l)\}, n(l))_l, \quad (10.66)$$

в которой $x, x_\nu, \tilde{x}_\nu \in X$ и

x — искомое точное решение задачи,

$\{x_\nu\}$ — последовательность приближений к x , порождаемая идеальным алгоритмом (в отсутствие ошибок округления на ЭВМ и пр.), так что $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x$,

$\{\tilde{x}_\nu(l)\}$ — реальная возмущённая последовательность приближений к решению, имеющая параметром возмущения l , причём $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{x}_\nu(l) = x_\nu$,

$n(l)$ — момент окончания алгоритма, т.е. такое натуральное число, что реальным алгоритмом строится лишь конечная последовательность $\{x_1(l), x_2(l), \dots, x_{n(l)}(l)\}$.

Предположим, что на пространстве X задано некоторое частичное упорядочение “ \preceq ”. Алгоритм (10.66) назовём монотонным (monotonic) [47], если для всех $n, l \in \mathbb{N}$

$$x \preceq x_\nu \quad \text{и} \quad x_\nu \preceq \tilde{x}_\nu(l), \quad (10.67)$$

и

$$\text{либо } x_{\nu+1} \preceq x_\nu, \quad \text{либо } x_\nu = x. \quad (10.68)$$

Таким образом, согласно (4), монотонный алгоритм приближает искомое решение всегда “с одной стороны”, и с той же “стороны” действуют его возможные возмущения, а условия (5) означают, что невозмущённая последовательность приближений — либо монотонно убывающая, либо достигающая точного результата за конечное число шагов.

Как видим, формальное сходство определений последовательно гарантирующего алгоритма и монотонного алгоритма весьма велико, тем более что в случае, когда порядок на X задаётся модальностью, любой последовательно гарантирующий алгоритм может быть превращён в монотонный взятием на каждом шаге минимума с результатом предыдущей итерации. Тем не менее это различные понятия, каждое из которых имеет самостоятельную ценность и свою “сферу приложимости”.

Мотивы, которыми руководствовался К. Никель, выделяя монотонные алгоритмы, не были связаны с алгоритмической сложностью, а диктовались удобством машинной реализации таких алгоритмов и потребностями конструируемой им теории устойчивости и сходимости. Основное отличие монотонного алгоритма от последовательно гарантирующего — отсутствие какой-либо связи между упорядочением пространства X и формулировкой исходной задачи. Иначе говоря, свойство алгоритма быть или не быть монотонным никак не связывается К. Никелем с постановкой решаемой этим алгоритмом локализационной задачи (а само понятие модальности или аналогичное ему вообще не фигурирует в работе [47]). Поэтому монотонный алгоритм может и не быть последовательно гарантирующим, как, например, рассмотренные в §3 переборные методы оптимального решения “внешней задачи” из [49, 53] для интервальных линейных систем: они — монотонные, если для множеств P, Q из \mathbb{R}^n считать $P \preceq Q$ равносильным теоретико-множественному включению $P \subseteq Q$.

Очевидно также, что и свойство быть последовательно гарантирующим не влечет монотонности алгоритма. Следовательно, понятия монотонного алгоритма и последовательно гарантирующего алгоритма являются пересекающимися, но не равнозначными, и потому оба имеют право на самостоятельное существование.

Литература к главе 10

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. — Москва: Мир, 1987.
- [2] БАУЭР Ф.Л., ГООЗ Г. *Информатика. В 2-х ч.* — Москва: Мир, 1990.
- [3] ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. — Москва: Мир, 1982.
- [4] ДЭННИС ДЖ., мл., ШНАБЕЛЬ Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений*. — Москва: Мир, 1988.

- [5] Евтушенко Ю.Г. Численный метод нахождения глобального экстремума функции // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. – 1971. – Т. 11. – С. 1390–1403.
- [6] Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. – 1987. – №1. – С. 119–128.
- [7] Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. *Методы поиска глобального экстремума*. – Москва: Наука, 1991.
- [8] Заманский М. *Введение в современную алгебру и анализ*. – Москва: Наука, 1974.
- [9] Зорич В.А. *Математический анализ*. Т. 1. – Москва: Наука, 1981. Т. 2. – Москва: Наука, 1984.
- [10] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [11] Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. – Москва: Мир, 1972.
- [12] Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [13] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*. – Москва: Мир, 1985.
- [14] Пиявский С.А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. – 1972. – Т. 12, №4. – С. 888–896.
- [15] Сухарев А.Г. *Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа*. – Москва: Наука, 1989.
- [16] Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования. Том 1*. – Москва: Мир, 1991.
- [17] Шарый С.П. Новый класс алгоритмов для оптимального решения интервальных линейных систем // *Конференция “Актуальные проблемы прикладной математики”*, Саратов, 20 – 22 мая 1991 г. – Саратов, 1991. – С. 113–119.
- [18] Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть 1 // *Вычислительные Технологии*. – 2002. – Т. 7, №6. – С. 90 – 113.
Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть 2 // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, №1. – С. 84 – 109.

- [19] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On symmetric solution sets // *Inclusion methods for nonlinear problems with applications in engineering, economics, and physics* / Herzberger J., ed. – Wien, New York: Springer, 2003. – P. 1–23. – (Computing Supplement; 16)
- [20] ALEFELD G., MAYER G. The Cholesky method for interval data // *Linear Algebra and its Applications*. – 1993. – Vol. 194. – P. 161–182.
- [21] BEECK H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing*. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [22] COPE J., RUST B. Bounds on solutions of linear systems with inaccurate data // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1979. – Vol. 16, No. 6. – P. 950–963.
- [23] DEAN T.L., BODDY M. An analysis of time dependent planning // *Proceedings of AAAI-88 Conference*. – St. Paul, 1988. – P. 49–54.
- [24] FUJII Y., ICHIDA K., OZASA M. Maximization of multivariable functions using interval analysis // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 17–26. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [25] GAY D.M. Solving interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19, No. 4. – P. 858–870.
- [26] GREGORY R.T., KARNEY D.L. *A collection of matrices for testing computational algorithms*. – New York: Wiley Interscience, John Wiley and Sons, 1969.
- [27] HANSEN E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / Hansen E., ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.
- [28] HANSEN E.R. Global optimization using interval analysis — the one-dimensional case // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 1979. – Vol. 29. – P. 331–344.
- [29] HANSEN E.R. Global optimization using interval analysis — the multi-dimensional case // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 34, No. 3. – P. 247–270.
- [30] HANSEN E. Bounding the solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1992. – Vol. 29, No. 5. – P. 1493–1503.
- [31] HARTFIEL D.J. Concerning the solution set of $Ax = b$ where $P \leq A \leq Q$ and $p \leq b \leq q$ // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 35, No. 3. – P. 355–359.

- [32] JANSSON Ch. Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices, and dependencies in the right hand side // *Computing*. – 1991. – Vol. 46. – P. 265–274.
- [33] JANSSON C. Calculation of exact bounds for the solution sets of linear interval systems // *Linear Algebra and its Applications*. – 1997. – Vol. 251. – P. 321–340.
- [34] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: Continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [35] KOLEV L.V. *Interval methods for circuit analysis*. – Singapore: World Scientific, 1993.
- [36] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations*. – 1993. – No. 1. – P. 6–14.
- [37] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Approximate linear algebra is intractable // *Linear Algebra and its Applications*. – 1996. – Vol. 232. – P. 45–54.
- [38] KREINOVICH V., LAKEYEV A., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [39] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). – P. 130–133.
- [40] LAKEYEV A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 2. – P. 125–131.
- [41] LAKEYEV A.V. On existence and uniqueness of solutions of linear algebraic equations in Kaucher's interval arithmetic // *Developments in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 53–65.
- [42] MADSEN K., TOFT O. A parallel method for linear interval equations // *Interval Computations*. – 1994. – No. 3. – P. 81–105.
- [43] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [44] NEUMAIER A. New techniques for the analysis of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1984. – Vol. 58. – P. 273–325.
- [45] NEUMAIER A. Linear interval equations // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 109–120. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 212*).

- [46] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [47] NICKEL K. Stability and convergence of monotonic algorithms // *J. Math. Anal. Appl.* – 1976. – Vol. 54, No. 1. – P. 157–172.
- [48] NICKEL K. Die Überschätzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme // *Computing*. – 1977. – Vol. 18. – P. 15–36.
- [49] OETTLI W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1965. – Vol. 2, No. 1. – P. 115–118.
- [50] RATSCHKE H. Inclusion functions and global optimization // *Mathematical Programming*. – 1985. – Vol. 33. – P. 300–317.
- [51] RATZ D. *Automatische Ergebnisverifikation bei globalen Optimierungsproblemen*. Ph.D. dissertation. – Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1992.
- [52] RATZ D., CSENDES T. On the selection of subdivision directions in interval branch-and-bound methods for global optimization // *Journal of Global Optimization*. – 1995. – Vol. 7. – P. 183–207.
- [53] ROHN J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 39–78.
- [54] RUMP S. M. Solving algebraic problems with high accuracy // *A New Approach to Scientific Computation* / Kulisch U.W. and Miranker W.L., eds. – New York: Academic Press, 1983. – P. 51–120.
- [55] RUMP S.M. Solution of linear and nonlinear algebraic problems with sharp guaranteed bounds // *Computing Supplement*. – 1984. – Vol. 5. – P. 147–168.
- [56] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (Studies in computational mathematics; 5)
- [57] RUMP S.M., KAUCHER E. Small bounds for the solution of systems of linear equations // *Computing Supplement*. – 1980. – Vol. 2. – P. 157–164.
- [58] SHARY S.P. Optimal solution of interval linear algebraic systems. I // *Interval Computations*. – 1991. – Vol. 1, No. 2. – P. 7–30.
- [59] SHARY S.P. A new class of algorithms for optimal solution of interval linear systems // *Interval Computations*. – 1992. – No. 2(4). – P. 18–29.
- [60] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [61] TOFT O. Sequential and parallel solution of linear interval equations // Eksamensprojekt: NI-E-92-04, Numerisk Institute, Danmarks Tekniske Højskole. – Lyngby, 1992. – 98 p.

Глава 11

Внутреннее оценивание множеств решений

Предмет этой главы книги — задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений. Несмотря на большой устойчивый спрос на решение подобных задач со стороны практики, имеется весьма небольшое количество работ по этой теме.

Ниже мы представляем три подхода к внутреннему оцениванию множеств решений, ориентированные на различные классы задач. Во-первых, это весьма общий *формальный подход*, аналогичный развивавшемуся нами в Главе 9, во-вторых — методика, основанная на тонких геометрических свойствах множеств решений интервальных линейных систем уравнений с неотрицательными матрицами, и, в-третьих, так называемый “центровой подход”. При этом два первых подхода для интервальных линейных систем дают *максимальные по включению* внутренние интервальные оценки множеств решений. Изложению собственно математических результатов будет предпослан пример практического возникновения задачи внутреннего оценивания множеств решений.

11.1 Практический пример

В качестве примера практического возникновения задачи внутреннего оценивания множества решений интервальной системы уравнений, рассмотрим так называемую задачу идентификации в условиях интервальной неопределённости.



Рис. 11.1. Структурная схема объекта идентификации.

Пусть имеется статический объект, входы и выходы которого описываются конечномерными векторами $(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ и $(b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(r)}) \in \mathbb{R}^r$ соответственно. Предположим также для простоты, что зависимость “вход-выход” является линейной —

$$b^{(k)} = \sum_{l=1}^n x_{kl} a^{(l)}, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

— с некоторыми постоянными коэффициентами x_{kl} . При функционировании объекта (или его экспериментальном исследовании) мы можем измерять его входные сигналы и соответствующие выходные отклики, и одна из практически наиболее важных задач, возникающих в подобных ситуациях, — это *задача идентификации*: требуется найти (или как-то оценить) значения x_{kl} , т.е. идентифицировать параметры объекта. Иными словами, на основе результатов измерений (наблюдений) мы должны сформировать математическую модель объекта, например, с целью предсказания его будущего поведения.

Если серия наблюдений входа-выхода объекта является “достаточно представительной”, то мы получаем в своё распоряжение набор соотношений с числовыми параметрами, связывающий x_{kl} , т.е., фактически, некоторую систему уравнений относительно x_{kl} , из которой можно найти их значения.

Рассмотрим далее модель объекта, в которой на x_{kl} не накладывается никаких дополнительных ограничений, в частности, их можно считать никак не зависящими друг от друга. Тем самым появляется возможность с каждым выходом объекта работать индивидуально, вне зависимости от других выходов, порознь решая задачу идентификации для каждого отдельно взятого $k = 1, 2, \dots, r$. Можно при этом даже

следующего широко принятого определения: станем говорить, что набор параметров x_1, x_2, \dots, x_n объекта, описываемого (11.1), *согласуется* с интервальными экспериментальными данными $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$ и \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, \dots, m$, если для каждого i (т.е. для каждого наблюдения) в пределах измеренных интервалов существуют точечные представители $a_{i1} \in \mathbf{a}_{i1}, a_{i2} \in \mathbf{a}_{i2}, \dots, a_{in} \in \mathbf{a}_{in}$ и $b_i \in \mathbf{b}_i$, такие, что выполнено отношение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i. \quad (11.2)$$

Если $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ — интервальная $m \times n$ -матрица, составленная из m результатов измерений входов, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top$ — интервальный вектор m измерений выходов, то семейство всех векторов параметров, согласующихся с интервально заданными экспериментальными данными, может быть представлено в виде

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\},$$

т.е. как множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Специалистами по теории идентификации это множество часто называется *информационным множеством*, (*апостериорным*) *множеством возможных значений параметров* [10] и т.п. Но для нас наиболее существенно то, что это множество является ни чем иным, как определённым в Главах 4–5 объединённым множеством решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Как мы знаем из Главы 5, множество решений может быть представлено как объединение не более чем 2^n полиэдров, и длина его полного прямого описания, при котором мы скупулёзно выписываем в каждом ортанте все уравнения ограничивающих $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ гиперплоскостей, может расти экспоненциально с размерностью интервальной системы n . По этой причине пользователи, как правило, ограничиваются задачами нахождения оценок, в том или ином смысле, для множеств решений, т.е. заменяют задачу точного описания $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ на задачу его приближенного описания в соответствии со смыслом решаемой практической постановки (см. Главу 4).

В зависимости от стоящей перед нами задачи возможны и различные способы оценивания множеств решений. К примеру, если в рассмотренной во введении задаче идентификации линейного статического объекта в условиях интервальной неопределенности мы собираемся использовать результаты для выбора параметров объекта на стадии его проектирования, то естественно оценивать $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с помощью подмножеств, т.е. таким образом, чтобы наверняка не захватить “лишние”

векторы параметров, не имеющие отношения к идентифицируемому объекту. С другой стороны, если мы планируем использовать результаты идентификации для гарантированной оценки по полученной модели наибольших возможных отклонений выходов в процессе функционирования объекта, то множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ следует оценивать “извне”, с помощью объемлющих множеств, которые содержат все векторы результатов идентификации. Подробное обсуждение этих вопросов заинтересованный читатель может найти, в частности, в [4, 10].

Решению задач внешнего оценивания множеств решений посвящены Главы 7, 9 и 10 книги, а в этой главе мы будем рассматривать задачу внутреннего (посредством подмножеств) оценивания множеств решений ИСЛАУ, причем в качестве оценивающих подмножеств возьмем интервальные векторы, т.е. брусы в \mathbb{R}^n со сторонами, параллельными координатным осям:

*Для интервальной системы уравнений
найти интервальный вектор, включённый
в её множество решений.*

Отметим, что интервальное представление ответа — внутренней оценки — является, как правило, весьма удобным для “лиц, принимающих решения” (конструктора, оператора технологического процесса и т.п.). Ясно, что внутренняя интервальная оценка неединственна, и на практике наибольшую ценность имеют *максимальные по включению* (неулучшаемые) внутренние оценки.

11.2 Формальный подход для интервальных линейных систем

Обратимся к интервальным линейным системам уравнений вида

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (11.3)$$

и их множествам АЕ-решений. Краеугольным камнем формального подхода к внутреннему оцениванию этих множеств решений является следующая

Теорема 11.2.1 Пусть \mathbf{A}^c и \mathbf{b}^c — характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, соответствующие множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением уравнения

$$\mathbf{A}^c \mathbf{x} = \mathbf{b}^c, \quad (11.4)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. интервальный вектор \mathbf{x} является решением задачи внутреннего интервального оценивания (5.23).

Как и ранее, мы называем интервальную систему уравнений (11.4) в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ уравнением в дуализациях соответствующим рассматриваемому множеству АЕ-решений интервальной линейной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Доказательство. Предположим, что правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением системы (11.4) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$. Тогда в силу монотонности интервальных арифметических операций по включению

$$\mathbf{A}^c \tilde{x} \subseteq \mathbf{A}^c \mathbf{x} = \mathbf{b}^c,$$

т.е. $\tilde{x} \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в силу Теоремы 5.2.2. ■

Перечислим отдельно наиболее важные частные случаи вышедоказанного общего результата:

- Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} есть формальное решение уравнения

$$(\text{dual } \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (11.5)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} является внутренней интервальной оценкой объединённого множества решений системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} есть формальное решение уравнения

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} является внутренней интервальной оценкой допустимого множества решений системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (или, другими словами, решением задачи о допусках для системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$).

- Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} есть формальное решение уравнения

$$(\text{dual } \mathbf{A}) \mathbf{x} = \text{dual } \mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} является внутренней интервальной оценкой управляемого множества решений для системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

К примеру, формальным решением модельной системы (5.12) является, как нетрудно убедиться непосредственными вычислениями, правильный интервальный вектор $([-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])^\top$. Рис. 5.1 показывает, что он действительно является хорошей внутренней интервальной оценкой допустимого множества решений Ξ_{tol} этой системы. С другой стороны, если формальное решение уравнения в дуализациях (11.4) не существует, или существует, но не все его компоненты правильные, то это не обязательно свидетельствует о том, что соответствующее множество решений пусто и задача внутреннего оценивания (5.23) несовместна.

Отметим, что для интервальных систем линейных уравнений А. В. Лакеевым была доказана NP-трудность задачи нахождения формального решения в полной арифметике Каухера [21, 22]. Тем не менее, несмотря на этот неблагоприятный факт, для интервальных линейных систем с “не очень широкими” интервалами имеется ряд эффективных численных методов, быстро вычисляющих формальное решение — *субдифференциальный метод Ньютона* (превращающийся для некоторых случаев в квазидифференциальный метод Ньютона) и различные модификации одношаговых стационарных итерационных методов (см. Главу 12). В целом можно считать, что для интервальных линейных систем вида

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

проблема нахождения формального решения интервальных уравнений решается более или менее успешно.

11.3 Формальный подход в общем случае

Обратимся теперь к задачам внутреннего оценивания объединённого, допустимого и управляемого множеств решений интервальных систем общих нелинейных уравнений вида

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Далее, как и в §9.6, принципиален тот факт, что для $F(a, x)$ существует естественное интервальное расширение, т.е.

- 1) аналитическое выражение для $F(a, x)$ есть конечная комбинация символов переменных x_i , параметров a_j , четырёх арифметических операций и, возможно, ещё элементарных функций;
- 2) для рассматриваемых интервалов значений параметров все интервальные арифметические операции, интервальные расширения функций и т.п. определены.

Основой предлагаемого нами формального подхода к решению задачи внутреннего оценивания (4.21) являются следующие результаты:

Теорема 11.3.1 Пусть отображение $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ таково, что каждый из интервальных параметров a_1, a_2, \dots, a_l входит не более одного раза в первой степени в единственное из компонентных выражений F_1, F_2, \dots, F_m .

Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением уравнения

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad (11.6)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} есть внутренняя интервальная оценка объединённого множества решений системы $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением уравнения

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) = \text{dual } \mathbf{b}, \quad (11.7)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{ctrl}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} есть внутренняя интервальная оценка управляемого множества решений системы $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Доказательство. Первая часть условий на вхождение в отображение F интервальных параметров (из которых все имеют Е-неопределённость) в точности совпадает с теми, которые требуются Теоремой 5.1.2. Следовательно, в условиях доказываемой теоремы точка $\tilde{\mathbf{x}}$ принадлежит объединённому множеству решений $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, \mathbf{x}) \geq \underline{b}_i, \\ \min_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, \mathbf{x}) \leq \bar{b}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Далее, если каждый из параметров a_1, a_2, \dots, a_l , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в компонентные выражения F_1, F_2, \dots, F_m , то для всех $i = 1, 2, \dots, m$

$$\max_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x) \quad \text{и} \quad \min_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x)$$

совпадают с

$$\overline{F_i(\mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \underline{F_i(\mathbf{a}, x)}$$

— верхними и нижними концами естественных интервальных расширений $F_i(\mathbf{a}, x)$. В свою очередь, в силу свойств арифметики Каухера эти значения равны

$$\underline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \overline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)}.$$

Итак, если выполнены условия доказываемой теоремы, касающиеся вхождения в F параметров с интервальной неопределённостью, то точка \tilde{x} принадлежит объединённому множеству решений $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений (2) тогда и только тогда, когда справедлива система неравенств

$$\begin{cases} \underline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \geq \underline{b_i}, \\ \overline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \leq \overline{b_i}, \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

равносильная включению

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{b}. \quad (11.8)$$

Теперь уже нетрудно завершить доказательство Теоремы. Пусть правильный интервальный вектор \mathbf{x} является решением уравнения в дуализациях (11.6) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$. Принимая во внимание свойство монотонности по включению интервальных арифметических операций в \mathbb{KR} , имеем

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) \subseteq F(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Таким образом, $\tilde{x} \in \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, а поскольку это верно для любого $\tilde{x} \in \mathbf{x}$, то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, что и требовалось. ■

Теорема 11.3.2 Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением системы уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \quad (11.9)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} есть внутренняя интервальная оценка допустимого множества решений интервальной системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$.¹

Доказательство этого утверждения можно провести совершенно аналогично доказательству Теоремы 11.3.1, но мы последуем другим путём, более поучительным в идейном отношении.

Отметим, прежде всего, следующую полезную характеристику допустимого множества решений:

$$\begin{aligned}\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(F(a, x) \in \mathbf{b}) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \{ F(a, x) \mid a \in \mathbf{a} \} \subseteq \mathbf{b} \}.\end{aligned}$$

Далее, если \mathbf{x} — правильное формальное решение системы уравнений (11.9) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$, то для каждой компоненты $F_i(a, x)$ отображения F в силу монотонности интервальных арифметических операций мы имеем

$$\{ F_i(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a} \} \subseteq F_i(\mathbf{a}, \tilde{x}) \subseteq F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, в целом

$$\begin{aligned}\{ F(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a} \} &= \left\{ \begin{pmatrix} F_1(a, \tilde{x}) \\ \vdots \\ F_m(a, \tilde{x}) \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{a} \right\} \\ &\subseteq \begin{pmatrix} \{ F_1(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a} \} \\ \vdots \\ \{ F_m(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a} \} \end{pmatrix} \\ &\subseteq \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} = \mathbf{b},\end{aligned}$$

и потому $\{ F(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a} \} \subseteq \mathbf{b}$. Поскольку эта принадлежность верна для любого $\tilde{x} \in \mathbf{x}$, то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, что и требовалось. ■

¹Иными словами, вектор \mathbf{x} есть решение соответствующей задачи о допусках.

Определение 11.3.1 Для интервальной системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ мы будем называть системы уравнений (11.6)–(11.9) уравнениями в дуализациях, соответствующим её объединённому, управляемому и допустимому множеству решений.

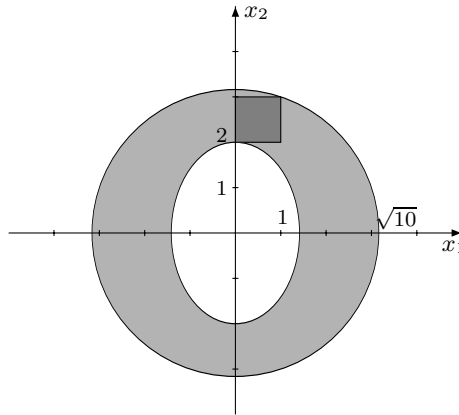


Рис. 11.2. Внутреннее оценивание объединённого множества решений интервального уравнения (11.10).

В качестве простейшего иллюстративного примера рассмотрим интервальное уравнение от двух неизвестных

$$[1, 2] x^2 + y^2 = [4, 10]. \quad (11.10)$$

Его объединённым множеством решений является, как нетрудно проверить, изображённый на Рис. 11.2 круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в начале координат и высеченным из него эллипсом. Значения $x = [0, 1]$ и $y = [2, 3]$ образуют формальное решение уравнения в дуализациях

$$[2, 1] x^2 + y^2 = [4, 10], \quad (11.11)$$

и из Рис. 11.2 видно что, интервальный вектор $([0, 1], [2, 3])^T$ действительно является внутренней оценкой объединённого множества решений, даже максимальной по включению.

Упражнение 11.3.1. Формальное решение уравнения в дуализациях (11.11) неединственно. Найдите другие правильные формальные решения для этого

уравнения и убедитесь, что все они являются внутренними оценками объединённого множества решений уравнения (11.10).

Итак, предложенный выше “формальный подход” позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания обобщённых множеств решений к задаче решения *одной* формально интервальной, а фактически неинтервальной системы уравнений — уравнения в дуализациях, — то есть к традиционной задаче численного анализа. Естественно было бы желать, чтобы эта редукция могла быть осуществлена для возможно более широкого класса функций F , а не только для тех, которые имеют простые вхождения управляемых переменных и очерчены в Теореме 11.3.1. Расширение запаса отображений F , для которых основные задачи (4.21) и (4.22) могут быть решены формальным подходом либо его модификациями, а также распространение формального подхода на более общие множества решений являются интересными открытыми задачами.

Практичность и эффективность формального подхода решающим образом зависят от эффективности алгоритмов для решения уравнений в дуализациях (11.6)–(11.9). Уместно отметить, что для этой цели мы в большинстве случаев едва ли сможем воспользоваться какими-либо методами исключения, символьными преобразованиями и т.п. Препятствием являются недостаточные алгебраические свойства \mathbb{KR} . И хотя они значительно лучше, чем у классической интервальной арифметики, отсутствие полноценной дистрибутивности в \mathbb{KR} делает невозможной даже такую простейшую операцию, как например, приведение подобных членов. По этой причине все алгоритмы, реализующие формальный подход, являются (по крайней мере на данный момент) существенно *численными*.

Для общих нелинейных систем конструирование численных методов для решения уравнения в дуализациях — также большая открытая проблема. При развитии тех или иных подходов к ней главную роль должны, по-видимому, играть конкретные потребности практики, хотя и в общем случае ситуация здесь отнюдь не безнадёжная. Несмотря на то, что мы оказываемся лишёнными таких эффективных в линейном случае инструментов, как субдифференциальный метод Ньютона и его обобщения (см. Главу 12), всегда имеется возможность попытаться использовать универсальную схему стационарных итерационных процессов и её многочисленные модификации. Именно, пусть исходное уравнение в дуализациях (11.6)–(11.9) может быть эквивалентно преобра-

зовано к виду, в котором переменная выделена в одной из частей “в чистом виде”, т.е.

$$x = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, x), \quad (11.12)$$

где $T : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ является оператором сжатия. Тогда для любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ последовательность итераций

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}^{(k)})$$

сходится к требуемому формальному решению для (11.12), а также для (11.6)–(11.9) (см. например, [7, 9, 11]).

Другая привлекательная возможность решения уравнений в дуализациях состоит в том, чтобы прибегнуть к помощи какого-либо из пакетов-решателей нелинейных систем, основанных на технике “распространения ограничений” (“constraint propagation”), интенсивно развивающейся в последние годы.

11.4 Максимальность внутренних оценок

Рассмотрим вопрос о качестве интервального решения задачи внутреннего оценивания (4.21), или, иначе, вопрос о размерах интервальной оценки множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Замечательное свойство формального подхода в применении к интервальным линейным системам состоит в том, что он практически всегда даёт внутреннюю интервальную оценку множества решений, которая *максимальна* относительно порядка по включению. Для объединённого множества решений ИСЛАУ с неособенными матрицами этот факт впервые был обнаружен Л.В. Куприяновой [20]. Впоследствии автор нашел другую формулировку этого результата и доказал максимальность внутренних оценок, получаемых с помощью формального подхода для допустимого и управляемого множеств решений [31]. Следующее более общее утверждение впервые было получено в [32]:

Теорема 11.4.1 *Если правильный интервальный вектор есть максимальное по включению формальное решение уравнения в дуализациях (11.4), то он также является максимальным по включению интервальным вектором содержащимся во множестве $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. предоставляет максимальное решение задачи внутреннего оценивания (5.23).*

В частности, если правильное формальное решение уравнения в дуализациях единственно (см. §12.4), то оно является максимальным по включению решением задачи (5.23).

