Калининградский государственный университет

С. В. Мациевский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА

ИГРЫ

Учебное пособие

Издательство
Калининградского государственного университета
2003

УДК 51(075)
ББК 22.11я73
М 367

Рецензент:
доцент кафедры высшей математики КГТУ
канд. физ.-мат. наук А. А. Юрова

Утверждено учебно-методической комиссией математического факультета.

Мациевский С. В.
М 367 Математическая культура. Игры: Учебное пособие.— Калининград: Изд-во КГУ, 2003.— 120 с., ил.
ISBN 5-88874-451-4.

Даны подробные описания и другие начальные сведения о наиболее интересных и актуальных логических и компьютерных играх и головоломках: магических квадратах, крестиках-ноликах, игре Жизнь, полиформах (пентамино), танграмах, игре Футбол, лабиринтах, задачах Бонгарда и оригами.

Изложение сопровождается историческими, занимательными и другими сведениями и веб-ссылками, а также множеством рисунков.

Имеется аннотированный список литературы.

Книжку можно использовать не только в вузах или в школе для обучения, но также для самообразования и в качестве справочника.

ISBN 5-88874-451-4

Оглавление

— Тогда нам остается еще одна игра.

— Какая?

— Самая простая,— сказал я.— Она называется скука. Никаких тебе правил, игральных досок или фигур.

— А как в нее играют? — поинтересовалась Аманда.

— Скука — это отсутствие любых игр.

Доналд Бартелли.
Запретные удовольствия

Человеческая культура возникает и развертывается в игре, как игра.

Всякая игра есть прежде всего и в первую голову *свободная деятельность*.

Йохан Хейзинга.
Homo Ludens

Предисловие

Это издание отличается от изданий с аналогичным названием тем, что математический материал адаптирован для чтения в том числе и теми людьми, которые не интересовались, не интересуются и, может быть, не будут интересоваться математикой, но тем не менее закончили российскую среднюю школу по стандартной учебной программе.

Такая специфика оформилась в следующих принципах изложения:

1) подробно разбирается все, что, по мнению автора, можно разобрать, не зарываясь очень глубоко;

2) исключены сколько-нибудь сложные конструкции. Автор считает, что конструкция сложна для восприятия, когда для ее понимания нужно удерживать в голове слишком много деталей;

3) математическая информация охвачена как можно шире для такого маленького издания. Используются многочисленные связи между областями, включая нестандартные для подобного рода изданий разделы, историю математики и занимательную математику;

4) сделана попытка привлечь и систематизировать описание компьютерных разработок и публикаций в Интернете.

Патриарх современной занимательной математики и энциклопедист Мартин Гарднер в одной из своих книг высказался, что «подобно другим естественным наукам математика представляет собой игру, в которую мы играем с окружающим миром, со Вселенной. Самые лучшие математики и самые хорошие преподаватели — это, очевидно, люди, которые прекрасно разбираются в ее правилах, а также получают удовольствие от самого процесса игры».

Классик искусственного интеллекта Нильс Нильссон в своем известном учебнике «Методы решения задач в теории искусственного интеллекта» заметил, что «загадки и игры — богатейший источник стандартных примеров, которые можно использовать для иллюстрации и проверки эффективности тех или иных методов решения». Там же он приводит следующие слова писателя-фантаста и математика, специалиста в области ИИ и создателя теории фреймов Марвина Мински: «Мы выбираем игры и математические задачи не потому, что они представляются нам очевидными и простыми; скорее всего, дело в том, что они обеспечивают нам максимальную сложность при минимальной исходной структуре…».

Автор не ставил себе цель как-то классифицировать всю современную математическую культуру или хотя бы только игры (слова «шахматы» и «шашки», например, присутствуют только в качестве определений и дополнений). Если материал и принял в какой-то степени последовательную и связную форму, то это заслуга исключительно субъективных ощущений автора, выработанных жизненными обстоятельствами, возникших под влиянием различных очных или заочных встреч автора с разными людьми и студентами.

При наличии нелюбви к словесным выступлениям контроль усвояемости материала рекомендуется проводить следующим образом:

1) теоретический материал студентами просто переписывается (либо на лекции, либо из книжки, либо у тех, кто переписал на лекции или из книжки, либо — нежелательный случай — у тех, кто переписал у тех, кто переписал на лекции или из книжки);

2) задачи могут также просто переписываться (либо у тех, кто действительно самостоятельно решил задачу, либо — что нежелательно — у тех, кто переписал у тех, кто решил задачу);

3) рисунки (заменяющие формулы) аккуратно перерисовываются;

4) неудовлетворительные результаты переделываются (текст переоформляется, задачи перерешиваются, рисунки перерисовываются).

Несмотря на то, что рассмотренный материал сам по себе может быть любопытен, самое интересное, безусловно, находится в цитируемой литературе.

Это издание выросло из третьей главы «Факультативные занятия» учебного пособия [Мациевский]. При этом параграфы «Полимино», «Крестики-нолики» и «Игра Жизнь» были значительно переработаны и дополнены, а параграф «Морской бой» — исключен. Совсем новыми вставками являются материалы по картам, игре Футбол, танграмам, лабиринтам, задачам Бонгарда и оригами. Даны также исторические и некоторые другие сведения по изучаемым темам.

Если первое издание «Математической культуры» [Мациевский] можно отнести лишь к разряду тезисов, в которых только намечены основные направления, то настоящее издание переросло в серию, уже содержащую основной материал, правда, нуждающийся в дальнейшем развитии.

К заслугам автора также можно отнести следующие немногочисленные и, возможно, сомнительные результаты.

1. Подбор, проверку, адаптацию и оформление материала.
2. Классификацию простейших конфигураций игры Жизнь.
3. Описание редкой игры Футбол.
4. Изучение всех взаимосвязей классической серии оригами.

Автор по-прежнему глубоко благодарен многим сотрудникам Калининградского госуниверситета за проявленное внимание к деятельности автора, критику и поддержку. Не остаются в стороне и студенты гуманитарных направлений: всегда находятся 2—3 человека, проявляющие выраженный интерес на аудиторных занятиях, еще столько же человек следят за ошибками на доске, и еще столько же энтузиастов проявляет инициативу дома и приносит некоторые решенные задачи и другие замечания.

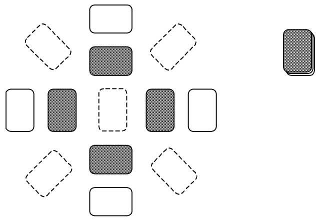
Дополнения и исключения из учебника принимаются по адресу автора matsievsky@newmail.ru.

Предметный указатель, помещенный в конце книги, составлен А. И. Хан.

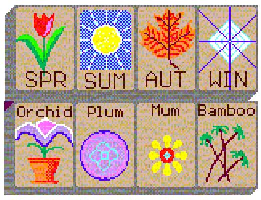
Введение. Карты

Задачи

Пасьянсы



Ма-джонг



Фокусы

Материал Введения можно найти в следующих изданиях.

[Гарднер 1] Глава 10. Математические фокусы с картами.
[Гарднер 1] Глава 30. Индуктивная игра элузис.
[Гарднер 4] Глава 19. Математические фокусы с картами.
[Гарднер 5] Глава 6. Комбинаторные задачи с картами.
[Гарднер 6] Глава 1. Математические фокусы с картами.
[Карты]
Константинов Н. Математические пасьянсы. Пасьянсы // Наука и жизнь.— 1966—1994.
http://ln.ua/~kostenko/tarotfig.html.ru
http://flinx.lv/nocturnus/tarot
http://mahjong.ru

Три профессора едут в поезде по Шотландии. Из окна вагона профессора видят пасущуюся на склоне холма черную овцу.

— Как интересно! — замечает филолог.— Все овцы в Шотландии черные.

— Совершенно необоснованный вывод,— возражает ему физик.— Мы можем лишь заключить, что некоторые овцы в Шотландии черные.

— Ваше утверждение нуждается в уточнении,— вступает в беседу математик.— Мы вправе лишь утверждать, что по крайней мере одна овца в Шотландии черная с одной стороны.

Анекдот

§ 1. Задачи

Карты чрезвычайно удобны: занимают минимальное место, имеют две стороны, легко тасуются, просто раскладываются. Кто не играл в детстве в карты с бабушкой? Несомненно, карты — самая народная игра из всех игр. Прежде чем заниматься задачами, разберемся, что же такое игральные карты.

1.1. Определение

Определение 1. Игральные карты.

Игральная карта, или просто карта, или лист — прямоугольная карточка с закругленными краями, на одной стороне которой нарисована оригинальная картинка, а на другой — фоновый рисунок.

Колода карт — набор из всех карт.

Сторона карты с фоновым рисунком называется ***рубашкой, или крапом, или оборотной стороной карты***, с картинкой — ***лицевой стороной, или картинкой***.

Закрытая карта — карта, положенная рубашкой вверх, ***открытая*** — рубашкой вниз. ***Открыть, или вскрыть, или***

показать карту — перевернуть ее из состояния рубашкой вверх в состояние рубашкой вниз.

Масть карты — один из четырех видов карт, представленных в табл. 1: ***бубны***, ***червы***, ***пики, или вини*** и ***трефы, или крести***.

Красные масти бубны и червы имеют красный цвет, ***черные масти*** пики и трефы имеют черный цвет.

Табл.1. Масти

Название	Красные масти		Черные масти	
	Бубны Diamonds	Червы Hearts	Пики, или вини Spades	Трефы, или крести Clubs
Обозначение	♦ Б D	♥ Ч H	♠ П S	♣ Т C

Карты называются по виду картинок, на них изображенной. ***Джокер*** — это карта без масти и номера, которая может заменять в игре любую другую карту, кроме джокера.

Карта красной масти — бубна или черва, ***черной*** — пика или трефа. ***Картинка, или фигура,***— валет, дама или король. Карты упорядочены по ***старшинству***, порядок которого соответствует номеру карты, т. е. ее ***достоинству, или значению, или номиналу***, из табл. 2.

Итак, максимальное количество карт $4 \times 13 = 52$. ***Полной колодой*** называется комплект из всех 52 карт. В полную колоду входят также 2 джокера. Фабрики кладут в полную колоду 2 запасные карты.

Неполная колода — колода из 36 листов без двоек, троек, четверок и пятерок. ***Преферансная, или пикетная, или малая, колода*** — неполная колода без шестерок, состоящая из 32 листов (ее название произошло от названий карточных игр *преферанс* и *пикет*). ***Пасьянсная колода*** имеет листы меньшего размера и состоит из 104 карт.

Карты — это миниатюрные произведения искусства, их рисунки и дизайн создают художники. На рис. 1 показаны некоторые бубновые *атласные карты* классической русской неполной колоды.

Рис. 1. Некоторые бубновые *атласные карты* (автор неизвестен)

Табл. 2. Карты

№	Обозначение		Название	
	русское	английское	русское	английское
1	А	A	***Туз***	Ace
2	2	2	***Двойка***	Two
3	3	3	***Тройка***	Three
4	4	4	***Четверка***	Four
5	5	5	***Пятерка***	Five
6	6	6	***Шестерка***	Six
7	7	7	***Семерка***	Seven
8	8	8	***Восьмерка***	Eight
9	9	9	***Девятка***	Nine
10	10	10	***Десятка***	Ten
11	В	J	***Валет***	Knave
12	Д	Q	***Дама***	Queen
13	К	K	***Король***	King
Без номера	Дж	Joker	Джокер	Joker

Тасование, или перемешивание, колоды — расположение карт колоды в случайном порядке, при этом карты расположены рубашкой в одну сторону. Карты ***снимают*** с колоды, держа ее в руках рубашкой вверх; нижнюю карту не показывают.

Снятие колоды — разъединение колоды на две пачки и снова их соединение в одну колоду путем укладки нижней пачки на верхнюю.

Национальные русские игры *Дурак* и *Козел* (карточный, а не доминошный) играются неполной колодой, имеющей карты от шестерок до тузов, самой дешевой и распространенной в России.

Та же самая неполная колода используется для народных карточных гаданий, также широко распространенных в России.

Рассмотрим две из трех необычных комбинаторных задач с картами, которые предложены в одной из книг Мартина Гарднера.

1.2. Задача Силвермана

Эту задачу изобрел Дэвид Л. Силверман.

Задача 1. Задача Силвермана.

Извлеките из полной колоды все карты червовой и пиковой масти. Разложите червы в ряд слева направо от туза (значение 1) до короля (значение 13). Под каждой картой червовой масти положите карту пиковой масти так, чтобы сумма значений пары карт, верхней и нижней, была равна квадрату какого-нибудь целого числа. Докажите, что задача допускает единственное решение.

Решение задачи 1. Задача Силвермана.

Прежде всего заметим, что под червовой девяткой можно положить только одну карту, чтобы сумма их значений равнялась полному квадрату,— пиковую семерку.

Совершенно аналогично пиковую девятку можно положить только под червовой семеркой.

Точно также под червовыми десяткой, валетом, дамой и королем можно положить только пиковые шестерку, пятерку, четверку и тройку соответственно, а пиковые десятку, валета, даму и короля можно положить только под червовыми шестеркой, пятеркой, четверкой и тройкой соответственно (см. рис. 2).

Остались непристроенными 6 карт: тузы, двойки и восьмерки обеих мастей. Очевидно, что под червовым тузом можно положить только пиковую восьмерку, а под червовой двойкой — только пиковую двойку. Третья пара получается автоматически из двух оставшихся карт. Получаем единственное решение задачи, изображенное на рис. 2.

ЧА	Ч2	Ч3	Ч4	Ч5	Ч6	Ч7	Ч8	Ч9	Ч10	ЧВ	ЧД	ЧК
П8	П2	ПК	ПД	ПВ	П10	П9	ПА	П7	П6	П5	П4	П3

Рис. 2. Единственное решение задачи Силвермана:
суммы значений пар карт, верхних и нижних, дают полные квадраты

1.3. Задача Рансома

А эту задачу сообщил Мартину Гарднеру канадский фокусник-любитель и собиратель головоломок Том Рансом.

Задача 2. Задача Рансома.

Пять карт расположены в ряд так, как показано на рис. 3. Рубашки всех карт либо полосатые, либо клетчатые. Все ли карты с клетчатыми рубашками джокеры?

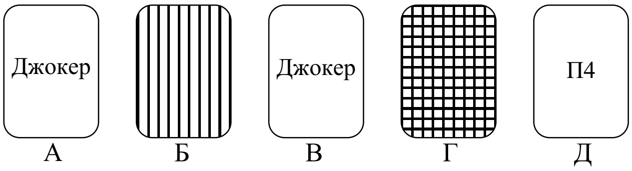


Рис. 3. Задача Рансома:
все ли карты с клетчатыми рубашками джокеры?

Задача состоит не в том, чтобы ответить на этот вопрос,— требуется определить все карты, которые может потребоваться перевернуть во всех мыслимых вариантах, чтобы ответить на этот вопрос.

Решение задачи 2. Задача Рансома.

Карту Г необходимо перевернуть, чтобы узнать, джокер она или нет. Если это не джокер, то ответ на вопрос «Все ли карты с клетчатыми рубашками джокеры» отрицательный, и больше карт переворачивать не нужно.

Если карта Г джокер, то в этом случае необходимо перевернуть карту Д, чтобы узнать, какая у нее рубашка. Если клетчатая, то ответ на вопрос задачи отрицательный.

Если карта Г — джокер, а карта Д с полосатой рубашкой, то ответ на вопрос задачи положительный, поскольку карты А, Б и В переворачивать не нужно. Карта Б имеет полосатую рубашку, а *вид рубашки джокера на ответ на вопрос задачи не влияет*.

Кажется, что для ответа на вопрос задачи достаточно перевернуть две карты Г и Д. Но это не так! Вспомним анекдот о трех профессорах из эпиграфа к параграфу. Стоит кому-нибудь подумать, будто ему удалось решить задачу, как Рансом переворачивает карту Б и показывает, что у нее клетчатая рубашка! Это, конечно, приводит к отрицательному ответу на вопрос «Все ли карты с клетчатой рубашки джокеры?». Таким образом, правильное решение гласит:

чтобы ответить на вопрос задачи, в худшем случае необходимо переваернуть три карты: Б, Г и Д.

§ 2. Пасьянсы

Определение 2. Пасьянс.

Пасьянс (от французского patience — терпение) — раскладывание карт по заданным правилам для получения заданного результата.

Фигура пасьянса — расположение всех карт при полностью разложенном пасьянсе.

Родина пасьянсов — Франция. Пасьянс ведет свое начало от гадания. Пасьянсы известны с XVII века. Большими любителями этого развлечения были Мария Антуанетта и мадам Рекамье. Академик И. П. Павлов занимался раскладкой пасьянсов, чтобы «настроить» свою нервную систему. Увлекались пасьянсом Л. Н. Толстой, И. А. Бунин, П. И. Чайковский, И. Ф. Стравинский и др.

Наибольшим интересом пользовались пасьянсы, как ни странно, в таких разных по социальному положению кругах, как великосветское общество и заключенные в тюрьмах.

Малые пасьянсы широко распространены. Например *Косынка, или Мария Стюарт, или Клондайк, или Король Альберт*, известная и в компьютерных вариантах. Чрезвычайно многообразны *триады* — пасьянсы, раскладываемые сериями по 3 карты.

2.1. Каре 3 × 3

Из полной колоды отбирают 8 карт одной масти (например, бубновой) от туза до девятки, исключая пятерку. Перетасовав их, выкладывают картинкой вверх в рамку 3 × 3.

Требуется упорядочить расположение карт — на рис. 4 показан конечный результат. Карты перекладываются парами ходом шахматного коня. Например, на рис. 4 можно поменять местами двойку и девятку, двойку и семерку и т. д. Пасьянс всегда сходится.

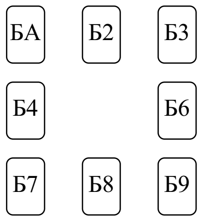


Рис. 4. Каре 3 × 3

Задача 3. Пасьянс Каре 3 × 3.

Пусть исходная позиция изображена на рис. 4. Какое минимально возможное количество ходов необходимо сделать, чтобы поменять местами карты Б8 и Б9? Тот же вопрос для карт БА и Б9.

2.2. Узник

По легенде, пасьянс раскладывал в тюрьме узник, но у него он так и не сошелся. В действительности пасьянс сходится довольно часто. При желании его можно разместить на небольшой площади.

Из тасованной неполной колоды в 36 листов выкладывают 9 карт картинкой вверх. Далее под ними выкладывают следующие 3 карты картинкой верх. Если в первом ряду встречаются карты того же достоинства, что и *средняя* (и только средняя) карта во втором ряду, то эти карты из первого ряда снимают и кладут на эту среднюю (рис. 5).

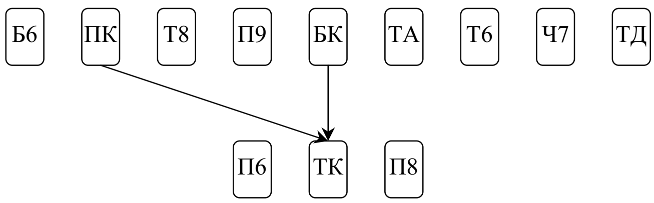


Рис. 5. Узник

Затем на карты второго ряда выкладывают следующие 3 карты из колоды, и на среднюю снова собирают все карты такого же достоинства из первого ряда, если они есть. Так раскладывают всю колоду — 9 раз по 3 карты.

Пасьянс вышел, если сняты все 9 карт первого ряда.

2.3. Ручеек

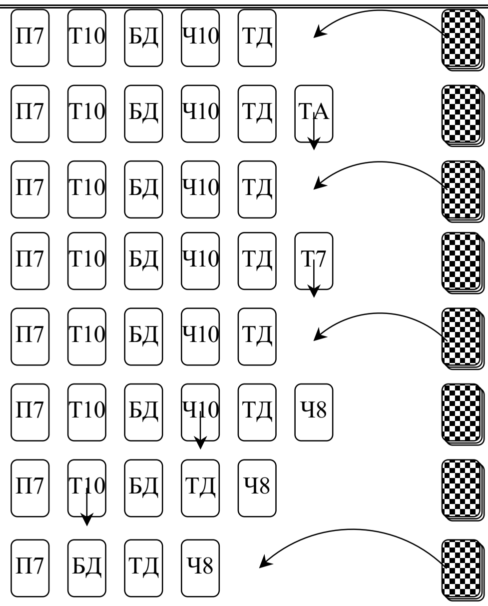
Этот пасьянс требует еще бóльшего внимания. Кстати, у автора он так никогда и не сошелся, и не от недостатка внимания. Возможно, чем больше колода, тем легче сходится пасьянс. Однако никакие сведения о вероятности сходимости пасьянса автору не известны.

Из любой тасованной колоды выкладываются карты в ряд по одной слева направо картинкой вверх. Значение имеет только масть карт. При выкладывании очередной карты проверяют два правила. снятия карт.

А. Если масть новой карты совпадает с мастью последней карты в ряду, то эта карта снимается.

Б. Если масть новой карты совпадает с мастью карты, лежащей через одну, то снимается карта слева, и конец ряда сдвигается влево. Если после этого масть карты, лежащей слева от новой, стала совпадать с мастью карты, лежащей через одну, то эта самая левая карта также снимается. И т. д., пока совпадение мастей через одну и снятие левых карт не закончится,— получается «ручеек».

Рис. 6. Фрагмент раскладки Ручейка.
Показаны последовательные шаги выкладывания ряда



Из оставшихся карт выкладывается второй ряд, причем первая карта второго ряда берется слева первого, вторая — справа, третья — снова слева и т. д. Из второго ряда карты снимаются по тем же правилам. Это второй тур. Допускается также третий тур.

Пасьянс сошелся, если останется 4 карты — по 1 карте каждой масти.

2.4. Колодец

Определение 3. Гранд-пасьянс.

Гранд-пасьянс — сложный пасьянс, раскладываемый из большого количества листов и требующий огромного внимания.

Гранд-пасьянсы бывают двух типов. К первому относятся логические задачи-головоломки, которые по своим комбинационным возможностям не уступают шахматным задачам-многоходовкам. Хороший пример — серия пасьянсов *Паганини*. По преданию, великий музыкант Никколо Паганини очень любил его раскладывать. Также это было любимое развлечение магната Адама Потоцкого.

Второй тип гранд-пасьянсов — вероятностные пасьянсы из большого количества карт, которые требуют исключительного внимания и умения сосредоточиться. Рассмотрим такой пасьянс.

Пасьянс *Колодец* — один из самых известных старинных классических гранд-пасьянсов (и достаточно компактный в раскладке). Он известен также под названием *Гробница Наполеона*. Опишем один из его вариантов.

1. Две полные колоды карт (104 листа) соединяют и тщательно перетасовывают. Отсчитывая сверху, выкладывают 4 закрытые (картинками вниз) стопки по 11 карт в каждой, как на рис. 7. Это «стены колодца» — северная, южная, восточная и западная. Остальные 60 карт остаются пока закрытыми в резерве (на рис. 7 справа).

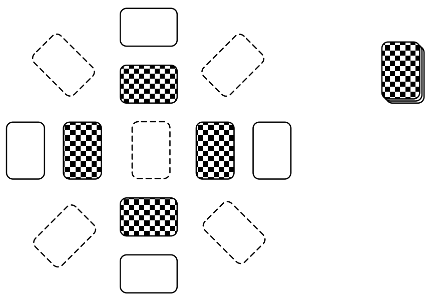


Рис. 7. Полная фигура гранд-пасьянса Колодец

2. Верхнюю карту с каждой «стены» снимают и кладут картинкой вверх рядом, снаружи от «стены». Это «пристенные» карты.
3. Верхнюю карту каждой «стены» переворачиваем картинкой вверх и оставляем на «стене».
4. Теперь в раскладке имеются 8 открытых карт. Если среди них есть короли разных мастей, изымаем их и кладем картинкой вверх наискосок у «стен» в направлениях северо-восток, северо-запад, юго-восток и юго-запад (см. рис. 7). Выложенные наискосок короли должны быть обязательно разных мастей. Это базовые карты «колонн».
5. Если среди открытых карт имеются тузы, то один из них кладется в центр «колодца» (см. рис. 7).

6. Место переложенных карт занимают поочередно открываемые верхние карты «стен».

7. Цель пасьянса-головоломки — собрать на базовые карты «колонн» — на королей — все 104 карты в масть в нисходящем порядке: К, Д, В, 10, …, 3, 2, А, К, Д, В, 10, …, 3, 2, А — все карты одной масти.

Заключительная фигура вышедшего пасьянса — 4 «колонны» по 26 карт одной масти в каждой.

Теперь рассмотрим правила перекладки.

8. «Строительными кирпичами» для «колонн» служат постепенно разбираемые «стены», «пристенный материал», запас, хранящийся в «колодце», а затем и резерв. Верхние открытые карты «стен», а также верхние открытые «пристенные карты» можно перекладывать:

а) на базовые карты в масть в *нисходящем* порядке;

б) на центрального туза в масть в *восходящем* порядке;

в) на «пристенные карты» в масть в *восходящем* порядке.

9. «Стены» «достраивать» нельзя, т. е. на открытые карты стен карты класть нельзя.

10. В центр «колодца» карты можно перемещать и сериями. Например, если там верхняя карта П3, а у восточной «стены» одна на другой лежат карты П4, П5, П6, П7, П8, где П8 — верхняя карта, то всю серию из 5 карт можно перенести на карту П3 в «колодце», на освободившееся место у восточной «стены» положить верхнюю карту этой «стены» и открыть следующую карту на «стене».

11. Карты из центра «колодца» можно перекладывать только на базовые. Освободившееся место в «колодце» можно занять следующим тузом и снова использовать «колодец» как временное хранилище.

12. Когда возможности перекладок выложенных 44 карт «стен» будут исчерпаны, пускают в ход 60 карт резерва. Как правило, фигура пасьянса к этому времени недостроена: не во всех углах лежат короли (а то и ни одного еще нет), может не быть и туза в «колодце».

Осталось привести правила просмотра резерва.

13. Из резерва — колоды в 60 карт — сверху по одной выкладываем в ряд слева направо 5 карт картинкой вверх. Эти карты можно, согласно правилам, пристроить на базовые карты, на «пристенные» карты или в центр «колодца». При этом следует

помнить, что игровыми картами являются также верхние карты «стен», «пристенного материала» и центра «колодца».