Доказательство. Ниже нам потребуется следующее вспомогательное представление: если \mathbf{v} — это правильный интервальный n -вектор и $\mathbf{C} = (c_{ij})$ — (произвольная) интервальная $m \times n$ -матрица, то

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = \bigvee_{v \in \mathbf{v}} \mathbf{C} \cdot v. \quad (11.13)$$

Действительно, если $\mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = ((\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_1, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_2, \dots, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_m)^\top$, то, используя (1.50) и дистрибутивность (1.41) сложения относительно операции “ \vee ”, мы получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \bigvee_{v_j \in v_j} c_{ij} v_j \\ &= \bigvee_{v_1 \in v_1} \bigvee_{v_2 \in v_2} \dots \bigvee_{v_n \in v_n} \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j \\ &= \bigvee_{v \in \mathbf{v}} \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j = \bigvee_{v \in \mathbf{v}} (\mathbf{C} \cdot v)_i. \end{aligned}$$

Обратимся теперь собственно к доказательству Теоремы, которое мы поведём *от противного*. Обозначим правильное формальное решение уравнения (11.4) через \mathbf{x} и предположим, что в противоречие с формулировкой Теоремы найдётся такой правильный интервальный вектор \mathbf{y} , что

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \mathbf{y} \supset \mathbf{x}.$$

Отсюда, используя монотонность интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ по включению, нетрудно получить

$$\mathbf{A}^c \cdot \mathbf{y} \supset \mathbf{A}^c \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^c,$$

причём точное равенство на месте включения здесь невозможно в силу предположенной максималности \mathbf{x} . Далее, представление (11.13) приводит к

$$\bigvee_{y \in \mathbf{y}} \mathbf{A}^c \cdot y \supset \mathbf{b}^c, \quad (11.14)$$

и мы можем заключить, что

$$\mathbf{A}^c \cdot \tilde{\mathbf{y}} \not\subseteq \mathbf{b}^c \quad (11.15)$$

для некоторого (по крайней мере, одного) $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbf{y}$. В противном случае, если бы для всех $\mathbf{y} \in \mathbf{y}$ имело место $\mathbf{A}^c \cdot \mathbf{y} \subseteq \mathbf{b}^c$, то было бы справедливым включение, обратное к (11.14). Но тогда в силу Теоремы 5.2.2 отношение (11.15) эквивалентно $\tilde{\mathbf{y}} \notin \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Следовательно, $\mathbf{y} \not\subseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, что противоречит нашему допущению. ■

Исчерпывающее исследование условий, при которых формальный подход приводит к максимальным внутренним интервальным оценкам множеств решений ИСЛАУ было проведено И.А. Шарой в [12, 26]. Полученное там необходимое и достаточное условие максимальной внутренней интервальной оценки для произвольных множеств АЕ-решений можно сформулировать так:

Теорема 11.4.2 (теорема Ирины) *Внутренняя интервальная оценка \mathbf{x} множества АЕ-решений $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ интервальной линейной системы (11.3) максимальна по включению тогда и только тогда, когда для каждого номера $k = 1, 2, \dots, n$ столбца матрицы $\mathbf{A}^c = (\mathbf{a}_{ij}^c)$ выполняются хотя бы одно из следующих условий:*

- (i) $\exists l \quad \mathbf{0} \notin \text{pro } \mathbf{a}_{lk}^c$;
- (ii) $\mathbf{0} \not\subseteq \mathbf{x}_k, \quad \exists l \quad \mathbf{0} \subset \mathbf{a}_{lk}^c, \quad \exists r \quad \mathbf{a}_{rk}^c \subset \mathbf{0}$;
- (iii) $\mathbf{0} = \mathbf{x}_k, \quad \exists l \quad \mathbf{0} \subset \mathbf{a}_{lk}^c$;
- (iv) $\mathbf{0} \subset \mathbf{x}_k, \quad \exists l \quad (\mathbf{0} \subset \mathbf{a}_{lk}^c, \quad \chi(\mathbf{a}_{lk}^c) \geq \chi(\mathbf{x}))$.

Доказательство этой теоремы основано на исследовании случаев строгой монотонности по включению умножения на правильный интервал в арифметике Каухера. Практичным следствием критерия максимальной внутренней интервальной оценки является следующая теорема:

Теорема 11.4.3 *Если в интервальной линейной системе уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} в каждом столбце имеет по крайней мере один элемент, не содержащий нуля, то всякое правильное формальное решение уравнения в дуализациях для этой системы является максимальной по включению внутренней оценкой соответствующего множества АЕ-решений.*

Если же $\mathbf{A}^\exists = \mathbf{A}$, то приведенное условие на матрицу является и необходимым для того, чтобы правильное формальное решение уравнения в дуализациях давало максимальную внутреннюю интервальную оценку.

В качестве примера рассмотрим формальные решения интервальных систем

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix},$$

которые совпадают и являются правильным интервальным вектором $(0, [-1, 1])^\top$. В соответствии с Теоремой 11.4.2 он является максимальной по включению внутренней оценкой для множества $(\forall\exists)(\exists)$ -решений и для множества $(\forall\exists)(\exists)$ -решений модельной системы (5.12). То, что это действительно так, можно убедиться из Рис. 5.2. Заметим, что “сплюсценность” полученной оценки по первой координате может оказаться весьма нежелательной на практике. Для остальных множеств АЕ-решений, изображённых на Рис. 5.1 и 5.2, внутренние оценки, вычисляемые как формальные решения уравнений в дуализациях, являются телесными интервалами, не вырожденными ни по какой из компонент. Например, для интервальных линейных систем

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [-1, 2] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [2, -1] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

внутренняя интервальная оценка для множества $(\forall\exists)(\exists)$ -решений и для множества $(\forall\exists)(\exists)$ -решений, получаемая по нашей методике, — это вектор

$$\begin{pmatrix} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{pmatrix},$$

и он действительно покрывает значительные части соответствующих множеств.

В связи со сказанным возникает следующий практический вопрос: каким образом можно влиять на размеры бруса внутренней оценки и/или его расположение внутри оцениваемого множества решений? Решению этой проблемы посвящён следующий параграф книги.

11.5 Коррекция внутренних оценок

Наиболее серьёзным недостатком формального подхода в применении к задачам внутреннего оценивания множеств решений является то, что он не позволяет провести их исчерпывающее исследование. Если решение уравнения в дуализациях существует и является правильным, то задача разрешима и мы получаем требуемый ответ. Напротив, если уравнение в дуализациях не имеет решений, или решения есть, но они не являются правильными, мы ничего не можем заключить о пустоте или непустоте множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Например, уравнения

$$[-1, 1] x = [1, 2] \quad (11.16)$$

и

$$[-1, 1] x = [-1, 2]$$

вообще не имеют формальных решений. Это следует из того, что в их левых частях для любого интервала \mathbf{x} произведение $[-1, 1] \mathbf{x}$ всегда является уравновешенным интервалом, равным $[-|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}|]$ при правильном \mathbf{x} и $[-\langle \text{pro } \mathbf{x} \rangle, \langle \text{pro } \mathbf{x} \rangle]$ при неправильном \mathbf{x} , тогда как правая часть обоих уравнений неуравновешена. Но у первого из рассматриваемых интервальных уравнений допустимое множество решений пусто, а у второго непусто: $\Xi_{tol} = [-1, 1]$.

Нередко пользователя также могут не удовлетворить получаемые с помощью формального подхода расположение или размеры интервального решения рассматриваемой задачи внутреннего оценивания. Эффективным инструментом коррекции подобных ситуаций может служить следующая

Теорема 11.5.1 (о “сжатии и раздутии” интервальных параметров)

Пусть брус $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ является решением задачи (4.21) внутреннего оценивания множества решений интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}$ с распределением неопределённостей, задаваемым дизъюнктивными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$, т.е. $\mathbf{x} \subseteq$

$\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Если интервальные векторы $\tilde{\mathbf{a}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ и их дизъюнктивные разложения

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}^{\forall} + \tilde{\mathbf{a}}^{\exists} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}^{\forall} + \tilde{\mathbf{b}}^{\exists}$$

таковы, что

$$\tilde{\mathbf{a}}^{\forall} \subseteq \mathbf{a}^{\forall}, \quad \tilde{\mathbf{a}}^{\exists} \supseteq \mathbf{a}^{\exists}, \quad (11.17)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\forall}, \quad \tilde{\mathbf{b}}^{\exists} \supseteq \mathbf{b}^{\exists}, \quad (11.18)$$

то вектор \mathbf{x} также является решением задачи внутреннего оценивания множества решений интервальной системы уравнений $F(\tilde{\mathbf{a}}, x) = \tilde{\mathbf{b}}$ с таким же распределением неопределённостей, т.е. $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$.

Доказательство. Если предикат

$$(\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^{\forall})(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^{\forall})(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^{\exists})(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^{\exists})(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b})$$

справедлив для некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, то предикат

$$(\forall \hat{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^{\forall})(\forall \hat{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^{\forall})(\exists \check{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^{\exists})(\exists \check{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^{\exists})(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b})$$

тем более справедлив для такого x при допущениях (11.17)–(11.18). Следовательно,

$$\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) =$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^{\forall})(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^{\forall})(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^{\exists})(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^{\exists})(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{a})\}$$

$$|\cap$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^{\forall})(\forall \hat{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^{\forall})(\exists \check{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^{\exists})(\exists \check{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^{\exists})(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{a})\}$$

$$= \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}),$$

и поэтому $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ влечёт $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$. ■

Обратимся к рассмотренному выше примеру интервального уравнения (11.16) и его допустимого множества решений. Если сжать правую часть в (11.16) до $[-1, 1]$, то для получившегося уравнения

$$[-1, 1]x = [-1, 1]$$

уравнение в дуализациях (совпадающее с ним же) становится разрешимым и его формальное решение $[-1, 1]$ в точности равно допустимому множеству решений исходного уравнения (11.16).

Дадим теперь переформулировку основного результата этого параграфа в применении к интервальным линейным системам вида (11.3).

Теорема 11.5.2 (о “сжатии и раздутии” параметров в ИСЛАУ)

Если брус \mathbf{x} является внутренней оценкой множества АЕ-решений $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ интервальной линейной системы, которое соответствует характеристическим матрице \mathbf{A}^c и вектору \mathbf{b}^c , то \mathbf{x} также является внутренней интервальной оценкой множества АЕ-решений $\Xi(\tilde{\mathbf{A}}^c, \tilde{\mathbf{b}}^c)$ интервальной линейной системы, которое соответствует характеристическим матрице $\tilde{\mathbf{A}}^c$ и вектору $\tilde{\mathbf{b}}^c$ таким, что

$$\tilde{\mathbf{A}}^c \subseteq \mathbf{A}^c \quad \text{и} \quad \mathbf{b}^c \subseteq \tilde{\mathbf{b}}^c.$$

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежность $x \in \Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ равносильна включению

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c$$

в полной интервальной арифметике. Пользуясь далее условиями теоремы и свойством монотонности по включению, получим

$$\tilde{\mathbf{A}}^c \cdot x \subseteq \mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \subseteq \tilde{\mathbf{b}}^c,$$

т.е.

$$\tilde{\mathbf{A}}^c \cdot x \subseteq \tilde{\mathbf{b}}^c,$$

что означает принадлежность точки x также и множеству решений $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$. Следовательно $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c) \subseteq \Xi(\tilde{\mathbf{A}}^c, \tilde{\mathbf{b}}^c)$, откуда и следует доказываемое утверждение. ■

Отметим, что Теорема 11.5.2 носит более глубокий характер, чем предшествующая общая Теорема 11.5.1, поскольку допускает возможность смены типа неопределённости в интервальных параметрах системы уравнений, чего в рамках Теоремы 11.5.1 сделать невозможно.

Несмотря на кажущуюся очевидность Теорем 11.5.1–11.5.2, их следствия являются чрезвычайно важными для вычислительной практики. Именно, если пользователь не удовлетворен результатами “лобового” применения формального подхода к задаче внутреннего оценивания

множества решений, то ему имеет смысл попробовать решить тем же методом ту же задачу для вспомогательной интервальной системы, у которой параметры, соответствующие Е-неопределённости, “сжаты”, а параметры, соответствующие А-неопределённости, “раздуты”. Применение формального подхода к такой модифицированной интервальной системе очень часто позволяет получать интервальные решения, которые действительно лучше по форме и/или расположению, более телесные, в частности. Иногда с помощью этой несложной методики можно находить внутренние оценки множеств решений даже для тех случаев, когда уравнение в дуализациях, выписанное по исходной системе уравнений, не имеет правильных решений.

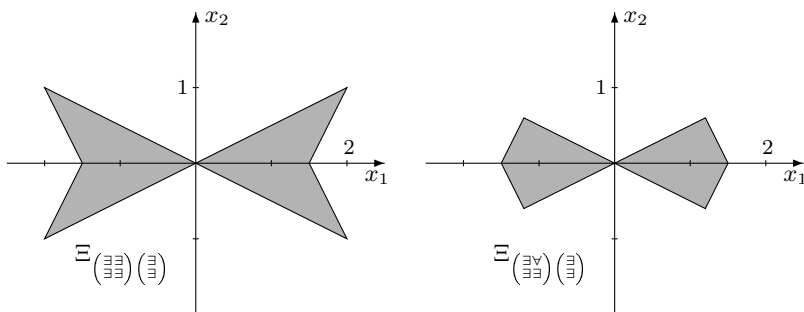


Рис. 11.3. “Почти несвязные” множества решений интервальной линейной системы (11.19).

Рассмотрим конкретные примеры. Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.19)$$

объединённое множество решений и множество $\left(\begin{smallmatrix} \exists \forall \\ \exists \exists \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \exists \\ \exists \end{smallmatrix}\right)$ -решений имеют “бабочкообразные” конфигурации, изображённые на Рис. 11.3. Если для их внутреннего оценивания напрямую воспользоваться формальным подходом, то для обоих множеств мы получим оценки

$$\begin{pmatrix} [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \\ 0 \end{pmatrix},$$

сплюсненные по второй координате. Заменяем в векторе правой части первую компоненту на интервал $[1, 3]$ и вновь применим для внутрен-

него оценивания множества решений получившейся ИСЛАУ формальный подход. Теперь решением соответствующих уравнений в дуализациях будут интервальные векторы

$$\begin{pmatrix} [\frac{1}{4}, \frac{3}{2}] \\ [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [\frac{2}{7}, \frac{10}{7}] \\ [-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}] \end{pmatrix},$$

покрывающие более значительные части множеств решений, что может оказаться более предпочтительным для заказчика.

Ещё пример. Предположим, что для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & 1 \\ 1 & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-5, 5] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

ищется внутренняя интервальная оценка объединённого множества решений, которое изображено на Рис. 11.4. Прямое применение Теоремы 11.2.1 и вычисление формального решения уравнения в дуализациях для (11.20) приводит к интервальному вектору $([-3, 3], [1, -1])^T$, который имеет неправильную вторую компоненту и, следовательно, не может быть проинтерпретирован как внутренняя интервальная оценка. Но ведь ясно, что объединённое множество решений рассматриваемой системы непусто и даже внутренность его тоже непуста!

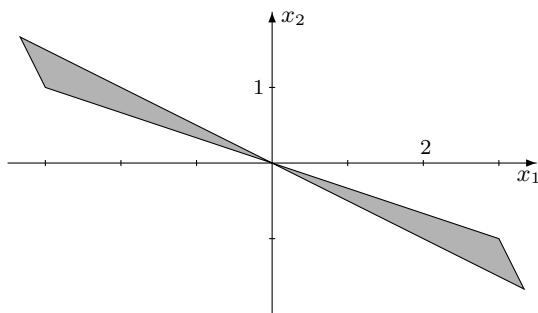


Рис. 11.4. “Почти несвязное” объединённое множество решений интервальной линейной системы (11.20).

Причина неудачи формального подхода заключается в специфическом строении множеств решений системы (11.20). Как мы видели в Главе 5, в общем случае множества АЕ-решений могут быть весьма

сложно устроенными невыпуклыми и даже несвязными компактами. Для системы (11.20) множества решений оказываются “почти несвязными”: они состоят из нескольких компонент, которые касаются друг друга в единственной точке — начале координат. В подобных ситуациях не следует ожидать получения решения одним “кавалерийским наскоком”, так как внутренняя оценка множества решений таких систем в принципе не может быть адекватно представлена единственным интервалом, покрывающим все разрозненные и слабо связанные части множества решений (принадлежащие разным ортам пространства \mathbb{R}^n). Формальный подход “пытается” найти один интервальный вектор, который бы принадлежал всем этим слабо связанным или несвязанным областям и, конечно, терпит неудачу.

Как можно преодолеть это затруднение? Естественный выход состоит в том, чтобы искать решение задачи внутреннего оценивания не как единственный брус, а в виде объединения нескольких, возможно непересекающихся, интервалов, покрывающих множество решений с желаемой степенью полноты. Точное их число может зависеть от конкретной системы, её размерности и желаний заказчика.

Главными причинами, вызывающими плохую — несвязную и почти несвязную — конфигурацию множества решений и, как следствие, плохие результаты лобового применения формального подхода, являются

- 1) наличие в интервальном векторе правых частей одновременно как нулевых компонент, так и компонент, содержащих нуль в своей внутренности;
- 2) нулевые и нульсодержащие интервалы в матрице ИСЛАУ.

Таким образом, правильная тактика решения задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений должна включать

- порождение согласно теореме “о сжатии и раздутии коэффициентов” вспомогательных систем, у которых в правой части не присутствуют одновременно нулевые и нульсодержащие компоненты;
- отдельное решение для каждой из полученных вспомогательных ИСЛАУ задачи внутреннего оценивания множеств решений.

Полный ответ задачи внутреннего оценивания получается далее путем объединения этих отдельных ответов для подзадач, порождённых на первом этапе.

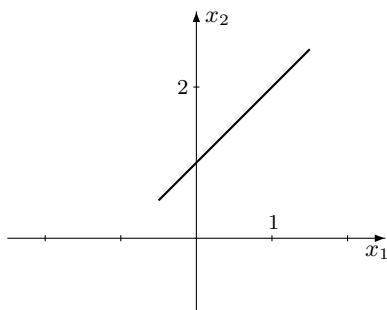


Рис. 11.5. Нетелесное объединённое множество решений интервальной линейной системы (11.22).

Например, для системы (11.20) заменим характеристический вектор правой части на $([5, 4], 0)^\top$, такой что $([5, 4], 0)^\top \subseteq ([-5, 5], 0)^\top$, оставляя характеристическую матрицу ИСЛАУ неизменной. Находя формальное решение уравнения в дуализациях

$$\begin{pmatrix} [3, 2] & 1 \\ 1 & [3, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [5, 4] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11.21)$$

мы получим в качестве искомой внутренней оценки объединённого множества решений для (11.20) телесный интервальный вектор

$$\begin{pmatrix} [2, 2.4] \\ [-1, -0.8] \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для получения такой хорошей оценки нам пришлось сменить во вспомогательной ИСЛАУ (11.21) тип неопределённости второй компоненты правой части: он стал другим, отличным от того, что присутствовал в исходной ИСЛАУ.

Конечно, возможны ситуации, когда внутренность множества решений пуста и оно в принципе не может иметь “хорошей” внутренней оценки. Рассмотрим, например, ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 4] \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.22)$$

Его объединённое множество решений — отрезок прямой, изображённый на Рис. 11.5, для которого телесной внутренней оценки не суще-

ствуем в принципе. Мы должны уметь различать такие ситуации на практике.

11.6 Интервальные линейные системы с неотрицательными матрицами

Если матрица интервальной линейной системы является неотрицательной, то её множества решений обладают тонким геометрическим свойством, которое можно охарактеризовать как *монотонность конфигурации*. Основываясь на нём, мы развиваем ещё одну методику внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными не обязательно квадратными матрицами, которая в ряде случаев может оказаться разумной альтернативой формальному подходу.

Ниже для простоты рассматривается оценивание лишь объединённого множества решений, хотя все результаты этого параграфа после небольшой коррекции могут быть распространены для любых множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений. Кроме неотрицательности мы не накладываем никаких ограничений (квадратность, неособенность и т.п.) на интервальную матрицу системы, но при этом постановка задачи должна быть скорректирована на случай неограниченного множества решений. В этой ситуации мы, как и в §10.4, будем искать внутреннюю оценку для пересечения множества решений с некоторым заранее заданным интервальным вектором U , т.е. решать не (5.23), а задачу

Для интервальной линейной системы уравнений $Ax = b$ найти внутреннюю интервальную оценку пересечения множества решений $\Xi_{uni}(A, b)$ с некоторым брусом U .	(11.23)
--	---------

11.6а Теоретическая основа

Зафиксируем натуральный индекс $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ и, аналогично тому, как это было сделано в §10.4, рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n прямую

линию l с параметрическим уравнением

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & r_1, \\ & \dots & \\ x_{\nu-1} & = & r_{\nu-1}, \\ x_\nu & = & t, \\ x_{\nu+1} & = & r_{\nu+1}, \\ & \dots & \\ x_n & = & r_n, \end{array} \right.$$

где $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$ — вещественные константы, а t — параметр, пробегающий вещественную ось \mathbb{R} . Эта прямая, которую мы будем называть “пробной”, параллельна ν -ой координатной оси и полностью задаётся указанием $(n-1)$ -мерного вещественного вектора $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$. Для явного указания параметров этой прямой мы, как и ранее, используем обозначение $l(r)$.

Пусть также

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni} \cap l(r)\},$$

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni} \cap l(r)\}$$

— соответственно наименьшее и наибольшее значения ν -ой координаты точек из пересечения $l(r)$ с множеством решений интервальной линейной системы (11.3) (в случае $\Xi_{uni} \cap l(r) = \emptyset$ мы полагаем $\underline{\Omega}_\nu(r) = +\infty$ и $\overline{\Omega}_\nu(r) = -\infty$). Наша ближайшая цель — вывод явных выражений для функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$, которые как бы “отслеживают” конфигурацию границы множества решений.

“Подставим” параметрическое уравнение (10.7) в интервальную систему уравнений

$$Ax = b, \tag{11.3}$$

которое превратится при этом в “распавшуюся” систему m одномерных линейных уравнений от одной переменной t и имеющую интервальные

коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{1\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}r_j = \mathbf{b}_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{m\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}r_j = \mathbf{b}_m. \end{array} \right. \quad (11.24)$$

При сделанных нами предположениях о неотрицательности элементов матрицы ИСЛАУ все интервалы $\mathbf{a}_{i\nu}$, $i = 1, 2, \dots, n$, также неотрицательны и потому решением i -ого включения этой системы является, как нетрудно видеть, множество

$$\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu} \quad (11.25)$$

где “/” — операция деления в интервальной арифметике Кахана. Каждое из одномерных уравнений, образующих систему (11.24), мы можем решить отдельно от других, а затем пересечь все получившиеся при этом множества решений друг с другом (и, если необходимо, с \mathbf{U}_ν). В пределах всех интервалов, входящих в систему (11.24) соответствующие коэффициенты изменяются независимо друг от друга, как и в исходной ИСЛАУ, так что замкнутое множество \mathcal{S} , полученное в результате описанного выше раздельного решения уравнений и пересечения их множеств решений, является в точности множеством значений ν -ой координаты точек из $\Xi_{uni} \cap l(r)$. Оно может оказаться пустым, если система (11.24) несовместна, но в любом случае

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min \mathcal{S} \quad \text{и} \quad \overline{\Omega}_\nu(r) = \max \mathcal{S}.$$

Далее, если интервалы $\mathbf{a}_{i\nu}$, $i = 1, 2, \dots, m$, не содержат нуля в своей внутренности, то все множества (11.25) — *связные* интервалы вида $[p, q]$, или $] - \infty, p]$, или $[q, +\infty[$, или $] - \infty, +\infty[$. Это следует из формул для арифметических операций в интервальной арифметике Кахана. Таким образом, в точках эффективной области определения функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ (т.е. когда пересечение множеств (11.25) непусто) мы

имеем

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \overline{\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu}} \right\}, \quad (11.26)$$

если множество решений ограничено, и

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \overline{\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu}} \right\}, \underline{\mathbf{U}}_\nu \right\}, \quad (11.27)$$

если множество решений неограничено (тогда подчёркивание означает взятие инфимума). Аналогично, в точках эффективной области определения функции $\overline{\Omega}_\nu(r)$ имеет место

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \overline{\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu}} \right\}, \quad (11.28)$$

если множество решений ограничено, и

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \overline{\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu}} \right\}, \overline{\mathbf{U}}_\nu \right\}, \quad (11.29)$$

если множество решений неограничено (тогда надчёркивание означает взятие супремума).

Предложение 11.6.1 *Если в интервальной линейной системе $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} неотрицательна, то все функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, являются монотонно невозрастающими по каждой переменной на эффективных областях своего определения.*

Доказательство основывается на следующем простом факте: как нижняя, так и верхняя огибающие (т.е. поточечные минимум и максимум) любого семейства монотонно невозрастающих функций также являются невозрастающими функциями.

Заметим, что если $\mathbf{a}_{ij} \geq 0$ и $\mathbf{a}_{i\nu} \geq 0$, то для всех i, j и ν выражения

$$\frac{(\text{конец интервала } \mathbf{b}_i) - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n (\text{конец интервала } \mathbf{a}_{ij}) r_j}{\text{конец интервала } \mathbf{a}_{i\nu}} \quad (11.30)$$

являются монотонно невозрастающими по любому из аргументов r_j , $j = 1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n$ (при условии, что остальные аргументы фиксированы). Из определения интервальных арифметических операций в \mathbb{IR} как интервалов с концами, которые суть минимумы и максимумы результатов арифметических операций между концами операндов следует, что функции

$$\underline{\omega}_{i\nu}(r) = \frac{\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right)}{\mathbf{a}_{i\nu}}$$

— это нижние огибающие для (11.30), а функции

$$\overline{\omega}_{i\nu}(r) = \frac{\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right)}{\mathbf{a}_{i\nu}}$$

— это верхние огибающие для (11.30). При этом все они также невозрастающие по r_k . Такими же невозрастающими являются функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$, которые в силу (11.26)–(11.27) суть верхние огибающие всех $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (и, возможно, константы \underline{U}_ν), а также функции $\overline{\Omega}_\nu(r)$, которые в силу (11.28)–(11.29) суть нижние огибающие для всех $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (и, возможно, константы \overline{U}_ν). ■

Например, для интервальной линейной системы Хансена [19]

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix}, \quad (11.31)$$

объединённое множество решений, изображённое на Рис. 11.6, в целом не является выпуклым, но имеет веретенообразную “монотонную” конфигурацию. В то же время, в силу Предложения 11.6.1 форма множества решений, подобная той, что представлена на Рис. 5.1, 5.2, 10.1

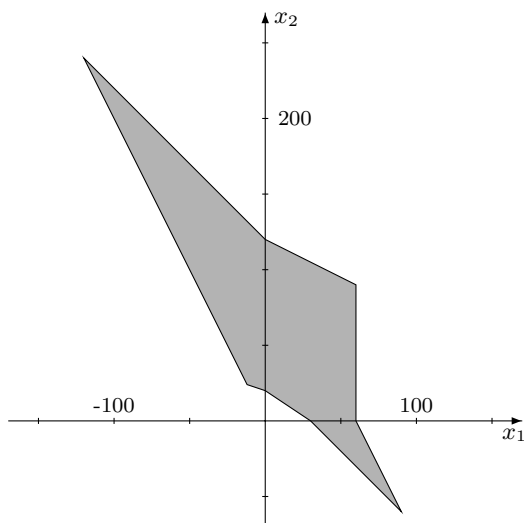


Рис. 11.6. Множество решений системы Хансена.

и 10.4, с выпирающими в разных направлениях “шипами”, невозможна для множеств решений двумерных интервальных линейных систем с неотрицательными матрицами.

Ещё более наглядной иллюстрацией Предложения 11.6.1 является интервальная линейная система Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.5 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (11.32)$$

объединённое множество решений которой изображено на Рис. 5.3 в Главе 5. Внимательный наблюдатель отметит, что, несмотря на кажущуюся беспорядочность и неструктурированность конфигурации этого множества ограничивающие его поверхности всё равно монотонны! Рассмотренные примеры иллюстрируют также ещё одну особенность функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$ — их возможную разрывность, которая возникает из-за того, что концами интервальных элементов матрицы ИСЛАУ являются нули.

Теорема 11.6.1 Если в интервальной линейной системе уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} неотрицательна, то для любых двух точек $y, z \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, таких что $y \leq z$, интервальный вектор $[y, z]$ также является подмножеством множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

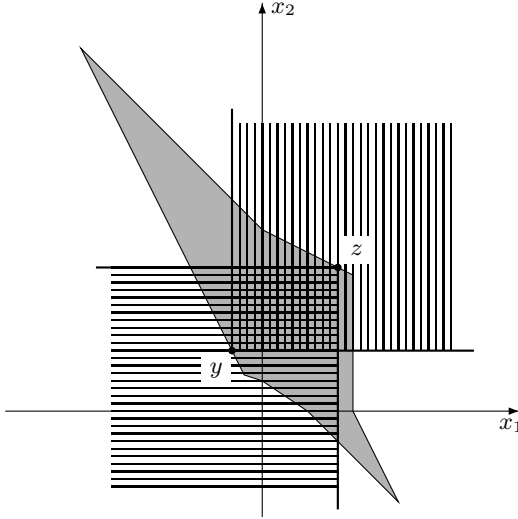


Рис. 11.7. Иллюстрация Теоремы 11.6.1.

Доказательство. Из самого определения функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$ следует, что для любого $r \in \mathbb{R}^{n-1}$ и любого индекса $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\underline{\Omega}_\nu(r) \leq \{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\} \leq \overline{\Omega}_\nu(r).$$

Но при сделанном нами допущении о неотрицательности матрицы \mathbf{A} справедливо даже большее, —

$$\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\} = [\underline{\Omega}_\nu(r), \overline{\Omega}_\nu(r)],$$

— так как множество $\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\}$ связано. Следовательно, множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является в точности пересечением надграфика функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и подграфика функции $\overline{\Omega}_\nu(r)$. Доказываемое утверждение вытекает поэтому из того, что эти функции ещё и монотонно невозрастающие. ■

Таким образом, структура множества решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами является весьма специальной и для их внутреннего оценивания могут быть построены эффективные, даже полиномиально сложные алгоритмы, если мы уже знаем какую-то точку из $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$.

11.66 Алгоритм

Псевдокод алгоритма внутреннего интервального оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами приведён в Табл. 11.1. Дадим необходимые пояснения к нему.