14. Исчерпав возможности перекладки или решив больше ничего не перекладывать, выкладывают из резервной колоды следующие 5 карт слева направо сверху на первые 5 карт — или места, которые они занимали до перекладки. Игровые карты — только верхние, перекладывать можно только их (при снятии верхних игровыми — верхними — становятся следующие).

15. Резервную колоду раскладывают по 5 карт, пока она не будет исчерпана.

16. В результате раскладывания всей резервной колоды получают 5 стопок открытых карт, в каждой из которых количество карт может быть разное — от 0 до 12. Затем их собирают в одну колоду: на пятую стопку картинкой вверх кладут четвертую, следом третью и т. д., переворачивают эту колоду рубашкой вверх и, *не тасуя*, сверху по одной выкладывают в ряд слева направо 4 карты картинкой вверх.

17. Далее поступают так, как изложено в пп. 13—15, но уже для ряда не из 5, а из 4 карт.

18. По тем же канонам формируем ряд из 3, 2 и, наконец, 1 карты.

19. Если и при раскладке карт резервной колоды не удалось все 104 карты собрать на базовые карты, то пасьянс не вышел.

2.5. Зеваки

Пасьянсы для двоих — самые редкие. С пасьянсом-соревнованием Зеваки редакцию журнала «Наука и жизнь» познакомил писатель Осип Мартынович Бескин. По его словам, этот пасьянс любил раскладывать Владимир Владимирович Маяковский.

В раскладке пасьянса Зеваки участвуют двое. У каждого партнера по полной тасованной колоде в 52 листа. Задача каждого — как можно скорее разложить свою колоду и помешать другому избавиться от своих карт. Успех в большой степени зависит от внимательности участника.

Таким образом, Зеваки — отличное средство тренировки внимания.

Для описания пасьянса ведем следующие обозначения.

Пусть один игрок называется *а*, другой — *б*.

Для партнера *а*:

ра — ряд *а*;

рта — ряд тузов *а*;

ча — чемодан *а*;
ка — закрытая колода *а*;
ока — открытая колода *а*.
Для партнера *б* обозначения те же, но с индексом *б* вместо *а*.
Фигура пасьянса изображена на рис. 8.

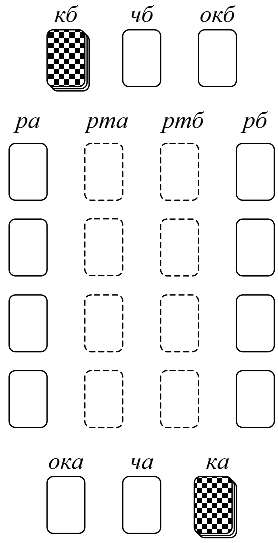


Рис. 8. Полная фигура пасьянса-соревнования Зеваки

1. Партнер *а* отсчитывает из своей закрытой колоды *ка* 13 закрытых карт и кладет их на стол — это будет его чемодан *ча*. Верхняя карта чемодана сразу открывается.

2. Затем партнер *а* из колоды *ка* снимает по одной 4 карты и выкладывает их одну под другой картинкой вверх в свой ряд *ра* (см. рис. 8). При этом тузы, попадающиеся в *ка*, он сразу выкладывает в ряд тузов *рта*.

3. Далее партнер *а* раскладывает пасьянс согласно общим правилам 6—13, за исключением того, что в ряд противника *рб* карты класть он не может..

4. Партнер *б* после передачи ему хода из карт своей закрытой колоды *кб* тоже укладывает чемодан *чб* из 13 карт и кладет 4 карты в ряд *рб*, а тузы — в ряд *ртб*.

5. Затем игра наконец проходит по следующим постоянным правилам 6—13.

6. В закрытой колоде разрешается подсматривать верхнюю карту.

7. В рядах тузов карты собирают в масть в восходящем порядке (на бубнового туза кладут бубновую двойку, тройку и т. д. до короля). Из ряда тузов карты брать уже нельзя.

8. На карты рядов *ра* и *рб* карты кладут в масть в нисходящем порядке (на десятку — девятку той же масти, на девятку — восьмерку и т. д.) из следующих мест: рядов *ра* и *рб*; своего чемодана; своих открытой и закрытой колод.

9. На открытые карты партнера — на его открытую колоду и чемодан — другой партнер может класть карты из следующих мест: рядов *ра* и *рб*; своего чемодана; своих открытой и закрытой колод. Причем это делается в масть как в восходящем, так и в нисходящем порядке (на бубновую десятку можно положить бубнового валета, на валета — снова бубновую десятку, на нее — девятку бубен и т. д.). Естественно, что эти ходы наиболее выгодны, так как они увеличивают количество карт у противника.

10. После того, как израсходованы чемодан и закрытая колода, а открытая колода осталась, причем ее верхнюю карту нельзя никуда пристроить, переворачивают открытую колоду, превращая ее тем самым в закрытую, и продолжают выкладку пасьянса.

11. На свободные места рядов *ра* и *рб* можно класть карты из следующих мест: рядов *ра* и *рб*; своего чемодана; своей закрытой колоды. Из открытой колоды — нельзя.

12. Перекладывать карты из рядов *ра* и *рб* себе на чемодан или на открытую колоду нельзя.

13. Ход партнера заканчивается перекладыванием верхней карты из закрытой колоды в открытую колоду. Обратно ходы не берутся, даже если партнер «зевнул».

Если партнер «зевнул», а в рядах остались свободные места, то противник, естественно, имеет право воспользоваться ими.

§ 3. Ма-джонг

Есть немногочисленная группа пасьянсов, которая в современное время распространена только на компьютерах. Связано это с тем, что они раскладываются не чисто случайным образом, путем тасования колоды. Эти пасьянсы разложены компьютером специальным образом так, чтобы их всегда можно было собрать. В программе обычно заложено несколько десятков тысяч «номерных» вариантов, имеющих свой оригинальный номер. Их сборка напоминает прохождение лабиринта без плана, который вырисовывается по мере прохождения.

Такие компьютерные пасьянсы часто состоят из обычных карт (и входят в стандартную поставку Windows). Но здесь будут рассмотрены пасьянсы из так называемых китайских карт-домино. Компьютерный вариант таких карт установлен на palm-компьютерах.

Китайские карты прозвали «домино» наверно потому, что они не картонные, а костяные или пластмассовые, причем гораздо меньшего размера.

Определение 4. Ма-джонг.

Китайская карта, или плитка маджонг — небольшая толстая квадратная или прямоугольная кость с рисунком с одной стороны.

Ма-джонг — игра в китайские карты, заключающаяся в перекладывании заранее выложенных плиток.

Приведем типичный набор плиток с рисунками, адаптированными для западной цивилизации, взятыми из старой простейшей версии компьютерной игры Mah Jongg.

Всего имеется 144 плитки с рисунками, большинство из которых повторяется на 4 плитках. (В сильно адаптированных вариантах всего 36 рисунков, все из которых повторяются на 4 плитках; тогда рисунки нумеруют цифрами от 0 до 9 и буквами от A до Z.)

В Ма-джонг имеются 3 ***масти***: ***бамбуки*** **(tiao)**, ***доты*** **(tung)** и ***символы*** **(wan)**. Каждая масть представлена 9 значениями от ***единицы*** до ***девятки***. Эти масти изображены на рис. 9. Каждый из этих 27 рисунков повторяется на 4 плитках.

Еще есть 4 ***ветра***: ***восточный***, ***южный***, ***западный*** и ***северный***, а также 3 ***дракона***: ***красный***, ***зеленый*** и ***белый***, изображенных на рис. 10. Каждый из этих 7 рисунков снова повторяются на 4 плитках.

Дополнительно используются 2 серии плиток: ***сезоны*** и ***цветы***, представленный каждый 4 разными рисунками, как показано на рис. 11. Каждый из этих рисунков имеется только на одной плитке.

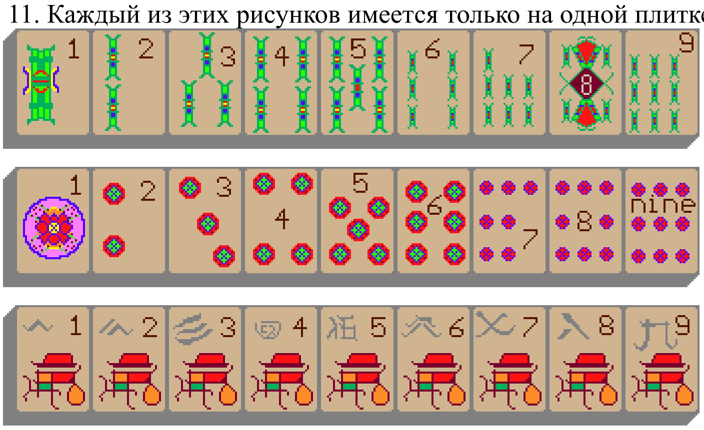


Рис. 9. Три масти Ма-джонга: бамбуки (tiao) — в верху; доты (tuhg) — в середине; символы (wan) — в низу

Рис. 10. Четыре ветра: восточный, южный, западный и северный — слева; три дракона: красный, зеленый и белый — справа

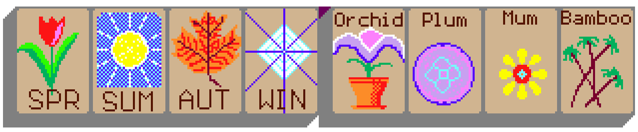


Рис. 11. Сезоны — слева и цветы — справа

Из плиток маджонг раскладывают пасьянсы. Также в Ма-джонг могут играть несколько человек, при этом побеждает тот, кто выложит определенную конструкцию из плиток.

Пасьянс заключается в разборке многослойной конструкции, сложенной из плиток маджонг. Снимаются только крайние плитки, причем парами: либо две одинаковые, либо любые два *сезона*, либо любые два *цветка*. Пасьянс сошелся, если сняты все плитки.

— Вы любите карточный фокусы?
— Терпеть не могу,— отвечал я.
— Ну уж один-то фокус я вам покажу.
Он показал мне три.
Сомерсет Моэм. Мистер Всезнайка

§ 4. Фокусы

Большинство карточных фокусов, если их показывает не профессионал, а любитель, невыносимо скучны. Но есть и другие карточные фокусы, для показа которых не требуется никакой ловкости рук.

Математические карточные фокусы основаны на математических принципах и являются, естественно, сплошным надувательством.

4.1. Принцип воды и вина

Зритель и фокусник садятся за стол друг против друга. Фокусник берет полную колоду из 52 карт, обращенных рубашкой вверх, быстро переворачивает 20 карт, затем тасует все карты и передает колоду зрителю. Зритель снова тщательно тасует колоду с 20 перевернутыми картами. Потом, опустив колоду под стол, чтобы никто не мог ее видеть, зритель отсчитывает 20 верхних карт и под столом передает их фокуснику.

«Ни вы, ни я не знаем,— говорит фокусник,— сколько перевернутых карт имеется среди тех 20, которые вы мне дали. Однако мне кажется, что их меньше, чем среди тех 32, которые остались у вас. Не глядя на карты, я переверну несколько карт и попытаюсь уровнять число перевернутых карт в моей части колоды и в вашей.»

Фокусник возится под столом, делая вид, будто пытается на ощупь определить у карт рубашку и картинку, и будто переворачивает карты. Затем обе стопки карт выкладываются на стол и пересчитывают перевернутые, т. е. открытые, карты. Их количество оказывается одинаковым в обеих стопках!

Этот замечательный трюк лучше всего объяснять на примере одной из самых старых математических головоломок. Возьмем два сосуда: в один из них налит литр воды, а в другой — литр вина. Один кубический сантиметр воды из первого сосуда переливают в сосуд с вином и тщательно перемешивают. Затем берут один кубический сантиметр смеси и переливают его обратно в сосуд с водой. Чего теперь больше: воды в вине или вина в воде?

Ответ: одинаково. Причем неважно, сколько жидкости в каждом из сосудов, сколько, куда и сколько раз переливаются жидкости, тщательно ли смесь перемешивается. Важно только то, что после всего объем жидкостей в сосудах становится прежним. В итоге нехватка вина в сосуде с вином будет равна количеству вина в сосуде с водой.

Возьмем теперь стопку из 32 закрытых и стопку из 20 открытых карт и будем перекладывать карты как угодно туда-сюда при одном условии: после всех перекладываний в одной из стопок должно получиться ровно 20 карт. Тогда после переворачивания любой стопки в обеих стопках окажется одинаковое количество открытых карт.

Теперь ясно, как получается фокус. Фокусник под столом просто переворачивает свою стопку из 20 карт и тянет время.

4.2. Принцип четности

Фокусник передает зрителю пачку карт, отобранных из колоды. Зритель под столом переворачивает верхние две карты, потом снимает пачку, снова переворачивает две верхние карты, снимает и т. д., сколько ему заблагорассудится. Затем зритель под столом передает пачку фокуснику. Тот возится с картами и говорит, сколько карт в пачке будет открыто. После этого пачка раскладывается на столе, и количество открытых карт оказывается правильным!

Объяснение. Для фокуса всегда берется четное количество карт. Под столом фокусник переворачивает половину карт (например, верхнюю половину пачки). После переворачивания количество открытых карт в пачке (как и закрытых) равно половине числа карт.

4.3. Принцип деления пополам

Для фокуса из колоды отбирается пачка любых карты в количестве 21. Из них зритель загадывает одну карту. Фокусник тасует карты и раскладывает их в 3 стопки по 7 карт, выкладывая карты аккуратно слева направо по 3 карты. Зритель показывает, в какой стопке находится загаданная карта. Фокусник собирает, не тасуя, три стопки вместе так, чтобы указанная зрителем стопка оказалась в середине.

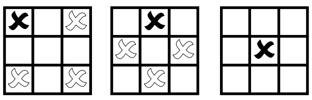
Не тасуя карты, фокусник еще два раза повторяет процедуру раскладывания карт по 3 стопкам и закладывания указанной стопки в середину. После этого он раскрывает карты веером и вынимает загаданную зрителем карту!

Объяснение. Загаданная карта перемещается в самый центр пачки из 21 карты и всегда будет 11 по счету с любой стороны.

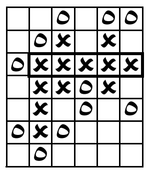
Глава 1. Крестики-нолики

> ”It's as simple as tit-tat-toe, three-in--a-row, and as easy as playing hooky.“
>
> — Это так же просто, как крестики--нолики, три-в-ряд, и так же легко, как прогулять уроки.
>
> *Марк Твен.*
> *Приключения Гекльберри Финна*

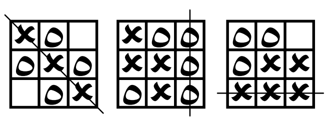
Классика



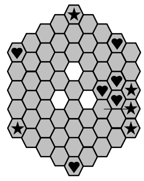
Бесконечное поле



Варианты



Распространение крестиков-ноликов



Крестики-нолики — воистину народная игра. Кто не играл в эту древнюю игру на уроках?

Эта игра упоминается у Овидия в книге III «Искусства любви» в числе тех игр, которыми поэт советует овладеть женщине, если она хочет привлечь к себе внимание мужчин в обществе.

В общем случае крестиками-ноликами называют игру на клетчатой доске фишками двух цветов, когда нужно выстроить в ряд фишки одного цвета.

Правила этой игры (от классических крестиков-ноликов до рэндзю и реверси и компьютерных вариаций) гораздо проще правил других логических игр и овладеть ими гораздо легче в дошкольном возрасте (автору известен случай игры дошкольника на компьютере в столбики на таком мастерском уровне, какого и близко не могут достичь взрослые). Однако по богатству комбинаций рэндзю не уступает шахматам (а го намного превосходит).

Материал первой главы можно найти в следующих изданиях.

[Гарднер 1] Глава 4. Крестики и нолики, или тик-так-тоу. Глава 39. Игры на шахматной доске.

[Гарднер 4] Глава 9. Крестики-нолики, или тик-так-тоу.

http://nosovsky.narod.ru/

Носовский А., Сокольский А. Рэндзю для начинающих.— Специальное издание, 2003.— RFB.pdf.— http://nosovsky.narod.ru/

§ 1. Классика

Рассмотрим классические крестики-нолики.

Определение 1. Крестики-нолики.

Крестики-нолики (классические), или тик-так-тоу,— это игра со следующими правилами:

1) играют на поле 3 × 3;
2) двое игроков ходят по очереди;
3) 1-й игрок ставит крестик на любом свободном поле, 2-й — нолик;
4) выигрывает тот, кто первым поставит в ряд 3 своих значка.

На поле 3 × 3 имеются 8 рядов из трех клеток: 3 по горизонтали, 3 по вертикали и 2 по диагонали (рис. 1). Если поле заполнено и никто не выиграл, то засчитывается ничья.

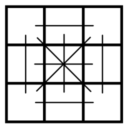


Рис. 1. Строки, столбцы и диагонали квадрата 3 × 3

1.1. Первый ход

Изучим вопрос, сколькими способами можно сделать первый ход.

Например, с точки зрения теории игры ходы, показанные на рис. 2, не различаются.

Рис. 2. Два разных первых хода, которые не различаются

Получается так потому, что квадратное поле 3 × 3 имеет 4 оси зеркальной симметрии (повороты рассматривать не будем): рис. 3.

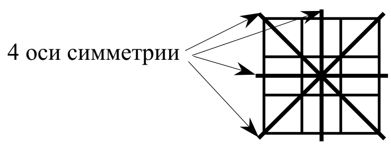


Рис. 3. 4 оси зеркальной симметрии квадрата 3 × 3

Как найти все ходы, которые не различаются? Поставим крестик на 1-м поле. Отразим поле относительно одной из осей симметрии. Потом получившееся поле отразим относительно другой оси симметрии, затем относительно третьей и, наконец, четвертой. Получим не различающиеся ходы для 1-го крестика.

Ставя крестики на оставшихся свободными полях и повторяя процедуру, получим 3 различающихся первых хода — см. рис. 4.

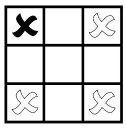
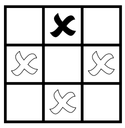
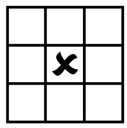
а)  б)  в) 

Рис. 4. 3 первых хода, которые различаются: а) *крестик в углу*; б) *крестик на стороне*; в) *крестик в центре*. В каждом случае показаны все крестики, которые не различаются

1.2. Второй ход

Итак, первый игрок может поставить крестик 3 различными способами: в угол, на сторону и в центр (рис. 4).

Возникает вопрос: сколько различных ответов у второго игрока в каждом случае? Например, с точки зрения теории игры ответы второго игрока, показанные на рис. 5, не различаются.

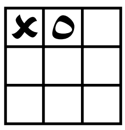
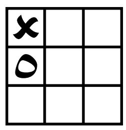
 

Рис. 5. Два разных вторых хода, которые не различаются

Получается так потому, что квадратное поле 3×3 после любого первого хода 1-го игрока сохраняет некоторую симметрию. Для каждого из 3 первых ходов оси симметрии показаны на рис. 6.

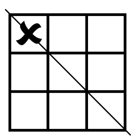
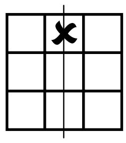
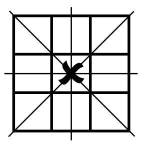
а)  б)  в) 

Рис. 6. Симметрии всех 3 первых ходов 1-го игрока: а)—б) при ходах в угол и на сторону остается 1 ось симметрии; в) при ходе в центр все 4 оси симметрии сохраняются

Применяя алгоритм из предыдущего раздела, получаем, что при первом ходе 1-го игрока в угол или на сторону второй игрок может ответить 5 различающимися способами, а при первом ходе 1-го игрока в центр — только двумя (см. рис. 7).

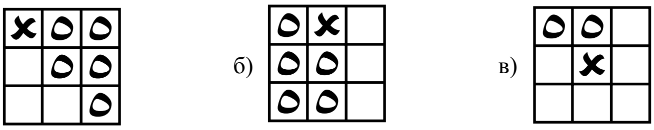
а)


Рис. 7. Все возможные *различные* ответы 2-го игрока на первый ход 1-го: а)—б) 5 ответов при ходе в угол или на сторону; в) 2 ответа при ходе в центр

Все первые ходы 1-го игрока равноценны в том смысле, что они не ведут к проигрышу 1-го игрока. Результат игры зависит от дальнейших ходов обоих игроков.

Но ответы 2-го игрока на первый ход 1-го игрока неравноценны. В каждом из 3 случаев некоторые ответы из приведенных ведут к немедленному *форсированному выигрышу* первого игрока (не путать с форсированным проигрышем!).

Определение 2. Форсированный выигрыш.

Форсированный выигрыш — правильные ходы одного из игроков, ведущие к его выигрышу *не зависимо* от ответов другого игрока.

1.3. Форсированный выигрыш

Задача 1. Форсированный выигрыш.

Доказать, что следующие 7 ответов 2-го игрока на первый ход 1-го игрока ведут к форсированному выигрышу 1-го игрока (рис. 8).

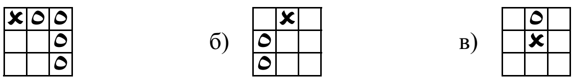
а)


Рис. 8. Ответы 2-го игрока, ведущие к форсированному выигрышу 1-го

Докажем это для первого хода 1-го игрока в центр. Для демонстрации нарисуем все 4 варианта развития событий (хотя для доказательства достаточно 1). Отметим, что 2-му игроку каждый раз приходится делать единственный ход, чтобы не проиграть на втором ходу. Но все равно это его не спасает: он проигрывает на третьем ходу.

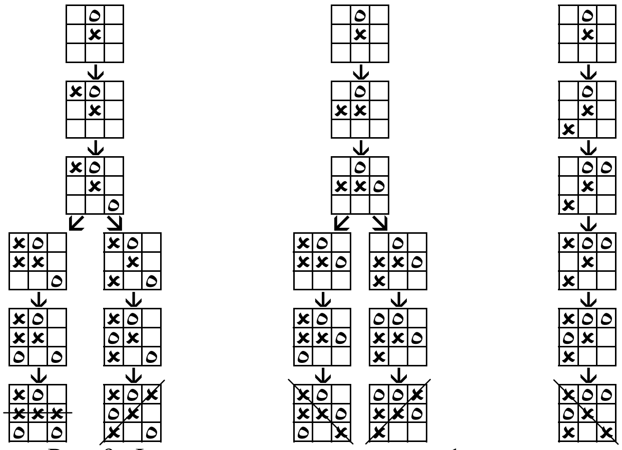


Рис. 9. Форсированные выигрыши 1-го игрока после его первого хода в центр и неправильного ответа 2-го игрока

Итак, первый ход 1-го игрока в угол самый эффективный: у второго игрока только 1 непроигрышный ответ из 8. Однако опытный второй игрок всегда походит правильно в центр.

С опытным вторым игроком лучше ходить на сторону. В этом случае получаются самые интересные и запутанные позиции. При недостатке опыта можно и ошибиться…

Для очень опытных игроков этот вариант игры становится не интересен: при правильной игре обоих игроков всегда будет ничья.

1.4. Оценочная функция

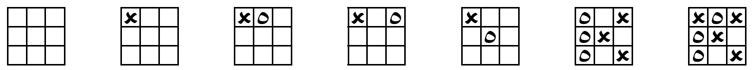
Как узнать, какой ход *не* ведет к проигрышу? Нужно просмотреть *все* ходы и *все* варианты ответа противника до конца игры. В крестиках-ноликах не так трудно нарисовать полное дерево всех вариантов, учитывая форсированные выигрыши.

Но не во всех играх можно рассмотреть все ходы. В боле сложных играх приходится как-то оценивать позицию и делать «наилучший» ход в этой оценке.

Определение 3. Оценочная функция.

Оценочная функция — алгоритм, по которому оценивается данная позиция и для каждого из возможных ходов выводится ***оценка*** — число, характеризующее силу хода.

Опишем на примере крестиков-ноликов одну из простейших оценочных функций. Припишем каждой позиции число x, равное разности возможных линий из крестиков и возможных линий из ноликов При наличии ряда из 3 крестиков (выигрыше крестиков) значение x пусть будет равно $+\infty$, ряда из 3 ноликов (выигрыш ноликов) — $-\infty$. Примеры см. на рис. 10. Понятно, что чем больше число, тем позиция лучше для крестиков, чем меньше — тем лучше для ноликов.



$x = 0 = 8 - 8$ $\quad x = 3 = 8 - 5$ $\quad x = 1 = 6 - 5$ $\quad x = 0 = 5 - 5$ $\quad x = -1 = 4 - 5$ $\quad x = -\infty$ $\quad x = +\infty$

Рис. 10. Оценка некоторых позиций

Однако оценка позиции после одного хода, при которой перебираются все варианты ходов с тем, чтобы выбрать ход с наилучшей оценкой, практически ничего не дает. Хороший результат получается, когда производится оценка позиций, начиная с возможных ответов противника на возможные ходы, т. е. при оценках второго порядка.

Оценим начальную позицию для крестиков с помощью оценок второго порядка (см. рис. 12).

1. При каждом из 3 ходов крестиков оценим позиции при всех возможных ходах ноликов.
2. В каждом случае выберем наилучший вариант (min всех оценок) для *ноликов* — это и будет оценка второго порядка.
3. Крестикам при своем первом ходе нужно выбрать ход с наилучшей (max всех оценок второго порядка) для *крестиков* оценкой второго порядка,— это и будет оценка первого хода (3-го порядка).

Другими словами, из лучших ходов для ноликов выбирается лучший для крестиков. Оценку второго порядка уже можно использовать в игре с некоторым успехом. По крайней мере, такая оценка позволяет избежать поражения на следующем ходу.

Задача 2. Оценка второго порядка.

Постройте оценку второго порядка для хода крестиков в позициях, изображенных на рис. 11.

Рис. 11. Позиции, в которой ходят крестики

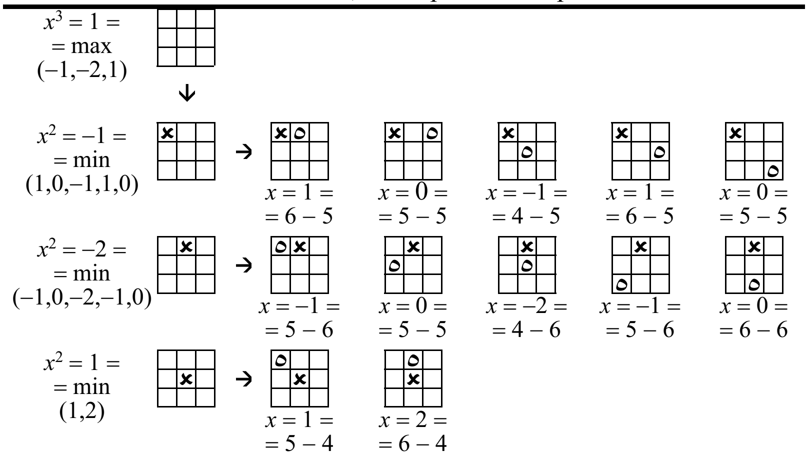


Рис. 12. Оценка хода крестиков по ответам ноликов

§ 2. Увеличенное поле

Классическим обобщением крестиков-ноликов является увеличение поля игры и увеличение количества значков, выставляемых в ряд.