Алгоритм осуществляет построение нижней y и верхней z границ интервального вектора $[y, z]$ внутренней оценки для $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, отправляясь от некоторой начальной точки $\tilde{x} \in \Xi$. Первоначально полагаем

$$\begin{aligned} y &\leftarrow \tilde{x}, \\ z &\leftarrow \tilde{x}, \end{aligned}$$

а далее i -ый, $i = 1, 2, \dots, n$, шаг алгоритма “раздвигает” точки y и z по i -ой координате (см. Рис. 11.8, так что в результате n -ного шага получается, вообще говоря, строгое покомпонентное неравенство $y < z$).

С помощью вспомогательных безразмерных вещественных параметров λ и μ пользователь имеет возможность изменять форму интервальной оценки $[y, z]$ и её расположение внутри множества решений. Эти параметры регулируют то, насколько на i -ом шаге алгоритма y_i и z_i , соответственно, будут отличаться от \tilde{x}_i . Значение $\lambda = 1$ или $\mu = 1$ задаёт максимально возможное в пределах множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ отклонение от y_i от \tilde{x}_i в сторону уменьшения и z_i от \tilde{x}_i в сторону увеличения, а нулевые λ или μ соответствовали бы $z_i = y_i = \tilde{x}_i$. Конкретная величина сдвига y_i и z_i относительно \tilde{x}_i определяется из информации о пересечении с множеством решений ИСЛАУ прямых, параллельных i -ой координатной оси и проходящих через насчитанные к текущему шагу точки y и z . Методика вычисления таких пересечений подробно изложена нами в §11.6а.

Отдельного пояснения требует факт различного подхода к обработке i -ой, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ и последней n -ой компонент векторов y и z . Для получения максимального по включению внутреннего бруса имеет смысл взять точки y и z на границе множества решений, а потому по n -ой координате эти точки раздвигаются максимально далеко друг

Таблица 11.1. Алгоритм **NonNeg** для внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами

Вход

Интервальная линейная система $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с неотрицательной матрицей \mathbf{A} . Точка \tilde{x} из оцениваемого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Вещественные параметры $\lambda, \mu \in]0, 1]$.

Выход

Нижняя y и верхняя z границы интервального вектора $[y, z]$ внутренней оценки множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Алгоритм

$y \leftarrow \tilde{x} ; \quad z \leftarrow \tilde{x} ;$

DO FOR $k = 1$ TO n

$\mathbf{Y} \leftarrow] - \infty, + \infty [; \quad \mathbf{Z} \leftarrow] - \infty, + \infty [;$

DO FOR $i = 1$ TO n

$$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{Y} \cap \left(\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq k}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right) / \mathbf{a}_{ik} \right) ;$$

$$\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z} \cap \left(\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq k}^n \mathbf{a}_{ij} z_j \right) / \mathbf{a}_{ik} \right) ;$$

END DO

IF ($k < n$) THEN

$$y_k \leftarrow \lambda \underline{\mathbf{Y}} + (1 - \lambda) \tilde{x}_k ; \quad z_k \leftarrow (1 - \mu) \tilde{x}_k + \mu \overline{\mathbf{Z}} ;$$

ELSE

$$y_k \leftarrow \underline{\mathbf{Y}} ; \quad z_k \leftarrow \overline{\mathbf{Z}} ;$$

END IF

END DO

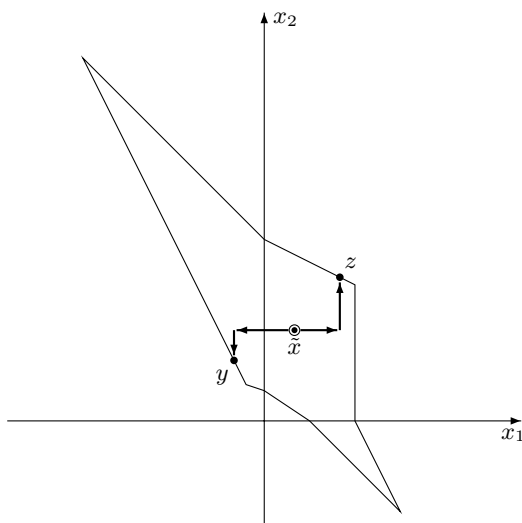


Рис. 11.8. Как работает алгоритм NonNeg.

от друга, на противоположные границы $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, так что параметры λ и μ уже никак не влияют на выполнение этого завершающего шага алгоритма.

Для получения “телесной” формы бруса внутренней оценки множества решений наш вычислительный опыт рекомендует выбирать “средние” значения для λ и μ , т.е. в районе 0.3–0.7. Слишком близкие к 0 или к 1 значения λ и μ могут привести к “сплющиванию” оценивающего бруса по некоторым координатам. Впрочем, нередко построение удовлетворяющей пользователю оценки может стать лишь результатом интерактивной процедуры, включающей многократный выбор \tilde{x} и варьирование λ и μ .

Приведённая в Табл. 11.1 версия алгоритма рассчитана на интервальные линейные системы с неотрицательными квадратными неособенными матрицами, т.е. на случай ограниченных множеств решений. Для ИСЛАУ с неотрицательными прямоугольными $m \times n$ -матрицами внутренний цикл “DO FOR” следует выполнять до m . Если же предполагается неограниченность множества решений, и мы решаем постановку (11.23), то в начале внешнего цикла “DO FOR” по k нужно инициализи-

ровать интервалы \mathbf{Y} и \mathbf{Z} не всей числовой осью, а \mathbf{U}_k , т.е. k -ой компонентой ограничивающего интервала, данного нам из самой постановки (11.23).

Наконец, отметим, что трудоемкость исполнения алгоритма **NonNeg** при известной начальной точке \tilde{x} составляет всего $O(mn^2)$ арифметических и логических операций, что по порядку величины превзойти уже невозможно: матрица интервальной системы (11.3) задаётся mn элементами, да ещё n параметров требует для своего описания искомый брус внутренней оценки множества решений.

11.6в Выбор начальной точки

Для получения телесной внутренней оценки множества решений желательно, чтобы начальная точка \tilde{x} алгоритма **NonNeg** лежала во внутреннейности $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. В этом параграфе мы обсудим, как проверять, действительно ли $\tilde{x} \in \text{int } \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, а в некоторых случаях корректировать положение \tilde{x} .

В самой общей ситуации корректировка точки из множества решений ИСЛАУ представляет из себя непростую задачу, так как NP-трудной задачей является распознавание самих этих множеств решений. Но существуют два частных случая, когда множество решений может быть исследовано относительно несложно. Это случаи

- объединённого множества решений ИСЛАУ с квадратной неособенной матрицей,
- допустимого множества решений ИСЛАУ.

В первом случае точку \tilde{x} из $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ можно получить, решив какую-нибудь точечную систему уравнений с коэффициентами из \mathbf{A} и \mathbf{b} , скажем, “среднюю” систему

$$(\text{mid } \mathbf{A}) x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Что касается допустимого множества решений ИСЛАУ, то выяснение его пустоты или непустоты является полиномиально разрешимой задачей. Для достижения своих целей мы воспользуемся техникой так называемых “распознающих функционалов”, представленной в Главе 5 нашей книги, именно Теоремой 5.4.1.

Пусть \mathbf{A} — интервальная $m \times n$ -матрица, \mathbf{b} — интервальный m -вектор, и выражением

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

задается функционал $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда принадлежность точки x допустимому множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Tol :

$$x \in \Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

т.е. допустимое множество решений соответствующей ИСЛАУ есть лебегово множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$. Кроме того, функционал Tol вогнутый и достигает своего конечного максимума на всем \mathbb{R}^n . Если интервальная матрица \mathbf{A} задачи не имеет нулевых строк, то из $x \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ следует $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$. Обратно, если $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$, то $x \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Как следствие результатов Главы 5, мы естественно приходим к следующему практическому рецепту коррекции начальной точки \tilde{x} для алгоритма **NonNeg**: находим какую-нибудь точку из объединённого (соответственно, допустимого) множества решений ИСЛАУ, а затем, пользуясь градиентным подъёмом, пытаемся достичь лучшего значения распознающего функционала Uni (соответственно, Tol). Если полученное новое значение строго больше нуля, то мы оказались во внутренности объединённого (допустимого) множества решений.

11.6г Численные примеры

Пример 1. Для интервальной линейной системы Хансена

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix},$$

применение алгоритма **NonNeg** с параметрами $\lambda = \mu = 1$ приводит к ответу

$$\begin{pmatrix} [-25.909, 60] \\ [51.818, 90] \end{pmatrix},$$

а с параметрами $\lambda = \mu = 0.7$ получается внутренняя оценка

$$\begin{pmatrix} [-13.022, 47.114] \\ [26.045, 96.443] \end{pmatrix}.$$

Обе полученные оценки — максимальные по включению.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим интервальную линейную систему Ноймайера

$$\begin{pmatrix} t & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & t & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & t \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix},$$

которую мы уже использовали для тестовых расчётов в Главе 10. Эта матрица, помимо прочего, неотрицательна и потому интервальные линейные системы с ней могут служить тестовыми для развитой нами в этом параграфе методики.

При размерности 3 и значении диагонального параметра $t = 3.5$ объединённое множество решений этой интервальной системы имеет вид, изображённый на Рис. 5.3, а применение для его внутреннего оценивания алгоритма **NonNeg** с параметрами $\lambda = \mu = 1$ даёт результат

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \end{pmatrix},$$

совпадающий с оценкой, получаемой с помощью формального подхода. Мы, таким образом, практически точно оценили изнутри ту часть объединённого множества решений (“кубик”), который прилегает к началу координат. Аналогично предыдущему примеру, столь хорошие результаты оценивания при граничных значениях параметров λ и μ имеют причиной специальную конфигурацию множества решений. Именно, так как в матрице ИСЛАУ “много” элементов имеют нулевые концы, то некоторые из граней множества решений оказываются параллельными координатным плоскостям.

Наши выводы подтверждает

Пример 3. Рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [1, 2] & [1, 2] \\ [1, 2] & 3.5 & [1, 2] \\ [1, 2] & [1, 2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix},$$

которая отличается от системы Ноймайера тем, что вместо нулей левыми концами внедиагональных элементов матрицы взяты единицы. Для неё внутреннее оценивание объединённого множества решений алгоритмом **NonNeg** с параметрами $\lambda = \mu = 1$ приводит к “сплюсненному” интервальному ответу

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в этом случае правильнее взять параметры λ и μ внутри отрезка $(0, 1]$. Например, мы получаем телесную внутреннюю оценку

$$\begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.16, 0.16] \\ [-0.14, 0.14] \end{pmatrix}$$

при использовании алгоритма **NonNeg** с $\lambda = \mu = 0.7$.

Во всех рассмотренных в этом параграфе примерах в качестве стартовой точки для построения внутренней интервальной оценки использовались решения “средней” вещественной системы.

11.7 “Центровой” подход к внутреннему оцениванию

Выше в этой главе мы рассмотрели два подхода к решению задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений, среди которых для квадратных систем своей вычислительной эффективностью и общностью выделяется формальный (алгебраический) подход. Тем не менее, его возможностей хватает не

всегда, и для произвольных интервальных линейных систем с прямоугольной неквадратной матрицей внутреннее оценивание множеств решений по-прежнему представляет собой важную и актуальную задачу. Основываясь на геометрически наглядных соображениях, мы предлагаем ниже простой и весьма общий способ построения бруса, вписанного в объединённое множество решений ИСЛАУ, вокруг а priori известной точки-центра из этого множества (см. Рис. 11.9). Показано, что рассматриваемая задача сводится к нахождению максимума некоторой специальной квазивогнутой функции, приближенное значение которого может быть получено весьма элементарными средствами.

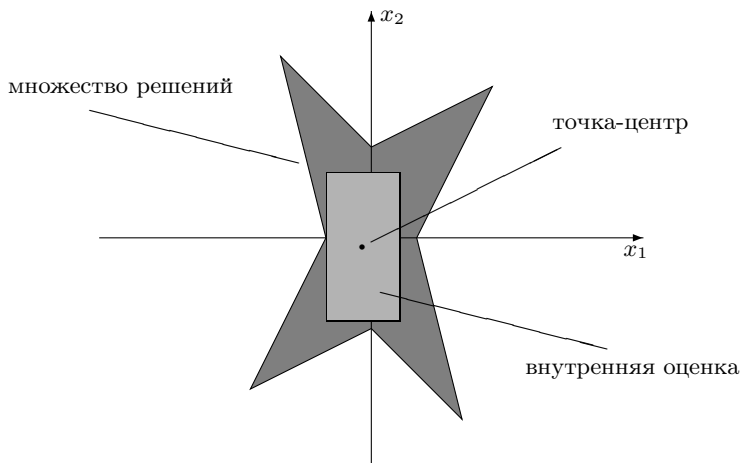


Рис. 11.9. Внутреннее оценивание множества решений с помощью “центрального подхода”.

Если мы найдём какую-нибудь точку из множества решений, то далее сможем использовать её как “центр”, вокруг которого будет построено интервальное решение задачи (4.21) (см. Рис. 11.9). Это основная идея развиваемого нами подхода, который, таким образом, может быть назван “центровым”, совершенно аналогично подходу, применённому в Главе 6 для внутреннего оценивания допустимого множества решений ИСЛАУ. Итак,

сначала ищем некоторую точку $t \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$,

затем используем известные координаты t для вычисления

размера бруса внутренней оценки, который имеет центр в этой точке t .

Формула для размеров интервального решения задачи (4.21) будет выведена нами ниже (см. §11.7б) и основную роль в ней играет взятие максимума рационального выражения с модулями по некоторому брусу, так что при известной точке $t \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ решение задачи о внутреннем оценивании множества решений сводится, по существу, к оптимизации на брусе. Мы подробно рассмотрим его в §11.7в.

При этом у интервальной матрицы \mathbf{A} не предполагается никаких свойств неособенности, полноранговости и т.п., так что множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть и неограниченным. Единственное необременительное требование на \mathbf{A} состоит в том, что она не должна иметь целиком нулевых строк.

Наконец, мы не рассматриваем вопроса об оптимизации (наилучшем выборе) центра интервального решения, так как он, отчасти, выходит за рамки нашего исследования и, с другой стороны, тесно связан с конкретными потребностями пользователей, решающих те или иные практические задачи.

11.7а Уточнение постановки задачи

В приложениях постановка задачи внутреннего оценивания (4.21) часто содержит дополнительную информацию о желаемой форме бруса $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n)^\top$, который должен содержаться во множестве решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Именно, будем предполагать, что ширины компонент \mathbf{U} пропорциональны соответствующим компонентам некоторого вещественного положительного вектора

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n), \quad w_i > 0.$$

Иными словами, в постановке (4.21) дополнительно вводятся весовые коэффициенты w_i для ширин (или радиусов) компонент бруса внутренней оценки \mathbf{U} , такие что

$$\text{rad } \mathbf{U}_i / \text{rad } \mathbf{U}_j = w_i / w_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Оказывается, что посредством масштабирования неособенной диагональной матрицей

$$\mathbf{W} = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

с элементами w_1, w_2, \dots, w_n по главной диагонали рассмотрение этого случая может быть сведено к простейшей ситуации, когда $w = (1, 1, \dots, 1)$ и брус \mathbf{U} превращается в кубик, который мы должны вписывать во множество решений некоторой модифицированной интервальной системы уравнений. Более точно, справедливо

Предложение 11.7.1 Пусть

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}W.$$

Интервальный вектор $\tilde{\mathbf{U}}$ с одинаковыми ширинами компонент, т.е. такой что

$$\text{rad } \tilde{\mathbf{U}}_i = \text{rad } \tilde{\mathbf{U}}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

является решением задачи внутреннего оценивания (4.21) для модифицированной интервальной системы $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда интервальный вектор $\mathbf{U} = W\tilde{\mathbf{U}}$ с желаемым отношением ширин компонент есть решение задачи внутреннего оценивания (4.21) для исходной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Доказательство. Чтобы обосновать сделанное утверждение, воспользуемся характеристикой Х. Бека [24] множества решений интервальной линейной системы (11.3) для $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}x \cap \mathbf{b} \neq \emptyset. \quad (11.33)$$

В частности, для модифицированной системы уравнений

$$\tilde{x} \in \Xi(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset. \quad (11.34)$$

Умножение на матрицу W задаёт взаимно однозначное соответствие между точками брусков \mathbf{U} и $\tilde{\mathbf{U}}$ по правилу

$$x \rightleftharpoons \tilde{x} = Wx$$

для $x \in \mathbf{U}$ и $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{U}}$. Далее, для каждой пары взаимно соответствующих друг другу x и \tilde{x} справедливо

$$\mathbf{A}x = \mathbf{A}WW^{-1}x = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{x},$$

так что в правых частях эквивалентностей (11.33) и (11.34) соотношения выполняются или не выполняются одновременно. Кроме того, для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$ в самом деле

$$\text{rad } \mathbf{U}_i / \text{rad } \mathbf{U}_j = w_i / w_j,$$

как и требовалось. ■

Итак, всюду ниже мы вправе считать, что в задаче (4.21) внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ требуется отыскание интервального вектора \mathbf{U} с компонентами равной ширины, такого что $\mathbf{U} \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

11.76 Формула для размеров внутренней оценки

Теорема 11.7.1 *Если некоторая точка $t \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, т.е. $t \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то*

$$\varrho = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{\mathbf{A} \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\} \geq 0 \quad (11.35)$$

и интервальный вектор $\mathbf{U} = (t + \varrho \mathbf{e})$, $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$, с центром в t целиком содержится во множестве решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Выражение под знаками экстремумов в (11.35) выглядит очень внушительно, но оно несёт ясный содержательный смысл, о котором стоит упомянуть. Именно, вектор $|\text{mid } \mathbf{b} - \mathbf{A}t|$ — это абсолютные величины отклонений произведения $\mathbf{A}t$ от середины вектора правой части интервальной системы. Знаки разности между радиусами правой части и этими отклонениями, даваемые компонентами вектора $(\text{rad } \mathbf{b} - |\text{mid } \mathbf{b} - \mathbf{A}t|)$, указывают на принадлежность вектору \mathbf{b} образа $\mathbf{A}t$ точки t под действием линейного преобразования \mathbf{A} . Фактически, всё это уже знакомо нам с предыдущего параграфа, где использовалось при выводе распознающего функционала *Uni*. Но, будучи отнесёнными к сумме модулей элементов каждой строки матрицы \mathbf{A} , компоненты этого вектора $(\text{rad } \mathbf{b} - |\text{mid } \mathbf{b} - \mathbf{A}t|)$ характеризуют уже нечто новое — степень чувствительности значений распознающего функционала к вариациям своего первого аргумента. Более точно, минимум этих отношений по i даёт величину “грубости к возмущениям”, показывающую насколько можно сдвинуть точку t равномерно по всем координатам, чтобы она ещё оставалась во множестве решений интервальной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Нельзя не отметить красивую двойственность этого результата с формулой, выведенной в §6.6 для размеров внутренней оценки *допустимого множества решений* интервальной линейной системы: если $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то

$$\varrho = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\} \geq 0 \quad (6.32)$$

и интервальный вектор $(t + \varrho \mathbf{e})$ включается в допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Как видим, смена логического квантора при матрице в определении множества решений приводит к смене смысла внутреннего экстремума — вместо максимума по $A \in \mathbf{A}$ появляется минимум.

Доказательство. Коль скоро матрица ИСЛАУ не содержит нулевых строк, то

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| > 0,$$

и неотрицательность ϱ равносильна неотрицательности выражения

$$\min_{1 \leq i \leq m} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right| \right\}, \quad (11.36)$$

которое по Теореме 5.4.1 определяет значение распознающего функционала Uni в точке t . Таким образом, (11.36), а вместе с ним и (11.35), действительно неотрицательны при $t \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Приступая к обоснованию второго утверждения теоремы, предположим сначала, что в рассматриваемой нами задаче (4.21) матрица \mathbf{A} имеет нулевую ширину, т.е. является просто вещественной, $\mathbf{A} = A = (a_{ij})$. Обозначая

$$\varrho_A = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}, \quad (11.37)$$

представим каждый $x \in \mathbf{U}$ в виде $x = t + y$, где $\max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \leq \varrho_A$.

Поскольку

$$|y_i| \leq \varrho_A \leq \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|},$$

то для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ выполняется цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |(Ay)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |y_j| \leq \varrho_A \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ &\leq \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \\ &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i \right|. \end{aligned}$$

Так как $Ay = Ax - At$, то мы получаем

$$(At)_i - \text{rad } \mathbf{b}_i + \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i \right| \leq (Ax)_i \leq (At)_i + \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i \right|$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i) + \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i \right| \\ \leq (Ax)_i \leq \end{aligned} \quad (11.38)$$

$$\bar{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i) - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i \right|.$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$-z + |z| \geq 0 \quad \text{и} \quad -z - |z| \leq 0$$

для любого вещественного z , неравенство (11.38) влечёт для всех $i = 1, 2, \dots, m$

$$\underline{\mathbf{b}}_i \leq (Ax)_i \leq \bar{\mathbf{b}}_i,$$

т.е. $Ax \in \mathbf{b}$. Это и означает принадлежность точки x множеству решений интервальной линейной системы $Ax = \mathbf{b}$. Формула (11.35) обоснована тем самым для систем вида (11.3), у которых интервальность присутствует только в правой части.

Предположим теперь, что в исследуемой ИСЛАУ матрица \mathbf{A} является существенно интервальной матрицей, имеющей ненулевую ширину, множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто и $t \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Рассмотрим

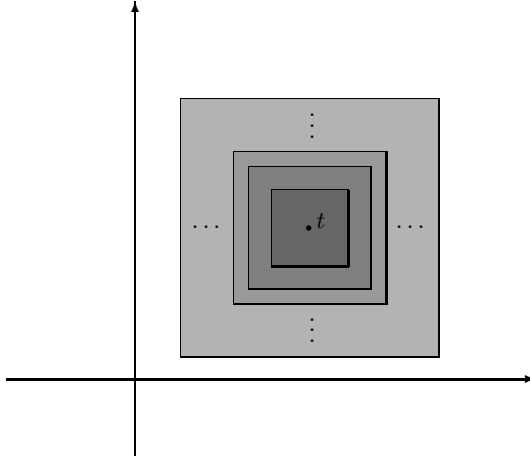


Рис. 11.10. Объединение кубиков с общим центром.

совокупность всевозможных систем $Ax = b$ с вещественными матрицами $A \in \mathbf{A}$ и внутренними оценками U_A их множеств решений $\Xi(A, b)$. Так как

$$\Xi(\mathbf{A}, b) = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} \Xi(A, b),$$

то объединение любой совокупности внутренних оценок для множеств $\Xi(A, b)$, $A \in \mathbf{A}$, является множеством, содержащимся в $\Xi(\mathbf{A}, b)$, т.е. внутренней оценкой для $\Xi(\mathbf{A}, b)$.

Пусть U_A — это кубики, имеющие фиксированный центр t . Ясно, что такие внутренние оценки существуют не для всех множеств решений $\Xi(A, b)$ с $A \in \mathbf{A}$, а лишь для тех, которые содержат точку t . Но объединение кубиков внутренних оценок $U_A \subseteq \Xi(A, b)$, которые всё-таки существуют для данного фиксированного t , находится особенно просто: это тоже кубик с тем же центром t , размер которого есть максимум размеров объединяемых кубиков (см. Рис. 11.10. В частности, если размеры кубиков определяются формулой (11.37), то брус

$$U = t + \varrho e,$$

также целиком лежит во множестве решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ при

$$\varrho = \max_{A \in \mathbf{A}} \varrho_A = \max_{A \in \mathbf{A}} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}. \quad (11.39)$$

В этом выражении мы имеем право брать максимум относительно A по всей интервальной матрице \mathbf{A} потому, что $\varrho_A < 0$ при $t \notin \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, и эти отрицательные значения ϱ_A никак не влияют на величину неотрицательного максимума (11.39).

Наконец, мы можем переставить в (11.39) операции взятия минимума и максимума, так как для разных индексов i максимумы от выражений в фигурных скобках берутся по *непересекающимся множествам аргументов*, именно, по различным строкам матрицы \mathbf{A} . Окончательно

$$\varrho = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}.$$

Этим и завершается доказательство Теоремы. ■

В выражении (11.35) взятие минимума по $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ не представляет трудностей, так что при отыскании ϱ центральной задачей является вычисление для каждого i внутренних максимумов

$$\max_{(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in (\mathbf{a}_{i1}, \dots, \mathbf{a}_{in})} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}$$

или же их оценивание снизу.

Для удобства дальнейших рассуждений обозначим брус $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$ через

$$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = \mathbf{X}$$

вне зависимости от индекса i , тогда как целевую функцию $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выражение внутри фигурных скобок в (11.35) и (6.32) — будем обозна-

чать

$$\Phi(x) = \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |x_j|}, \quad (11.40)$$

где $R = \text{rad } \mathbf{b}_i$, $M = \text{mid } \mathbf{b}_i$ — вещественные константы. Таким образом, построение внутренней интервальной оценки объединённого множества решений ИСЛАУ вокруг известной точки-центра сводится к решению оптимизационной задачи

Найти $\max_{x \in \mathbf{X}} \Phi(x)$ или хотя бы оценить его снизу.

(11.41)

11.7в Вычисление размеров внутренней оценки

Ясно, что в (11.41) оценкой искомого $\max_{x \in \mathbf{X}} \Phi(x)$ снизу может служить значение целевой функции $\Phi(x)$ в любой точке бруса \mathbf{X} . Поэтому в случае, когда мы не хотим ввязываться в трудоёмкие вычисления, простейшим способом решения задачи (11.41) является взятие максимального из значений целевой функции в нескольких выделенных точках области определения \mathbf{X} .

Обозначим

$$G(x) = R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right|, \quad H(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

так что

$$\Phi(x) = \frac{G(x)}{H(x)}.$$

$G(x)$ и $H(x)$ представляют собой довольно простые выражения, имеющие лишь по одному вхождению каждой переменной x_j , а потому их экстремумы на \mathbf{X} могут быть несложно вычислены — как левый или правый концы естественных интервальных расширений $G(\mathbf{X})$ и $H(\mathbf{X})$

соответствующих выражений. В частности,

$$\max_{x \in \mathbf{X}} G(x) = \overline{G(\mathbf{X})} = \overline{\left(R - \left\langle M - \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j t_j \right\rangle \right)}$$

и

$$\min_{x \in \mathbf{X}} H(x) = \underline{H(\mathbf{X})} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{X}_j \rangle.$$

Далее, помимо самих значений этих экстремумов мы можем найти и значения аргументов, их доставляющие, отследив какие из концов интервалов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ в результате операций над ними — сложения, вычитания, умножения, взятия модуля и его антипода — дают концы естественных интервальных расширений $G(\mathbf{X})$ и $H(\mathbf{X})$. В итоге оценка решения задачи (11.41) может быть взята, к примеру, как максимум значений целевой функции $\Phi(x)$

в центре бруса \mathbf{X} ,

в точке минимума знаменателя дроби $H(x)$,

в точке максимума числителя дроби $G(x)$.

Обратимся теперь к более развитым методам решения оптимизационной задачи (11.41). Напомним

Определение 11.7.1 [1] Пусть D — выпуклое множество в пространстве \mathbb{R}^n . Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазивогнутой, если для любых $x, y \in D$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ имеет место

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

Известно [1], что функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ квазивогнута тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ её лебеговы множества

$$\{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$$

являются выпуклыми (см. Рис. 11.11). Квазивогнутые функции, в частности, не могут иметь несколько отличающихся по величине локальных максимумов, и, найдя один локальный максимум такой функции, мы можем быть уверенными в его глобальности.

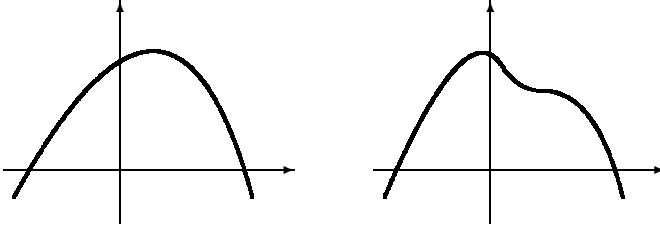


Рис. 11.11. Графики вогнутой и квазивогнутой функций.

Теорема 11.7.2 Пусть брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ не содержит начала координат. Множество \mathfrak{D} всех точек из \mathbf{X} , на которых функция $\Phi(x)$, определяемая посредством (11.40), принимает неотрицательные значения, является выпуклым и $\Phi(x)$ квазивогнута на \mathfrak{D} .

Доказательство. Для заданного фиксированного уровня $\alpha \geq 0$ обозначим через

$$S_\alpha = \{ x \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) \geq \alpha \}$$

лебегово множество исследуемой функции $\Phi(x)$. В частности, $S_0 = \mathfrak{D}$.