2.1. Крестики-нолики, гомоку и рэндзю

Определение 4. Крестики-нолики на бесконечном поле.

Крестики-нолики на бесконечном поле отличаются от классических на поле 3×3 всего следующими двумя простыми правилами:

1) играют на бесконечном поле;

2) выигрывает тот, кто первым поставит в ряд 5 своих значков.

Конечно, выражение «бесконечное поле» весьма условно. На практике играют в тетради в клеточку, начиная с центра страницы. Страницы тетради вполне хватает на партию. И даже на несколько партий, размещенных в углах страницы…

Достаточно большие доски для крестиков-ноликов можно причислить к бесконечным. Крестики-нолики на доске 19×19 (или другого размера) называются *гомоку, или гобанг* (пять пунктов в ряд). В гомоку правила такие же простейшие, как и в крестиках-ноликах, но выстроить нужно уже 5 значков (или камешков, фишек) в ряд.

При правильной игре в гомоку у первого игрока всегда имеется преимущество первого хода, в принципе приводящее к победе, т. е. первый игрок всегда может выиграть. Поэтому спортивный вариант гомоку — *рэндзю* (нитка жемчуга) — играется на доске 15×15 и имеет *фолы* — запрещенные ходы первого игрока. Например, первому игроку разрешается делать *вилку* 3×3 только под угрозой того, что второй игрок следующим ходом поставит ряд из 5 или более ноликов.

2.2. Вилка

Если игрок выстроит 4 значка в ряд, свободный с обоих концов, то он форсированно выигрывает. Поэтому чаще всего выигрывают вилкой.

Определение 5. Вилка.

Вилка 3×3 — создание очередным ходом двух рядов по три одинаковых значка, открытых с обеих сторон.

Задача 3а—г. Вилка 3 × 3.

Крестики ходят и выигрывают (рис. 13).

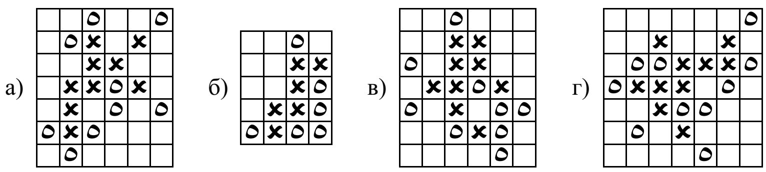
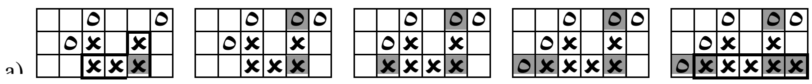
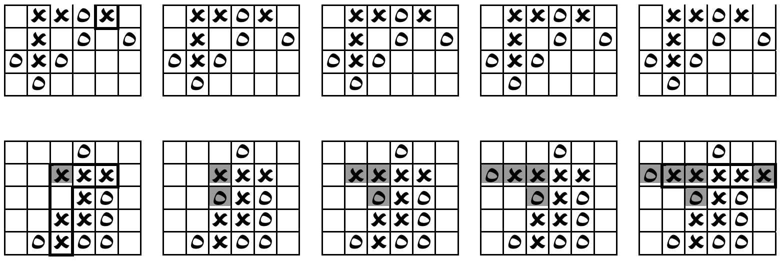


Рис. 13. Крестики первым ходом выигрывают вилкой 3×3

Решение задачи 3а—б. Вилка 3 × 3.





б)

Рис. 14. Выигрыши крестиков вилкой 3 ×

§ 3. Варианты

Вернемся от сложных вопросов бесконечных крестиков-ноликов обратно к полю 3×3. Здесь есть достаточно нетривиальные варианты игры, к которым, несмотря на их простоту, непросто привыкнуть.

3.1. Поддавки

Определение 6. Поддавки.

Поддавки, или тоу-так-тик, или мизер,— это вариант крестиков-ноликов, в которых игрок проигрывает тогда, когда он выигрывает в нормальных крестиках-ноликах.

Поддавки с одной стороны по сложности такие же, как и нормальные крестики-нолики, поскольку при правильной игре обоим игрокам гарантирована ничья. С другой стороны, поддавки сложнее: нужно перестраиваться на то, чтобы заставить противника построить ряд из его трех значков, а преимущество не у первого игрока, а у второго — первый игрок ставит на один крестик больше, чем второй ноликов. Однако с третьей стороны поддавки проще, т. к. у первого игрока всего один ход, когда он не проигрывает: в центр.

Анализ позиций в случае поддавков затруднен тем, что результата игры приходится ждать до последнего хода — пятого крестика. Поэтому игра достаточно трудна для начинающих, и ноликам не так просто выиграть, даже когда крестики не ходят в центр (и нолики даже могут проиграть). Приведем пример партии, в которой крестики ходят не в центр и проигрывают (рис. 15).

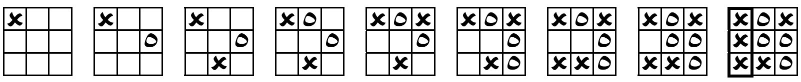


Рис. 15. Проигрыш крестиков в поддавки

Ничейная стратегия первого игрока связана с симметрией поля 3×3. Крестики первым ходом ходят в центр, а затем ходят симметрично ходу ноликов относительно центра (рис. 16).

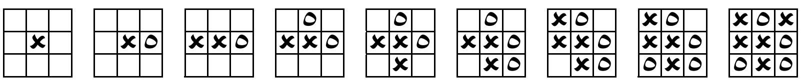


Рис. 16. Ничья в поддавках

3.2. Безумные крестики-нолики

Определение 7. Безумные крестики-нолики.

Безумные крестики-нолики — это вариант крестиков-ноликов, в которых каждый игрок может поставить как крестик, так и нолик — что ему заблагорассудится. Выигрывает тот, кто первым поставит третий знак в ряду из трех одинаковых знаков, безразлично каких.

В безумных крестиках-ноликах первый игрок всегда выигрывает. Пример партии см. на рис. 17.

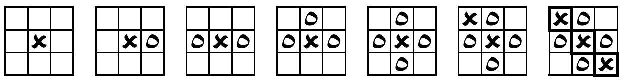


Рис. 17. Выигрыш первого игрока в безумных крестиках-ноликах

Определение 8. Безумные поддавки.

Безумные поддавки — это безумные крестики-нолики, в которых игрок проигрывает тогда, когда он выигрывает в нормальных безумных крестиках-ноликах.

Ситуация здесь такая же, как и в простых поддавках: преимущество у второго игрока, но первый игрок может свести игру к ничьей, если походит в центр и воспользуется симметрией.

Приведем пример партии, в которой крестики ходят не в центр и проигрывают (рис. 18).

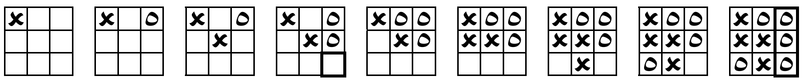
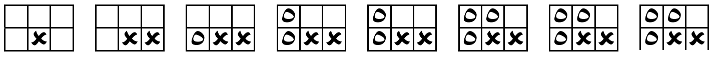


Рис. 18. Проигрыш первого игрока в безумные поддавки

Ничейная стратегия первого игрока связана с симметрией поля 3×3. Первый игрок первым ходом ходят в центр, а затем ходит симметрично ходу второго игрока относительно центра. В следующей партии (рис. 19) второй игрок увлекается и проигрывает…



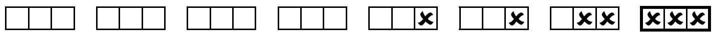


Рис. 19. Проигрыш увлекшегося второго игрока в безумных поддавках

3.3. Крестики-нолики Силвермана

Выше рассмотрены 4 варианта классических крестиков-ноликов. Все они получены из нормальных крестиков-ноликов изменением какой-нибудь симметрии в правилах игры.

В нормальных крестиках-ноликах *выигрывает* тот игрок, который соберет 3 значка в ряд, в поддавках такой игрок *проигрывает*.

В нормальных крестиках-ноликах каждый игрок ставит только свои значки, в безумных каждый игрок ставит любой значок.

Осталось еще одно симметричное правило: условия выигрыша, проигрыша или ничьей одинаковы для каждого игрока.

Определение 9. Крестики-нолики Силвермана.

Крестики-нолики Силвермана — вариант крестиков-ноликов, в которых один игрок выигрывает нормальным образом, если на поле образуется ряд из 3 значков, которыми он ходит (если он выигрывает при образовании ряда из 3 любых одинаковых значков, то возможности другого падают, и игра теряет смысл: этот игрок всегда бы быстро выигрывал, особенно в безумном варианте), и проигрывает, если такого ряда ни у кого не получается. Если же другой игрок получит ряд из 3 значков, которыми он ходит, то сразу фиксируется ничья.

Игрок, выигрывающий нормальным образом в крестики-нолики Силвермана, может ходить первым или вторым, поэтому получается сразу два варианта игры.

Безумные крестики-нолики Силвермана — это вариант крестиков-ноликов Силвермана, в которых каждый игрок может поставить как крестик, так и нолик. При этом игрок, выигрывающий нормальным образом, выигрывает только при своем ходе.

Итак, всего получается тоже 4 варианта игры.

Выяснение, кто выигрывает в крестиках-ноликах Силвермана, оставляется читателю. Отметим только, что игрок, выигрывающий ненормальным образом, выиграть не может никогда. Приведем пример ничейной партии, в которой игрок, выигрывающий ненормальным образом, ходит первым в обычных крестиках-ноликах Силвермана.

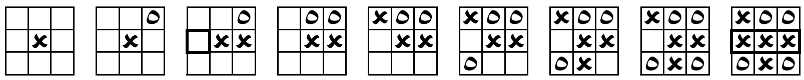


Рис. 20. Ничья в обычных крестиках-ноликах Силвермана,
когда игрок, выигрывающий ненормальным образом, ходит первым

§ 4. Распространение крестиков-ноликов

Развитие крестиков-ноликов происходит по нескольким направлениям. Одно из них было упомянуто в § 2 при рассмотрении рэндзю: это введение запрещенных ходов — фолов. Ниже будут рассмотрены еще три направления.

4.1. Перестановка значков

В прежние клоны крестиков-ноликов было удобно играть на бумаге, поскольку значок, раз поставленный, оставался на своем месте навсегда. Однако во многих играх местоположение значков не настолько фиксировано. Поэтому в эти варианты крестиков-ноликов лучше играть на доске фишками или камнями (на бумаге приходится играть карандашом со стеркой).

Самая невинная перестановка фишек — это их перемещение на другую клетку поля. Получается гибрид с шашками. В этих вариантах крестиков-ноликов запас фишек ограничен. Поэтому игра распадается на два этапа. 1) Фишки выставляются на доску. 2) Если на предыдущем этапе не достигнут результат, и фишки закончились, то фишки разрешается передвигать.

В простейшем варианте играют на доске 3×3 и у каждого по 3 фишки. Когда все 3 фишки выставлены, их начинают также по очереди передвигать на соседние поля по горизонтали или вертикали. Выигрывает тот, кто выстроит свои 3 фишки в ряд.

Широко известны другие игры этого ряда: *так-тиль*, *мельница*, *болотуду*.

Следующая степень перестановки фишек — а именно снятие их с доски при окружении фишками противника — дает самые сложные игры по количеству вариантов, стратегии и разработанности.

В *пенте*, как и в рэндзю, для победы выстраивают 5 фишек в ряд, но затем, по ходу игры, снимают, как в го, фишки, попавшие в окружение фишек противника.

В самой сложной игре *го* просто выставляют фишки на доску и в конце игры подсчитывают очки. Однако фишки не только ставятся на доску по сложным правилам. В ходе игры окруженные специальным образом фишки просто снимают с доски, а после окончания партии приходят к соглашению о количестве очков, причитающихся каждому игроку заключительной позицией.

Более подробно рассмотрим очень распространенного представителя третьей, самой хитрой перестановки фишек — их переворота.

Определение 10. Реверси.

Реверси, или отелло,— это игра по следующим правилам:

1) играют на поле 8 × 8;

2) играют комплектом из 64 плоских фишек, одна сторона которых черная, а другая белая;

3) два игрока ходят по очереди, первый ставит черные фишки, т. е. фишки черной стороной вверх, второй — белые фишки;

4) начинают с начальной позиции, изображенной на рис. 21;

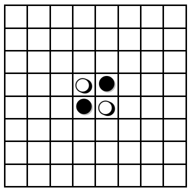


Рис. 21. Начальная позиция реверси

5) при каждом ходе игрок *обязан* окружить фишкой, которой ходит, вместе с уже стоящей своей фишкой одну или более фишек противника с двух сторон по горизонтали, вертикали или диагонали;

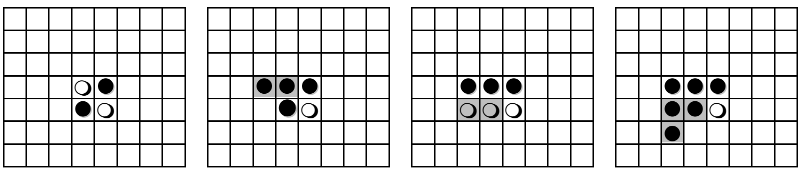
6) если разрешенных ходов нет, игрок пропускает ход;

7) после постановки фишки игрок переворачивает все окруженные *этим ходом* фишки противника, которые становятся его фишками;

8) переворачиваются все окруженные фишки по всем направлениям;

9) игра заканчивается либо когда все 64 фишки выставлены и свободных полей нет, либо когда ни один из игроков не может походить, окружив фишки противника;

10) Подсчитывают число черных и белых фишек. Каких фишек больше, тот и выиграл.



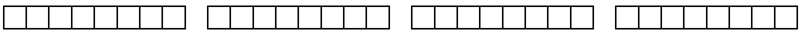


Рис. 22. Пример начала партии в реверси. Затенены поля, на которых находятся поставленная и перевернутые фишки

4.2. Использование в рекламе и фокусах

Вспомним, что в классических крестиках-ноликах при оптимальной стратегии игроков игра всегда заканчивается вничью.

Различные тривиальные задачи, связанные с классическими крестиками-ноликами, довольно часто появляются в иностранных рекламных текстах или в иллюстрированных журналах. При этом, естественно, предполагается, что игра проходит по правилам и игроки не совершают глупых ходов.

Определение 11. Ретроградный анализ.

Ретроградный, или ретроспективный, анализ — анализ позиции в какой-нибудь игре назад.

Приведем три задачи на ретроградный анализ.

Позиция на рис. 23а была напечатана в рекламе фирмы ИБМ в нью--йоркской газете *Herald Tribune* (May 13, 1956). Кто начал партию?

Позиция на рис. 23б взята из газеты *The Saturday Evening Post* (January 16, 1937). Возможна ли эта позиция?

Позиция на рис. 23а заимствована из рекламного текста в газете *The New York Times* (June 1, 1971). Какой ход был сделан последним?

Задача 4. Ретроградный анализ.

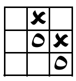
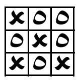
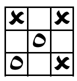
а)  б)  в) 

Рис. 23. а) Кто начал партию? б) Возможна ли эта позиция? в) Какой ход был сделан последним?

Определение 12. Вынужденный ход.

Вынужденный ход — ход, который игрок обязан сделать, чтобы не проиграть на следующем ходу.

Фокусы с использованием игры в крестики-нолики обычно основаны на вынужденных ходах второго игрока. Опишем один фокус.

Фокусник рисует на листе бумаги окончательную позицию партии в крестики-нолики со всеми заполненными квадратами, не показывая зрителям, и переворачивает его. Затем он разыгрывает с кем-нибудь партию на другом листе бумаги. Игра заканчивается вничью, и первый лист с прогнозом переворачивается. Оба рисунка совпадают!

На рис. 24 показано, как это делается.

Рис. 24. Фокус с прогнозом. Ход ноликов: а) в угол; б) на сторону. Обе позиции совпадают

Фокусник ходит первым в центр (иначе предсказание не сбудется). Из соображений симметрии нолики могут ответить только двумя способами.

1. Нолики ходят в угол (см. рис. 24а с пронумерованными ходами). Тогда фокуснику нужно только сообразить, куда сделать свой второй ход: все остальные ходы ноликов и крестиков, как легко можно убедиться, вынужденные. Второй ход крестики делают так: берут угол, противоположный нолику, и ставят крестик в соседний квадрат *по часовой стрелке*. Последний ход крестики делают в оставшийся свободным квадрат.

2. Нолики ходят на сторону (см. рис. 24 с пронумерованными ходами). Этот вариант немного сложнее. Фокуснику нужно всегда ставить следующий крестик в соседний квадрат с последним ноликом тоже *по часовой стрелке*. Последний крестик ставится также в оставшийся свободным квадрат.

Замечательно здесь то, что обе финальные позиции совпадают. Поэтому фокусник в прогнозе и рисует как раз эту позицию.

Для разнообразия в качестве прогноза можно нарисовать *зеркально симметричную* позицию (относительно любой оси). Но тогда фокуснику нужно ставить крестики в соседние поля с не по, а *против часовой стрелки*.

4.3. Lines и Hexxagon

Компьютерное обобщение крестиков-ноликов, игра-бестселлер Lines, изобретена в России.

Существуют многочисленные вариации и обобщения игры Lines. Варьируется как размеры поля, так и форма исчезающих с поля фигур (например, игра Balls — болс).

Определение 13. Lines.

Lines, или лайнс, или линии,— это компьютерная игра со следующими признаками:

1) игра ведется на квадратном поле, обычно 9 × 9;

2) на поле выставляются цветные фишки семи цветов. Количество фишек каждого цвета не ограничено;

3) компьютер и игрок ходят по очереди, первым и последним ходит компьютер. Уровней сложности нет;

4) *ход компьютера*: Компьютер размещает на поле случайным образом 3 (при первом ходе — 5) цветные фишки случайных цветов. Все возникшие при этом линии не менее 5 фишек одного цвета подряд по горизонтали, вертикали или диагонали (разные линии могут быть разных цветов) убираются с поля. Если поле полностью заполнилось, игра заканчивается;

5) *ход игрока*. Игрок передвигает одну из фишек, стоящих на поле. Если при этом получаются линии не менее 5 фишек одного цвета подряд по горизонтали, вертикали или диагонали, то все они убираются с поля, а компьютер пропускает свой ход;

6) за убранные фишки в результате хода игрока начисляются очки. Если при ходе игрока образуется более одной линии фишек, очков начисляется больше.

Ниже приведено начало реальной партии на компьютере.

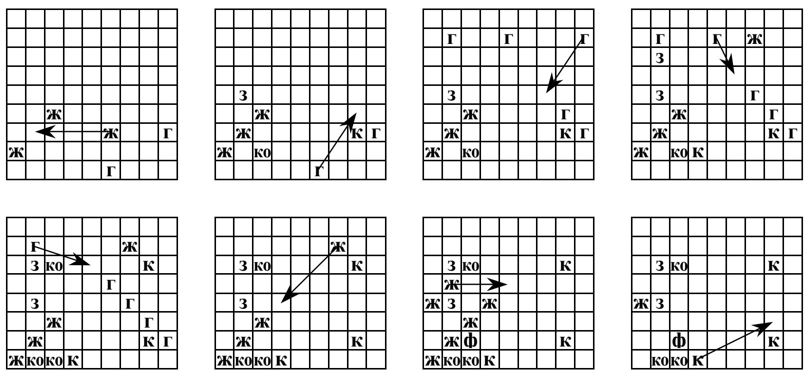


Рис. 25. 8 первых позиций игры Lines. Обозначения цветов фишек:
ж — желтый, г — голубой, к — красный, с — синий,
з — зеленый, ф— фиолетовый, ко — коричневый

Обобщением реверси является игра гексагон.

Определение 14. Гексагон.

Гексагон, или Hexxagon,— это компьютерная игра со следующими признаками:

1) игра ведется на поле, составленном из шестиугольных ячеек (отсюда название игры). Размеры и вид поля могут варьироваться, классическое поле $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ с 58 шестиугольными ячейками показано на рис. 26;

2) у каждого из двух игроков свой цвет фишек. Количество фишек не ограничено;

3) в начале игры на поле выставляется не менее одной начальной фишки каждого игрока. Классическое начальное расположение фишек показано на рис. 26 в первой позиции;

4) игроки ходят по очереди. Одним или обоими игроками может быть компьютер. Имеются уровни сложности при игре компьютера;

5) игрок может походить двумя способами: а) поставить еще одну свою фишку на любую свободную соседнюю ячейку с любой своей фишкой; б) переставить любую свою фишку через одну ячейку (свободную или занятую) на свободную ячейку. Если игрок не может походить, он пропускает ход;

6) все фишки противника, оказавшиеся соседними с поставленной игроком фишкой, *заменяются* фишками игрока;

7) игра заканчивается при заполнении всех ячеек игрового поля. Выигрывает тот, у кого оказалось больше фишек.

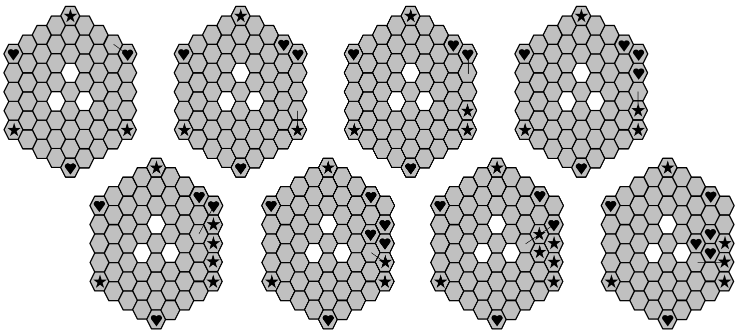
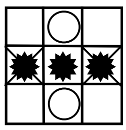


Рис. 26. 8 первых позиций при игре в гексагон

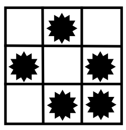
Глава 2. Игра «Жизнь»

Что наша «Жизнь»? Игра!

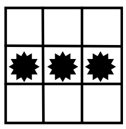
Генетические законы



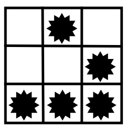
Постоянные популяции



Пульсирующие популяции



Движущиеся популяции



Отец игры «Жизнь» — английский математик из Кембриджа Джон Хортон Конвей (John Horton Conway) (фотография слева). После того, как он показал новую игру своему другу американскому математику Мартину Гарднеру (Martin Gardner), последний впервые описал ее в статье «Фантастические сочетания новой игры-для-одного „Жизнь“ Джона Конвея» (The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game ”life“) в журнале Scientific American **223** (October 1970): 120—123. (В научно-популярном журнале «Наука и жизнь» (1971, № 8; 1972, № 9; 1975, № 3) эта игра и ее модификации были описаны под названием «Эволюция».) Эта статья повторена в первой части главы «Игра „Жизнь“» в книге [Гарднер 2]. С этого времени игра начала стремительно завоевывать мир.

В игру «Жизнь» играет один человек. Игра моделирует реальные процессы зарождения, развития и гибели популяции живых организмов. Начинать играть в «Жизнь» и изучать ее лучше на бумаге в клеточку. Для расчета сложных эволюционных процессов используются компьютерные программы, которые имеются в Интернете.

Материал второй главы можно найти в следующих изданиях.

[Гарднер 2] Глава 38. Игра «Жизнь».
[Гарднер 4] Глава 20. Игра «Жизнь». Часть I. Глава 21. Игра «Жизнь». Часть II. Глава 22. Игра «Жизнь». Часть III.
http://famlife.narod.ru/index.html
http://beluch.newmail.ru/indexr.html
http://arbuz.ferghana.ru/y_life.html
http://psoup.math.wisc.edu/Life32.html
http://elvisti.kiev.ua/skl

§ 1. Генетические законы

1.1. Популяция

Идея игры заключается в следующем. Имеется бесконечное клеточное пространство. В некоторых клетках этого пространства находятся организмы, остальные клетки пустые. В каждый момент времени на эту популяцию действуют некоторые постоянные генетические законы, управляющие рождением, выживанием и гибелью организмов. Конвей долго подбирал правила генетических законов, добиваясь, чтобы они удовлетворяли трем условиям.

1. Не должно быть простого доказательства *неограниченного роста* какой-нибудь популяции.

2. Имеются *беспредельно* развивающиеся простые популяции.

3. Существуют простые популяции, которые долго развиваются и *заканчивают* свое существование одним из трех основных способов:

а) полностью исчезают;

б) перестают изменяться, переходя в устойчивые конфигурации;

в) выходят на колебательный режим и становятся пульсирующими конфигурациями.

Короче говоря, правила должны быть такими, чтобы поведение популяции было непредсказуемым.

1.2. Генетические законы

Разберемся с клеточной терминологией.

Определение 1. Соседние клетки.

Соседними клетками данной клетки называются восемь клеток, которые ее окружают и касаются. Четыре из них расположены по горизонтали и вертикали, четыре — по диагонали (рис. 1).

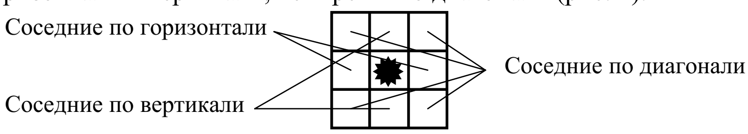
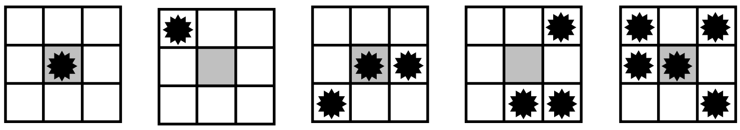


Рис. 1. Восемь соседних клеток отмеченной клетки

Соседними организмами, или соседями, называются организмы, расположенные в соседних клетках данной клетки. Если в этой клетке имеется организм, то его соседние организмы называются

соседями организма, если клетка пуста — то ***соседями пустой клетки***.