Если S_α пусто, то рассуждать не о чём. Если же $S_\alpha \neq \emptyset$, то пусть точки x, y (не обязательно различные) принадлежат множеству S_α , так что $\Phi(x) \geq \alpha$, $\Phi(y) \geq \alpha$. При этом

$$R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right| \geq \alpha \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

$$R - \left| M - \sum_{j=1}^n y_j t_j \right| \geq \alpha \sum_{j=1}^n |y_j|.$$

Взяв какое-нибудь значение $\lambda \in [0, 1]$ и сложив выписанные неравенства с неотрицательными весами λ и $(1 - \lambda)$, получим неравенство-

следствие того же смысла:

$$\begin{aligned} R - \lambda \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right| - (1 - \lambda) \left| M - \sum_{j=1}^n y_j t_j \right| \\ \geq \alpha \left(\lambda \sum_{j=1}^n |x_j| + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^n |y_j| \right). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Далее, применяя неравенство треугольника для абсолютного значения интервала, мы можем заменить левую часть неравенства (11.42) на большую величину

$$R - \left| \lambda \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) + (1 - \lambda) \left(M - \sum_{j=1}^n y_j t_j \right) \right|,$$

а правую часть (11.42) можем заменить, в силу $\alpha \geq 0$, на меньшую величину

$$\alpha \left(\sum_{j=1}^n |\lambda x_j + (1 - \lambda) y_j| \right).$$

Окончательно имеем

$$R - \left| M - \sum_{j=1}^n (\lambda x_j + (1 - \lambda) y_j) t_j \right| \geq \alpha \left(\sum_{j=1}^n |\lambda x_j + (1 - \lambda) y_j| \right),$$

что равносильно

$$\Phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \alpha.$$

Следовательно, точка $\lambda x + (1 - \lambda)y$ также лежит во множестве S_α , т.е. оно выпукло. Это и завершает доказательство Теоремы. \blacksquare

Отметим, что условие неотрицательности значений $\Phi(x)$ не является столь уж обременительным для применения доказанного результата, так как отрицательность $\Phi(x)$ при всех $x \in \mathbf{X}$ возможна лишь в том малоинтересном для нас случае, когда точка-центр t не лежит во множестве решений. Это следует из того, что отрицательность $\Phi(x)$

равносильна отрицательности числителя дроби (11.40) и, значит, “распознающего” функционала Uni в точке t (см. §5.4). При этом следует озаботиться лучшим выбором центра t .

Присутствие в выражении (11.40) модулей делает целевую функцию $\Phi(x)$ негладкой, но она непрерывна и почти всюду дифференцируема на всей своей области определения. Таким образом, на факте квазивогнутости $\Phi(x)$ можно основать какие-нибудь градиентные методы для оценивания решения задачи (11.41), к примеру, простейший метод

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + \gamma^{(k)} \nabla \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.43)$$

с подходящим выбором величины шага $\gamma^{(k)} \in \mathbb{R}$ (см. [1]). При этом компоненты градиента $\nabla \Phi(x)$ имеют, как нетрудно проверить, следующий вид

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi(x))_i = & \left(t_i \cdot \text{sgn} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) \right. \\ & \left. - \left(R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right| \right) \cdot \text{sgn } x_i \right) / \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, где sgn — функция знака числа.

Естественно, что в качестве начального приближения $x^{(0)}$ для процесса (11.43) следует взять такое значение аргумента, на котором целевая функция неотрицательна. Как его найти?

Как следует из результатов §5.4, принадлежность точки t объединённому множеству решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ эквивалентна

$$\text{Uni}(t, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} t_j \right\rangle \right\} \geq 0,$$

что, в свою очередь, равносильно справедливости такого же неравенства для отдельно рассматриваемой нами i -ой строки матрицы \mathbf{A} :

$$R - \left\langle M - \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j t_j \right\rangle \geq 0, \quad (11.44)$$

$R = \text{rad } \mathbf{b}_i$, $M = \text{mid } \mathbf{b}_i$. Поэтому для нахождения точки неотрицательности целевой функции Φ нам нужно, подобно тому как это было рекомендовано в начале параграфа, отследить, на каких именно концах интервалов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ достигается значение выражения в левой части (11.44). Найденные числа как раз таки и образуют искомый вектор начального приближения $x^{(0)}$ для градиентного подъёма (11.43).

Комментарий к Главе 11

Внутреннему оцениванию множеств решений интервальных уравнений и систем уравнений посвящено сравнительно небольшое количество работ. Это исследования Х. Бека [18], А. Ноймайера [23], А.Ф. Бочкова и Т.В. Евтушенко [2].

Мы рекомендуем очень мощный решатель UniCalc [17], разработанный в Новосибирском филиале РосНИИ Искусственного Интеллекта и в настоящее время доступный на рынке программных продуктов. Информация о нём и демонстрационная версия находятся, например, в Интернете на сайте <http://www.rriai.org.ru/UniCalc/>.

Система уравнений (11.19) была предложена А. Ноймайером в [23, 24].

К §11.2. Элегантный и практичный результат о возможности внутреннего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ с помощью формальных решений системы (11.5) был одновременно и независимо получен автором книги и Л. В. Куприяновой в 1993 году и впервые доложен на международной конференции INTERVAL’94, Санкт-Петербург, 7–10 марта 1994 года.

На возможность внутреннего оценивания допустимого множества решений ИСЛАУ посредством её формального решения, по-видимому, впервые указывал В.С. Зюзин в работе [6] (которая была направлена в печать ещё в 1985-м году). Но сделано это было очень кратко (одним предложением) и в косвенной форме. Впоследствии этот подход развивался А.В. Захаровым и Ю.И. Шокиным [28,29], С.П. Шарым [73], а также А.А. Морлангом, Л.А. Авдеевым и В.Г. Колмогоровым в [44], где ЛЗД естественно возникает в связи с анализом электрических цепей при интервальной неопределённости их характеристик.

Обобщение формального подхода к внутреннему оцениванию на произвольные множества АЕ-решений интервальных линейных систем было выполнено С.П. Шарым в работах [14, 29, 32].

К §11.6. Свойство “монотонности конфигурации” множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами впервые было отмечено в [27].

Интервальная линейная система (11.31) впервые была рассмотрена Э. Хансеном в [24] и потом неоднократно привлекалась в качестве иллюстративного примера различными авторами (см., например, [25]).

Литература к главе 11

- [1] БАЗАРА М., ШЕТТИ К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
- [2] Бочков А.Ф., Евтушенко Т.В. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределенности. – Москва, 1988. – 17 с. – Депонировано в ВИНТИ, №2891-B88.
- [3] Бочков А.Ф., МИЛЕВСКИЙ М.В. Оценивание параметров модели для объектов с интервальной неопределенностью в выходных параметрах. – Москва, 1988. – 23 с. – Депонировано в ВИНТИ, №926-B88.
- [4] Вошинин А.П., Сотиров Г.Р. *Оптимизация в условиях неопределённости*. – Москва - София: Издательство МЭИ – Техника, 1989.
- [5] ДОВРОНЕЦ Б.С., ШАЙДУРОВ В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [6] Зюзин В.С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // *Дифференциальные уравнения и теория функций*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. – С. 28–32.
- [7] КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. *Функциональный анализ*. – Москва: Наука, 1984.
- [8] КАРЛЮК А.Ю. Численный метод нахождения алгебраического решения ИСЛАУ, основанный на треугольном расщеплении // *Вычислительные Технологии*. – Т. 4, №4. – С. 14–23.
- [9] КОЛЛАТЦ Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. – Москва: Мир, 1969.
- [10] КУРЖАНСКИЙ А. Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // *Автоматика и Телемеханика*. – 1991. – №4. – С. 3–26.

- [11] ОРТЕГА Дж., РЕЙНБОЛДТ В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [12] ШАРАЯ И.А. О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 55–66.
- [13] ШАРЫЙ С.П. О характеристике объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНТИ, №726-В91.
- [14] ШАРЫЙ С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // *Вычислительные Технологии* (Сборник научных трудов ИВТ СО РАН, Т. 4, №13), Новосибирск, 1995. – С. 64–80.
- [15] ШАРЫЙ С.П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем // *Дискретная математика*. – Красноярск: КГТУ, 1996. – С. 129–145.
- [16] ШАРЫЙ С.П. Ещё раз о внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Том 8, спец. выпуск. – С. 146–160.
- [17] BABICHEV A.B., KADYROVA O.B., KASHEVAROVA T.P., LESHCHENKO A.S., SEMENOV A.L. UniCalc, a novel approach to solving systems of algebraic equations // *Interval Computations*. – 1993. – No. 2. – P. 29–47.
- [18] BEECK H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing*. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [19] HANSEN E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / Hansen E., ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.
- [20] KUPRIYANOVA L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // *Reliable Computing*. – 1995. – Vol. 1, No. 1. – P. 15–31.
- [21] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, February 23–25, 1995). – P. 130–133.
- [22] LAKEYEV A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 2. – P. 125–131.
- [23] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 86/9. – S. 5–19.

- [24] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [25] SAINZ M.Á., GARDEÑES E., JORBA L. Interval estimation of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 4. – P. 283–305.
- [26] SHARAYA I.A. On maximal inner estimation of the solution sets of linear systems with interval parameters // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 5. – P. 409–424.
- [27] SHARY S.P. Solving interval linear systems with nonnegative matrices // *Scientific Computations and Mathematical Modelling: Proceedings of the International Conference MMSC-93* / Markov S.M., ed. – Sofia: DATECS Publishing, 1993. – P. 179–182.
- [28] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.
- [29] SHARY S.P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // *International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations*, El Paso, TX, 1995. – P. 181–184.
- [30] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [31] SHARY S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3–33.
- [32] SHARY S.P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // *Numerical Methods and Error Bounds* / Alefeld G. and Herzberger J., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 224–233.

Глава 12

Численное нахождение формальных решений

Цель этой главы работы — развитие численных методов нахождения формальных решений интервальных систем уравнений, т.е., фактически, развитие вычислительных основ формального подхода к задачам внутреннего и внешнего оценивания множеств решений, развитого в Главах 7, 9 и 11. Помимо собственно численных методов в этой главе мы также рассматриваем результаты, касающиеся существования и единственности формальных решений, свойства операторов в интервальных пространствах и т.п.

Необходимость в отдельном большом исследовании этих вопросов вызвана, с одной стороны, их новизной и малоизученностью. Действительно, реализация традиционных интервальных методов является в настоящее время достаточно разработанной и в большинстве своих аспектов не встречает затруднений. Но ценность вычисления формальных решений никем, по существу, не осознавалась вплоть до недавнего времени, а соответствующая вычислительная задача оставалась практически неисследованной. С другой стороны, рассматриваемая новая область интервального численного анализа оказывается полной интересных, красивых и содержательных результатов.

Главным результатом этой части книги является *субдифференциальный метод Ньютона*, позволяющий эффективно и качественно находить формальные решения широких классов интервальных линейных систем.

12.1 Формальные решения треугольных интервальных систем

Интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$Cx = d$$

с $C \in \mathbb{KR}^{n \times n}$, $d \in \mathbb{KR}^n$, мы называем *треугольной*, если матрица $C = (c_{ij})$ имеет треугольный вид

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & c_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. $c_{ij} = 0$ при $i > j$. Формальные решения подобных систем уравнений легко могут быть найдены с помощью обратной подстановки, т.е. процедуры, аналогичной той, что выполняется как “обратный ход” в методах Гаусса и Хаусхолдера.

Именно, если $0 \notin c_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то

```
DO FOR  i = n  TO  1  STEP  -1

    
$$x_i \leftarrow c_{ii}^{-1} \left( d_i \ominus \sum_{k>i} c_{ik} x_k \right)$$


END DO
```

Если же $0 \in c_{ii}$ для некоторых i , то выписанный выше алгоритм не может быть выполнен в силу из-за несуществования обратных c_{ii}^{-1} . Но это еще не означает неразрешимости всей системы, так как элементарное уравнение

$$c_{ii}x_i = d_i \ominus \sum_{k>i} c_{ik}x_k$$

может всё-таки иметь формальное решение.

12.2 Погружение в линейное пространство

12.2а Зачем погружать?

Возвратимся к формальному подходу для решения задач внешнего и внутреннего оценивания множеств решений ИСЛАУ. Задача внешнего интервального оценивания (5.24) была сведена нами к нахождению формальных решений интервальных уравнений вида

$$x = Cx + d,$$

а задача внутреннего интервального оценивания (5.23) сводится к нахождению формальных решений интервальных уравнений вида

$$Cx = d$$

с интервальными матрицей C и вектором d , образованными из элементов полной интервальной арифметики Каухера \mathbb{KR} . В этой арифметике выписанные уравнения равносильны уравнениям

$$Cx \ominus x + d = 0, \quad (12.1)$$

и

$$Cx + d = 0 \quad (12.2)$$

соответственно. Аналогичным образом задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений общих нелинейных интервальных систем также сводятся к вычислению формальных решений некоторых специальных интервальных уравнений вида (9.33) и (11.6)–(11.9).

Как мы уже отмечали, задачи нахождения формальных решений интервальных уравнений — это, по существу, традиционные математические задачи решения некоторых уравнений, и большая часть классического численного анализа посвящена решению подобных постановок. Но особенность нашей ситуации состоит в том, что основное множество \mathbb{KR}^n , на котором рассматриваются решаемые уравнения, совсем не является линейным пространством: отсутствие дистрибутивности в интервальной арифметике ведёт к нарушению той аксиомы линейного пространства, которая требует выполнения тождества

$$(\mu + \nu)x = \mu x + \nu x$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$ и любых скаляров $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Таким образом, большинство из существующих подходов к исследованию операторных уравнений и к вычислению их решений не применимы напрямую к нашей задаче.

Более того, оставаясь в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n , мы не сможем выполнить теоретический анализ ситуации и понять некоторые явления. Например, точечная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

— неособенная (невырожденная) в смысле классической линейной алгебры, но умножение на эту матрицу в \mathbb{KR}^2 может занулить даже ненулевой вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [1, -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В чём причина? Едва ли возможно обнаружить её изнутри интервального пространства, которое является существенно нелинейным. Итак, имеется настоятельная потребность перенести наши рассуждения в некоторое *линейное пространство*, которое мы обозначим для общности через U . Предполагаем также, что на U задана некоторая топология, согласованная с линейной структурой.

С абстрактной математической точки зрения мы имеем два различных пространства, — интервальное пространство \mathbb{KR}^n и линейное пространство U , — на которых заданы существенно разные алгебраические структуры; каким образом возможно “перепрыгнуть” из первого во второе? Мы собираемся сделать это способом, родственным обычной замене переменных и называемым далее *погружением*.

12.26 Определение и основные свойства

Прежде всего, нам следует построить некоторое отображение

$$\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow U,$$

— *вложение* интервального пространства \mathbb{KR}^n в линейное пространство U , — которое должно быть *биективным* (*взаимно однозначным*)

отображением $на$) для того, чтобы корректно восстанавливать интервальный прообраз по его образу в U и наоборот. Далее, нетрудно понять, что всякая биекция $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ порождает также биекцию из множества всех отображений $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в себя на множество всех отображений U в себя. Более точно, каждому $\varphi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ сопоставляется единственное отображение

$$\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U, \quad (12.4)$$

где “о” обозначает композицию отображений.

Определение 12.2.1 Для интервального отображения φ и некоторого фиксированного вложения $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ мы будем называть отображение линейного пространства U в себя, задаваемое посредством (12.4), индуцированным отображением для φ (или, развёрнуто, ι -индуцированным).

Наглядно ситуация может быть описана коммутативной диаграммой, изображённой на Рис. 12.1.

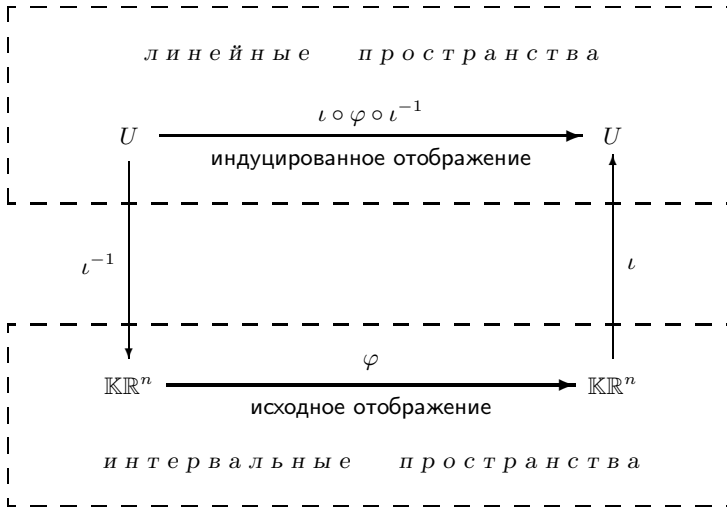


Рис. 12.1. Как вложение ι порождает индуцированное отображение.

Свойства отображений φ и $(\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1})$ оказываются тесно связанными, так что вместо исследования φ можно исследовать индуцированное им отображение $(\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1})$. Более того, мы можем заменить задачу решения уравнения в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ на задачу решения уравнения в линейном пространстве U , придя к ситуации, более привычной для современного численного анализа.

Определение 12.2.2 Пусть в интервальном пространстве $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ задано уравнение

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad (12.5)$$

где $\varphi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ — некоторое отображение, и фиксировано вложение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$. Будем называть индуцированным уравнением для (12.5) такое уравнение

$$\Phi(y) = \Psi(y)$$

в линейном пространстве U , что Φ и Ψ являются индуцированными отображениями для φ и ψ соответственно, т.е. $\Phi = \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$ и $\Psi = \iota \circ \psi \circ \iota^{-1}$.

Таким образом, исходное интервальное уравнение

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (12.6)$$

имеет формальное решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда индуцированное уравнение

$$\Phi(y) = \Psi(y)$$

имеет решение $y^* \in U$. При этом искомое формальное интервальное решение \mathbf{x}^* для (12.6) однозначно восстанавливается по y^* из соотношения

$$\mathbf{x}^* = \iota^{-1}(y^*).$$

В интересующей нас конкретной ситуации с уравнениями (12.1) и (12.2) мы можем заменить исходную задачу — нахождение решений уравнений

$$\mathbf{f}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{g}(x) = 0,$$

таких что

$$\mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \text{и} \quad \mathbf{g} : \mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

— на задачу решения уравнений

$$\mathfrak{F}(y) = \iota(0) \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}(y) = \iota(0)$$

в линейном пространстве U с индуцированными отображениями

$$\mathfrak{F} = \iota \circ \mathfrak{f} \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U \quad \text{и} \quad \mathfrak{G} = \iota \circ \mathfrak{g} \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U,$$

определяемыми как

$$\mathfrak{F}(y) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(y) \ominus \iota^{-1}(y) + \mathbf{d}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}(y) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(y) + \mathbf{d})$$

соответственно.

Более общее соображение. Поскольку ι и ι^{-1} — биекции, то обратимость любого отображения φ на интервальном пространстве равносильна обратимости ι -индуцированного отображения $\Phi := \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$, действующего на линейном пространстве U . При этом

$$\varphi^{-1} = \iota^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \iota. \quad (12.7)$$

Основной вопрос, касающийся построения вложения интервального пространства в линейное пространство, заключается в выборе разумного компромисса между простотой этого отображения и удобной формой индуцированных отображений (12.4). Среди всех биективных вложений $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ мы выделим специальные вложения, которые

- 1) сохраняют аддитивную алгебраическую структуру $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, т.е. такие, что $\iota(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \iota(\mathbf{u}) + \iota(\mathbf{v})$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$,
- 2) сохраняют топологическую структуру $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, т.е. такие, что само отображение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ и его обратное $\iota^{-1} : U \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ непрерывны.

Вложения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$, удовлетворяющие двум выписанным условиям, мы будем называть *погружениями* интервального пространства $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в линейное пространство U . Таким образом, формально мы принимаем следующее

Определение 12.2.3 [27] Пусть U — линейное пространство. Биективное отображение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ будем называть погружением $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в U , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) ι есть изоморфизм аддитивных групп $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и U ,
- (2) ι есть гомеоморфизм топологических пространств $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и U .

Например, если интервалу $\mathbf{v} \in \mathbb{KR}$ сопоставить пару чисел $(\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^2$, т.е. его концы, “забыв” об их интервальном смысле, то задаваемое таким образом отображение $\mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{R}^2$ является погружением. Приведённый пример в некотором смысле типичен, так как, привлекая соображения размерности, нетрудно показать, что Определением 12.2.3 линейное пространство U задаётся однозначно: U должно быть евклидовым пространством \mathbb{R}^{2n} . Этот факт хорошо согласуется с аналитической интуицией и мы не приводим здесь его строгого обоснования, чтобы не перегружать и без того разросшийся текст книги. Цель настоящего подготовительного параграфа — исследование простейших свойств погружений, которые понадобятся нам в дальнейшем при изучении индуцированных уравнений.

Обозначим через $0_{\mathbb{KR}^n}$ и $0_{\mathbb{R}^{2n}}$ нулевые векторы в пространствах \mathbb{KR}^n и \mathbb{R}^{2n} соответственно. Из Определения 12.2.3 немедленно следует, что для любого погружения $\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ мы имеем

$$\begin{aligned}\iota(0_{\mathbb{KR}^n}) &= 0_{\mathbb{R}^{2n}}, \\ \iota(\text{opp } \mathbf{x}) &= -\iota(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n,\end{aligned}\tag{12.8}$$

тогда как

$$\iota(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \iff \mathbf{x} \neq 0 \text{ в } \mathbb{KR}^n.$$

Кроме того, обратное погружению отображение $\iota^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{KR}^n$ также удовлетворяет условиям, аналогичным (1)–(2) из Определения 12.2.3, и

$$\begin{aligned}\iota^{-1}(0_{\mathbb{R}^{2n}}) &= 0_{\mathbb{KR}^n}, \\ \iota^{-1}(-x) &= \text{opp } \iota^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}.\end{aligned}\tag{12.9}$$

Предложение 12.2.1 *Погружение является положительно-однородным отображением, т.е.*

$$\iota(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \iota(\mathbf{x}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n \text{ и } \lambda \geq 0.$$

Отображение $\mathbb{KR}^{2n} \rightarrow \mathbb{KR}^n$, обратное к погружению, также положительно однородно.

Доказательство является стандартным. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$. Если $\lambda = k$ — натуральное число, то

$$\iota(k\mathbf{x}) = \iota(\underbrace{\mathbf{x} + \mathbf{x} + \cdots + \mathbf{x}}_k) = k\iota(\mathbf{x}).$$

Если $\lambda = 1/l$ для некоторого натурального l , то из

$$l\iota(\lambda\mathbf{x}) = \underbrace{\iota(\lambda\mathbf{x}) + \iota(\lambda\mathbf{x}) + \cdots + \iota(\lambda\mathbf{x})}_l = \iota(l\lambda\mathbf{x}) = \iota(\mathbf{x})$$

следует

$$\iota(\lambda\mathbf{x}) = l^{-1}\iota(\mathbf{x}) = \lambda\iota(\mathbf{x}).$$

Если $\lambda = k/l$ для натуральных k и l , то, пользуясь уже рассмотренными случаями, получим

$$\iota(\lambda\mathbf{x}) = \iota\left(\frac{k}{l}\mathbf{x}\right) = k\iota\left(\frac{1}{l}\mathbf{x}\right) = \frac{k}{l}\iota(\mathbf{x}) = \lambda\iota(\mathbf{x}).$$

Следовательно, равенство $\iota(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\iota(\mathbf{x})$ верно для всех неотрицательных рациональных λ . Распространение его на все неотрицательные вещественные числа можно осуществить путём предельного перехода, используя непрерывность ι . ■

Предложение 12.2.2 Если $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — погружение, а T — неособенное линейное преобразование пространства \mathbb{R}^{2n} , то $(T \circ \iota)$ также является погружением.

Обратно, любое другое погружение $\varkappa : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ может быть представлено в виде $(T \circ \iota)$ для некоторого неособенного линейного преобразования $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство. Первая часть Предложения обосновывается тривиально.

Чтобы доказать вторую часть, рассмотрим отображение $(\varkappa \circ \iota^{-1})$. Очевидно, что, будучи композицией двух изоморфизмов, оно является автоморфизмом аддитивной группы линейного пространства \mathbb{R}^{2n} . Кроме того, в силу Предложения 12.2.1, это отображение положительно однородно, а так как при любом $x \in \mathbb{R}^{2n}$

$$(\varkappa \circ \iota^{-1})(x - x) = 0_{\mathbb{R}^{2n}} = (\varkappa \circ \iota^{-1})(x) + (\varkappa \circ \iota^{-1})(-x)$$

влечёт

$$(\varkappa \circ \iota^{-1})(-x) = -(\varkappa \circ \iota^{-1})(x),$$

то мы можем также заключить о его однородности относительно умножения на отрицательные числа.

Таким образом, в целом отображение $\varkappa \circ \iota^{-1}$ оказывается неособенным линейным преобразованием пространства \mathbb{R}^{2n} . Мы можем поэтому взять $T = \varkappa \circ \iota^{-1}$. ■

12.2в Стандартное погружение

Из Предложения 12.2.2 следует, что любые два погружения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^{2n} , удовлетворяющие Определению 12.2.3, одинаковы с точностью до неособенного линейного преобразования \mathbb{R}^{2n} . Поэтому, казалось бы, в каждой конкретной ситуации мы можем брать погружение из соображений удобства. Существует, тем не менее, ещё одно соображение, которое существенно влияет на выбор погружений $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Всякое погружение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ естественно порождает на линейном пространстве \mathbb{R}^{2n} некоторый частичный порядок “ \sqsubseteq ” — образ порядка по включению “ \subseteq ” на $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ при погружении ι , а именно,

$$\begin{aligned} x \sqsubseteq y, \text{ т.е. “} x \text{ не превосходит } y \text{” в } \mathbb{R}^{2n} \\ \Updownarrow \\ \iota^{-1}(x) \subseteq \iota^{-1}(y) \text{ в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Определение 12.2.4 Частичный порядок “ \sqsubseteq ” на \mathbb{R}^{2n} , определяемый посредством (12.10), мы назовём индуцированным частичным порядком.

Поскольку для любых $x, y, u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ имеет место

$$\begin{aligned} x \sqsubseteq y, \alpha \geq 0 &\Rightarrow \alpha x \sqsubseteq \alpha y, \\ x \sqsubseteq y, u \sqsubseteq v &\Rightarrow x + u \sqsubseteq y + v, \end{aligned}$$

то частичный порядок “ \sqsubseteq ” согласован с линейной структурой на \mathbb{R}^{2n} [1, 8]. Следовательно, эквивалентным образом он может быть задан путём указания конуса положительных элементов, т.е. множества $K_{\sqsubseteq} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid 0 \sqsubseteq x\}$ [1, 11, 13].

Напомним, что конусом в линейном топологическом пространстве называется замкнутое выпуклое положительно инвариантное множество, не содержащее никакого одномерного подпространства. Как известно, в частично упорядоченном линейном пространстве, где порядок согласован с линейной структурой, множество положительных элементов является конусом. И наоборот, задание конуса K_{\sqsubseteq} однозначно определяет частичное упорядочение пространства, при котором

$$x \sqsubseteq y \iff y - x \in K_{\sqsubseteq}.$$

Ясно, что конкретные формулы, определяющие индуцированный порядок “ \sqsubseteq ”, зависят от вида погружения ι . Но на евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2n} простейшим и наиболее удобным является задание порядка покомпонентным образом, т.е. когда

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (12.11)$$

Соответственно, конусом положительных элементов при таком упорядочении \mathbb{R}^{2n} является множество

$$K_{\leq} = \{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \}$$

— положительный ортант пространства \mathbb{R}^{2n} . Естественно поэтому потребовать от погружения, чтобы индуцированный им порядок (12.10) совпадал с этим простейшим покомпонентным порядком (12.11), т.е. чтобы

$$x \sqsubseteq y \iff x \leq y \text{ в покомпонентном смысле.} \quad (12.12)$$

Для какого погружения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ это возможно?

Нетрудно понять, что требуемым погружением является так называемое *стандартное погружение*, впервые введённое в работе [27]:

Определение 12.2.5 Погружение $\text{sti} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, которое действует по правилу

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (-\underline{\mathbf{x}}_1, -\underline{\mathbf{x}}_2, \dots, -\underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n), \quad (12.13)$$

т.е. такое, при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ становятся первой, второй, ..., n -ой компонентами вещественного $2n$ -вектора, а правые концы интервалов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ становятся $(n+1)$ -ой, ..., $2n$ -ой компонентами вещественного $2n$ -вектора соответственно, будем называть стандартным погружением интервального пространства $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^{2n} .

Следствие. Из определения (12.10) индуцированного порядка на \mathbb{R}^{2n} и требования (12.12) к стандартному погружению sti легко вывести, что

$$\text{sti} \left(\bigvee_{\kappa \in K} \mathbf{x}_{\kappa} \right) = \text{sti} \left(\sup_{\kappa \in K} \subseteq \mathbf{x}_{\kappa} \right) = \sup_{\kappa \in K} \leq \text{sti}(\mathbf{x}_{\kappa}) \quad (12.14)$$

для любого ограниченного семейства интервальных векторов $\{\mathbf{x}_\kappa \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n \mid \kappa \in K\}$, где K — некоторое индексное множество. Таким образом, стандартное погружение переводит супремумы по включению на интервальном пространстве $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в супремумы относительно покомпонентного порядка на \mathbb{R}^{2n} . Аналогичное утверждение справедливо и для инфимумов.

Итак, факт совпадения индуцированного частичного порядка на линейном пространстве \mathbb{R}^{2n} с обычным покомпонентным упорядочением и, как следствие, упрощение выкладок и рассуждений являются главным оправданием выбранного нами вида (12.13) для погружения, названного стандартным. Более того, вышеизложенное достаточно веско свидетельствует в пользу того, чтобы далее в теоретической части нашей работы рассматривать лишь стандартное погружение вида (12.13), хотя иногда практически полезными могут оказаться и другие погружения. Например, при компьютерной реализации описываемых в этой книге алгоритмов автор нередко использовал простейшее погружение

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \dots, \underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n)$$

которое более удобно при практическом программировании и т.п.

Полезно дать методологический комментарий по поводу содержания этого и предшествующих пунктов. Приём идентификации концов интервала или интервального вектора с компонентами точечного вектора в евклидовом пространстве удвоенной размерности нередко применялся исследователями. Но мы выделили процедуру этой идентификации в отдельное понятие — погружение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — и предприняли его тщательное исследование. С какой целью? Нельзя ли было обойтись без “лишних абстракций”?