На рис. 2 показана клетка в центре квадрата 3×3 (как с организмом, так и пустая), с разными количествами соседей-организмов.



а б в г д

Рис. 2. Соседи центральных клеток: а) организм без соседей; б) пустая клетка с одним соседом; в) организм с двумя соседями; г) пустая клетка с тремя соседями; д) организм с четырьмя соседями

Эволюция популяции организмов происходит скачками, дискретно. В каждый момент времени существует одно поколение организмов. Под действием генетических законов часть организмов умирает, рождаются новые, и в следующий момент времени популяция переходит в новое поколение.

Определение 2. Генетические законы.

Генетические законы — это название правил игры в «Жизнь». Существуют только три генетических закона, обеспечивающих все богатство популяций игры.

1. ***Выживание***. Каждый организм, имеющий двух или трех соседей, выживает и переходит в следующее поколение.

2. ***Гибель***. Организм, имеющий менее двух соседей, погибает от одиночества. Организм, у которого более трех соседей, умирает из-за перенаселенности. Эти организмы не переходят в следующее поколение.

3. ***Рождение***. На пустой клетке, которая имеет ровно три соседних организма, рождается новый организм, который появляется в следующем поколении.

1.3. Техника игры

Особо следует отметить, что гибель и рождение организмов популяции происходит *одновременно* при переходе от одного поколения к другому. Отсюда получаем следующий алгоритм перехода от одной популяции к следующей.

1. Начало. Имеется популяция организмов. Перерисуем ее, отметив организмы черными кружками.

2. Гибель. Определим погибающие по закону 2 организмы, которые не переходят на следующую популяцию, просмотрев все черные кружки, и перечеркнем их.

3. Рождение. Вычислим организмы, которые появятся на пустых клетках на следующей популяции по закону 3, изучив все соседние с черными кружками пустые клетки, и отметим их белыми кружками.

4. Проверка. Снова проинспектируем черные кружки на предмет гибели, а соседние с ними пустые клетки — на предмет рождения, чтобы избежать ошибок в пп. 2—3.

5. Конец. Перерисуем клетки без зачеркнутых кружков, а также заменим белые кружки на черные. Получим следующую популяцию.

Игра начинается с некоторой начальной популяции, которой присваивается время 0. Применяя алгоритм получения следующей популяции, получаем расположение организмов в момент 1. Затем — в момент 2. И т. д.

Приведем несколько примеров эволюции самых простейших начальных конфигураций, состоящих их трех организмов (все начальные популяции из одного или двух организмов, очевидно, прекращают существование в момент времени 2).

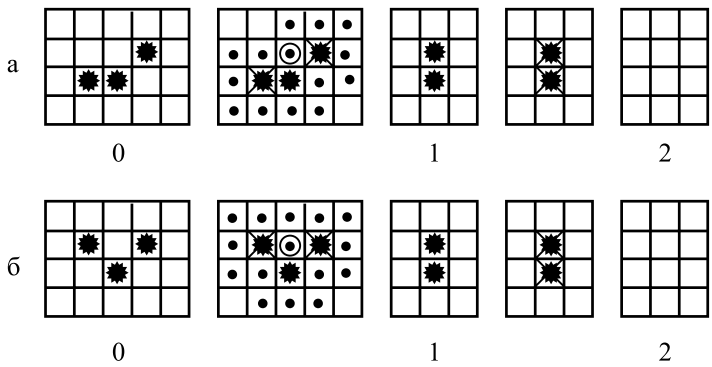


Рис. 3. Эволюция популяций из трех организмов. В обоих случаях популяции погибают. Точками отмечены все соседние с организмами пустые клетки, где может родиться новый организм

Популяции делятся на виды в зависимости от результатов эволюции.

Определение 3. Виды популяций.

Гибнущая популяция — погибающая популяция. ***Вечная популяция*** — либо ***бесконечно развивающаяся популяция***, либо ***конечная***.

Итог эволюции *конечной* популяции бывает следующих 3 видов.

1. ***Постоянная, или застывшая, популяция*** не меняется.

2. ***Пульсирующая, или мигающая, популяция*** восстанавливает свой вид после нескольких шагов по времени. Некоторые ее части могут быть постоянными подпопуляциями.

3. ***Ползущая, или движущаяся, или скользящая, популяция*** имеет непременную движущуюся составляющую — скользяще-симметричную подпопуляцию (возможно, с постоянными и пульсирующими). Популяция имеет ***скользящую симметрию***, когда после несколько моментов времени она повторяется со сдвигом по пространству.

§ 2. Постоянные популяции

2.1. Простейшие случаи

На рис. 4 рассмотрена эволюция простейших популяций, которые превращаются в часто встречающиеся постоянные конфигурации.

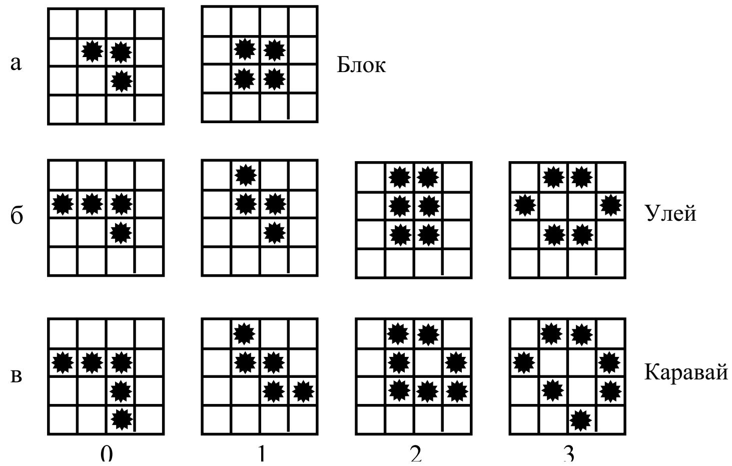


Рис. 4. Эволюция популяций к постоянным конфигурациям:
а) Блоку; б) Улью; в) Караваю.

На рис. 5 изображен Чеширский кот, от которого остается, как и положено, только его улыбка, а затем — отпечаток кошачьей лапки.

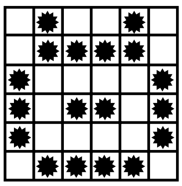


Рис. 5. Чеширский кот, эволюционирующий в улыбку

2.2. Другие постоянные конфигурации

Элементарные постоянные конфигурации, не состоящие из несвязных частей, довольно разнообразны и их количество даже бесконечно. Приведем список таких стандартных конфигураций (рис. 6).

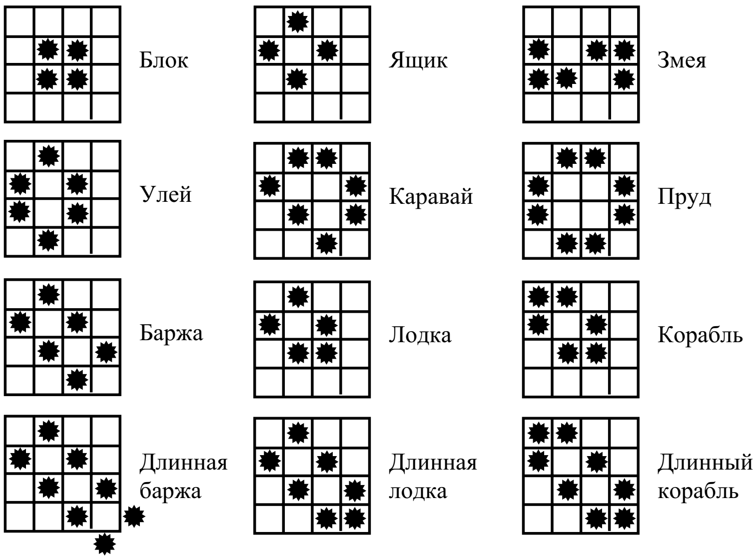


Рис. 6. Стандартные постоянных конфигурации

Очевидно, что длинными Баржой, Лодкой и Кораблем элементарные постоянные конфигурации не ограничиваются. Последние три могут быть неограниченно продолжены.

2.3. Комбинации постоянных конфигураций

Иногда результат представляет собой комбинацию нескольких постоянных конфигураций. На рис. 7 изображена эволюция ряда из 7 организмов, которая заканчивается образованием Пасеки — распространенной комбинации из 4 ульев. В Пасеку превращается также квадрат 5×5, переходящий на 1-м ходу 4-ю конфигурацию рис. 7.

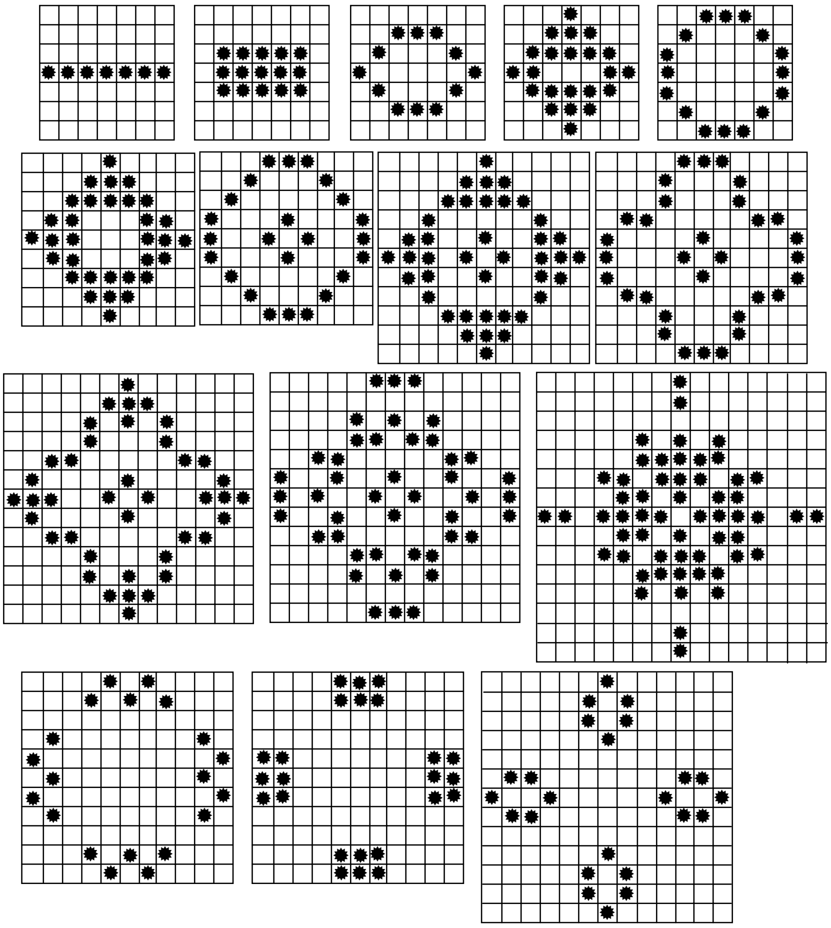


Рис. 7. Пасека как итог эволюции колонии из ряда семи организмов

§ 3. Пульсирующие популяции

Классификация пульсирующих популяций гораздо богаче постоянных, поскольку здесь появляется новый параметр — количество моментов времени, за который популяция восстанавливает исходный вид. Можно привести следующую простую классификацию пульсирующих популяций.

Определение 4. Пульсирующие популяции.

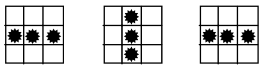
Период популяции — время, за которое пульсирующая популяция возвращается к исходной конфигурации.

Мигалка, или флип-флоп — популяция с периодом 2.

Пульсар — популяция с периодом большим 2.

3.1. Мигалки

Самой простой мигалкой является ряд из трех организмов (рис. 8). Такая мигалка из-за своей формы называется Светофор.



0 1 2

Рис. 8. Самая простая мигалка Светофор

Часто при эволюции популяций возникает мигалка Навигационные огни. Она изображена на рис. 9 и состоит из 4 Светофоров.

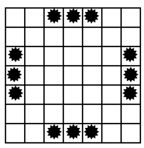


Рис. 9. Навигационные огни

В Навигационные огни переходят начальные конфигурации, изображенные на рис. 10, что легко проверяется.

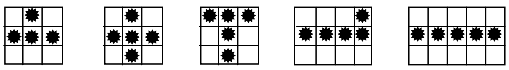


Рис. 10. Популяции, переходящие в Навигационные огни

Мигалки не ограничиваются светофорами и их комбинациями. Период 2 могут иметь самые «экзотические» конфигурации неограниченного размера и формы. На рис. 11 приведены некоторые из них.

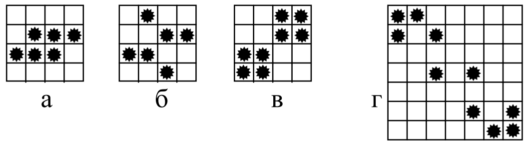


Рис. 11. Мигалки: а) Жаба «дышит»; б) Часы «тикают»;
в) Бакен «зажигается»; г) Палка «кувыркается».
Палку можно как угодно растягивать

3.2. Пульсары

Популяции могут осциллировать не только с периодом 2. Рассмотрим пример простейшего пульсара CP 48-56-72 с периодом 3. В него превращается один из элементов гептамино.

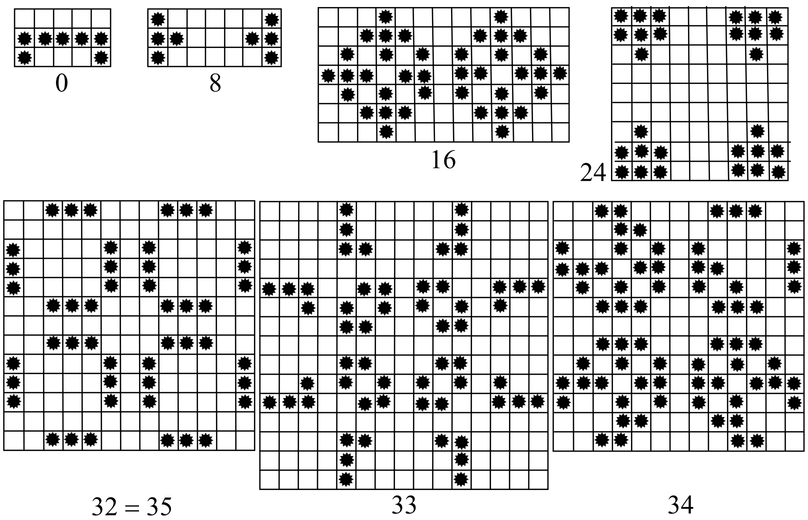


Рис. 12. Возникновение пульсара CP 48-56-72 с периодом 3

Период пульсаров может быть самый разный. На рис. 13 показаны пульсары с периодами 4, 8 и 14.

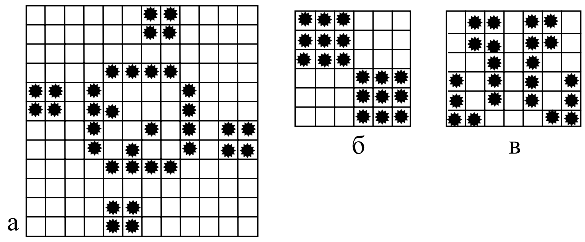


Рис. 13. Пульсары с периодами: а) 4 — Вертушка;
б) 8 — Восьмерка; в) 14 — Тумблер

3.3. Постоянные и пульсирующие популяции

Иногда начальная популяция эволюционирует в сочетание постоянных и пульсирующих конфигураций. Например, такая комбинация получается в итоге развития ряда из 25 организмов. Более короткие ряды или полностью исчезают, или переходят только в постоянные или только в пульсирующие объекты.

Сочетание постоянных и пульсирующих конфигураций «в чистом виде», без примеси движущихся популяций, получается не так часто. Эксперименты показали, что эволюция таких популяций имеет среднюю степень сложности и находится между простыми и короткими эволюциями (несколько десятков ходов) и сложными и длинными (сотни ходов). Поэтому для их исследования обычно применяется компьютер. Компьютерные программы, реализующие игру «Жизнь», можно получить на сайтах, приведенных в конце параграфа.

В качестве простого примера приведем 42-ходовую эволюцию ряда 5-5-5, заканчивающуюся 4 блоками и 2 светофорами (рис. 14).

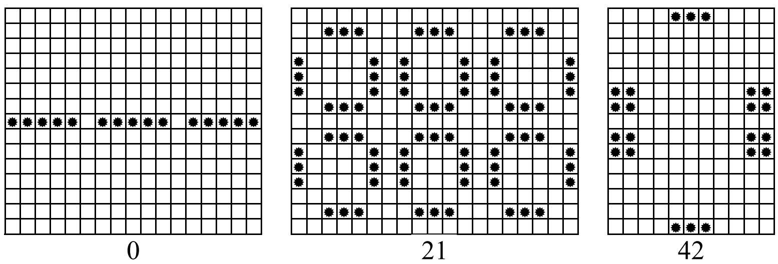


Рис. 14. Эволюция ряда 5-5-5 в четыре блока и два светофора

§ 4. Движущиеся популяции

Наибольший интерес в игре «Жизнь» представляют фигуры, перемещающиеся в пространстве. Такие фигуры непременно возникают при сложных и сверхсложных (тысячи ходов) эволюциях. Симметрия, передаваемая этими фигурами, носит название скользящей.

Определение 5. Движущиеся популяции.

Скользящая симметрия — это симметрия, при которой конфигурация через несколько ходов восстанавливает свой вид, но в другом месте пространства.

Движущаяся, или ползущая, или скользящая, популяция — популяция, передающая скользящую симметрию.

Скорость света — скорость, равная скорости *шахматного короля* на клеточном пространстве «Жизни».

Время жизни — время жизни *конечной* популяции, когда популяция либо исчезает, либо превращается в неизменное сообщество постоянных и пульсирующих конфигураций, от которого уходит в бесконечность постоянное число движущихся конфигураций.

4.1. Планер

Классикой движущейся популяции является 5-клеточный Планер, или Глайдер. На рис. 15 приведена его эволюция. Чтобы передать скользящую симметрию, необходимо иметь точку отсчета. В качестве такой точки отсчета, относительно которой видно движение Планера, взята просто пустая клетка, отмеченная крестом. Эта точка отсчета неподвижна, а Планер движется относительно нее со скоростью 1/4 скорости света. При этом за 4 хода (отсюда и 1/4 скорости света) Планер сдвигается на одну клетку по диагонали.

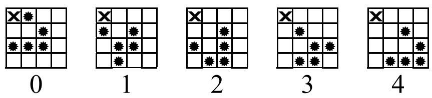


Рис. 15. Планер

Сверхсложные эволюции могут генерироваться маленькими начальными популяциями. Такие конфигурации никак не выделяются среди похожих и быстро затухающих. Отыскать их можно с использованием компьютерных программ.

На рис. 16 показаны несколько простых начальных популяций, имеющих сверхсложную эволюцию, и приведено время их жизни. Характеристиками конечного состояния являются также количество организмов в оставшихся постоянных и пульсирующих конфигурациях и количество ушедших в бесконечность Планеров.

F-пентамино Кролик

Рис. 16. Популяции сверхсложной эволюции:
F-пентамино (r-пентамино), время жизни 1103;
Кролик, время жизни 17 331

4.2. Космические корабли

Не только Планер может независимо двигаться.

Нашлись движущиеся популяции, скорость скольжения которых составляет 1/2 скорости света. Конвеем было показано, что максимальная скорость движения по диагонали равна 1/4 скорости света, а по горизонтали или вертикали — 1/2 скорости света. Таким образом, планер движется по диагонали с максимально возможной скоростью.

На рис. 17 показана эволюция всех трех Космических кораблей, которые имеют максимально возможную скорость по горизонтали — 1/2 скорости света — и движутся в одиночку. Все более большие сверхтяжелые корабли требуют эскорта кораблей меньшего размера.

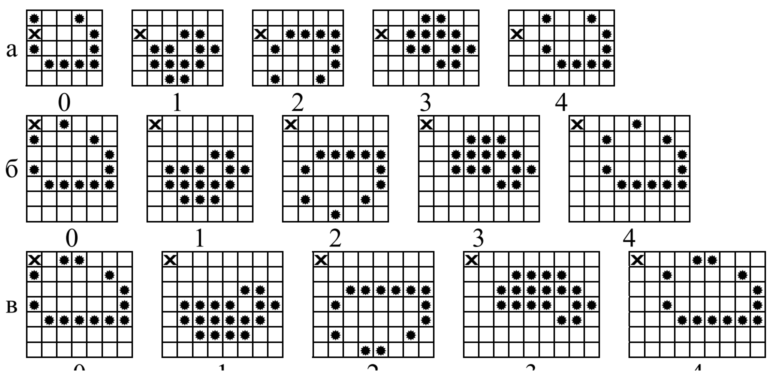


Рис. 17. Космические корабли: а) легкий; б) средний; в) тяжелый

4.3. Планерное ружье

До сих пор эволюция рассматриваемых популяций не приводила к неограниченному росту количества организмов, т. е. популяции были *конечные*. В первой статье с описанием игры «Жизнь», вышедшей в октябре 1970 г., отцом «Жизни» Конвеем была предложена денежная премия тому, кто до конца года первым докажет или опровергнет следующую гипотезу: не существует бесконечно развивающихся конфигураций.

В 1970 году группой математиков из Массачусетского технологического института построила Планерное ружье, изображенное на рис. 18, и получена обещанная Конвеем премия.

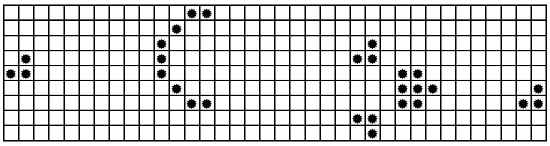


Рис. 18. Планерное ружье

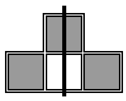
На 40-м ходу появляется первый Планер, который вылетает по направлению диагонали вниз налево. На 70-м ходу появляется второй Планер, уходящий точно по направлению первого. На 100-м появляется третий Планер, и т. д. до бесконечности: каждые 30 ходов рождается новый Планер. С появлением каждого Планера количество организмов увеличивается на 5, поэтому такая популяция неограниченно растет.

На первом ходу развития Планерного ружья две конфигурации из трех организмов по его краям превращаются в постоянные конфигурации Блоки. Вся эволюция ружья протекает между этими неподвижными Блоками. Примерно посередине между Блоками и возникают Планеры.

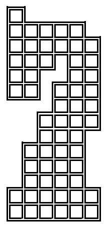
В настоящее время на компьютере построены очень интересные популяции: и пульсирующие, и бесконечно развивающиеся… И даже пытаются построить в игре «Жизнь» модель компьютера — машины Тьюринга…

Глава 3. Полимино и другие звери

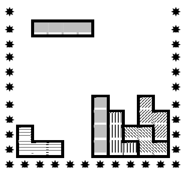
Полимино (клетчатые звери)



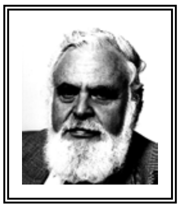
Пентамино



Развитие полимино



Другие звери



Отец полимино — американский математик из университета Южной Калифорнии Соломон В. Голомб (Solomon W. Golomb). В 1953 году аспирант отделения математики Гарвардского университета в Бостоне Голомб выступил с докладом о полимино в Гарвардском математическом клубе, а затем написал статью «Шахматные доски и полимино» (Checker-boards and Polyominoes) в журнале American Mathematical Monthly, **61**, № 10, 672—682 (1954). Книга Голомба «Полимино» (1965) (на русском языке народные статьи появились в журнале «Наука и жизнь» в 1967) привела к быстрому росту литературы по полимино.

Связанные с полимино игры и задачи достаточно просты по формулировкам и на первый взгляд близки головоломке танграм. Однако математические корни полимино находятся в таких разделах математики, как комбинаторика (перебор вариантов) и комбинаторная геометрия (поиск оптимальных комбинаций).

Вторая жизнь полимино началась с развитием персональных компьютеров. Компьютеры позволили сделать многие расчеты — и не только. Возникли серии игр-бестселлеров, начавшихся со ставшим уже классическим *тетриса*, который в июне 1984 г. (18.07.1985?) изобрел русский программист Алексей Пажитнов. По игре *пентикс* существуют спортивные федерации (см. сайт алтайского госуниверситета tbs.asu.ru). Клонами тетриса являются Пентикс, Columns, Faces, Welltris, Block Out, Knight Moves, Hatris и др.

Материал третьей главы можно найти в следующих изданиях.

[Голомб]
[Гарднер 1] Глава 12. Полимино. Глава 21. Кубики Сома.
[Гарднер 3] Глава 2. Полиамонды. Глава 22. Полигекс и полиаболо.
http://puzzlecraft.com
http://fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM
http://geocities.com/alclarke0

§ 1. Полимино (клетчатые звери)

Определение 1. Полимино.

Полимино — фигура, составленная из одинаковых квадратов так, что с каждого квадрата можно перейти через общие стороны на любой другой квадрат. ***Порядок*** полимино — это количество составляющих его квадратов. Полимино из n квадратов называется ***n-мино***.

Полимино обычно распадаются на серии одного порядка.

1.1. Домино

Рассмотрим полимино порядка 1 и 2.

Определение 2. Мономино и домино.

Мономино — это полимино порядка 1.

Домино — это полимино порядка 2.

Существует только одно мономино и одно домино. Мономино — это просто квадрат. Домино — это просто домино, два квадрата.

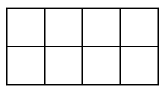
Мономино Домино

Рис. 1. Мономино и домино

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Покрытие домино.

Дана доска 2×4 квадрата (см. справа) и коробка с любым количеством домино. Требуется покрыть эту доску при помощи домино без наложений и свободных квадратов.



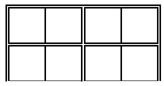
Для разминки подсчитаем, сколько потребуется фигур домино для покрытия доски 2×4. На такой доске находится $2 \times 4 = 8$ квадратов. Каждое домино занимает 2 квадрата. Следовательно, требуется $8/2 = 4$ домино.

Подобные задачи могут относиться к двум разным типам.

1. Задача имеет решение. В этом случае доказательством является просто демонстрация этого решения.

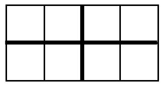
2. Задача не имеет решения. Это нужно доказать рассуждениями.

Решение задачи 1. Покрытие домино.



Это задача относится к первому типу — она имеет решение. Поэтому достаточно нарисовать одно из решений этой задачи — см справа.

Задача 2. Количество покрытий домино.



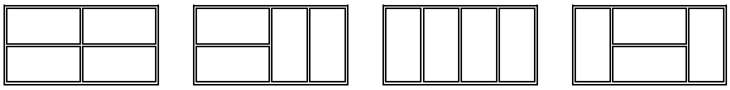
Сколько решений имеет задача 1? При этом решения, отличающиеся поворотом на 180° или отражением относительно одной из двух осей симметрии (см. справа), принимаются за одно.

Эта задача относится к третьему типу.

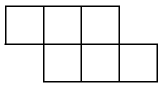
3. Задача имеет решение и требует доказательства рассуждениями.

Решение задачи 2. Количество покрытий домино.

Ввиду сложности задачи просто перечислим все ее 4 решения.



Задача 3. Покрытие домино.

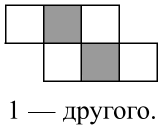


Дана доска 2×4 без угловых противоположных квадратов (см. справа) и коробка домино. Можно ли покрыть эту доску домино без наложений и свободных клеток?

Задача относится ко второму типу. Но чтобы додуматься до решения подобных задач, нужно быть математиком. Предлагаемое поле достаточно маленькое, поэтому задача может быть решена перебором — и при этом нужно доказать, что все варианты просмотрены.

Решим эту задачу более изящным методом, называемым «*проверкой на четность*».

Решение задачи 3. Покрытие домино.

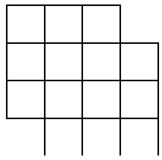


Раскрасим доску в шахматном порядке как показано справа. Получим 4 поля одного цвета и 2 — другого. С другой стороны, каждое домино, как бы его ни размещали, покрывает 1 поле одного цвета и 1 — другого.

Таким образом, домино можно покрыть доску только с одинаковым количеством шахматный полей двух цветов, а с разным — нельзя.

Задача 4. Покрытие домино.

Дана доска 4 × 4 без угловых противоположных квадратов (см. справа) и коробка домино. Можно ли покрыть эту доску домино без наложений и свободных клеток?



1.2. Тетрамино

Определение 3. Тримино и тетрамино.

Тримино — это полимино порядка 3.

Тетрамино — это полимино порядка 4.

В названиях классов полимино встречаются приставки, обозначающие количества квадратов. Приведем названия некоторых приставок, называющих первые натуральные числа в математике.

Таблица 1

Приставки — названия первых чисел в математике

Число	Название	Число	Название
1	Моно-, уни-	11	Гендека-
2	До-, би-, ди-	12	Додека-
3	Три-	13	Тридека-
4	Тетра-	14	Тетрадека-
5	Пента-	15	Пентадека-
6	Гекса-	16	Гексадека-
7	Гепта-	17	Гептадека-
8	Окта-	18	Октадека-
9	Нано-	19	Нанодека-
10	Дека-	20	Икоса-
		Много	Поли-, мульти

Как получить полимино следующего порядка? Классический способ заключается в дополнении полимино предыдущего порядка:

1) все полимино предыдущего порядка по очереди дополняются одним квадратом всеми возможными способами до пентамино следующего порядка;

2) отбрасываются полимино, одинаковые с ранее построенными.

Определение 4. Одинаковые полимино.

Одинаковые полимино — это два полимино, размещенные на плоскости, одно из которых можно получить из другого либо непосредственно каким-нибудь поворотом, либо зеркальным отражением с последующим поворотом.

Зеркальное отражение — это вынесение полимино из плоскости в пространство и переворачивание его на другую сторону.

Построим все тримино из домино. На рис. 2 показано домино, у которого все места, где можно приложить еще один квадрат, отмечены кружками. В итоге получаем два разных тримино: I и L.

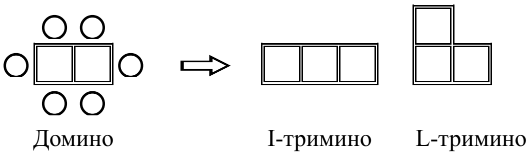


Рис. 2. Получение из домино всех 2 тримино.
Тримино названны похожими на них буквами

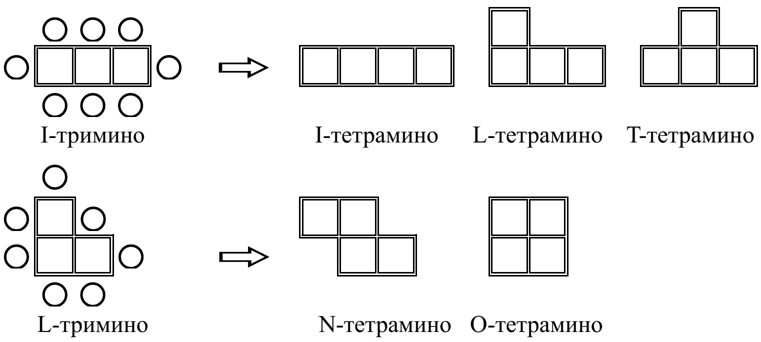


Рис. 3. Получение всех 5 тетрамино из тримино

Различные полимино отличаются друг от друга не только формой. Уже при генерации *тетрамино* можно заметить, что, например, N--тетрамино отличается от остальных тетрамино тем, что зеркально отраженное N-тетрамино не совмещается с исходным поворотом на плоскости.

1.3. Классификации полимино

Определение 5. Одностороннее и двухстороннее полимино.

Одностороннее полимино — это полимино, которое не разрешается выносить из плоскости, т. е. зеркально отображать.

Двухстороннее полимино, или просто полимино,— это полимино, которое разрешается выносить из плоскости.

Все мономино, домино и тримино одновременно односторонни и двухсторонни. Существует только два тетрамино, имеющее две разные односторонние формы — это L- и N-тетрамино (рис. 4): одну форму L- или N-тетрамино нельзя получить из другой движением на плоскости.

Рис. 4. Две односторонние зеркально симметричные формы L- и N-тетрамино, которые нельзя совместить движением на плоскости

Итак, имеются 5 двухсторонних и 7 односторонних тетрамино. Обычно используются простые двусторонние полимино.

Вторая классификация относится только к полимино четных порядков и основана на том, что сумма четных чисел, равно как и сумма двух нечетных чисел, является четным числом. Полимино нечетных порядков не участвуют в классификации, потому что нечетное число всегда разбивается на сумму двух чисел, одно из которых всегда четное, а другое — нечетное, и классификация не имеет смысла.

Определение 6. Четное и нечетное полимино.

Раскрасим в шахматном порядке полимино *четного* порядка.

Четное полимино — полимино четного порядка, которое при шахматной раскраске имеют четное количество квадратов обоих цветов.

Нечетное полимино — полимино четного порядка, при шахматной раскраске имеющее нечетное количество квадратов обоих цветов.

Среди тетрамино имеются 4 четных и 1 нечетное (см. рис.).

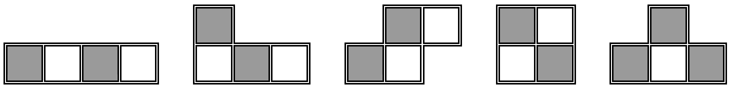


Рис. 5. Четыре четных (I, L, N и O) и одно нечетное тетрамино (T)

Задача 5. Прямоугольник из тетрамино.
Можно ли сложить прямоугольник из 5 различных тетрамино?

Если бы задача имела положительный ответ, то можно было бы предъявить такой прямоугольник.

Решение задачи 5. Прямоугольник из тетрамино.
Докажем, что нельзя сложить.

5 тетрамино имеют 20 квадратов, причем при шахматной раскраске получается всегда нечетное число квадратов каждого цвета. С другой стороны, имеются только 2 прямоугольника из 20 квадратов: 2×10 и 4×5 (прямоугольник 1×20 рассматривать бессмысленно), причем эти прямоугольники при шахматной раскраске всегда имеют одинаковое и четное число квадратов.

Поэтому прямоугольники сложить нельзя: из нечетного числа квадратов нельзя получить четное.

Определение 7. Симметричное и несимметричное полимино.

Симметричное полимино — это полимино, которое имеет либо ось симметрии, либо центр симметрии, ***несимметричное*** — которое не имеет.

Ось симметрии полимино — это такая прямая в плоскости полимино, когда при зеркальном отражении (т. е. повороте в пространстве на 180°) плоскости относительно этой прямой полимино самосовмещается.

Центр симметрии полимино — это такая точка в плоскости полимино, когда при повороте полимино в плоскости вокруг этой точки на 180° полимино самосовмещается.

Полимино может иметь 4 оси симметрии. Очевидно, что полимино *одностороннее*, если оно не имеет ни одной оси симметрии.

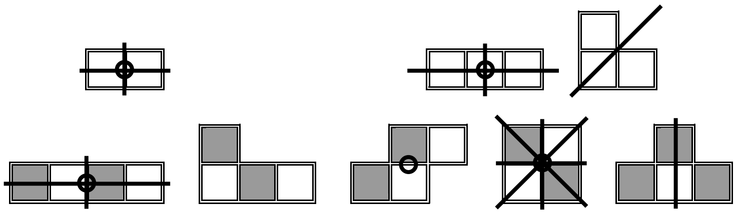


Рис. 6. Оси и центры симметрии домино, тримино и тетрамино

§ 2. Пентамино

Определение 8. Пентамино.
Пентамино — это полимино порядка 5.

2.1. Классификация

Сначала построим все 12 пентамино из тетрамино: рис. 7.

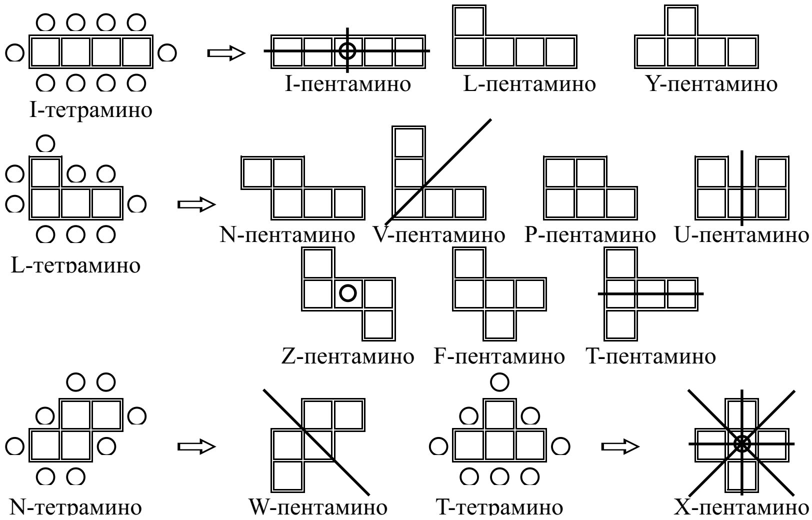


Рис. 7. Получение всех 12 пентамино из тетрамино.
Пентамино названы буквами, на которые они похожи.
Показаны все оси и центры симметрии пентамино

О-тетрамино на рис. 7 не изображено, поскольку его дополнение квадратами не дает новых пентамино.

Пентамино — это полимино нечетного порядка, поэтому нет четных или нечетных пентамино.

Далее, как следует из рис. 7, имеется 12 двухсторонних и 18 односторонних пентамино (поскольку 6 пентамино (L-, Y-, N-, P-, Z- и F-) не имеют ни одной оси симметрии).

Наконец, 5 пентамино (L-, Y-, N-, P- и F-) не имеют вообще никакой симметрии и поэтому несимметричны. Остальные 7 пентамино симметричны.

2.2. Фигуры

Полимино было придумана как игра для одного человека, в которой нужно покрыть на плоскости заданные фигуры или доказать, что покрытие невозможно. Или придумать интересные фигуры, которые можно покрыть или доказать, что покрытие невозможно.

В этом разделе рассматриваются фигуры из квадратов, которые можно покрыть 12 пентамино без наложения и свободных квадратов.

Наиболее популярная фигура — прямоугольник. В табл. 2 выписаны размеры прямоугольников и количество покрытий их 12 пентамино с учетом симметрии (т. е. симметричные покрытия считаются как одно). Поскольку пентамино 15 и каждое пентамино состоит из 5 квадратов, то прямоугольник, покрываемый 12 пентамино, имеет 60 квадратов.

Таблица 2

Количество покрытий прямоугольников пентамино

Прямоугольник	3×20	4×15	5×12	6×10
Количество покрытий	2	368	1010	2339

Рассмотрим фигуру, допускающую очень маленькое число покрытий: 2. Это прямоугольник 3×20. На рис. 8 показаны оба варианта покрытия прямоугольника 3×20. Один вариант получается из другого поворотом заштрихованной части на 180°. Из второго варианта перестановкой правой и левой частей получается единственное покрытие симметричной ступенчатой фигуры высотой 3.

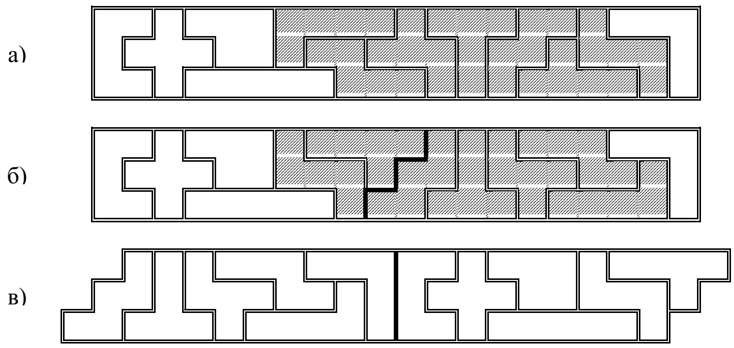


Рис. 8. Все покрытия пентамино: а)—б) — прямоугольника 3×20;

в) симметричной ступенчатой фигуры высотой 3

Рассмотрим еще один вариант покрытия прямоугольника.

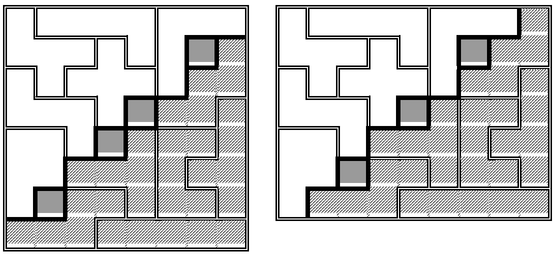


Рис. 9. Единственное покрытие прямоугольника 8 × 8
без 4 квадратов, допускающее интересную перестановку

Из пентамино можно сложить и шахматные фигуры, и животных…

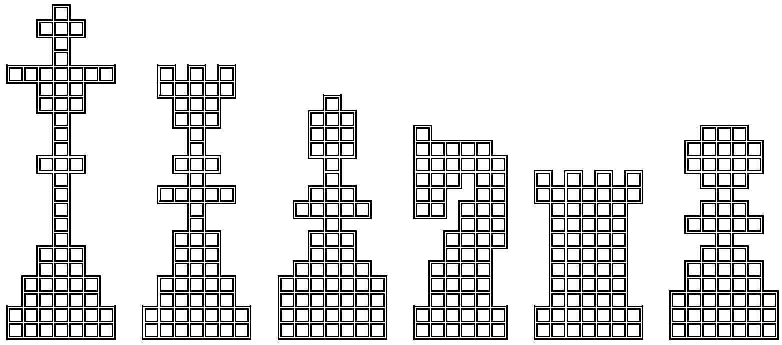


Рис. 10. Шахматные фигуры, которые можно покрыть пентамино

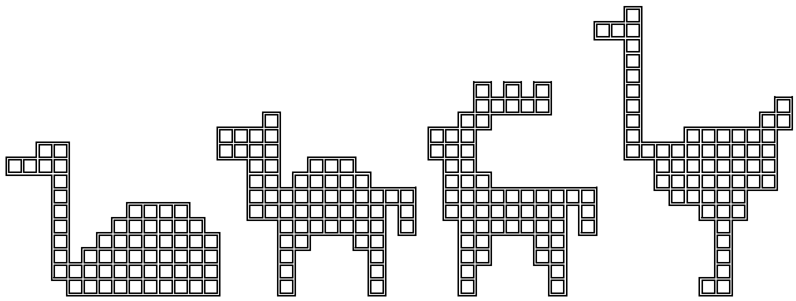


Рис. 11. Силуэты животных, которые можно покрыть пентамино

2.3. Растроение и утроение

Среди многочисленных решенных и нерешенных задачах о полимино одни из самых красивых — это задачи о разбиении пентамино на три одинаковые группы или об утроении полимино.

12 пентамино можно разбить на 3 группы по 4 пентамино в каждой и затем из каждой группы сложить одну и ту же фигуру.

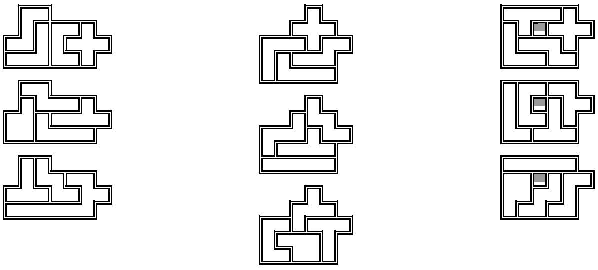


Рис. 12. Растроение пентамино: 1 фигура из 20 квадратов 3 раза. Приведены три различных варианта

Более того, оказывается, каждую из 3 одинаковых фигур, собранную из 4 пентамино, можно разбить еще на 2 одинаковые фигуры — и получить 3 одинаковые пары фигур, собранных из 12 пентамино.

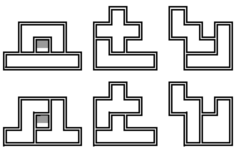


Рис. 13. Три одинаковые пары, покрытые 12 пентамино

Перейдем к утроению пентамино. При утроении пентамино каждый квадрат пентамино преобразуется в прямоугольник 3×3, состоящий из 9 квадратов. При этом получается фигура из $5 \times 9 = 45$ квадратов, которую можно покрыть какими-то 9 разными пентамино.

Очевидно, что покрыть утроенные пентамино легче, чем обычную фигуру, поскольку необходимо использовать не все 12 разных пентамино, а только какие-то 9 из них.

В следующей таблице перечислены все 12 утроенных пентамино вместе с количеством разных покрытий, которыми их можно покрыть разными наборами из 9 пентамино.

Таблица 2

Количество покрытий утроенных пентамино

Утроенное пентамино	F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
Количество покрытий	125	19	113	68	497	106	48	63	91	15	86	131

Из таблицы видно, что труднее всего найти решения покрытия утроенного X-пентамино, поскольку для этой фигуры имеется меньше всего вариантов покрытия. Больше всего вариантов покрытия имеет утроенное P-пентамино, видимо, потому, что оно наиболее компактное из всех пентамино.

На рис. 14 показаны некоторые из покрытий всех 12 утроенных пентамино с помощью наборов из 9 разных пентамино.

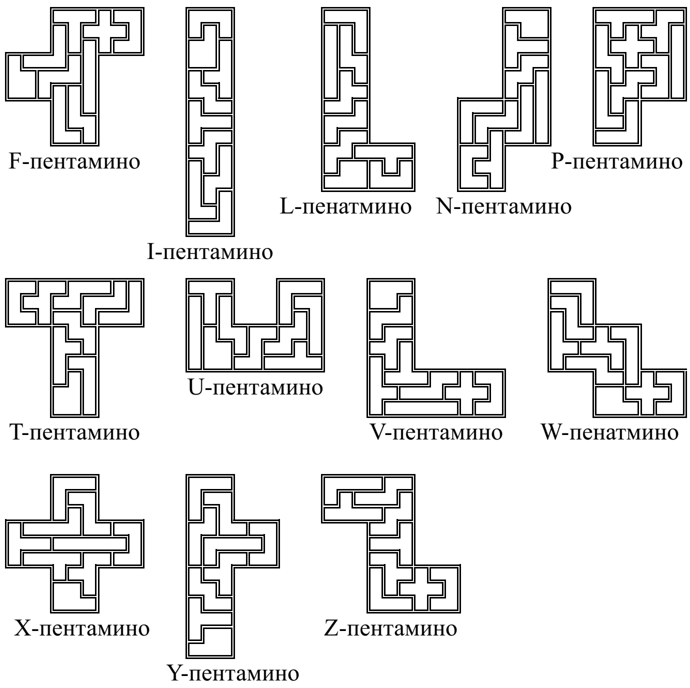


Рис. 14. Примеры покрытий 9 пентамино утроенных пентамино. Утроенные пентамино расположены в алфавитном порядке

§ 3. Развитие полимино

Полимино (именно полимино, фигуры из квадратов, не трогая пока других многоугольников) можно развить тремя путями: увеличением порядка полимино, увеличением размерности квадрата и компьютерным непредсказуемым путем.

3.1. Гексамино

Согласно табл. 1 полимино из 6 квадратов называется *гексамино*. Бывают четные и нечетные гексамино. На рис. 15 и 16 перечислены все 35 гексамино. Форма гексамино настолько разнообразна, что их буквенное обозначение отсутствует.

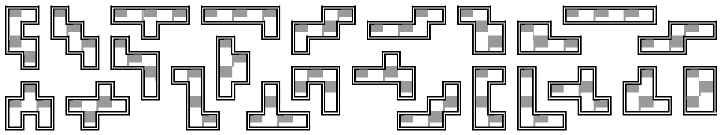


Рис. 15. 24 нечетных гексамино

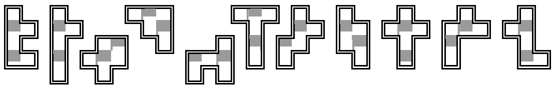


Рис. 16. 11 четных гексамино

С помощью проверки на четность легко решается задача 6.

Задача 6. Прямоугольник из гексамино.
Можно ли сложить прямоугольник из 35 различных гексамино?

Вычисление количества полимино различных порядков — не такая простая задача. Перечислим известные количества полимино.

Таблица 3

Количество полимино

Порядок полимино	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Двусторонних	1	1	2	5	12	35	108	369	1285	4655	17073	63600
Односторонних	1	1	2	7	18	60	196	704	2500	9189	33896	126759
Многосвязных	0	0	0	0	0	0	1	6	37	195	979	4663

В заключение раздела расскажем об одной классификации полимино, возникающей начиная с полимино 7 порядка — гептамино.

Определение 9. Односвязное и многосвязное полимино.
Односвязное полимино не содержит пустот внутри себя, ***многосвязное*** — содержит пустоты.

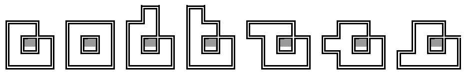


Рис. 17. Многосвязные полимино: 1 гептамино и 6 октамино

В табл. 3 приведено количество многосвязных полимино.

3.2. Кубики сома

Увеличим размерность квадрата и перейдем от квадратов к кубам.

Из чудесного набора собирают пространственные фигуры.

Определение 10. Кубики сома.
Кубики сома — 7 элементов из элементарных кубиков с рис. 18: 1 из них составлен из 3 кубиков, остальные 6 — из 4 кубиков.

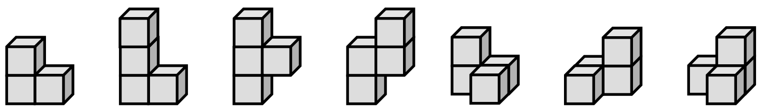


Рис. 18. 7 элементов кубиков сома

Последние 3 кубика сома существенно пространственные: центры составляющих их кубиков не лежат в одной плоскости.

Классическая задача игры сома — составление куба $3 \times 3 \times 3$. Этот куб можно сложить из 7 элементов сома 240 способами с учетом симметрии (симметричные кубы считаются за один).

Игра сома достаточно легка: она включает несколько достаточно простых элементов. Чтобы играть в сома, нужно иметь комплект из элементов: в § 4 Приложения описано, как его сложить из бумаги.

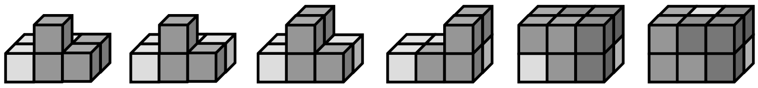


Рис. 18. Простейшие фигуры из двух и трех кубиков сома

3.3. Тетрис

Игра-бестселлер тетрис изобретена в России.

Определение 11. Тетрис.

Тетрис — это компьютерная игра со следующими признаками:

1) 7 односторонних тетрамино падают в плоском стакане;
2) тетрамино можно поворачивать и передвигать в плоскости;
3) элементы тетрамино накапливаются в кучу на дне стакана;
4) куча уменьшается при выполнении определенных правил;
5) игра заканчивается при переполнении стакана;
6) больше элементов попадет в стакан — больше будет очков;
7) скорость падения растет с ростом числа упавших элементов.

а) б)

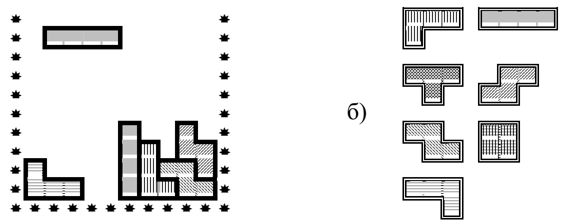


Рис. 19. а) Нижняя половина стакана тетриса с фрагментом игры: когда I-тетрамино опустится вниз, то исчезнет 2-й слой снизу.
б) 7 односторонних элементов тетрамино из классического тетриса

В классическом тетрисе плоский стакан имеет размеры 10×20 и при полном заполнении одного или нескольких горизонтальных рядов 1×10 квадратами тетрамино (рис. 19).

Рассмотрим некоторые из множества обобщений тетриса.

1. *Увеличение и уменьшение порядка полимино*. В стакане падают элементы от 1-го до 7-го порядка. Существует спортивный вариант тетриса — *пентикс* — с падающими пентамино; поиграть в режиме он-лайн и получить рейтинг можно на алтайском сайте tbs.asu.ru.

2. *Увеличение порядка стакана*. Элементы из кубиков падают в трехмерный колодец — 3-мерный тетрис. Плоские элементы

соскальзывают по стенкам трехмерного колодца — 2,5-мерный тетрис.

3. *Изменение правил*. Исчезают полимино одного цвета порядка выше 2. Квадраты крепятся на шарнирах и скатываются.

4. *Добавление препятствий в стакане*. Бегающие человечки, блохи и т. д. Возникновение лишних квадратов, правил поворота и т. д.

§ 4. Другие звери

Разовьем теперь полимино, изменяя форму составного элемента — квадрата. Получим других зверей — другие *полиформы*.

Определение 12. Полиформа.