Помимо того, что явное и осознанное оперирование с любым объектом всегда более предпочтительно, чем неявное, “по умолчанию”, имеются, по крайней мере, ещё две причины того, чтобы рассматривать погружение в качестве самостоятельного понятия:

- 1) отображение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ не может быть определено раз и навсегда единственным образом, который был бы наиболее удобен (естественен и т.п.) для всех возможных практических ситуаций;
- 2) мы можем получить ощутимую выгоду от этой неединственности, т.е. наиболее полно использовать особенности того или иного погружения в каждом конкретном случае.

Как легко видеть, оба этих довода действительно применимы в рассматриваемых обстоятельствах.

12.2г Сопутствующие матрицы

Теорема 12.2.1 Пусть $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — погружение и

$$\phi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$$

— оператор умножения на точечную квадратную матрицу в пространстве $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$$

для некоторой $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q = (q_{ij})$. Тогда индуцированное отображение $(\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})$ является линейным преобразованием пространства \mathbb{R}^{2n} .

Для стандартного погружения sti матрица этого индуцированного линейного преобразования $(\text{sti} \circ \phi \circ \text{sti}^{-1})$ является блочной $2n \times 2n$ -матрицей вида

$$\left(\begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right), \quad (12.15)$$

где $n \times n$ -подматрицы $Q^+ = (q_{ij}^+)$ и $Q^- = (q_{ij}^-)$ — это положительная и отрицательная части Q , т.е. матрицы образованные положительными и отрицательными частями элементов Q соответственно.

Доказательство. Для того, чтобы обосновать первое утверждение Теоремы, нам нужно установить *аддитивность* и *однородность* отображения

$$\iota \circ \phi \circ \iota^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}.$$

Аддитивность ϕ немедленно вытекает из соотношения дистрибутивности

$$q \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q \cdot \mathbf{x} + q \cdot \mathbf{y},$$

справедливого при точечных q для любых интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$. Погружение ι и обратное к нему отображение ι^{-1} также аддитивны. Следовательно, индуцированное отображение $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ аддитивно как композиция аддитивных.

Далее, оператор ϕ умножения на матрицу однороден, а погружение ι и обратное к нему отображение ι положительно однородны в силу

Предложения 12.2.1. Поэтому композиция $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ по меньшей мере положительно однородна. Кроме того, для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ справедливо

$$\begin{aligned}
 (\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})(-x) &= (\iota \circ \phi)(\text{opp } \iota^{-1}(x)) && \text{в силу (12.9)} \\
 &= \iota(\text{opp } (\phi \circ \iota^{-1})(x)) && \begin{array}{l} \text{в соответствии} \\ \text{с определениями} \\ \text{(1.38) и (1.39)} \end{array} \\
 &= -(\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})(x) && \text{в силу (12.8),}
 \end{aligned}$$

что доказывает однородность индуцированного отображения $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ относительно умножения на любые скаляры.

Второе утверждение Теоремы — это следствие определения стандартного погружения (12.13) и правила (1.38) умножения числа на интервал

$$q \cdot x = \begin{cases} [q \underline{x}, q \overline{x}], & \text{если } q \geq 0, \\ [q \overline{x}, q \underline{x}], & \text{иначе,} \end{cases}$$

которому удобно придать следующую равносильную форму

$$\begin{cases} \frac{q \cdot x}{q \cdot x} = \frac{q^+ \underline{x} - q^- \overline{x}}{-q^- \underline{x} + q^+ \overline{x}}. \end{cases}$$

■

Блочная $2n \times 2n$ -матрица из Теоремы 12.2.1 настолько важна в развиваемой нами теории, что мы примем для неё специальные обозначение и термин.

Определение 12.2.6 Если Q — точечная $n \times n$ -матрица, то полагаем

$$Q^\sim := \left(\begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right) \quad (12.15)$$

и будем называть точечную $2n \times 2n$ -матрицу Q^\sim сопутствующей матрицей для Q .

Важная особенность сопутствующей матрицы $Q^\sim \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ состоит в том, что она всегда *неотрицательна*: такая матрица должна соответствовать “ \leq ”-изотонному оператору на \mathbb{R}^{2n} , индуцированному изотонным по включению умножением на Q в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n .

Следствие из Теоремы 12.2.1. Привлекая определение индуцированного отображения нетрудно заключить, что для любой точечной $n \times n$ -матрицы Q и любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ справедливо

$$\text{sti}(Q \cdot \text{sti}^{-1}(x)) = Q^\sim x. \quad (12.16)$$

Аналогично, для любой точечной $n \times n$ -матрицы Q и любого интервального вектора $x \in \mathbb{KR}^n$ имеет место

$$Qx = \text{sti}^{-1}(Q^\sim \cdot \text{sti}(x)) \quad (12.17)$$

(наглядно соотношения (12.16) и (12.17) иллюстрируются изображённой на Рис. 12.1 коммутативной диаграммой).

12.2д Абсолютно неособенные матрицы

Теорема 12.2.2 *Для точечной $n \times n$ -матрицы Q следующие условия эквивалентны:*

- (а) $Qx = 0$ в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- (б) матрица $Q^\sim \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, сопутствующая для Q , является неособенной;
- (в) неособенными являются как сама матрица Q , так и её модуль $|Q|$ (т.е. матрица, образованная модулями элементов Q).

Доказательство. Эквивалентность (а) \Leftrightarrow (б) является следствием соотношения (12.17).

Для доказательства эквивалентности условий (б) и (в) выполним с сопутствующей матрицей Q^\sim следующие преобразования. К её $(n+1)$ -ой строке прибавим первую строку, к $(n+2)$ -ой — вторую и т.д. до $2n$ -ой

строки включительно, к которой мы прибавляем n -ую строку матрицы Q^\sim . Поскольку

$$q^+ + q^- = |q|$$

для любого вещественного числа q , то в результате проделанных преобразований мы получим $2n \times 2n$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} Q^+ & Q^- \\ |Q| & |Q| \end{pmatrix}. \quad (12.18)$$

Далее, вычтем из первого столбца получившейся матрицы (12.18) её $(n+1)$ -ый столбец, из второго — $(n+2)$ -ой и т.д. до n -го включительно, из которого вычтем последний $2n$ -ый столбец. Поскольку

$$q^+ - q^- = q$$

для любого вещественного числа q , то мы получим блочно-треугольную $2n \times 2n$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} Q & Q^- \\ 0 & |Q| \end{pmatrix}. \quad (12.19)$$

Как известно из линейной алгебры, проделанные нами преобразования (линейное комбинирование строк и столбцов) не изменяют свойство матрицы быть особенной или неособенной (см., например, [16]). Следовательно, матрица (12.19) особенна или неособенна одновременно с сопутствующей матрицей Q^\sim . Но в силу специального вида матрицы (12.19) её определитель равен произведению определителей матриц Q и $|Q|$. Таким образом, сопутствующая матрица Q^\sim неособенна действительно тогда и только тогда, когда неособенны обе матрицы Q и $|Q|$. ■

Мы уже отмечали, что неособенность (невырожденность) точечной матрицы Q в смысле классической линейной алгебры не обязательно влечёт то, что соответствующий оператор умножения на Q в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ обратим. Но теперь феномен матрицы (12.3) и ей подобных получает полное объяснение: хотя сами такие матрицы могут быть и неособенными, но умножение на них после погружения в линейное пространство соответствует умножению на особенные сопутствующие матрицы. Например,

для матрицы (12.3) сопутствующей матрицей является

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12.20)$$

и её определитель нулевой!

Результат Теоремы 12.2.2 позволяет сформулировать следующее

Определение 12.2.7 *Точечная $n \times n$ -матрица Q , удовлетворяющая какому-нибудь (а значит и любому) из равносильных условий (а)–(в) Теоремы 12.2.2, называется абсолютно неособенной (абсолютно невырожденной).*

К примеру, единичная матрица — абсолютно неособенная, тогда как матрица (12.3) неособенна в обычном смысле, но не является абсолютно неособенной. Очевидно также, что если матрица особенна в обычном смысле, то она тем более не есть абсолютно неособенная. Все неотрицательные неособенные матрицы также являются абсолютно неособенными. Практически удобный критерий для проверки абсолютной неособенности матрицы предоставляет условие (в) из Теоремы 12.2.2. Например, вместо вычисления определителя сопутствующей матрицы (12.20) для матрицы (12.3) можно было бы просто заметить особенность матрицы модулей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие из Теорем 12.2.1 и 12.2.2. Оператор $\phi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, задаваемый умножением на квадратную точечную матрицу в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, т.е. такой что

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} \quad \text{для некоторой } Q \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

обратим тогда и только тогда, когда матрица Q является абсолютно неособенной. При этом обратный оператор $\phi^{-1} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ действует, согласно (12.7), следующим образом

$$\phi^{-1}(\mathbf{x}) = \text{sti}^{-1}((Q^\sim)^{-1} \cdot \text{sti}(\mathbf{x})). \quad (12.21)$$

Замечание. Несмотря на существование явной формулы (12.21), оператор, который обратен оператору умножения на точечную $n \times n$ -матрицу Q в \mathbb{KR}^n , в общем случае не может быть выражен через умножение на какую-нибудь матрицу в \mathbb{KR}^n (в частности, на матрицу Q^{-1}). Это следует, к примеру, из того, что матрица $(Q^\sim)^{-1}$ не обязана быть неотрицательной, и тогда обратный оператор не является монотонным по включению в \mathbb{KR}^n . Но умножение на точечную матрицу в \mathbb{KR}^n *всегда* монотонно по включению

12.3 Исследование индуцированных уравнений

Итак, в результате погружения исследование интервальных отображений $\mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ сведено нами к исследованию отображений $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ на привычном евклидовом пространстве, а нахождение формальных решений интервальных уравнений заменено на решение индуцированных уравнений в \mathbb{R}^{2n} . Учитывая особую роль стандартного погружения $\text{sti} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, мы всюду ниже под индуцированными отображениями и уравнениями будем иметь в виду именно sti -индуцированные отображения и уравнения на \mathbb{R}^{2n} . Следовательно, вместо задачи вычисления формальных решений интервальных уравнений (12.1)–(12.2)

$$Cx \ominus x + d = 0 \quad \text{и} \quad Cx + d = 0 \quad (12.22)$$

мы будем заниматься решением индуцированных уравнений в \mathbb{R}^{2n} :

уравнения

$$\mathfrak{F}(y) = 0, \quad (12.23)$$

такого что

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(y) &= \text{sti}(C \text{ sti}^{-1}(y) \ominus \text{sti}^{-1}(y) + d) \\ &= \text{sti}(C \text{ sti}^{-1}(y)) - y + \text{sti}(d), \end{aligned} \quad (12.24)$$

и уравнения

$$\mathfrak{G}(y) = 0, \quad (12.25)$$

такого что

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(y) &= \text{sti}(C \text{ sti}^{-1}(y) + d) \\ &= \text{sti}(C \text{ sti}^{-1}(y)) + \text{sti}(d). \end{aligned} \quad (12.26)$$

Отметим, что для уравнения (12.23)–(12.24), возникающего при внешнем оценивании множеств решений ИСЛАУ, нахождение решений имеет содержательный смысл лишь в условиях Теоремы 7.6.2 и Теорем 9.1.2–9.1.3, которые уже обеспечивают существование и единственность формальных решений исходного уравнения (7.11), равносильного (12.23). По этой причине мы далее не будем отдельно исследовать эти вопросы для индуцированного уравнения (12.23)–(12.24). Что же касается уравнения (12.25)–(12.26), возникающего при внутреннем оценивании множеств решений ИСЛАУ, то формальный подход не накладывает никаких ограничений на \mathbf{C} и \mathbf{d} , а потому исследование существования и единственности решений для этих уравнений действительно необходимо. Соответствующие результаты нетривиальны и мы ещё обсудим их ниже.

Предложение 12.3.1 *Индукцированные отображения $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определённые посредством (12.24) и (12.26), непрерывны.*

Доказательство. Отображения $\mathbf{f} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{g} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующие как

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

непрерывны в силу непрерывности интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$. Погружение sti , как и обратное ему отображение sti^{-1} , также непрерывны. Следовательно, непрерывны и их композиции $\mathfrak{F} = \text{sti} \circ \mathbf{f} \circ \text{sti}^{-1}$ и $\mathfrak{G} = \text{sti} \circ \mathbf{g} \circ \text{sti}^{-1}$. ■

Напомним

Определение 12.3.1 [10] *Пусть на множестве U задано частичное упорядочение “ \preceq ”. Отображение $T : U \rightarrow U$ называется изотонным относительно порядка “ \preceq ”, если*

$$T(u) \preceq T(v)$$

для любых $u, v \in U$, таких что $u \preceq v$. Отображение T называется антитонным, если

$$T(u) \succcurlyeq T(v)$$

для любых $u, v \in U$, таких что $u \preceq v$. Отображение T называется положительным, если $u \succcurlyeq 0$ влечёт $T(u) \succcurlyeq 0$.

Изотонность, как известно, равносильна положительности для линейных отображений на линейных частично упорядоченных пространствах, таких, что их упорядочение согласовано с линейной структурой.

Предложение 12.3.2 *Индукцированное отображение $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определённое в (12.26), является изотонным относительно покомпонентного порядка “ \leq ”.*

Доказательство. Пусть $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, $u \leq v$. Тогда $\text{sti}^{-1}(u) \subseteq \text{sti}^{-1}(v)$, и в силу монотонности (точнее, изотонности) интервальных арифметических операций по включению

$$C\text{sti}^{-1}(u) + d \subseteq C\text{sti}^{-1}(v) + d,$$

т.е.

$$\mathfrak{G}(u) = \text{sti}(C \text{sti}^{-1}(u) + d) \leq \text{sti}(C \text{sti}^{-1}(v) + d) = \mathfrak{G}(v),$$

что и требовалось. ■

Для отображения $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определённого в (12.24), ни изотонность, ни антитонность в общем случае и в условиях Теорем 9.1.2–9.1.3 не выполняются.

Коль скоро отображения \mathfrak{F} и \mathfrak{G} действуют на евклидовом пространстве, мы можем поставить вопрос об их дифференцируемости, гладкости и т.п. К сожалению, глобально, т.е. на всей области определения, мы не можем похвастаться ни одним из этих свойств. Но вместо этого, наложив на матрицу C некоторые дополнительные ограничения, мы получим нечто даже более привлекательное — *выпуклость*.

Именно, предположим, что выполнено следующее условие “посторочной согласованности”:

в каждой строке интервальной матрицы C
все элементы являются либо только правильными,
либо только неправильными интервалами.

(12.27)

Пусть непересекающиеся множества натуральных чисел

$$\mathcal{I}' = \{i'_1, i'_2, \dots, i'_\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathcal{I}'' = \{i''_1, i''_2, \dots, i''_\delta\},$$

такие, что $\mathcal{I}' \cap \mathcal{I}'' = \emptyset$ и $\mathcal{I}' \cup \mathcal{I}'' = \{1, 2, \dots, n\}$, представляют номера строк матрицы $\mathbf{C} = (c_{ij})$ с правильными и неправильными интервалами соответственно, т.е.

$$c_{ij} \text{ является } \begin{cases} \text{правильным,} & \text{если } i \in \mathcal{I}' \\ \text{неправильным,} & \text{если } i \in \mathcal{I}'' \end{cases}.$$

Зададим на $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ частичный порядок “ \Subset ” и на \mathbb{R}^{2n} частичный порядок “ \ll ” следующим образом:

$$\mathbf{u} \Subset \mathbf{v} \quad \text{в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n \iff \begin{cases} \mathbf{u}_i \subseteq \mathbf{v}_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}', \\ \mathbf{u}_i \supseteq \mathbf{v}_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}'', \end{cases}$$

$$\mathbf{u} \ll \mathbf{v} \quad \text{в } \mathbb{R}^{2n} \iff \begin{cases} u_i \leq v_i, & \text{если } i \in \{i'_1, \dots, i'_\gamma, i'_1 + n, \dots, i'_\gamma + n\}, \\ u_i \geq v_i, & \text{если } i \in \{i''_1, \dots, i''_\delta, i''_1 + n, \dots, i''_\delta + n\}. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что

$$\mathbf{u} \Subset \mathbf{v} \quad \text{в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n \iff \text{sti}(\mathbf{u}) \ll \text{sti}(\mathbf{v}) \quad \text{в } \mathbb{R}^{2n}.$$

Частичные порядки “ \Subset ” и “ \ll ” — это упорядочения пространств $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и \mathbb{R}^{2n} , в некотором смысле “согласованные” с матрицей \mathbf{C} , со структурой её правильных и неправильных строк.

Далее нам понадобится также конус положительных элементов в \mathbb{R}^{2n} относительно порядка “ \ll ”:

$$K_{\ll} = \{y \in \mathbb{R}^{2n} \mid (y_i \geq 0, i \in \mathcal{I}') \& (y_i \leq 0, i \in \mathcal{I}'')\}. \quad (12.28)$$

Оказывается, что следствием свойств суб- и супердистрибутивности (1.44)–(1.45) в арифметике Каухера, является тот факт, что исследуемые отображения $\mathfrak{F}(x)$ и $\mathfrak{G}(x)$, задаваемые посредством (12.24) и (12.26) — выпуклые относительно “ \ll ”. Соответственно, тогда в любой точке $x \in \mathbb{R}^{2n}$ будут существовать непустые субдифференциалы $\partial_{\ll} \mathfrak{F}(x)$ и $\partial_{\ll} \mathfrak{G}(x)$, легко вычислимые, поскольку $\mathfrak{F}(x)$ и $\mathfrak{G}(x)$ являются многогранными (кусочно-аффинными) отображениями. Наконец, знание субдифференциалов позволит нам построить для вычисления формальных решений *субдифференциальный метод Ньютона*.

Такова вкратце наша программа действий. Перейдем теперь к детальному обоснованию сделанных заявлений.

12.3а Порядковая выпуклость и субдифференцируемость

Из классического анализа хорошо известно понятие *выпуклой функции* (см. Рис. 12.3 и его многочисленные плодотворные применения). Напомним обобщение этого понятия на многомерный случай.

Определение 12.3.2 [1, 17, 18, 20] Пусть евклидово пространство \mathbb{R}^q упорядочено частичным порядком “ \preceq ”. Отображение $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ называется *порядково выпуклым относительно “ \preceq ”*, если

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) \preceq \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v)$$

для любых $u, v \in \mathbb{R}^p$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Предложение 12.3.3 Если интервальная матрица \mathbf{C} удовлетворяет условию построчной согласованности (12.27), то индуцированные отображения $\mathfrak{F}(y)$ и $\mathfrak{G}(y)$, определённые в (12.24)–(12.26), являются *порядково выпуклыми относительно покомпонентного порядка “ \ll ” на \mathbb{R}^{2n}* .

Доказательство. Для любых $\lambda \in (0, 1)$ и $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, принимая во внимание субдистрибутивность (1.44) и супердистрибутивность (1.45), мы имеем

$$\left(\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}) \right)_i \subseteq \lambda(\mathbf{C}\mathbf{u})_i + (1 - \lambda)(\mathbf{C}\mathbf{v})_i \quad \text{для } i \in \mathcal{I}',$$

$$\left(\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}) \right)_i \supseteq \lambda(\mathbf{C}\mathbf{u})_i + (1 - \lambda)(\mathbf{C}\mathbf{v})_i \quad \text{для } i \in \mathcal{I}'',$$

так что в целом

$$\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}) \Subset \lambda \mathbf{C}\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{C}\mathbf{v}.$$

Следовательно, в \mathbb{R}^{2n}

$$\text{sti} \left(\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}) \right) \ll \lambda \text{sti}(\mathbf{C}\mathbf{u}) + (1 - \lambda) \text{sti}(\mathbf{C}\mathbf{v}). \quad (12.29)$$

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Если обозначить $\mathbf{u} = \text{sti}^{-1}(u)$, $\mathbf{v} = \text{sti}^{-1}(v)$, то справедлива следующая цепочка преобразований

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{F}(\lambda u + (1 - \lambda)v) \\
 &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(\lambda u + (1 - \lambda)v)) - (\lambda u + (1 - \lambda)v) + \text{sti}(\mathbf{d}) \\
 &= \text{sti}(\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v})) - (\lambda u + (1 - \lambda)v) + \text{sti}(\mathbf{d}) \\
 &\ll \lambda \text{sti}(\mathbf{C}\mathbf{u}) + (1 - \lambda) \text{sti}(\mathbf{C}\mathbf{v}) - (\lambda u + (1 - \lambda)v) + \text{sti}(\mathbf{d}) \\
 &\quad \text{в силу (12.29)} \\
 &= \lambda \mathfrak{F}(u) + (1 - \lambda) \mathfrak{F}(v),
 \end{aligned}$$

которая и доказывает Предложение для \mathfrak{F} . Для отображения \mathfrak{G} доказательство проводится аналогично. \blacksquare

Выпуклые функции и отображения, будучи одними из ближайших “родственников” линейным и аффинным отображениям, обладают, как известно, многими замечательными свойствами. Некоторыми из этих свойств мы и собираемся воспользоваться.

Далее для нас особенно важной будет так называемая *субдифференцируемость* — обобщение обычного понятия дифференцируемости на случай выпуклых функций.

Определение 12.3.3 [1, 17, 19, 20] Пусть \mathbb{R}^q — частично упорядоченное линейное пространство с порядком “ \preceq ” и отображение $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ порядково выпукло относительно “ \preceq ”. Субдифференциалом отображения F в точке $x \in \mathbb{R}^p$ называется множество, обозначаемое $\partial_{\preceq} F(x)$, которое образовано всеми такими линейными операторами $D : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, что

$$D(v) \preceq F(x + v) - F(x) \quad (12.30)$$

для любого $v \in \mathbb{R}^p$. Элементы множества $\partial_{\preceq} F(x)$ — линейные операторы, удовлетворяющие (12.30) — называются субградиентами отображения F в точке x . Если субдифференциал $\partial_{\preceq} F(x)$ непуст, то про отображение F говорят, что оно субдифференцируемо в точке x .

В случае, когда порядок “ \preceq ” на \mathbb{R}^p фиксирован или нам ясно, о каком именно порядке идёт речь, субдифференциал обозначают просто $\partial_{\preceq} F(x)$.

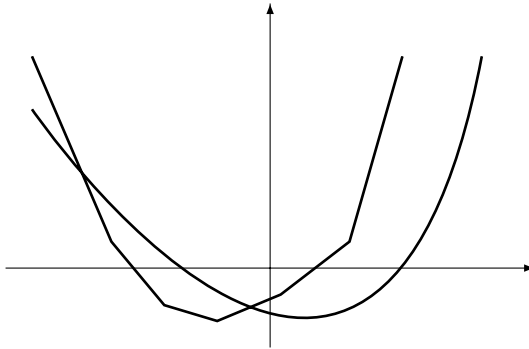


Рис. 12.2. Субградиенты и субдифференциал выпуклой функции.

Как известно, в общем случае понятие субдифференциала может быть определено и для отображений со значениями в общих линейных упорядоченных пространствах. Но проверка существования субдифференциала и его вычисление представляют собой при этом весьма непростые задачи [1]. По счастью, в интересующей нас конечномерной ситуации всё существенно упрощается. Конечномерный выпуклый анализ и тесно связанное с ним субдифференциальное исчисление функций в конечномерных пространствах являются одними из наиболее красивых, развитых и практически важных математических дисциплин, результатами которых мы будем существенно пользоваться в наших исследованиях. Здесь имеет смысл дать краткую сводку необходимых нам сведений.

Определение 12.3.4 [17, 19, 20] *Односторонней производной функции $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x по направлению $y \in \mathbb{R}^p$ (или, коротко, производной по направлению) называется предел*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha},$$

в случае, если он существует.

Определение 12.3.5 [17, 19, 20] *Опорной функцией выпуклого множества $W \subseteq \mathbb{R}^p$ называется функция $\delta_W : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$$\delta_W(x) := \sup \{ x^\top w \mid w \in W \}.$$

Теорема 12.3.1 [17, 19, 20] *Если выпуклая функция $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в некоторой точке x , то субдифференциал $\partial f(x)$ — непустое ограниченное выпуклое множество, причём производная по направлению $\frac{\partial f(x)}{\partial y}$ как функция направления y является опорной функцией для $\partial f(x)$.*

В рассматриваемой нами ситуации выпуклость исследуемых отображений $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ относительно порядка “ \ll ” равносильна тому, что их координатные компоненты — функционалы $\mathfrak{F}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathfrak{G}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, — выпуклы для $i \in \mathcal{I}'$ и вогнуты для $i \in \mathcal{I}''$ в обычном смысле. Вдобавок, все $\mathfrak{F}_i(x)$ и $\mathfrak{G}_i(x)$ непрерывны, и значит субдифференцируемы всюду на \mathbb{R}^{2n} в силу классического результата Теоремы 12.3.1.

Субдифференциалы $\partial \mathfrak{F}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 2n$, можно мыслить, например, как множества $2n$ -векторов $d_{(i)}$, таких что для любых $v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\mathfrak{F}_i(x + v) - \mathfrak{F}_i(x) \geq d_{(i)}^\top v \quad \text{при } i \in \mathcal{I}',$$

$$\mathfrak{F}_i(x + v) - \mathfrak{F}_i(x) \leq d_{(i)}^\top v \quad \text{при } i \in \mathcal{I}''.$$

Если же сконструировать из этих векторов $d_{(i)}$, как из строк, $2n \times 2n$ -матрицу

$$D := (d_{(1)}, d_{(2)}, \dots, d_{(2n)})^\top,$$

то, каков бы ни был $v \in \mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяется неравенство

$$\mathfrak{F}(x + v) - \mathfrak{F}(x) \gg Dv,$$

и потому линейный оператор на \mathbb{R}^{2n} , задаваемый матрицей D , является субградиентом \mathfrak{F} в x . Соответственно, субдифференциал $\partial_{\ll} \mathfrak{F}(x)$ непуст. Поскольку наши рассуждения дословно переносятся на отображение \mathfrak{G} и никак не зависят от точки x , мы обосновали

Предложение 12.3.4 *Для индуцированных отображений \mathfrak{F} и \mathfrak{G} , задаваемых посредством (12.24)–(12.26) (и которые порядково выпуклы в силу Предложения 12.3.3 субдифференциалы $\partial_{\ll} \mathfrak{F}(y)$ и $\partial_{\ll} \mathfrak{G}(y)$ являются непустыми в любой точке $y \in \mathbb{R}^{2n}$, т.е. отображения \mathfrak{F} и \mathfrak{G} всюду субдифференцируемы.*

Ниже мы для краткости часто будем обозначать эти субдифференциалы просто $\partial \mathfrak{F}(y)$ и $\partial \mathfrak{G}(y)$.

Если \mathfrak{F} дифференцируема в точке x , то субдифференциал $\partial\mathfrak{F}(y)$ состоит из единственного элемента, именно, из матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix}.$$

Аналогичный факт верен и в отношении \mathfrak{G} . Но, как мы уже отмечали, отображения \mathfrak{F} и \mathfrak{G} не являются всюду дифференцируемыми. Чтобы указать явный вид субдифференциалов $\partial\mathfrak{F}(x)$ и $\partial\mathfrak{G}(x)$ в общем случае, и вывести для них некоторые оценки, существенно используемые в дальнейшем, нам необходимо знать больше о самих исследуемых отображениях \mathfrak{F} и \mathfrak{G} .

12.36 Многогранность

Определение 12.3.6 [17, 19, 20] *Надграфиком функции $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество $\text{epi } f$ в \mathbb{R}^{p+1} , определяемое как*

$$\text{epi } f := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, f(x) \leq t \}.$$

Подграфиком функции $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество $\text{hyp } f$ в \mathbb{R}^{p+1} , определяемое как

$$\text{hyp } f := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, f(x) \geq t \}.$$

Определение 12.3.7 [20] *Выпуклая функция $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, надграфик которой является многогранным множеством в \mathbb{R}^{p+1} , называется многогранной выпуклой функцией. Вогнутая функция $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, подграфик которой является многогранным множеством в \mathbb{R}^{p+1} , называется многогранной вогнутой функцией.*

Подчеркнём, что многогранные функции — это простейшие среди выпуклых функций: по существу, многогранные функции можно характеризовать как почти всюду *локально аффинные* выпуклые функции, поскольку их графики составлены из кусков гиперплоскостей (см. рис 12.3).

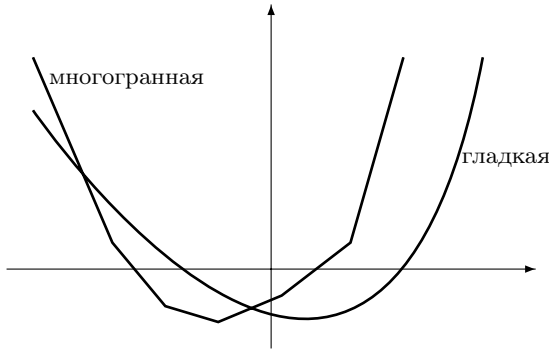


Рис. 12.3. График гладкой выпуклой функции в сравнении с графиком многогранной выпуклой функции: у многогранной он склеен из кусков гиперплоскостей.

Определение 12.3.8 Расширенной матрицей вершин для интервальной матрицы $C \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{m \times n}$ назовём множество $\text{Vert } C$ всех точечных $m \times n$ -матриц, определяемое как

$$(\text{Vert } C)_{ij} := \begin{cases} \{\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}\}, & \text{если } 0 \notin c_{ij}, \\ \{\underline{c}_{ij}, 0, \bar{c}_{ij}\}, & \text{если } 0 \in c_{ij}. \end{cases}$$

Предложение 12.3.5 При выполнении условия построчной согласованности (12.27) на матрицу C координатные компоненты $\mathfrak{F}_i(x)$ и $\mathfrak{G}_i(y)$ отображений \mathfrak{F} и \mathfrak{G} , определённых формулами (12.24)–(12.26), являются выпуклыми многогранными функциями для $i \in I'$ и вогнутыми многогранными функциями для $i \in I''$. Более точно, справедливы представления

$$\mathfrak{F}(x) = \max_{C \in \text{Vert } C} C \ll x - x + \text{sti}(\mathbf{d}), \quad (12.31)$$

$$\mathfrak{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } C} C \ll x + \text{sti}(\mathbf{d}), \quad (12.32)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что для любой интервальной $n \times n$ -матрицы C , удовлетворяющей условию построчной согласованности (12.27) и произвольного интервального вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ имеет

место

$$Cv = \sup_{C \in C} Cv. \quad (12.33)$$

Действительно, согласно представлению (1.50) для правильных интервалов c_{ij} можно написать

$$c_{ij}v_j = \bigvee_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}v_j,$$

а для неправильных c_{ij}

$$c_{ij}v_j = \bigwedge_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}v_j.$$

Используя свойства (1.40) и (1.41) дистрибутивности операций “ \wedge ” и “ \vee ” относительно сложения, мы получим для $i \in \mathcal{I}'$

$$\begin{aligned} (Cv)_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij}v_j = \sum_{j=1}^n \bigvee_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}v_j \\ &= \bigvee_{c_{i1} \in c_{i1}} \bigvee_{c_{i2} \in c_{i2}} \cdots \bigvee_{c_{in} \in c_{in}} \sum_{j=1}^n c_{ij}v_j \\ &= \bigvee_{C \in C} \sum_{j=1}^n c_{ij}v_j = \bigvee_{C \in C} (Cv)_i, \end{aligned}$$

и для $i \in \mathcal{I}''$

$$\begin{aligned} (Cv)_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij}v_j = \sum_{j=1}^n \bigwedge_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}v_j \\ &= \bigwedge_{c_{i1} \in c_{i1}} \bigwedge_{c_{i2} \in c_{i2}} \cdots \bigwedge_{c_{in} \in c_{in}} \sum_{j=1}^n c_{ij}v_j \\ &= \bigwedge_{C \in C} \sum_{j=1}^n c_{ij}v_j = \bigwedge_{C \in C} (Cv)_i, \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (12.33).

Далее, если $x \in \mathbb{R}^{2n}$, то, принимая во внимание соотношения (12.14) и (12.16), можем заключить

$$\begin{aligned} \text{sti}(\mathbf{C}\text{sti}^{-1}(x)) &= \text{sti}\left(\sup_{C \in \mathbf{C}} C\text{sti}^{-1}(x)\right) \\ &= \sup_{C \in \mathbf{C}} \ll \text{sti}(\mathbf{C}\text{sti}^{-1}(x)) \\ &= \sup_{C \in \mathbf{C}} \ll \widetilde{C}x. \end{aligned}$$

В целом для отображения \mathfrak{F} , определённого посредством (12.24), справедливо следующее представление:

$$\mathfrak{F}(x) = \sup_{C \in \mathbf{C}} \ll \widetilde{C}x - x + \text{sti}(\mathbf{d}). \quad (12.34)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_i(x) &= \left(\sup_{C \in \mathbf{C}} \ll \widetilde{C}x \right)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \\ &= \begin{cases} \sup_{C \in \mathbf{C}} (\widetilde{C}x)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}', \\ \inf_{C \in \mathbf{C}} (\widetilde{C}x)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}''. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.35)$$

Тот факт, что в представлениях (12.34) и (12.35) матрица \widetilde{C} — это неотрицательная матрица специального блочного вида (12.15), имеет важное следствие. Именно, при фиксированном x

$$\sup_{C \in \mathbf{C}} C(\widetilde{C}x)_i \quad \text{и} \quad \inf_{C \in \mathbf{C}} C(\widetilde{C}x)_i$$

могут достигаться только в *концах* интервальных элементов \mathbf{c}_{ij} , т.е. при $c_{ij} = \underline{\mathbf{c}}_{ij}$ или $c_{ij} = \overline{\mathbf{c}}_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$, или же дополнительно ещё в *нулях*, т.е. при $c_{ij} = 0\underline{\mathbf{c}}_{ij}$, если соответствующие элементы $\mathbf{c}_{ij} \ni 0$. В любом случае мы можем эквивалентным образом заменить интервал \mathbf{c}_{ij} на конечное число точек (две или три), по которым только и надлежит брать супремумы и инфимумы в (12.35). Поэтому вместо (12.34) и (12.35) мы можем выписать более точные представления

$$\mathfrak{F}(x) = \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} \ll \widetilde{C}x - x + \text{sti}(\mathbf{d}), \quad (12.31)$$

и

$$\mathfrak{F}_i(x) = \begin{cases} \max_{C \in \text{Vert } C} (C \smile x)_i - x_i + (\text{sti } (d))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}', \\ \min_{C \in \text{Vert } C} (C \smile x)_i - x_i + (\text{sti } (d))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}'', \end{cases} \quad (12.36)$$

где $\text{Vert } C$ — это расширенная матрица вершин для C . Поскольку $\text{Vert } C$ конечно, то из (12.36) следует, что каждая $\mathfrak{F}_i(x)$ есть максимум или минимум, в зависимости от того $i \in \mathcal{I}'$ или $i \in \mathcal{I}''$, от конечного числа линейных форм. Это и доказывает предложение для отображения \mathfrak{F} .

Для \mathfrak{G} все рассуждения проводятся аналогично и приводят к следующим представлениям:

$$\mathfrak{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } C} C \ll x + \text{sti } (d), \quad (12.32)$$

и

$$\mathfrak{G}_i(x) = \begin{cases} \max_{C \in \text{Vert } C} (C \smile x)_i + (\text{sti } (d))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}', \\ \min_{C \in \text{Vert } C} (C \smile x)_i + (\text{sti } (d))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}'', \end{cases} \quad (12.37)$$

Итак, каждое из отображений \mathfrak{G}_i также является либо максимумом либо минимумом конечного количества линейных форм. ■

12.3в Оценки субдифференциалов

Наша ближайшая цель — получить оценки субдифференциалов исследуемых отображений \mathfrak{F} и \mathfrak{G} , которые будут играть важную роль в доказательстве сходимости субдифференциального метода Ньютона в §12.5. Но предварительно нам необходимо ввести

Определение 12.3.9 Положительной частью \mathbf{x}^+ и отрицательной частью \mathbf{x}^- правильного интервала \mathbf{x} назовём следующие интервалы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &:= \{x^+ \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}, \\ \mathbf{x}^- &:= \{x^- \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{-x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}. \end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned} [-1, 2]^+ &= [0, 2], & [-1, 2]^- &= [0, 1], \\ [1, 2]^+ &= [1, 2], & [1, 2]^- &= [0, 0]. \end{aligned}$$

Можно рассматривать операции взятия положительной и отрицательной частей интервала как интервальные расширения функций $(\cdot)^+$ и $(\cdot)^-$, введённых в Определении 1.4.4. Как обычно, к правильным интервальным векторам и матрицам эти операции будут применяться покомпонентным образом.

Предложение 12.3.6 *Для субдифференциала $\partial\mathfrak{F}(x)$ отображения \mathfrak{F} , определённого формулой (12.24), справедлива оценка*

$$\partial\mathfrak{F}(x) \subseteq \begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix} - I. \quad (12.38)$$

Для субдифференциала $\partial\mathfrak{G}(x)$ отображения \mathfrak{G} , определённого формулой (12.26), справедлива оценка

$$\partial\mathfrak{G}(x) \subseteq \begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix}. \quad (12.39)$$

Доказательство мы проведём, как и ранее, только для \mathfrak{F} , так как для отображения \mathfrak{G} оно отличается малосущественными техническими деталями.

Покажем сначала, что субдифференциал $\partial\mathfrak{F}(x)$ имеет внешнюю интервальную оценку в виде правильной $2n \times 2n$ -матрицы, составленной из интервалов односторонних частных производных \mathfrak{F} . Более точно

$$\partial\mathfrak{F}(x) \subseteq \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \end{pmatrix}, \quad (12.40)$$

где

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^-} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha}$$

и

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^+} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha},$$

— односторонние частные производные компонент \mathfrak{F}_i в точке x слева и справа по j -ому координатному направлению.

Поскольку покомпонентный порядок “ \ll ” на \mathbb{R}^{2n} является прямым произведением порядков “ \leq ” и “ \geq ” на вещественных осях \mathbb{R} , то порядковый \ll -субдифференциал $\partial\mathfrak{F}(x)$ является прямым произведением субдифференциалов $\partial\mathfrak{F}_i(x)$ отдельных компонент $\mathfrak{F}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, для каждой из которых мы можем воспользоваться Теоремой 12.3.1. Из этого классического результата и из определения опорной функции следует неравенство

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial y} \geq \{y^\top d \mid d \in \partial\mathfrak{F}_i(x)\}. \quad (12.41)$$

Далее, последовательно полагая y равным векторам, имеющим j -ой компонентой -1 или 1 , $j = 1, 2, \dots, 2n$, а остальными — нули, получим из (12.41) включение

$$\partial\mathfrak{F}_i(x) \subseteq \left(\left[\frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_1^+} \right], \dots, \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \right),$$

равносильное (12.40).

Теперь можно перейти собственно к выводу оценки (12.38). Для удобства условимся писать “ \pm ” вместо каждого отдельного из знаков “ $+$ ” и “ $-$ ”. В силу представления (12.36)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sim x)_i - x_i + (\text{sti } (\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sim x)_i \right) - \delta_{ij} \quad \text{для } i \in \mathcal{I}', \end{aligned} \quad (12.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sim x)_i - x_i + (\text{sti } (\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sim x)_i \right) - \delta_{ij} \quad \text{для } i \in \mathcal{I}'', \end{aligned} \quad (12.43)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Воспользовавшись известным правилом дифференцирования функции экстремума (см., например, [3], §III.2), можем заключить, что для $i \in \mathcal{I}'$

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i \right) = \begin{pmatrix} ij\text{-й элемент матрицы } C^\sim, \\ \text{на которой достигается} \\ \text{рассматриваемый } \max (C^\sim x)_i \end{pmatrix}, \quad (12.44)$$

и, совершенно аналогично, для $i \in \mathcal{I}''$

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\min_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i \right) = \begin{pmatrix} ij\text{-й элемент матрицы } C^\sim, \\ \text{на которой достигается} \\ \text{рассматриваемый } \min (C^\sim x)_i \end{pmatrix}. \quad (12.45)$$

В целом, объединяя (12.15) и (12.42)–(12.45), мы придём к следующему общему виду матрицы производных по направлению:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} \right)_{i,j=1}^{2n} = \begin{pmatrix} (C')^+ & (C')^- \\ (C'')^- & (C'')^+ \end{pmatrix} - I,$$

где $C', C'' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C', C'' \in \text{Vert } \mathcal{C}$. Следовательно, с учётом включения (12.40), действительно получим доказываемую оценку (12.38). ■

12.4 Существование формальных решений

Теорема 12.4.1 (теорема Зюзина) *Для интервальной линейной системы*

$$Cx + d = 0$$

с $C \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ и $d \in \mathbb{KR}^n$ формальное решение существует и единственно, если правильная проекция матрицы $\text{pro } C$ имеет строгое диагональное преобладание.

Доказательство. Введём следующие обозначения:

D — диагональная матрица $\text{diag} \{c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn}\}$,

E — матрица, полученная из C занулением её диагональных элементов.

Таким образом, $\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{E}$, а формальные решения исходной системы совпадают, очевидно, с формальными решениями системы

$$\mathbf{D}x + \mathbf{E}x + \mathbf{d} = 0,$$

которая, в свою очередь, равносильна

$$\mathbf{D}x = \text{орр } \mathbf{d} \ominus \mathbf{E}x.$$

Взяв какой-нибудь вектор $\mathbf{x}^{(0)}$, мы можем организовать итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{D}^{-1}(\text{орр } \mathbf{d} \ominus \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k)})$$

с $\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}\{c_{11}^{-1}, c_{22}^{-1}, \dots, c_{nn}^{-1}\}$, и он будет сходиться к единственной неподвижной точке отображения

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{E}\mathbf{x})$$

в силу строгого диагонального преобладания в \mathbf{C} . ■

Основной результат этого параграфа — локальная теорема существования формальных решений для интервальных линейных систем вида (12.2).

Теорема 12.4.2 *Если интервальная матрица $\mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ достаточно узка (т.е., если $\|\text{grad } \mathbf{C}\|$ достаточно мала) и $\text{pro } \mathbf{C}$ содержит абсолютно неособенные точечные матрицы, то для любого $\mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$ уравнение*

$$\mathbf{C}x + \mathbf{d} = 0$$

имеет формальное решение в арифметике Каухера.

Доказательство мы проведём топологическими методами (см., например, [12, 18]), на основе теории вращения векторного поля (или равносильной ей теории степени отображения).

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное положительно однородное отображение. Справедливо следующее общее рассуждение. Предположим, что нуль — единственная особая точка векторного поля Φx . Она поэтому изолирована и определён индекс нуля поля Φx — величина $\text{ind}(0, \Phi)$, являющаяся вращением векторного поля Φx на сфере S_R достаточно малого радиуса R с центром в начале координат (в данном случае в

силу положительной однородности поля величину R можно выбрать произвольной). Пусть также $\text{ind } (0, \Phi) \neq 0$.

Если $h \in \mathbb{R}^n$ — какой-то вектор, то возьмём, например,

$$R > \frac{\|h\|}{\inf_{\|x\|=1} \Phi x}$$

Тогда при $\|x\| = R$ справедливо

$$\|\Phi x - (\Phi x - h)\| < \|\Phi x\|,$$

что в силу теоремы Пуанкаре-Боля [12, 18] означает гомотопность векторных полей (Φx) и $(\Phi x - h)$ на S_R . Следовательно, на S_R вращения полей (Φx) и $(\Phi x - h)$ совпадают, а поскольку $\text{ind } (0, \Phi) \neq 0$, то в шаре $\|x\| \leq R$ должна находиться особая точка поля $\Phi x - h$ ([12], стр. 20, Теорема 4.2), т.е. решение уравнения $\Phi x = h$.

Всё вышеизложенное в полной мере применимо к векторному полю

$$\text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(x)) \quad (12.46)$$

в \mathbb{R}^{2n} , и потому для завершения доказательства нам достаточно установить, что в условиях теоремы индекс нуля векторного поля (12.46) не равен нулю.

На единичной сфере S_1 с центром в начале координат строгое неравенство

$$\|\text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(x)) - (\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} x\| < \|(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} x\| \quad (12.47)$$

справедливо для абсолютно неособенных матриц $\mathbf{C} = C$ нулевой ширины: левая часть неравенства при этом обращается в тождественный нуль, а правая оценивается снизу как

$$\inf_{\|x\|=1} \|C^{\sim} x\| > 0.$$

Но строгое неравенство (12.47) останется верным при достаточно малых возмущениях его частей, когда \mathbf{C} есть “достаточно узкая” интервальная матрица. Тогда, опять-таки в силу теоремы Пуанкаре-Боля, условие (12.47) означает гомотопность векторного поля (12.46) и поля $(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} x$ на сфере S_1 . Поэтому индекс нуля поля (12.46) совпадает с индексом нуля поля $(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} x$, т.е. равен знаку определителя $\det(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} \neq 0$. ■

Обратимся теперь к вопросу о единственности формальных решений интервальных систем уравнений (12.2). Он полностью решается теорией §12.2 в случае, если матрица системы точечная. Именно, интервальная система уравнений

$$Cx = d$$

с абсолютно неособенной матрицей C имеет единственное формальное решение для любой правой части $d \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ (Следствие из Теорем 12.2.1 и 12.2.2). Что касается интервальных систем уравнений (12.2) с существенно интервальными матрицами C , то для них единственность формальных решений является в настоящее время сравнительно малоисследованной. Её рассмотрению посвящены работа Лакеева [15] и ряд результатов, изложенных в последнем параграфе этой главы. В частности, формальное решение системы (12.2) существует и единственно, если матрица $\text{pro } C$ имеет строгое диагональное преобладание.

Теорема 12.4.3 Пусть интервальная матрица $C \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$ такова, что в каждой её строке все элементы являются либо только правильными, либо только неправильными интервалами (т.е. выполнено условие (12.27) и, кроме того, неособенной оказывается интервальная $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix}. \quad (12.48)$$

Тогда интервальная линейная система

$$Cx \ominus d + 0 = 0 \quad (12.2)$$

может иметь не более чем конечное количество несравнимых между собой по включению формальных решений.

Доказательство. Перейдём в пространство \mathbb{R}^{2n} и рассмотрим индуцированное для (12.2) уравнение

$$\mathfrak{G}(x) = 0. \quad (12.25)$$

Вспомним, что для $\mathfrak{G}(x)$ верно представление

$$\mathfrak{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } C} \ll C^\sim x + \text{sti}(d). \quad (12.32)$$

Его содержательный смысл заключается в том, что в условиях (12.27) отображение $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ является кусочно-аффинным — склеенным из конечного числа кусков аффинных отображений, каждое из которых неособенно, если удовлетворена неособенность матрицы (12.48). Ясно, что на каждом из неособенных аффинных кусков может находиться не более одного решения индуцированного уравнения (12.25), а потому общее количество решений этого уравнения во всём \mathbb{R}^{2n} также должно быть конечным. То же самое верно и для формальных решений исходной интервальной линейной системы (12.2).

Далее, предположим, что из этих формальных решений какие-либо два — \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' — сравнимы друг с другом относительно порядка по включению: пусть, скажем, $\mathbf{x}' \subseteq \mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$. Тогда для любого интервального вектора \mathbf{u} , такого что $\mathbf{x}' \subseteq \mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}''$, в силу монотонности интервальных арифметических операций в \mathbb{KR} по включению имеет место

$$0 = \mathbf{C}\mathbf{x}' + \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{x}'' \ominus \mathbf{d} = 0,$$

т.е. \mathbf{u} также является формальным решением для (12.2). Мы приходим, таким образом, к выводу о существовании бесконечного множества формальных решений системы уравнений (12.2), что противоречит полученному ранее результату. Итак, различные формальные решения \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' должны быть несравнимы между собой. ■

В отсутствие единственности формальные решения системы

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

могут образовывать целые порядковые отрезки. При этом с практической точки зрения наибольший интерес представляют, видимо, максимальные и минимальные по включению формальные решения, причём таких несравнимых между собой экстремальных решений может быть несколько. К примеру, если $\mathbf{C} = [-1, 1]$, $\mathbf{d} = [-1, 1]$, то каждый интервал вида $[\epsilon, 1]$ и $[-1, \epsilon]$, $-1 \leq \epsilon \leq 1$, является формальным решением соответствующего уравнения. Среди них имеется одно максимальное по включению формальное решение $[-1, 1]$, а также два несравнимых между собой минимальных по включению решений -1 и 1 .

Рассмотрим также интересный пример интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [2, -2] \\ [2, -2] \end{pmatrix},$$

иллюстрирующий теорию §§12.2–12.3. Здесь формальные решения образуют целое параметрическое семейство

$$\begin{pmatrix} [1+t, -1-t] \\ [1-t, -1+t] \end{pmatrix},$$

где $t \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр. Все эти формальные решения несравнимы друг с другом и каждое из них является одновременно как максимальным, так и минимальным по включению.

Если множество формальных решений для системы (12.2) ограничено, то всякое её формальное решение содержится в некотором максимальном по включению формальном решении и, в свою очередь, содержит некоторое минимальное по включению формальное решение для (12.2).

Действительно, если формальное решение \mathbf{x}' не содержится ни в каком более широком решении, то оно само максимально. В противном случае возьмём максимум

$$\bigvee \{ \mathbf{y} \in \mathbb{KR}^n \mid C\mathbf{y} = \mathbf{d}, \mathbf{y} \supset \mathbf{x}' \}$$

всех формальных решений, содержащих \mathbf{x}' . Из непрерывности интервальных арифметических операций и операции “ \vee ” в \mathbb{KR} можно заключить, что полученный таким образом интервальный вектор является формальным решением. Второе утверждение доказывается аналогично, взятием противоположного порядка.

12.5 Субдифференциальный метод Ньютона

12.5a Алгоритм

В качестве эффективного инструмента для решения индуцированных уравнений (12.23)–(12.24) и (12.25)–(12.26) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2n} мы предлагаем *субдифференциальный метод Ньютона*, который является дальнейшим развитием известных результатов о монотонно сходящихся методах ньютоновского типа в упорядоченных линейных пространствах. Ниже в Табл. 12.1 представлены две разновидности этого метода, предназначенные для нахождения решений индуцированных уравнений (12.23) и (12.25) соответственно.

Таблица 12.1.

Алгоритм SubDiff1

субдифференциальный метод Ньютона
для решения уравнения (12.23)–(12.24)

Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Если $(k-1)$ -е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k = 1, 2, \dots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения \mathfrak{F} в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau (D^{(k-1)})^{-1} \mathfrak{F}(x^{(k-1)}),$$

где $\tau \in]0, 1]$ — некоторая константа.

Алгоритм SubDiff2

субдифференциальный метод Ньютона
для решения уравнения (12.25)–(12.26)

Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Если $(k-1)$ -е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k = 1, 2, \dots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения \mathfrak{G} в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau (D^{(k-1)})^{-1} \mathfrak{G}(x^{(k-1)}),$$

где $\tau \in]0, 1]$ — некоторая константа.

Константа τ — это релаксационный параметр, с помощью которого в методах ньютоновского типа иногда удаётся расширить область сходимости. Наш вычислительный опыт тоже позволяет однозначно утверждать полезность выбора $\tau < 1$ в некоторых ситуациях (см. §12.6). С другой стороны, мы вводим этот параметр также как потенциальный путь для модификации методов (например, можно попытаться рассмотреть нестационарный метод, в котором τ меняется от шага к шагу и т.п.). На практике мы рекомендуем сначала брать τ равным единице. Тогда при сходимости субдифференциальный метод Ньютона даёт *точное* решение уравнений (12.23)–(12.24) и (12.25)–(12.26) за небольшое конечное число итераций (которое, как правило, не превосходит размерности n интервальной системы). Такая исключительно быстрая сходимость субдифференциального метода Ньютона объясняется многогранностью функций, фигурирующих в решаемых уравнениях. Другое достоинство предлагаемых методов — отсутствие проблем с выбором начального приближения. В целом, субдифференциальный метод Ньютона имеет огромное практическое значение, и помимо своего основного назначения он может рассматриваться также как вспомогательный алгоритм, отдельное звено в составе более сложных численных процессов.

12.56 Доказательство сходимости

Полное и всеобъемлющее исследование субдифференциального метода Ньютона выходит за рамки настоящей работы, и ниже мы дадим, основываясь на стандартной технике (см., например, [18]), доказательство локальных теорем сходимости. Их утверждения сводятся к следующему:

Теорема 12.5.1 Пусть интервальная матрица $C \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ удовлетворяет условию построчной согласованности (12.27), и интервальная $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix} - I$$

является неособенной. Если при этом C достаточно узка, то алгоритм SubDiff1 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $\text{sti}(\mathbf{x}^*)$, где \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной системы $Cx \ominus x + \mathbf{d} = 0$.

Теорема 12.5.2 Пусть интервальная $n \times n$ -матрица C удовлетворяет условию построчной согласованности (12.27), и интервальная $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix}$$

является неособенной. Если при этом C достаточно узка, то алгоритм SubDiff2 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $\text{sti}(\mathbf{x}^*)$, где \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной системы $Cx + d = 0$.

Мы дадим развёрнутое доказательство лишь для Теоремы 12.5.1, так как для Теоремы 12.5.2 оно совершенно аналогично по идее и отличается лишь малосущественными деталями.

Доказательство. Уточним, что имеется в виду под “достаточной узостью” интервальной матрицы A . Это условие будет означать, что

замыкание выпуклой оболочки множества

$$\bigcup \left\{ S^{-1}K_{\ll} \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix} - I \right\}, \quad (12.49)$$

где $(S^{-1}K_{\ll})$ обозначает прообраз конуса положительных элементов (12.28) при линейном преобразовании S , само является некоторым конусом в пространстве \mathbb{R}^{2n} .

Это осмысленное условие. Если матрица C имеет нулевую ширину, т.е. $C = C$, то множество $(C^{\sim})^{-1}K_{\ll}$, как прообраз конуса при неособенном линейном преобразовании, является конусом. Если же точечные неособенные $2n \times 2n$ -матрицы S', S'' “достаточно близки” друг к другу, то близки также и конусы $(S')^{-1}K_{\ll}$ и $(S'')^{-1}K_{\ll}$, и их выпуклая оболочка всё ещё является конусом. Следовательно, условие (12.49) в некотором смысле действительно отражает “узость” интервальной матрицы C .

Итак, пусть множество (12.49) — некоторый конус, который мы будем обозначать K_{\triangleleft} . Тогда он определяет некоторый частичный порядок “ \triangleleft ” на \mathbb{R}^{2n} . Мы станем считать, что

$$x \triangleleft y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K_{\triangleleft}. \quad (12.50)$$

Основная идея нашего доказательства — продемонстрировать то, что последовательность приближений, порождённая алгоритмом `SubDiff1` является *монотонно невозрастающей* и *ограниченной снизу* относительно этого специальным образом сконструированного порядка “ \leq ”.

Начнём с того, что из неравенства (12.30), определяющего субдифференциал, вытекает

$$\mathfrak{F}(x^{(k)}) \gg \mathfrak{F}(x^{(k-1)}) + D^{(k-1)}(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

для $D^{(k-1)} \in \partial\mathfrak{F}(x^{(k-1)})$ и всех $k = 1, 2, \dots$. Но, по построению алгоритма `SubDiff1` с релаксационным параметром $\tau = 1$,

$$D^{(k-1)}(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = -\mathfrak{F}(x^{(k-1)}). \quad (12.51)$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F}(x^{(k)}) \gg 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12.52)$$

— все порождаемые алгоритмом последовательные приближения не меньше нуля относительно порядка “ \ll ”.

Что стоит за неравенством (12.52)? Привлекая из доказательства Предложения 12.3.5 представление (12.31), мы можем заключить:

$$\max_{C \in \text{Vert } C} C \sim x^{(k)} - x^{(k)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \gg 0,$$

или

$$\max_{C \in \text{Vert } C} C \sim x^{(k)} - x^{(k)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \in K_{\ll}.$$

В частности, для некоторой матрицы

$$S^{(k)} \in \begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix} - I,$$

на которой достигается $(\max_{\ll} C \sim x^{(k)} - x^{(k)})$, имеет место

$$S^{(k)} x^{(k)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \in K_{\ll}.$$

Так как эта матрица $S^{(k)}$ по условию Теоремы неособенна, то

$$x^{(k)} + (S^{(k)})^{-1} \text{sti}(\mathbf{d}) \in (S^{(k)})^{-1} K_{\leq} \subseteq K_{\leq},$$

а это включение, в силу (12.50), означает, что

$$-(S^{(k)})^{-1} \text{sti}(\mathbf{d}) \leq x^{(k)}.$$

Если же мы положим вектор $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ равным величине

$$\inf_{\leq} \left\{ -S^{-1} \text{sti}(\mathbf{d}) \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} - I \right\},$$

то тогда $\xi \leq x^{(k)}$ для всех $k = 1, 2, \dots$, т.е. последовательность $\{x^{(k)}\}$ оказывается в самом деле ограниченной снизу относительно частичного порядка “ \leq ”.

Другой важный момент доказательства: последовательность $\{x^{(k)}\}$, порождённая рассматриваемым алгоритмом, является монотонно неубывающей относительно “ \leq ”, т.е.

$$x^{(k)} \leq x^{(k-1)} \quad (12.53)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$.

Действительно, комбинируя (12.51) и (12.52), нетрудно получить

$$D^{(k-1)} \left(x^{(k)} - x^{(k-1)} \right) \ll 0.$$

Из Предложения 12.3.6 следует, что для всех $D^{(k-1)}$ имеют место включения

$$D^{(k-1)} \in \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} - I.$$

Отсюда, с учётом (12.49), следует (12.53).

Мы доказали, таким образом, что

$$\xi \leq x^{(k)} \leq x^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12.54)$$

В общем случае связь между порядком и топологией в частично упорядоченном линейном топологическом пространстве может быть весьма сложной, но, к счастью, в конечномерном пространстве ситуация решительно упрощается: любая последовательность, монотонная и ограниченная относительно частичного порядка, согласованного с линейной структурой пространства, всегда имеет (топологический) предел.¹

¹Это факт часто формулируют в следующем эквивалентном виде: в конечномерном пространстве всякий конус является *правильным* [11, 13].

Следовательно, из (12.54) мы можем заключить о существовании некоторого предела x^* последовательности $\{x^{(k)}\}$, порождаемой алгоритмом **SubDiff1**. Значение этого предела является решением уравнения в рекуррентной форме

$$x^* = x^* - (D^*)^{-1}(\mathfrak{F}(x^*)),$$

где матрица $D^* \in \partial \mathfrak{F}(x^*)$ неособенна в силу (12.38) и условий доказываемой Теоремы. Итак, $\mathfrak{F}(x^*) = 0$.