Полиформа — фигура, составленная из одинаковых многоугольников. ***Порядок*** полиформы — это количество составляющих ее многоугольников. Полиформа из n многоугольников называется ***n-форма***.

4.1. Полиамонды

В игру, аналогичную полимино, можно играть, если воспользоваться фигурами, составленными из правильных треугольников.

Определение 13. Полиамонд.

Полиамонд — это фигура, составленная из одинаковых правильных треугольников так, что с каждого треугольника можно перейти по общим сторонам на любой другой треугольник. ***Порядок*** полиамонда — это количество составляющих его треугольников. Полиамонд из n треугольников называется ***n-амонд***.

Моноамонд — полиамонд порядка 1, ***диамонд*** — порядка 2, ***триамонд*** — 3, ***тетрамонд*** — 4, ***пентамонд*** — 5, ***гексамонд*** — 6.

Всего существует по 1 моноамонду, диамонду и триамонду, 3 тетрамонда, 4 пентамонда и 12 гексамондов (рис. 20—21).

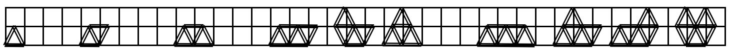


Рис. 20. 1 моноамонд, 1 диамонд, 1 триамонд,
3 тетрамонда и 4 пентамонда

Рис. 21. 12 гексамондов

Самые интересные фигуры получаются из 12 гексамондов.

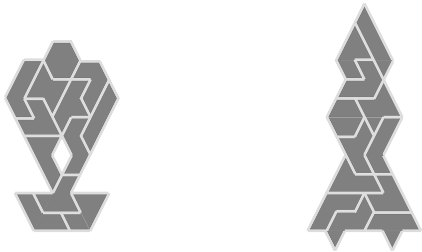


Рис. 22. Две фигуры из гексамондов

4.2. Полигекс

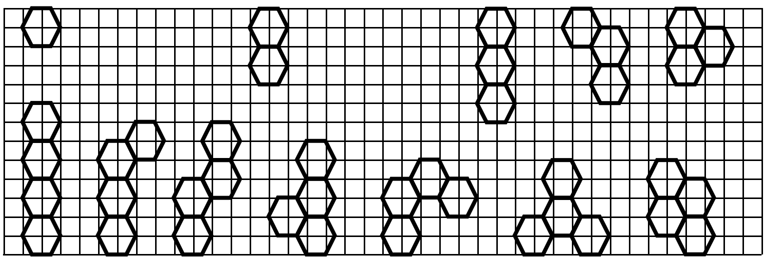
Элементы, составленные из правильных квадратов и треугольников, уже рассмотрены. Осталось рассмотреть шестиугольники.

Определение 14. Полигекс.

Полигекс — это фигура, составленная из одинаковых правильных шестиугольников так, что с каждого шестиугольника можно перейти по общим сторонам на любой другой шестиугольник. ***Порядок*** полигекса — это количество составляющих его шестиугольников. Полигекс из *n* шестиугольников называется ***n-гекс***.

Моногекс — полигекс порядка 1, ***дигекс*** — порядка 2, ***тригекс*** — 3 и ***тетрагекс*** — 4.

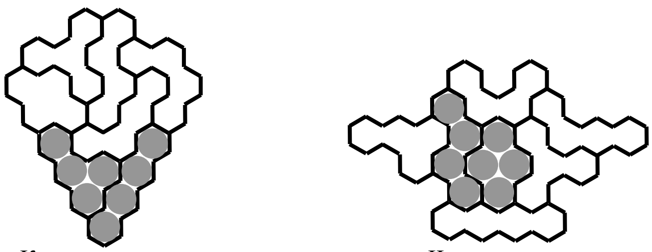
Всего существует по 1 моногексу и дигексу, 3 тригекса и 7 тетрагекса (рис. 23).



Полоса Червь Волна Пистолет Арка Пропеллер Пчела

Рис. 23. 1 моногекс, 1 дигекс, 3 тригекса и 7 тетрагексов

Самые интересные фигуры получаются из 7 тетрагексов.



Кисть винограда Чернильница

Рис. 24. Две фигуры из тетрагексов

4.3. Полиаболо

Все правильные многоугольники, которыми можно замостить плоскость, рассмотрены. Приведем пример использования неправильных одинаковых многоугольников.

Определение 15. Полиаболо.

Полиаболо — это фигура, составленная из одинаковых прямоугольных равнобедренных треугольников так, что с каждого треугольника можно перейти по общим сторонам на любой другой треугольник. ***Порядок*** полиаболо — это количество составляющих его треугольников. Полиаболо из *n* треугольников называется ***n-аболо***.

Моноаболо — полиаболо порядка 1, ***диаболо*** — порядка 2, ***триаболо*** — 3 и ***тетраболо*** — 4.

Всего существует 1 моноаболо, 3 диаболо, 4 триаболо и 14 тетраболо (рис. 25—26).

Рис. 25. 1 моноаболо, 3 диаболо и 4 тетраболо

A B C D E F G H I J K L M N

Рис. 26. 14 тетраболо

Обозначим через k катеты элементарных треугольников, а через h — гипотенузы. Тогда в зависимости от того, что считать единицей длины — катет или гипотенузу, суммарная площадь всех 14 элементов тетраболо равна либо 28 единичным квадратам, либо 14 единичным квадратам. Поскольку 14 и 28 не являются квадратами натуральных чисел, из 14 элементов тетраболо нельзя составить квадрат.

Можно доказать, что из 14 элементов тетраболо нельзя также составить никакой прямоугольник.

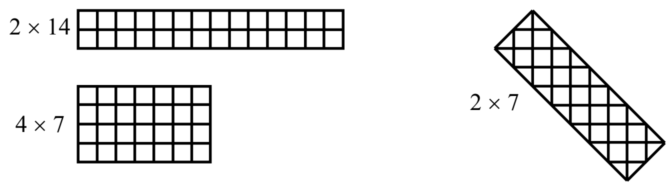
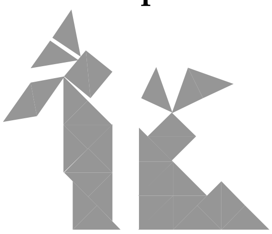


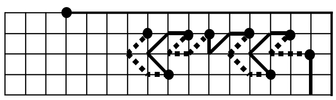
Рис. 27. Все 3 прямоугольника из 28 квадратиков (кроме высоты 1). Их нельзя собрать из тетраболо

Глава 4. Игры и головоломки

Танграм

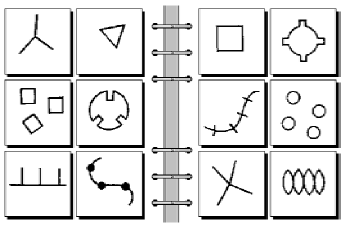


Футбол



Лабиринты

Задачи Бонгарда



Материал четвертой главы можно найти в следующих изданиях.

[Гарднер 1] Глава 25. Лабиринты. Глава 33. Механические головоломки.

[Гарднер 5] Глава 3. Танграмы, часть I. Глава 4. Танграмы, часть II.

[Доморяд] § 25. Построение фигур из данных частей. Фигуры из кусочков квадрата.

[Докучаева] Головоломки из бумаги и картона. Магический квадрат.

[Хофштадтер] Глава XIX. Искусственный интеллект: виды на будущее. Задачи Бонгарда.

http://tangrams.ca

http://labyrinthsociety.org

http://georgetown.edu/labyrinth

http://cs.indiana.edu/~hfoundal/research.html

§ 1. Танграм

Задачи на разрезание — древнейшие в занимательной математике. Плоские фигуры разрезают на части, из которых и складывают новые фигуры. Танграмы похожи на мозаику (пазлы), но в мозаике из многих кусочков неправильной формы нужно сложить одну фигуру правильной формы, в танграмах же наоборот, из нескольких кусочков правильной формы складывают много необычных фигурок.

1.1. Определение

Определение 1. Танграм.

Танграм — игра, представляющая собой части — ***таны*** — разрезанного как на рис. 1 квадрата, из которых составляют разные фигуры.

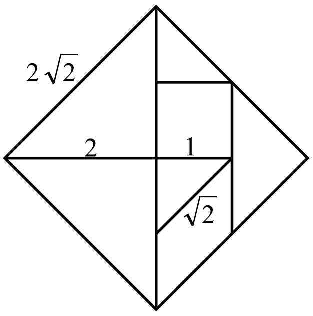


Рис. 1. Семь танов

Фигура, сложенная из танов, также называется ***танграмом***.

Заметим, что параллелограмм, единственный не зеркально симметричный тан, можно укладывать любой стороной.

Углы всех танов кратны 45°. Введем единицу измерения танов: примем сторону квадратного тана за единицу. Тогда длины сторон танов выражаются числами 1, 2, $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$. Площадь танграма равна 8.

Миф о древности танграма создал американский изобретатель головоломок Сэм Лойд, выпустив в 1903 г. книжку «Восьмая книга Тана», в которой мистифицировал историю танграма, возникшего якобы в Китае более 4000 лет назад. Сюжет одного из детективов

(«Убивающие ногтями» голландского дипломата Роберта Ван Гулика) строится вокруг танов. Танграмом очень увлекался Эдгар Аллан По.

Определение 2. Элементарный треугольник.

Элементарный треугольник — максимальный прямоугольный равнобедренный треугольник, из экземпляров которого сложены все таны.

7 танов разбиваются на 16 одинаковых элементарных треугольников с катетом 1 и гипотенузой $\sqrt{2}$, как показано на рис. 2.

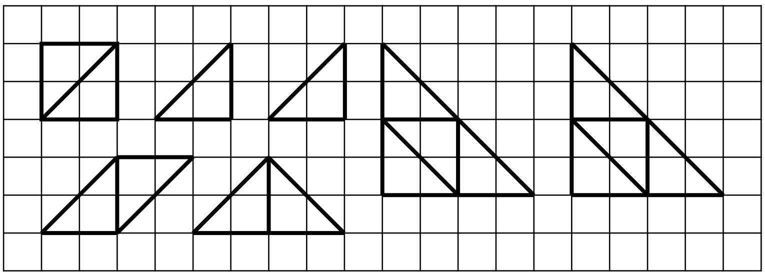


Рис. 2. Семь танов, разбитых на элементарные треугольники

Танграм выпускается в плоской квадратной коробочке со стороной $2\sqrt{2}$, в которую таны укладываются, как показано на рис. 1. Так что уложить таны в коробочку уже означает собрать танграм.

Задача 1. Укладка танов в коробочку.

Танграм выпускается также в более компактном виде в квадратной коробочке со стороной 2, в которую 7 танов укладываются в два слоя. Соберите и нарисуйте эти два слоя.

Игры в танграм распадаются на три основные категории.

1. Поиск способов построения данного танграма (фигуры) или доказательство невозможности этого.
2. Изображение силуэтов животных, людей и других узнаваемых предметов с наибольшей выразительностью и юмором.
3. Решение различных задач комбинаторной геометрии.

Понятно, что в танграм можно играть и другими способами.

Предлагались и предлагаются и другие варианты разбиения квадрата, подражающие танграму, но ни один из них не может сравниться по популярности с танграмом. как и в случае с *оригами*, очарование танграма таится в простоте материала и в кажущейся непригодности его для создания фигурок, обладающих эстетической привлекательностью.

1.2. Классификация

Определение 3. Связный танграм.

Связный танграм, или собственно танграм — это танграм, состоящий из одного куска, другими словами, с любого тана такого танграма можно перейти на любой другой тан, переходя только через общие части сторон танов.

Несвязный танграм, или несобственно танграм — это танграм, не являющийся связным.

На рис. 3 слева изображен несвязный танграм. У этого танграма отсутствует даже какая-либо связная часть, т. е. он состоит из 7 несвязных частей. На рис. 3 справа нарисован связный танграм.

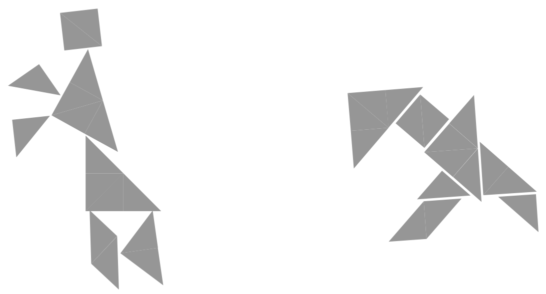


Рис. 3. Идущий (слева) и наклонившийся (справа) человек

Итак, танграмы распадаются на два семейства танграмов — связных и несвязных. Среди связных танграмов, в свою очередь, выделим важный класс танграмов.

Определение 4. Точно подогнанный танграм.

Периметр танграма — внешний контур танграма, другими словами, это свободные части контуров танов, которые не соприкасаются с другими танами.

Танграм без дыр — это танграм без лакун внутри, даже таких, которые касаются периметра танграма хотя бы в одной точке.

Точно подогнанный танграм — это связный танграм без дыр, составленный так, что если два тана соприкасаются, то совпадают либо катет с катетом, либо гипотенуза с гипотенузой элементарных треугольников, из которых они составлены.

Такая точная подгонка характерна для компьютерных, а также для восточных технологий. На Востоке существует тенденция выдерживать размеры домов, мебели и т. д. кратными, т. е. выраженными целым числом, некоторой основной единице длины. Например, японская строительная промышленность одна из наиболее эффективных в мире: ее строительные пиломатериалы стандартизированы по размерам, кратным основной единице длины, которая называется «мат».

Точно подогнанные танграмы удобно вычерчивать на клетчатой бумаге так, чтобы все целочислительные стороны располагались по линиям сетки, а стороны, кратные $\sqrt{2}$ — по диагоналям сетки.

На рис. 4 изображены точно подогнанные танграмы.

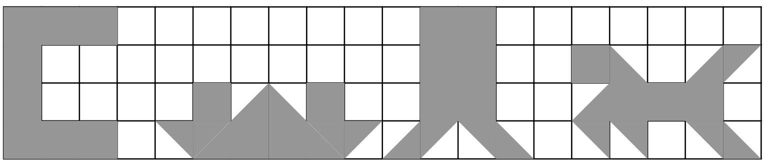


Рис. 4. Точно подогнанные танграмы
(Буква «С», Корабль, Бочка, Собака)

Точно подогнанные танграмы можно классифицировать по числу сторон периметра.

Теорема 1. Максимальная длина периметра.

Максимальное число сторон периметра точно подогнанного танграма составляет 18.

Доказательство теоремы 1. Максимальная длина периметра.

Доказательство проведем в два этапа: 1) покажем, что число сторон периметра точно подогнанного танграма не может быть больше 18; 2) приведем пример точно подогнанного танграма с числом сторон 18.

1. Подсчет на рис. 2 показывает, что периметр всех 7 танов насчитывает 30 элементарных отрезков (катетов и гипотенуз). При составлении точно подогнанного танграма по крайней мере 6 пар из них соединяются вместе, и для периметра теряются $6 \times 2 = 12$ элементарных отрезков. Остается $30 - 12 = 18$ элементарных отрезков.

2. Примером точно подогнанного танграма с периметром из 18 сторон является Собака на рис. 4.

Определение 5. Выпуклый танграм.

Выпуклый танграм — это многоугольник, все внутренние углы которого меньше 180°. Другими словами, если концы отрезка лежат на танграме, то и весь отрезок будет лежат на танграме.

Можно доказать, что выпуклый танграм всегда является точно подогнанным. В 1942 г. Фу Тзянван и Чуан Чисюн доказали, что существует только 13 выпуклых танграмов. Все они есть на рис. 5: из 7 танов можно сложить 13 выпуклых многоугольника: 1 треугольник, 6 четырехугольника, 2 пятиугольника и 4 шестиугольника.

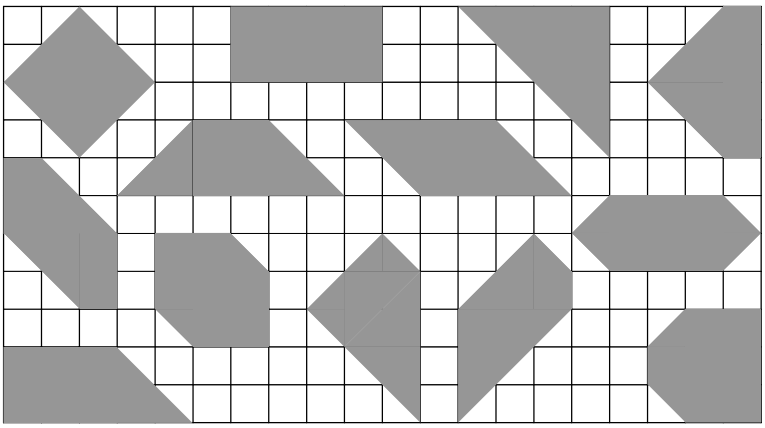


Рис. 5. Все 13 выпуклых танграмов

Теорема 2. Танграмы-тетрамино.

Из 7 танов можно сложить только квадратное тетрамино.

Доказательство теоремы 2. Танграмы-тетрамино.

1. Квадратное тетрамино-танграм показано на рис. 1.

2. Докажем методом перебора всех вариантов, что остальные 4 тетрамино на рис. 6 сложить нельзя. Поместим в каждое тетрамино квадратный тан всеми возможными 3 способами. В Т-тетрамино невозможно пристроить два больших треугольных тана. В трех остальных тетрамино при каждом расположении квадратного тана имеется от 0 до 2 способов размещения двух больших треугольных танов. Но при каждом из этих способов не удается разместить тан-параллелограмм.

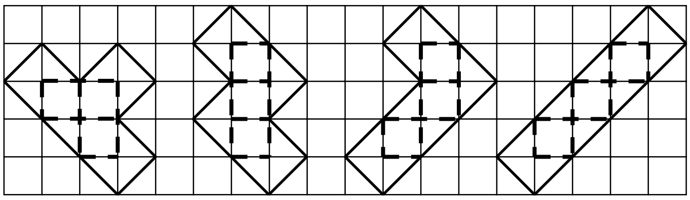


Рис. 6. T-, N-, L- и I-тетрамино нельзя сложить из 7 танов

1.3. Фигурки

Из танов складывают разнообразные забавные и выразительные фигурки. Некоторые из них представлены на рис. 7.

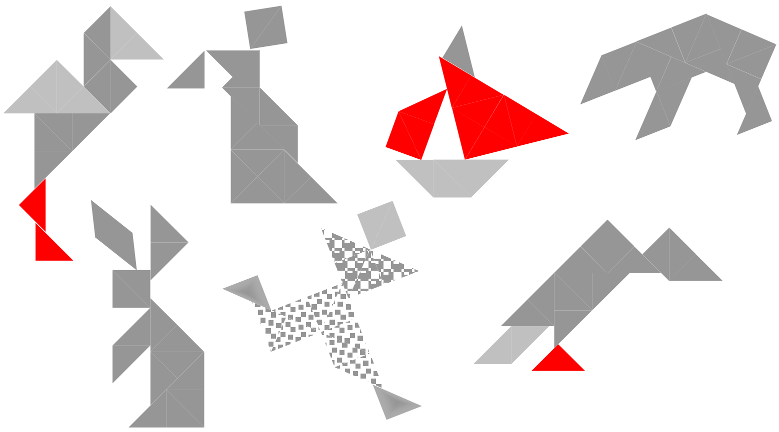


Рис. 7. Аист, Леди Белинда, Яхта, Белый медведь,

Кролик, Бегущий мальчик, Гриф

«Замечательная особенность танграмных фигурок,— писал английский мастер головоломок Генри Дьюдени,— состоит в том, что они говорят нашему воображению гораздо больше, чем в них заложено. Кто, например, при взгляде на Леди Белинду не почувствует ее высокомерие? „Нога“ Аиста кажется тоньше, чем любой из составляющих ее танов. Это — настоящая оптическая иллюзия. Небольшой выступ „паруса“ в верхней части Яхты позволяет воображению легко достроить целую мачту.»

Замечательные фигурки получаются при объединении двух тематически связанных между собой танграмов, каждый из которых составлен из полного комплекта 7 танов, как на рис. 8.

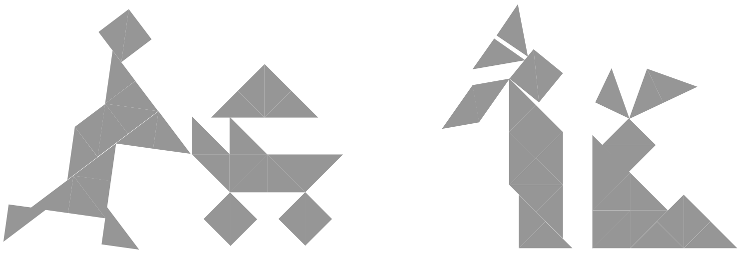


Рис. 8. Женщина, толкающая коляску и Индейцы

Определение 6. Парные танграмы.

Парные, или парадоксальные, танграмы — два танграма такие, что при из совместном рассматривании кажется, что один из них собран без одного тана.

На рис. 9 приведены два примера парных танграмов.

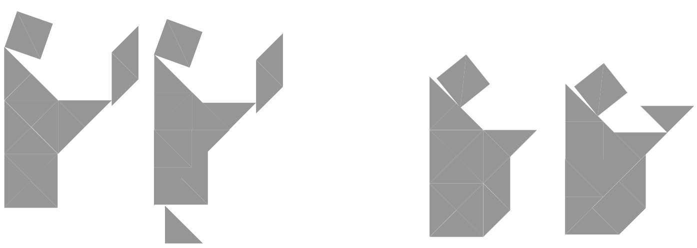


Рис. 9. Парные танграмы: Монах со свечой и Монах с чашей

Парные танграмы используются в следующем фокусе. К семи танам добавляется тан, которого «не хватает» в *левом* танграме. Фокусник собирает на глазах у зрителей *левый* танграм с приставленным лишним таном так, чтобы было похоже на *правый* танграм. Затем фокусник перемешивает таны и при этом делает вид, что прячет в карман лишний тан (и на самом деле прячет!). Теперь фокусник собирает *правый* тан и заявляет, что спрятанный тан выпрыгнул из кармана!

§ 2. Футбол

Это малоизвестная игра, распространенная больше в профессиональных математических кругах. Она чрезвычайно проста, но требует терпения и накопления опыта. Чтобы играть в нее, достаточно иметь листок обычной тетради в клеточку и две ручки разных цветов.

2.1. Основные правила

Определение 7. Футбол.

Футбол — игра со следующими основными правилами:

1) на листе бумаги в клеточку рисуют по линиям сетки футбольное поле, состоящее из следующих частей:

а) ***граница поля*** по краям листа;

б) разрыв в 6 клеточек на середине коротких сторон для ***ворот***;

в) ***штанги*** в узлах клеточек по краям ворот;

г) точки в ***центре поля*** на одной оси с центром обоих ворот;

2) два игрока ходят по очереди. Их имена пишутся за воротами;

3) чтобы не перепутать ход игрока, используют ручки 2 цветов;

4) игроки перемещают по полю ***мяч*** в виде точки:

а) цель игры — пересечь мячом ***линию ворот*** противника за пределы поля, т. е. ***забить гол*** (мяч на границе ворот — не гол);

б) игрок, забивший гол, выигрывает,— ***матч*** заканчивается;

в) мяч не должен касаться границ поля;

г) мяч может касаться и проходить через штангу;

5) ходы игроки делают по следующим правилам:

а) ***ход игрока*** — ломаная из трех отрезков из сторон или диагоналей клеточек, которая «ведет» мяч;

б) ход игрока не должен касаться или пересекать линии предыдущих ходов обоих игроков;

в) ход игрока начинается в узле, в котором закончился ход другого игрока. Первый игрок начинает ходить из центра поля;

г) кто ходит первым, решается по жребию или договоренности;

6) если игрок не может походить — нет свободных узлов, то:

а) другой игрок бьет ***штрафной удар***;

б) штрафной удар имеет длину 10 клеток;

в) штрафной удар может пересекать линии ходов и штрафных и должен заканчивается в свободном узле или за воротами;

г) игрок выбирает направление своего штрафного из допустимых. Штрафной, уходящий за ворота, считается длиной 10 клеток.

В футболе нет фиксированных размеров поля. Обычно на странице стандартной тетради в клеточку (размер 32 × 39 клеток) по линиям сетки рисуется поле максимального размера. Затем примерно в центре поля ставится точка. После этого рисуются ворота, центры которых находятся на той же линии, что и центр поля.

На рис. 10 изображены игрушечные, уменьшенные поля, на которых показаны линии первого хода. Последующими ходами нельзя пересекать эти линии, а также все ходы или штрафные удары не должны заканчиваться на уже занятых первым ходом четырех узлах.

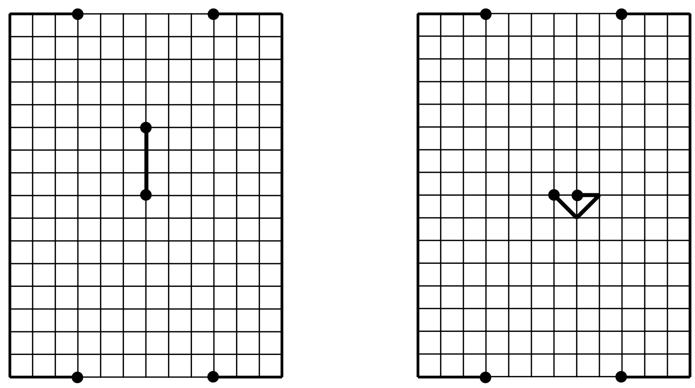


Рис. 10. Два разных первых хода

Ворота рисуются одинаковыми, когда игроки имеют примерно одинаковую силу. Для игроков разной квалификации ворота ставятся разной ширины: для более опытного игрока ворота расширяют, для менее искусного игрока — уменьшают. Когда играет мастер с новичком, для того, чтобы сделать игру хоть сколько-нибудь интересной, новичку делают ворота из одной точки (из одной штанги), а мастер получает ворота шириной с игровое поле и ходит вторым.

Секрет игры заключается не в том, чтобы при первой возможности пробивать штрафные удары. Штрафные удары лучше пробивать в более удобных для этого местах. В начальной стадии игры можно выиграть и без штрафных ударов. Для такой игры нужно уметь контролировать и вести противника, нужно иметь развитую футбольную технику игры. Однако вести противника хорошо получается, когда игроки разной квалификации.

2.2. Техника игры

Уже из рис. 10 видно, что даже первый ход можно выполнить неоднозначно, преследуя разнообразные цели. На первых порах нужно научиться: 1) добиваться штрафных ударов; 2) не позволять противнику делать штрафные; 3) управлять ходами противника.

Определение 8. Завал.

Завал, или получение штрафного удара — ход, после которого противник не может походить, и производится штрафной удар.

Задача 2. Завал.

а) Найдите все способы завала в позициях на рис. 11.

б) Найдите все разные с точностью до симметрии первые ходы из центра поля и те из них, которые позволяет второму игроку сразу произвести штрафной удар.

Рис. 11. Позиции, в которых игрок может получить штрафной удар

Решение задачи 2. Завал.

а) На первой позиции возможны 2 разных завала (см. рис. 12).

На второй позиции возможны 6 разных завалов (найдите сами).

б) Из центра поля возможны 46 различных первых ходов, из них 17 ведут к завалу (ходы найдите сами, примеры см. на рис. 13).

Рис. 12. Два способа завала

Рис. 13. Два завальных хода из центра поля

Определение 9. Вынужденный ход.
Вынужденный ход — ход с вынужденным первым отрезком.

Предоставление противнику вынужденного хода позволяет контролировать ходы противника. Делая вынужденный ход, трудно избежать завала. Иногда вместо того, чтобы завалить противника, можно заставить его сделать несколько вынужденных ходов и продвинуться к воротам противника ближе, чем это было при сразу произведенном штрафном ударе. Цепочка вынужденных ходов обычно заканчивается при приближении противников к препятствию.

На рис. 14 показано, как вместо завала на рис. 12 организовать цепочку вынужденных ходов и продвинуться вплотную к воротам противника.

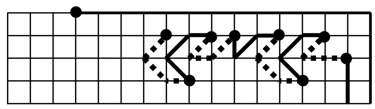


Рис. 12. Два способа завала

2.3. Полные правила

Этот параграф не является, конечно, исчерпывающим руководством по игре футбол. Но оставшиеся правила приведем полностью.

Определение 10. Профессиональный футбол.

Оставшиеся правила по футболу:

1) игрок вправе выбирать место завала, которое он может рассчитать, исходя из результатов последующего штрафного удара;

2) если нельзя пробить штрафной на 10 клеток или за ворота, то игрок вправе удлинить или укоротить, как захочет, штрафной на 1 клетку. Если и это невозможно, то тогда на 2, и т. д.;

3) если по всем направлениям от узла завала нет свободных узлов, то фиксируется ***ничья***;

4) если после штрафного противнику некуда ходить, то снова бьется штрафной, если опять некуда, снова штрафной, и т. д.,— это называется ***многократный (двойной, тройной и т. д.) штрафной удар***;

5) матч с многократным ударом называется ***шедевр***.

В принципе можно выиграть, заставив противника походить или пробить штрафной (многократный штрафной) в свои ворота. Но это очень редко получается… Правда, ничья встречается еще реже.

§ 3. Лабиринты

Есть греческий миф о единоборстве юного Тезея с чудовищем Минотавром, обитавшем в кносском лабиринте на Крите. Выбраться из лабиринта Тезею помог клубок ниток, подаренный ему Ариадной.

Имеется английский вариант этой легенды. В Англии самым знаменитым архитектурным лабиринтом была беседка Розамунды. Повторно она была построена в вудстокском парке в XII веке королем Генрихом II, который попытался спрятать в этом лабиринте возлюбленную Розамунду Прекрасную от свой супруги Элеоноры Аквитанской. Предание рассказывает, что нить Ариадны помогла Элеоноре проникнуть в центр лабиринта, где ослепленная ревностью королева заставила несчастную Розамунду принять яд.

Англичане часто выкладывали лабиринты из дерна рядом с церковью. Его прохождение являлось как бы частью религиозного ритуала.

3.1. Определение

Определение 11. Лабиринт.

Лабиринт — топологическая фигура, в которой ищется путь между двумя точками. ***Цель лабиринта*** — отмеченное место в лабиринте, которого нужно достичь от входа и затем выйти из лабиринта.

Топологическая фигура означает, что если фигура будет нарисована на воздушном шарике, то. как бы шарик ни растягивать, путь между двумя точками останется правильным.

В Англии самый известный лабиринт из живых изгородей, описанный в повести Джерома К. Джерома «Трое в одной лодке, не считая собаки», был сооружен в 1690 г. при дворце Вильгельма Оранского в Хэмптон-Корте. План этого лабиринта в его современном виде показан на рис. 13.

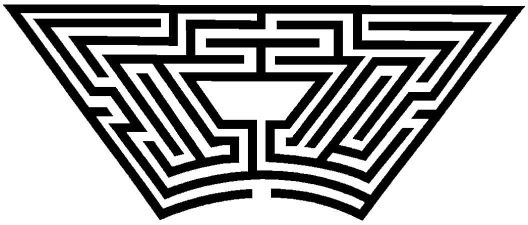


Рис. 13. Лабиринт в Хэмптон-Корте

Если есть карта лабиринта, то его можно решить очень быстро: достаточно заштриховать все тупики, тогда останутся только прямые пути к цели. На рис. 14 заштрихованы все тупики лабиринта. Совсем иное дело, если нужно пробраться в лабиринт, плана которого нет…

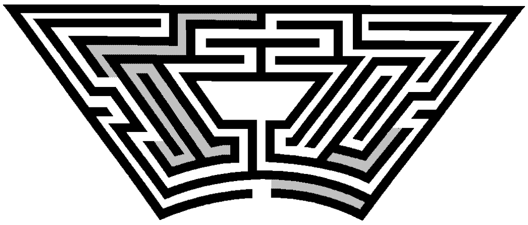


Рис. 14. Лабиринт с заштрихованными тупиками

Если у лабиринта только один вход, а задача состоит в нахождении дороги к единственному выходу, то такая задача всегда решается по следующему алгоритму. Правда, такой путь вряд ли будет кратчайшим.

Алгоритм 1. Простой алгоритм прохождения лабиринта.

Нужно идти по лабиринту, все время касаясь стенки одной и той же рукой (все время правой или все время левой).

Задача 3. Простое прохождение лабиринта.

Нарисуйте прохождение лабиринта в Хэмптон-Корте, пользуясь простым алгоритмом.

3.2. Прохождение односвязных лабиринтов

Определение 12. Связность лабиринта.

Односвязный лабиринт — лабиринт, не содержащий замкнутых маршрутов. Другими словами, в нем нет отдельно стоящих стенок.

Многосвязный лабиринт имеет отдельно стоящие стенки.

На рис. 15 показаны односвязный (слева) и многосвязный (справа) лабиринты.

Путь, проложенный по простому алгоритму, в односвязном лабиринте пройдет по одному разу туда и обратно по всем закоулкам. Поэтому всегда где-то по дороге цель будет достигнута.

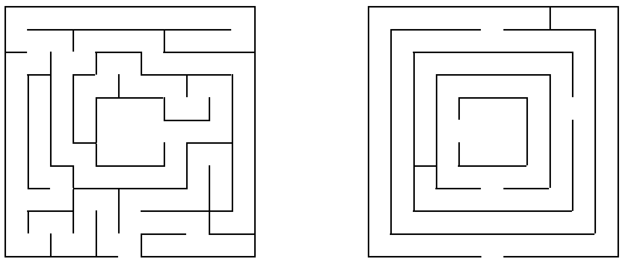


Рис. 15. Односвязный (слева) и многосвязный (справа) лабиринты

Задача 4. Прохождение односвязного лабиринта.

Нарисуйте прохождение односвязного лабиринта с рис. 15, пользуясь простым алгоритмом.

Целью лабиринта в Хэмптон-Корте служит центральная площадка. Это лабиринт многосвязный, но две его замкнутые петли не окружают цели. Поэтому, войдя в него и держась за стенку, можно добраться до цели и выбраться наружу, ни разу не побывав при этом в какой-то из двух петель.

Однако в многосвязном лабиринте по простому алгоритму попасть к цели, вокруг которой проходит замкнутый маршрут, невозможно. К таким относится лабиринт на рис. 15 справа.

3.3. Прохождение многосвязных лабиринтов

При полном прохождении многосвязного лабиринта без нити Ариадны уже не обойтись.

Алгоритм 2. Прохождение многосвязного лабиринта.

1. Пробираясь по лабиринту, все время отмечаем путь, ведя линию вдоль стенки, например, *правой*.

2. Дойдя до разветвления, выбираем любой новый путь.

3. Если, идя по *новому* пути (где нет линии вдоль *левой* стенки): а) попадаем в тупик; б) выходим на какой-нибудь перекресток, где уже были,— то поворачиваем обратно.

4. Если, идя по *старому* пути (где есть линия вдоль *левой* стенки), выходим к перекрестку, то: а) если есть новый путь, то выбираем его; б) если нет нового пути, то идем по старому.

5. Никогда не пойдем по пути с отметками по обеим сторонам.

Задача 5. Прохождение многосвязного лабиринта.
Нарисуйте прохождение многосвязного лабиринта.

Решение задачи 5. Прохождение многосвязного лабиринта.
Прохождение многосвязного лабиринта показано на рис. 16.

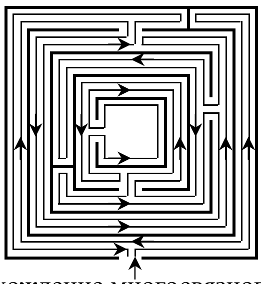
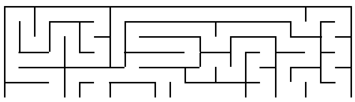


Рис. 16. Прохождение многосвязного лабиринты

Задача 6. Прохождение многосвязного лабиринта.
Нарисуйте прохождение лабиринта в саду Роуза Болла, рис. 17.



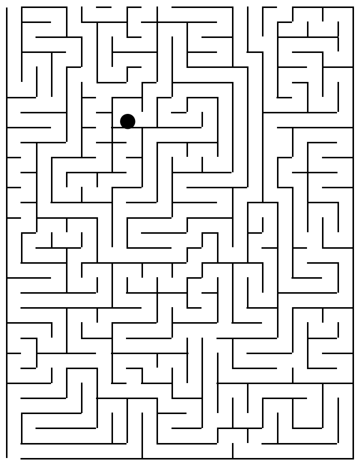


Рис. 17. Многосвязный лабиринт в саду Роуза Болла

§ 4. Задачи Бонгарда

Эти интереснейшие задачи могут быть предложены людям, компьютерам или представителям внеземных цивилизаций.

4.1. Определение

Определение 13. Задача Бонгарда.

Задача Бонгарда — это проблема, подобная одной из тех ста, которые предложил в своей книге «Проблемы узнавания» русский ученый Михаил Моисеевич Бонгард. На рис. 18 показаны типичные задачи Бонгарда на числа из его книги.

Каждая задача состоит из 12 фигур, взятых в рамку — ***рамок Бонгарда***. 6 левых рамок составляют класс I, 6 правых — класс II. Рамки нумеруются следующим образом:

I-А	I-Б	II-А	II-Б
I-В	I-Г	II-В	II-Г
I-Д	I-Е	II-Д	II-Е

Задача Бонгарда состоит в том, чтобы определить, чем рамки класса I отличаются от рамок класса II.

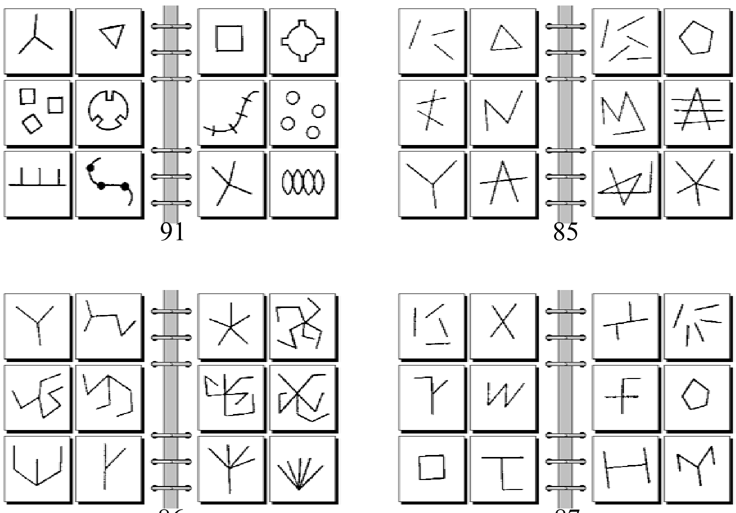


Рис. 18. Задачи Бонгарда №№ 91, 85, 86, 87.

4.2. Простые задачи

Задачи на рис. 18 относятся к простым, в которых решение можно отыскать сразу, за один шаг, и отличие рамок Бонгарда класса I от класа II можно выразить одним словосочетанием или даже словом. К таким же простым относятся и задачи Бонгарда на рис. 19.

Задача 7. Задачи Бонгарда.
Решите все задачи Бонгарда на рис. 18—20.

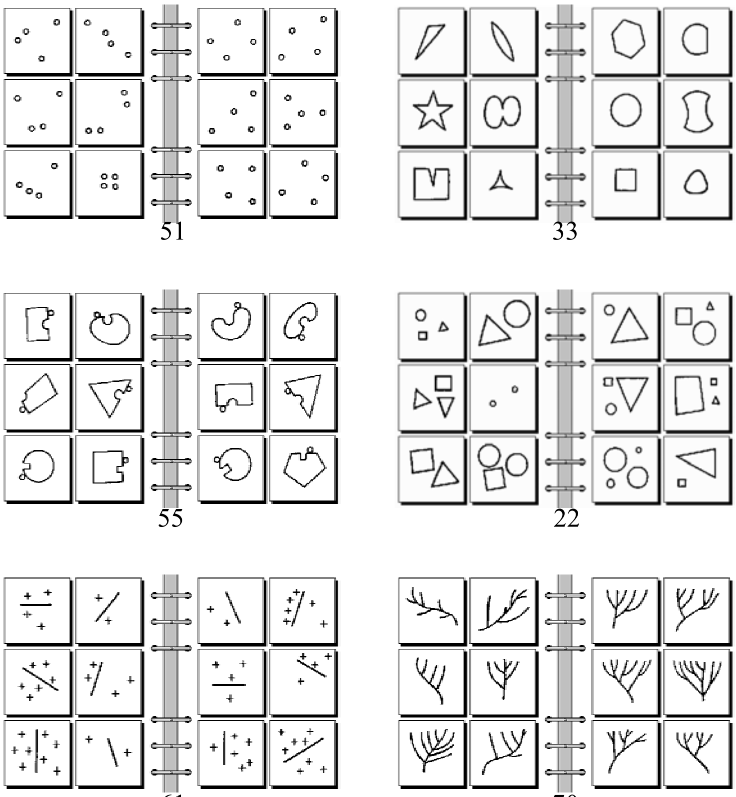


Рис. 19. Задачи Бонгарда №№ 51, 33, 55, 22, 61, 70.

4.3. Составные задачи

Задачи на рис. 20 относятся к более сложным, в которых решение отыскивается либо за два этапа, где первый этап — фильтрация, т. е. устранение, абстрагирование от лишних объектов, либо выражается сложным предложением.

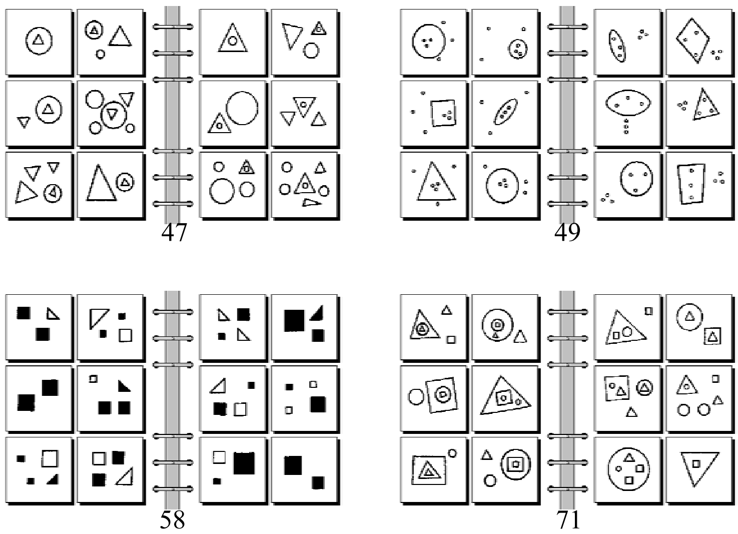
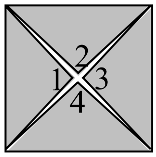


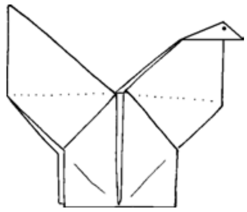
Рис. 20. Задачи Бонгарда №№ 47, 49, 58, 71.

Приложение. Оригами

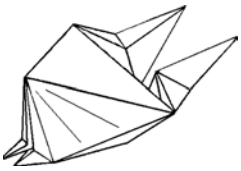
Заготовки



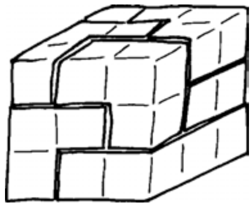
Классика



Журавлик и Чертик



Кубики Азакова



Материал приложения можно найти в следующих изданиях.
[Афонькин]
[Гарднер 1] Глава 31. Оригами.
[Докучаева] Складываем из бумаги
http://origart.by.ru
http://vrpilots.com/rus/origami/whtpaper.htm
http://merrimack.edu/~thull/

§ 1. Заготовки

Определение 1. Оригами.

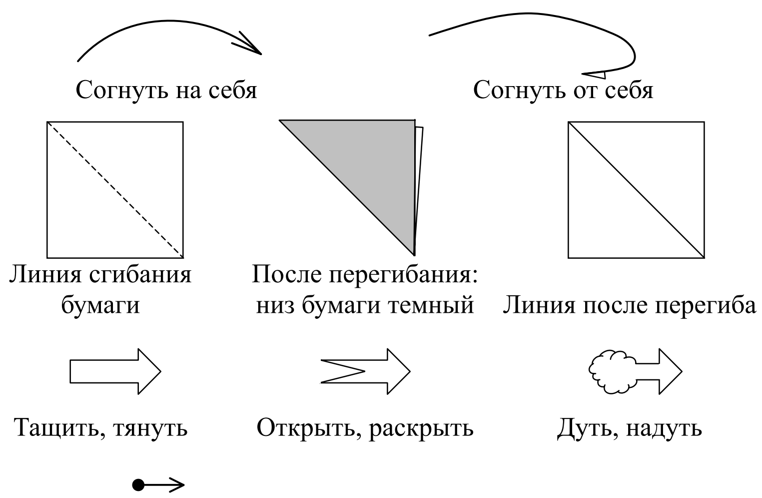
Оригами — ритуал и искусство складывания фигурок из бумаги без применения ножниц и клея. ***Фигурка оригами*** — красиво сложенный лист бумаги. ***Двигающаяся фигурка*** — фигурка, у которой движутся все или какие-то ее части при воздействии на некоторые другие.

Оригами зародилось в Японии как ритуал, как бумажные иероглифы. Сложенные из бумаги птички, которые носили в виде украшений на кимоно, можно увидеть на японских гравюрах XVIII века. В наше время оригами распространилось по всему миру как искусство.

Одним из восторженных поклонников оригами был Льюис Кэрролл. Крупнейшим современным художником оригами считается Акира Иошидзава из Токио. Им написано несколько книг о любимом искусстве и множество статей.

Прежде чем складывать фигурки, сначала делают необходимые заготовки: получают базовую форму или просто перегибают бумагу.

1.1. Условные знаки

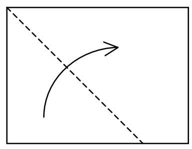


Вставить Разрезать, отрезать

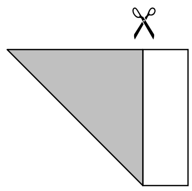
1.2. Изготовление квадрата

Классические оригами складываются из квадратного листа достаточно плотной бумаги. Квадрат для оригами можно приготовить из стандартного листа бумаги размера А4 или А5 или даже просто листика, аккуратно вырванного из обычной тетрадки.

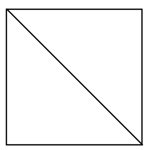
Алгоритм 1. Изготовление квадрата.



1. Согните прямоугольный лист от себя по диагонали так, чтобы *стороны в верху точно совпали*. Прижмите лист по сгибу.



2. Либо отрежьте, либо перегните, разгладьте ногтем и аккуратно оторвите полоску справа.



3. Получится перегнутый по диагонали квадратный лист бумаги.

Отрезанная полоска бумаги может быть в дальнейшем также использована как элемент оригами.

1.3. Базовые формы

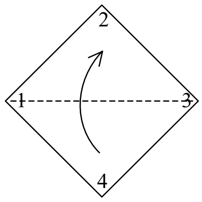
Определение 2. Базовые формы.

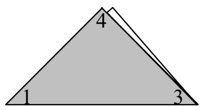
Книжечка.

1. Согните квадрат от себя пополам по горизонтали так, чтобы *противоположные стороны точно совпали*. Прижмите лист по сгибу.

2. Получится базовая форма ***Книжечка***.

Треугольник.

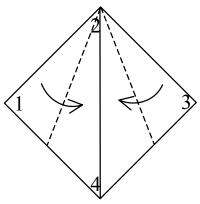


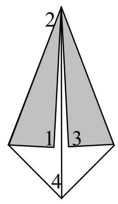


1. Согните квадрат от себя пополам по диагонали так, чтобы *противоположные углы точно совпали*. Прижмите лист по сгибу.

2. Получится базовая форма ***Треугольник***.

Воздушный змей.

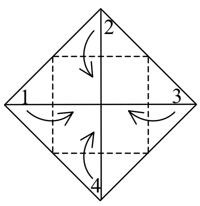


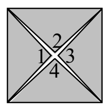


1. Согните квадрат по диагонали. Затем соседние стороны, прилегающие к сгибу, согните так, чтобы края квадрата точно совпали с диагональю. Прижмите сгибы.

2. Получится базовая форма ***Воздушный змей***.

Блинчик.





1. Согните квадрат по обоим

2. Получится

диагоналям. Затем все стороны квадрата согните к центру так, чтобы вершины квадрата точно совпали с его центром. Прижмите сгибы.

базовая форма ***Блинчик***.

§ 2. Классика

Здесь полностью приведено только одно большое классическое гнездо, состоящее из серии 16 фигурок оригами, которые складываются из квадрата перегибами только вдоль сторон и диагоналей.

2.1. Подготовительный этап

Приведем схему взаимосвязи фигурок оригами этого гнезда. На рис. 1 показаны 16 фигурок; фигурки, которые можно непосредственно перевести одну в другую, соединены линией.

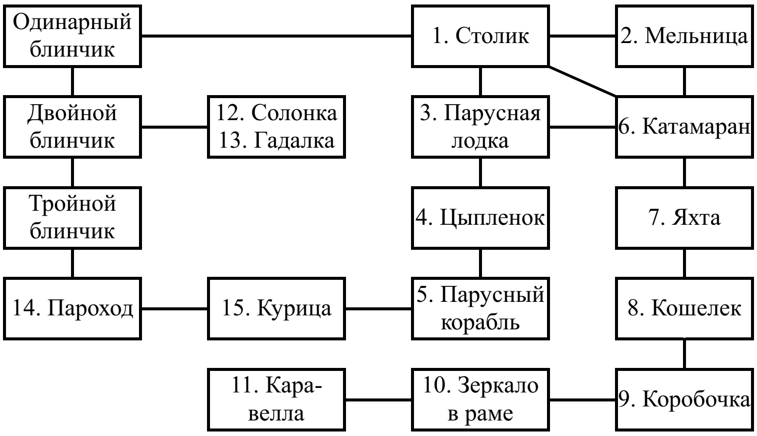
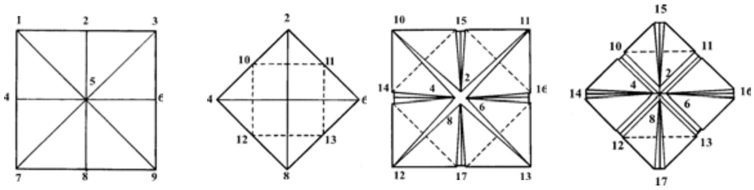


Рис. 1. Взаимосвязь фигурок оригами

Подготовительный этап складывания этих оригами заключается в свертывании исходного квадрата в тройной Блинчик.

Подготовительный этап.



1. Согните квадрат по

2. Сделайте Блинчик, переверните, снова сделайте Блинчик — двойной Блинчик,

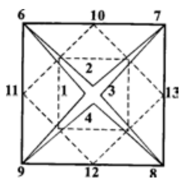
диагоналям и по серединам сторон.

переверните, сделайте тройной Блинчик

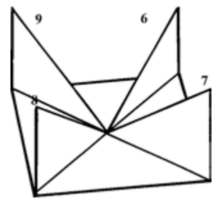
2.2. От Столика до Парусного корабля

Будем следовать по самым легким путям между фигурками. Покажем сначала сборку первых 5 простейших фигурок.

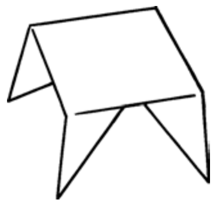
1. ***Столик***.



1. Тройной блинчик разогнем до простого, но сгибы останутся.

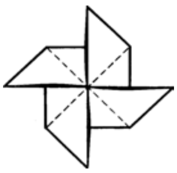


2. Согнем квадрат так, чтобы точки 10—13 сошлись в центре, а углы 6—9 торчали вверх.

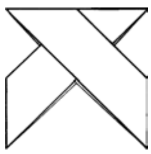


3. Поставим Столик.

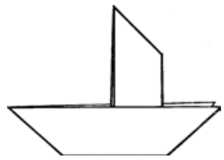
2. ***Мельница***.
3. ***Парусная лодка***.



1. Отогнем у Столика ножки. Будет Мельница.

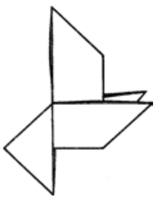


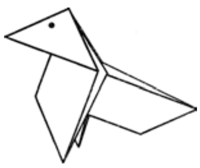
1. Сложим Столик по диагонали,— две ножки поднимутся вверх.

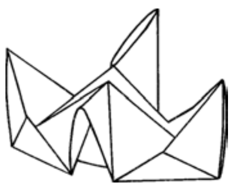


2. Верхние ножки сложим вместе. Получим Парусную лодку.

4. ***Цыпленок***.
5. ***Парусный корабль***.