Тот факт, что при своей сходимости субдифференциальный метод Ньютона выдаёт точное решение за конечное число шагов, следует из представления (12.31), т.е. из многогранности отображения \mathfrak{F} : как только текущее $(k-1)$ -е приближение алгоритма оказывается на одном аффинном куске с точным решением x^* , следующее, k -е приближение обязано быть равным x^* по самому построению метода и в силу выбора релаксационного параметра. ■

Важнейший частный случай применения алгоритмов **SubDiff1** и **SubDiff2** — нахождение формальных решений систем (12.1) и (12.2) с правильными интервальными матрицами \mathbf{C} . При этом на $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ частичный порядок “ \subseteq ” переходит в обычный порядок по включению “ \subseteq ”, на \mathbb{R}^{2n} частичный порядок “ \ll ” совпадает с покомпонентным упорядочением “ \leq ”, и эти упрощения позволяют более детально исследовать поведение рассматриваемых алгоритмов. В частности, для правильной матрицы \mathbf{C} сходимость методов **SubDiff1** и **SubDiff2** с некоторым специальным начальным приближением может быть обоснована и при $0 < \tau < 1$.

Именно, в случае, когда все элементы \mathbf{C} правильны, начальные приближения для **SubDiff1** и **SubDiff2** имеет смысл полагать равными решениям некоторых специальных систем уравнений:

- в качестве начального вектора $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ алгоритма **SubDiff1** возьмём решение “средней” $2n \times 2n$ -системы линейных уравнений

$$(I - (\text{mid } \mathbf{C})^\sim) x = \text{sti}(\mathbf{d}),$$

- в качестве начального вектора $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ алгоритма **SubDiff2** возьмём решение “средней” $2n \times 2n$ -системы линейных уравнений

$$(\text{mid } \mathbf{C})^\sim x = \text{sti}(\mathbf{d}).$$

Тогда, например, в алгоритме **SubDiff1** специальный выбор начального приближения $x^{(0)}$ влечёт следующую цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}(x^{(0)}) &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{ sti}^{-1}(x^{(0)})) - x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \\
 &\geq \text{sti}((\text{mid } \mathbf{C}) \text{ sti}^{-1}(x^{(0)})) - x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \quad \begin{array}{l} \text{из монотонности} \\ \text{по включению} \end{array} \\
 &= (\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} x^{(0)} - x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \quad \text{в силу свойства (12.16)} \\
 &= ((\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} - I) x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) = 0.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathfrak{F}(x^{(0)}) \geq 0,$$

и далее неравенство

$$\mathfrak{F}(x^{(k)}) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12.52)$$

легко обосновывается по индукции. Завершение доказательства сходимости алгоритма **SubDiff1** дословно повторяет те рассуждения, которые приведены выше для случая $\tau = 1$ с единственной разницей, что при значениях $\tau < 1$ сходимость эта уже не является конечной. Ясно также, что всё сказанное верно и для алгоритма **SubDiff2**.

Заметим также, что никто не препятствует нам брать специальное начальное приближение в виде решения “средней системы” для алгоритмов **SubDiff1** и **SubDiff2** даже при $\tau = 1$. Это уменьшает на единицу количество итераций, необходимых для сходимости к решению, хотя и не снижает общего объёма вычислительной работы.

Длительный опыт работы с алгоритмами **SubDiff1** и **SubDiff2** показывает, что они уверенно находят решения систем уравнений (12.23)–(12.24) и (12.25)–(12.26) даже тогда, когда в интервальной матрице \mathbf{A} правильные и неправильные элементы произвольно перемешаны и условие (12.27) не выполняется. То есть, **SubDiff1** и **SubDiff2** пригодны для отыскания формальных решений интервальных линейных систем самого общего вида (хотя при этом алгоритмы нельзя уже называть “субдифференциальными”). Возможное объяснение этого феномена заключается в том, что индуцированные отображения $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определённые посредством (12.24) и (12.26), не являются столь уж сильно невыпуклыми, как это можно было бы ожидать при нарушении условия строчной правильности-неправильности

элементов (12.27). Глобально они, конечно же, невыпуклы. Но вот локально, на области, содержащей “путь” от начального приближения к решению, отображения \mathfrak{F} и \mathfrak{G} могут оказаться выпуклыми, и этого будет вполне достаточно для хорошей сходимости субдифференциального метода Ньютона! Вспомним области дистрибутивности, введённые Гарденьесом и Трепатом: внутри каждой из таких областей желанная выпуклость действительно имеет место.

Замечательные качества субдифференциальных ньютоновских методов в применении к интервальным линейным системам получили определённый резонанс среди исследователей, и вслед за автором их сходимость для ИСЛАУ частного вида в работе [25] доказал А. Ноймайер, который использовал классическую технику матричных преобразований.

12.5в Вычисление субдифференциала

Сейчас мы опишем методику вычисления субдифференциалов $\partial\mathfrak{F}(x)$ и $\partial\mathfrak{G}(x)$, необходимую при практической реализации субдифференциальных методов Ньютона `SubDiff1` и `SubDiff2`.

Субдифференциал $\partial\mathfrak{F}(x)$, вообще говоря, не совпадает с интервальной матрицей из правой части оценки (12.40), образованной интервалами односторонних частных производных, и то же самое верно в отношении $\partial\mathfrak{G}(x)$. Для некоторых интервальных матриц \mathbf{C} равенство на месте включения (12.40) может не выполняться даже на множестве аргументов x ненулевой меры. Тем не менее, мы можем выписать явный вид субдифференциалов $\partial\mathfrak{F}(x)$ и $\partial\mathfrak{G}(x)$ в самом общем случае.

Вспомним определение стандартного погружения `sti` интервального пространства \mathbb{KR}^n в линейное пространство \mathbb{R}^{2n} : для интервального вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$

$$\begin{aligned} (\text{sti}(\mathbf{x}))_i &= -\underline{x}_i, & \text{если } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ (\text{sti}(\mathbf{x}))_i &= \overline{x}_i, & \text{если } i \in \{n+1, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Обозначая через e_i вектор, имеющий i -ой компонентой 1, а остальные нули, и привлекая известный результат о субдифференциале суммы

[17, 19, 20], найдём

$$\begin{aligned}
 \partial \mathfrak{F}_i(x) &= \partial \left((\text{sti}(\mathbf{C} \text{ sti}^{-1}(x)))_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\
 &= \partial \left(- \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\
 &= -\partial \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - e_i \\
 &= - \sum_{j=1}^n \partial \left(\overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} \right) - e_i
 \end{aligned} \tag{12.55}$$

для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, и

$$\begin{aligned}
 \partial \mathfrak{F}_i(x) &= \partial \left((\text{sti}(\mathbf{C} \text{ sti}^{-1}(x)))_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\
 &= \partial \left(\sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\
 &= \partial \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - e_i \\
 &= \sum_{j=1}^n \partial \left(\overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} \right) - e_i
 \end{aligned} \tag{12.56}$$

для $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$. Таким образом, вычисление субдифференциала $\partial \mathfrak{F}_i(x)$ сводится к вычислению субдифференциалов простейших отображений $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ следующих двух видов

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mapsto \underline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]}, \tag{12.57}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mapsto \overline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]}, \tag{12.58}$$

где $\mathbf{c}_{ij} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$. Ниже, чтобы не загромождать изложение, имеет смысл не выписывать “немые” компоненты аргумента x , никак не влияющие

на значения этих отображений, так что вместо (12.57)–(12.58) мы будем рассматривать

$$\begin{aligned}(x_j, x_{i+n}) &\mapsto \underline{c_{ij}} \cdot [-x_j, x_{j+n}], \\ (x_j, x_{j+n}) &\mapsto \overline{c_{ij}} \cdot [-x_j, x_{j+n}],\end{aligned}$$

где c_{ij} — некоторые интервалы из $\mathbb{K}\mathbb{R}$.

Воспользовавшись формулами Лакеева (1.42) и тем фактом, что $(-x)^- = x^+$ и $(-x)^+ = x^-$, получим

$$\begin{aligned}\partial\left(\underline{c_{ij}}[-x_j, x_{j+n}]\right) = \\ \underline{c_{ij}}^+ \partial(x_j^-) + \overline{c_{ij}}^- \partial(x_{j+n}^-) - \partial(\max\{\overline{c_{ij}}^+ x_j^+, \underline{c_{ij}}^- x_{j+n}^+\}),\end{aligned}\quad (12.59)$$

$$\begin{aligned}\partial\left(\overline{c_{ij}}[-x_j, x_{j+n}]\right) = \\ \partial(\max\{\overline{c_{ij}}^+ x_{j+n}^+, \underline{c_{ij}}^- x_j^+\}) - \underline{c_{ij}}^+ \partial(x_{j+n}^-) - \overline{c_{ij}}^- \partial(x_j^-).\end{aligned}\quad (12.60)$$

Известно, что субдифференциал функции максимума в некоторой точке есть замыкание выпуклой оболочки объединения субдифференциалов тех функций, на которых рассматриваемый максимум достигается в данной точке (см., например, [17, 19, 20]). Привлекая дополнительно определения положительной и отрицательной частей числа, легко можем вывести, что

$$\partial(x_j^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([0, 1], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (1, 0), & \text{если } x_j > 0, \end{cases}\quad (12.61)$$

$$\partial(x_j^-) = \begin{cases} (-1, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([-1, 0], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_j > 0, \end{cases}\quad (12.62)$$

и

$$\partial(x_{j+n}^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [0, 1]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 1), & \text{если } x_{j+n} > 0, \end{cases} \quad (12.63)$$

$$\partial(x_{j+n}^-) = \begin{cases} (0, -1), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [-1, 0]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_{j+n} > 0. \end{cases} \quad (12.64)$$

В силу сказанного вычисление первых двух слагаемых в выражении (12.59) и последних двух слагаемых в (12.60) не представляет трудностей.

Далее, вычисление оставшихся членов сумм (12.59) и (12.60) требует предварительного нахождения и сравнения значений $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+$ и $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+$, $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+$ и $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+$ соответственно. Но величины $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^-$, $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+$, x_j^+ , x_{j+n}^+ все неотрицательны, и потому, например, из неравенства $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+$ следует $x_j^+ > 0$, так что $\partial(x_j^+) = (1, 0)$. Аналогично,

$$\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+ \Rightarrow \partial(x_{j+n}^+) = (0, 1),$$

$$\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+ \Rightarrow \partial(x_{j+n}^+) = (0, 1),$$

$$\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+ \Rightarrow \partial(x_j^+) = (1, 0).$$

С учётом выписанных равенств мы можем заключить

$$\begin{aligned} & \partial \left(\max \{ \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+ \} \right) \\ &= \begin{cases} (\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+, 0), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ \text{выпуклая оболочка} \\ \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_j^+) \text{ и } \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (0, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \end{cases} \quad (12.65) \end{aligned}$$

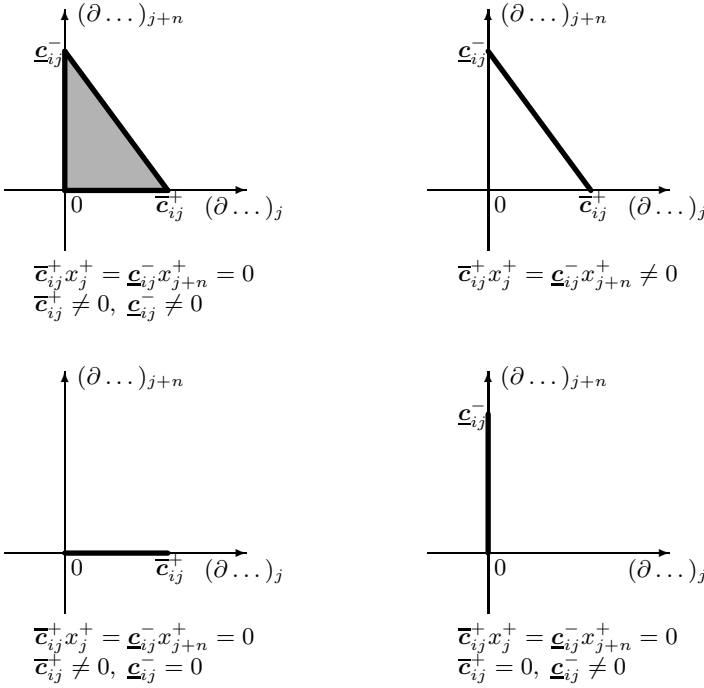


Рис. 12.4. Различные конфигурации
субдифференциала $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\})$
в точках, где $\bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$.

и

$$\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\}) = \begin{cases} (0, \bar{c}_{ij}^+), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{c}_{ij}^- x_j^+, \\ \text{выпуклая оболочка} \\ \bar{c}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^+) \text{ и } \underline{c}_{ij}^- \partial(x_j^+) , & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^- x_j^+, \\ (\underline{c}_{ij}^-, 0), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{c}_{ij}^- x_j^+. \end{cases} \quad (12.66)$$

Остаётся лишь уточнить вид искомых субдифференциалов (12.65) и (12.66) в точках, где достигаются равенства $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+$ и $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+$. Разбор всех возможных ситуаций является при этом несложным, хотя и довольно хлопотным делом. Например, на Рис. 12.4 изображены различные конфигурации субдифференциала $\partial(\max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+\})$. Похоже выглядит и $\partial(\max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+\})$.

В действительности, нам нужно весьма немного: вычислительная схема субдифференциального метода Ньютона требует нахождения какого-нибудь одного (безразлично какого именно) субградиента отображения $\mathfrak{F}(x)$, а для этого нам достаточно предъявить по единственному субградиенту для функций

$$\max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+\} \quad \text{и} \quad \max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+\}.$$

Соответственно, нам нужна только какая-нибудь одна точка выпуклой оболочки $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_j^+)$ и $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+)$ при $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+$, и какая-нибудь одна точка выпуклой оболочки $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^+)$ и $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_j^+)$ при $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+$. Нетрудно понять, что в первом случае такой точкой может служить, например,

$$\left(\frac{1}{2}\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, \frac{1}{2}\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-\right)$$

(см. Рис. 12.4, а во втором —

$$\left(\frac{1}{2}\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, \frac{1}{2}\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+\right).$$

В целом

$$\begin{aligned} & \partial(\max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+\}) \\ & \ni \begin{cases} (\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, 0), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (\frac{1}{2}\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, \frac{1}{2}\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (0, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \end{cases} \quad (12.67) \end{aligned}$$

$$\partial \left(\max \{ \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+ \} \right) \ni \begin{cases} (0, \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ (\frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, \frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ (\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, 0), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+. \end{cases} \quad (12.68)$$

На практике вычисление искомого субградиента для $\mathfrak{F}(x)$ можно выполнить одновременно с вычислением значений этого отображения, опираясь на формулы (12.55)–(12.64), (12.67) и (12.68).

12.6 Численные примеры

В этом параграфе мы приводим результаты численных экспериментов на персональном компьютере с процессором Intel Pentium, выполненных с субдифференциальным методом Ньютона SubDiff2.

Пример 1, классический.

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

При значении $\tau = 1$ алгоритм SubDiff2 находит всего за 2 итерации точное формальное решение — правильный интервальный вектор

$$\begin{pmatrix} [-0.333 \dots, 0.333 \dots] \\ [-0.333 \dots, 0.333 \dots] \end{pmatrix},$$

который, как можно видеть из Рис. 5.1, является максимальной по включению внутренней оценкой допустимого множества решений системы (5.12).

Для интервальной линейной системы (5.12) с дуализованной матрицей

$$\begin{pmatrix} [4, 2] & [1, -2] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

алгоритм **SubDiff2** сходится к точному формальному решению

$$\begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

при $\tau = 1$ также за 2 итерации. Интересно также отметить, что за эти же 2 итерации алгоритм **SubDiff2** надежно находит формальные решения и для любых других ИСЛАУ, получающихся из системы (5.12) дуализацией некоторых элементов матрицы или вектора правой части, т.е. при любых распределениях правильных и неправильных элементов в ИСЛАУ.

Пример 2, в котором алгоритм **SubDiff2** расходится.

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix}$$

Для этой интервальной линейной системы алгоритм **SubDiff2** с $\tau = 1$ порождает осциллирующую (начиная со второго шага) последовательность, которая попеременно принимает значения

$$\begin{pmatrix} [-0.3333 \dots, 1.0] \\ [-0.3333 \dots, 0.0] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [0.0, 0.5] \\ [-0.5, 0.3333 \dots] \end{pmatrix}$$

в зависимости от четности-нечетности номера шага. Она, очевидно, не имеет никакого предела. Уменьшение релаксационного параметра τ также не приводит к успеху алгоритма. Возможно, что причиной этого является отсутствие у системы формального решения. Отметим, что матрица ИСЛАУ в последней строке содержит нулевую вещественную строку и потому в целом является особенной.

Пример 3. Для интервальной линейной 7×7 -системы

$$\begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] & [2, 3] & [5, 9] & [-23, -9] & [15, 23] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] & [-1, 3] & [-5, 1] & [1, 15] & [-3, -1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] & [-6, 30] & [0, 3] & [-18, 1] & [0, 1] \\ [-4, 1] & [-1, 1] & [-3, 1] & [3, 5] & [5, 9] & [1, 2] & [1, 4] \\ [0, 3] & [0, 6] & [0, 20] & [-1, 5] & [8, 14] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [-7, -2] & [1, 2] & [7, 14] & [-3, 1] & [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-1, 5] & [-3, 2] & [0, 8] & [1, 11] & [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \\ [30, 7] \\ [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

из работы [27] алгоритм SubDiff2 успешно вычисляет формальное решение

$$\begin{pmatrix} [-1.22474317578, 0.50542987670] \\ [18.26444337096, -9.51750410300] \\ [-0.02818650587, 1.16075521933] \\ [16.40769576636, -14.45553419850] \\ [-1.34356527337, 3.98821848038] \\ [-3.52893852104, 4.54345836822] \\ [5.43086236811, -0.67400838683] \end{pmatrix}$$

за 9 итераций при значении релаксационного параметра $\tau = 1$.

Но при сужении (7,7)-элемента матрицы ИСЛАУ сходимость субдифференциального метода Ньютона для $\tau = 1$ пропадает, начиная с $\mathbf{a}_{77} = [8, 82]$, и восстанавливается лишь при $\mathbf{a}_{77} = [12.8, 82]$. С другой стороны, уменьшив релаксационный параметр до $\tau = 0.8$, мы добъёмся сходимости алгоритма SubDiff2 к формальному решению во всём диапазоне “неблагоприятных” значений элемента \mathbf{a}_{77} , хотя она и не будет в этом случае конечной.

Дальнейшие численные примеры можно найти в последнем параграфе этой главы.

12.7 Стационарные одношаговые итерационные методы

Напомним, что итерационный процесс

$$x^{(k+1)} \leftarrow T(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

называется *стационарным*, если оператор T не зависит от номера шага k . Говорят также, что он *одношаговый*, если всякий член итерационной последовательности зависит только от одного предшествующего члена.

Цель настоящего параграфа — развитие стационарных одношаговых итерационных методов для нахождения формальных решений интервальных линейных систем вида

$$Cx + d = 0. \tag{12.2}$$

В условиях, когда существует субдифференциальный метод Ньютона, развитие подобных алгоритмов для нахождения формальных решений имеет, главным образом, методический интерес. Мы можем рассматривать систему (12.2) как полигон для отработки подходов к решению более общих систем уравнений, например, вида

$$Cx + d(x) = 0,$$

где $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ограниченное отображение, т.е. $\|d(x)\| \leq \text{const}$.

Ещё два довода (впрочем, не слишком весомых) за построение стационарных итерационных методов для нахождения формальных решений ИСЛАУ заключаются в том, что

- несмотря на очень хорошее поведение субдифференциального метода Ньютона на практике, его обоснование для самого общего случая сталкивается с трудностями;
- помимо вычисления решения стационарные итерационные методы, основанные на теоремах о сжимающих отображениях, обеспечивают ещё и доказательство единственности найденного решения, чего не даёт субдифференциальный метод Ньютона.

Определение 12.7.1 Интервальную матрицу $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будем называть неособенной (невырожденной), если неособенными являются все вещественные матрицы из её правильной проекции $\text{pro } C$.

12.7а Общий подход: расщепление матрицы системы

Как находить формальные решения ИСЛАУ вида (12.2) с матрицами, имеющими произвольное распределение правильных и неправильных элементов? В общем случае для этой цели применима, например, универсальная схема метода простой итерации со всеми её многочисленными модификациями — Зейделя, Якоби и т.п. [18], хотя получаемая в подобных алгоритмах сходимость является качественно более медленной, чем в субдифференциальном (квазидифференциальном) методе Ньютона. При реализации подобных стационарных методов иногда можно итерировать непосредственно в интервальном пространстве \mathbb{R}^n , даже не погружая его в линейное пространство.

В соответствии с общей схемой одношаговых стационарных итерационных методов исходное уравнение (12.2) предварительно должно быть приведено к виду

$$x = T(x) \quad (12.69)$$

с некоторым оператором $T : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, а затем, после выбора начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$, запускается итерирование

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.70)$$

При выполнении ряда специальных условий на оператор перехода T (когда он является сжатием и т.п.) и на начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ сходится к неподвижной точке оператора T , т.е. к искомому решению уравнения (12.2). Но, в отличие от традиционного вещественного случая, приведение ИСЛАУ (12.2) к виду (12.69) из-за недостаточных алгебраических свойств арифметики Каухера является не вполне тривиальной задачей. Проблема состоит в том, что по меньшей мере два члена с интервальной переменной x в формуле (12.69) (которая эквивалентна $x \ominus T(x) = 0$) должны в итоге свернуться в выражение $C\mathbf{x} \ominus \mathbf{d}$, содержащее лишь одно вхождение переменной x . А это, при отсутствии полноценной возможности приводить подобные члены, требует специальных средств для преобразования исходного уравнения к виду (12.69).

Один из возможных подходов к конструированию итерационных схем для решения уравнения (12.2) заключается в том, чтобы пойти обратным путём — от возможных представлений

$$C\mathbf{x} = \mathcal{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}), \quad (12.71)$$

где

- i) функция $\mathcal{G} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ легко обратима, т.е. для неё может быть несложно построена обратная функция $\mathcal{G}^{-1} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, такая что $\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{G}(\mathbf{x})) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$;
- ii) функция $\mathcal{H} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ легко вычислима.

Определение 12.7.2 Пусть $\psi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ — оператор в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, задаваемый умножением на интервальную матрицу C , т.е. $\psi(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$. Представление ψ в виде (12.71), удовлетворяющем для любых

$\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ выписанным выше условиям i)–ii), будем называть расщеплением оператора ψ умножения на матрицу, или, коротко, расщеплением матрицы \mathbf{C} .

Если нам известно некоторое расщепление матрицы \mathbf{C} в интервальной линейной системе

$$\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} = 0, \quad (12.2)$$

то мы можем перейти к эквивалентному уравнению

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{d} = 0,$$

или

$$\mathbf{x} = \mathcal{G}^{-1}(\text{орр } \mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\mathbf{x})),$$

что совпадает с желаемой формой (12.69). Соответственно, итерационный процесс можно организовывать по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathcal{G}^{-1}(\text{орр } \mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\mathbf{x}^{(k)})), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.72)$$

Далее мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда \mathcal{G} , $\mathcal{H} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ либо сами представляют собой умножения на некоторые интервальные матрицы, либо являются близкими по виду отображениями.

Пусть в ИСЛАУ (12.2) интервальная матрица \mathbf{C} неособенна. Тогда существуют по крайней мере две возможности для расщепления (12.71) оператора умножения на \mathbf{C} с легко обратимым отображением $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$:

- I) $\mathcal{G}(\cdot)$ берётся в виде умножения на некоторую точечную абсолютно неособенную матрицу G , т.е.

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}.$$

При этом $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$, $\mathbf{H} = \mathbf{C} - G$, а ненулевые элементы G и \mathbf{H} подбираются имеющими одинаковые знаки (за счёт чего в силу дистрибутивности (1.47) и обеспечивается равенство (12.71) для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$).

II) $\mathcal{G}(\cdot)$ и $\mathcal{H}(\cdot)$ берутся, соответственно, в виде

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x},$$

где \mathbf{G} и \mathbf{H} — верхняя и нижняя треугольные интервальные матрицы, $\mathbf{C} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$, причём \mathbf{G} имеет обратимые элементы на главной диагонали, а у \mathbf{H} главная диагональ нулевая (возможно, для этого сначала потребуется поменять местами уравнения системы).

Обратное отображение $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$ при этом таково, что результат \mathbf{y} его действия на элемент $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ определяется по формулам обратного хода интервального аналога метода Гаусса для треугольной системы $\mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Естественно называть такое расщепление оператора умножения на \mathbf{C} *треугольным*.

Заметим, что в обоих рассмотренных случаях обратное отображение $\mathcal{G}^{-1} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, вообще говоря, не может быть задано умножением на какую-либо интервальную матрицу.

12.76 Отщепление вещественного слагаемого

В этом пункте для первого из рассмотренных в §12.7а случаев расщепления матрицы ИСЛАУ мы выпишем расчётные формулы соответствующего итерационного процесса (12.72) в явном виде. Покажем также, каким образом можно на практике строить расщепление интервальной матрицы.

Определение 12.7.3 Для $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$ обозначим

$$[\mathbf{x}] := \begin{cases} \max\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} < 0, \\ 0 & , \quad \text{если } 0 \in \text{pro } \mathbf{x}, \\ \min\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} > 0, \end{cases}$$

— взятие ближайшего к нулю элемента правильной проекции интервала \mathbf{x} .

$[\mathbf{x}]$ — это наименьшая по абсолютной величине точка из правильной проекции интервала, которая имеет тот же знак, что и сам интервал. Нетрудно понять, что если x лежит между 0 и $[\mathbf{x}]$, т.е. $x \in 0 \vee [\mathbf{x}]$, то интервалы

$$\mathbf{x} - x \quad \text{и} \quad x$$

имеют одинаковый знак, а потому образуют требуемое расщепление для оператора умножения на \mathbf{x} . Следовательно, условию I из §12.7а можно удовлетворить, например, если взять

$$G \in 0 \vee [\mathbf{C}]. \quad (12.73)$$

Для минимизации абсолютной величины остатка $\mathbf{H} = \mathbf{C} - G$ можно положить $G = [\mathbf{C}]$, т.е. образовать G поэлементным применением к \mathbf{C} унарной операции $[\cdot]$. Ясно, что при сделанном нами предположении о неособенности \mathbf{C} матрица G также получится неособенной. Если G к тому же абсолютно неособенна, то обратное отображение $G^{-1}(\cdot)$ соответствует умножению на матрицу $(G^\sim)^{-1}$ в \mathbb{R}^{2n} . В любом случае у нас всегда есть возможность сделать матрицу G абсолютно неособенной путём небольшого уменьшения абсолютной величины её ненулевых элементов, не нарушающего условия расщепления (12.73).

Полезно выписать формулы соответствующего итерационного процесса в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2n} . Как конкретизацию для (12.72) мы имеем

$$x^{(k+1)} \leftarrow (G^\sim)^{-1} \text{sti}(\text{opp } \mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x^{(k)})). \quad (12.74)$$

где sti — стандартное погружение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^{2n} и

$$G \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C} - G. \quad (12.75)$$

Итерационный процесс с таким расщеплением работает в целом удовлетворительно, но иногда не столь хорошо, как того хотелось бы. Например, он не приводит к успеху при решении интервальной линейной системы Барта-Нудинга

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

а потому имеет смысл рассмотреть и другие рецепты расщепления матрицы ИСЛАУ.

Ещё один способ расщепления интервальной матрицы может быть основан на обобщённом дистрибутивном законе Маркова (1.48). Введём

Определение 12.7.4 Для $x \in \mathbb{K}\mathbb{R}$ обозначим

$$[\mathbf{x}] = \begin{cases} \min\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 \in \text{pro } \mathbf{x}, \\ \max\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} \geq 0. \end{cases}$$

— взятие наибольшего по модулю элемента из правильной проекции интервала, если он не содержит нуля, и ноль иначе.

Если $0 \notin \text{pro } \mathbf{x}$, то $\lceil \mathbf{x} \rceil$ — это наибольшая по абсолютной величине точка из правильной проекции интервала (в отличие от $\lfloor \mathbf{x} \rfloor$), которая имеет тот же знак, что и сам интервал. Нетрудно понять, что если x совпадает по знаку с $\lceil \mathbf{x} \rceil$ и $|x| > \lceil \mathbf{x} \rceil$, то интервалы

$$\mathbf{x} - x \quad \text{и} \quad x$$

имеют разные знаки, а знак их суммы $(\mathbf{x} - x) + x$ совпадает со знаком \mathbf{x} . Поэтому для любого $\mathbf{y} \in \mathbb{KR}$ в силу (1.48) справедливо

$$((\mathbf{x} - x) + x) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} - x) \cdot \text{dual } \mathbf{y} + x \cdot \mathbf{y}.$$

Следовательно, в общей формуле итерационных процессов (12.72) можно положить

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}, \quad G = (g_{ij}) = \lceil C \rceil, \quad (12.76)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathcal{H}_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{H}_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n h_{ij} \cdot \begin{cases} \mathbf{x}_j, & \text{если } g_{ij} = 0 \\ \text{dual } \mathbf{x}_j, & \text{иначе} \end{cases} \quad (12.77)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{h}_{ij}) = \lceil C \rceil - G. \quad (12.78)$$

В \mathbb{R}^{2n} явная формула для итерационного процесса, основанного на таком способе вещественного расщепления матрицы ИСЛАУ, имеет вид

$$x^{(k+1)} \leftarrow (G^\sim)^{-1} \text{sti}(\text{opp } \mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\text{sti}^{-1}(x^{(k)}))), \quad (12.79)$$

где матрица $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и отображение $\mathcal{H}(\cdot)$ определены посредством (12.76)–(12.78), а sti — стандартное погружение \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n} . Ниже в §12.8 мы приводим результаты численных экспериментов с этим методом, фигурирующим под именем **ReSplit**, которые показывают, что он работает ощутимо лучше процесса (12.74).