1. Вывернем нос Парусной лодки наружу и отогнем его вниз.

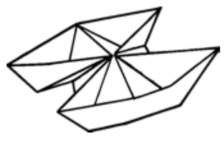
2. Нарисуем два глазика и поставим Цыпленка на ножки.

1. Вывернем также и хвост Цыпленка наружу. Расправим треугольный парус Парусного корабля.

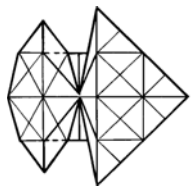
2.3. От Катамарана до Каравеллы

6. ***Катамаран***.

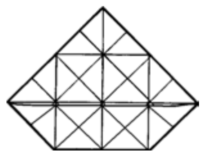
7. ***Яхта***.



1. Перегнем крышку столика книжечкой. Получим Катамаран.

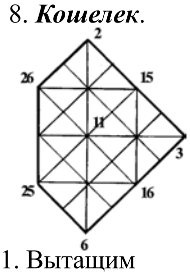


1. Вытащим из одной лодки катамарана большой треугольник.

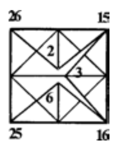


2. Получится Яхта с большим треугольным парусом.

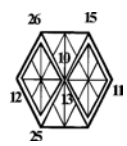
8. ***Кошелек***.



1. Вытащим из Парусного корабля второй большой треугольник и наложим их друг на друга.



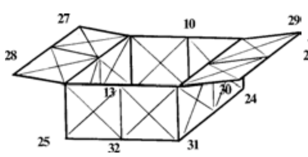
2. У получившейся двухслойной фигуры углы 2, 3 и 6 верхнего слоя отогнем к себе в центр 11, а такие же углы нижнего слоя — от себя.

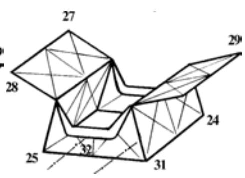


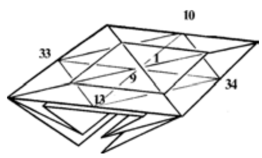
3. Перегнем верхний слой, совместив 15 с 26, 16 с 25. То же проделаем с нижним слоем. Получим Кошелек.

9. ***Коробочка***.

10. ***Зеркало в раме***.







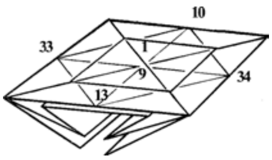
2. Совместим 24 с

1. Потянем боковые стенки Кошелька в стороны. Выпрямив стенки, получим Коробочку.

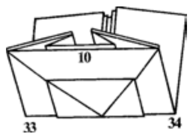
1. Переднюю и заднюю стенки Коробочки отогнем наружу, перегнув стороны коробочки точно посередине (рис. в центре).

29, а 25 с 28. Затем отогнем нижние края стенок вместе с частью дна вниз по штрих- -пунктирным линиям. Имеем Зеркало в раме.

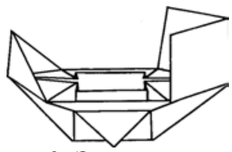
11. ***Каравелла***.



1. Зеркало в раме согнем пополам по линии 33—34 краями вниз и перевернем.



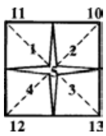
2. Углы 33 и 34 очень осторожно потянем в противоположные стороны. При этом слои фигурки будут сползать друг с друга.



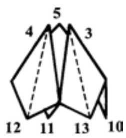
3. Эти слои развернутся в корпус Каравеллы с «трюмом» и «шлюпками». Вытащим «нос» и «корму», «нос» согнем.

2.4. От Солонки до Курицы

12. ***Солонка***.



1. Перевер- нем двойной Блинчик.

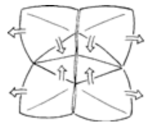


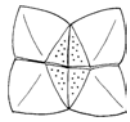
2. Согнем его по диагоналям так, чтобы центр квадрата оказался вверху, а углы 10—13 сошлись внизу.

3. Отогнем концы 1—4, получим Солонку.

Солонка известна также как Гадалка. Ее можно использовать для показа фокуса ***Ловушка для микробов***: наглядной демонстрации, что при чихании или кашле изо рта человека вылетает масса микробов.

13. ***Гадалка (Ловушка для микробов)***.



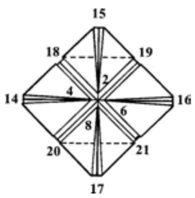


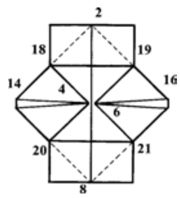
1. Засунем в солонку четыре пальца одной руки.

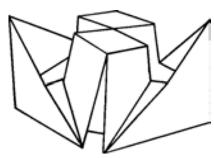
2. Попросите кого-нибудь чихнуть или кашлянуть в Ловушку (не подходя слишком близко). Затем быстро закройте ее, встряхните и раскройте в другом направлении. А там целая толпа мерзких черненьких микробов (нарисованных заранее)!

Чихающий обычно не сразу замечает смену «карманчиков» и с удивлением смотрит на то, что вылетело у него изо рта и было поймано Ловушкой.

14. ***Пароход***.





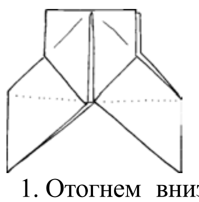


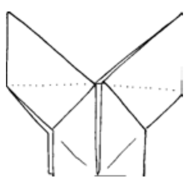
1. Сделаем двойной Блинчик.

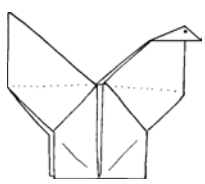
2. Раскроем верхний и нижний квадраты: совместив 2 с 15, а 8 с 17. Прижмем будущие «трубы».

3. Углы 4 и 6 разведем в стороны, одновременно сгибая фигурку по линии 14—16. Получим Пароход.

15. ***Курица***.







1. Отогнем вниз «нос» и «корму» Парохода.

2. Перевернем получившуюся фигурку.

3. Сделаем голову Курице, выгнув один из верхних углов. Нарисуем глазик.

Курица относится к двигающимся оригами, причем к тем, которые движутся рывками, а не плавно. Как ни странно, Курица обычно не описывается в сборниках оригами, но передается в школьной ученической среде.

Возьмите Курицу обеими руками за задние треугольники «ног» и осторожно потяните в стороны. Курица резко «клюнет». Осторожно немного сводя и разводя руки, можно заставить курицу часто «клевать» пшено.

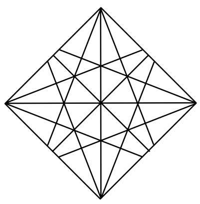
Если взять Курицу не за задние, а за передние треугольники «ног» и потянуть в стороны, то курица «отложит яичко».

§ 3. Журавлик и Чертик

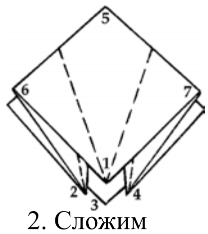
Покажем еще две классические фигурки оригами, при складывании которых используются классические техники.

3.1. Журавлик

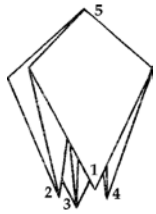
В разных изданиях эта двигающаяся фигурка носит разные названия.



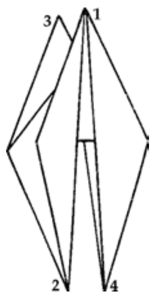
1. Согнем и разогнем квадрат по диагоналям, сделав 2 треугольника, затем сделаем 2 книжечки и 4 воздушных змея.



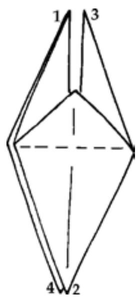
2. Сложим квадрат по готовым линиям так, чтобы получился маленький квадрат на рис.



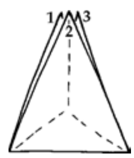
3. Прогнем углы 6 и 7 внутрь по готовым линиям. То же сделаем с другой стороны заготовки.



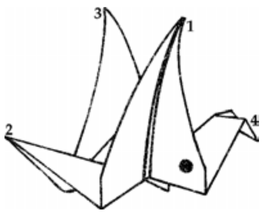
4. Отогнем вверх углы 1 и 3. Разгладим.



5. Перелистнем заготовку. Разгладим.



6. Отогнем наверх передний и задний треугольники. Это будут «крылья» Журавлика.

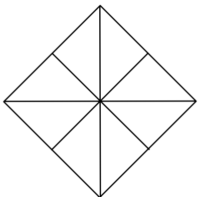


7. Немного прогнем треугольники 2 и 4 ,— это будут «шея» и «хвост». Прогнем угол 4,— получим «голову» Журавлика. Немного отогнем крылья от «хвоста» к «голове».

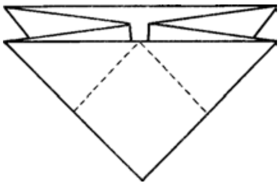
Возьмем одной рукой Журавлика за «грудку» в месте, помеченном точкой, другой осторожно потянем за «хвост» — Журавлик взмахнет «крыльями».

3.2. Чертик

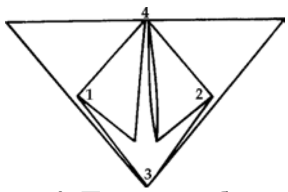
Также достаточно редкая фигурка оригами.



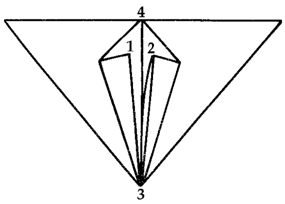
1. Согнем и разогнем квадрат по всем осям симметрии.



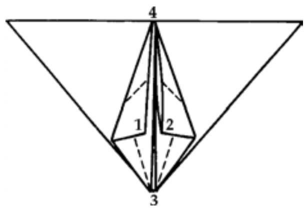
2. Сложим квадрат по готовым линиям так, чтобы получился маленький треугольник на рис.



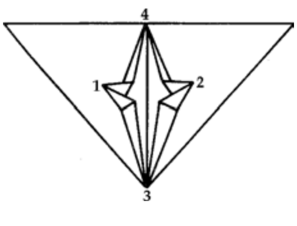
3. Перегнем оба угла верхнего треугольника, совместив их вершины с точкой 3.

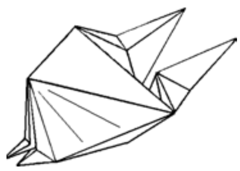


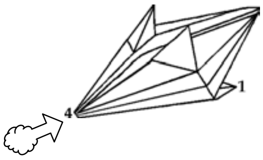
4. Согнем углы 1 и 2, совместив кромки 1—3 и 2—3 с осью 3—4. Разогнем.



5. Снова согнем углы 1 и 2, совместив кромки 1—4 и 2—4 с осью 3—4. Разогнем.







6. Совместим с осью 3—4 все 4 кромки. Получим пару «ушек». Проделаем то же самое с другой стороны.

7. Возьмите рукой ушки 1—2 с одной стороны, аккуратно обхватите губами отверстие 4 и осторожно подуем.

8. При достаточно резком выдохе вверх выскочит Чертик. В дальнейшем его мордочку можно разрисовать.

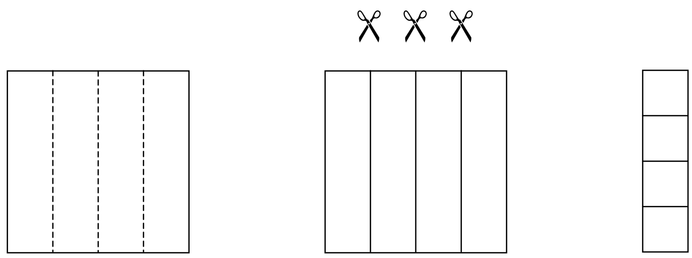
§ 4. Кубики Азакова

В разделе 3.2 главы 3 «Полимино и другие звери» описана игра сома, в которую играют, складывая трехмерные фигуры из кубиков сома. В этом параграфе Приложения подробно расписано, как из бумаги сложить эти элементы.

Автор технологии, по которой складываются эти оригами — Иван Азаков, Россия.

4.1. Полоски

Сначала нужно заготовить много ***Полосок***.



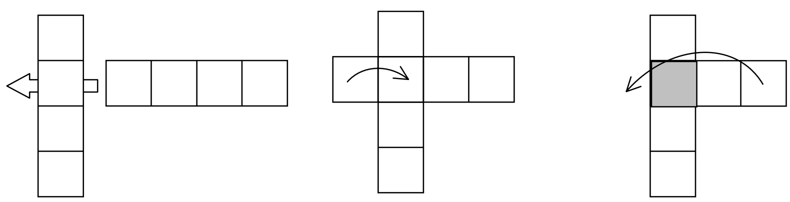
1. Согните квадрат книжечкой, разогните. Затем также согните и разогните каждую половинку.

2. Разрежьте получившийся квадрат по 3 сгибам на 4 Полоски.

3. Согните Полоски пополам, затем снова пополам.

4.2. Модуль

Из двух полосок складывается Модуль.



1. Подсуньте горизонтальную полоску под

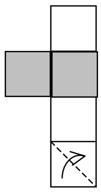
2. Согните левый квадрат нижней Полоски и наложите

3. Согните два правых квадрата нижней Полоски и

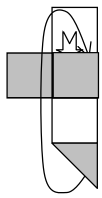
вертикальную, как показано на рис.

его на верхнюю.

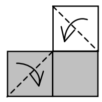
наложите их на верхнюю.



4. Согните нижний квадратик треугольником на себя.



5. Немного раскройте карман, оттянув *два* слоя, и вставьте нижний треугольник до упора.



6. Два квадратика согните треугольниками на себя.

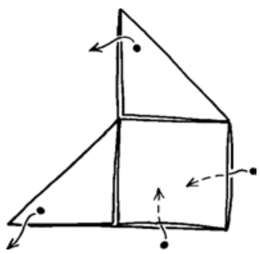
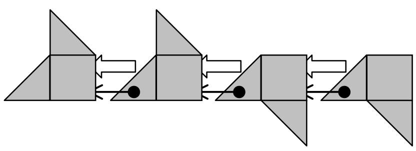


Рис. 1. ***Модуль*** имеет 2 «кармана» и 2 «вставки»

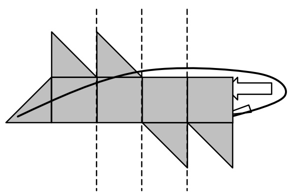
4.3. Кубики

Из Модулей складываются кубики сома и любые элементы, составленные из любого количества одинаковых кубиков.

Для начала соберем из Модулей один ***Кубик***. Для этого потребуется 6 Модулей и 12 Полосок.

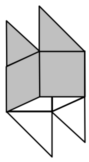


1. Возьмем 4 Модуля и вложим их один в другой до упора так, как



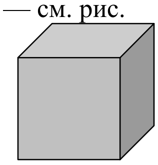
2. Теперь согнем получившуюся фигуру по

показано на рис. При этом «вставки» 2 первых Модулей ориентированы вверх и влево, а «вставки» остальных 2 Модулей — вниз и влево.



3. Получившуюся «коробочку» закроем свсрху Модулем, «вставки» которго, ориентированные назад и вправо, вставим в «карманы» коробочки, а верхние «вставки» коробочки — в «карманы» этого Модуля. Затем закроем «коробочку» снизу вторым Модулем.

указанным линиям сгиба от себя и вложим левую «вставку» первого модуля в правый карман последнего до упора — см. рис.



4. Получим ***Кубик***. «Вставки» его 6 Модулей ориентированы, если смотреть спереди, следующим образом:

1) у переднего Модуля — влево и вверх;

2) у левого — назад и вверх;

3) у заднего — вправо и вниз;

4) у правого — вперед и вниз;

5) у верхнего — назад и вправо;

6) у нижнего — вперед и влево.

Аналогично тому, как собран Кубик, собираются все 7 элементов кубиков сома. При этом их можно собрать так, что Модули, их составляющие, будут ориентированы точно так же, как у Кубика: у всех передних Модулей «вставки» будут ориентированы влево и вверх, у всех левых Модулей — назад и вверх и т. д.

(Попутно доказаны некоторые теоремы из теории графов.)

Чтобы собрать кубик сома, состоящий из 3 кубиков, потребуется 14 модулей. Для сборки каждого из 6 кубиков сома из 4 кубиков потребуется по 18 Модулей. Итого 122 Модуля. Разные кубики сома желательно сложить из Модулей одного какого-то цвета, следав все элементы сома разных цветов.

После этого можно играть в сома (см. раздел 3.2 главы 3 «Полимино и другие звери»).

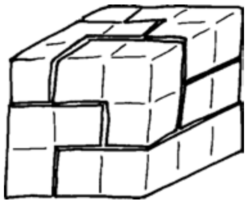


Рис. 2. Куб, собранный из кубиков сома

Литература

[Гарднер 1] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 1999.— 447 с., ил. ISBN 5-03-003340-8. (1-е изд.— 1971.) Книга известного американского популяризатора науки М. Гарднера содержит 46 глав и множество занимательных задач и головоломок из самых различных областей математики.

Некоторые главы. Крестики и нолики. «Ханойская башня». Цифровые корни. Занимательная топология. Лабиринты. Занимательная логика. Магические квадраты. Проблема четырех красок.

[Гарднер 2] Гарднер М. Математические досуги: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.— 444 с., ил. ISBN 5-03-003339-4. (1-е изд.— 1972.) 38 математических миниатюр, вошедших в этот второй том, не менее интересны, чем 46 первого тома. Эти восемьдесят четыре главы практически исчерпывают содержание пяти сборников Гарднера, выпущенных на английском языке и первоначально опубликованных в журнале Scientific American в 1956—1964 годах.

Некоторые главы. Исчисление конечных разностей. Самодельная самообучающаяся машина из спичечных коробков. Игра в солитер. Флатландия. Признаки делимости. Игра в веревочку. От штопора до ДНК. Простые числа. Плоские графы. Игра «Жизнь».

[Гарднер 3] Гарднер М. Математические новеллы: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.— 416 с., ил. ISBN 5-03-003339-4. (1-е изд.— 1974.) Это третий том своеобразной «Энциклопедии математических игр XX века».

Некоторые главы. Тетраэдры в природе и архитектуре. Пентамино и полимино: пять игр и серия задач. Математическое искусство Морица Эшера. Можно ли наглядно представить себе четырехмерную фигуру? Счет на пальцах. Числа Фибоначчи.

[Гарднер 4] Гарднер М. Крестики-нолики / Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.— 352 с., ил. ISBN 5-03-001234-6 (русск.). ISBN 0-7167-1589-9 (англ.). Гарднер остается одним из немногих специалистов (не имея никакой ученой степени), которые в равной мере свободно ориентируются и в математическом анализе, и в теории вероятностей, и в топологии, и в комбинаторике…

Некоторые главы. Иерархия алефов и сверхзадачи. Комбинаторика складывания бумаги. Крестики-нолики, или тик-так-тоу. Складывание многогранников. Игра Хальма. Рекламные призы. Игра «Жизнь».

[Гарднер 5] Гарднер М. Путешествие во времени / Пер. с англ.— М.: Мир, 1990.— 337 с., ил. ISBN 5-03-001166-8 (русск.). ISBN 0-7167-1924-X (англ.). Двенадцатый сборник, составленный по материалам отдела «Математические игры», который автор вел в журнале Scientific American. Как обычно, статьи исправлены, пополнены последними данными и расширены в основном по письмам всезнающих и неугомонных читателей.

Некоторые главы. Танграмы. Анаморфные изображения. Мозаики. Магические квадраты и кубы. Индукция и вероятность. Игры и забавы с микрокалькулятором.

[Гарднер 6] Гарднер М. Математические чудеса и тайны / Пер. с англ.— Минск: Современное слово, 1997.— 128 с., ил. ISBN 985-6388-12-0. (1-е изд.— М.: Наука, 1964.) Фокусы? Да, если хотите; а лучше сказать — эксперименты, основанные на математике, на свойствах фигур и чисел и лишь облеченные в несколько экстравагантную форму. И понять суть иного эксперимента — это значит понять пусть небольшую, но точную математическую закономерность. Вот этой скрытой математичностью и интересна книга.

Глава 1. Математические фокусы с картами. Глава 2. Фокусы с мелкими предметами. Глава 3. Топологические головоломки. Глава 4. Фокусы со специальным снаряжением. Глава 5. Исчезновение фигур. Раздел I. Глава 6. Исчезновение фигур. Раздел II. Глава 7. Головоломки с отвлеченными числами.

[Голомб] Голомб С. В. Полимино / Пер. с англ.— М.: Мир, 1975.— 208 с., ил. Имя С. В. Голомба, известного американского ученого, специалиста в области теории информации и статистики, неотъемлемо от изобретенного им полимино — игры, которая пользуется заслуженным успехом среди любителей занимательной математики во всем мире.

Глава I. Полимино и шахматные доски. Глава II. Составление фигур из полимино. Глава III. Где не размещаются пентамино. Глава IV. Невозможные конструкции и метод перебора. Глава V. Некоторые теоремы о перечислении. Глава VI. Полимино высших порядков и размерностей. Глава VII. Обобщения полимино.

[Докучаева] Игрушки из бумаги и картона / Составитель **Докучаева Н**.— СПб.: Кристалл; Валери СПб., 1997.— 224 с., ил. ISBN 5-85366-077-2. Книга серии «От простого к сложному» научит вас не только делать игрушки из бумаги, но и расскажет, как интересно провести время с детьми, имея под рукой бумагу, ножницы и карандаш.

Игрушки из листа бумаги. Складываем из бумаги. Вырезаем из бумаги. Игрушки из бумаги, картона, скорлупы, проволоки и деревянных палочек. Игры на бумаге и картоне, игры из бумаги и картона. Фокусы с помощью листа бумаги. Головоломки из бумаги и картона. Забавные тени на листе бумаги.

[Доморяд] Доморяд А. П. Математические игры и развлечения.— М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.— 268 с., ил. Классическим и «современным» играм и развлечениям посвящена бóльшая часть этой книги.

Некоторые параграфы. Различные системы счисления. Числовые фокусы. Меледа. Солитер. Магические квадраты. «Задача Иосифа Флавия» и ей подобные. Составление паркетов.

[Карты] Карты. Гадания. Пасьянсы. Фокусы / Сост. Ю. А. Аленков.— Харьков: Фолио; М.: ООО «Издательство АСТ», 2000.— 432 с., ил. ISBN 966-03-0846-9 (Фолио). ISBN 5-17-002743-5 (АСТ). В книгу включено описание около трех десятков популярных азартных и спортивных карточных игр. Особое место уделено дубликатному бриджу, вышедшему на мировую спортивную арену.

Глава 1. Азартные игры. Глава 2. Спортивные игры. Глава 3. Как избежать обмана в карточных играх. Глава 4. Одиночные карточные игры. Пасьянсы. Глава 5. Гадания на картах. Глава 6. Карточные фокусы.

Приложения. 1. Словарь карточных терминов. 2. Международный кодекс дубликатного бриджа. 3. Как найти свой «звездный час». 4. Астральная (звездная) символика игральных карт.

Литература.

[Мациевский] Мациевский С. В. Математическая культура.— Калининград: Издательство КГУ, 2001.— 72 с., ил. ISBN 5-88874-227-9. Математический анализ, алгебра и геометрия изучаются в школе и поэтому не рассматриваются в данном пособии. Предназначено для факультетов с непрофильным курсом математики.

Королева наук. Предисловие. Введение.

ГЛАВА 1. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. § 1. Зарождение математики. § 2. Период элементарной математики. § 3. Период математики переменных величин. § 4. Период современной математики.

ГЛАВА 2. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. § 1. Число. § 2. Теория множеств. § 3. Теория вероятностей. § 4. Теория графов. § 5. Цепь Маркова. § 6. Топология.

ГЛАВА 3. ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ. § 1. Полимино. § 2. Крестики-нолики. § 3. Морской бой. § 4. Игра «Жизнь».

[Хофштадтер] Хофштадтер Д. Р. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда.— Самара: Издательский Дом «Бахрах-М», 2001.— 752 с., ил. ISBN 5-94648-001-4. Американский ученый изобретает остроумные диалоги, обращается к знаменитым парадоксам пространства и времени, находит параллели между картинами Эшера, музыкой Баха и такими разными дисциплинами, как физика, математика, логика, биология, нейрофизиология, психология и дзенбуддизм. Автор размышляет над одной из величайших тайн современной науки: каким образом человеческое мышление пытается постичь самое себя.

Одна из культовых книг XX века.

Праздничное предисловие автора к русскому изданию книги «Гёдель, Эшер, Бах». Обзор. Список иллюстраций. Благодарность.

ЧАСТЬ I. ГЭБ. Интродукция: музыко-логическое приношение. *Трехголосная инвенция.* Глава I. Головоломка MU. *Двухголосная инвенция.* Глава II. Значение и форма в математике. *Соната для Ахилла соло.* Глава III. Рисунок и фон. *Акростиконтрапунктус.* Глава IV. Непротиворечивость, полнота и геометрия. *Маленький гармонический лабиринт.* Глава V. Рекурсивные структуры и процессы. *Канон с интервальным увеличением.* Глава VI. Местонахождение значения. *Хроматическая фантазия и фига.* Глава VII. Исчисление высказываний. *Крабий канон.* Глава VIII. Типографская теория чисел. *Приношение «МУ».* Глава IX. Мумон и Гёдель.

ЧАСТЬ II. ЭГБ. *Прелюдия и...* Глава X. Уровни описания и компьютерные системы. *...и Муравьиная фуга.* Глава XI. Мозг и мысль. *Англо-франко-немецко-русская сюита.* Глава XII. Разум и мысль. *Ария с различными вариациями.* Глава XIII. Блуп, Флуп и Глуп. *Ария в ключе G.* Глава XIV. О формально неразрешимых суждениях ТТЧ и родственных систем. *Праздничная кантататата…* Глава XV. Прыжок из системы. *Благочестивые размышления курильщика табака.* Глава XVI. Авто-реп и авто-реф. *Магнификраб в пирожоре.* Глава XVII. Чёрч, Тьюринг, Тарский и другие. *ШРДЛУ.* Глава XVIII. Искусственный интеллект: взгляд в прошлое. *Контрафактус.* Глава XIX. Искусственный интеллект: виды на будущее. *Канон Ленивца.* Глава XX. Странные Петли или Запутанные Иерархии. *Шестиголосный ричеркар.*

Примечания. Библиография. Источники иллюстраций.