Каковы условия сходимости рассмотренных итерационных процессов? Имеет место

Теорема 12.7.1 Пусть матрицы $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $H \in \mathbb{K}^{n \times n}$ получены в результате расщеплений (12.75) и (12.76)–(12.78) интервальной матрицы C , а \mathfrak{V} — это $2n \times 2n$ -матрица $(G^-)^{-1}$. Если спектральный радиус матрицы $|\mathfrak{V}| |H|^-$ меньше единицы, то формальное решение интервальной линейной системы

$$Cx + d = 0 \quad (12.2)$$

существует и единственно, а итерации (12.74) и (12.79) сходятся к нему из любого начального приближения.

Доказательство мы проведём сначала для итерационного процесса (12.74).

Введём на \mathbb{R}^{2n} мультиметрику $d : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+^{2n}$ следующим образом:

$$d(x, y) := \begin{pmatrix} \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n+1} - y_{n+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_n - y_n|, |x_{2n} - y_{2n}|\} \\ \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n+1} - y_{n+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_n - y_n|, |x_{2n} - y_{2n}|\} \end{pmatrix}.$$

Вспоминая определение (12.13) стандартного погружения sti , мы можем дать и другое определение для мультиметрики d , именно

$$d(x, y) = \begin{pmatrix} |\text{sti}^{-1}(x) \ominus \text{sti}^{-1}(y)| \\ |\text{sti}^{-1}(x) \ominus \text{sti}^{-1}(y)| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что относительно такой мультиметрики оператор перехода T итерационной схемы (12.74), определяемый как

$$T(x) = \mathfrak{V} \text{sti}(d \ominus H \text{sti}^{-1}(x))$$

удовлетворяет условиям теоремы Шрёдера об обобщённых сжатиях (теорема 2.3.2.

Имеем

$$\begin{aligned}
& |(T(x))_i - (T(y))_i| \\
&= \left(|T(x) - T(y)| \right)_i \\
&= \left(|\mathfrak{V} \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x)) - \mathfrak{V} \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \right)_i \\
&= \left(|\mathfrak{V}(\text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x)) - \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)))| \right)_i \\
&= \left(|\mathfrak{V} \text{sti}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \right)_i \\
&\leq \left(|\mathfrak{V}| \cdot |\text{sti}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \right)_i \\
&= \left(|\mathfrak{V}| \cdot \left(\frac{|\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)}|} \right) \right)_i \\
&\leq \left(|\mathfrak{V}| \cdot \left(\begin{array}{c} \max \left\{ \frac{|\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)}|} \\ \max \left\{ \frac{|\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)}|} \end{array} \right) \right) \right)_i \\
&= \left(|\mathfrak{V}| \cdot \left(\begin{array}{c} |\text{Dist}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x), \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \\ |\text{Dist}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x), \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \end{array} \right) \right)_i
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (2.6), можем продолжить выкладки следующим образом:

$$\begin{aligned}
& |(T(x))_i - (T(y))_i| \\
& \leq \left(|\mathfrak{V}| \cdot \begin{pmatrix} |\mathbf{H}| \cdot \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ |\mathbf{H}| \cdot \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\
& = \left(|\mathfrak{V}| \begin{pmatrix} |\mathbf{H}| & 0 \\ 0 & |\mathbf{H}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\
& = \left(|\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim \begin{pmatrix} \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\
& = (|\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim d(x, y))_i \\
& = (i\text{-ая строка матрицы } |\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim) \cdot d(x, y).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \max\{ |(T(x))_i - (T(y))_i|, |(T(x))_{i+n} - (T(y))_{i+n}| \} \\
& = \max\{ (|\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim d(x, y))_i, (|\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim d(x, y))_{i+n} \} \\
& = \max \left\{ \begin{pmatrix} i\text{-ая строка} \\ \text{матрицы} \\ |\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim \end{pmatrix} d(x, y), \begin{pmatrix} (i+n)\text{-ая} \\ \text{строка} \\ \text{матрицы} \\ |\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim \end{pmatrix} d(x, y) \right\}.
\end{aligned}$$

Из формул Фробениуса для обращения блочных матриц (см., например, [4]) следует, что $2n \times 2n$ -матрица \mathfrak{V} является блочной матрицей той же структуры, что и сопутствующая матрица G^\sim , т.е. разбивается на четыре $n \times n$ -блока, причем диагональные блоки одинаковы. Поэтому в целом получаем

$$d(T(x), T(y)) \leq |\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim d(x, y),$$

что и требовалось.

Нетрудно видеть, что проведённое доказательство легко адаптируется и для итерационного процесса (12.79), так как

$$|\mathcal{H}(\mathbf{x})| = |\mathbf{H}\mathbf{x}|$$

для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$. ■

Предмет основной заботы разработчиков итерационных методов вида (12.70) — как можно сильнее уменьшить спектральный радиус (либо норму) оператора Липшица для оператора перехода T , чтобы, во-первых, обеспечить сходимость итераций, и, во-вторых, ускорить эту сходимость там, где она уже есть. Как следует из доказательства Теоремы 12.7.1, для схемы (12.74) матрица этого оператора Липшица равна $|\mathfrak{W}| |\mathbf{H}|^\sim$. Оптимизация дистрибутивного расщепления матрицы \mathbf{C} на \mathbf{G} и \mathbf{H} является непростой интересной задачей, и мы не будем заниматься её решением в самом общем виде. Отметим лишь, что отщепление вещественного слагаемого особенно удобно на практике в случаях, когда матрица ИСЛАУ имеет много точечных элементов, а доля существенно интервальных элементов невелика.

12.7в Треугольное расщепление матрицы системы

При треугольном расщеплении интервальной матрицы \mathbf{C} равенство

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{x}$$

достигается за счёт того, что \mathbf{G} и \mathbf{H} образуют дизъюнктное разложение для \mathbf{C} , т.е. ненулевые элементы в \mathbf{G} и \mathbf{H} взаимно дополнительные. Псевдокод итерационного процесса (12.72) с треугольным расщеплением матрицы \mathbf{C} , который мы называем **TrSplit**, имеет в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ вид, представленный в Табл. 12.2.

Исследование сходимости алгоритма **TrSplit** было выполнено А.Ю. Карлюк под руководством автора в работе [9]. Основным итогом статьи [9] является следующий результат:

Теорема 12.7.2 Пусть для интервальной матрицы \mathbf{C} системы уравнений (12.2) вещественные квадратные $n \times n$ -матрицы \mathbf{D} , \mathbf{L} , \mathbf{R} опре-

Таблица 12.2.

Алгоритм TrSplit

Вход

Интервальная линейная система $Cx \ominus d = 0$.Треугольное расщепление матрицы C на матрицы G и H .Заданная точность ϵ .

Выход

Приближение к формальному решению системы $Cx \ominus d = 0$.

Алгоритм

 $d \leftarrow +\infty$;присваиваем вектору x некоторое начальное значение;DO WHILE ($d \geq \epsilon$) $p_1 \leftarrow d_1$;DO FOR $i = 2$ TO n

$$p_i \leftarrow d_i \ominus \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} x_j$$

END DO

 $\tilde{x}_n \leftarrow p_n \oslash g_{nn}$;DO FOR $i = n - 1$ TO 1

$$\tilde{x}_i \leftarrow \left(p_i \ominus \sum_{j=i+1}^n g_{ij} \tilde{x}_j \right) \oslash g_{ii}$$

END DO

 $d \leftarrow$ расстояние между x и \tilde{x} ; $x \leftarrow \tilde{x}$;

END DO

деляются формулами

$$\begin{aligned}
 D &= \text{diag} \{ |c_{11}^{-1}|, |c_{22}^{-1}|, \dots, |c_{nn}^{-1}| \}, \\
 L &= (l_{ij}), \quad \text{где} \quad l_{ij} = \begin{cases} |c_{ij}|, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i \leq j, \end{cases} \\
 R &= (r_{ij}), \quad \text{где} \quad r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \geq j, \\ |c_{ij}|, & \text{если } i < j. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Если матрица

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} (DL)^j DR = (I - DL)^{-1} DR$$

такова, что $\rho(P) < 1$, то итерационный процесс **TrSplit** для нахождения формального решения ИСЛАУ (12.2) в полной интервальной арифметике сходится из любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ к единственной неподвижной точке \mathbf{x}^* , являющейся формальным решением системы (12.2). При этом имеет место оценка

$$\text{Dist} \left(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(k)} \right) \leq \left((I - P)^{-1} - \sum_{j=0}^{k-1} P^j \right) \cdot \text{Dist} \left(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)} \right).$$

Для того, чтобы $\rho(P) < 1$, достаточно, например, выполнения следующего условия на интервальную матрицу \mathbf{C} системы (12.2): рекуррентно вычисляемые числа s_1, s_2, \dots, s_n , такие что

$$s_i = \frac{1}{\langle \text{pro } c_{ii} \rangle} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| s_j + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

все строго меньше единицы. Эти условия заведомо выполняются для интервальных матриц со свойством строгого диагонального преобладания:

$$\langle \text{pro } c_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |c_{ij}| \quad \text{для всех } i \in \{1, \dots, n\}.$$

12.8 Численные примеры

Пример 1. интервальная линейная система Барта-Нудинга

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

из [21]. Алгоритм **ReSplit** за 10 итераций дает 3 верных значащих цифры точного ответа $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top$, а за 20 итераций — 6 верных значащих цифр, что по порядку трудозатрат сравнимо с итерационным методом из [6, 7, 29], основанным на отщепления главной диагонали матрицы ИСЛАУ. Такие же показатели достигаются алгоритмом **ReSplit** и при нахождении формального решения системы (5.12) с дуализованной матрицей (которая возникает, к примеру, при внутреннем оценивании объединённого множества решений для (5.12)).

Пример 2. Рассмотрим интервальную линейную 40×40 -систему с матрицей

$$\begin{pmatrix} [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] & & & 0 \\ [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] & & \\ & [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] \\ 0 & & & & [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] \end{pmatrix} \quad (12.80)$$

и правой частью

$$\begin{pmatrix} [0.9, 1.1] \\ [1.8, 2.2] \\ [2.7, 3.3] \\ \vdots \\ [35.1, 42.9] \\ [36, 44] \end{pmatrix}.$$

Матрица (12.80) получена из известной трехдиагональной матрицы, аппроксимирующей вторую производную на симметричном шаблоне, путём 10%-ного уширения элементов, а правая часть системы получена таким же уширением вектора

$$\left(1, 2, 3, \dots, 39, 40 \right)^\top. \quad (12.81)$$

Как и в случае с субдифференциальным методом Ньютона, ни сама эта система, ни ИСЛАУ с дуализованной матрицей не представляют серьёзного труда для методов §12.7. Основанный на вещественном расщеплении алгоритм **ReSplit** уже за 16 итераций находит 12–13 верных значащих цифр для концов компонент формальных решений и исходной интервальной системы и системы с дуализованной матрицей.

Совершенно аналогичная картина быстрой сходимости алгоритма **ReSplit** наблюдается при вычислении формальных решений ИСЛАУ с правой частью (12.81) и матрицами, которые являются 10%-ми уширениями матриц (10.53) и (10.55), взятых из справочника [22].

Отметим, что во всех рассмотренных в этом пункте системах интервальные матрицы не являются строго неособенными.

Пример 3. Для интервальной линейной 40×40 -системы с матрицей Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 40 & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 40 & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & 40 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & 40 \end{pmatrix}, \quad (12.82)$$

(т.е. матрица системы (10.51) с параметром $t = 40$) и с вектором правой части

$$\begin{pmatrix} [10, 20] \\ [10, 20] \\ \vdots \\ [10, 20] \end{pmatrix} \quad (12.83)$$

алгоритм **ReSplit** за 40 итераций находит приближение к формально-

му решению

$$\begin{pmatrix} [0.25, 0.16949152542] \\ [0.25, 0.16949152542] \\ \vdots \\ [0.25, 0.16949152542] \end{pmatrix}$$

с точностью порядка 10^{-8} .

Совершенно то же самое можно наблюдать и при вычислении формального решения ИСЛАУ с дуализованной матрицей (12.82) и правой частью (12.83). Интересная особенность этого примера — особенность интервальной матрицы ИСЛАУ (см. [24]), несмотря на которую развитые нами алгоритмы успешно считают формальное решение.

Пример 4. Для интервальной линейной 7×7 -системы

$$\begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] & [2, 3] & [5, 9] & [-23, -9] & [15, 23] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] & [-1, 3] & [-5, 1] & [1, 15] & [-3, -1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] & [-6, 30] & [0, 3] & [-18, 1] & [0, 1] \\ [-4, 1] & [-1, 1] & [-3, 1] & [3, 5] & [5, 9] & [1, 2] & [1, 4] \\ [0, 3] & [0, 6] & [0, 20] & [-1, 5] & [8, 14] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [-7, -2] & [1, 2] & [7, 14] & [-3, 1] & [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-1, 5] & [-3, 2] & [0, 8] & [1, 11] & [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \\ [30, 7] \\ [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

из работы [27] алгоритм **ReSplit** расходится, но, как мы уже отмечали, формальное решение может быть успешно вычислено с помощью субдифференциального метода Ньютона (за 9 итераций при значении релаксационного параметра $\tau = 1$).

При сужении (7,7)-элемента матрицы появляется сходимость алгоритма **ReSplit** к формальному решению, но она очень медленная. Например, при $a_{77} = [8, 82]$ для получения 5 верных значащих цифр алгоритму требуется около сотни итераций. Резюмируя этот пример, можно сказать, что он весьма убедительно демонстрирует преимущество субдифференциального метода Ньютона не только по эффективности, но и в том, что касается сферы его применимости.

Комментарий к Главе 12

К §12.2д. Предлагаемый нами английский вариант этого термина — *completely regular matrix*, или *completely nonsingular matrix*. В своих ран-

них работах [27, 28] и некоторых других автор называл такие матрицы *ι -неособенными* (*ι -nonsingular*).

К §12.4. Результат теоремы 12.4.1 о существовании и единственности формального решения интервальных линейных систем с матрицами, имеющими строгое диагональное преобладание, впервые был получен, по-видимому, В.С. Зюзиным [6, 7, 29] и далее неоднократно перепечатывался в различных формах, например, в работах [14, 23, 26].

К §12.2в. При определении конуса в линейном пространстве некоторые авторы (например, [20]) опускают требования выпуклости, замкнутости и т.п. В нашей работе для удобства изложения мы придерживаемся того определения конуса, которое традиционно для школы М. А. Красносельского [11, 13].

Как и ранее, всё программное обеспечение находится на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу

<http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/progr.html>

Литература к главе 12

- [1] Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. *Упорядоченные векторные пространства*. – Новосибирск: Наука, 1978.
- [2] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [3] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. *Введение в минимакс*. – Москва: Наука, 1972.
- [4] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. – Москва: Наука, 1988.
- [5] Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // *Доклады АН СССР*. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292–295.
- [6] Зюзин В.С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // *Дифференциальные уравнения и теория функций*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. – С. 28–32.
- [7] Зюзин В.С. Итерационный метод решения системы алгебраических сегментных уравнений первого порядка // *Дифференциальные уравнения и теория функций (выпуск 8)*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1989. – С. 72–82.

- [8] КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. *Функциональный анализ*. – Москва: Наука, 1984.
- [9] КАРЛЮК А.Ю. Численный метод нахождения алгебраического решения ИСЛАУ, основанный на треугольном расщеплении // *Вычислительные Технологии*. – Т. 4, №4. – С. 14–23.
- [10] КОЛЛАТЦ Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. – Москва: Мир, 1969.
- [11] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. *Положительные решения операторных уравнений*. – Москва: Физматгиз, 1962.
- [12] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., ЗАБРЕЙКО П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа*. – Москва: Наука, 1975.
- [13] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., ЛИФШИЦ Е.А., СОБОЛЕВ А.В. *Позитивные линейные системы*. – Москва: Наука, 1985.
- [14] КУПРИЯНОВА Л.В. Нахождение внутренних оценок множеств решений уравнений с интервальными коэффициентами. Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. – Саратов: Саратовский госуниверситет, 2000.
- [15] ЛАКЕЕВ А.В. Существование и единственность алгебраических решений интервальных линейных систем в полной арифметике Каухера // *Вычислительные Технологии*. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 33–44.
- [16] МАЛЬЦЕВ А.И. *Основы линейной алгебры*. – Москва: Наука, 1970.
- [17] ОБЭН Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения*. – Москва: Мир, 1988.
- [18] ОРТЕГА ДЖ., РЕЙНБОЛДТ В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [19] ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. – Москва: Наука, 1980.
- [20] РОКАФЕЛЛАР Р. *Выпуклый анализ*. – Москва: Мир, 1973.
- [21] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [22] GREGORY R.T., KARNEY D.L. *A collection of matrices for testing computational algorithms*. – New York: Wiley Interscience, John Wiley and Sons, 1969.
- [23] MARKOV S., POPOVA E., ULLRICH CH. On the solution of linear algebraic equations involving interval coefficients // *Iterative methods in linear algebra II* / Margenov S., Vassilevski P., eds. – 1996. – P. 216–225. – (IMACS Series on computational and Applied Mathematics; vol. 3).

- [24] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [25] NEUMAIER A. On Shary's algebraic approach for linear interval equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Vol. 21. – P. 1156–1162.
- [26] SAINZ M.A., GARDEÑES E., JORBA L. Formal solution to systems of interval linear and nonlinear equations // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 3. – P. 189–211.
- [27] SHARY S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3–33.
- [28] SHARY S.P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3, No. 2. – P. 103–135.
- [29] ZYUZIN V.S. An interval arithmetic solution of a system of interval algebraic equations of the first order // *International Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling (SCAN-90), Albena, Bulgaria, September 23–28, 1990*. – Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1990. – P. 160–162.

Заключение

Подытоживая содержание книги, попытаемся ответить на глобальный вопрос: зачем вообще нужен интервальный анализ? и что нового он внёс собой в практику математического моделирования?

В значительной мере эти вопросы является риторическим, так как в предшествующих главах книги мы имели достаточно примеров плодотворного применения интервальных методов к задачам, которые до сих пор никак иначе не решались или решались неудовлетворительно. Но вопросы о месте и роли интервального анализа не являются и совсем бессмысленными.

Дело в том, что ряд задач, с которыми имеет дело современный интервальный анализ, ставились и решались и раньше, в “доинтервальную” эру. Например, прямым статистическим моделированием неопределённостей в данных задачи. Что же касается интервальных методов, то, как мы видели в §4.4, трудоёмкость большинства из них для решения задач, требующих оптимальных или гарантированно близких к оптимальным ответов, очень велика.

В качестве примера приведём результаты вычислительных экспериментов, выполненных В.В.Колдаковым с интервальными линейными системами уравнений. Он предпринял прямое статистическое моделирование разброса решений точечных линейных систем в пределах заданной интервальной линейной системы уравнений. Из интервалов в матрице и правой части случайно выбирались представители, полученная точечная система решалась, и в процессе многократного повторения этой процедуры определялись, во-первых, разброс решений по каждой координате, и, во-вторых, частоты попаданий решений в те или иные участки пространства \mathbb{R}^n , т.е., фактически, плотность вероятности решений.

В.В. Колдаковым были проведены две серии экспериментов по ста-

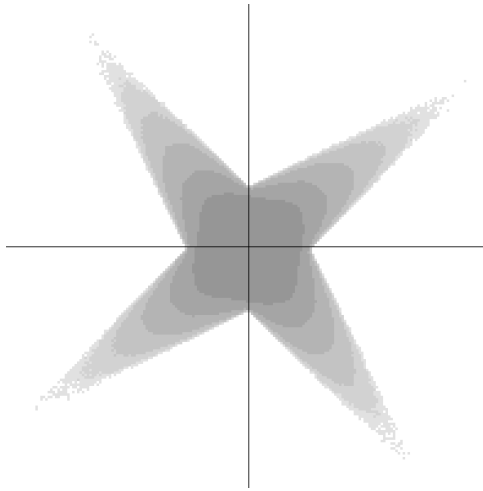


Рис. 3.5. Плотность вероятности решений
для интервальной линейной системы
Барта-Нудинга (5.12).

тистическому моделированию разброса решений интервальных линейных систем уравнений:

в первой серии предполагалось, что на интервалах входных данных (в матрице и правой части) заданы независимые равномерные распределения,

во второй серии экспериментов случайные выбор осуществлялся только между концами входных интервалов. Последнее возможно в силу теоремы Бека-Никеля о том, что экстремальные значения каждой компоненты решения достигаются только в крайних матрице и правой части системы.

Результаты численных экспериментов очень выразительны: даже для систем небольшой размерности метод Монте-Карло выдаёт границы множеств решений, которые уже гарантированных границ, и это особенно характерно для случая входных данных, равномерно распределённых по входным интервалам. Картина интересно менялась при возрастании размерности задач

Исследовались точечные методы нахождения решения системы линейных уравнений с интервальными коэффициентами. Ниже приво-

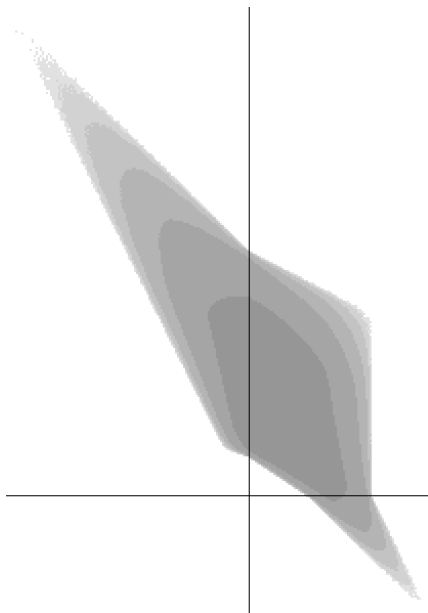


Рис. 3.6. Плотность вероятности решений для интервальной линейной системы Хансена (11.31).

дятся сравнительные результаты вычислений при случайной выборке точки внутри каждого интервала.

Исследовалась система 3×3 :

$$\begin{pmatrix} [3.5] & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & [3.5] & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & [3.5] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

Решения, полученные модифицированным методом дробления параметров из Главы 10 таковы (время счёта не приводится, так как оно меньше секунды):

$$\begin{pmatrix} [-1.76471, 1.76471] \\ [-1.76471, 1.76471] \\ [-1.76471, 1.76471] \end{pmatrix}$$

Результаты методов статистических испытаний:

1) 100 млн. бросаний на каждом из 4х thread'ов, единственный генератор (псевдо)случайных чисел DLARAN, взятый из perflib:

$$\begin{pmatrix} [-1.30771, 1.30153] \\ [-1.22441, 1.30919] \\ [-1.19940, 1.21573] \end{pmatrix}$$

Время счёта составило 32 минуты 44 сек на четырёхпроцессорной ЭВМ (что эквивалентно 2 часа 10 минут на однопроцессорной машине).

2) 100 млн. бросаний на каждом из 4х thread'ов, собственный генератор для каждого интервала (псевдо)случайных чисел DLARAN, взятый из perflib:

$$\begin{pmatrix} [-1.20365, 1.24136] \\ [-1.34871, 1.26039] \\ [-1.23072, 1.28764] \end{pmatrix}$$

Время счёта — 31 минута 22 сек на четырёхпроцессорной ЭВМ (что эквивалентно 2 часа 05 минут на однопроцессорной машине).

Далее, для интервальной линейной 7×7 -системы с матрицей Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 10.5 & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 10.5 & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & 10.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

в результате 400 000 000 бросаний концов на компьютере с 4 параллельными процессорами были получены следующие интервалы для разбросов решений

$$\begin{pmatrix} [-0.24784, 0.25072] \\ [-0.25501, 0.25990] \\ [-0.25501, 0.26829] \\ [-0.24156, 0.26829] \\ [-0.25217, 0.25990] \\ [-0.24245, 0.26829] \\ [-0.24401, 0.24184] \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

При этом на 4-х процессорном компьютере трудозатраты составили почти 9 часов времени (точнее, 8 часов 54 мин, затраченных на выполнение по 100 000 000 бросаний на каждом из четырёх процессоров).

Как видим, полученный таким образом интервал не является гарантированной внешней оценкой множества решений, так как не содержит некоторые из решений точечных линейных систем с данными из входных интервалов. Оптимальная (точная) внешняя оценка множества решений есть брус

$$\begin{pmatrix} [-0.29719, 0.29719] \\ [-0.29719, 0.29719] \\ [-0.29719, 0.29719] \\ [-0.29719, 0.29719] \\ [-0.29719, 0.29719] \\ [-0.29719, 0.29719] \\ [-0.29719, 0.29719] \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

который легко может быть найден интервальным методом дробления параметров из Главы 10 на той же самой 4-х процессорной ЭВМ за 6 мин 47 сек.

Статистическое моделирование на входных интервалах равномерных распределений приводит к ещё худшим результатам, чем (3.1), ещё более негарантированным в сравнении с (3.2):

При дальнейшем росте размерности системы Ноймайера сложность задачи быстро обгоняет возможности даже многопроцессорной вычислительной техники, так что нам не удавалось досчитать “до конца” методами дробления параметров оптимальные внешние оценки множеств решений начиная примерно с $n = 10$. Тем не менее, некоторые весьма качественные внешние оценки вычислялись *всегда*.

Что касается статистического моделирования, то при росте размерности задачи погрешность получаемых с его помощью негарантированных оценок множества решений также угрожающе быстро нарастала, так что в конце концов их достоверность и практичность делались сомнительными.

Конечно, при корректном сравнении результатов интервального и статистического подходов следует принять во внимание, что “гарантированность” оптимальной внешней оценки множества решений (3.2) является избыточной в том смысле, что крайние области множества решений, близкие к экстремальным оценкам несут исчезающе малую плотность вероятности и “почти никогда” не достигаются, или достигаются “очень редко”. Тем не менее, для задач средней и большой размерности, в которых требуются действительно гарантированные оценки решений, применение статистического моделирования может привести к ненадёжным ответам, которые явно ничего не гарантируют.

Резюмируя, можно сказать, что интервальный анализ оказывается вне конкуренции в тех случаях, когда требуется быстро, т.е. за практически приемлемое время вычислить действительно гарантированные оценки множеств решений задач, областей значений функций и т.п.

Наконец, интервальный анализ предоставляет нам новый язык для описания задач с ограниченными неопределённостями в данных, язык удобный и весьма выразительный.

На наш взгляд, приведённые выше доводы служат достаточно убедительным основанием для использования и дальнейшего развития интервальных методов в математическом моделировании и широкой вычислительной практике.

Литература к Заклучению

- [1] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. *Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики.* – Москва: Наука, 1990.

Предметный указатель

- Хансена-Блика-Рона процедура,
349
- алгоритм адаптивный, 463
- алгоритм финально-
гарантирующий,
538
- алгоритм пассивный, 463
- алгоритм последовательно-
гарантирующий,
538
- альтернатива Янсона, 464
- бицентрированная форма, 127
- центрированная форма, 123
- деформация поля, 386
- диагональное преобладание, 102
- функциональное выражение
элементарное, 111
- характеризация Бека, 322
- характеризация Оетгли-Прагера,
229
- индекс особой точки, 390
- индуцированный порядок, 628
- индуцированное отображение, 623
- индуцированное уравнение, 624
- интервальная арифметика
Кахана, 50
- интервальная арифметика
классическая, 24
- интервальная арифметика
полная, 36
- интервальное расширение, 110
- интервальное расширение
естественное, 112
- интервальное расширение
объединённое, 111
- квазивогнутая функция, 611
- липшицево элементарное
функциональное
выражение, 114
- масштабированная норма, 86
- матрица Липшица интервальная,
116
- матрица абсолютно неособенная,
635
- матрица сопутствующая, 632
- метод Гаусса интервальный, 325
- метод Гаусса-Зейделя
интервальный, 337
- многогранная функция, 644
- многогранное множество, 229
- множества АЕ-решений, 175
- монотонная матрица, 97
- мультинтервальная
арифметика, 52
- надграфик, 644
- наклон функции, 120
- наклон функции интервальный,
122
- наклонная форма, 123
- нечетких множеств теория, 56
- неособенная интервальная
матрица, 88, 673
- неособенность сильная, 95
- непрерывность по Липшицу, 112

- нуль поля, 385
- оболочка интервальная, 75
- обратная интервальная матрица, 320
- оператор Хансена-Сенгупты, 363
- оператор Кравчика, 360
- оператор Ньютона интервальный, 355
- опорная функция, 642
- оптимальное решение, 197
- основная теорема интервальной арифметики, 25
- особая точка поля, 385
- отклонение интервала, 347
- отображение изотонное, 637
- отображение
 - порядково-выпуклое, 640
- отрицательная часть интервала, 648
- погружение, 625
- положительная часть интервала, 648
- положительно-обратимая матрица, 97
- построчная согласованность, 638
- предобуславливание, 343
- принцип вложенных интервалов, 48
- процедура Хансена-Блика-Рона, 349
- продолжение интервальное, 110
- производная односторонняя, 642
- расстояние между интервалами, 47
- расщепление оператора, 674
- разложимая функция, 119
- сегментные арифметики, 53
- спектральный радиус, 86
- стандартное погружение, 629
- субдифференциал, 641
- субдистрибутивность, 28
- теорема Алефельда, 326
- теорема Барта-Нудинга, 341
- теорема Куттлера, 99
- теорема Перрона-Фробениуса, 87
- теорема Рона, 266
- теорема Шрёдера, 88
- тест средней системы, 272
- топологическая степень, 390
- уравнение в дуализациях, 575
- выделяющий предикат, 162
- вращение векторного поля, 388
- задача удовлетворения
 - ограничениям, 169
- задача вычислительно-корректная, 380
- H -матрица, 101
- M -матрица, 97
- M -матрица интервальная, 99
- P -сжатие, 87